Reel Analiz

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com
Bu çalışma Creative Commons BY-NC-SA 4.0 lisansıyla paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 4 Kasım 2026

İçindekiler

Giriş 6

1 Dış Ölçü ve Ölçülebilir Kümeler 7
1.1 Uzunluk ve Küme Fonksiyonları 7
1.2 Dış Ölçü 7
1.3 Ölçülebilir Kümeler 11
1.4 Alıştırmalar 13

2 Sigma Cebiri ve Borel Kümeleri 18
2.1 Cebirler ve σ-Cebirleri 18
2.2 Borel Kümeleri 20
2.3 Ölçülebilir Kümelerin Cebiri 21
2.4 Ölçülebilir Kümeler Bir σ-Cebiridir 23
2.5 Lebesgue Ölçüsü 26
2.6 Alıştırmalar 26

3 İç ve Dış Yaklaşım 30
3.1 Açık ve kapalı kümelerle yaklaşım 30
3.2 G_δ ve F_σ kümeleriyle yaklaşım 31
3.3 Sonlu sayıda aralıkla yaklaşım 32
3.4 Alıştırmalar 34

4 Toplamsallık ve Süreklilik 38
4.1 Sayılabilir Toplamsallık 38
4.2 Ölçünün Sürekliliği 39
4.3 Borel–Cantelli Lemması ve Hemen Her Yerde 41
4.4 Alıştırmalar 42

5 Ölçülemez Kümeler ve Vitali Kümesi 46
5.1 Rasyonel Denklik ve Seçme Kümeleri 46
5.2 Vitali Teoremi 47
5.3 Alıştırmalar 48

6 Cantor Kümesi ve Cantor Fonksiyonu 51
6.1 Cantor Kümesi 51
6.2 Cantor–Lebesgue Fonksiyonu 53
6.3 Borel Olmayan Ölçülebilir Bir Küme 54
6.4 Alıştırmalar 56

 CC BY-NC-SA 4.0

7 Ölçülebilir Fonksiyonlar . . . 60
7.1 Genişletilmiş Reel Sayılar ve Ters Görüntü . . . 60
7.2 Ölçülebilir Fonksiyon . . . 60
7.3 Kısıtlama ve Hemen Her Yerde Eşitlik . . . 62
7.4 Toplam, Çarpım ve Karakteristik Fonksiyon . . . 63
7.5 Bileşke . . . 65
7.6 Maksimum, Minimum, Pozitif ve Negatif Kısım . . . 65
7.7 Borel Ölçülebilirlik . . . 66
7.8 Alıştırmalar . . . 67

8 Noktasal Limitler ve Yaklaşım . . . 73
8.1 Noktasal Yakınsaklık . . . 73
8.2 Basit Fonksiyonlar . . . 75
8.3 Basit Yaklaşım . . . 76
8.4 Alıştırmalar . . . 78

9 Littlewood, Egoroff ve Lusin Teoremleri . . . 83
9.1 Egoroff Teoremi . . . 83
9.2 Lusin Teoremi . . . 85
9.3 Alıştırmalar . . . 88

10 Riemann İntegraline Karşı Lebesgue İntegrali . . . 92
10.1 Darboux Toplamları ve Riemann İntegrali . . . 92
10.2 Basamak Fonksiyonları . . . 93
10.3 Dirichlet Fonksiyonu . . . 95
10.4 Riemann İntegralinin Sınırlılıkları . . . 96
10.5 Alıştırmalar . . . 96

11 Sınırlı Fonksiyonların İntegrali . . . 101
11.1 Basit Fonksiyonların İntegrali . . . 101
11.2 Sınırlı Fonksiyonların Lebesgue İntegrali . . . 103
11.3 Doğrusallık ve Monotonluk . . . 104
11.4 Riemann İntegraliyle Karşılaştırma . . . 105
11.5 Sınırlı Yakınsaklık Teoremi . . . 107
11.6 Alıştırmalar . . . 109

12 Negatif Olmayan Fonksiyonların İntegrali . . . 113
12.1 Tanım . . . 113
12.2 Chebychev Eşitsizliği . . . 113
12.3 Doğrusallık ve Monotonluk . . . 114
12.4 Fatou Lemması ve Monoton Yakınsaklık . . . 116
12.5 İntegrallenebilirlik . . . 119
12.6 Alıştırmalar . . . 119

 CC BY-NC-SA 4.0

13 Genel Lebesgue İntegrali 126
13.1 Pozitif ve Negatif Kısımlar 126
13.2 İntegrallenebilirlik 126
13.3 Doğrusallık, Monotonluk ve Bölgeye Göre Toplamsallık 127
13.4 Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi 129
13.5 Alıştırmalar 132

14 İntegrasyonun Toplamsallığı 140
14.1 Sayılabilir Toplamsallık 140
14.2 İntegrasyonun Sürekliliği 142
14.3 Alıştırmalar 143

15 Ek Alıştırmalar 150
15.1 Dış Ölçü ve Ölçülebilir Kümeler 150
15.2 Ölçülebilir Fonksiyonlar 151
15.3 Basit ve Sınırlı Fonksiyonların İntegrali 152
15.4 Limit ile İntegralin Yer Değiştirmesi 153
15.5 Genel Lebesgue İntegrali 156

 CC BY-NC-SA 4.0

Giriş

Reel analiz, Riemann integralinin yetersiz kaldığı noktalardan yola çıkarak ölçü kuramını ve Lebesgue integralini inşa eder. Cantor kümesinden Vitali'nin ölçülemez kümesine, Egoroff ve Lusin teoremlerinden yakınsaklık teoremlerine uzanan bu yapı, modern analizin omurgasıdır.
Her bölüm alıştırmalarla biter; her alıştırmanın adım adım çözümü kendi kutusunun içindedir. Reel sayılar, diziler ve süreklilikle ilgili ön bilgiler için Analiz 1'e bakılabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

1. Dış Ölçü ve Ölçülebilir Kümeler

Bir aralığın uzunluğunu herkes bilir; peki rasyonel sayıların, bir Cantor kümesinin ya da bir fonksiyonun pozitif olduğu noktaların kümesinin "uzunluğu" nedir? Riemann integralinin sınırları büyük ölçüde bu sorunun cevapsız kalmasından gelir. Bu bölümde uzunluk kavramını aralıklardan çok daha geniş bir küme ailesine taşımaya başlıyoruz.
Plan iki aşamalıdır. Önce her kümeye bir **dış ölçü** atıyoruz; bu her yerde tanımlıdır ama toplamsal değildir. Sonra toplamsallığın bozulmadığı kümeleri, yani **ölçülebilir kümeleri**, Carathéodory koşuluyla ayırıyoruz.

1.1 Uzunluk ve Küme Fonksiyonları

Uzunluk, kümelere sayı atayan bir kuraldır. Bu bakış açısını ve genişletmeden beklediğimiz özellikleri önce adlandıralım.

Tanım 1.1 (Aralığın Uzunluğu). I reel sayıların bir aralığı olsun. I sınırlıysa ve uç noktaları $a \le b$ ise **uzunluğu** $\ell(I) = b - a$'dır; I sınırsızsa $\ell(I) = \infty$'dur.

Yani uzunluk, uç noktaların açık ya da kapalı olmasına bakmaz: (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ ve $[a,b]$'nin uzunluğu aynıdır.

Tanım 1.2 (Küme Fonksiyonu). Bir kümeler topluluğunun her elemanına bir genişletilmiş reel sayı ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$'un bir elemanını) karşılık getiren fonksiyona **küme fonksiyonu** (set function) denir.

Yani uzunluk, tanım kümesi bütün aralıkların topluluğu olan bir küme fonksiyonudur.

Tanım 1.3 (Sayılabilir Toplamsallık). μ, bir $\mathcal{A}$ topluluğu üzerinde tanımlı ve $[0,\infty]$'da değer alan bir küme fonksiyonu olsun. $\mathcal{A}$'daki kümelerin ayrık ve birleşimi yine $\mathcal{A}$'da olan her sayılabilir $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ topluluğu için

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

oluyorsa μ'ye **sayılabilir toplamsal** (countably additive) denir.

Yani ayrık parçalara bölünen bir kümenin ölçüsü, parçaların ölçülerinin toplamıdır.

Tanım 1.4 (Öteleme Değişmezliği). $E \subseteq \mathbb{R}$ ve $y \in \mathbb{R}$ için E'nin y kadar **ötelemesi** $E + y = \{x + y : x \in E\}$ kümesidir. Bir μ küme fonksiyonunun tanım kümesi ötelemeye kapalıysa ve her E ile her y için $\mu(E + y) = \mu(E)$ oluyorsa μ'ye **öteleme değişmez** (translation invariant) denir.

Yani bir kümeyi kaydırmak onun ölçüsünü değiştirmez.
Aradığımız "uzunluk" m'den üç şey bekliyoruz: her aralık için $m(I) = \ell(I)$ olsun, m öteleme değişmez olsun ve m sayılabilir toplamsal olsun. Bu üç özelliği taşıyan ve $\mathbb{R}$'nin *bütün* alt kümelerinde tanımlı bir küme fonksiyonu yoktur (Ölçülemez Kümeler ve Vitali Kümesi). Bu yüzden önce her kümede tanımlı ama zayıf bir fonksiyon kuracak, sonra onu üç özelliğin birlikte sağlandığı zengin bir aileye kısıtlayacağız.

1.2 Dış Ölçü

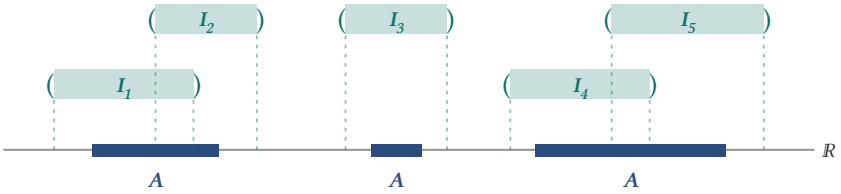
Bir kümenin uzunluğunu dışarıdan tahmin etmenin doğal yolu, onu aralıklarla örtüp aralıkların toplam uzunluğunu olabildiğince küçültmektir.

Tanım 1.5 (Dış Ölçü). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. A'nın **dış ölçüsü** (outer measure)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$m^*(A) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\Big\}$$

sayısıdır; burada infimum, A'yı örten bütün sayılabilir $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ açık, sınırlı aralık toplulukları üzerinden alınır.



Şekil 1.1: Üç parçalı bir A kümesi (kalın) ve onu örten beş açık aralık. Parçaların toplam uzunluğu 1 + 0,4 + 1,5 = 2,9, örtünün toplamı ise 1,1 + 0,8 + 0,8 + 1,1 + 1,2 = 5'tir; fazlalık, aralıkların birbirine ve A'nın dışına taşmasından gelir. Dış ölçü, bütün örtüler üzerinden bu toplamların infimumudur.

Yani $m^*(A)$, A'yı örtmenin "en ucuz" maliyetidir. Değer ∞ olabilir (örneğin hiçbir örtünün toplamı sonlu değilse). Topluluğun sonlu olmasına da izin veririz: sonlu bir örtü, boş aralıklarla ($\ell(\varnothing) = 0$) sayılabilir bir örtüye tamamlanır.
Tanımdan iki özellik hemen çıkar.

Önerme 1.1 (Dış Ölçünün Monotonluğu). *$m^*(\varnothing) = 0$'dır ve $A \subseteq B$ ise $m^*(A) \le m^*(B)$'dir.*

> ***İspat.***
> *Her $\varepsilon > 0$ için $\varnothing \subseteq (0, \varepsilon)$ olduğundan $0 \le m^*(\varnothing) \le \varepsilon$; dolayısıyla $m^*(\varnothing) = 0$.*
> *$A \subseteq B$ ise B'yi örten her aralık topluluğu A'yı da örter. Yani $m^*(A)$'nın infimumunun alındığı sayılar kümesi, $m^*(B)$'ninkini kapsar; daha büyük bir kümenin infimumu daha küçük ya da eşittir.*
> ■

İlk hesabımız, sayılabilir kümelerin dış ölçü açısından "görünmez" olduğunu gösteriyor.

Örnek 1.1 (Sayılabilir Kümenin Dış Ölçüsü). Sayılabilir bir C kümesinin dış ölçüsünün sıfır olduğunu gösterin.

> **Çözüm.**
> $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ diye sıralayalım (sonluysa liste biter). $\varepsilon > 0$ verilsin ve
>
> $$I_k = \Big(c_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, c_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\Big)$$
>
> alalım. $\{I_k\}$ açık, sınırlı aralıklardan oluşan ve C'yi örten bir topluluktur; $\ell(I_k) = \varepsilon/2^k$ olduğundan
>
> $$m^*(C) \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$
>
> $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $m^*(C) = 0$'dır. Örneğin $m^*(\mathbb{Q}) = 0$.
> ■

Asıl sınav, dış ölçünün aralıklarda uzunluğa eşit olmasıdır. Bunun için sonlu örtülerle ilgili bir eşitsizliğe ihtiyacımız var; onu tam sayıları sayarak kanıtlayacağız. Sınırlı bir E kümesindeki tam sayıların sayısını $\mu^{\text{int}}(E)$ ile, $\varepsilon > 0$ için $x \mapsto \varepsilon x$ genişlemesini T_ε ile gösterelim.

Lemma 1.1 (von Neumann Lemması). *Her sınırlı I aralığı için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{\mu^{\text{int}}(T_\varepsilon(I))}{\varepsilon} = \ell(I). \tag{1}$$

İspat.
Adım 1: Tam sayı sayısı. *J, uç noktaları $a \le b$ olan bir aralık olsun. J'deki tam sayılar (a,b)'dekileri içerir ve $[a,b]$'dekilerin içindedir. $[a,b]$'deki tam sayılar $\lceil a\rceil, \ldots, \lfloor b\rfloor$'dur ve sayıları $\lfloor b\rfloor - \lceil a\rceil + 1 \le (b-a)+1$'dir. (a,b)'deki tam sayılar $\lfloor a\rfloor + 1, \ldots, \lceil b\rceil - 1$'dir ve sayıları en az $\lceil b\rceil - \lfloor a\rfloor - 1 \ge (b-a) - 1$'dir. Böylece*

$$\ell(J) - 1 \le \mu^{\text{int}}(J) \le \ell(J) + 1.$$

Adım 2: Limit. *$T_\varepsilon(I)$, uç noktaları εa ve εb olan bir aralıktır ve $\ell(T_\varepsilon(I)) = \varepsilon\,\ell(I)$'dir. Adım 1'i buna uygulayıp ε'a bölersek*

$$\ell(I) - \frac{1}{\varepsilon} \le \frac{\mu^{\text{int}}(T_\varepsilon(I))}{\varepsilon} \le \ell(I) + \frac{1}{\varepsilon}$$

bulunur. $\varepsilon \to \infty$ iken iki uç da $\ell(I)$'ya gider.
■

Yani bir aralığı yeterince büyütüp içindeki tam sayıları saymak, uzunluğunu verir. Sayma ise örtülere çok iyi uyar: bir kümeyi örten kümelerin tam sayıları, o kümenin tam sayılarını kapsar.

Önerme 1.2 (Sonlu Örtünün Uzunluğu). *Sınırlı bir I aralığı, sınırlı aralıklardan oluşan sonlu bir $\{I_k\}_{k=1}^n$ topluluğu tarafından örtülüyorsa*

$$\ell(I) \le \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k)$$

olur.

İspat.
$\varepsilon > 0$ olsun. $I \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k$ olduğundan $T_\varepsilon(I) \subseteq \bigcup_{k=1}^n T_\varepsilon(I_k)$'dır. $T_\varepsilon(I)$'daki her tam sayı en az bir $T_\varepsilon(I_k)$'da bulunduğundan

$$\mu^{\text{int}}(T_\varepsilon(I)) \le \sum_{k=1}^{n} \mu^{\text{int}}(T_\varepsilon(I_k)).$$

İki tarafı ε'a bölüp $\varepsilon \to \infty$ için limit alırsak, sağdaki toplam sonlu olduğundan terim terim limit alınabilir ve Lemma 1.1 istenen eşitsizliği verir.
■

Artık dış ölçünün uzunluğu genişlettiğini gösterebiliriz.

Teorem 1.1 (Aralığın Dış Ölçüsü). *Her I aralığı için $m^*(I) = \ell(I)$'dır.*

İspat.
Adım 1: Kapalı, sınırlı aralık. *$I = [a,b]$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için tek aralıklı $\{(a-\varepsilon, b+\varepsilon)\}$ örtüsü*

$$m^*([a,b]) \le \ell\,\big(\,(a-\varepsilon, b+\varepsilon)\,\big) = b - a + 2\varepsilon$$

verir; dolayısıyla $m^*([a,b]) \le b-a$. Ters eşitsizlik için $[a,b]$'yi örten her sayılabilir $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ açık, sınırlı aralık topluluğunda $\sum_{k=1}^\infty \ell(I_k) \ge b-a$ olduğunu göstermeliyiz. Heine–Borel teoremine göre (bkz. Analiz 1: Kompaktlık ve Heine–Borel) bir n için $[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^n I_k$'dır. Önerme 1.2 ile

$$b - a \le \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: Sınırlı aralık. *I'nın uç noktaları $a \le b$ olsun. $a = b$ ise $I \subseteq [a,a]$ olduğundan monotonlukla (Önerme 1.1) $m^*(I) \le 0 = \ell(I)$. $a < b$ ise $0 < \varepsilon < b-a$ için*

$$J_1 = \left[\, a + \frac{\varepsilon}{3}, b - \frac{\varepsilon}{3} \,\right] \subseteq I \subseteq \left[\, a - \frac{\varepsilon}{3}, b + \frac{\varepsilon}{3} \,\right] = J_2$$

olur. Monotonluk ve Adım 1 ile

$$\ell(I) - \varepsilon < \ell(J_1) = m^*(J_1) \le m^*(I) \le m^*(J_2) = \ell(J_2) < \ell(I) + \varepsilon.$$

ε keyfi olduğundan $m^*(I) = \ell(I)$.
Adım 3: Sınırsız aralık. *Her $n \in \mathbb{N}$ için I, uzunluğu n olan kapalı, sınırlı bir J aralığını içerir. Monotonlukla $m^*(I) \ge m^*(J) = \ell(J) = n$. Bu her n için doğru olduğundan $m^*(I) = \infty = \ell(I)$.*
■

Dış ölçü yalnız aralıkların uzunluğuyla tanımlandığından, kaydırma altında da değişmez.

Teorem 1.2 (Dış Ölçünün Öteleme Değişmezliği). *Her $E \subseteq \mathbb{R}$ ve her $c \in \mathbb{R}$ için $m^*(E+c) = m^*(E)$'dir.*

İspat.
Bir $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ açık, sınırlı aralık topluluğu E'yi örter ancak ve ancak $\{I_k + c\}_{k=1}^{\infty}$ topluluğu $E+c$'yi örter. $I_k + c$ yine açık, sınırlı bir aralıktır ve $\ell(I_k + c) = \ell(I_k)$'dır. Dolayısıyla iki infimumun alındığı toplamlar kümesi aynıdır ve $m^*(E+c) = m^*(E)$ olur.
■

Dış ölçü toplamsal değildir, ama toplam her zaman bir üst sınır verir.

Teorem 1.3 (Sayılabilir Alt Toplamsallık). *$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ayrık olsun ya da olmasın, bir E kümesini örten herhangi bir sayılabilir küme topluluğu ise*

$$m^*(E) \le m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$$

olur.

İspat.
Soldaki eşitsizlik monotonluktan gelir (Önerme 1.1). Bir $m^*(E_k)$ sonsuzsa sağdaki eşitsizlik açıktır; bu yüzden hepsinin sonlu olduğunu varsayalım.
$\varepsilon > 0$ verilsin. Dış ölçünün tanımından her k için

$$E_k \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_{k,i} \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{k,i}) < m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

olan bir $\{I_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$ açık, sınırlı aralık topluluğu vardır. Bütün $I_{k,i}$'lerden oluşan topluluk, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ile indislendiğinden sayılabilirdir ve $\bigcup_k E_k$'yı örter. Terimler negatif olmadığından çift toplam istenen sırada toplanabilir:

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &\le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \ell(I_{k,i}) < \sum_{k=1}^{\infty}\left(m^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

ε keyfi olduğundan sonuç çıkar.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu özelliğe **sayılabilir monotonluk** da denir. Sonlu topluluklar için de geçerlidir: eksik terimler boş kümeyle doldurulur ve $m^*(\varnothing) = 0$'dır.
Toparlarsak, dış ölçü dört özelliğe sahiptir: bütün kümelerde tanımlıdır, aralıklarda uzunluğa eşittir, öteleme değişmezdir ve sayılabilir alt toplamsaldır. Eksik olan toplamsallıktır; bir sonraki kesimin konusu budur.

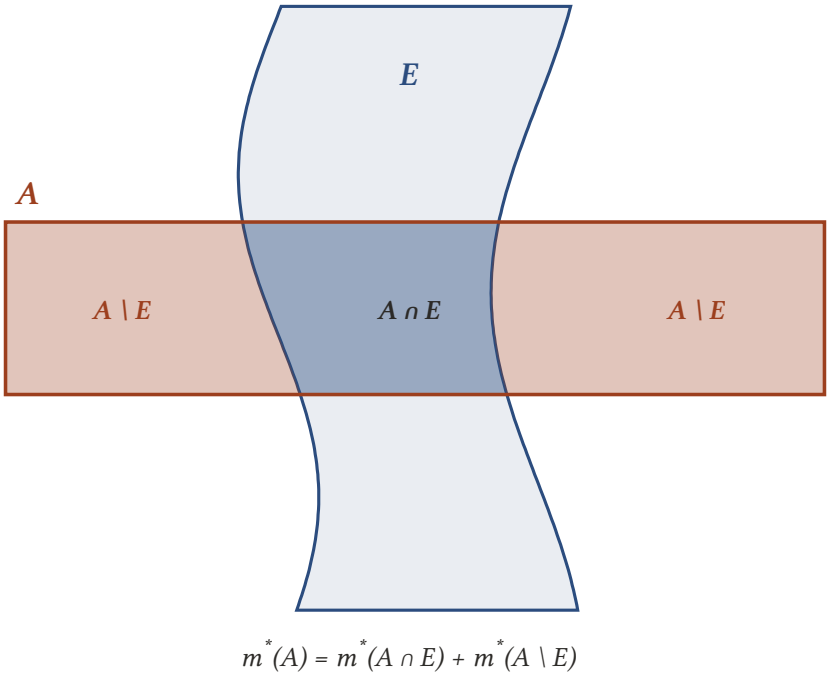
1.3 Ölçülebilir Kümeler

Dış ölçü sonlu toplamsal bile değildir: $m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$ olan ayrık A, B kümeleri vardır (Sonuç 5.1). Çareyi, kendisiyle yapılan her bölmede dış ölçünün toplandığı kümelerde arayacağız.

Tanım 1.6 (Ölçülebilir Küme). Bir $E \subseteq \mathbb{R}$ kümesi, her $A \subseteq \mathbb{R}$ için

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

koşulunu sağlıyorsa E'ye **Lebesgue ölçülebilir** ya da kısaca **ölçülebilir** (measurable) denir. Bu koşula **Carathéodory koşulu** denir. Ölçülebilir kümelerin topluluğu $\mathcal{M}$ ile gösterilir.



Şekil 1.2: Carathéodory koşulunun şeması. E herhangi bir A test kümesini iki parçaya ayırır: E'nin içinde kalan $A \cap E$ ve dışında kalan $A \setminus E$. E ölçülebilirse, A nasıl seçilirse seçilsin bu iki parçanın dış ölçüleri toplanarak $m^*(A)$'yı verir.

Yani E ölçülebilirse, hangi A kümesini E ile ikiye bölersek bölelim, iki parçanın dış ölçüleri toplanır; A'ya "test kümesi" denir. Böylece ayrık iki kümeden biri ölçülebilirse $m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$ olamaz: $E = A$ ve test kümesi $A \cup B$ alınırsa eşitlik çıkar.
Koşulun yarısı her zaman doğrudur, bu da ölçülebilirliği denetlemeyi kolaylaştırır.

Önerme 1.3 (Ölçülebilirlik Ölçütü). *E kümesi ölçülebilirdir ancak ve ancak $m^*(A) < \infty$ olan her A kümesi için*

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \tag{2}$$

olur.

> ***İspat.***

 CC BY-NC-SA 4.0

$A = (A \cap E) \cup (A \setminus E)$ olduğundan sayılabilir alt toplamsallık (Teorem 1.3) her A için

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

verir. Dolayısıyla Carathéodory koşulu (2) ile denktir. $m^*(A) = \infty$ ise (2) kendiliğinden doğrudur; yalnız $m^*(A) < \infty$ olan test kümelerini denetlemek yeter.
■

Carathéodory koşulu E ile $\mathbb{R} \setminus E$ arasında simetriktir, çünkü $A \cap (\mathbb{R} \setminus E) = A \setminus E$ ve $A \setminus (\mathbb{R} \setminus E) = A \cap E$'dir.

Önerme 1.4 (Tümleyenin Ölçülebilirliği). *E ölçülebilirdir ancak ve ancak $\mathbb{R} \setminus E$ ölçülebilirdir. Ayrıca $\varnothing$ ve $\mathbb{R}$ ölçülebilirdir.*

İspat.
Yukarıdaki iki özdeşlikle, $\mathbb{R} \setminus E$ için Carathéodory koşulu

$$m^*(A) = m^*(A \setminus E) + m^*(A \cap E)$$

olur; bu, E için yazılan koşulun aynısıdır. $\mathbb{R}$ için koşul $m^*(A) = m^*(A) + m^*(\varnothing)$'dir ve $m^*(\varnothing) = 0$ olduğundan (Önerme 1.1) doğrudur. $\varnothing = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ olduğundan $\varnothing$ da ölçülebilirdir.
■

İlk somut ölçülebilir kümeler, dış ölçüsü sıfır olanlardır.

Teorem 1.4 (Sıfır Dış Ölçülü Kümeler Ölçülebilirdir). *$m^*(E) = 0$ ise E ölçülebilirdir.*

İspat.
A herhangi bir küme olsun. $A \cap E \subseteq E$ ve $A \setminus E \subseteq A$ olduğundan monotonlukla (Önerme 1.1)

$$m^*(A \cap E) \leq m^*(E) = 0 \quad \text{ve} \quad m^*(A \setminus E) \leq m^*(A).$$

Bu iki eşitsizliği toplarsak (2) eşitsizliği bulunur; Önerme 1.3 ile E ölçülebilirdir.
■

Örneğin her sayılabilir küme (Örnek 1.1) ve dolayısıyla $\mathbb{Q}$ ölçülebilirdir.

Teorem 1.5 (Sonlu Birleşimin Ölçülebilirliği). *Ölçülebilir kümelerin sonlu bir topluluğunun birleşimi ölçülebilirdir.*

İspat.
Adım 1: İki küme. *E_1, E_2 ölçülebilir ve A herhangi bir küme olsun. Önce E_1'in ölçülebilirliğini A test kümesiyle, sonra E_2'ninkini $A \setminus E_1$ test kümesiyle kullanırsak*

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \setminus E_1) \\ &= m^*(A \cap E_1) + m^*\left([A \setminus E_1] \cap E_2 \right) \\ &\quad + m^*\left([A \setminus E_1] \setminus E_2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi iki küme özdeşliğini kullanalım:

$$A \cap [E_1 \cup E_2] = (A \cap E_1) \cup \left([A \setminus E_1] \cap E_2 \right), \qquad [A \setminus E_1] \setminus E_2 = A \setminus [E_1 \cup E_2].$$

Birincisine alt toplamsallığı (Teorem 1.3) uygularsak

$$m^*(A) \geq m^*\left(A \cap [E_1 \cup E_2] \right) + m^*\left(A \setminus [E_1 \cup E_2] \right)$$

elde edilir. Önerme 1.3 ile $E_1 \cup E_2$ ölçülebilirdir.
Adım 2: Tümevarım. *$E_1, \ldots, E_n$ ölçülebilir olsun ve $n-1$ küme için sonuç doğru olsun. $F = \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$ tümevarım varsayımıyla ölçülebilirdir ve $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = F \cup E_n$ iki ölçülebilir kümenin birleşimidir; Adım 1 ile ölçülebilirdir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Tümleyen ve sonlu birleşim altında kapalılık, $\mathcal{M}$'nin bir cebir olduğunu söyler. Sayılabilir birleşimlere geçiş, aralıkların ve açık kümelerin ölçülebilirliği bir sonraki bölümün konusudur.

1.4 Alıştırmalar

İlk üç alıştırmada μ, bir $\mathcal{A}$ σ-cebirindeki (Tanım 2.2) bütün kümelerde tanımlı, $[0,\infty]$'da değer alan ve sayılabilir toplamsal (Tanım 1.3) bir küme fonksiyonudur.

Alıştırma 1.1 (Toplamsal Küme Fonksiyonunun Monotonluğu). μ, bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri üzerinde sayılabilir toplamsal, $[0,\infty]$ değerli bir küme fonksiyonu olsun. $A, B \in \mathcal{A}$ ve $A \subseteq B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ olduğunu gösterin. (Bu özelliğe **monotonluk** denir.)

Çözüm.
Adım 1: Ayrık bir ayrışma. $\mathcal{A}$ bir σ-cebiri olduğundan $B \setminus A \in \mathcal{A}$ ve $\varnothing \in \mathcal{A}$'dır (Önerme 2.1). $E_1 = A$, $E_2 = B \setminus A$ ve $k \geq 3$ için $E_k = \varnothing$ alalım. Bu kümeler ayrıktır ve $A \subseteq B$ olduğundan birleşimleri B'dir.
Adım 2: Toplamsallık. Sayılabilir toplamsallıkla

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \sum_{k=3}^{\infty} \mu(\varnothing).$$

Sağdaki terimlerin hepsi $[0,\infty]$'dadır; negatif olmayan terimleri atmak toplamı büyütmez. Dolayısıyla $\mu(B) \geq \mu(A)$'dır. (Burada $\mu(\varnothing) = 0$ olduğunu bilmemize gerek yoktur.)
■

Alıştırma 1.2 (Boş Kümenin Ölçüsü). μ, bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri üzerinde sayılabilir toplamsal, $[0,\infty]$ değerli bir küme fonksiyonu olsun. $\mu(A) < \infty$ olan bir $A \in \mathcal{A}$ varsa $\mu(\varnothing) = 0$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
$E_1 = A$ ve $k \geq 2$ için $E_k = \varnothing$ alalım. Bu topluluk ayrıktır ve birleşimi A'dır. Sayılabilir toplamsallıkla

$$\mu(A) = \mu(A) + \sum_{k=2}^{\infty} \mu(\varnothing).$$

$\mu(A)$ sonlu bir reel sayı olduğundan iki taraftan çıkarılabilir: $\sum_{k=2}^{\infty} \mu(\varnothing) = 0$. Bu, aynı $\mu(\varnothing) \geq 0$ sayısının sonsuz kez toplamıdır; $\mu(\varnothing) > 0$ olsaydı toplam ∞ olurdu. O hâlde $\mu(\varnothing) = 0$'dır.
■

Alıştırma 1.3 (Toplamsal Küme Fonksiyonunun Alt Toplamsallığı). μ, bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri üzerinde sayılabilir toplamsal, $[0,\infty]$ değerli bir küme fonksiyonu ve $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}$'da (ayrık olması gerekmeyen) bir küme topluluğu olsun.

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
Fikir, topluluğu aynı birleşime sahip ayrık bir topluluğa çevirmektir.
Adım 1: Ayrıklaştırma. $F_1 = E_1$ ve $k \geq 2$ için

$$F_k = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olsun. $\mathcal{A}$ sonlu birleşim ve bağıl tümleyene kapalı olduğundan (Önerme 2.1) her $F_k \in \mathcal{A}$'dır. Ayrıca $F_k \subseteq E_k$'dır.
Adım 2: F_k'lar ayrıktır. $j < k$ ise $F_j \subseteq E_j$ ve $F_k \cap E_j = \varnothing$ olduğundan $F_j \cap F_k = \varnothing$'dır.
Adım 3: Birleşimler aynıdır. $F_k \subseteq E_k$ olduğundan $\bigcup_k F_k \subseteq \bigcup_k E_k$. Tersine $x \in \bigcup_k E_k$ ise $x \in E_k$ olan en küçük k'yı alalım; o zaman $x \in F_k$'dır.
Adım 4: Sonuç. Sayılabilir toplamsallık ve monotonluk (Alıştırma 1.1) ile

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

■

Alıştırma 1.4 (Sayma Ölçüsü). $\mathbb{R}$'nin her E alt kümesi için $c(E)$, E sonsuzsa ∞, E sonluysa E'nin eleman sayısı olsun ($c(\varnothing) = 0$). c'nin sayılabilir toplamsal ve öteleme değişmez bir küme fonksiyonu olduğunu gösterin. (c'ye **sayma ölçüsü** denir.)

Çözüm.
c, $\mathbb{R}$'nin bütün alt kümelerinde tanımlı ve $[0, \infty]$ değerlidir; bu topluluk ötelemeye ve sayılabilir birleşime kapalıdır.
Öteleme değişmezliği. $y \in \mathbb{R}$ olsun. $x \mapsto x + y$ eşlemesi E'den $E + y$'ye bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla E sonluysa $E + y$ aynı sayıda elemana sahiptir, E sonsuzsa $E + y$ de sonsuzdur. Her iki durumda $c(E + y) = c(E)$'dir.
Sayılabilir toplamsallık. $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ayrık olsun ve $E = \bigcup_k E_k$ diyelim. Üç durum vardır.

- *Bir E_k sonsuz.* O zaman $E \supseteq E_k$ de sonsuzdur ve $c(E) = \infty$; sağda da $c(E_k) = \infty$ terimi bulunduğundan $\sum_k c(E_k) = \infty$'dur.
- *Hepsi sonlu, ama sonsuz çoklukta E_k boş değil.* Boş olmayan her E_k'dan bir eleman seçelim; ayrıklık nedeniyle bu elemanlar farklıdır, dolayısıyla E sonsuzdur ve $c(E) = \infty$. Sağda sonsuz çoklukta terim en az 1'dir, toplam da ∞'dur.
- *Yalnız sonlu çoklukta E_k boş değil ve hepsi sonlu.* E, ayrık sonlu kümelerin sonlu birleşimidir. Ortak eleman olmadığından E'nin eleman sayısı, parçaların eleman sayılarının toplamıdır; boş parçalar 0 katkı verir. Yani $c(E) = \sum_k c(E_k)$'dır.

Üç durumda da $c(E) = \sum_{k=1}^{\infty} c(E_k)$ olur.
■

Alıştırma 1.5 (Birim Aralık Sayılamazdır). Dış ölçünün özelliklerini kullanarak $[0, 1]$ aralığının sayılamaz olduğunu gösterin.

Çözüm.
Bir aralığın dış ölçüsü uzunluğu olduğundan (Teorem 1.1) $m^*([0, 1]) = 1$'dir. Öte yandan sayılabilir (sonlu ya da sayılabilir sonsuz) her kümenin dış ölçüsü 0'dır (Örnek 1.1). $[0, 1]$ sayılabilir olsaydı $m^*([0, 1]) = 0 \neq 1$ olurdu. Dolayısıyla $[0, 1]$ sayılamazdır.
■

Alıştırma 1.6 (Birim Aralıktaki İrrasyoneller). A, $[0, 1]$'deki irrasyonel sayıların kümesi olsun. $m^*(A) = 1$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Üst sınır. $A \subseteq [0, 1]$ olduğundan monotonluk (Önerme 1.1) ve Teorem 1.1 ile $m^*(A) \leq m^*([0, 1]) = 1$.
Alt sınır. $Q = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ sayılabilirdir, dolayısıyla $m^*(Q) = 0$'dır (Örnek 1.1). $[0, 1] = A \cup Q$ olduğundan sayılabilir alt toplamsallıkla (Teorem 1.3)

$$1 = m^*([0, 1]) \leq m^*(A) + m^*(Q) = m^*(A).$$

İki sınırdan $m^*(A) = 1$ bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 1.7 (Sınırlı Kümeyi Saran Gδ Kümesi). Sayılabilir sayıda açık kümenin kesişimine G_δ kümesi denir (Tanım 2.6). Her sınırlı E kümesi için $E \subseteq G$ ve $m^*(G) = m^*(E)$ olan bir G_δ kümesi G bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: $m^*(E)$ sonludur. E sınırlı olduğundan bir $M > 0$ için $E \subseteq [-M, M]$'dir; monotonluk ve Teorem 1.1 ile $m^*(E) \leq 2M < \infty$.
Adım 2: Yaklaşan açık kümeler. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Dış ölçünün tanımından (Tanım 1.5) E'yi örten ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) < m^*(E) + \frac{1}{n}$$

olan açık, sınırlı aralıklardan oluşan bir $\{I_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ topluluğu vardır ($m^*(E)$ sonlu olduğundan infimumun hemen üstünde bir toplam bulunur). $\mathcal{O}_n = \bigcup_k I_{n,k}$ açık kümesi E'yi içerir. Alt toplamsallık (Teorem 1.3) ve Teorem 1.1 ile

$$m^*(\mathcal{O}_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_{n,k}) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{n,k}) < m^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Adım 3: Kesişim. $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ sayılabilir sayıda açık kümenin kesişimi olduğundan bir G_δ kümesidir ve her $\mathcal{O}_n$ E'yi içerdiğinden $E \subseteq G$'dir. Her n için $E \subseteq G \subseteq \mathcal{O}_n$ olduğundan monotonlukla

$$m^*(E) \leq m^*(G) \leq m^*(\mathcal{O}_n) < m^*(E) + \frac{1}{n}.$$

$n \to \infty$ için $m^*(G) = m^*(E)$ bulunur.
■

Alıştırma 1.8 (Jordan Uzunluğu). Bir kümenin Jordan uzunluğu, dış ölçü gibi tanımlanır; tek fark, yalnız açık, sınırlı aralıklardan oluşan *sonlu* örtülerin kullanılmasıdır. $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ kümesi açık, sınırlı aralıklardan oluşan sonlu bir $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ topluluğu tarafından örtülüyorsa $\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) \geq 1$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Kapalı aralıklara geçmek. $I_k = (a_k, b_k)$ için $\overline{I_k} = [a_k, b_k]$ olsun. $I_k \subseteq \overline{I_k}$, $\overline{I_k}$ kapalıdır ve $\ell(\overline{I_k}) = b_k - a_k = \ell(I_k)$'dır. $F = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{I_k}$ sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi olduğundan kapalıdır ve $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq F$'dir.
Adım 2: $[0,1] \subseteq F$. $x \in [0,1]$ olsun. Rasyoneller yoğun olduğundan $[0,1]$ içinde x'e yakınsayan bir (q_j) rasyonel dizisi vardır. Her $q_j \in F$ ve F kapalı olduğundan $x \in F$'dir (bkz. Analiz 1: Kapalı Kümeler).
Adım 3: Sonuç. $[0,1]$ sınırlı aralığı, sınırlı $\overline{I_1}, \ldots, \overline{I_n}$ aralıkları tarafından örtülür. Önerme 1.2 ile

$$1 = \ell([0,1]) \leq \sum_{k=1}^{n} \ell(\overline{I_k}) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k).$$

Buna göre $\mathbb{Q} \cap [0,1]$'in Jordan uzunluğu 1'dir (her $\varepsilon > 0$ için tek aralıklı $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ örtüsü üst sınırı verir); oysa dış ölçüsü 0'dır. Sonlu örtüler sayılabilir kümeleri "göremez"; dış ölçünün sayılabilir örtülerle tanımlanmasının nedeni budur.
■

Alıştırma 1.9 (Kapalı Aralıklarla Tanımlanan Dış Ölçü). Dış ölçü, kümeleri açık, sınırlı aralıklar yerine kapalı, sınırlı aralıkların sayılabilir topluluklarıyla örterek tanımlansın. Elde edilen küme fonksiyonunun m^* ile aynı olduğunu gösterin.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yeni fonksiyonu m_c^* ile gösterelim:

$$m_c^*(A) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k) : A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k,\ J_k \ \text{ kapalı, sınırlı}\Big\}.$$

$A \subseteq \mathbb{R}$ sabit olsun.
Adım 1: $m_c^*(A) \le m^*(A)$. $\{(a_k, b_k)\}$, A'yı örten açık, sınırlı aralıklar olsun. $(a_k, b_k) \subseteq [a_k, b_k]$ olduğundan $\{[a_k, b_k]\}$ de A'yı örter ve uzunluklar aynıdır. Yani m^*'ın tanımındaki her toplam, m_c^*'nin tanımında da görünür; bu yüzden $m_c^*(A) \le m^*(A)$.
Adım 2: $m^*(A) \le m_c^*(A)$. $m_c^*(A) = \infty$ ise açıktır. Aksi hâlde $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\{[a_k, b_k]\}$, A'yı örten kapalı, sınırlı aralıklar olsun. Her k için

$$I_k = \Big(a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, b_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \Big) \supseteq [a_k, b_k]$$

açık, sınırlı aralığını alalım; $\ell(I_k) = (b_k - a_k) + \varepsilon/2^k$'dır. $\{I_k\}$ de A'yı örttüğünden

$$m^*(A) \le \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) + \varepsilon.$$

Bu her kapalı örtü için doğru olduğundan sağda infimum alırsak $m^*(A) \le m_c^*(A) + \varepsilon$; ε keyfi olduğundan $m^*(A) \le m_c^*(A)$.
İki adımdan $m_c^* = m^*$'dır.
■

Alıştırma 1.10 (Sıfır Dış Ölçülü Küme Eklemek). $m^*(A) = 0$ ise her B kümesi için $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
$B \subseteq A \cup B$ olduğundan monotonlukla (Önerme 1.1) $m^*(B) \le m^*(A \cup B)$. Öte yandan sayılabilir alt toplamsallık (Teorem 1.3; iki kümeli topluluk boş kümelerle tamamlanır) ile

$$m^*(A \cup B) \le m^*(A) + m^*(B) = m^*(B).$$

İki eşitsizlikten $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ bulunur.
■

Alıştırma 1.11 (Birbirinden Uzak Kümeler). A ve B sınırlı kümeler olsun ve her $a \in A$, $b \in B$ için $|\, a - b \,| \ge \alpha$ olan bir $\alpha > 0$ bulunsun. $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Alt toplamsallık (Teorem 1.3) $m^*(A \cup B) \le m^*(A) + m^*(B)$ verir. Ters eşitsizliği kanıtlayacağız. $A \cup B$ sınırlı olduğundan $m^*(A \cup B) < \infty$'dur. Temel gözlem şudur: uzunluğu α'dan küçük bir aralık hem A'yı hem B'yi kesemez, çünkü $a \in A$ ve $b \in B$ aynı aralıkta olsaydı $|\, a - b \,| < \alpha$ olurdu.
Adım 1: Kısa aralıklı bir örtü. $\varepsilon > 0$ verilsin. $A \cup B$'yi örten ve $\sum_k \ell(I_k) < m^*(A \cup B) + \varepsilon$ olan açık, sınırlı $\{I_k\}$ aralıkları vardır. $I_k = (c, d)$ ve $L = d - c$ olsun. $L/N < \alpha/2$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ seçip $[c, d]$'yi $c = t_0 < t_1 < \dots < t_N = d$ noktalarıyla eşit parçalara bölelim ve

$$\delta_k = \min\Big\{ \frac{\alpha}{4}, \frac{\varepsilon}{2^{k+1} N} \Big\}$$

için $(t_{j-1} - \delta_k, t_j + \delta_k)$ aralıklarını $(j = 1, \dots, N)$ alalım. Bunlar $[c, d] \supseteq I_k$'yı örter; her birinin uzunluğu $L/N + 2\delta_k < \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$'dır ve toplam uzunlukları

$$L + 2N\delta_k \le \ell(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

olur. Bunu her k için yaparsak, $A \cup B$'yi örten, her elemanının uzunluğu α'dan küçük sayılabilir bir $\{J_i\}$ açık, sınırlı aralık topluluğu elde ederiz ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_i \ell(J_i) \le \sum_k \Big(\ell(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \Big) < m^*(A \cup B) + 2\varepsilon.$$

Adım 2: Örtüyü ikiye ayırmak. $\mathcal{J}_A$, A'yı kesen J_i'lerin; $\mathcal{J}_B$, B'yi kesen J_i'lerin topluluğu olsun. Temel gözlem nedeniyle hiçbir J_i iki toplulukta birden bulunmaz. A'nın her noktası bir J_i'dedir ve o J_i, A'yı keser; yani $\mathcal{J}_A$, A'yı örter. Aynı biçimde $\mathcal{J}_B$, B'yi örter. Dış ölçünün tanımıyla (Tanım 1.5)

$$m^*(A) + m^*(B) \le \sum_{J \in \mathcal{J}_A} \ell(J) + \sum_{J \in \mathcal{J}_B} \ell(J) \le \sum_i \ell(J_i) < m^*(A \cup B) + 2\varepsilon.$$

Adım 3: Sonuç. ε keyfi olduğundan $m^*(A) + m^*(B) \le m^*(A \cup B)$; alt toplamsallıkla birlikte eşitlik çıkar.
■

Dış ölçüyü kurduk ve Carathéodory koşuluyla ölçülebilir kümeleri tanımladık. Sıradaki bölüm Sigma Cebiri ve Borel Kümeleri, ölçülebilir kümelerin sayılabilir işlemlere kapalı olduğunu ve bütün Borel kümelerini içerdiğini gösteriyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Sigma Cebiri ve Borel Kümeleri

Carathéodory koşulunu sağlayan kümeleri (Tanım 1.6) ölçülebilir diye adlandırdık ve bunların tümleyen ile sonlu birleşim altında korunduğunu gördük (Teorem 1.5). Bir ölçü kuramı için bu yetmez: limit işlemleri sayılabilir birleşim ve kesişim ister.
Bu bölümde sayılabilir işlemlere kapalı küme ailelerini, yani σ-cebirlerini tanıtıyor, açık kümelerin ürettiği Borel σ-cebirini kuruyor ve ölçülebilir kümelerin bu σ-cebirini içeren bir σ-cebiri olduğunu ispatlıyoruz. Sonunda dış ölçüyü ölçülebilir kümelere kısıtlayarak Lebesgue ölçüsünü tanımlıyoruz.

2.1 Cebirler ve σ-Cebirleri

Bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan ve olağan küme işlemleri altında kapalı kalan aileleri iki düzeyde ele alıyoruz: sonlu işlemler ve sayılabilir işlemler.

Tanım 2.1 (Cebir). X bir küme olsun. X'in alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}$ topluluğu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\mathcal{A}$'ya (X'in alt kümelerinin) bir **cebiri** (algebra) denir:

- $\varnothing \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A}$ ise $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ ise $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$.

Yani cebir, tümleyen ve sonlu birleşim alındığında dışına çıkılmayan bir ailedir. De Morgan özdeşlikleriyle sonlu kesişimlere de kapalıdır.

Tanım 2.2 (σ-Cebiri). X'in alt kümelerinden oluşan bir $\mathcal{A}$ topluluğu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\mathcal{A}$'ya (X'in alt kümelerinin) bir **σ-cebiri** (σ-algebra) denir:

- $\varnothing \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A}$ ise $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Yani σ-cebiri, tümleyen ve sayılabilir birleşim altında kapalı bir ailedir. Uç örnekler iki tanedir: $\{\varnothing, X\}$ her σ-cebirinin içinde kalan en küçük σ-cebiridir; X'in bütün alt kümelerinden oluşan 2^X ise her σ-cebirini içeren en büyük σ-cebiridir.

Önerme 2.1 (σ-Cebirinin Kapalılık Özellikleri). *$\mathcal{A}$, X'in alt kümelerinin bir σ-cebiri olsun. O zaman $X \in \mathcal{A}$'dır ve $\mathcal{A}$ şu işlemler altında kapalıdır: sayılabilir kesişim, sonlu birleşim, sonlu kesişim ve bağıl tümleyen $A_1 \setminus A_2$. Özel olarak her σ-cebiri bir cebirdir.*

> ***İspat.***
> *$X = X \setminus \varnothing$ olduğundan $X \in \mathcal{A}$'dır.*
> ***Sayılabilir kesişim.*** *$A_n \in \mathcal{A}$ olsun. De Morgan özdeşliğiyle*
>
> $$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n).$$
>
> *Her $X \setminus A_n$ tümleyen koşuluyla $\mathcal{A}$'dadır; birleşimleri sayılabilir birleşim koşuluyla, onun tümleyeni de yine tümleyen koşuluyla $\mathcal{A}$'dadır.*
> ***Sonlu birleşim ve kesişim.*** *$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ verilsin. $k > n$ için $A_k = \varnothing$ alırsak $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ olur. $k > n$ için $A_k = X$ alıp sayılabilir kesişime başvurunca sonlu kesişim de $\mathcal{A}$'da kalır.*
> ***Bağıl tümleyen.*** *$A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2)$ iki elemanın kesişimidir, dolayısıyla $\mathcal{A}$'dadır.*
> *Son olarak ilk iki koşul ortak, üçüncüsü de sonlu birleşim kapalılığından geldiği için $\mathcal{A}$ bir cebirdir (Tanım 2.1).*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bir aileyi içeren σ-cebirleri her zaman vardır (2^X bunlardan biridir). Hepsinin kesişimi, o aileyi içeren en ekonomik σ-cebirini verir.

Teorem 2.1 (Üretilen σ-Cebiri). *$\mathcal{F}$, X'in alt kümelerinden oluşan bir topluluk olsun. $\mathcal{F}$'yi içeren bütün σ-cebirlerinin kesişimi $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$'yi içeren bir σ-cebiridir. Üstelik $\mathcal{F}$'yi içeren her σ-cebiri $\mathcal{A}$'yı da içerir; yani $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$'yi içeren en küçük σ-cebiridir.*

> ***İspat.***
> *Σ, $\mathcal{F}$'yi içeren σ-cebirlerinin topluluğu olsun; $2^X \in \Sigma$ olduğundan Σ boş değildir ve $\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{C}\in\Sigma} \mathcal{C}$ anlamlıdır.*
> ***σ-cebiri koşulları.*** *Her $\mathcal{C} \in \Sigma$ σ-cebiri olduğundan $\varnothing \in \mathcal{C}$'dir; o hâlde $\varnothing \in \mathcal{A}$. $A \in \mathcal{A}$ ise A her $\mathcal{C}$'dedir, dolayısıyla $X \setminus A$ de her $\mathcal{C}$'dedir ve $X \setminus A \in \mathcal{A}$ olur. Aynı akıl yürütme sayılabilir birleşimler için de geçerlidir: $A_n \in \mathcal{A}$ ise bütün A_n'ler her $\mathcal{C}$'dedir, birleşimleri de öyledir.*
> ***$\mathcal{F}$'yi içerme.*** *Her $\mathcal{C} \in \Sigma$ için $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ olduğundan $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$'dır.*
> ***En küçüklük.*** *$\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$'yi içeren bir σ-cebiri ise $\mathcal{C} \in \Sigma$ olur ve kesişimin tanımı gereği $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$'dir.*
> ■

Tanım 2.3 (Bir Ailenin Ürettiği σ-Cebiri). $\mathcal{F}$'yi içeren en küçük σ-cebirine $\mathcal{F}$'nin **ürettiği σ-cebiri** (generated σ-algebra) denir ve $\sigma(\mathcal{F})$ ile gösterilir.

Yani $\sigma(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}$'nin elemanlarından tümleyen ve sayılabilir birleşim işlemlerini tekrar tekrar uygulayarak ulaşılabilecek her şeyi içerir; fazlasını içermez. Bir $\mathcal{A}$ σ-cebirinin $\sigma(\mathcal{F})$'yi içerdiğini göstermek için $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ olduğunu göstermek yeter.
Sayılabilir işlemlerin tipik bir ürünü, bir küme dizisinin üst ve alt limitidir.

Tanım 2.4 (Küme Dizisinin Üst ve Alt Limiti). $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, X'in alt kümelerinden oluşan bir dizi olsun. Bu dizinin **üst limiti** (limit superior) ve **alt limiti** (limit inferior)

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Big[\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Big]$$

ve

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big[\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Big]$$

kümeleridir.

Önerme 2.2 (Üst ve Alt Limitin Anlamı). *$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, X'in alt kümelerinden oluşan bir dizi olsun.*

- $\limsup A_n$, *sonsuz çoklukta n indisi için A_n'ye ait olan noktaların kümesidir.*
- $\liminf A_n$, *sonlu çoklukta n indisi dışında bütün A_n'lere ait olan noktaların kümesidir.*

Ayrıca bütün A_n'ler bir $\mathcal{A}$ σ-cebirindeyse $\limsup A_n$ *ve* $\liminf A_n$ *de $\mathcal{A}$'dadır.*

> ***İspat.***
> ***Üst limit.*** *$x \in \limsup A_n$ demek, her k için $x \in \bigcup_{n\geq k} A_n$, yani her k için $x \in A_n$ olan bir $n \geq k$ bulunması demektir. Bu tam olarak $\{n : x \in A_n\}$ kümesinin üstten sınırsız, yani sonsuz olmasıdır.*
> ***Alt limit.*** *$x \in \liminf A_n$ demek, bir k için $x \in \bigcap_{n\geq k} A_n$, yani $n \geq k$ olan her n için $x \in A_n$ olması demektir. Bu da x'in ait olmadığı A_n'lerin indislerinin $\{1, \ldots, k-1\}$ içinde, yani sonlu olmasıdır.*
> ***σ-cebirinde kalma.*** *Her k için $\bigcup_{n\geq k} A_n$ sayılabilir birleşim olarak, $\bigcap_{n\geq k} A_n$ sayılabilir kesişim olarak (Önerme 2.1) $\mathcal{A}$'dadır. Bunların sayılabilir kesişimi ve sayılabilir birleşimi de aynı gerekçeyle $\mathcal{A}$'dadır.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

2.2 Borel Kümeleri

Açık ve kapalı kümeleri Analiz 1'den biliyoruz (bkz. Analiz 1: Komşuluklar ve Açık Kümeler ve Analiz 1: Kapalı Kümeler): açık kümelerin her birleşimi ve sonlu kesişimi açıktır, bir küme ancak ve ancak tümleyeni açıksa kapalıdır. Açık kümelerin sayılabilir kesişimi ise açık olmak zorunda değildir: Arşimet özelliğiyle

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$$

olur ve $\{0\}$ açık değildir. Ölçü kuramında çalışacağımız doğal aile, açık kümeleri içeren ve sayılabilir işlemlere kapalı olan en küçük ailedir.

Tanım 2.5 (Borel Kümeleri). $\mathbb{R}$'nin bütün açık kümelerinin ürettiği σ-cebirine **Borel σ-cebiri** denir ve $\mathcal{B}$ ile gösterilir. $\mathcal{B}$'nin elemanlarına **Borel kümeleri** (Borel sets) denir.

Yani Borel kümeleri, açık kümelerden tümleyen ve sayılabilir birleşim alarak (ve bunları sayılabilir kez tekrarlayarak) elde edilen kümelerdir.

Önerme 2.3 (Kapalı ve Sayılabilir Kümeler Borel Kümesidir). *Her açık küme, her kapalı küme ve her sayılabilir küme bir Borel kümesidir.*

> ***İspat.***
> *Açık kümeler tanım gereği $\mathcal{B}$'dedir. Kapalı bir F kümesinin tümleyeni $\mathbb{R}\setminus F$ açıktır; $\mathcal{B}$ tümleyene kapalı olduğundan $F=\mathbb{R}\setminus(\mathbb{R}\setminus F)\in\mathcal{B}$ olur.*
> *Her tek noktalı küme $\{x\}$ kapalıdır, dolayısıyla Borel kümesidir. Sayılabilir bir $C=\{x_1,x_2,\ldots\}$ kümesi $C=\bigcup_n\{x_n\}$ biçiminde sayılabilir bir birleşimdir, dolayısıyla $\mathcal{B}$'dedir ($C=\varnothing$ ise zaten $\varnothing\in\mathcal{B}$'dir).*
> ■

Açık ile Borel arasındaki ilk basamak, açık kümelerin sayılabilir kesişimleri ve kapalı kümelerin sayılabilir birleşimleridir.

Tanım 2.6 (F_σ ve G_δ Kümeleri). Açık kümelerin sayılabilir bir topluluğunun kesişimi olan kümeye **G_δ kümesi**, kapalı kümelerin sayılabilir bir topluluğunun birleşimi olan kümeye **F_σ kümesi** denir.

Yani G_δ "sayılabilir çoklukta açık kümenin kesişimi", F_σ "sayılabilir çoklukta kapalı kümenin birleşimi" demektir. De Morgan özdeşlikleri gereği bir G_δ kümesinin tümleyeni F_σ, bir F_σ kümesinin tümleyeni G_δ kümesidir. Yukarıdaki $\{0\}$ örneği, açık olmayan bir G_δ kümesidir.

Önerme 2.4 (F_σ ve G_δ Kümeleri Borel Kümesidir). *Her G_δ kümesi ve her F_σ kümesi bir Borel kümesidir. Ayrıca her biri açık ya da kapalı olan kümelerden oluşan bir $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için $\limsup A_n$ ve $\liminf A_n$ Borel kümeleridir.*

> ***İspat.***
> *Açık ve kapalı kümeler Borel kümesidir (Önerme 2.3). $\mathcal{B}$ bir σ-cebiri olduğundan sayılabilir birleşimlere ve sayılabilir kesişimlere kapalıdır (Önerme 2.1); dolayısıyla her G_δ ve her F_σ kümesi $\mathcal{B}$'dedir. Son iddia, bütün A_n'lerin $\mathcal{B}$'de olmasından ve Önerme 2.2'den çıkar.*
> ■

Örnek 2.1 (Kapalı Küme Bir G_δ Kümesidir). Her kapalı $F\subseteq\mathbb{R}$ kümesinin bir G_δ kümesi olduğunu gösterin.

> **Çözüm.**
> $F=\varnothing$ ise F açıktır ve $F=\bigcap_n\varnothing$ yazılabilir. $F\neq\varnothing$ olsun ve her n için
>
> $$\mathcal{O}_n=\bigcup_{y\in F}\left(y-\frac{1}{n},y+\frac{1}{n}\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

tanımlayalım. $\mathcal{O}_n$ açık aralıkların birleşimi olduğundan açıktır ve $F \subseteq \mathcal{O}_n$'dir. Dolayısıyla $F \subseteq \bigcap_n \mathcal{O}_n$ olur.
Tersine $x \in \bigcap_n \mathcal{O}_n$ olsun. Her n için $| x - y_n | < 1/n$ olan bir $y_n \in F$ vardır. Bu durumda x'i içeren her açık aralık, yeterince büyük n için y_n'yi, yani F'den bir noktayı içerir; x, F'nin bir kapanış noktasıdır. F kapalı olduğundan $x \in F$'dir. Böylece $F = \bigcap_n \mathcal{O}_n$ bir G_δ kümesidir.
Tümleyen alarak şunu da elde ederiz: her açık küme bir F_σ kümesidir.
■

Örnek 2.2 (Rasyonel Sayılar Bir F_σ Kümesidir). $\mathbb{Q}$'nun bir F_σ kümesi, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$'nun bir G_δ kümesi olduğunu gösterin.

Çözüm.
$\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan bir numaralaması $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ vardır (bkz. Analiz 1: Sayılabilir Kümeler). Böylece

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$$

olur. Her $\{q_n\}$ kapalıdır, dolayısıyla $\mathbb{Q}$ kapalı kümelerin sayılabilir birleşimi, yani bir F_σ kümesidir. De Morgan özdeşliğiyle

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\mathbb{R} \setminus \{q_n\} \right)$$

olur ve her $\mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ açıktır; $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ bir G_δ kümesidir. Öte yandan $\mathbb{Q}$ açık değildir, çünkü her $q \in \mathbb{Q}$ ve $r > 0$ için $(q - r, q + r)$ aralığı bir irrasyonel sayı içerir. Kapalı da değildir, çünkü her reel sayı rasyonel sayıların bir limitidir; örneğin $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ olduğu hâlde $\sqrt{2}$'ye yakınsayan rasyonel diziler vardır. Yani F_σ sınıfı açık ve kapalı kümelerden gerçekten daha geniştir.
■

2.3 Ölçülebilir Kümelerin Cebiri

Şimdi Carathéodory anlamında ölçülebilir kümelerin topluluğu $\mathcal{M}$'ye dönüyoruz (Tanım 1.6). Tanım E ile $\mathbb{R} \setminus E$ arasında simetrik olduğundan $E \in \mathcal{M}$ ancak ve ancak $\mathbb{R} \setminus E \in \mathcal{M}$'dir; ayrıca $\varnothing$ ve $\mathbb{R}$ ölçülebilirdir. Önce dış ölçünün ölçülebilir kümeler üzerindeki iki kolay özelliğini kaydedelim.

Önerme 2.5 (Çıkarma Özelliği). *$E_0 \subseteq E$, E_0 ölçülebilir ve $m^*(E_0) < \infty$ ise*

$$m^*(E \setminus E_0) = m^*(E) - m^*(E_0)$$

olur.

İspat.
E_0 ölçülebilir olduğundan Carathéodory koşulunu $A = E$ test kümesiyle uygularız:

$$m^*(E) = m^*(E \cap E_0) + m^*(E \setminus E_0) = m^*(E_0) + m^*(E \setminus E_0),$$

çünkü $E_0 \subseteq E$'dir. $m^*(E_0)$ sonlu olduğundan onu iki taraftan çıkarabiliriz. ($m^*(E) = \infty$ ise eşitliğin iki tarafı da ∞'dur.)
■

Bu özelliğe **çıkarma özelliği** (excision property) denir. $m^*(E_0) < \infty$ koşulu, $\infty - \infty$ gibi anlamsız bir ifadeden kaçınmak içindir.

Sonuç 2.1 (Ölçülebilir Kümeler Bir Cebirdir). *$\mathcal{M}$, $\mathbb{R}$'nin alt kümelerinin bir cebiridir.*

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\varnothing \in \mathcal{M}$'dir, $\mathcal{M}$ tümleyene kapalıdır ve Teorem 1.5 gereği sonlu birleşimlere kapalıdır. Bunlar Tanım 2.1'deki üç koşuldur.
■

Carathéodory koşulunun asıl kazancı toplamsallıktır: ayrık ölçülebilir kümeler bir test kümesini dış ölçüsünü bölmeden parçalar.

Lemma 2.1 (Sonlu Toplamsallık). *A herhangi bir küme ve $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ ölçülebilir kümelerin sonlu, ayrık bir topluluğu ise*

$$m^*\left(A \cap \Big[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big]\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)$$

olur. Özel olarak ($A = \mathbb{R}$ alınarak)

$$m^*\Big(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} m^*(E_k).$$

İspat.
n üzerinde tümevarım yapıyoruz. $n = 1$ için eşitlik açıktır. İddia $n-1$ küme için doğru olsun ve $U = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ diyelim.
Adım 1. *Kümeler ayrık olduğundan*

$$(A \cap U) \cap E_n = A \cap E_n, \qquad (A \cap U) \setminus E_n = A \cap \Big[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\Big].$$

Adım 2. *E_n ölçülebilir olduğundan Carathéodory koşulunu $A \cap U$ test kümesiyle uygularız ve tümevarım varsayımını kullanırız:*

$$\begin{aligned} m^*(A \cap U) &= m^*(A \cap E_n) + m^*\left(A \cap \Big[\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\Big]\right) \\ &= m^*(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{n-1} m^*(A \cap E_k) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k). \end{aligned}$$

■

Sayılabilir birleşimlere geçmek için birleşimi ayrık parçalara bölmek işimize yarayacak.

Tanım 2.7 (Ölçülebilir Ayrışma). E'nin ölçülebilir alt kümelerinden oluşan sayılabilir, ayrık bir $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ topluluğu $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ koşulunu sağlıyorsa bu topluluğa E'nin bir **ölçülebilir ayrışması** (measurable disjoint decomposition) denir.

Yani E'yi, her biri ölçülebilir ve ikişer ikişer ayrık, sayılabilir çoklukta parçaya bölüyoruz.

Lemma 2.2 (Birleşimi Ayrık Parçalara Bölme). *$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, ölçülebilir kümelerin sayılabilir bir birleşimi olsun. O zaman her k için $E'_k \subseteq E_k$ olan bir $\{E'_k\}_{k=1}^{\infty}$ ölçülebilir ayrışması vardır.*

İspat.
$E'_1 = E_1$ ve $k \geq 2$ için

$$E'_k = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j$$

tanımlayalım.
Ölçülebilirlik. *$\bigcup_{j<k} E_j$ ölçülebilir kümelerin sonlu birleşimi olarak ölçülebilirdir. $\mathcal{M}$ bir cebir olduğundan (Sonuç 2.1) $E'_k = E_k \cap (\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j<k} E_j)$ de ölçülebilirdir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Ayrıklık. *$j < k$ ise $E'_j \subseteq E_j$ ve $E'_k \cap E_j = \varnothing$ olduğundan $E'_j \cap E'_k = \varnothing$'dir.*
Birleşim. *$E'_k \subseteq E_k$ olduğundan $\bigcup_k E'_k \subseteq E$'dir. Tersine $x \in E$ ise $x \in E_k$ olan en küçük k'yı alalım; x hiçbir E_j $(j < k)$ kümesinde olmadığından $x \in E'_k$'dir.*
■

2.4 Ölçülebilir Kümeler Bir σ-Cebiridir

Cebir olmaktan σ-cebiri olmaya geçmek için geriye yalnız sayılabilir birleşimler kalıyor.

Teorem 2.2 (Sayılabilir Birleşimin Ölçülebilirliği). *Ölçülebilir kümelerin sayılabilir bir topluluğunun birleşimi ölçülebilirdir.*

İspat.
E, ölçülebilir kümelerin sayılabilir bir birleşimi olsun. Lemma 2.2 gereği E'nin bir $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ölçülebilir ayrışması vardır. $A \subseteq \mathbb{R}$ rastgele bir küme olsun; Carathéodory koşulunun zor yarısı olan

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

eşitsizliğini göstermek yeter (öbür yarısı alt toplamsallıktan gelir, Teorem 1.3).
Adım 1. *Her n için $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ ölçülebilirdir (Teorem 1.5) ve $F_n \subseteq E$'dir, yani $A \setminus E \subseteq A \setminus F_n$. Dış ölçünün monotonluğuyla*

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \setminus F_n) \geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \setminus E).$$

Adım 2. *Lemma 2.1 gereği*

$$m^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)$$

olur. Böylece her n için

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \setminus E).$$

Sol taraf n'ye bağlı olmadığından $n \to \infty$ için

$$m^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k) + m^*(A \setminus E).$$

Adım 3. *$A \cap E = \bigcup_k (A \cap E_k)$ olduğundan sayılabilir alt toplamsallıkla (Teorem 1.3) $\sum_k m^*(A \cap E_k) \geq m^*(A \cap E)$'dir. Bunu Adım 2'de yerine koyunca istenen eşitsizlik çıkar; E ölçülebilirdir.*
■

Açık kümelerin ölçülebilirliğine geçmeden önce onların yapısını belirleyelim: her açık küme, ayrık açık aralıklara ayrışır.

Lemma 2.3 (Açık Kümelerin Yapısı). *Boş olmayan her açık $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}$ kümesi, açık aralıklardan oluşan sayılabilir, ayrık bir topluluğun birleşimidir.*

İspat.
Adım 1: Her noktanın en büyük aralığı. *$x \in \mathcal{O}$ olsun. $\mathcal{O}$ açık olduğundan $(x - r, x + r) \subseteq \mathcal{O}$ olan bir $r > 0$ vardır. Genişletilmiş reel sayılarda*

$$a_x = \inf\{a < x : (a, x] \subseteq \mathcal{O}\}, \qquad b_x = \sup\{b > x : [x, b) \subseteq \mathcal{O}\}$$

tanımlayalım ve $I_x = (a_x, b_x)$ diyelim. $a_x < y \leq x$ ise $a < y$ ve $(a, x] \subseteq \mathcal{O}$ olan bir a vardır, dolayısıyla $y \in \mathcal{O}$'dur; sağ taraf için de aynısı geçerlidir. Böylece $x \in I_x \subseteq \mathcal{O}$'dur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: Uç noktalar $\mathcal{O}$'da değildir. *a_x sonlu olsun ve $a_x \in \mathcal{O}$ varsayalım. Bir $s > 0$ için $(a_x - s, a_x + s) \subseteq \mathcal{O}$'dur; infimum tanımından $(a, x] \subseteq \mathcal{O}$ olan bir $a < a_x + s$ vardır. O zaman $(a_x - s, x] \subseteq \mathcal{O}$ olur ve bu a_x'in infimum olmasıyla çelişir. Aynı akıl yürütmeyle sonlu bir b_x de $\mathcal{O}$'da değildir.*
Adım 3: Ayrıklık. *$x, y \in \mathcal{O}$ ve $I_x \cap I_y \neq \varnothing$ olsun. $a_y < a_x$ olsaydı, I_y aralığı a_x'in solunda bir nokta ile I_x'e ait (dolayısıyla a_x'in sağında kalan) bir nokta içerdiğinden $a_x \in I_y \subseteq \mathcal{O}$ olurdu; bu Adım 2 ile çelişir. Simetrik olarak $a_x < a_y$ de olamaz; $a_x = a_y$'dir. Aynı biçimde $b_x = b_y$ ve $I_x = I_y$ bulunur. Yani iki aralık ya aynıdır ya ayrıktır.*
Adım 4: Sayılabilirlik. *Farklı aralıkların topluluğu $\{I_x : x \in \mathcal{O}\}$ ayrıktır ve birleşimi $\mathcal{O}$'dur. Her aralıkta bir rasyonel sayı seçelim (rasyoneller yoğundur); ayrıklık nedeniyle farklı aralıklar farklı rasyonellere gider. Bu bire-bir eşleme $\mathbb{Q}$'ya gittiğinden topluluk sayılabilirdir (bkz. Analiz 1: Sayılabilir Kümeler).*
■

Teorem 2.3 (Aralıklar Ölçülebilirdir). *Her aralık ölçülebilirdir.*

İspat.
Adım 1: $E = (a, \infty)$ ölçülebilirdir. *A rastgele bir küme olsun;*

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

göstereceğiz. $m^*(A) = \infty$ ise söylenecek bir şey yoktur; $m^*(A) < \infty$ olsun.
Önce $a \notin A$ olduğunu varsayalım. $A_1 = A \cap (-\infty, a) = A \setminus E$ ve $A_2 = A \cap (a, \infty) = A \cap E$ diyelim. A'yı örten açık, sınırlı aralıklardan oluşan sayılabilir bir $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ topluluğu alalım ve

$$I_k' = I_k \cap (-\infty, a), \qquad I_k'' = I_k \cap (a, \infty)$$

diyelim. Bunlar açık, sınırlı aralıklardır (boş olabilirler; boş olanların uzunluğu 0'dır ve atılabilirler). I_k ile $I_k' \cup I_k''$ en çok a noktasında ayrıldığından $\ell(I_k) = \ell(I_k') + \ell(I_k'')$'dir. $\{I_k'\}$ ailesi A_1'i, $\{I_k''\}$ ailesi A_2'yi örttüğünden dış ölçünün tanımıyla (Tanım 1.5)

$$\begin{aligned} m^*(A_1) + m^*(A_2) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k') + \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k'') \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k). \end{aligned}$$

Bu her örtü için geçerli olduğundan örtüler üzerinden infimum alınca $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$ bulunur.
Şimdi $a \in A$ olsun ve $A' = A \setminus \{a\}$ diyelim. $a \notin E$ olduğundan $A \cap E = A' \cap E$'dir. Ayrıca $A \setminus E = (A' \setminus E) \cup \{a\}$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\{a\}$ kümesi uzunluğu 2ε olan $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığıyla örtüldüğünden $m^*(\{a\}) = 0$'dır (Tanım 1.5). Buradan alt toplamsallıkla $m^*(A \setminus E) \leq m^*(A' \setminus E)$ olur. A' için kanıtlanan eşitsizlik ve monotonlukla

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E) \leq m^*(A' \cap E) + m^*(A' \setminus E) \leq m^*(A') \leq m^*(A).$$

Adım 2: Bütün aralıklar. *$\mathcal{M}$ bir σ-cebiridir: Sonuç 2.1 ile bir cebirdir ve Teorem 2.2 ile sayılabilir birleşimlere kapalıdır. Tümleyen alarak $(-\infty, b] \in \mathcal{M}$, sayılabilir birleşimle*

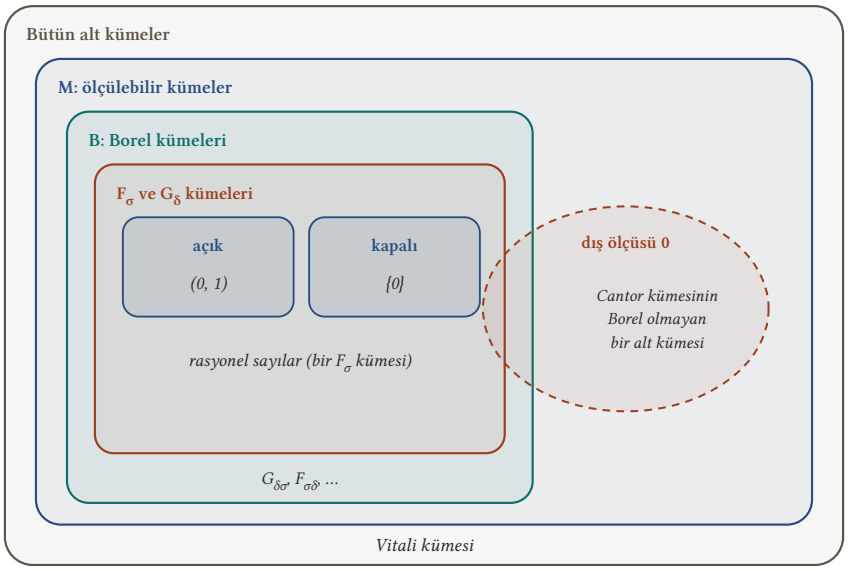
$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(-\infty, b - \frac{1}{n} \Big] \in \mathcal{M},$$

yeniden tümleyen alarak $[a, \infty) \in \mathcal{M}$ bulunur. Sınırlı aralıklar bunların kesişimleridir, örneğin $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ ve $[a, b] = [a, \infty) \cap (-\infty, b]$; yarı açık aralıklar da benzer biçimde yazılır. $\mathbb{R}$ ve $\varnothing$ zaten ölçülebilirdir. Kesişimler Önerme 2.1 gereği $\mathcal{M}$'de kalır.
■

Artık bölümün ana sonucunu toplayabiliriz.

Teorem 2.4 (Ölçülebilir Kümelerin σ-Cebiri). *Ölçülebilir kümelerin topluluğu $\mathcal{M}$, Borel σ-cebiri $\mathcal{B}$'yi ve dış ölçüsü sıfır olan bütün kümeleri içeren bir σ-cebiridir.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.1: Alt küme ailelerinin kapsama şeması. Açık ve kapalı kümeler hem F_σ hem G_δ kümeleridir; bunlar Borel σ-cebiri $\mathcal{B}$'nin içindedir. $\mathcal{M}$ ise $\mathcal{B}$'yi ve dış ölçüsü sıfır olan bütün kümeleri (kesikli bölge) içerir. Her katmanda birer örnek: (0, 1), {0}, $\mathbb{Q}$, Cantor kümesinin Borel olmayan bir alt kümesi ve ölçülemeyen Vitali kümesi.

> ***İspat.***
> ***σ-cebiri.*** *$\mathcal{M}$ bir cebirdir (Sonuç 2.1) ve sayılabilir birleşimlere kapalıdır (Teorem 2.2); bu, Tanım 2.2'deki koşullardır.*
> ***Açık kümeler.*** *Boş olmayan açık bir küme, açık aralıkların sayılabilir birleşimidir (Lemma 2.3). Her aralık ölçülebilir (Teorem 2.3) ve $\mathcal{M}$ sayılabilir birleşimlere kapalı olduğundan her açık küme ölçülebilirdir.*
> ***Borel kümeleri.*** *$\mathcal{M}$, bütün açık kümeleri içeren bir σ-cebiridir. $\mathcal{B}$ bu özellikteki en küçük σ-cebiri olduğundan (Teorem 2.1) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$'dir.*
> ***Sıfır ölçülü kümeler.*** *Dış ölçüsü sıfır olan her küme ölçülebilirdir (Teorem 1.4).*
> ■

Yani ölçülebilirlik, pratikte karşılaşılan her kümeyi kapsayacak kadar geniştir: açık ve kapalı kümeler, F_σ ve G_δ kümeleri, onların sayılabilir birleşim ve kesişimleri. İki kapsama da kesindir: Borel kümesi olmayan ölçülebilir kümeler vardır (Teorem 6.4) ve ölçülebilir olmayan kümeler vardır (Teorem 5.1).

Sonuç 2.2 (F_σ ve G_δ Kümeleri Ölçülebilirdir). *Her açık küme, her kapalı küme, her F_σ kümesi ve her G_δ kümesi ölçülebilirdir.*

> ***İspat.***
> *Bu kümelerin hepsi Borel kümesidir (Önerme 2.3, Önerme 2.4) ve $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$'dir (Teorem 2.4).*
> ■

Dış ölçü ötelemeyle değişmiyordu (Teorem 1.2). Carathéodory koşulu yalnız dış ölçüyle yazıldığından ölçülebilirlik de ötelemeyle bozulmaz.

Teorem 2.5 (Ölçülebilirliğin Öteleme Altında Korunması). *E ölçülebilir ve $c \in \mathbb{R}$ ise $E + c = \{x + c : x \in E\}$ kümesi de ölçülebilirdir.*

> ***İspat.***
> *A rastgele bir küme olsun. Öteleme bire-bir ve örten olduğundan*
>
> $$(A - c) \cap E = \big(\, A \cap [E + c] \,\big) - c, \qquad (A - c) \setminus E = \big(\, A \setminus [E + c] \,\big) - c$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Dış ölçünün öteleme değişmezliğini (Teorem 1.2) ve E'nin ölçülebilirliğini $A-c$ test kümesiyle kullanırsak

$$\begin{aligned} m^*(A) = m^*(A-c) &= m^*\left(\,[A-c]\cap E\,\right) + m^*\left(\,[A-c]\setminus E\,\right) \\ &= m^*\left(\,A\cap[E+c]\,\right) + m^*\left(\,A\setminus[E+c]\,\right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu, $E+c$ için Carathéodory koşuludur.
■

2.5 Lebesgue Ölçüsü

Dış ölçü bütün kümelerde tanımlı ama toplamsal değildir; ölçülebilir kümelere kısıtlandığında ise sonlu toplamsaldır (Lemma 2.1). Bu kısıtlamaya ayrı bir ad veriyoruz.

Tanım 2.8 (Lebesgue Ölçüsü). Dış ölçünün ölçülebilir kümelerin σ-cebiri $\mathcal{M}$'ye kısıtlanmasına **Lebesgue ölçüsü** (Lebesgue measure) ya da kısaca **ölçü** denir ve m ile gösterilir: $E \in \mathcal{M}$ için

$$m(E) = m^*(E).$$

Yani m, m^*'ın ta kendisidir; yalnız tanım kümesi ölçülebilir kümelerle sınırlanmıştır. Şimdiye kadar gördüklerimizden m'nin şu özellikleri hemen çıkar: her I aralığı için $m(I) = \ell(I)$ (Teorem 2.3 ve Teorem 1.1); her ölçülebilir E ve $c \in \mathbb{R}$ için $m(E+c) = m(E)$ (Teorem 2.5 ve Teorem 1.2); ayrık ölçülebilir kümelerin sonlu birleşiminde ölçüler toplanır (Lemma 2.1); ve Önerme 2.5′daki çıkarma özelliği geçerlidir. Sayılabilir toplamsallık Toplamsallık ve Süreklilik bölümünde gelecek.

Örnek 2.3 (Bir Aralıktaki İrrasyonellerin Ölçüsü). $E = [0,2]\setminus\mathbb{Q}$ kümesinin ölçülebilir olduğunu gösterin ve $m(E)$'yi bulun.

Çözüm.
$E_0 = [0,2]\cap\mathbb{Q}$ sayılabilir bir kümedir, dolayısıyla Borel kümesidir (Önerme 2.3) ve ölçülebilirdir (Teorem 2.4). $[0,2]$ de ölçülebilir olduğundan (Teorem 2.3), $\mathcal{M}$ bağıl tümleyene kapalı olduğu için (Önerme 2.1) $E = [0,2]\setminus E_0$ ölçülebilirdir.
Sayılabilir bir kümenin dış ölçüsü sıfırdır: $E_0 = \{q_1, q_2, \ldots\}$ ise alt toplamsallıkla (Teorem 1.3) $m^*(E_0) \le \sum_n m^*(\{q_n\}) = 0$ olur; burada her n için $m^*(\{q_n\}) = 0$'dır, çünkü $\{q_n\}$ her $\varepsilon > 0$ için uzunluğu 2ε olan bir aralıkla örtülür (Tanım 1.5). $m(E_0) = 0 < \infty$ olduğundan çıkarma özelliği (Önerme 2.5) uygulanır:

$$m(E) = m([0,2]) - m(E_0) = 2 - 0 = 2.$$

Yani $[0,2]$'nin bütün "uzunluğu" irrasyonellerde toplanmıştır.
■

2.6 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar σ-cebirlerinin kapalılık özelliklerini ve ölçülebilir kümelerle hesap yapmayı pekiştirir.

Alıştırma 2.1 (Sağ Işınları İçeren σ-Cebiri). $\mathbb{R}$'nin alt kümelerinin bir σ-cebiri (a,∞) biçimindeki bütün aralıkları içeriyorsa bütün aralıkları içerdiğini gösterin.

Çözüm.
$\mathcal{A}$ böyle bir σ-cebiri olsun. $\mathcal{A}$ tümleyene, sayılabilir birleşime ve sayılabilir kesişime kapalıdır (Önerme 2.1). Aralıkları adım adım elde edelim; $a < b$ reel sayılardır.
Adım 1: Sol kapalı ışınlar. $(-\infty, b] = \mathbb{R}\setminus(b,\infty)$ olduğundan $(-\infty,b]\in\mathcal{A}$'dır.
Adım 2: Sol açık ışınlar. Arşimet özelliğiyle $x < b$ ise bir n için $x \le b - 1/n$ olur; dolayısıyla

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\Big(-\infty, b - \frac{1}{n}\Big]$$

 CC BY-NC-SA 4.0

sayılabilir birleşimdir ve Adım 1 gereği $\mathcal{A}$'dadır.
Adım 3: Sağ kapalı ışınlar. $[a,\infty) = \mathbb{R}\setminus(-\infty,a)$ olduğundan $[a,\infty)\in\mathcal{A}$'dır.
Adım 4: Sınırlı aralıklar. Her sınırlı aralık bir sağ ışınla bir sol ışının kesişimidir:

$$\begin{aligned}(a,b) &= (a,\infty)\cap(-\infty,b),\\ [a,b] &= [a,\infty)\cap(-\infty,b],\\ (a,b] &= (a,\infty)\cap(-\infty,b],\\ [a,b) &= [a,\infty)\cap(-\infty,b).\end{aligned}$$

Sağ taraftaki kümeler $\mathcal{A}$'da olduğundan kesişimleri de $\mathcal{A}$'dadır. Tek noktalı $[a,a]=[a,\infty)\cap(-\infty,a]$ de aynı biçimde elde edilir.
Adım 5: Kalanlar. $\varnothing\in\mathcal{A}$ ve $\mathbb{R}=\mathbb{R}\setminus\varnothing\in\mathcal{A}$'dır. Sınırsız aralıklar (a,∞), $[a,\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,b]$ ve $\mathbb{R}$'dir; hepsi yukarıda elde edildi. Böylece bütün aralıklar $\mathcal{A}$'dadır.
■

Alıştırma 2.2 (F_σ Kümesinin Ötelemesi). Bir F_σ kümesinin her ötelemesinin de bir F_σ kümesi olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Öteleme açıklığı korur. $\mathcal{O}$ açık ve $y\in\mathbb{R}$ olsun. $x\in\mathcal{O}+y$ ise $x-y\in\mathcal{O}$'dur; $(x-y-r,x-y+r)\subseteq\mathcal{O}$ olan bir $r>0$ vardır. Her noktaya y ekleyince $(x-r,x+r)\subseteq\mathcal{O}+y$ bulunur. Dolayısıyla $\mathcal{O}+y$ açıktır.
Adım 2: Öteleme kapalılığı korur. $x\mapsto x+y$ bire-bir ve örten olduğundan

$$\mathbb{R}\setminus(F+y)=(\mathbb{R}\setminus F)+y$$

olur. F kapalıysa $\mathbb{R}\setminus F$ açıktır, Adım 1 gereği sağ taraf açıktır; yani $F+y$ kapalıdır.
Adım 3: Birleşimler. $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ bir F_σ kümesi, her F_n kapalı olsun. Öteleme birleşimle yer değiştirir:

$$E+y=\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n+y).$$

Adım 2 gereği her F_n+y kapalıdır; $E+y$ kapalı kümelerin sayılabilir birleşimidir, yani bir F_σ kümesidir.
■

Alıştırma 2.3 (G_δ Kümesinin Ötelemesi). Bir G_δ kümesinin her ötelemesinin de bir G_δ kümesi olduğunu gösterin.

Çözüm.
$G=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{O}_n$ bir G_δ kümesi, her $\mathcal{O}_n$ açık ve $y\in\mathbb{R}$ olsun.
Adım 1: Öteleme kesişimle yer değiştirir. $x\in G+y$ ancak ve ancak $x-y\in G$, yani her n için $x-y\in\mathcal{O}_n$, yani her n için $x\in\mathcal{O}_n+y$'dir. Böylece

$$G+y=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathcal{O}_n+y).$$

Adım 2: Ötelenmiş kümeler açıktır. $x\in\mathcal{O}_n+y$ ise $x-y\in\mathcal{O}_n$'dir ve $(x-y-r,x-y+r)\subseteq\mathcal{O}_n$ olan bir $r>0$ vardır; buradan $(x-r,x+r)\subseteq\mathcal{O}_n+y$ çıkar. Her $\mathcal{O}_n+y$ açıktır.
Dolayısıyla $G+y$ açık kümelerin sayılabilir kesişimi, yani bir G_δ kümesidir.
■

Alıştırma 2.4 (Sıfır Ölçülü Kümenin Ötelemesi). Ölçüsü sıfır olan bir kümenin her ötelemesinin de ölçüsünün sıfır olduğunu gösterin.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
E ölçülebilir, $m(E) = 0$ ve $y \in \mathbb{R}$ olsun.
Adım 1: Dış ölçü. Dış ölçü ötelemeyle değişmez (Teorem 1.2); bu yüzden

$$m^*(E + y) = m^*(E) = m(E) = 0.$$

Adım 2: Ölçülebilirlik ve ölçü. Dış ölçüsü sıfır olan her küme ölçülebilirdir (Teorem 1.4); dolayısıyla $E + y$ ölçülebilirdir. (Aynı sonuç Teorem 2.5′den de çıkar.) Lebesgue ölçüsünün tanımıyla (Tanım 2.8) $m(E + y) = m^*(E + y) = 0$ olur.
■

Alıştırma 2.5 (Pozitif Dış Ölçülü Sınırlı Alt Küme). $m^*(E) > 0$ ise E'nin dış ölçüsü yine pozitif olan sınırlı bir alt kümesi bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Her n için $E_n = E \cap [-n, n]$ diyelim. Her E_n, E'nin sınırlı bir alt kümesidir.
Adım 1: E bu kümelerin birleşimidir. Her $x \in \mathbb{R}$ için Arşimet özelliğiyle $| x | \leq n$ olan bir n vardır; dolayısıyla

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Adım 2: Çelişki. Her n için $m^*(E_n) = 0$ olduğunu varsayalım. Sayılabilir alt toplamsallıkla (Teorem 1.3)

$$m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) = 0$$

olur; bu $m^*(E) > 0$ ile çelişir.
O hâlde bir n için $m^*(E_n) > 0$'dır ve $E_n = E \cap [-n, n]$ aranan sınırlı alt kümedir.
■

Alıştırma 2.6 (Küçük Ölçülü Parçalara Ayırma). E ölçülebilir, $m(E) < \infty$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. E'nin, her birinin ölçüsü en çok ε olan sonlu sayıda ölçülebilir kümenin ayrık birleşimi olduğunu gösterin.

Çözüm.
Fikir şudur: E'nin sınırlı bir parçası kısa aralıklarla dilimlenir, geriye kalan "kuyruk" ise küçük ölçülüdür.
Adım 1: Halkalara bölme. Her $k \geq 1$ için

$$D_k = E \cap \big(\, [-k, -k+1) \cup [k-1, k) \, \big)$$

diyelim. Aralıklar ölçülebilir (Teorem 2.3) ve $\mathcal{M}$ bir σ-cebiri olduğundan (Teorem 2.4) her D_k ölçülebilirdir. D_k'ler ayrıktır, birleşimleri E'dir ve her n için

$$\bigcup_{k=1}^{n} D_k = E \cap [-n, n), \qquad \bigcup_{k=n+1}^{\infty} D_k = E \setminus [-n, n).$$

Adım 2: Kuyruk küçüktür. Sonlu toplamsallık (Lemma 2.1) ve monotonlukla her n için

$$\sum_{k=1}^{n} m(D_k) = m \, \big(\, E \cap [-n, n) \, \big) \leq m(E) < \infty.$$

Kısmi toplamları sınırlı, terimleri negatif olmayan $\sum_k m(D_k)$ serisi yakınsaktır; dolayısıyla kalanı sıfıra gider. $\sum_{k>n} m(D_k) < \varepsilon$ olacak bir n seçelim. Sayılabilir alt toplamsallıkla (Teorem 1.3)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$m\left(\ E \setminus [-n,n)\ \right) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} m(D_k) < \varepsilon.$$

Adım 3: Sınırlı parçayı dilimleme. N, $N\varepsilon \ge 2n$ olan bir doğal sayı olsun ve $i = 0, 1, \ldots, N-1$ için

$$J_i = [-n + i\varepsilon,\, -n + (i+1)\varepsilon) \cap [-n, n)$$

diyelim. J_i'ler ayrık aralıklardır, birleşimleri $[-n,n)$'dir ve $\ell(J_i) \le \varepsilon$'dur. $G_i = E \cap J_i$ ölçülebilirdir. Monotonlukla $m(G_i) \le m(J_i)$'dir ve aralığın ölçüsü uzunluğuna eşit olduğundan (Teorem 1.1) $m(J_i) = \ell(J_i)$ olur:

$$m(G_i) \le m(J_i) = \ell(J_i) \le \varepsilon.$$

Adım 4: Sonuç. E, ayrık ve ölçülebilir

$$G_0, G_1, \ldots, G_{N-1}, \quad E \setminus [-n,n)$$

kümelerinin birleşimidir. Toplam $N+1$ küme vardır ve her birinin ölçüsü en çok ε'dur.
■

Ölçülebilir kümelerin topluluğunun sayılabilir işlemlere kapalı olduğunu ve Lebesgue ölçüsünü tanımladık. Sıradaki bölüm İç ve Dış Yaklaşım, ölçülebilir kümelerin açık, kapalı, G_δ ve F_σ kümeleriyle ne kadar iyi yaklaşılabildiğini inceliyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. İç ve Dış Yaklaşım

Ölçülebilirlik tanımı soyuttur: Carathéodory koşulu bir kümeyi bütün test kümeleriyle sınar. Bu bölümde aynı kavramın somut bir yüzünü göreceğiz: ölçülebilir bir küme, içeriden kapalı, dışarıdan açık bir kümeyle, aradaki fark ölçüce istenildiği kadar küçük olacak biçimde sıkıştırılabilir.
Bundan ölçülebilir kümelerin tam tarifi çıkar: her biri bir G_δ kümesinden sıfır ölçülü bir küme atılarak elde edilir. Son olarak sonlu ölçülü bir kümenin, sonlu sayıda ayrık açık aralığın birleşimine "neredeyse" eşit olduğunu göreceğiz.

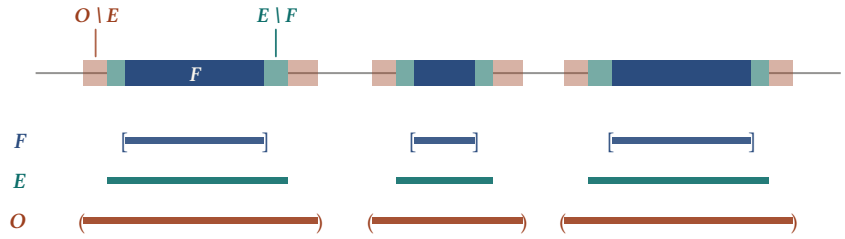
3.1 Açık ve kapalı kümelerle yaklaşım

Bu bölümde Lebesgue ölçüsünü, yani dış ölçünün $\mathcal{M}$ üzerine kısıtlanışını (Tanım 2.8) kullanıyoruz: ölçülebilir E için $m(E) = m^*(E)$. Sık başvuracağımız iki araç şunlardır: ölçülebilir kümelerin sonlu ayrık birleşiminde ölçünün toplamsal olması ve bundan çıkan **çıkarma özelliği**: $A \subseteq B$ ölçülebilir ve $m(A) < \infty$ ise $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$.

Teorem 3.1 (Lebesgue Ölçüsünün Düzenliliği). *E ölçülebilir ve $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman*

$$F \subseteq E \subseteq \mathcal{O}, \qquad m(\mathcal{O} \setminus E) < \varepsilon, \qquad m(E \setminus F) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir kapalı F kümesi ve bir açık $\mathcal{O}$ kümesi vardır.



Şekil 3.1: Ölçülebilir E kümesi, içindeki kapalı F ile dışındaki açık $\mathcal{O}$ arasında sıkıştırılır (alt satırlar üç kümeyi ayrı ayrı gösterir). Üstteki şeritte F'nin iki yanındaki ince parçalar $E \setminus F$, en dıştakiler $\mathcal{O} \setminus E$ kümesidir; teorem, ikisinin de ölçüsünün ε'dan küçük seçilebileceğini söyler.

İspat.
Önce açık dış yaklaşımı, sonra tümleyene geçerek kapalı iç yaklaşımı kuracağız.
Adım 1: $m(E) < \infty$ iken dış yaklaşım. *Dış ölçünün tanımına (Tanım 1.5) göre E'yi örten ve*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < m(E) + \varepsilon$$

olan açık, sınırlı aralıklardan oluşan bir $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ topluluğu vardır. $\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ açıktır, E'yi içerir ve sayılabilir alt toplamsallıktan (Teorem 1.3) $m(\mathcal{O}) \le \sum_k \ell(I_k) < m(E) + \varepsilon$ olur. $m(E) < \infty$ olduğundan çıkarma özelliği

$$m(\mathcal{O} \setminus E) = m(\mathcal{O}) - m(E) < \varepsilon$$

verir.
Adım 2: $m(E) = \infty$ iken dış yaklaşım. *Her k için $E_k = E \cap [-k, k]$ ölçülebilirdir ve $m(E_k) \le 2k < \infty$. Adım 1'e göre $E_k \subseteq \mathcal{O}_k$ ve $m(\mathcal{O}_k \setminus E_k) < \varepsilon/2^k$ olan açık bir $\mathcal{O}_k$ vardır. $\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k$ açıktır ve $E = \bigcup_k E_k \subseteq \mathcal{O}$.*

 CC BY-NC-SA 4.0

$x \in \mathcal{O} \setminus E$ ise x bir $\mathcal{O}_k$'ye aittir ve $E_k \subseteq E$ olduğundan $x \notin E_k$; yani $\mathcal{O} \setminus E \subseteq \bigcup_k (\mathcal{O}_k \setminus E_k)$. Sayılabilir alt toplamsallıktan

$$m(\mathcal{O} \setminus E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\mathcal{O}_k \setminus E_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Adım 3: Kapalı iç yaklaşım. *$\mathbb{R} \setminus E$ de ölçülebilirdir. Adım 1–2'ye göre*

$$\mathbb{R} \setminus E \subseteq \mathcal{U}, \qquad m\left(\, \mathcal{U} \setminus (\mathbb{R} \setminus E) \,\right) < \varepsilon$$

olan açık bir $\mathcal{U}$ vardır. $F = \mathbb{R} \setminus \mathcal{U}$ kapalıdır ve $F \subseteq E$. Ayrıca

$$E \setminus F = E \cap \mathcal{U} = \mathcal{U} \setminus (\mathbb{R} \setminus E),$$

dolayısıyla $m(E \setminus F) < \varepsilon$.
■

Yani ölçülebilir bir kümenin sınırı ne kadar karmaşık olursa olsun, içine bir kapalı, dışına bir açık küme yerleştirip aradaki "boşlukları" ölçüce ε'dan küçük tutabiliriz.

Örnek 3.1 (İrrasyonellerden Oluşan Kapalı Küme). $E = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ için $m(E) = 1$'dir. Verilen $\varepsilon > 0$ için yalnız irrasyonel sayılardan oluşan ve $m(F) > 1 - \varepsilon$ olan kapalı bir $F \subseteq E$ bulun.

Çözüm.
Önce $m(E) = 1$ olduğunu görelim. $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan dış ölçüsü sıfırdır, dolayısıyla ölçülebilirdir; çıkarma özelliğiyle (Önerme 2.5)

$$m(E) = m([0,1]) - m([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1.$$

$[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ bir sıralama olsun. Her n için

$$J_n = \Big(q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \Big), \qquad \ell(J_n) = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

alalım ve $\mathcal{O} = \bigcup_n J_n$ diyelim. $\mathcal{O}$ açıktır ve $[0,1]$'deki bütün rasyonelleri içerir. Alt toplamsallıktan

$$m(\mathcal{O}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$F = [0,1] \setminus \mathcal{O} = [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathcal{O})$ iki kapalı kümenin kesişimi olarak kapalıdır ve hiçbir rasyonel içermez; yani $F \subseteq E$. $[0,1] \subseteq F \cup \mathcal{O}$ olduğundan

$$1 \leq m(F) + m(\mathcal{O}) \leq m(F) + \frac{\varepsilon}{2},$$

dolayısıyla $m(F) \geq 1 - \varepsilon/2 > 1 - \varepsilon$. Rasyoneller $[0,1]$'de yoğun olduğu hâlde, onlardan kaçan kapalı bir kümenin ölçüsü 1'e istenildiği kadar yakın olabilir.
■

3.2 G_δ ve F_σ kümeleriyle yaklaşım

Teorem 3.1'daki ε'u $1/n$ alıp sayılabilir kesişim ve birleşime geçersek yaklaşım tam hâle gelir: aradaki fark sıfır ölçülü olur. Burada G_δ ve F_σ kümeleri Tanım 2.6'daki anlamdadır.

Sonuç 3.1 (G-delta ve F-sigma ile Sıkıştırma). *E ölçülebilir ise*

$$F \subseteq E \subseteq G, \qquad m(G \setminus E) = 0, \qquad m(E \setminus F) = 0$$

olacak biçimde bir G_δ kümesi G ve bir F_σ kümesi F vardır.

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

Her n için Teorem 3.1'a göre

$$F_n \subseteq E \subseteq \mathcal{O}_n, \qquad m(\mathcal{O}_n \setminus E) < \frac{1}{n}, \qquad m(E \setminus F_n) < \frac{1}{n}$$

olan bir kapalı F_n ve bir açık $\mathcal{O}_n$ vardır. $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ bir G_δ, $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ bir F_σ kümesidir ve $F \subseteq E \subseteq G$.
Her n için $G \setminus E \subseteq \mathcal{O}_n \setminus E$ ve $E \setminus F \subseteq E \setminus F_n$ olduğundan monotonluk

$$m(G \setminus E) < \frac{1}{n}, \qquad m(E \setminus F) < \frac{1}{n}$$

verir. n keyfi olduğundan iki ölçü de sıfırdır.
■

Bu sonuç, ölçülebilirliğin sık kullanacağımız temel tarifini verir.

Sonuç 3.2 (Ölçülebilirliğin Karakterizasyonu). *$E \subseteq \mathbb{R}$ kümesi ancak ve ancak bir G_δ kümesinden sıfır ölçülü bir küme çıkarılarak elde edilebiliyorsa ölçülebilirdir: $E = G \setminus N$, G bir G_δ kümesi, $m^*(N) = 0$.*

İspat.
(⇒) E ölçülebilir olsun. Sonuç 3.1'daki G için $N = G \setminus E$ dersek $m(N) = 0$ ve $E \subseteq G$ olduğundan $E = G \setminus N$.
(⇐) $E = G \setminus N$ olsun. G_δ kümesi G bir Borel kümesidir, dolayısıyla ölçülebilirdir (Teorem 2.4); N ise dış ölçüsü sıfır olduğundan ölçülebilirdir (Teorem 1.4). $\mathcal{M}$ bir σ-cebiri olduğundan $E = G \cap (\mathbb{R} \setminus N)$ ölçülebilirdir.
■

Yani ölçülebilir kümeler, Borel kümelerinden yalnız sıfır ölçülü bir "tozla" ayrılır. Aynı akıl yürütme F_σ tarafında da çalışır: E ölçülebilirdir ancak ve ancak bir F_σ kümesiyle sıfır ölçülü bir kümenin birleşimidir. Bu tarif $\mathcal{M}$'nin yapısını da tam olarak belirler: $\mathcal{M}$, Borel kümelerine sıfır ölçülü kümeleri ekleyip σ-cebiri işlemleriyle kapatınca ortaya çıkan topluluktur.

Teorem 3.2 (Ölçülebilir Kümeler En Küçük σ-Cebiridir). *$\mathcal{M}$, Borel σ-cebiri $\mathcal{B}$'yi ve dış ölçüsü sıfır olan bütün kümeleri içeren en küçük σ-cebiridir.*

İspat.
$\mathcal{S}$, Borel kümeleriyle dış ölçüsü sıfır olan kümelerin oluşturduğu topluluk; $\mathcal{A}$ da $\mathcal{S}$'yi içeren en küçük σ-cebiri, yani $\mathcal{S}$'yi içeren bütün σ-cebirlerinin kesişimi olsun.
$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$. *$\mathcal{M}$ bir σ-cebiridir, Borel kümelerini içerir (Teorem 2.4) ve sıfır dış ölçülü kümeleri içerir (Teorem 1.4). Yani $\mathcal{M}$, $\mathcal{S}$'yi içeren σ-cebirlerinden biridir ve $\mathcal{A}$'nın minimalliğinden $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.*
$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$. *$E \in \mathcal{M}$ olsun. Sonuç 3.2'na göre $E = G \setminus N$ yazılır; burada G bir G_δ kümesi, $m^*(N) = 0$. G bir Borel kümesi olduğundan $G \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$; $N \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ tümleyen ve kesişim altında kapalı olduğundan $E = G \cap (\mathbb{R} \setminus N) \in \mathcal{A}$.*
İki kapsamadan $\mathcal{M} = \mathcal{A}$.
■

3.3 Sonlu sayıda aralıkla yaklaşım

Sonlu ölçülü bir küme sınırsız olabilir, sayılamaz çoklukta parçadan oluşabilir; yine de ölçü gözüyle bakınca, sonlu sayıda ayrık açık aralığın birleşiminden pek farklı değildir. Farkı ölçmek için şu kavram uygundur.

Tanım 3.1 (Simetrik Fark). A ve B kümelerinin **simetrik farkı**

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

kümesidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani $A \triangle B$, iki kümeden tam olarak birine ait olan noktalardır. A, B ölçülebilir ve sonlu ölçülü ise $A \cup B$, ayrık $A \cap B$ ve $A \triangle B$ kümelerine ayrıldığından

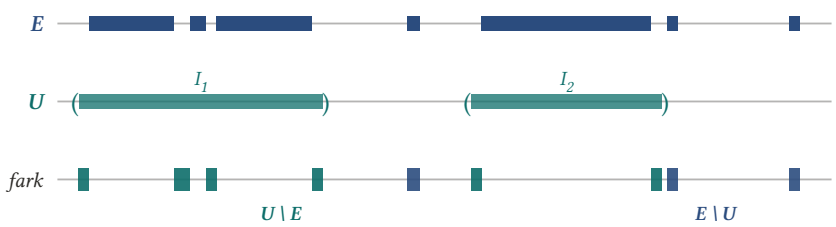
$$m(A \triangle B) = m(A \setminus B) + m(B \setminus A) = m(A \cup B) - m(A \cap B).$$

İspatta, bir önceki bölümde gösterilen şu olguyu kullanacağız: boş olmayan her açık küme, sayılabilir sayıda ayrık açık aralığın birleşimidir (bkz. σ-Cebiri ve Borel Kümeleri).

Teorem 3.3 (Sonlu Sayıda Aralıkla Yaklaşım). *$m(E) < \infty$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. O zaman açık, sınırlı ve ayrık aralıklardan oluşan sonlu bir $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ topluluğu vardır ki $\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ için*

$$m(E \triangle \mathcal{U}) = m(\mathcal{U} \setminus E) + m(E \setminus \mathcal{U}) < \varepsilon$$

olur.



Şekil 3.2: Düzensiz parçalardan oluşan E *ve iki ayrık açık aralığın birleşimi $\mathcal{U}$. Alt satırda simetrik farkın iki parçası görülür: $\mathcal{U} \setminus$ E (yeşil) aralıkların içinde kalan küçük boşluklar,* E $\setminus \mathcal{U}$ *(mavi) aralıkların dışında kalan küçük parçalardır. Teorem, bu farkın ölçüsünün istenildiği kadar küçük yapılabileceğini söyler.*

İspat.
Adım 1: Açık zarf. *Teorem 3.1'a göre $E \subseteq \mathcal{O}$ ve*

$$m(\mathcal{O} \setminus E) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

olan açık bir $\mathcal{O}$ vardır. Sonlu toplamsallıktan $m(\mathcal{O}) = m(E) + m(\mathcal{O} \setminus E) < \infty$. $E = \varnothing$ ise $n = 1$ ve $\ell(I_1) < \varepsilon$ olan herhangi bir açık, sınırlı I_1 aralığı yeter, çünkü $m(\mathcal{U} \triangle E) = \ell(I_1) < \varepsilon$ olur; bu yüzden $\mathcal{O} \neq \varnothing$ varsayabiliriz.
Adım 2: Aralıklara ayırma. *$\mathcal{O}$, ayrık açık aralıklardan oluşan sayılabilir bir $\{I_k\}$ topluluğunun birleşimidir. Her k için $\ell(I_k) = m(I_k) \leq m(\mathcal{O}) < \infty$, yani aralıklar sınırlıdır. Bu uzunlukların toplamı $m(\mathcal{O})$'dur:*

- *Alt toplamsallıktan $m(\mathcal{O}) \leq \sum_k \ell(I_k)$.*
- *Her n için ilk n aralığın birleşimi $\mathcal{O}$'nun içindedir ve sonlu toplamsallıktan*

$$\sum_{k=1}^{n} \ell(I_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \leq m(\mathcal{O});$$

$n \to \infty$ ile $\sum_k \ell(I_k) \leq m(\mathcal{O})$.

Topluluk sonluysa $\mathcal{U} = \mathcal{O}$ alınır ve (1)'den iş biter. Sonsuzsa $\sum_k \ell(I_k) < \infty$ olduğundan kuyruk sıfıra gider; öyle bir n seçelim ki

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \ell(I_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Adım 3: Tahmin. *$\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ olsun. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{O}$ olduğundan $\mathcal{U} \setminus E \subseteq \mathcal{O} \setminus E$ ve (1)'den $m(\mathcal{U} \setminus E) < \varepsilon/2$. Öte yandan $E \subseteq \mathcal{O}$ olduğundan*

$$E \setminus \mathcal{U} \subseteq \mathcal{O} \setminus \mathcal{U} = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} I_k,$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve alt toplamsallıktan

$$m(E \setminus \mathcal{U}) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \ell(I_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Toplarsak $m(\mathcal{U} \setminus E) + m(E \setminus \mathcal{U}) < \varepsilon$.
■

Yani sonlu ölçülü bir küme, ölçü gözüyle, sonlu sayıda aralıktan oluşan "basit" bir kümeden ε kadar farklıdır. Littlewood'un ilk ilkesi olarak bilinen bu olgu, ölçülebilir fonksiyonları basamak fonksiyonlarıyla yaklaşırken yeniden karşımıza çıkacak.

Örnek 3.2 (Sınırsız Bir Kümenin Aralıklarla Yaklaşımı). $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n, n + 2^{-n} \right)$ olsun. $m(E) = 1$ olduğunu gösterin ve $\varepsilon = 0{,}01$ için Teorem 3.3'ndaki $\mathcal{U}$'yu açıkça bulun.

Çözüm.
Ölçü. Aralıklar ayrıktır, çünkü $(n, n+2^{-n}) \subseteq (n, n+1)$. Alt toplamsallıktan $m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$. Her N için sonlu toplamsallık ve monotonluktan

$$m(E) \geq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} = 1 - 2^{-N},$$

ve $N \to \infty$ ile $m(E) \geq 1$. Demek ki $m(E) = 1$; E sınırsız olduğu hâlde ölçüsü sonludur.
Yaklaşım. $\mathcal{U}_N = \bigcup_{n=1}^{N} (n, n + 2^{-n})$ alalım. $\mathcal{U}_N \subseteq E$ olduğundan $\mathcal{U}_N \setminus E = \varnothing$, ve

$$m(E \setminus \mathcal{U}_N) \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-N}.$$

$2^{-N} < 0{,}01$ koşulu $N \geq 7$ demektir ($2^{-7} = 0{,}0078125$). Dolayısıyla ilk yedi aralığın birleşimi $\mathcal{U}_7$ için $m(E \triangle \mathcal{U}_7) < 0{,}01$.
■

3.4 Alıştırmalar

Alıştırma 3.1 (Kapalı ve Açık Kümeyle Sıkıştırma). $E \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $F \subseteq E \subseteq \mathcal{O}$ ve $m^*(\mathcal{O} \setminus F) < \varepsilon$ olan bir kapalı F ve bir açık $\mathcal{O}$ varsa E'nin ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: G_δ zarfı. Her n için varsayımdan $F_n \subseteq E \subseteq \mathcal{O}_n$ ve $m^*(\mathcal{O}_n \setminus F_n) < 1/n$ olan kapalı F_n ve açık $\mathcal{O}_n$ seçelim. $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ bir G_δ kümesidir ve $E \subseteq G$.
Adım 2: Fark sıfır ölçülü. Her n için $G \subseteq \mathcal{O}_n$ ve $F_n \subseteq E$ olduğundan

$$G \setminus E \subseteq \mathcal{O}_n \setminus E \subseteq \mathcal{O}_n \setminus F_n.$$

Dış ölçünün monotonluğundan $m^*(G \setminus E) < 1/n$; n keyfi olduğundan $m^*(G \setminus E) = 0$.
Adım 3: Sonuç. $N = G \setminus E$ dersek $E \subseteq G$ olduğundan $E = G \setminus N$. G bir G_δ kümesi, $m^*(N) = 0$ olduğundan Sonuç 3.2'na göre E ölçülebilirdir.
■

Alıştırma 3.2 (Dış Ölçüyü Koruyan Zarf). $m^*(E) < \infty$ olsun. $E \subseteq G$ ve $m(G) = m^*(E)$ olan bir G_δ kümesi G bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Açık zarflar. Sabit bir n için dış ölçünün tanımından (Tanım 1.5) E'yi örten ve $\sum_k \ell(I_k) < m^*(E) + 1/n$ olan açık, sınırlı aralıklar $\{I_k\}$ vardır. $\mathcal{O}_n = \bigcup_k I_k$ açıktır, E'yi içerir ve alt toplamsallıktan (Teorem 1.3)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$m(\mathcal{O}_n) \le \sum_k \ell(I_k) < m^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Adım 2: Kesişim. $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$ bir G_δ kümesidir, dolayısıyla ölçülebilirdir, ve $E \subseteq G$. Her n için $E \subseteq G \subseteq \mathcal{O}_n$ ve monotonluktan

$$m^*(E) \le m(G) \le m(\mathcal{O}_n) < m^*(E) + \frac{1}{n}.$$

$n \to \infty$ ile $m(G) = m^*(E)$.
■

Alıştırma 3.3 (Zarf ile Ölçülebilirlik). $m^*(E) < \infty$ olsun. E'nin ancak ve ancak $E \subseteq G$ ve $m^*(G \setminus E) = 0$ olan bir G_δ kümesi G varsa ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
(⇒) E ölçülebilir ise Sonuç 3.1, $E \subseteq G$ ve $m(G \setminus E) = 0$ olan bir G_δ kümesi G verir.
(⇐) Böyle bir G olsun ve $N = G \setminus E$ diyelim. $m^*(N) = 0$ olduğundan N ölçülebilirdir (Teorem 1.4). G bir Borel kümesidir, dolayısıyla ölçülebilirdir (Teorem 2.4). $E \subseteq G$ olduğundan

$$E = G \setminus N = G \cap (\mathbb{R} \setminus N),$$

ve ölçülebilir kümeler bir σ-cebiri oluşturduğundan E ölçülebilirdir.
İki yönde de $m^*(E) < \infty$ varsayımı kullanılmadı; karakterizasyon her $E \subseteq \mathbb{R}$ için geçerlidir.
■

Alıştırma 3.4 (Ölçülemez Kümenin Açık Üst Kümesi). $m^*(E) < \infty$ olsun ve E ölçülebilir olmasın. E'yi içeren, dış ölçüsü sonlu ve

$$m^*(\mathcal{O} \setminus E) > m^*(\mathcal{O}) - m^*(E)$$

olan açık bir $\mathcal{O}$ kümesi bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Ön not. Her $\mathcal{O} \supseteq E$ için $\mathcal{O} \subseteq E \cup (\mathcal{O} \setminus E)$ olduğundan alt toplamsallık $m^*(\mathcal{O}) \le m^*(E) + m^*(\mathcal{O} \setminus E)$ verir; yani $m^*(\mathcal{O} \setminus E) \ge m^*(\mathcal{O}) - m^*(E)$ her zaman doğrudur. İstenen, bu eşitsizliğin bir $\mathcal{O}$ için kesin olmasıdır.
Adım 1: Olmayana ergi. Tersine, E'yi içeren ve dış ölçüsü sonlu her açık $\mathcal{O}$ için

$$m^*(\mathcal{O} \setminus E) \le m^*(\mathcal{O}) - m^*(E) \tag{1}$$

olduğunu varsayalım.
Adım 2: Küçük farklar. Her n için dış ölçünün tanımından (Alıştırma 3.2'daki gibi) $E \subseteq \mathcal{O}_n$ ve $m(\mathcal{O}_n) < m^*(E) + 1/n$ olan açık bir $\mathcal{O}_n$ vardır; dış ölçüsü sonludur. (1)'den

$$m^*(\mathcal{O}_n \setminus E) \le m(\mathcal{O}_n) - m^*(E) < \frac{1}{n}.$$

Adım 3: Çelişki. $G = \bigcap_n \mathcal{O}_n$ bir G_δ kümesidir, $E \subseteq G$ ve her n için $G \setminus E \subseteq \mathcal{O}_n \setminus E$ olduğundan $m^*(G \setminus E) < 1/n$, yani $m^*(G \setminus E) = 0$. Alıştırma 3.3'a göre E ölçülebilir olur; bu varsayımla çelişir. Demek ki (1)'i sağlamayan, yani istenen kesin eşitsizliği sağlayan bir $\mathcal{O}$ vardır.
■

Alıştırma 3.5 (Lebesgue'in Ölçülebilirlik Tanımı). $m^*(E) < \infty$ olsun. E'nin ancak ve ancak her açık, sınırlı (a, b) aralığı için

$$b - a = m^*\left(\,(a,b) \cap E\,\right) + m^*\left(\,(a,b) \setminus E\,\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

oluyorsa ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
(⇒) E ölçülebilir olsun. Carathéodory koşulunu (Tanım 1.6) $A=(a,b)$ test kümesine uygularsak

$$m^*\left(\ (a,b)\ \right) = m^*\left(\ (a,b)\cap E\ \right) + m^*\left(\ (a,b)\setminus E\ \right)$$

olur. Aralığın dış ölçüsü uzunluğu olduğundan (Teorem 1.1) sol taraf $b-a$'dır.
(⇐) Koşul sağlansın ve $\varepsilon>0$ verilsin.
Adım 1: Uzunluk toplamı küçük bir açık zarf. Dış ölçünün tanımından E'yi örten ve $\sum_j \ell(J_j) < m^*(E)+\varepsilon$ olan açık, sınırlı $\{J_j\}$ aralıkları vardır. $\mathcal{O}=\bigcup_j J_j$ açıktır ve sayılabilir sayıda ayrık açık $\{I_k\}$ aralığının birleşimidir. Her J_j bağlantılı olduğundan tam olarak bir I_k'nin içinde kalır. Ayrıca her I_k, içinde kalan J_j'lerin birleşimidir: $x\in I_k$ ise x bir J_j'ye aittir; bu J_j bir $I_{k'}$ içinde kaldığından $x\in I_k\cap I_{k'}$ olur ve ayrıklık $k'=k$ verir, yani $J_j\subseteq I_k$. Alt toplamsallıktan (Teorem 1.1 ile birlikte)

$$\ell(I_k)=m^*(I_k)\le \sum_{J_j\subseteq I_k}\ell(J_j),$$

ve k üzerinden toplarsak (her J_j tek bir toplamda sayılır)

$$\sum_k \ell(I_k)\le \sum_j \ell(J_j) < m^*(E)+\varepsilon. \tag{1}$$

Özellikle her I_k sınırlı bir açık aralıktır.
Adım 2: Koşulu parçalara uygulama. Her I_k için varsayımdan

$$m^*(I_k\setminus E)=\ell(I_k)-m^*(I_k\cap E).$$

$\mathcal{O}\setminus E=\bigcup_k (I_k\setminus E)$ ve $E=\bigcup_k (I_k\cap E)$ olduğundan alt toplamsallık

$$m^*(\mathcal{O}\setminus E)\le\sum_k m^*(I_k\setminus E),\qquad m^*(E)\le\sum_k m^*(I_k\cap E)$$

verir. (1)'den $\sum_k \ell(I_k)$ sonlu olduğundan toplamlar terim terim ayrılabilir:

$$m^*(\mathcal{O}\setminus E)\le\sum_k\ell(I_k)-\sum_k m^*(I_k\cap E)\le\sum_k\ell(I_k)-m^*(E)<\varepsilon.$$

Adım 3: Ölçülebilirlik. $\varepsilon=1/n$ için elde edilen açık kümeye $\mathcal{O}_n$ diyelim: $E\subseteq\mathcal{O}_n$, $m^*(\mathcal{O}_n\setminus E)<1/n$. $G=\bigcap_n \mathcal{O}_n$ bir G_δ kümesidir, $E\subseteq G$ ve her n için $m^*(G\setminus E)\le m^*(\mathcal{O}_n\setminus E)<1/n$; yani $m^*(G\setminus E)=0$. Alıştırma 3.3'a göre E ölçülebilirdir.
■

Alıştırma 3.6 (Açık Kümelerle Dış Ölçü). Her $A\subseteq\mathbb{R}$ için

$$m^{**}(A)=\inf\{\, m^*(\mathcal{O}) : \mathcal{O}\supseteq A,\ \mathcal{O}\ \text{ açık}\,\}\in[0,\infty]$$

olsun. m^{**} küme fonksiyonunun dış ölçü m^* ile ilişkisini belirleyin.

Çözüm.
Her A için $m^{**}(A)=m^*(A)$ olduğunu, yani iki küme fonksiyonunun aynı olduğunu gösterelim.
$\boldsymbol{m^*(A)\le m^{**}(A).}$ A'yı içeren her açık $\mathcal{O}$ için monotonluktan $m^*(A)\le m^*(\mathcal{O})$. Yani $m^*(A)$ infimumu alınan kümenin bir alt sınırıdır ve $m^*(A)\le m^{**}(A)$.
$\boldsymbol{m^{**}(A)\le m^*(A).}$ $m^*(A)=\infty$ ise açıktır. $m^*(A)<\infty$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Dış ölçünün tanımından A'yı örten ve $\sum_k\ell(I_k)<m^*(A)+\varepsilon$ olan açık, sınırlı $\{I_k\}$ aralıkları vardır. $\mathcal{O}=\bigcup_k I_k$ açıktır, A'yı içerir ve alt toplamsallıktan

$$m^{**}(A)\le m^*(\mathcal{O})\le\sum_k\ell(I_k)<m^*(A)+\varepsilon.$$

ε keyfi olduğundan $m^{**}(A)\le m^*(A)$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç: $m^{**} = m^*$. Dış ölçü, açık üst kümelerin ölçüleriyle dışarıdan tam olarak yaklaşılır; bu yaklaşım yalnız ölçülebilir kümeler için değil, **her** küme için geçerlidir.
■

Alıştırma 3.7 (Kapalı Kümelerle İç Ölçü). Her $A \subseteq \mathbb{R}$ için

$$m^{***}(A) = \sup\{\, m^*(F) : F \subseteq A,\ F \ \text{ kapalı} \,\} \in [0, \infty]$$

olsun. m^{***} küme fonksiyonunun dış ölçü m^* ile ilişkisini belirleyin.

Çözüm.
Göstereceğimiz ilişki: her A için $m^{***}(A) \le m^*(A)$; A ölçülebilir ise eşitlik vardır; $m^*(A) < \infty$ ise eşitlik ancak ve ancak A ölçülebilir olduğunda vardır. Dolayısıyla eşitsizlik kesin olabilir. ($\varnothing$ kapalı olduğundan supremum boş olmayan bir küme üzerinden alınır.)
Adım 1: $m^{***} \le m^*$. $F \subseteq A$ ise monotonluktan $m^*(F) \le m^*(A)$; supremuma geçilir.
Adım 2: Sonlu ölçülü ölçülebilir küme. A ölçülebilir, $m(A) < \infty$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Teorem 3.1′a göre $F \subseteq A$ ve $m(A \setminus F) < \varepsilon$ olan kapalı bir F vardır. Çıkarma özelliğinden

$$m(F) = m(A) - m(A \setminus F) > m(A) - \varepsilon.$$

Dolayısıyla $m^{***}(A) \ge m(A) - \varepsilon$ ve $\varepsilon \to 0$ ile $m^{***}(A) = m(A)$.
Adım 3: Sonsuz ölçülü ölçülebilir küme. $m(A) = \infty$ olsun. Tam sayılar j için $A_j = A \cap [j, j+1)$ ölçülebilir, ayrık ve $A = \bigcup_j A_j$. Alt toplamsallıktan $\infty = m(A) \le \sum_{j \in \mathbb{Z}} m(A_j)$, yani bu toplam ıraksar. $k \in \mathbb{N}$ için sonlu toplamsallık ve monotonluktan

$$m\left(\, A \cap [-k, k) \,\right) = \sum_{j=-k}^{k-1} m(A_j) \underset{k\to\infty}{\to} \infty.$$

$A \cap [-k, k)$ sonlu ölçülü ve ölçülebilir olduğundan Adım 2′ye göre içinde $m(F_k) > m\left(\, A \cap [-k, k) \,\right) - 1$ olan kapalı bir $F_k \subseteq A$ vardır. Bu yüzden $m^{***}(A) = \infty = m(A)$.
Adım 4: Sonlu dış ölçüde eşitlik ölçülebilirlik demektir. $m^*(A) < \infty$ ve $m^{***}(A) = m^*(A)$ olsun. Her n için $m(F_n) > m^*(A) - 1/n$ olan kapalı bir $F_n \subseteq A$ seçelim ve $H = \bigcup_n F_n$ diyelim; H bir F_σ kümesidir, $H \subseteq A$ ve $m^*(A) \ge m(H) \ge m(F_n)$ olduğundan $m(H) = m^*(A)$. Alıştırma 3.2′a göre $A \subseteq G$ ve $m(G) = m^*(A)$ olan bir G_δ kümesi G vardır. $H \subseteq G$ ve $m(H) < \infty$ olduğundan çıkarma özelliği

$$m(G \setminus H) = m(G) - m(H) = 0$$

verir. $A \setminus H \subseteq G \setminus H$ olduğundan $m^*(A \setminus H) = 0$, yani $A \setminus H$ ölçülebilirdir (Teorem 1.4). O hâlde $A = H \cup (A \setminus H)$ ölçülebilirdir.
Adım 5: Kesin eşitsizlik. Teorem 5.1′ye göre $[0,1]$'in ölçülemez bir alt kümesi A vardır; $m^*(A) \le 1 < \infty$. Adım 4′e göre $m^{***}(A) < m^*(A)$.
Sonuç: m^{***} bir "iç ölçü"dür; $m^{***} \le m^*$ ve sonlu dış ölçülü kümeler arasında eşitliğin geçtiği kümeler tam olarak ölçülebilir kümelerdir. Dış ölçü sonsuz olunca eşitlik ölçülebilirliği gerektirmez: A yukarıdaki ölçülemez küme ise $A \cup [2, \infty)$ ölçülemezdir (ölçülebilir olsaydı $[0,1]$ ile kesişimi olan A da ölçülebilir olurdu), ama $[2, k]$ kapalı alt kümeleri

$$m^{***}\left(\, A \cup [2, \infty) \,\right) = \infty = m^*\left(\, A \cup [2, \infty) \,\right)$$

verir.
■

Ölçülebilir kümeleri artık hem soyut koşuluyla hem de somut yaklaşımlarıyla tanıyoruz. Sıradaki adım, Lebesgue ölçüsünün sayılabilir ayrık birleşimlerde toplamsal olduğunu ve artan ya da azalan dizilerde sürekli davrandığını göstermek: Toplamsallık ve Süreklilik.

 CC BY-NC-SA 4.0

4. Toplamsallık ve Süreklilik

Ölçülebilir kümelerin bir σ-cebiri oluşturduğunu ve bu σ-cebirinin her aralığı içerdiğini biliyoruz. Bu bölümde dış ölçüyü ölçülebilir kümelere kısıtladığımızda kazandığımız asıl özelliği kanıtlıyoruz: ayrık ölçülebilir kümeler üzerinde dış ölçü artık yalnız alt toplamsal değil, tam anlamıyla toplamsaldır.
Bu toplamsallıktan iki kullanışlı sonuç çıkar: ölçünün artan ve azalan küme dizileri boyunca sürekliliği ve Borel–Cantelli lemması. Lemma, "sıfır ölçülü bir küme dışında" demenin kısa yolu olan *hemen her yerde* kavramını doğal olarak ortaya çıkarır.

4.1 Sayılabilir Toplamsallık

Önce iki küçük gözlemle başlayalım; ikisi de ölçülebilirlik tanımının doğrudan sonucudur. Ölçülebilir bir E kümesinin ölçüsü $m(E) = m^*(E)$ dir (bkz. Tanım 2.8).

- **Sonlu toplamsallık.** $E_1, \ldots, E_n$ ayrık ve ölçülebilir ise $m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(E_k)$ dir. Gerçekten, $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ için Carathéodory koşulunu (Tanım 1.6) E_n kümesine ve test kümesi U_n ye uygularsak, ayrıklık sayesinde $U_n \cap E_n = E_n$ ve $U_n \setminus E_n = U_{n-1}$ olur; dolayısıyla $m(U_n) = m(E_n) + m(U_{n-1})$ dir ve tümevarım sonucu verir.
- **Çıkarma özelliği (excision property).** $A \subseteq B$ ölçülebilir ve $m(A) < \infty$ ise $m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$ dır. Çünkü $B = A \cup (B \setminus A)$ ayrık birleşimdir; sonlu toplamsallıktan $m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$ olur ve $m(A)$ sonlu olduğundan çıkarılabilir.

Teorem 4.1 (Ölçünün Sayılabilir Toplamsallığı). *Lebesgue ölçüsü sayılabilir toplamsaldır (countably additive): $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ayrık ölçülebilir kümelerden oluşan bir topluluksa*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

İspat.
Birleşim ölçülebilirdir, çünkü ölçülebilir kümeler bir σ-cebiridir (Teorem 2.4). İki eşitsizliği ayrı ayrı gösteririz.
Adım 1 (≤). *Dış ölçünün sayılabilir alt toplamsallığından (Teorem 1.3)*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k).$$

Adım 2 (≥). *Her n için $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olduğundan dış ölçünün monotonluğu ve sonlu toplamsallık*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geq m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(E_k)$$

verir. Sol taraf n den bağımsızdır; $n \to \infty$ için sağ taraf serinin toplamına gider ve istenen eşitsizlik çıkar. İki adım birlikte eşitliği verir.
■

Yani ayrık ölçülebilir parçalara bölünmüş bir kümenin ölçüsü, parçaların ölçülerinin toplamıdır; sayılabilir sonsuz sayıda parça olsa bile.
Bu sonuç, en baştan aradığımız küme fonksiyonunun gerçekten var olduğunu söyler.

Teorem 4.2 (Lebesgue Ölçüsünün Temel Özellikleri). *Lebesgue ölçülebilir kümelerin $\mathcal{M}$ σ-cebiri üzerinde tanımlı m küme fonksiyonu her aralığa uzunluğunu atar, öteleme değişmezdir ve sayılabilir toplamsaldır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Her aralık ölçülebilirdir (Teorem 2.3) ve dış ölçüsü uzunluğudur (Teorem 1.1); dolayısıyla $m(I) = \ell(I)$. Ölçülebilir E ve $y \in \mathbb{R}$ için $E + y$ ölçülebilirdir (Teorem 2.5) ve dış ölçünün öteleme değişmezliğinden (Teorem 1.2) $m(E + y) = m^*(E + y)$ ile $m^*(E) = m(E)$ eşit olur. Sayılabilir toplamsallık ise Teorem 4.1 ile kanıtlandı.
■

4.2 Ölçünün Sürekliliği

Sayılabilir toplamsallık, iç içe geçen küme dizilerinde ölçünün limitle yer değiştirebileceğini söyler. Önce iç içe dizileri adlandıralım.

Tanım 4.1 (Artan ve Azalan Küme Toplulukları). Kümelerin $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ topluluğu her k için $E_k \subseteq E_{k+1}$ ise **artan** (ascending), her k için $E_{k+1} \subseteq E_k$ ise **azalan** (descending) adını alır.

Yani artan toplulukta kümeler büyüyerek birleşimlerine, azalan toplulukta küçülerek kesişimlerine yaklaşır.

Teorem 4.3 (Ölçünün Sürekliliği). ***(i)*** *$\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ölçülebilir kümelerin artan bir topluluğuysa*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(A_k). \tag{1}$$

(ii) *$\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ ölçülebilir kümelerin azalan bir topluluğu ve $m(B_1) < \infty$ ise*

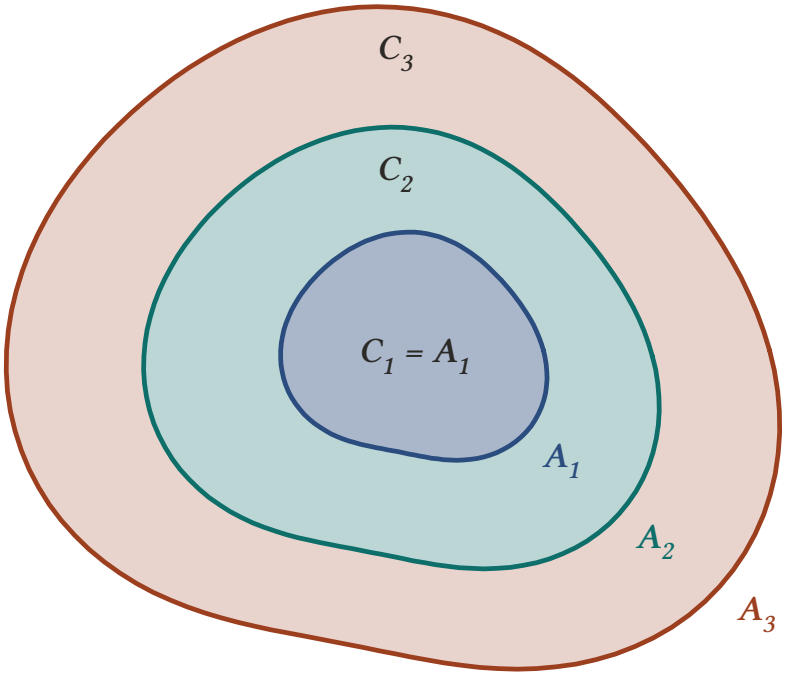
$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(B_k). \tag{2}$$

İspat.
Monotonluktan $m(A_k)$ artan, $m(B_k)$ azalan bir dizidir; bu yüzden iki limit de $[0, \infty]$ içinde vardır.
(i) kısmı. *Bir k için $m(A_k) = \infty$ ise monotonluktan sonraki bütün $m(A_j)$ ve birleşimin ölçüsü ∞ olur; (1) iki tarafı da ∞ olarak sağlanır. Bu yüzden her k için $m(A_k) < \infty$ varsayalım. $A_0 = \varnothing$ alıp her $k \geq 1$ için*

$$C_k = A_k \setminus A_{k-1}$$

tanımlayalım. Topluluk artan olduğundan C_k ler ayrık, ölçülebilir ve $\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ dir: her $x \in \bigcup A_k$, ait olduğu ilk A_k nın C_k sına düşer.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.1: Artan $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ kümeleri ve aralarındaki halkalar $C_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Halkalar ayrıktır ve ilk n tanesinin birleşimi A_n'dir; bu yüzden birleşimin ölçüsü halkaların ölçüleri toplamıdır.

Sayılabilir toplamsallıktan (Teorem 4.1) ve çıkarma özelliğinden ($A_{k-1} \subseteq A_k$, $m(A_{k-1}) < \infty$)

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\, m(A_k) - m(A_{k-1}) \,\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\, m(A_n) - m(A_0) \,\right] = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

bulunur; son adımda toplam iç içe sadeleşir ve $m(A_0) = m(\varnothing) = 0$ dır.
(ii) kısmı. *Her k için $D_k = B_1 \setminus B_k$ tanımlayalım. $\{B_k\}$ azalan olduğundan $\{D_k\}$ ölçülebilir kümelerin artan bir topluluğudur ve*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = B_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$$

dir. (i) kısmından $m\left(\bigcup D_k\right) = \lim_k m(D_k)$ olur. $B_k \subseteq B_1$ ve $m(B_k) \le m(B_1) < \infty$ olduğundan çıkarma özelliği $m(D_k) = m(B_1) - m(B_k)$ verir. Aynı özellik $\bigcap B_k \subseteq B_1$ kümesine uygulanırsa

$$m(B_1) - m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \left[\, m(B_1) - m(B_k) \,\right]$$

elde edilir. $m(B_1)$ sonlu bir sayı olduğundan iki taraftan çıkarılabilir; bu da (2) dir.
■

Yani ölçü, artan dizilerde birleşime, azalan dizilerde de (ilk kümenin ölçüsü sonlu olmak şartıyla) kesişime sürekli biçimde geçer. $m(B_1) < \infty$ koşulunun atılamayacağı alıştırmalarda görülecek.

Örnek 4.1 (Azalan Aralıkların Kesişimi). $B_k = [0, 1/k]$ için ölçünün sürekliliğini kullanarak $m(\{0\})$ değerini bulun.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$B_{k+1} \subseteq B_k$ olduğundan topluluk azalandır, $m(B_1) = 1 < \infty$ dir ve $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{0\}$ dır. Ölçünün sürekliliğinin (Teorem 4.3) (ii) kısmından

$$m(\{0\}) = \lim_{k\to\infty} m(B_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Bu, tek noktanın dış ölçüsünün sıfır olmasıyla uyumludur.
■

4.3 Borel–Cantelli Lemması ve Hemen Her Yerde

Ölçüsü sıfır olan kümeler ölçü açısından görünmezdir. Bu yüzden bir özelliğin sıfır ölçülü bir küme dışında sağlanması çoğu zaman her yerde sağlanması kadar işe yarar.

Tanım 4.2 (Hemen Her Yerde). E ölçülebilir bir küme olsun. E nin noktaları hakkındaki bir özellik, $m(E_0) = 0$ olan bir $E_0 \subseteq E$ kümesi dışında, yani her $x \in E \setminus E_0$ için sağlanıyorsa, bu özellik E üzerinde **hemen her yerde** (almost everywhere) sağlanır denir. Bu durumda "hemen her $x \in E$ için" de denir.

Yani istisna noktalar olabilir, ama bunlar sıfır ölçülü bir kümeyi aşmaz. Örneğin $\chi_{\mathbb{Q}} = 0$ h.h.y. dir, çünkü $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan ölçüsü sıfırdır.

Lemma 4.1 (Borel–Cantelli Lemması). *$\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ölçülebilir kümelerin $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$ koşulunu sağlayan sayılabilir bir topluluğu olsun. Bu durumda hemen her $x \in \mathbb{R}$, E_k kümelerinin en fazla sonlu tanesine aittir.*

İspat.
Adım 1: Kötü noktalar kümesi. *Sonsuz sayıda E_k ya ait noktaların kümesi*

$$L = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big[\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k \Big]$$

dir: $x \in L$ olması, her n için x in bir $k \geq n$ ile E_k ya ait olması, yani x in sonsuz sayıda E_k da bulunması demektir. L ölçülebilirdir (Teorem 2.4). Göstermemiz gereken $m(L) = 0$ dır.
Adım 2: Kuyruk kümeleri. *$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ olsun. Sayılabilir alt toplamsallıktan (Teorem 1.3)*

$$m(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k) < \infty$$

dir. Ayrıca $F_{n+1} \subseteq F_n$, yani $\{F_n\}$ azalandır ve $m(F_1) < \infty$ dir.
Adım 3: Süreklilik. *Ölçünün sürekliliğinin (Teorem 4.3) (ii) kısmından*

$$m(L) = \lim_{n\to\infty} m(F_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} m(E_k) = 0$$

bulunur; son eşitlik, yakınsak bir serinin kuyruklarının sıfıra gitmesidir. Dolayısıyla $m(L) = 0$ ve L dışındaki her nokta en fazla sonlu tane E_k ya aittir.
■

Yani toplam ölçüsü sonlu olan bir küme dizisinde, sonsuz kez tekrar tekrar "yakalanan" noktalar ihmal edilebilecek kadar azdır.

Örnek 4.2 (Rasyonellere Hızlı Yaklaşım). $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ rasyonel sayıların bir sıralaması olsun. Hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $|\, x - q_k \,| < 1/k^2$ eşitsizliğinin yalnız sonlu sayıda k için sağlandığını gösterin.

Çözüm.
$E_k = (q_k - 1/k^2,\, q_k + 1/k^2)$ açık aralıkları ölçülebilirdir ve $m(E_k) = 2/k^2$ dir. Buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} < \infty$$

dur. Borel–Cantelli lemmasından (Lemma 4.1) hemen her x yalnız sonlu sayıda E_k ya aittir. $x \in E_k$ ise tam olarak $|\, x - q_k \,| < 1/k^2$ demek olduğundan istenen sonuç budur.
Oysa her E_k bir rasyonel sayıyı merkez alır ve rasyoneller $\mathbb{R}$ de yoğundur; yani $\bigcup_k E_k$ yoğun bir açık kümedir. Buna rağmen noktaların neredeyse hiçbiri bu aralıklara sonsuz kez düşmez.
■

4.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar toplamsallığın ve sürekliliğin temel kullanımlarını pekiştirir.

Alıştırma 4.1 (Birleşim ve Kesişimin Ölçüsü). E_1 ve E_2 sonlu ölçülü ölçülebilir kümeler olsun. Aşağıdaki eşitliği gösterin:

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

Çözüm.
Adım 1: Ayrık parçalar. $E_1 \setminus E_2$, $E_1 \cap E_2$ ve $E_2 \setminus E_1$ kümeleri ölçülebilir (σ-cebiri özelliği, Teorem 2.4) ve ikişer ikişer ayrıktır. Ayrıca

$$E_1 \cup E_2 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \setminus E_1),$$

$$E_1 = (E_1 \setminus E_2) \cup (E_1 \cap E_2), \qquad E_2 = (E_2 \setminus E_1) \cup (E_1 \cap E_2)$$

dir.
Adım 2: Toplamsallık. Sonlu toplamsallıktan (Teorem 4.1) $a = m(E_1 \setminus E_2)$, $c = m(E_1 \cap E_2)$, $b = m(E_2 \setminus E_1)$ yazarsak

$$m(E_1 \cup E_2) = a + c + b, \qquad m(E_1) = a + c, \qquad m(E_2) = b + c$$

olur. Bu sayılar E_1, E_2 sonlu ölçülü olduğundan sonludur.
Adım 3: Sonuç. Buna göre

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = a + b + 2c = m(E_1) + m(E_2).$$

■

Alıştırma 4.2 (Süreklilikte Sonluluk Koşulu). Ölçünün sürekliliği teoreminin (ii) kısmındaki $m(B_1) < \infty$ koşulunun atılamayacağını gösterin.

Çözüm.
Koşul sağlanmadığında $m\left(\bigcap_k B_k\right) = \lim_k m(B_k)$ eşitliğinin bozulduğu bir azalan topluluk vermek yeter. $B_k = [k, \infty)$ alalım.

- Her B_k bir aralık olduğundan ölçülebilirdir ve $B_{k+1} \subseteq B_k$ dir; topluluk azalandır.
- Her k için B_k, uzunluğu n olan $[k, k+n]$ aralıklarını içerir; monotonluktan $m(B_k) \geq n$ her n için, yani $m(B_k) = \infty$ dur. Dolayısıyla $\lim_k m(B_k) = \infty$.
- Hiçbir x her B_k da bulunamaz, çünkü $k > x$ için $x \notin B_k$ dır. Böylece $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \varnothing$ ve ölçüsü 0 dır.

Sonuç olarak

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 0 \neq \infty = \lim_{k\to\infty} m(B_k)$$

olur. Burada eksik olan tek varsayım $m(B_1) < \infty$ dur; demek ki bu koşul teoremden atılamaz.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 4.3 (Ayrık Ölçülebilir Kümelerle Kesişimin Dış Ölçüsü). $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ayrık ölçülebilir kümelerin sayılabilir bir topluluğu olsun. Her $A \subseteq \mathbb{R}$ için

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k)$$

olduğunu kanıtlayın.

Çözüm.
Adım 1: Sonlu durum. Her n için

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)$$

eşitliğini n üzerinden tümevarımla gösterelim. $n = 1$ için açıktır. $n-1$ için doğru olsun ve $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ diyelim. E_n ölçülebilir olduğundan Carathéodory koşulunu (Tanım 1.6) test kümesi $A \cap U_n$ ile yazarız:

$$m^*(A \cap U_n) = m^*(A \cap U_n \cap E_n) + m^*(A \cap U_n \setminus E_n).$$

Ayrıklıktan $U_n \cap E_n = E_n$ ve $U_n \setminus E_n = U_{n-1}$ dir. Böylece

$$m^*(A \cap U_n) = m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap U_{n-1}),$$

ve tümevarım varsayımı sonlu durumu verir.
Adım 2: $\geq$ eşitsizliği. Her n için $A \cap U_n \subseteq A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olduğundan dış ölçünün monotonluğu ve sonlu durum

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} m^*(A \cap E_k)$$

verir. Sol taraf n den bağımsızdır; $n \to \infty$ alınırsa sağ taraf serinin toplamına gider.
Adım 3: $\leq$ eşitsizliği.

$$A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap E_k)$$

olduğundan sayılabilir alt toplamsallık (Teorem 1.3)

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(A \cap E_k)$$

verir. İki eşitsizlik birlikte istenen eşitliktir.
$A = \mathbb{R}$ özel durumu, ölçünün sayılabilir toplamsallığıdır.
■

Alıştırma 4.4 (Sayılabilir Toplamsal Küme Fonksiyonunun Temel Özellikleri). $\mathcal{M}'$, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir σ-cebiri; $m' : \mathcal{M}' \to [0, \infty]$ sayılabilir toplamsal ve $m'(\varnothing) = 0$ olan bir küme fonksiyonu olsun. m' nün sonlu toplamsal, monoton ve sayılabilir monoton olduğunu ve çıkarma özelliğine sahip olduğunu gösterin.

Çözüm.
Aşağıda bütün kümeler $\mathcal{M}'$ nün elemanıdır; σ-cebiri tümleme, sayılabilir birleşim ve dolayısıyla fark ile kesişim altında kapalı olduğundan kurulan her küme de $\mathcal{M}'$ dadır.
Sonlu toplamsallık. $E_1, \ldots, E_n$ ayrık olsun. $k > n$ için $E_k = \varnothing$ alırsak $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ayrık bir topluluk olur ve birleşimi $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ dir. Sayılabilir toplamsallık ve $m'(\varnothing) = 0$ ile

$$m'\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m'(E_k) + \sum_{k>n} m'(\varnothing) = \sum_{k=1}^{n} m'(E_k).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Monotonluk. $A \subseteq B$ ise $B = A \cup (B \setminus A)$ ayrık birleşimdir. Sonlu toplamsallıktan

$$m'(B) = m'(A) + m'(B \setminus A) \geq m'(A),$$

çünkü $m'(B \setminus A) \geq 0$ dır.
Çıkarma özelliği. $A \subseteq B$ ve $m'(A) < \infty$ ise yukarıdaki eşitlikten $m'(A)$ sonlu olduğu için çıkarılabilir: $m'(B \setminus A) = m'(B) - m'(A)$.
Sayılabilir monotonluk. $E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olsun; $m'(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m'(E_k)$ olduğunu gösterelim. Topluluğu ayrık hâle getirelim:

$$G_1 = E_1, \qquad G_k = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} E_j \quad (k \geq 2).$$

G_k lar ayrıktır (bir nokta, ait olduğu ilk E_k nın G_k sındadır), $G_k \subseteq E_k$ dır ve $\bigcup_k G_k = \bigcup_k E_k$ dir. Monotonluk, sayılabilir toplamsallık ve yine monotonluk ile

$$m'(E) \leq m'\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m'(G_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m'(E_k).$$

■

Alıştırma 4.5 (Sayılabilir Toplamsal Küme Fonksiyonunun Sürekliliği). $\mathcal{M}'$, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir σ-cebiri; $m' : \mathcal{M}' \to [0, \infty]$ sayılabilir toplamsal ve $m'(\varnothing) = 0$ olan bir küme fonksiyonu olsun. m' nün Lebesgue ölçüsüyle aynı süreklilik özelliklerine sahip olduğunu gösterin.

Çözüm.
Göstermemiz gereken, ölçünün sürekliliğindeki (Teorem 4.3) iki eşitliğin m' için de geçerli olmasıdır. O teoremin ispatı Lebesgue ölçüsünün yalnız şu özelliklerini kullanır: sayılabilir toplamsallık, monotonluk, çıkarma özelliği ve boş kümenin ölçüsünün sıfır olması. Bunların hepsi m' için vardır (Alıştırma 4.4). Adımları m' için yazalım.
Artan topluluk. $\{A_k\} \subseteq \mathcal{M}'$ artan olsun. Bir k için $m'(A_k) = \infty$ ise monotonluktan iki taraf da ∞ dur. Aksi hâlde $A_0 = \varnothing$ ve $C_k = A_k \setminus A_{k-1}$ alalım. C_k lar $\mathcal{M}'$ nün ayrık elemanlarıdır ve birleşimleri $\bigcup_k A_k$ dır. Sayılabilir toplamsallık ve çıkarma özelliğinden

$$\begin{aligned} m'\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} m'(C_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left[\, m'(A_k) - m'(A_{k-1}) \,\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\, m'(A_n) - m'(\varnothing) \,\right] = \lim_{n\to\infty} m'(A_n). \end{aligned}$$

Azalan topluluk. $\{B_k\} \subseteq \mathcal{M}'$ azalan ve $m'(B_1) < \infty$ olsun. $D_k = B_1 \setminus B_k$ artan bir topluluktur ve $\bigcup_k D_k = B_1 \setminus \bigcap_k B_k$ dir. Monotonluktan her B_k ile $\bigcap_k B_k$ sonlu ölçülüdür; çıkarma özelliği ve artan durum

$$m'(B_1) - m'\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \left[\, m'(B_1) - m'(B_k) \,\right]$$

verir. $m'(B_1)$ sonlu olduğundan iki taraftan çıkarılır ve $m'\left(\bigcap_k B_k\right) = \lim_k m'(B_k)$ elde edilir.
■

Alıştırma 4.6 (Süreklilik ve Sayılabilir Toplamsallığın Denkliği). $\mathcal{M}'$, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir σ-cebiri; $m' : \mathcal{M}' \to [0, \infty]$, $m'(\varnothing) = 0$ olan sonlu toplamsal bir küme fonksiyonu olsun. m' nün sayılabilir toplamsal olmasının, ölçünün sürekliliği teoremindeki iki süreklilik özelliğine sahip olmasına denk olduğunu gösterin.

Çözüm.
Sayılabilir toplamsallık ⇒ süreklilik. m' sayılabilir toplamsal ise m' nün iki süreklilik özelliğine de sahip olduğu önceki alıştırmada (Alıştırma 4.5) gösterildi.

 CC BY-NC-SA 4.0

Süreklilik ⇒ sayılabilir toplamsallık. m' sonlu toplamsal olsun ve artan topluluklar için sürekli olsun (yalnız bu yarı kullanılacak). $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}'$ ayrık bir topluluk olsun ve

$$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

diyelim. $\{A_n\}$ artandır ve $\bigcup_n A_n = \bigcup_k E_k$ dır. Süreklilik ve sonlu toplamsallıktan

$$\begin{aligned} m'\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \lim_{n\to\infty} m'(A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m'(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m'(E_k) \end{aligned}$$

bulunur; son eşitlik, terimleri negatif olmayan bir serinin toplamının kısmi toplamların limiti olmasıdır. Demek ki m' sayılabilir toplamsaldır.
Böylece sonlu toplamsallık varsayımı altında sayılabilir toplamsallık ile süreklilik denktir. Lebesgue ölçüsü bunun özel bir durumudur.
■

Alıştırma 4.7 (Arzelà Lemması). $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$, $[a,b]$ nin ölçülebilir alt kümelerinden oluşan bir topluluk olsun ve bir $\delta > 0$ için her k da $m(E_k) \geq \delta$ olsun. Sonsuz sayıda E_k ya ait bir $x \in [a,b]$ bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Kuyruk kümeleri. Her n için $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ olsun. F_n ölçülebilirdir, $F_{n+1} \subseteq F_n$ dir ve $F_n \subseteq [a,b]$ olduğundan $m(F_1) \leq b - a < \infty$ dur. Ayrıca $E_n \subseteq F_n$ olduğundan monotonluk $m(F_n) \geq m(E_n) \geq \delta$ verir.
Adım 2: Süreklilik. $\{F_n\}$ azalan ve $m(F_1)$ sonlu olduğundan ölçünün sürekliliğinin (Teorem 4.3) (ii) kısmı

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(F_n) \geq \delta > 0$$

verir. Pozitif ölçülü küme boş olamaz; bir $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ seçelim. $x \in F_1 \subseteq [a,b]$ dir.
Adım 3: Sonsuz kez ait olma. Her n için $x \in F_n$, yani $x \in E_k$ olacak bir $k \geq n$ vardır. x yalnız sonlu sayıda E_k ya ait olsaydı, bunların en büyük indisi N olmak üzere $x \notin F_{N+1}$ olurdu; bu çelişkidir. Dolayısıyla x sonsuz sayıda E_k ya aittir.
Bu sonuç Borel–Cantelli lemmasının bir tür karşıtıdır: orada ölçüler toplamı sonlu olduğu için neredeyse hiçbir nokta sonsuz kez yakalanmaz, burada ölçüler aşağıdan sınırlı ve küme sınırlı olduğu için bazı noktalar sonsuz kez yakalanır.
■

Ölçünün bu kadar iyi davranması, her kümenin ölçülebilir olup olmadığı sorusunu gündeme getirir. Sıradaki bölüm Ölçülemez Kümeler ve Vitali Kümesi, yanıtın olumsuz olduğunu gösteriyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

5. Ölçülemez Kümeler ve Vitali Kümesi

Şimdiye kadar ölçülebilir kümelerin ne kadar zengin bir aile oluşturduğunu gördük: aralıklar, açık ve kapalı kümeler, bütün Borel kümeleri ölçülebilirdir. Doğal soru şudur: ölçülemez bir küme var mıdır? Yanıt hiç de açık değildir.
Bir uçta durum nettir: dış ölçüsü sıfır olan bir kümenin her alt kümesinin de dış ölçüsü sıfırdır, dolayısıyla Teorem 1.4 gereği her alt kümesi ölçülebilirdir. Bu bölümde öbür ucun tam tersine davrandığını göstereceğiz: dış ölçüsü pozitif olan her kümenin ölçülemez bir alt kümesi vardır.

5.1 Rasyonel Denklik ve Seçme Kümeleri

Ölçülemez kümeyi kurmak için reel sayıları, aralarındaki farkın rasyonel olup olmamasına göre gruplara ayıracağız.

Tanım 5.1 (Rasyonel Denklik). $E \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun. $x, y \in E$ için $x - y \in \mathbb{Q}$ ise x ile y'ye **rasyonel denk** denir ve $x \sim y$ yazılır. Bu bağıntıya E üzerindeki **rasyonel denklik** (rational equivalence) bağıntısı denir.

Yani iki nokta, biri ötekinden rasyonel bir öteleme ile elde edilebiliyorsa denktir. Bu bağıntı yansımalı ($x - x = 0$), simetrik ($x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Q}$) ve geçişlidir (iki rasyonelin toplamı rasyoneldir); dolayısıyla bir denklik bağıntısıdır ve E'yi ayrık denklik sınıflarına ayırır. $x \in E$'nin sınıfı $E \cap (x + \mathbb{Q})$ kümesidir.

Örnek 5.1 (Reel Doğrudaki Denklik Sınıfları). $\mathbb{R}$ üzerindeki rasyonel denklik bağıntısının sınıflarını betimleyin ve sınıf sayısının sayılamaz olduğunu gösterin.

> **Çözüm.**
> $x \in \mathbb{R}$'nin sınıfı $x + \mathbb{Q} = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$ kümesidir. Örneğin 0'ın sınıfı $\mathbb{Q}$'nun kendisi, $\sqrt{2}$'nin sınıfı $\sqrt{2} + \mathbb{Q}$'dur ve bu iki sınıf ayrıktır.
> Her sınıf, $q \mapsto x + q$ eşlemesiyle $\mathbb{Q}$ ile birebir eşlendiğinden sayılabilirdir. Sınıflar sayılabilir çoklukta olsaydı $\mathbb{R}$ sayılabilir çoklukta sayılabilir kümenin birleşimi, yani sayılabilir olurdu (bkz. Analiz 1: Sayılabilir Kümeler). Bu, $\mathbb{R}$'nin sayılamaz olmasıyla çelişir; o hâlde sınıflar sayılamaz çokluktadır.
> ■

Sayılamaz çoklukta sınıfın her birinden birer eleman seçmek için somut bir kural yoktur; bu seçimi seçme aksiyomu garanti eder.

Tanım 5.2 (Seçme Aksiyomu). Boş olmayan kümelerden oluşan her $\{A_i\}_{i \in I}$ ailesi için, her $i \in I$'ya A_i'nin bir elemanını karşılık getiren bir f fonksiyonu vardır: her i için $f(i) \in A_i$. Bu ilkeye **seçme aksiyomu** (axiom of choice) denir.

Yani ailenin her kümesinden aynı anda birer eleman seçilebilir; aile sonsuz, hatta sayılamaz olsa bile.

Tanım 5.3 (Seçme Kümesi). $E \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun. Rasyonel denkliğin her denklik sınıfından **tam olarak bir** eleman içeren $\mathcal{C}_E \subseteq E$ kümesine, E üzerindeki rasyonel denklik için bir **seçme kümesi** (choice set) denir.

Yani $\mathcal{C}_E$'nin farklı iki elemanı hiçbir zaman rasyonel denk değildir ve E'nin her noktası $\mathcal{C}_E$'nin bir elemanına rasyonel denktir. Seçme aksiyomunu sınıflar ailesine uygulamak, böyle bir kümenin var olduğunu verir.

Tanım 5.4 (Vitali Kümesi). $[0, 1]$ üzerindeki rasyonel denklik için bir seçme kümesine **Vitali kümesi** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani Vitali kümesi, $[0,1]$'deki her "rasyonel öteleme sınıfının" tek bir temsilcisidir. Aşağıda göreceğimiz gibi, bu küme ölçülemezdir.
Seçme kümesinin iki temel özelliği, ölçülemezlik ispatının iskeletini oluşturur:

Önerme 5.1 (Seçme Kümesinin Rasyonel Ötelemeleri). *$\mathcal{C}_E$, E üzerindeki rasyonel denklik için bir seçme kümesi olsun. O zaman*

1. $\{\mathcal{C}_E + q\}_{q\in\mathbb{Q}}$ *ailesi sayılabilir ve ayrıktır,*
2. $E \subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\mathcal{C}_E + q)$.

İspat.
(1) Aile $\mathbb{Q}$ ile indislendiğinden sayılabilirdir. $q \neq q'$ iken bir x hem $\mathcal{C}_E + q$ hem $\mathcal{C}_E + q'$ içinde olsun: $x = c + q = c' + q'$, $c, c' \in \mathcal{C}_E$. O zaman $c - c' = q' - q \in \mathbb{Q}$, yani $c \sim c'$. Seçme kümesi her sınıftan tek eleman içerdiğinden $c = c'$, buradan $q = q'$ çıkar; çelişki.
(2) $x \in E$ ise x bir $c \in \mathcal{C}_E$'ye rasyonel denktir: $q = x - c \in \mathbb{Q}$ ve $x = c + q \in \mathcal{C}_E + q$. ■

5.2 Vitali Teoremi

Ölçülemezlik ispatının anahtarı şu gözlemdir: sınırlı bir bölgeye sonsuz sayıda ayrık ve birbirinin ötelemesi olan küme sığdırılabiliyorsa, bu kümelerin ölçüsü sıfır olmak zorundadır.

Lemma 5.1 (Vitali Lemması). *E sınırlı ve ölçülebilir bir küme olsun. $\{E + \lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ailesi ayrık olacak biçimde sayılabilir sonsuz ve sınırlı bir $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ kümesi varsa $m(E) = 0$'dır.*

İspat.
Her $E + \lambda$ ölçülebilirdir (Teorem 2.5) ve öteleme dış ölçüyü korur (Teorem 1.2), dolayısıyla $m(E + \lambda) = m(E)$.
$E \subseteq [-a, a]$ ve $\Lambda \subseteq [-b, b]$ olsun. O zaman

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (E + \lambda) \subseteq [-a - b, a + b]$$

sınırlı ve ölçülebilir bir kümedir; ölçüsü en çok $2(a + b)$'dir. Aile ayrık ve sayılabilir olduğundan sayılabilir toplamsallık (Teorem 4.1) ile

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} m(E) = m\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} (E + \lambda)\right) \leq 2(a + b) < \infty.$$

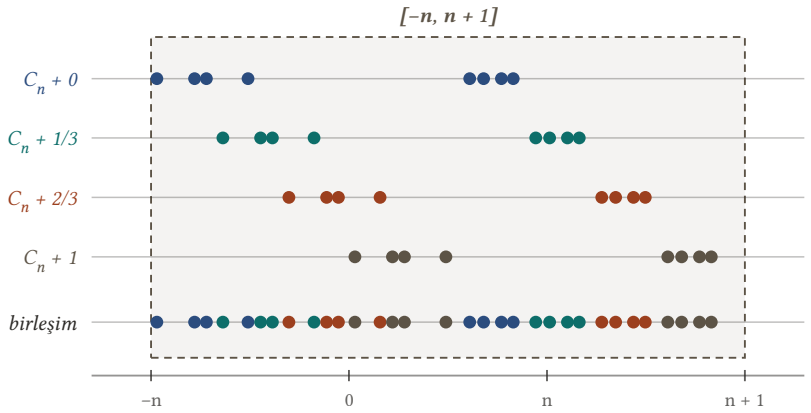
Solda aynı $m(E) \geq 0$ sayısı sonsuz kez toplanıyor. Bu toplam ancak $m(E) = 0$ ise sonludur. ■

Teorem 5.1 (Vitali Teoremi). *$E \subseteq \mathbb{R}$ ve $m^*(E) > 0$ ise E üzerindeki rasyonel denklik için her seçme kümesi ölçülemezdir. Özel olarak E'nin ölçülebilir olmayan bir alt kümesi vardır.*

İspat.
$\mathcal{C}_E$ bir seçme kümesi olsun (seçme aksiyomu varlığını garanti eder). $\mathcal{C}_E$'nin ölçülebilir olduğunu varsayıp çelişki elde edeceğiz.
Adım 1: $m(\mathcal{C}_E) = 0$. *$n \in \mathbb{N}$ için $C_n = \mathcal{C}_E \cap [-n, n]$ kümesi, iki ölçülebilir kümenin kesişimi olarak ölçülebilir (Teorem 2.4) ve sınırlıdır. $\Lambda = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ sayılabilir sonsuz ve sınırlıdır. $C_n \subseteq \mathcal{C}_E$ ve Önerme 5.1 gereği $\{C_n + q\}_{q\in\Lambda}$ ailesi ayrıktır. Vitali Lemması (Lemma 5.1) ile $m(C_n) = 0$. $\mathcal{C}_E = \bigcup_n C_n$ olduğundan sayılabilir alt toplamsallık (Teorem 1.3) ile*

$$m(\mathcal{C}_E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(C_n) = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.1: $C_n \subseteq [-n, n]$ *kümesinin [0, 1]'deki birkaç rasyonel sayı kadar ötelemeleri (şematik). Ötelemeler ikişer ikişer ayrıktır ve hepsi [–n, n + 1] aralığında kalır. Sonsuz sayıda ayrık kopyanın ölçüleri toplamı* $2n + 1$*'i aşamayacağından* $m(C_n) = 0$ *olmak zorundadır.*

Adım 2: Çelişki. *Önerme 5.1 gereği* $E \subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\mathcal{C}_E + q)$*. Dış ölçünün monotonluğu, sayılabilir alt toplamsallığı (Teorem 1.3;* $\mathbb{Q}$ *sayılabilirdir) ve öteleme değişmezliği (Teorem 1.2) ile*

$$0 < m^*(E) \le \sum_{q\in\mathbb{Q}} m^*(\mathcal{C}_E + q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}} m(\mathcal{C}_E) = 0.$$

Bu çelişki $\mathcal{C}_E$*'nin ölçülemez olduğunu gösterir.* $\mathcal{C}_E \subseteq E$ *olduğundan* E*'nin ölçülemez bir alt kümesi vardır.* ■

Yani pozitif dış ölçülü her küme ölçülemez alt kümeler barındırır; özel olarak her Vitali kümesi ölçülemezdir. Sıfır dış ölçülü kümelerle birlikte düşünüldüğünde tablo tamamlanır: bir kümenin bütün alt kümelerinin ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul, dış ölçüsünün sıfır olmasıdır.
Ölçülemez kümelerin varlığı, dış ölçünün bütün kümeler üzerinde toplamsal olamayacağını da gösterir.

Sonuç 5.1 (Dış Ölçü Toplamsal Değildir). $A \cap B = \varnothing$ *ve*

$$m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$$

olacak biçimde $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *kümeleri vardır.*

İspat.
Aksini varsayalım: ayrık her A, B *için* $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ *olsun (sayılabilir alt toplamsallık "*$\le$*" yönünü her zaman verdiğinden, eşitsizliğin başarısız olması eşitlik demektir).*
Rastgele bir $E \subseteq \mathbb{R}$ *alalım. Her* $A \subseteq \mathbb{R}$ *için* $A \cap E$ *ile* $A \cap E^c$ *ayrıktır ve birleşimleri* A*'dır; varsayım gereği*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Bu, E*'nin Carathéodory koşulunu (Tanım 1.6) sağlaması demektir. O hâlde her küme ölçülebilir olur. Oysa Teorem 5.1 gereği* $[0,1]$*'in (*$m^*([0,1]) = 1 > 0$*) ölçülemez bir alt kümesi vardır; çelişki.* ■

Yani dış ölçü, ayrık kümelerde bile toplamsal olmayabilir; toplamsallığı ancak ölçülebilir kümelerle sınırladığımızda kazanırız. Carathéodory koşulu tam da bu toplamsallığı sağlayan kümeleri seçer.

5.3 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar rasyonel denklik bağıntısını ve seçme kümelerinin büyüklüğünü inceler.

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 5.1 (Rasyonel Denklik Bir Denklik Bağıntısıdır). Boş olmayan her $E \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde rasyonel denkliğin bir denklik bağıntısı olduğunu gösterin.

Çözüm.
$x, y, z \in E$ olsun ve $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$ olduğunu hatırlayalım. Üç özelliği sırayla denetleyelim.
Yansıma. $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$, yani $x \sim x$.
Simetri. $x \sim y$ ise $x - y = q \in \mathbb{Q}$; o zaman $y - x = -q \in \mathbb{Q}$, yani $y \sim x$.
Geçişme. $x \sim y$ ve $y \sim z$ ise $x - y = q_1$ ve $y - z = q_2$ rasyoneldir. $\mathbb{Q}$ toplamaya göre kapalı olduğundan

$$x - z = (x - y) + (y - z) = q_1 + q_2 \in \mathbb{Q},$$

yani $x \sim z$.
Üç özellik de sağlandığından rasyonel denklik E üzerinde bir denklik bağıntısıdır. İspatta E'nin hiçbir özelliği kullanılmadı; yalnız $\mathbb{Q}$'nun toplamsal bir grup olduğu kullanıldı.
■

Alıştırma 5.2 (Rasyonel Sayılarda Seçme Kümesi). $\mathbb{Q}$ üzerindeki rasyonel denklik için açık bir seçme kümesi bulun.

Çözüm.
İki rasyonel sayının farkı her zaman rasyoneldir; dolayısıyla $\mathbb{Q}$'nun her iki elemanı rasyonel denktir. Yani $\mathbb{Q}$ üzerinde bağıntının **tek** bir denklik sınıfı vardır: $\mathbb{Q}$'nun kendisi.
Seçme kümesi her sınıftan tam bir eleman içermelidir; tek sınıf olduğundan tek elemanlı her $\{q_0\}$ ($q_0 \in \mathbb{Q}$) kümesi bir seçme kümesidir. Örneğin

$$\mathcal{C}_{\mathbb{Q}} = \{0\}.$$

Bu küme tek nokta olduğundan dış ölçüsü sıfırdır ve ölçülebilirdir; bu, Teorem 5.1 ile çelişmez, çünkü $m^*(\mathbb{Q}) = 0$'dır.
■

Alıştırma 5.3 (İrrasyonel Sayılarda Seçme Kümesi). $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ üzerindeki rasyonel denklik sınıflarını betimleyin. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ için her seçme kümesine 0 eklenince $\mathbb{R}$ için bir seçme kümesi elde edildiğini ve bu yüzden $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ için her seçme kümesinin ölçülemez olduğunu gösterin.

Çözüm.
Sınıflar. x irrasyonel olsun. $q \in \mathbb{Q}$ için $x + q$ de irrasyoneldir; aksi hâlde $x = (x + q) - q$ rasyonel olurdu. Demek ki $x + \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ve x'in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ içindeki sınıfı

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (x + \mathbb{Q}) = x + \mathbb{Q}$$

kümesinin tamamıdır. Böylece $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$'nun sınıfları, x irrasyonel olmak üzere $x + \mathbb{Q}$ kümeleridir.
$\mathbb{R}$ için seçme kümesi. $\mathbb{R}$ üzerindeki sınıflar $x + \mathbb{Q}$ ($x \in \mathbb{R}$) kümeleridir. x rasyonelse $x + \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ olur; x irrasyonelse sınıf tümüyle irrasyonellerden oluşur. Yani $\mathbb{R}$'nin sınıfları, $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$'nun sınıflarıdır.
S, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ için bir seçme kümesi olsun. S her irrasyonel sınıftan tam bir eleman içerir ve hiç rasyonel içermez; 0 ise $\mathbb{Q}$ sınıfının tek temsilcisidir. Dolayısıyla $S \cup \{0\}$, $\mathbb{R}$'nin her sınıfından tam bir eleman içerir, yani $\mathbb{R}$ için bir seçme kümesidir.
Ölçülemezlik. $m^*(\mathbb{R}) = \infty > 0$ olduğundan Teorem 5.1 gereği $S \cup \{0\}$ ölçülemezdir. S ölçülebilir olsaydı, $\{0\}$ dış ölçüsü sıfır olduğundan ölçülebilir (Teorem 1.4) ve $S \cup \{0\}$ iki ölçülebilir kümenin birleşimi olarak ölçülebilir olurdu (Teorem 1.5). Bu çelişki S'nin ölçülemez olduğunu gösterir.
Sonuç olarak $\mathbb{Q}$'dan farklı olarak $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ için seçme kümesi, $\mathbb{R}$ için olanlar kadar "vahşi"dir; varlığı seçme aksiyomuna dayanır ve somut bir formülle yazılabilecek bir seçme kümesi beklenmemelidir.
■

Alıştırma 5.4 (Reel Sayılarda İrrasyonel Denklik). $x, y \in \mathbb{R}$ için $x - y$ irrasyonel ya da sıfır ise x ile y'ye irrasyonel denk diyelim. Bu bağıntı $\mathbb{R}$ üzerinde bir denklik bağıntısı mıdır?

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Bağıntıyı $x \approx y$ ile gösterelim.
Yansıma ve simetri sağlanır. $x - x = 0$ olduğundan $x \approx x$. $x - y$ irrasyonel ya da sıfırsa $y - x = -(x - y)$ de öyledir, yani $x \approx y \Rightarrow y \approx x$.
Geçişme bozulur. $x = 0$, $y = \sqrt{2}$, $z = 1$ alalım.

- $x - y = -\sqrt{2}$ irrasyoneldir, yani $0 \approx \sqrt{2}$.
- $y - z = \sqrt{2} - 1$ irrasyoneldir (rasyonel olsaydı $\sqrt{2}$ de rasyonel olurdu), yani $\sqrt{2} \approx 1$.
- Oysa $x - z = -1$ rasyoneldir ve sıfır değildir, yani $0 \not\approx 1$.

Dolayısıyla irrasyonel denklik $\mathbb{R}$ üzerinde bir denklik bağıntısı **değildir**. Sorunun kaynağı, irrasyonel sayıların toplamaya göre kapalı olmamasıdır: iki irrasyonelin toplamı rasyonel olabilir.
■

Alıştırma 5.5 (Rasyonel Sayılarda İrrasyonel Denklik). $x - y$ irrasyonel ya da sıfır ise x ile y'ye irrasyonel denk diyelim. Bu bağıntı $\mathbb{Q}$ üzerinde bir denklik bağıntısı mıdır?

Çözüm.
$x, y \in \mathbb{Q}$ ise $x - y$ rasyoneldir, dolayısıyla hiçbir zaman irrasyonel olamaz. Bu yüzden $x - y$ "irrasyonel ya da sıfır" koşulunu yalnız $x - y = 0$ iken sağlar:

$$x \approx y \Leftrightarrow x = y.$$

Yani $\mathbb{Q}$ üzerinde irrasyonel denklik eşitlik bağıntısıdır. Eşitlik yansımalı, simetrik ve geçişlidir; dolayısıyla bu bağıntı $\mathbb{Q}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Denklik sınıfları tek elemanlı $\{q\}$ kümeleridir.
■

Alıştırma 5.6 (Seçme Kümesi Sayılamazdır). $m^*(E) > 0$ ise E üzerindeki rasyonel denklik için her seçme kümesinin sayılamaz olduğunu gösterin.

Çözüm.
$\mathcal{C}_E$, E için bir seçme kümesi olsun ve sayılabilir olduğunu varsayalım.
Adım 1: E sayılabilir olur. E'nin her noktası bir $c \in \mathcal{C}_E$'ye rasyonel denk olduğundan, yani bir $q \in \mathbb{Q}$ için $c + q$ biçiminde yazıldığından

$$E \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\mathcal{C}_E + q).$$

Her $\mathcal{C}_E + q$, $\mathcal{C}_E$ ile birebir eşlendiğinden sayılabilirdir; $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan sağdaki birleşim, sayılabilir çoklukta sayılabilir kümenin birleşimi olarak sayılabilirdir. Sayılabilir bir kümenin alt kümesi olan E de sayılabilirdir.
Adım 2: $m^*(E) = 0$. Her $\varepsilon > 0$ için $\{x\} \subseteq (x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2)$ olduğundan $m^*(\{x\}) \leq \varepsilon$; dolayısıyla $m^*(\{x\}) = 0$. $E = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ise sayılabilir alt toplamsallık (Teorem 1.3) ile

$$m^*(E) \leq \sum_k m^*(\{x_k\}) = 0.$$

Bu, $m^*(E) > 0$ varsayımıyla çelişir. O hâlde $\mathcal{C}_E$ sayılamazdır.
Aynı sonuç Vitali Teoremi (Teorem 5.1) ile de elde edilir: sayılabilir bir küme Adım 2'deki gibi sıfır dış ölçülüdür, dolayısıyla ölçülebilirdir (Teorem 1.4); oysa $\mathcal{C}_E$ ölçülemezdir. Yukarıdaki doğrudan yolun üstünlüğü, ölçülemezlik teoremine hiç başvurmamasıdır.
■

Ölçülemez kümeler seçme aksiyomuna dayanan, gözle görülemeyen nesnelerdir. Sonraki bölümde ise tamamen somut bir kurulumla şaşırtıcı bir küme ve fonksiyon elde edeceğiz: Cantor Kümesi ve Cantor Fonksiyonu.

 CC BY-NC-SA 4.0

6. Cantor Kümesi ve Cantor Fonksiyonu

Bu bölümde iki klasik örnek kuruyoruz. Birincisi Cantor kümesidir: ölçüsü sıfır olduğu hâlde $[0,1]$ kadar kalabalık, yani sayılamaz bir küme. İkincisi Cantor–Lebesgue fonksiyonudur: sürekli ve artan, 0'dan 1'e çıkan, ama türevi ölçüsü 1 olan bir kümede sıfır olan bir fonksiyon.
Bu iki nesneyi bir araya getirince, Lebesgue ölçülebilir olup Borel kümesi olmayan bir küme de elde ederiz. Böylece Borel kümelerinin, ölçülebilir kümelerin gerçekten daha küçük bir ailesi olduğu ortaya çıkar.

6.1 Cantor Kümesi

Cantor kümesi, $[0,1]$ aralığından her adımda kalan aralıkların açık orta üçte birlerini atarak elde edilir.

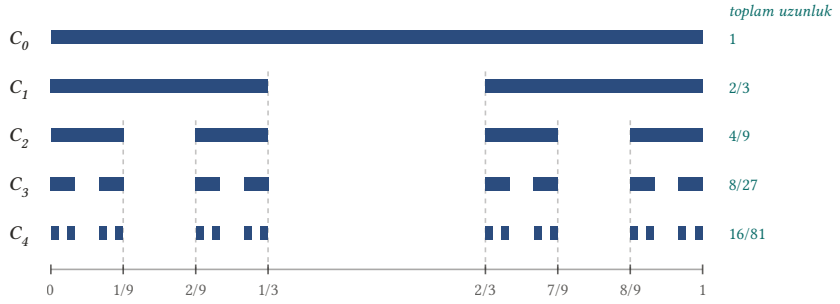
Tanım 6.1 (Cantor Kümesi). $C_0 = [0,1]$ olsun. C_{k-1} ayrık kapalı aralıkların sonlu bir birleşimi olarak elde edilmişse, bu aralıkların her birini üç eş parçaya bölüp ortadaki açık parçayı atarak C_k kümesini tanımlarız. Örneğin

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \qquad C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Cantor kümesi (Cantor set)

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$$

kümesidir. C_k'yi oluşturan kapalı aralıklara k-inci aşamanın **Cantor aralıkları** denir.



Şekil 6.1: Cantor kümesinin ilk aşamaları. Her adımda kalan kapalı aralıkların açık orta üçte biri atılır; C_k, uzunluğu 3^{-k} olan 2^k kapalı aralıktan oluşur ve toplam uzunluğu $(2/3)^k$ sıfıra gider.

Yani Cantor kümesi, orta üçte bir atma işlemi sonsuza kadar sürdürüldüğünde geriye kalan noktalardır. Aşamalar üzerinde tümevarımla iki özellik hemen görülür:

- $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$, $[0,1]$'in kapalı alt kümelerinden oluşan azalan bir dizidir: $C_{k+1} \subseteq C_k$.
- C_k, her birinin uzunluğu 3^{-k} olan 2^k tane ayrık kapalı aralığın birleşimidir ve C_k'nin her Cantor aralığı, C_{k+1}'in tam iki Cantor aralığını içerir.

Teorem 6.1 (Cantor Kümesinin Temel Özellikleri). *Cantor kümesi C kapalı, sıfır ölçülü ve sayılamaz bir kümedir.*

> ***İspat.***

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: Kapalılık ve ölçü. *Her C_k sonlu sayıda kapalı aralığın birleşimi olduğundan kapalıdır; kapalı kümelerin kesişimi de kapalı olduğundan C kapalıdır. Kapalı kümeler Borel kümesi, dolayısıyla ölçülebilirdir (Teorem 2.4). C_k uzunluğu 3^{-k} olan 2^k ayrık aralığın birleşimi olduğundan, ölçünün sonlu toplamsallığı (Teorem 4.1) ile*

$$m(C_k) = 2^k \cdot 3^{-k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Her k için $C \subseteq C_k$ olduğundan monotonluktan $m(C) \le (2/3)^k$ olur; $k \to \infty$ için $m(C) = 0$ bulunur.
Adım 2: Sayılamazlık. *Aksini varsayalım ve $C = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir numaralama olsun. C_1'in iki Cantor aralığı ayrık olduğundan en az biri c_1'i içermez; bunu F_1 ile gösterelim. F_1 tam iki Cantor aralığı (C_2'nin) içerir ve bunlardan en az biri c_2'yi içermez; bu aralık F_2 olsun. Bu şekilde devam ederek her k için şu özellikleri taşıyan F_k aralıkları elde ederiz:*

- *F_k, C_k'nin bir Cantor aralığıdır; dolayısıyla kapalı ve sınırlıdır ve $F_k \subseteq C_k$;*
- *$F_{k+1} \subseteq F_k$;*
- *$c_k \notin F_k$.*

İç içe kapalı ve sınırlı aralıkların kesişimi boş değildir (bkz. Analiz 1: İç İçe Aralıklar Teoremi). O hâlde bir $x \in \bigcap_k F_k$ vardır ve

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = C.$$

Numaralama C'nin tamamını kapsadığından bir n için $x = c_n$ olur. Ama $x \in F_n$ iken $c_n \notin F_n$; çelişki. Demek ki C sayılamaz.
■

Yani ölçü, "kaç nokta var" sorusuna değil "ne kadar yer kaplıyor" sorusuna cevap verir: C sayılamaz çoklukta nokta içerir ama hiç yer kaplamaz. Cantor kümesinin bir başka yönü de "delikli" oluşudur; bunu ifade eden kavram aşağıdadır.

Tanım 6.2 (Hiçbir Yerde Yoğun Küme). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Boş olmayan her U açık kümesi, A'dan ayrık ve boş olmayan bir açık alt küme içeriyorsa A'ya **hiçbir yerde yoğun değil** (nowhere dense) denir.

Yani A hangi açık kümeye bakılırsa bakılsın orada bir "boşluk" bırakır. Cantor kümesinin bu özelliği taşıdığını alıştırmalarda göreceğiz.
Orta parçaları daha hızlı küçülterek, Cantor kümesine benzeyen ama pozitif ölçülü kümeler de kurulabilir.

Tanım 6.3 (Genelleştirilmiş Cantor Kümesi). $0 < \alpha < 1$ olsun. $F_0 = [0,1]$ ile başlayalım. n-inci aşamada, F_{n-1}'i oluşturan 2^{n-1} kapalı aralığın her birinden, o aralıkla aynı orta noktalı ve uzunluğu $\alpha\, 3^{-n}$ olan açık aralığı atarak F_n'yi elde edelim.

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

kümesine **genelleştirilmiş Cantor kümesi** (generalized Cantor set) denir.

Yani Cantor kümesindeki "orta üçte bir" yerine her aşamada toplam boyu daha küçük parçalar atılır. F_n'deki aralıkların ortak uzunluğu L_n ise $L_n = \frac{1}{2}\left(L_{n-1} - \alpha 3^{-n}\right)$ olur; tümevarımla

$$L_n = 2^{-n}(1-\alpha) + \alpha\, 3^{-n}$$

bulunur. Buradan $L_n > \alpha 3^{-n} > \alpha 3^{-(n+1)}$ çıkar; yani bir sonraki aşamada atılacak aralık kalan aralığın içine sığar ve inşa iyi tanımlıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Cantor–Lebesgue Fonksiyonu

Şimdi Cantor kümesinin tümleyeni üzerinde basamak basamak yükselen, sonra boşlukları doldurarak $[0,1]$'e yayılan bir fonksiyon kuracağız.
Her k için $\mathcal{O}_k = [0,1] \setminus C_k$ olsun; bu, ilk k aşamada atılan

$$1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

tane ayrık açık aralığın birleşimidir. $\mathcal{O} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_k$ dersek De Morgan kurallarından $C = [0,1] \setminus \mathcal{O}$ olur. $\mathcal{O}_k$'nin aralıklarını soldan sağa sıralayalım. C_k'nin 2^k Cantor aralığı ile $\mathcal{O}_k$'nin $2^k - 1$ aralığı sırayla birbirini izler: en solda ve en sağda birer Cantor aralığı, her iki ardışık atılmış aralık arasında tam bir Cantor aralığı vardır. $(k+1)$-inci aşamada her Cantor aralığının ortası atıldığından, $\mathcal{O}_{k+1}$'de yeni aralıklar eskilerle tek tek sıra değiştirerek yerleşir: $\mathcal{O}_k$'nin soldan j-inci aralığı, $\mathcal{O}_{k+1}$'in soldan $2j$-inci aralığı olur.

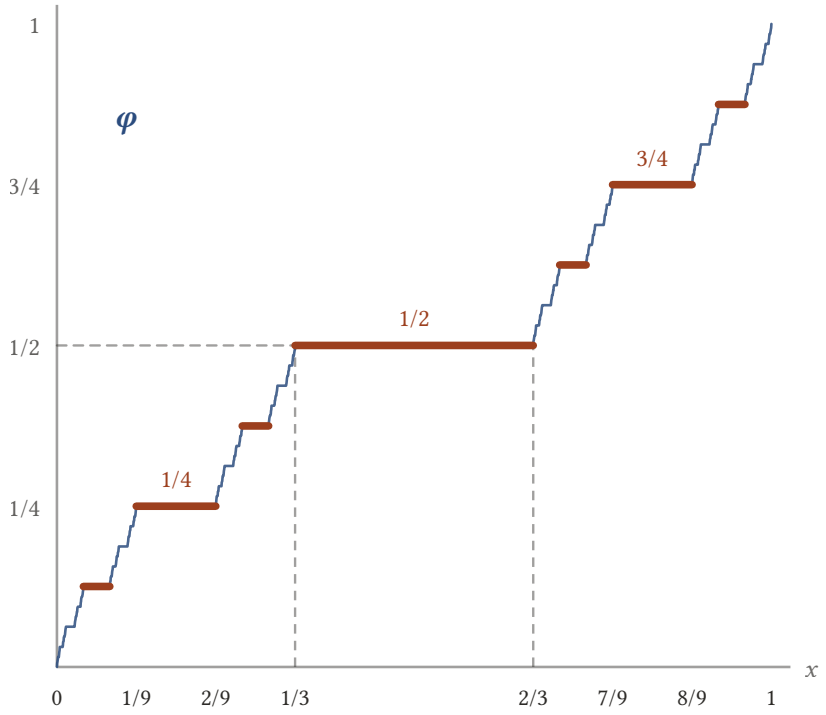
Tanım 6.4 (Cantor–Lebesgue Fonksiyonu). **Cantor–Lebesgue fonksiyonu** (Cantor–Lebesgue function) $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ şöyle tanımlanır.

- $\mathcal{O}$ üzerinde: x, $\mathcal{O}_k$'nin soldan j-inci aralığındaysa $\varphi(x) = j/2^k$.
- C üzerinde: $\varphi(0) = 0$ ve $x \in C \setminus \{0\}$ için

$$\varphi(x) = \sup\{\varphi(t) : t \in \mathcal{O} \cap [0,x)\}.$$

İlk iki aşamada atılan üç aralıkta

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1/4 & x \in (1/9, 2/9) \text{ ise,} \\ 2/4 & x \in (1/3, 2/3) \text{ ise,} \\ 3/4 & x \in (7/9, 8/9) \text{ ise .} \end{cases}$$



Şekil 6.2: Cantor–Lebesgue fonksiyonunun grafiği. Kalın basamaklar $\mathcal{O}_3$'ün yedi aralığıdır; φ bunlarda soldan sağa 1/8, 2/8, …, 7/8 değerlerini alır. Sonraki aşamalar aradaki boşluklara giderek daha kısa basamaklar ekler; φ sürekli ve artandır ama bütün yükselişi sıfır ölçülü Cantor kümesi üzerinde gerçekleşir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani φ, $\mathcal{O}_k$'nin 2^k-1 aralığında soldan sağa $1/2^k, 2/2^k, \ldots, (2^k-1)/2^k$ değerlerini alan bir basamak fonksiyonudur ve C'nin noktalarında soldaki basamakların yüksekliğine eşitlenir. Tanım tutarlıdır: $\mathcal{O}_k$'nin j-inci aralığı $\mathcal{O}_{k+1}$'in $2j$-inci aralığı olduğundan, o aralığa iki aşamada verilen değerler $j/2^k = 2j/2^{k+1}$ olarak çakışır. $C \setminus \{0\}$'da supremumu alınan küme de boş değildir: $x \in C$ ve $3^{-k} < x$ ise $x \geq 2\cdot 3^{-k}$ olur ve $(3^{-k}, 2\cdot 3^{-k}) \subseteq \mathcal{O}$ aralığı x'in solunda kalır.

Teorem 6.2 (Cantor–Lebesgue Fonksiyonunun Özellikleri). *Cantor–Lebesgue fonksiyonu $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ artan, süreklidir ve $[0,1]$'i $[0,1]$'in **üzerine** götürür. φ, Cantor kümesinin $[0,1]$'deki tümleyeni olan $\mathcal{O}$ açık kümesinin her noktasında türevlenebilirdir ve*

$$\varphi' = 0 \ \ \mathcal{O} \ \text{ üzerinde}, \qquad m(\mathcal{O}) = 1, \qquad \varphi(1) > \varphi(0).$$

İspat.
Adım 1: $\mathcal{O}$ üzerinde artanlık. *$s < t$ ve $s, t \in \mathcal{O}$ olsun. $\{\mathcal{O}_k\}$ artan olduğundan $s, t \in \mathcal{O}_k$ olan bir k vardır. s ile t aynı aralıktaysa $\varphi(s) = \varphi(t)$; değilse s'nin aralığı soldadır ve $\varphi(s) < \varphi(t)$.*
Adım 2: $[0,1]$ üzerinde artanlık. *$x < y$ olsun.*

- *$x, y \in C$ ise $\mathcal{O} \cap [0,x) \subseteq \mathcal{O} \cap [0,y)$ olduğundan $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ ($x = 0$ ise $\varphi(x) = 0$ ve $\varphi \geq 0$ olduğundan yine doğru).*
- *$x \in \mathcal{O}$, $y \in C$ ise $x \in \mathcal{O} \cap [0,y)$ olduğundan $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.*
- *$x \in C$, $y \in \mathcal{O}$ ise $\mathcal{O} \cap [0,x)$'teki her t için $t < y$ ve Adım 1 gereği $\varphi(t) \leq \varphi(y)$; supremum alınarak $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ ($x = 0$ ise $\varphi(0) = 0 \leq \varphi(y)$, çünkü $\varphi \geq 0$).*
- *$x, y \in \mathcal{O}$ durumu Adım 1'dir.*

Adım 3: Değerler. *φ'nin $\mathcal{O}$'daki değerleri $(0,1)$ aralığındadır; supremumlar da $[0,1]$'dedir, yani $\varphi([0,1]) \subseteq [0,1]$. Ayrıca her k ve $1 \leq j \leq 2^k - 1$ için $j/2^k$ değeri alınır. Bu ikili kesirler $[0,1]$'de yoğundur. $1 \in C$ ve $\mathcal{O} \cap [0,1) = \mathcal{O}$ olduğundan*

$$\varphi(1) = \sup_k \frac{2^k - 1}{2^k} = 1 > 0 = \varphi(0).$$

Adım 4: Süreklilik. *φ bir x_0 noktasında süreksiz olsun. Artan fonksiyonların tek yönlü limitleri vardır; süreksizlik ancak bir sıçrama olabilir, örneğin $\varphi(x_0^-) < \varphi(x_0)$ (sağdan sıçrama durumu aynıdır). Artanlıktan $x < x_0$ için $\varphi(x) \leq \varphi(x_0^-)$, $x \geq x_0$ için $\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$ olur. Dolayısıyla $\big(\, \varphi(x_0^-), \varphi(x_0) \,\big)$ açık aralığı φ'nin hiçbir değerini içermez. Oysa bu aralık $[0,1]$'in boş olmayan açık bir alt aralığıdır ve Adım 3 gereği φ'nin değeri olan bir $j/2^k$ ikili kesrini içerir; çelişki. O hâlde φ süreklidir.*
Adım 5: Örtenlik. *φ sürekli, $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi(1) = 1$ olduğundan Ara Değer Teoremi (bkz. Analiz 1: Ara Değer Teoremi) her $y \in [0,1]$ değerinin alındığını verir. Adım 3 ile birlikte $\varphi([0,1]) = [0,1]$.*
Adım 6: Türev. *$x \in \mathcal{O}$ ise x, üzerinde φ'nin sabit olduğu açık bir aralığa aittir; bu yüzden $\varphi'(x)$ vardır ve 0'dır. Son olarak Teorem 6.1 gereği $m(C) = 0$ olduğundan $m(\mathcal{O}) = m([0,1]) - m(C) = 1$.*
■

Yani φ bütün yükselişini ölçüsü sıfır olan C kümesinde yapar: hemen her yerde türevi 0 olduğu hâlde 0'dan 1'e çıkar. Bu, "türevi hemen her yerde sıfır olan sürekli fonksiyon sabittir" sanısının yanlış olduğunu gösterir.

6.3 Borel Olmayan Ölçülebilir Bir Küme

φ'ye özdeşlik fonksiyonunu eklersek, Cantor kümesini ölçüsü 1 olan bir kümeye şişiren, kesin artan sürekli bir fonksiyon elde ederiz.

Teorem 6.3 (Cantor Kümesini Şişiren Fonksiyon). *φ Cantor–Lebesgue fonksiyonu olsun ve $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu*

$$\psi(x) = \varphi(x) + x \qquad (x \in [0,1])$$

ile tanımlayalım. ψ, $[0,1]$'i $[0,2]$'nin üzerine götüren kesin artan, sürekli bir fonksiyondur ve

- ***(i)** Cantor kümesini pozitif ölçülü bir ölçülebilir kümeye götürür: $m(\psi(C)) = 1$;*
- ***(ii)** Cantor kümesinin ölçülebilir bir alt kümesini ölçülemeyen bir kümeye götürür.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Adım 1: Temel özellikler. *φ artan, $x \mapsto x$ kesin artan olduğundan ψ kesin artandır; iki sürekli fonksiyonun toplamı olarak süreklidir. $\psi(0) = 0$, $\psi(1) = 2$ olduğundan Ara Değer Teoremi $\psi([0,1]) = [0,2]$ verir. Kesin artanlık ψ'yi birebir yapar; yani ψ, $[0,1]$'den $[0,2]$'ye bir birebir örtendir.*
Adım 2: $\psi(\mathcal{O})$'nun ölçüsü. *$[0,1] = C \cup \mathcal{O}$ ayrık birleşim ve ψ birebir örten olduğundan*

$$[0,2] = \psi(C) \cup \psi(\mathcal{O}) \quad \text{(ayrık birleşim)} \; . \tag{1}$$

$\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$, atma işleminde atılan bütün açık aralıkların bir numaralaması olsun; $\mathcal{O} = \bigcup_k I_k$. φ, I_k üzerinde bir c_k sabitine eşit olduğundan

$$\psi(I_k) = I_k + c_k,$$

yani $\psi(I_k)$, I_k ile aynı uzunlukta bir açık aralıktır. ψ birebir olduğundan $\{\psi(I_k)\}$ ayrıktır. Bu yüzden $\psi(\mathcal{O})$ açıktır ve sayılabilir toplamsallıktan (Teorem 4.1)

$$m(\psi(\mathcal{O})) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\psi(I_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) = m(\mathcal{O}) = 1.$$

Adım 3: (i)'nin ispatı. *C kapalı ve sınırlı, dolayısıyla kompakt olduğundan $\psi(C)$ de kompakttır (bkz. Analiz 1: Kompakt Kümenin Sürekli Görüntüsü); yani kapalı ve ölçülebilirdir. (1)'den ve sonlu toplamsallıktan*

$$m(\psi(C)) = m([0,2]) - m(\psi(\mathcal{O})) = 2 - 1 = 1.$$

Adım 4: (ii)'nin ispatı. *$m(\psi(C)) = 1 > 0$ olduğundan, pozitif dış ölçülü her kümenin ölçülemeyen bir alt kümesi vardır sonucu (Teorem 5.1) bir $W \subseteq \psi(C)$ ölçülemeyen kümesi verir. $A = \psi^{-1}(W)$ olsun. $A \subseteq C$ olduğundan $m^*(A) \leq m(C) = 0$; dış ölçüsü sıfır olan küme ölçülebilir olduğundan (Teorem 1.4) A ölçülebilirdir. ψ örten olduğundan $\psi(A) = W$ ölçülemezdir.*
■

Yani sürekli, hatta kesin artan bir fonksiyon bile ölçülebilir bir kümeyi ölçülemeyen bir kümeye götürebilir. Aynı A kümesi, Borel kümelerinin ölçülebilir kümelerin tamamını kapsamadığını da gösterir.

Teorem 6.4 (Borel Olmayan Ölçülebilir Küme). *Cantor kümesinin, Borel kümesi olmayan ölçülebilir bir alt kümesi vardır. Dolayısıyla $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M}$.*

İspat.
ψ, W ve $A = \psi^{-1}(W)$ önceki teoremdeki gibi olsun (Teorem 6.3). $A \subseteq C$ ölçülebilirdir; A'nın Borel kümesi olmadığını göstereceğiz. $g = \psi^{-1} : [0,2] \to [0,1]$ olsun.
Adım 1: Kapalı kümelerin ters görüntüsü. *$F \subseteq \mathbb{R}$ kapalı olsun. ψ birebir örten olduğundan*

$$g^{-1}(F) = \{y \in [0,2] : g(y) \in F\} = \psi(F \cap [0,1]).$$

$F \cap [0,1]$ kapalı ve sınırlı, yani kompakttır; sürekli ψ altındaki görüntüsü de kompakt, dolayısıyla kapalıdır. Yani $g^{-1}(F)$ bir Borel kümesidir.
Adım 2: Borel kümelerinin ters görüntüsü. *$\Sigma = \left\{B \subseteq \mathbb{R} : g^{-1}(B) \in \mathcal{B}\right\}$ olsun. Σ bir σ-cebiridir:*

- *$g^{-1}(\mathbb{R}) = [0,2] \in \mathcal{B}$;*
- *$B \in \Sigma$ ise $g^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = [0,2] \setminus g^{-1}(B) \in \mathcal{B}$;*
- *$B_k \in \Sigma$ ise ters görüntü birleşimle yer değiştirdiğinden $g^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right) \in \mathcal{B}$.*

Adım 1'e göre Σ bütün kapalı kümeleri, tümleyen alınarak da bütün açık kümeleri içerir. $\mathcal{B}$ açık kümeleri içeren en küçük σ-cebiri olduğundan (Tanım 2.5) $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$ olur: her Borel kümesinin g altındaki ters görüntüsü Borel kümesidir.
Adım 3: Sonuç. *A bir Borel kümesi olsaydı Adım 2'den $g^{-1}(A) = \psi(A) = W$ bir Borel kümesi, dolayısıyla ölçülebilir (Teorem 2.4) olurdu. Bu, W'nin ölçülemez oluşuyla çelişir. O hâlde A ölçülebilir ama Borel değildir ve $\mathcal{B} \neq \mathcal{M}$.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Sürekli fonksiyonlar ölçülebilirliği korumasa da, daha güçlü bir düzenlilik koşulu altında durum değişir.

Tanım 6.5 (Lipschitz Fonksiyon). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ olsun. Her $u, v \in [a,b]$ için

$$\mid f(u) - f(v) \mid \leq c \mid u - v \mid$$

olacak biçimde bir $c \geq 0$ sabiti varsa f'ye **Lipschitz** fonksiyon denir.

Yani f, iki nokta arasındaki uzaklığı en fazla c katına çıkarır. Bu yüzden küçük kümeleri küçük kümelere götürür; alıştırmalarda Lipschitz fonksiyonların sıfır ölçülü kümeleri sıfır ölçülü, ölçülebilir kümeleri ölçülebilir kümelere götürdüğünü göreceğiz. ψ ise Lipschitz değildir: sıfır ölçülü C'yi ölçüsü 1 olan bir kümeye götürür.

6.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorular sürekli fonksiyonların kümeleri nasıl taşıdığını ve Cantor tipi kümelerin beklenmedik özelliklerini inceler.

Alıştırma 6.1 (Kesin Artan Sürekli Fonksiyonun Tersi). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve kesin artan olsun. $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterin.

> **Çözüm.**
> **Adım 1: f^{-1} tanımlıdır.** f kesin artan olduğundan birebirdir ve $f([a,b]) \subseteq [f(a), f(b)]$. Ara Değer Teoremi gereği $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her değer alınır; yani f, $[a,b]$'den $[f(a), f(b)]$'ye birebir örtendir ve $g = f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ tanımlıdır.
> **Adım 2: Dizisel süreklilik.** $y_n \to y$ olan $[f(a), f(b)]$'deki bir dizi alalım; $x_n = g(y_n)$, $x = g(y)$ olsun. $x_n \to x$ olmadığını varsayalım. O zaman bir $\varepsilon > 0$ ve her terimi $\mid x_{n_k} - x \mid \geq \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Bu alt dizi $[a,b]$'de sınırlı olduğundan Bolzano–Weierstrass teoremiyle yakınsak bir alt dizisi vardır; limiti x' olsun. $[a,b]$ kapalı olduğundan $x' \in [a,b]$ ve $\mid x' - x \mid \geq \varepsilon$, yani $x' \neq x$.
> **Adım 3: Çelişki.** f sürekli olduğundan bu alt dizi boyunca $f(x_{n_k}) \to f(x')$. Öte yandan $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y = f(x)$. Limit tek olduğundan $f(x') = f(x)$; f birebir olduğundan $x' = x$. Bu çelişki $x_n \to x$ olduğunu, yani g'nin y'de sürekli olduğunu gösterir. y keyfi olduğundan f^{-1} süreklidir.
> ■

Alıştırma 6.2 (Sürekli Fonksiyon ve Kapalı Kümeler). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. f'nin $[a,b]$'nin kapalı alt kümelerini kapalı kümelere götürdüğünü gösterin.

> **Çözüm.**
> $F \subseteq [a,b]$ kapalı olsun. F sınırlı ($[a,b]$'nin içinde) ve kapalı olduğundan Heine–Borel teoremi gereği kompakttır. Kompakt bir kümenin sürekli görüntüsü kompakttır; dolayısıyla $f(F)$ kompakttır. Yine Heine–Borel teoremi gereği $\mathbb{R}$'nin kompakt alt kümeleri kapalıdır. O hâlde $f(F)$ kapalıdır.
> ■

Alıştırma 6.3 (Sürekli Fonksiyon ve F-sigma Kümeleri). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. f'nin $[a,b]$'nin F_σ alt kümelerini F_σ kümelerine götürdüğünü gösterin.

> **Çözüm.**
> $E \subseteq [a,b]$ bir F_σ kümesi olsun: $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, her F_k kapalı. $F_k \subseteq E \subseteq [a,b]$ olduğundan her F_k, $[a,b]$'nin kapalı bir alt kümesidir ve Alıştırma 6.2 gereği $f(F_k)$ kapalıdır. Görüntü birleşimle yer değiştirir:
>
> $$f(E) = f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(F_k).$$
>
> Bu, sayılabilir çoklukta kapalı kümenin birleşimidir; yani $f(E)$ bir F_σ kümesidir.
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 6.4 (Sürekli Fonksiyon ve Ölçülebilir Kümeler). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. f ölçülebilir kümeleri her zaman ölçülebilir kümelere götürür mü?

Çözüm.
Hayır. $[a,b] = [0,1]$ alalım ve $f = \psi$, yani $\psi(x) = \varphi(x) + x$ olsun; burada φ Cantor–Lebesgue fonksiyonudur. Teorem 6.3 gereği ψ süreklidir ve Cantor kümesinin öyle bir A alt kümesi vardır ki A ölçülebilir (dış ölçüsü sıfır olduğu için), ama $\psi(A) = W$ ölçülemezdir. Dolayısıyla sürekli bir fonksiyon ölçülebilir bir kümeyi ölçülemeyen bir kümeye götürebilir.
Bu, Alıştırma 6.3 ile çelişmez: sürekli fonksiyonlar F_σ kümelerini korur, ama sıfır ölçülü kümeleri korumayabilir. Nitekim ψ, sıfır ölçülü C'yi ölçüsü 1 olan $\psi(C)$'ye götürür.
■

Alıştırma 6.5 (Lipschitz Fonksiyon ve Sıfır Ölçülü Kümeler). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz olsun (Tanım 6.5). f'nin sürekli olduğunu ve sıfır ölçülü kümeleri sıfır ölçülü kümelere götürdüğünü gösterin.

Çözüm.
$c \geq 0$ Lipschitz sabiti olsun.
Adım 1: Süreklilik. $c = 0$ ise f sabittir, dolayısıyla süreklidir. $c > 0$ ise $\varepsilon > 0$ için $\delta = \varepsilon/c$ alalım: $|\,u - v\,| < \delta$ iken $|\,f(u) - f(v)\,| \leq c\,|\,u - v\,| < \varepsilon$. Yani f (hatta düzgün) süreklidir.
Adım 2: Bir aralığın görüntüsü. $J \subseteq [a,b]$ bir aralık olsun. $u, v \in J$ için $|\,f(u) - f(v)\,| \leq c\,\ell(J)$ olduğundan $\sup f(J) - \inf f(J) \leq c\,\ell(J)$; yani $f(J)$, uzunluğu $c\,\ell(J)$ olan bir kapalı aralığın içindedir. Aralığın dış ölçüsü uzunluğu olduğundan (Teorem 1.1) ve dış ölçü monoton olduğundan $m^*(f(J)) \leq c\,\ell(J)$.
Adım 3: Sıfır ölçülü kümeler. $E \subseteq [a,b]$ ve $m^*(E) = 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Dış ölçünün tanımından (Tanım 1.5) $E \subseteq \bigcup_k I_k$ ve $\sum_k \ell(I_k) < \varepsilon$ olan açık aralıklar vardır. $J_k = I_k \cap [a,b]$ birer aralıktır (boş olabilir), $\ell(J_k) \leq \ell(I_k)$ ve $E \subseteq \bigcup_k J_k$. Buradan $f(E) \subseteq \bigcup_k f(J_k)$ olur ve sayılabilir alt toplamsallık (Teorem 1.3) ile Adım 2'den

$$m^*(f(E)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(f(J_k)) \leq c \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leq c\,\varepsilon.$$

ε keyfi olduğundan $m^*(f(E)) = 0$; dış ölçüsü sıfır olan küme ölçülebilir olduğundan (Teorem 1.4) $m(f(E)) = 0$.
■

Alıştırma 6.6 (Lipschitz Fonksiyon ve Ölçülebilir Kümeler). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz olsun. f'nin ölçülebilir kümeleri ölçülebilir kümelere götürdüğünü gösterin. (İpucu: önceki alıştırmaları ve ölçünün iç yaklaşım özelliğini (Teorem 3.1) kullanın.)

Çözüm.
Adım 1: Kümeyi ayırmak. $E \subseteq [a,b]$ ölçülebilir olsun. İçten yaklaşım teoremine göre (Teorem 3.1) her n için $F_n \subseteq E$ ve $m(E \setminus F_n) < 1/n$ olan bir kapalı F_n kümesi vardır. $F = \bigcup_n F_n$ bir F_σ kümesidir, $F \subseteq E$ ve her n için $E \setminus F \subseteq E \setminus F_n$ olduğundan $m(E \setminus F) < 1/n$; yani $m(E \setminus F) = 0$. $Z = E \setminus F$ dersek

$$E = F \cup Z, \qquad f(E) = f(F) \cup f(Z).$$

Adım 2: İki parçanın görüntüsü. f Lipschitz olduğundan süreklidir (Alıştırma 6.5). Alıştırma 6.3 gereği $f(F)$ bir F_σ kümesidir; F_σ kümeleri Borel kümesi olduğundan ölçülebilirdir (Teorem 2.4). $m(Z) = 0$ olduğundan Alıştırma 6.5 gereği $f(Z)$ sıfır ölçülüdür, dolayısıyla ölçülebilirdir.
Adım 3: Sonuç. İki ölçülebilir kümenin birleşimi ölçülebilir olduğundan $f(E)$ ölçülebilirdir.
■

Alıştırma 6.7 (Genelleştirilmiş Cantor Kümesi Kapalıdır). $0 < \alpha < 1$ ve F genelleştirilmiş Cantor kümesi olsun (Tanım 6.3). F'nin kapalı olduğunu gösterin.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Adım 1: İnşa her aşamada yapılabilir. F_n, uzunluğu L_n olan 2^n ayrık kapalı aralığın birleşimi olsun ($L_0 = 1$). n-inci aşamada uzunluğu L_{n-1} olan her aralıktan uzunluğu $\alpha 3^{-n}$ olan orta açık parça atılınca uzunluğu

$$L_n = \frac{1}{2}(L_{n-1} - \alpha\, 3^{-n})$$

olan iki kapalı aralık kalır. Tümevarımla $L_n = 2^{-n}(1-\alpha) + \alpha 3^{-n}$ olduğu görülür: $n = 0$ için $L_0 = 1$; formül $n-1$ için doğruysa

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2}\big(2^{-(n-1)}(1-\alpha) + \alpha 3^{-(n-1)} - \alpha 3^{-n}\big) \\ &= 2^{-n}(1-\alpha) + \frac{1}{2}\cdot \alpha 3^{-n}(3-1) = 2^{-n}(1-\alpha) + \alpha 3^{-n}. \end{aligned}$$

Buradan $L_n > \alpha 3^{-n} > \alpha 3^{-(n+1)}$; yani $(n+1)$-inci aşamada atılacak parça her aralığın içine sığar ve kalan iki aralığın uzunluğu pozitiftir.
Adım 2: Kapalılık. Her F_n sonlu sayıda kapalı aralığın birleşimi olduğundan kapalıdır. Kapalı kümelerin herhangi bir ailesinin kesişimi kapalı olduğundan $F = \bigcap_n F_n$ kapalıdır.
■

Alıştırma 6.8 (Genelleştirilmiş Cantor Kümesinin Tümleyeni Yoğundur). $0 < \alpha < 1$ ve F genelleştirilmiş Cantor kümesi olsun. $[0,1] \setminus F$ kümesinin $[0,1]$'de yoğun olduğunu gösterin.

Çözüm.
$x \in [0,1]$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin; $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$'un $[0,1] \setminus F$'nin bir noktasını içerdiğini göstereceğiz.
$x \notin F$ ise x'in kendisi uygundur. $x \in F$ olsun. F_n'nin aralıklarının uzunluğu L_n için $L_n = \frac{1}{2}(L_{n-1} - \alpha 3^{-n}) < \frac{1}{2}L_{n-1}$ olduğundan $L_n < 2^{-n}$ ve $L_n \to 0$. $L_n < \varepsilon$ olan bir n seçelim. $x \in F \subseteq F_n$ olduğundan x, F_n'nin uzunluğu L_n olan bir J aralığındadır ve $J \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. $(n+1)$-inci aşamada J'nin ortasından açık bir aralık atılır; bu aralığın noktaları $[0,1] \setminus F$'dedir ve J'nin, dolayısıyla $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$'un içindedir.
Böylece $[0,1]$'in her noktasının her komşuluğu $[0,1] \setminus F$'yi keser; yani $[0,1] \setminus F$, $[0,1]$'de yoğundur.
■

Alıştırma 6.9 (Genelleştirilmiş Cantor Kümesinin Ölçüsü). $0 < \alpha < 1$ ve F genelleştirilmiş Cantor kümesi olsun. $m(F) = 1 - \alpha$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Tümleyen, atılan aralıkların birleşimidir. De Morgan kurallarından

$$[0,1] \setminus F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big([0,1] \setminus F_n \big),$$

ve $[0,1] \setminus F_n$, ilk n aşamada atılan açık aralıkların birleşimidir. Yani $[0,1] \setminus F$, bütün aşamalarda atılan açık aralıkların birleşimidir; bu aralıklar ikişer ikişer ayrıktır.
Adım 2: Atılan toplam uzunluk. n-inci aşamada 2^{n-1} aralığın her birinden uzunluğu $\alpha 3^{-n}$ olan bir parça atılır. Sayılabilir toplamsallıktan (Teorem 4.1)

$$\begin{aligned} m([0,1] \setminus F) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\, \alpha\, 3^{-n} = \frac{\alpha}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2/3} = \alpha. \end{aligned}$$

Adım 3: Sonuç. F kapalı olduğundan ölçülebilirdir ve $[0,1] = F \cup ([0,1] \setminus F)$ ayrık birleşimdir. Sonlu toplamsallıktan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$m(F) = m([0,1]) - m([0,1] \setminus F) = 1 - \alpha.$$

■

Alıştırma 6.10 (Sınırı Pozitif Ölçülü Açık Küme). Sınırı pozitif ölçülü olan bir açık $U \subseteq \mathbb{R}$ kümesi bulunduğunu gösterin. (İpucu: bir genelleştirilmiş Cantor kümesinin tümleyenini düşünün.)

Çözüm.
$0 < \alpha < 1$ sabitleyelim, F genelleştirilmiş Cantor kümesi olsun ve $U = \mathbb{R} \setminus F$ diyelim. F kapalı olduğundan (Alıştırma 6.7) U açıktır. Açık bir kümenin sınırı $\partial U = \overline{U} \setminus U$'dur.
Adım 1: $\overline{U} = \mathbb{R}$. $[0,1]$ dışındaki noktalar U'dadır. $[0,1]$'in her noktası, $[0,1] \setminus F \subseteq U$ kümesinin kapanışındadır, çünkü bu küme $[0,1]$'de yoğundur (Alıştırma 6.8). Dolayısıyla her reel sayı U'nun kapanışındadır.
Adım 2: Sınırın ölçüsü. $\partial U = \mathbb{R} \setminus U = F$ olur ve Alıştırma 6.9 gereği

$$m(\partial U) = m(F) = 1 - \alpha > 0.$$

Yani U, sınırı pozitif ölçülü bir açık kümedir.
■

Alıştırma 6.11 (Cantor Kümesi Hiçbir Yerde Yoğun Değildir). Cantor kümesinin hiçbir yerde yoğun olmadığını (Tanım 6.2) gösterin.

Çözüm.
U boş olmayan bir açık küme olsun. Bir $x \in U$ ve $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U$ olan bir $\varepsilon > 0$ seçelim; $3^{-k} < 2\varepsilon$ olan bir k alalım.
Adım 1: $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, C_k'nin içinde değildir. Tersine, bu aralık C_k'nin içinde olsun. C_k'nin iki ayrı Cantor aralığının noktalarını içeremez: içerseydi, aralık olduğu için bu iki Cantor aralığının arasındaki (atılmış) boşluğun noktalarını da içerirdi ve bu noktalar C_k'de değildir. O hâlde aralık tek bir Cantor aralığının içindedir ve uzunluğu $2\varepsilon \leq 3^{-k}$ olurdu; bu, k'nin seçimiyle çelişir.
Adım 2: Aranan açık küme. $V = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus C_k$ olsun. C_k kapalı olduğundan V açıktır, Adım 1 gereği boş değildir ve $V \subseteq U$. $C \subseteq C_k$ olduğundan $V \cap C = \varnothing$.
Böylece boş olmayan her açık küme, C'den ayrık, boş olmayan bir açık alt küme içerir; yani C hiçbir yerde yoğun değildir.
■

Alıştırma 6.12 (Borel Kümesinin Ters Görüntüsü). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli ve B bir Borel kümesi olsun. $f^{-1}(B)$'nin bir Borel kümesi olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Kapalı kümeler. $F \subseteq \mathbb{R}$ kapalı olsun. $f^{-1}(F) = \{x \in [a,b] : f(x) \in F\}$ kapalıdır: $x_n \in f^{-1}(F)$ ve $x_n \to x$ ise $[a,b]$ kapalı olduğundan $x \in [a,b]$, süreklilikten $f(x_n) \to f(x)$ ve F kapalı olduğundan $f(x) \in F$. Yani $f^{-1}(F)$ kapalı, dolayısıyla Borel kümesidir.
Adım 2: Ters görüntüsü Borel olan kümeler. $\Sigma = \{B \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}\}$ olsun. Σ bir σ-cebiridir:

- $f^{-1}(\mathbb{R}) = [a,b] \in \mathcal{B}$;
- $B \in \Sigma$ ise $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = [a,b] \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$;
- $B_k \in \Sigma$ ise ters görüntü birleşimle yer değiştirdiğinden $f^{-1}\left(\bigcup_k B_k\right) \in \mathcal{B}$.

Adım 3: Sonuç. Adım 1'e göre Σ bütün kapalı kümeleri içerir; σ-cebiri olduğu için tümleyenlerini, yani bütün açık kümeleri de içerir. $\mathcal{B}$ açık kümeleri içeren en küçük σ-cebiri olduğundan (Tanım 2.5) $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$. Demek ki her Borel kümesi B için $f^{-1}(B)$ bir Borel kümesidir.
■

Ölçü teorisinin temel kümeleri ve örnekleri böylece tamamlandı. Sıradaki bölümde bakışımızı kümelerden fonksiyonlara çeviriyor ve Ölçülebilir Fonksiyonlar kavramını tanımlıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

7. Ölçülebilir Fonksiyonlar

Lebesgue integralini kurmak için, üzerinde integral alacağımız fonksiyonların ölçüyle uyumlu olması gerekir: "f'nin c'den küçük olduğu yer" dediğimiz her küme ölçülebilir olmalıdır. Bu bölümde bu koşulu sağlayan fonksiyonları, yani ölçülebilir fonksiyonları tanımlıyoruz.
Ardından bu sınıfın ne kadar geniş ve kararlı olduğunu görüyoruz: sürekli fonksiyonlar, monoton fonksiyonlar, bunların toplamları, çarpımları, maksimum ve minimumları ölçülebilirdir. Tek sürpriz bileşkedir; iki ölçülebilir fonksiyonun bileşkesi ölçülebilir olmayabilir.

7.1 Genişletilmiş Reel Sayılar ve Ters Görüntü

Fonksiyonların $\pm\infty$ değerini de alabilmesine izin veriyoruz; limitler ve integraller için bu esneklik gerekecek.
Genişletilmiş reel sayılar (extended real numbers) kümesi $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$'dur; her $x \in \mathbb{R}$ için $-\infty < x < \infty$ kabul edilir. Aynı E kümesinde tanımlı $h, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ için "E üzerinde $h \leq g$" yazmak, her $x \in E$ için $h(x) \leq g(x)$ demektir.

Tanım 7.1 (Artan Fonksiyon Dizisi). $\left\{f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}\right\}$ bir fonksiyon dizisi olsun. Her n için E üzerinde $f_n \leq f_{n+1}$ ise diziye **artan** (increasing) denir.

Yani dizinin her noktadaki değerleri n büyüdükçe azalmaz.
Ölçülebilirlik tamamen ters görüntülerle ifade edilecek. Ters görüntünün iyi yanı, küme işlemleriyle yer değiştirmesidir: $f : X \to Y$ ve $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, Y'nin alt kümelerinden oluşan bir topluluk ise

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(Y_\lambda), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(Y_\lambda),$$

ve $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ olur.

7.2 Ölçülebilir Fonksiyon

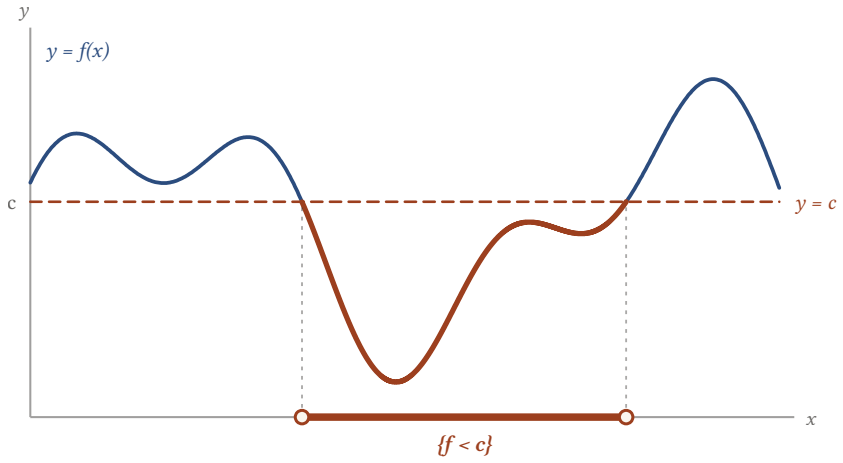
Tanımda yalnız bir tür kümeyi, "f'nin c'nin altında kaldığı yer"i ölçülebilir olmaya zorluyoruz; gerisi bundan çıkacak.

Tanım 7.2 (Ölçülebilir Fonksiyon). $E \subseteq \mathbb{R}$ ölçülebilir ve $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. Her $c \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in E : f(x) < c\}$$

kümesi ölçülebilir ise f'ye **Lebesgue ölçülebilir** ya da kısaca **ölçülebilir** (measurable) fonksiyon denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.1: Bir f grafiği ve $y = c$ doğrusu. Grafiğin doğrunun altında kaldığı noktalar x ekseninde kalın parçalar olarak işaretlidir; bunların birleşimi $\{f < c\}$ kümesidir. f'nin ölçülebilir olması, her c için bu kümenin ölçülebilir olmasıdır.

Yani f'nin grafiğini hangi yükseklikte yatay bir çizgiyle kesersek keselim, grafiğin çizginin altında kaldığı noktalar ölçülebilir bir küme oluşturur. Kısalık için $\{x \in E : f(x) < c\}$ yerine $\{f < c\}$ yazacağız. "$<$" yerine "$\leq$", "$>$" ya da "$\geq$" kullanmak bir şey değiştirmez; üstelik her aralığın ters görüntüsü de ölçülebilir olur.

Teorem 7.1 (Ölçülebilirliğin Denk Koşulları). *E ölçülebilir ve $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. Aşağıdakiler denktir:*

- ***(i)*** *her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f > c\}$ ölçülebilirdir;*
- ***(ii)*** *her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f \geq c\}$ ölçülebilirdir;*
- ***(iii)*** *her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f < c\}$ ölçülebilirdir;*
- ***(iv)*** *her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f \leq c\}$ ölçülebilirdir.*

Bu koşullar sağlandığında $\{f = \infty\}$ ile $\{f = -\infty\}$ kümeleri ve her $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı için $f^{-1}(I)$ ölçülebilirdir.

İspat.
Ölçülebilir kümeler bir σ-cebiri oluşturur (Teorem 2.4); aşağıda yalnız tümleyen ile sayılabilir birleşim ve kesişim kullanılıyor.
Adım 1: Tümleyenler. *$\{f \leq c\} = E \setminus \{f > c\}$ ve $\{f \geq c\} = E \setminus \{f < c\}$ olduğundan, E ölçülebilir olduğu için (i) ile (iv) ve (ii) ile (iii) denktir.*
Adım 2: (iii) ile (iv). *$f(x) \leq c$ olması, her k için $f(x) < c + 1/k$ olmasına; $f(x) < c$ olması da bir k için $f(x) \leq c - 1/k$ olmasına denktir (bu, $f(x) = \pm\infty$ için de doğrudur). Yani*

$$\{f \leq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < c + 1/k\}, \qquad \{f < c\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{f \leq c - 1/k\}.$$

Birincisi (iii)'ten (iv)'ü, ikincisi (iv)'ten (iii)'ü verir. Adım 1 ile birlikte dört koşul denktir.
Adım 3: Sonsuz değerler. *$\{f = \infty\} = \bigcap_n \{f > n\}$ ve $\{f = -\infty\} = \bigcap_n \{f < -n\}$ ölçülebilirdir. Dolayısıyla f'nin sonlu olduğu küme de ölçülebilirdir:*

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = E \setminus \big(\{f = \infty\} \cup \{f = -\infty\} \big) .$$

Adım 4: Aralıklar. *Boş olmayan her $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı, $\mathbb{R}$, (a, ∞) ya da $[a, \infty)$ biçimindeki bir küme ile $\mathbb{R}$, $(-\infty, b)$ ya da $(-\infty, b]$ biçimindeki bir kümenin kesişimidir. Bu ışınların ters görüntüleri ölçülebilirdir; örneğin*

$$f^{-1}\big((a, \infty) \big) = \{f > a\} \cap f^{-1}(\mathbb{R}),$$

ve diğer üçü de aynı biçimde (ii), (iii), (iv) ile yazılır. Ters görüntü kesişimle yer değiştirdiğinden $f^{-1}(I)$ iki ölçülebilir kümenin kesişimidir. $I = \varnothing$ ise $f^{-1}(I) = \varnothing$.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Yani ölçülebilirliği sınarken dört eşik kümesinden hangisi işimize geliyorsa onu kullanabiliriz.
Reel değerli fonksiyonlarda aralıklar yerine açık kümelere de bakılabilir; bu, ölçülebilirliği süreklilikle karşılaştırmanın en kısa yoludur.

Teorem 7.2 (Açık Kümelerin Ters Görüntüsü). *E ölçülebilir ve $f : E \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul, her $\mathcal{O}$ açık kümesi için $f^{-1}(\mathcal{O})$'nun ölçülebilir olmasıdır.*

İspat.
Yeterlik. *$(-\infty, c)$ açık olduğundan $\{f < c\} = f^{-1}\left((-\infty, c) \right)$ ölçülebilirdir.*
Gereklik. *f ölçülebilir ve $\mathcal{O}$ açık olsun. $\mathcal{O} = \varnothing$ ise söylenecek bir şey yok. Aksi hâlde $\mathcal{O}$, açık aralıklardan oluşan sayılabilir bir $\{I_k\}$ topluluğunun birleşimidir (Lemma 2.3). O zaman*

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_k f^{-1}(I_k)$$

olur. Her $f^{-1}(I_k)$ Teorem 7.1 gereği ölçülebilir, sayılabilir birleşimleri de ölçülebilirdir.
■

Yani ölçülebilirlik, sürekliliğin "açık kümenin ters görüntüsü açıktır" tanımının zayıflatılmış hâlidir: açık yerine ölçülebilir istenir. Bu yüzden şu sonuç doğaldır.

Sonuç 7.1 (Sürekli Fonksiyonlar Ölçülebilirdir). *E ölçülebilir ise sürekli her $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilirdir.*

İspat.
$\mathcal{O}$ açık olsun. Her $x \in f^{-1}(\mathcal{O})$ için $f(x)$'in $\mathcal{O}$ içinde bir komşuluğu vardır; f x'te sürekli olduğundan

$$y \in E, \mid y - x \mid < \delta_x \Rightarrow f(y) \in \mathcal{O}$$

olacak bir $\delta_x > 0$ bulunur (bkz. Analiz 1: Süreklilik). $U = \bigcup_{x \in f^{-1}(\mathcal{O})} (x - \delta_x, x + \delta_x)$ açık bir kümedir ve

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = E \cap U.$$

Gerçekten, "$\subseteq$" her x kendi aralığında olduğu için, "$\supseteq$" ise $E \cap U$'nun her noktası bir $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ aralığında olup f ile $\mathcal{O}$'ya gittiği için doğrudur. Açık kümeler ölçülebilir olduğundan (Teorem 2.4) $E \cap U$ ölçülebilirdir; Teorem 7.2 sonucu verir.
■

7.3 Kısıtlama ve Hemen Her Yerde Eşitlik

Ölçülebilirlik yerel bir özelliktir: tanım kümesini ölçülebilir parçalara bölüp her parçada ayrı ayrı sınanabilir. Sıfır ölçülü parçalar ise hiç önemsizdir.

Teorem 7.3 (Kısıtlama ve Parçalara Ayırma). *A ve B ölçülebilir, $E = A \cup B$ ve $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. f'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul, f'nin A'ya ve B'ye kısıtlamalarının ölçülebilir olmasıdır. Özel olarak $E_0 \subseteq E$ ve $m(E \setminus E_0) = 0$ ise*

$$f : E \to \overline{\mathbb{R}} \ \text{ ölçülebilir} \Leftrightarrow f\big|_{E_0} \ \text{ ölçülebilir} \ . \tag{1}$$

İspat.
Gereklik. *f ölçülebilir ise her c için*

$$\{x \in A : f(x) < c\} = \{x \in E : f(x) < c\} \cap A$$

iki ölçülebilir kümenin kesişimidir. B için de aynısı geçerlidir.
Yeterlik. *İki kısıtlama da ölçülebilir ise her c için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\{x \in E : f(x) < c\} = \{x \in A : f(x) < c\} \cup \{x \in B : f(x) < c\}$$

iki ölçülebilir kümenin birleşimidir.
Özel durum. *$E \setminus E_0$'ın dış ölçüsü sıfırdır; monotonluktan her alt kümesinin de dış ölçüsü sıfırdır, dolayısıyla her alt kümesi ölçülebilirdir (Teorem 1.4). Buradan $E_0 = E \setminus (E \setminus E_0)$ ölçülebilirdir ve $E \setminus E_0$ üzerinde tanımlı her fonksiyon ölçülebilirdir. İlk kısmı $A = E_0$, $B = E \setminus E_0$ ile uygularsak (1) çıkar.*
■

Yani bir fonksiyonu sıfır ölçülü bir kümede nasıl değiştirirsek değiştirelim ölçülebilirliği değişmez. Bu iki gözlemi birleştirince sürekliliği oldukça gevşetebiliriz.

Sonuç 7.2 (Süreksizlikleri Sıfır Ölçülü Fonksiyon). *E ölçülebilir, $f : E \to \mathbb{R}$ ve D, f'nin sürekli olmadığı noktaların kümesi olsun. $m^*(D) = 0$ ise f ölçülebilirdir.*

İspat.
D ölçülebilirdir (Teorem 1.4), dolayısıyla $E \setminus D$ de ölçülebilirdir. f, $E \setminus D$'nin her noktasında E üzerinde süreklidir; komşu noktaları $E \setminus D$ ile sınırlamak süreklilik koşulunu bozmadığından $f|_{E\setminus D}$ süreklidir ve Sonuç 7.1 gereği ölçülebilirdir. $m\big(E \setminus (E \setminus D)\big) = m(D) = 0$ olduğundan Teorem 7.3'daki (1) f'nin ölçülebilir olduğunu verir.
■

Monoton fonksiyonlar da ölçülebilirdir; bunu süreksizlik noktalarını saymadan, doğrudan görebiliriz.

Örnek 7.1 (Monoton Fonksiyonlar). I bir aralık ve $f : I \to \mathbb{R}$ artan olsun. f'nin ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
$c \in \mathbb{R}$ ve $S = \{x \in I : f(x) < c\}$ olsun. $x \in S$ ve $y \in I$, $y < x$ ise $f(y) \le f(x) < c$, yani $y \in S$. Buradan S bir aralıktır (belki boş): $u < w < v$ ve $u, v \in S$ ise $w \in I$ (çünkü I aralık) ve $w < v$ olduğundan $w \in S$. Aralıklar ölçülebilir olduğundan (Teorem 2.3) f ölçülebilirdir. Azalan f için aynı akıl yürütme S'nin yukarı doğru kapalı olduğunu, yine bir aralık olduğunu gösterir.
■

Hemen her yerde (Tanım 4.2) aynı olan fonksiyonlar ölçülebilirlik açısından ayırt edilemez.

Sonuç 7.3 (Hemen Her Yerde Eşit Fonksiyonlar). *E ölçülebilir, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ve E üzerinde $f = g$* h.h.y. *olsun. f ölçülebilir ise g de ölçülebilirdir.*

İspat.
f ile g'nin farklı olduğu noktalar, ölçüsü sıfır olan bir $N \subseteq E$ kümesinin içindedir. $E_0 = E \setminus N$ için $m(E \setminus E_0) = 0$ ve $f|_{E_0} = g|_{E_0}$. (1)'i önce f'ye uygularsak bu ortak kısıtlama ölçülebilirdir; sonra g'ye uygularsak g ölçülebilir olur.
■

Bu yüzden ortak tanım kümeli ve hemen her yerde eşit iki ölçülebilir fonksiyonu çoğu zaman aynı fonksiyon sayarız.

7.4 Toplam, Çarpım ve Karakteristik Fonksiyon

Ölçülebilir fonksiyonlar cebirsel işlemlere kapalıdır. İspatın anahtarı, iki sayının arasına her zaman bir rasyonel sayı sığdırabilmektir.

Teorem 7.4 (Doğrusal Birleşim ve Çarpım). *$f, g : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman*

- ***(Doğrusallık)*** *$\alpha f + \beta g : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilirdir;*
- ***(Çarpım)*** *$fg : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilirdir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Adım 1: Skaler kat. *$\alpha = 0$ ise $\alpha f \equiv 0$ ve $\{0 < c\}$ kümesi E ya da $\varnothing$'dir. $\alpha > 0$ ise $\{\alpha f < c\} = \{f < c/\alpha\}$; $\alpha < 0$ ise $\{\alpha f < c\} = \{f > c/\alpha\}$ ve bu küme Teorem 7.1 gereği ölçülebilirdir.*
Adım 2: Toplam. *$f(x) + g(x) < c$ olsun. O zaman $f(x) < c - g(x)$ ve rasyonel sayılar yoğun olduğundan*

$$f(x) < q < c - g(x)$$

olan bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır. Tersine $f(x) < q$ ve $g(x) < c - q$ ise $f(x) + g(x) < c$. Demek ki

$$\{f + g < c\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\{f < q\} \cap \{g < c - q\} \Big),$$

ve bu, ölçülebilir kümelerin sayılabilir bir birleşimidir. Adım 1 ile birlikte $\alpha f + \beta g = (\alpha f) + (\beta g)$ ölçülebilirdir.
Adım 3: Kare. *$c \leq 0$ ise $\{f^2 < c\} = \varnothing$. $c > 0$ ise*

$$\{f^2 < c\} = f^{-1} \left((-\sqrt{c}, \sqrt{c}) \right)$$

bir aralığın ters görüntüsüdür ve Teorem 7.1 gereği ölçülebilirdir.
Adım 4: Çarpım. *Her noktada*

$$fg = \frac{1}{2} \left[(f + g)^2 - f^2 - g^2 \right]$$

olduğundan fg, Adım 2'ye göre ölçülebilir olan fonksiyonların karelerinin (Adım 3) doğrusal birleşimidir (Adım 1 ve 2).
■

Yani ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar, toplama ve çarpmaya göre kapalı bir fonksiyon uzayı oluşturur. Teorem, değerleri $\overline{\mathbb{R}}$'de olan ama **hemen her yerde sonlu** fonksiyonlara da uzanır. $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ve hemen her yerde sonlu ise, f ile g'nin ikisinin de sonlu olduğu E_0 kümesi ölçülebilirdir (Teorem 7.1, Adım 3) ve $m(E \setminus E_0) = 0$ olur. $f|_{E_0}$ ve $g|_{E_0}$, (1) gereği ölçülebilir ve reel değerli olduğundan $f + g$ ve fg, E_0 üzerinde tanımlı ve ölçülebilirdir; $\infty - \infty$ gibi anlamsız ifadelerin çıkabileceği $E \setminus E_0$ üzerinde nasıl tanımlanırlarsa tanımlansınlar (1) gereği ölçülebilir kalırlar.
En basit ölçülebilir fonksiyonlar, bir kümeyi "işaretleyen" fonksiyonlardır.

Tanım 7.3 (Karakteristik Fonksiyon). $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. $\chi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

fonksiyonuna A'nın **karakteristik fonksiyonu** (characteristic function) denir.

Yani χ_A, A'nın içinde 1, dışında 0 değerini alır.

Önerme 7.1 (Karakteristik Fonksiyonun Ölçülebilirliği). *χ_A'nın ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul A'nın ölçülebilir olmasıdır.*

İspat.
χ_A yalnız 0 ve 1 değerlerini aldığından

$$\{\chi_A < c\} = \begin{cases} \varnothing, & c \leq 0, \\ \mathbb{R} \setminus A, & 0 < c \leq 1, \\ \mathbb{R}, & c > 1. \end{cases}$$

A ölçülebilir ise üç küme de ölçülebilirdir. Tersine χ_A ölçülebilir ise $c = 1/2$ için $\mathbb{R} \setminus A$, dolayısıyla A ölçülebilirdir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Ölçülemez kümeler var olduğundan (Teorem 5.1), ölçülebilir olmayan fonksiyonlar da vardır: V ölçülemez ise χ_V ölçülebilir değildir.

7.5 Bileşke

Süreklilik ve türevlenebilirlik bileşke altında korunur. Ölçülebilirlik ise korunmaz; bunu Cantor kümesini şişiren ψ fonksiyonuyla (Teorem 6.3) görüyoruz.

Örnek 7.2 (Ölçülebilir Olmayan Bileşke). $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, ölçülebilir iki reel değerli fonksiyonun bileşkesinin ölçülebilir olmayabileceğini gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Malzeme. $\psi : [0,1] \to [0,2]$, $\psi(x) = \varphi(x) + x$ sürekli ve kesin artan bir örtendir; $[0,1]$'in öyle ölçülebilir bir A alt kümesi vardır ki $\psi(A)$ ölçülebilir değildir (Teorem 6.3).
Adım 2: ψ'yi $\mathbb{R}$'ye genişletme.

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ \psi(x), & 0 \le x \le 1, \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$$

olsun. $\psi(0) = 0$ ve $\psi(1) = 2$ olduğundan parçalar uç noktalarda birleşir; $\tilde{\psi}$, $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye sürekli, kesin artan bir örtendir. Tersi

$$\tilde{\psi}^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y < 0, \\ \psi^{-1}(y), & 0 \le y \le 2, \\ y-1, & y > 2 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Kesin artan sürekli bir fonksiyonun tersi sürekli olduğundan (Alıştırma 6.1) ψ^{-1} sürekli dir ve parçalar $y = 0$, $y = 2$'de birleştiği için $\tilde{\psi}^{-1}$ süreklidir. Sonuç 7.1 gereği ölçülebilirdir.
Adım 3: Bileşke. A ölçülebilir olduğundan χ_A ölçülebilirdir (Önerme 7.1). $f = \chi_A \circ \tilde{\psi}^{-1}$ olsun. Her y için

$$f(y) = 1 \Leftrightarrow \tilde{\psi}^{-1}(y) \in A \Leftrightarrow y \in \tilde{\psi}(A) = \psi(A),$$

yani $f = \chi_{\psi(A)}$. $\psi(A)$ ölçülebilir olmadığından Önerme 7.1 gereği f ölçülebilir değildir.
■

Yani sorun içteki fonksiyondadır: ölçülebilir A kümesinin sürekli $\tilde{\psi}^{-1}$ altındaki ters görüntüsü, ölçülemeyen $\psi(A)$ kümesidir. Sürekli fonksiyon **dışta** olduğunda ise böyle bir sorun çıkmaz.

Teorem 7.5 (Sürekli Fonksiyonla Bileşke). *$f : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli ise $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilirdir.*

İspat.
$\mathcal{O}$ açık olsun. g sürekli olduğundan $g^{-1}(\mathcal{O})$ açıktır. f ölçülebilir olduğundan Teorem 7.2 gereği

$$(g \circ f)^{-1}(\mathcal{O}) = f^{-1}\left(g^{-1}(\mathcal{O}) \right)$$

ölçülebilirdir. Yine Teorem 7.2 gereği $g \circ f$ ölçülebilirdir.
■

Sonuç 7.4 (Mutlak Değer ve Kuvvetler). *$f : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir ise $\mid f \mid$ ve her $p > 0$ için $\mid f \mid^p$ ölçülebilirdir. Gerçekten $t \mapsto \mid t \mid^p$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir ve Teorem 7.5 uygulanır.*

7.6 Maksimum, Minimum, Pozitif ve Negatif Kısım

Sonlu sayıda fonksiyonun noktasal maksimumu ve minimumu da ölçülebilirdir; bundan her fonksiyonu negatif olmayan iki fonksiyonun farkı olarak yazma olanağı doğar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 7.4 (Maksimum ve Minimum Fonksiyonu). $f_1, ..., f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. Her $x \in E$ için

$$\max\{f_1, ..., f_n\}(x) = \max\{f_1(x), ..., f_n(x)\}$$

ile tanımlı fonksiyona bu fonksiyonların **maksimumu** denir; **minimum** $\min\{f_1, ..., f_n\}$ aynı biçimde tanımlanır.

Yani maksimum ve minimum nokta nokta alınır.

Önerme 7.2 (Maksimum ve Minimumun Ölçülebilirliği). *$f_1, ..., f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ise $\max\{f_1, ..., f_n\}$ ve $\min\{f_1, ..., f_n\}$ ölçülebilirdir.*

> ***İspat.***
> *Sonlu çoklukta sayının maksimumu c'den ancak hepsi c'den küçükse küçüktür; minimumu ise en az biri c'den küçükse küçüktür. Dolayısıyla*
>
> $$\{\max\{f_1, ..., f_n\} < c\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{f_k < c\},$$
> $$\{\min\{f_1, ..., f_n\} < c\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{f_k < c\},$$
>
> *ve bunlar ölçülebilir kümelerin sonlu kesişimi ve birleşimidir.*
> ■

Tanım 7.5 (Pozitif ve Negatif Kısım). $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. E üzerinde

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = \max\{-f, 0\}$$

ile tanımlı fonksiyonlara f'nin **pozitif kısmı** (positive part) ve **negatif kısmı** (negative part) denir.

Yani f^+, f'nin sıfırın üstünde kalan kısmını, f^- ise sıfırın altında kalan kısmının mutlak değerini tutar; ikisi de negatif değildir.

Önerme 7.3 (Pozitif ve Negatif Kısmın Özellikleri). *$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ise f^+ ve f^- ölçülebilirdir ve E üzerinde*

$$f = f^+ - f^-, \qquad |\, f \,| = f^+ + f^-.$$

> ***İspat.***
> ***Ölçülebilirlik.*** *Sabit 0 fonksiyonu ölçülebilirdir ve $\{-f < c\} = \{f > -c\}$ olduğundan (Teorem 7.1) $-f$ de ölçülebilirdir. Önerme 7.2 sonucu verir.*
> ***Eşitlikler.*** *$f(x) \geq 0$ ise $f^+(x) = f(x)$ ve $f^-(x) = 0$; $f(x) < 0$ ise $f^+(x) = 0$ ve $f^-(x) = -f(x)$. Her iki durumda da $f^+(x)$ ile $f^-(x)$'ten en az biri sıfırdır (böylece $\infty - \infty$ ortaya çıkmaz) ve iki eşitlik doğrudan sağlanır.*
> ■

Yani her ölçülebilir fonksiyon, negatif olmayan iki ölçülebilir fonksiyonun farkıdır. İntegrali önce negatif olmayan fonksiyonlar için kurup sonra bu ayrışımla genişleteceğiz.

7.7 Borel Ölçülebilirlik

Tanımdaki "ölçülebilir küme" yerine "Borel kümesi" (Tanım 2.5) koyarsak daha dar ama bileşke açısından daha iyi davranan bir sınıf elde ederiz.

Tanım 7.6 (Borel Ölçülebilir Fonksiyon). E bir Borel kümesi ve $f : E \to \mathbb{R}$ olsun. Her $c \in \mathbb{R}$ için $\{x \in E : f(x) < c\}$ bir Borel kümesi ise f'ye **Borel ölçülebilir** (Borel measurable) denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani ölçülebilirlik tanımı aynen durur, yalnız kümelerden daha fazlası istenir. Bu sınıfın özellikleri alıştırmalarda ele alınıyor.

7.8 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorular tanımın sınırlarını yoklar ve bileşkeyle ilgili iki olumlu sonuç verir.

Alıştırma 7.1 (Birleşim Üzerinde Süreklilik). A ve B ölçülebilir kümeler ve $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin sürekli olması, A'ya ve B'ye kısıtlamalarının sürekli olmasına denk midir?

> **Çözüm.**
> Denk değildir; yalnız bir yön doğrudur.
> **Doğru yön.** f sürekli ise kısıtlamaları da süreklidir. Gerçekten $x \in A$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. f x'te sürekli olduğundan $y \in A \cup B, \mid y - x \mid < \delta$ iken $\mid f(y) - f(x) \mid < \varepsilon$ olan bir $\delta > 0$ vardır; bu koşul özellikle her $y \in A$ için geçerlidir. B için de aynısı doğrudur.
> **Yanlış yön.** $A = [0,1]$, $B = (1,2]$ ve $f = \chi_B$ olsun; $A \cup B = [0,2]$. $f\big|_A \equiv 0$ ve $f\big|_B \equiv 1$ sabit, dolayısıyla süreklidir. Ama $x_n = 1 + 1/n \in B$ için $x_n \to 1$ iken
> $$f(x_n) = 1 \not\to 0 = f(1),$$
> yani f, 1 noktasında sürekli değildir.
> Ölçülebilirlik parçalara ayrılarak sınanabilir (Teorem 7.3); süreklilik ise sınanamaz, çünkü parçaların birleştiği noktalarda iki tarafı birlikte kontrol etmek gerekir.
> ■

Alıştırma 7.2 (Genişletilmiş Değerli Fonksiyonun Skaler Katı). $h : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $0 \cdot (\pm\infty) = 0$ kuralıyla $\alpha h : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösterin.

> **Çözüm.**
> $c \in \mathbb{R}$ sabitleyelim ve üç durumu ayıralım.
> $\boldsymbol{\alpha = 0}$**.** Kural gereği $\alpha h \equiv 0$ ve $\{0 < c\}$ kümesi $c > 0$ ise E, $c \le 0$ ise $\varnothing$'dir; ikisi de ölçülebilir.
> $\boldsymbol{\alpha > 0}$**.** $\alpha \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ olduğundan, $h(x)$ sonlu da sonsuz da olsa
> $$\alpha h(x) < c \Leftrightarrow h(x) < c/\alpha.$$
> Yani $\{\alpha h < c\} = \{h < c/\alpha\}$ ölçülebilirdir.
> $\boldsymbol{\alpha < 0}$**.** Bu kez $\alpha \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ ve negatif bir sayıyla bölmek eşitsizliği çevirir:
> $$\alpha h(x) < c \Leftrightarrow h(x) > c/\alpha.$$
> $\{h > c/\alpha\}$ kümesi Teorem 7.1 gereği ölçülebilirdir.
> Her durumda $\{\alpha h < c\}$ ölçülebilir olduğundan αh ölçülebilirdir.
> ■

Alıştırma 7.3 (Mutlak Değeri ve Karesi Ölçülebilir Fonksiyon). Ölçülebilir bir A kümesi üzerinde, kendisi ölçülebilir olmadığı hâlde $\mid f \mid$ ve f^2 ölçülebilir olan bir $f : A \to \mathbb{R}$ örneği verin.

> **Çözüm.**
> $A = [0,1]$ alalım. $m([0,1]) = 1 > 0$ olduğundan $[0,1]$'in ölçülebilir olmayan bir V alt kümesi vardır (Teorem 5.1). İşaretini V'ye göre seçen
> $$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in V, \\ -1, & x \in [0,1] \setminus V \end{cases}$$
> fonksiyonunu tanımlayalım.
> $\boldsymbol{\mid f \mid}$ **ve** $\boldsymbol{f^2}$ **ölçülebilir.** Her noktada $\mid f \mid = f^2 = 1$; sabit fonksiyonlar süreklidir, dolayısıyla ölçülebilirdir (Sonuç 7.1).
> $\boldsymbol{f}$ **ölçülebilir değil.** $\{f < 0\} = [0,1] \setminus V$ olur. Bu küme ölçülebilir olsaydı $V = [0,1] \setminus \big([0,1] \setminus V \big)$ de ölçülebilir olurdu; çelişki. Demek ki f ölçülebilir değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 7.4 (Yakınsaklık Kümesi). E ölçülebilir ve $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. E_0, $\{f_n(x)\}$ dizisinin bir reel sayıya yakınsadığı $x \in E$ noktalarının kümesi olsun. E_0 ölçülebilir midir?

Çözüm.
Evet. Fikir, yakınsaklığı limiti anmadan, Cauchy ölçütüyle ve sayılabilir çoklukta koşulla yazmaktır.
Adım 1: Küme eşitliği. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bir reel sayı dizisi ancak ve ancak Cauchy dizisiyse bir reel sayıya yakınsar. Yani $x \in E_0$ olması, her $k \geq 1$ için öyle bir N bulunmasıdır ki her $m, n \geq N$ için $\mid f_n(x) - f_m(x) \mid < 1/k$ olsun. "Her" kesişime, "vardır" birleşime karşılık geldiğinden

$$E_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m,n \geq N} E_{k,m,n},$$

burada

$$E_{k,m,n} = \{x \in E : \mid f_n(x) - f_m(x) \mid < 1/k\}.$$

Adım 2: Parçalar ölçülebilir. $f_n - f_m$ ölçülebilirdir (Teorem 7.4) ve mutlak değeri de ölçülebilirdir (Sonuç 7.4). Dolayısıyla her $E_{k,m,n}$ ölçülebilirdir.
Adım 3: Sonuç. E_0, ölçülebilir kümelerden sayılabilir kesişim ve birleşimlerle elde edildiğinden ölçülebilirdir (Teorem 2.4).
■

Alıştırma 7.5 (Sayılabilir Çoklukta Süreksizlik). E ölçülebilir ve $f : E \to \mathbb{R}$, sayılabilir çoklukta nokta dışında sürekli olsun. f'nin ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
D, f'nin sürekli olmadığı noktaların kümesi olsun; D sayılabilirdir.
Adım 1: $m^*(D) = 0$. $D = \{d_1, d_2, ...\}$ olsun. Her tek noktalı küme, uzunluğu 0 olan $[d_k, d_k]$ aralığıdır ve dış ölçüsü 0'dır (Teorem 1.1). Sayılabilir alt toplamsallıktan (Teorem 1.3)

$$m^*(D) \leq \sum_k m^*(\{d_k\}) = 0.$$

Adım 2: Sonuç. Süreksizlik kümesi sıfır ölçülü olduğundan Sonuç 7.2 gereği f ölçülebilirdir.
■

Alıştırma 7.6 (Seviye Kümeleri Ölçülebilir Fonksiyon). E ölçülebilir ve $f : E \to \mathbb{R}$, her $c \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(c)$ kümesi ölçülebilir olan bir fonksiyon olsun. f ölçülebilir olmak zorunda mıdır?

Çözüm.
Hayır. Birebir bir fonksiyonun her seviye kümesi en fazla bir noktadır ve bu tek başına hiçbir bilgi vermez.
Adım 1: Örnek. $E = (0, 1)$ alalım. $m((0, 1)) = 1 > 0$ olduğundan $(0, 1)$'in ölçülebilir olmayan bir V alt kümesi vardır (Teorem 5.1).

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in V, \\ -x, & x \in (0,1) \setminus V \end{cases}$$

olsun. f, V'yi $(0, 1)$'in içine, $(0, 1) \setminus V$'yi $(-1, 0)$'ın içine birebir götürür; bu iki görüntü ayrık olduğundan f birebirdir.
Adım 2: Seviye kümeleri ölçülebilir. f birebir olduğundan her c için $f^{-1}(c)$ ya boştur ya da tek noktalıdır. Her iki durumda da dış ölçüsü sıfırdır ve ölçülebilirdir (Teorem 1.4).
Adım 3: f ölçülebilir değil. V'nin noktalarında $f > 0$, geri kalanında $f < 0$ olduğundan $\{f > 0\} = V$. Bu küme ölçülebilir değildir; Teorem 7.1 gereği f ölçülebilir değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 7.7 (Rasyonel Eşikler). E ölçülebilir ve $f : E \to \mathbb{R}$, her rasyonel c için $\{x \in E : f(x) > c\}$ kümesi ölçülebilir olan bir fonksiyon olsun. f ölçülebilir olmak zorunda mıdır?

Çözüm.
Evet. Rasyonel eşikler bütün reel eşikleri belirler.
$c \in \mathbb{R}$ keyfi olsun. İddia:

$$\{f > c\} = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > c}} \{f > q\}.$$

"$\supseteq$": $f(x) > q > c$ ise $f(x) > c$. "$\subseteq$": $f(x) > c$ ise rasyonel sayıların yoğunluğundan $c < q < f(x)$ olan bir $q \in \mathbb{Q}$ vardır; bu q için $x \in \{f > q\}$.
Sağ taraf ölçülebilir kümelerin sayılabilir bir birleşimidir, yani her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f > c\}$ ölçülebilirdir. Teorem 7.1 gereği f ölçülebilirdir.
■

Alıştırma 7.8 (Sıfırla Genişletme). E ölçülebilir ve $f : E \to \mathbb{R}$ olsun. $x \in E$ için $\hat{f}(x) = f(x)$, $x \notin E$ için $\hat{f}(x) = 0$ ile tanımlı $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilir olmasının, f'nin ölçülebilir olmasına denk olduğunu gösterin.

Çözüm.
$c \in \mathbb{R}$ sabitleyelim. E dışında $\hat{f} = 0$ olduğundan, oradaki noktalar $\left\{\hat{f} < c\right\}$'ye ancak $c > 0$ ise girer:

$$\left\{\hat{f} < c\right\} = \begin{cases} \{f < c\}, & c \leq 0, \\ \{f < c\} \cup (\mathbb{R} \setminus E), & c > 0. \end{cases}$$

f ölçülebilir ise. $\{f < c\}$ ve $\mathbb{R} \setminus E$ ölçülebilir olduğundan her iki durumda $\left\{\hat{f} < c\right\}$ ölçülebilirdir; yani $\hat{f}$ ölçülebilirdir.
$\hat{f}$ ölçülebilir ise. $\{f < c\} = \left\{\hat{f} < c\right\} \cap E$ iki ölçülebilir kümenin kesişimidir; yani f ölçülebilirdir. (Bu da Teorem 7.3'nın bir özel durumudur.)
E'nin ölçülebilir olması gereklidir: ölçülemeyen bir E üzerinde $f \equiv 0$ alınırsa $\hat{f} \equiv 0$ ölçülebilir, ama tanım kümesi ölçülebilir olmadığından f ölçülebilir fonksiyon sayılmaz.
■

Alıştırma 7.9 (Borel Kümelerinin Ters Görüntüsü). E ölçülebilir ve $f : E \to \mathbb{R}$ olsun. f'nin ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşulun, her A Borel kümesi için $f^{-1}(A)$'nın ölçülebilir olması olduğunu gösterin.

Çözüm.
Yeterlik. $(-\infty, c)$ açık, dolayısıyla Borel kümesidir; $\{f < c\} = f^{-1}\left(\,(-\infty, c)\,\right)$ ölçülebilirdir.
Gereklik. f ölçülebilir olsun ve

$$\Sigma = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \ \text{ ölçülebilir}\}$$

diyelim. Σ bir σ-cebiridir:

- $f^{-1}(\mathbb{R}) = E$ ölçülebilir, yani $\mathbb{R} \in \Sigma$;
- $A \in \Sigma$ ise $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$ ölçülebilir;
- $A_k \in \Sigma$ ise $f^{-1}\left(\bigcup_k A_k\right) = \bigcup_k f^{-1}(A_k)$ ölçülebilir.

Teorem 7.2 gereği her açık küme Σ'dadır. $\mathcal{B}$, açık kümeleri içeren en küçük σ-cebiri olduğundan (Tanım 2.5) $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$. Yani her Borel kümesi A için $f^{-1}(A)$ ölçülebilirdir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 7.10 (Borel Ölçülebilir Fonksiyonda Aralıkların Ters Görüntüsü). $f : E \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir olsun (Tanım 7.6). Her I aralığı için $f^{-1}(I)$'nın bir Borel kümesi olduğunu gösterin.

Çözüm.
Teorem 7.1'ın ispatını, "ölçülebilir" yerine "Borel" diyerek tekrarlıyoruz; kullanılan tek şey $\mathcal{B}$'nin bir σ-cebiri olması ve $E \in \mathcal{B}$ olmasıdır.
Adım 1: Dört eşik kümesi. Her c için $\{f < c\} \in \mathcal{B}$ verildi. Buradan

$$\{f \geq c\} = E \setminus \{f < c\}, \qquad \{f \leq c\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{f < c + 1/k\},$$

ve $\{f > c\} = E \setminus \{f \leq c\}$ Borel kümeleridir.
Adım 2: Aralıklar. f reel değerli olduğundan $f^{-1}(\mathbb{R}) = E$. Boş olmayan her I aralığı, $\mathbb{R}$, (a, ∞), $[a, \infty)$ kümelerinden biriyle $\mathbb{R}$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ kümelerinden birinin kesişimidir. Bunların ters görüntüleri sırasıyla E, $\{f > a\}$, $\{f \geq a\}$, $\{f < b\}$, $\{f \leq b\}$'dir ve Adım 1'e göre Borel kümeleridir. $f^{-1}(I)$ bunlardan ikisinin kesişimi olduğundan Borel kümesidir; $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ da öyledir.
■

Alıştırma 7.11 (Borel Ölçülebilir Fonksiyonların Toplamı ve Çarpımı). $f, g : E \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. $\alpha f + \beta g$ ve fg fonksiyonlarının Borel ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
Teorem 7.4'ın dört adımını Borel kümeleriyle tekrarlıyoruz.
Adım 1: Skaler kat. $\alpha = 0$ ise $\{\alpha f < c\}$, E ya da $\varnothing$'dir. $\alpha > 0$ ise $\{\alpha f < c\} = \{f < c/\alpha\}$; $\alpha < 0$ ise $\{\alpha f < c\} = \{f > c/\alpha\}$ ve bu küme Alıştırma 7.10 gereği Borel kümesidir.
Adım 2: Toplam. Rasyonel sayıların yoğunluğuyla

$$\{f + g < c\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \Big(\{f < q\} \cap \{g < c - q\} \Big),$$

Borel kümelerinin sayılabilir birleşimidir. Adım 1 ile $\alpha f + \beta g$ Borel ölçülebilirdir.
Adım 3: Kare. $c \leq 0$ ise $\{f^2 < c\} = \varnothing$; $c > 0$ ise $\{f^2 < c\} = f^{-1}\left((-\sqrt{c}, \sqrt{c}) \right)$ ve bu, Alıştırma 7.10 gereği Borel kümesidir.
Adım 4: Çarpım. $fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2 \right]$ olduğundan Adım 1–3 fg'nin Borel ölçülebilir olduğunu verir.
■

Alıştırma 7.12 (Borel Ölçülebilirlik Lebesgue Ölçülebilirliği Gerektirir). Borel ölçülebilir her fonksiyonun Lebesgue ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
$f : E \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir olsun. Her Borel kümesi ölçülebilirdir (Teorem 2.4). Dolayısıyla tanım kümesi E ölçülebilirdir ve her c için Borel kümesi olan $\{f < c\}$ ölçülebilirdir. Bu tam olarak Tanım 7.2'un koşuludur.
■

Alıştırma 7.13 (Borel Ölçülebilir Fonksiyonda Borel Kümelerin Ters Görüntüsü). $f : E \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir ve B bir Borel kümesi olsun. $f^{-1}(B)$'nin bir Borel kümesi olduğunu gösterin.

Çözüm.
$\Sigma = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$ olsun.
Adım 1: Σ bir σ-cebiridir. $f^{-1}(\mathbb{R}) = E \in \mathcal{B}$. $A \in \Sigma$ ise $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$, iki Borel kümesinin farkı olarak Borel kümesidir. $A_k \in \Sigma$ ise

$$f^{-1}\left(\bigcup_k A_k \right) = \bigcup_k f^{-1}(A_k) \in \mathcal{B}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: Açık kümeler Σ'dadır. Her açık aralık Alıştırma 7.10 gereği Σ'dadır. Boş olmayan her açık küme, açık aralıkların sayılabilir bir birleşimidir (Lemma 2.3); Adım 1'e göre Σ'dadır. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ olduğundan boş küme de Σ'dadır.
Adım 3: Sonuç. $\mathcal{B}$, açık kümeleri içeren en küçük σ-cebiri olduğundan (Tanım 2.5) $\mathcal{B} \subseteq \Sigma$. Yani $B \in \mathcal{B}$ ise $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}$.
■

Alıştırma 7.14 (Borel Ölçülebilir Fonksiyonların Bileşkesi). $f : E \to \mathbb{R}$ ve $g : D \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir ve $g(D) \subseteq E$ olsun. $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Borel ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
$f \circ g$'nin tanım kümesi D, g Borel ölçülebilir olduğundan bir Borel kümesidir. $c \in \mathbb{R}$ ve $S = \{x \in E : f(x) < c\}$ olsun; S bir Borel kümesidir. $g(D) \subseteq E$ olduğundan

$$\{y \in D : f(g(y)) < c\} = \{y \in D : g(y) \in S\} = g^{-1}(S).$$

Alıştırma 7.13 gereği g altında Borel kümesinin ters görüntüsü Borel kümesidir. Yani $\{f \circ g < c\} \in \mathcal{B}$ ve $f \circ g$ Borel ölçülebilirdir.
■

Alıştırma 7.15 (Borel ve Lebesgue Ölçülebilir Fonksiyonun Bileşkesi). $f : E \to \mathbb{R}$ Borel ölçülebilir, $g : D \to \mathbb{R}$ Lebesgue ölçülebilir ve $g(D) \subseteq E$ olsun. $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Lebesgue ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
D, g ölçülebilir olduğundan ölçülebilirdir. $c \in \mathbb{R}$ ve $S = \{x \in E : f(x) < c\}$ olsun; f Borel ölçülebilir olduğundan S bir Borel kümesidir. Önceki çözümdeki gibi

$$\{f \circ g < c\} = g^{-1}(S).$$

Alıştırma 7.9 gereği ölçülebilir bir fonksiyon altında Borel kümesinin ters görüntüsü ölçülebilirdir. Yani $f \circ g$ ölçülebilirdir.
Sıranın önemi: dıştaki fonksiyonun Borel ölçülebilir olması gerekir. Dıştaki yalnız Lebesgue ölçülebilir olduğunda S Borel kümesi olmayabilir ve sonuç çöker (Örnek 7.2).
■

Alıştırma 7.16 (İçte Sürekli Fonksiyonlu Bileşke). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. $f \circ g$ bileşkesi ölçülebilir olmak zorunda mıdır?

Çözüm.
Hayır. Örnek 7.2 tam olarak bu durumu kurar: ψ Cantor kümesini şişiren fonksiyon (Teorem 6.3), $\tilde{\psi}$ onun $\mathbb{R}$'ye sürekli, kesin artan genişlemesi ve $A \subseteq [0,1]$, $\psi(A)$ ölçülebilir olmayan ölçülebilir bir küme olsun.

- $f = \chi_A$ ölçülebilirdir, çünkü A ölçülebilirdir (Önerme 7.1).
- $g = \tilde{\psi}^{-1}$, $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.
- $f \circ g = \chi_{\psi(A)}$ ölçülebilir değildir, çünkü $\psi(A)$ ölçülebilir değildir.

Sürekli fonksiyon dışta olduğunda ise bileşke her zaman ölçülebilirdir (Teorem 7.5); fark, g^{-1}'in açık kümeleri açık kümelere götürmesi, ama ölçülebilir kümeleri ölçülebilir kümelere götürmek zorunda olmamasıdır.
■

Alıştırma 7.17 (Tersi Lipschitz Olan Fonksiyonla Bileşke). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli, kesin artan ve tersi Lipschitz (Tanım 6.5) olan bir fonksiyon olsun. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir ise $g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksi-

 CC BY-NC-SA 4.0

yonunun ölçülebilir olduğunu gösterin. (İpucu: Lipschitz bir fonksiyonun F_σ kümelerini ve sıfır ölçülü kümeleri nereye götürdüğüne bakın.)

Çözüm.
$c = f(a), d = f(b)$ olsun. f sürekli ve kesin artan olduğundan Ara Değer Teoremi ile $[a,b]$'yi $[c,d]$'nin üzerine birebir götürür. $h = f^{-1} : [c,d] \to [a,b]$ olsun; varsayım gereği bir $L \geq 0$ için $\mid h(u) - h(v) \mid \leq L \mid u - v \mid$.
Adım 1: Problemi h'ye aktarma. $t \in \mathbb{R}$ ve $S = \{y \in \mathbb{R} : g(y) < t\}$ olsun; S ölçülebilirdir. $x \in [a,b]$ için $g(f(x)) < t$ olması $f(x) \in S \cap [c,d]$ olmasıdır; f ile h birbirinin tersi olduğundan

$$\{x \in [a,b] : g(f(x)) < t\} = h\left(\, S \cap [c,d] \,\right).$$

O hâlde h'nin $[c,d]$'nin ölçülebilir alt kümelerini ölçülebilir kümelere götürdüğünü göstermek yeter.
Adım 2: Sıfır ölçülü kümeler. $Z \subseteq [c,d]$, $m(Z) = 0$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Z'yi $\sum_k \ell(I_k) < \varepsilon$ olan açık I_k aralıklarıyla örtelim. $J_k = I_k \cap [c,d]$ bir aralıktır ve $u, v \in J_k$ için

$$\mid h(u) - h(v) \mid \leq L \mid u - v \mid \leq L\,\ell(I_k),$$

yani $h(J_k)$, uzunluğu en fazla $L\,\ell(I_k)$ olan bir kapalı aralığın içindedir. $h(Z) \subseteq \bigcup_k h(J_k)$ olduğundan monotonluk, sayılabilir alt toplamsallık (Teorem 1.3) ve Teorem 1.1 ile

$$m^*\left(\, h(Z) \,\right) \leq \sum_k L\,\ell(I_k) < L\,\varepsilon.$$

ε keyfi olduğundan $m^*(h(Z)) = 0$.
Adım 3: F_σ kümeleri. $F \subseteq [c,d]$ kapalı ise sınırlı ve kapalı, yani kompakttır; h sürekli (Lipschitz) olduğundan $h(F)$ kompakt, dolayısıyla kapalıdır. Görüntü birleşimle yer değiştirdiğinden $[c,d]$'nin F_σ alt kümelerinin görüntüleri F_σ kümeleridir.
Adım 4: Ölçülebilir kümeler. $M \subseteq [c,d]$ ölçülebilir olsun. Sonuç 3.1 gereği $F \subseteq M$ ve $m(M \setminus F) = 0$ olan bir F_σ kümesi F vardır. O zaman

$$h(M) = h(F) \cup h(M \setminus F).$$

Adım 3'e göre $h(F)$ bir F_σ kümesi, dolayısıyla ölçülebilir (Teorem 2.4); Adım 2'ye göre $h(M \setminus F)$ sıfır ölçülü, dolayısıyla ölçülebilirdir (Teorem 1.4). Birleşimleri ölçülebilirdir.
Adım 5: Sonuç. $S \cap [c,d]$ ölçülebilir olduğundan Adım 4'e göre $h(S \cap [c,d])$, yani $\{g \circ f < t\}$ ölçülebilirdir. $[a,b]$ ölçülebilir olduğundan $g \circ f$ ölçülebilirdir.
■

Ölçülebilir fonksiyonların cebirsel işlemlere kapalı olduğunu gördük. Sıradaki bölüm Noktasal Limitler ve Yaklaşım, bu sınıfın limit almaya da kapalı olduğunu ve her ölçülebilir fonksiyona basit fonksiyonlarla yaklaşılabildiğini gösteriyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

8. Noktasal Limitler ve Yaklaşım

Bir fonksiyon dizisinin bir fonksiyona "yakınsaması" birçok farklı biçimde anlaşılabilir. Bu bölümde en doğal olanını, noktasal yakınsaklığı ele alıyoruz ve ölçülebilirliğin bu limit altında korunduğunu gösteriyoruz; süreklilik ve Riemann integrallenebilirlik için durum böyle değildir.
Ardından Lebesgue integralinin yapı taşlarını tanıtıyoruz: yalnız sonlu sayıda değer alan ölçülebilir fonksiyonlar, yani basit fonksiyonlar. Bölümün ana sonucu, her ölçülebilir fonksiyonun basit fonksiyonların noktasal limiti olduğudur.

8.1 Noktasal Yakınsaklık

Önce iki yakınsaklık kavramını ayıralım; ikincisi yalnız alıştırmalarda ve karşılaştırma için kullanılacak.

Tanım 8.1 (Noktasal Yakınsaklık). $\left\{f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}\right\}$ bir fonksiyon dizisi ve $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. Her $x \in E$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ise $\{f_n\}$ dizisi E üzerinde f ye **noktasal yakınsar** (converges pointwise) denir ve $\{f_n\} \to f$ yazılır.

Yani her nokta ayrı ayrı incelenir; x sabitken $\{f_n(x)\}$ sayı dizisi $f(x)$ e yakınsar.

Tanım 8.2 (Düzgün Yakınsaklık). $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}$ ve $f : E \to \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir N indisi varsa ki

$$n \geq N \quad \text{ve} \quad x \in E \Longrightarrow \mid f(x) - f_n(x) \mid < \varepsilon$$

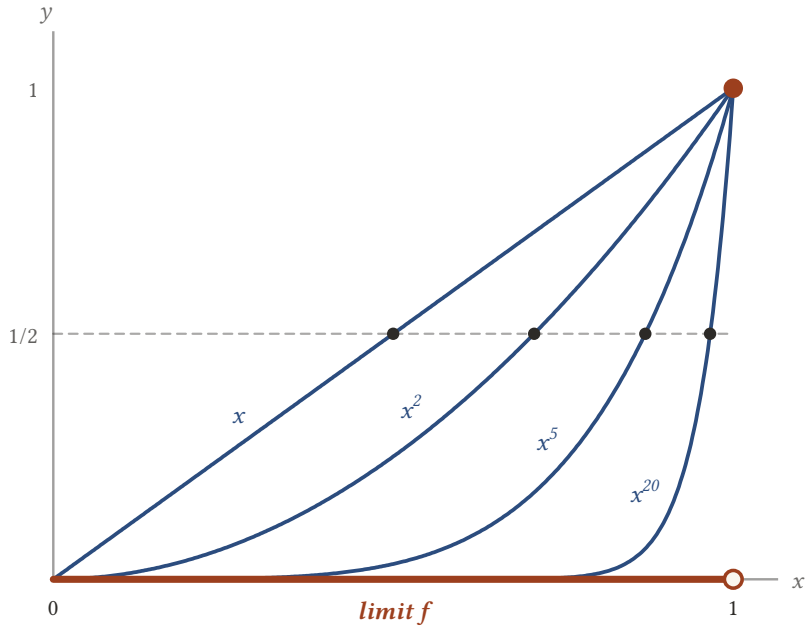
olur, $\{f_n\}$ dizisi E üzerinde f ye **düzgün yakınsar** (converges uniformly) denir.

Yani N yalnız ε a bağlıdır, noktaya bağlı değildir. Düzgün yakınsaklık noktasal yakınsaklığı gerektirir; tersi doğru değildir.

Örnek 8.1 (Süreksiz Noktasal Limit). $[0,1]$ üzerinde $f_n(x) = x^n$ olsun. Noktasal limiti bulun; yakınsaklığın düzgün olmadığını ve limitin ölçülebilir olduğunu gösterin.

> **Çözüm.**
> **Noktasal limit.** $0 \leq x < 1$ ise $x^n \to 0$, $x = 1$ ise $x^n = 1$ dir. Dolayısıyla $\{f_n\}$ noktasal olarak
>
> $$f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1, \\ 1, x = 1 \end{cases}$$
>
> fonksiyonuna yakınsar. Her f_n sürekli olduğu hâlde f, $x = 1$ de süreksizdir.
> **Düzgün değil.** $x_n = 2^{-1/n} \in [0,1)$ noktasında $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$ ve $f(x_n) = 0$ dır. Buna göre her n için $\sup_{[0,1]} \mid f - f_n \mid \geq \frac{1}{2}$ olur; $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için uygun bir N bulunamaz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.1: x, x^2, x^5, x^{20} grafikleri ve noktasal limit f (turuncu): $[0,1)$ üzerinde 0, $x=1$'de 1. İşaretli noktalar $x_n = 2^{-1/n}$ değerleridir; her f_n orada $1/2$ değerini alır ve bu noktalar 1'e kayar. Bu yüzden $\sup |f - f_n|$ hiçbir zaman 1/2'nin altına inmez.

Ölçülebilir. $f = \chi_{\{1\}}$ dir. Her c için $\{x \in [0,1] : f(x) > c\}$ kümesi $\varnothing$, $\{1\}$ ya da $[0,1]$ dir; üçü de ölçülebilirdir.
■

Riemann integrallenebilirlik de noktasal limitte kaybolabilir: $[0,1]$ deki rasyonel sayılar $q_1, q_2, \ldots$ diye sıralanır ve $f_n = \chi_{\{q_1,\ldots,q_n\}}$ alınırsa her f_n Riemann integrallenebilir, ama limit $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ değildir. Ölçülebilirlik ise korunur.

Teorem 8.1 (Ölçülebilir Fonksiyonların Noktasal Limiti). *$\{f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun ve E üzerinde hemen her yerde (Tanım 4.2) $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna noktasal yakınsasın. O zaman f ölçülebilirdir.*

İspat.
Ölçülebilirliğin denk koşullarından (Teorem 7.1) her $c \in \mathbb{R}$ için $\{x \in E : f(x) < c\}$ kümesinin ölçülebilir olduğunu göstermek yeter.
Adım 1: İstisna kümesini ayırmak. *$Z \subseteq E$, $m(Z) = 0$ olan ve dışında $f_n(x) \to f(x)$ olan küme olsun; $E' = E \setminus Z$ ölçülebilirdir.*

$$\{x \in E : f(x) < c\} = \{x \in E' : f(x) < c\} \cup \{x \in Z : f(x) < c\}$$

yazalım. İkinci küme sıfır ölçülü Z nin alt kümesidir, dış ölçüsü sıfırdır ve bu yüzden ölçülebilirdir (Teorem 1.4). Geriye birinci kümeyi incelemek kalır.
Adım 2: Limit koşulunu kümelere çevirmek. *$x \in E'$ için şunu gösterelim:*

$$f(x) < c \Leftrightarrow \exists\, n, k \ \text{ öyle ki } \ \forall j \geq k : f_j(x) < c - \frac{1}{n}.$$

($\Rightarrow$) $f(x) < c$ ise $f(x) < c - 1/n$ olacak bir n vardır ($f(x) = -\infty$ ise her n uygundur). Limiti $c - 1/n$ den küçük olan $\{f_j(x)\}$ dizisinin terimleri bir k indisinden sonra $c - 1/n$ den küçüktür. ($\Leftarrow$) Her $j \geq k$ için $f_j(x) < c - 1/n$ ise limite geçerek $f(x) \leq c - 1/n < c$ bulunur.
Adım 3: Ölçülebilirlik. *Adım 2 şu eşitliği verir:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\{x \in E' : f(x) < c\} = \bigcup_{n,k\geq 1} \bigcap_{j=k}^{\infty} \Big\{x \in E' : f_j(x) < c - \frac{1}{n}\Big\}.$$

Sağdaki her küme, ölçülebilir $\{x \in E : f_j(x) < c - 1/n\}$ kümesiyle E' nün kesişimidir. Ölçülebilir kümeler bir σ-cebiri olduğundan (Teorem 2.4) sayılabilir kesişim ve birleşim de ölçülebilirdir.
■

Yani sürekliliğin ve Riemann integrallenebilirliğin aksine ölçülebilirlik noktasal limitle, hatta sıfır ölçülü bir küme dışındaki noktasal limitle korunur.

8.2 Basit Fonksiyonlar

Riemann integrali basamak fonksiyonlarıyla kurulur. Lebesgue integralinde aynı rolü, ölçülebilir kümelerin karakteristik fonksiyonlarının doğrusal birleşimleri oynar.

Tanım 8.3 (Basamak Fonksiyonu). $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ olsun. $[a,b]$ nin bir $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ bölüntüsü (partition) varsa ki h her (x_{i-1}, x_i) açık aralığında sabittir, h ye **basamak fonksiyonu** (step function) denir.

Yani h sonlu sayıda aralık üzerinde sabittir; bölüntü noktalarındaki değerleri keyfidir.

Tanım 8.4 (Basit Fonksiyon). Ölçülebilir ve yalnız sonlu sayıda değer alan reel değerli bir $\varphi : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna **basit fonksiyon** (simple function) denir.

Yani basit fonksiyon, E yi sonlu sayıda ölçülebilir parçaya bölüp her parçada sabit olan fonksiyondur. Her basamak fonksiyonu basittir, ama $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ basit olup basamak fonksiyonu değildir.

Tanım 8.5 (Yarıbasit Fonksiyon). Ölçülebilir ve yalnız sayılabilir sayıda değer alan reel değerli bir fonksiyona **yarıbasit** (semisimple) denir.

Yani yarıbasit fonksiyonlar, basit fonksiyonlarda "sonlu" koşulunun "sayılabilir" diye gevşetilmesiyle elde edilir.

Önerme 8.1 (Basit Fonksiyonların Cebirsel Kapanışı). *$A \subseteq E$ ölçülebilirse χ_A basittir. φ, ψ basit ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise $\alpha\varphi + \beta\psi$, $\varphi\psi$ ve $\max\{\varphi,\psi\}$ de basittir. Özellikle ölçülebilir kümelerin karakteristik fonksiyonlarının doğrusal birleşimleri ve çarpımları basittir.*

İspat.
Karakteristik fonksiyon. *χ_A yalnız 0 ve 1 değerlerini alır. Her c için $\{x \in E : \chi_A(x) > c\}$ kümesi, $c < 0$ ise E, $0 \leq c < 1$ ise A, $c \geq 1$ ise $\varnothing$ dır; üçü de ölçülebilirdir.*
Değer sayısı. *φ nin değerleri $\{a_1, \ldots, a_p\}$, ψ ninkiler $\{b_1, \ldots, b_q\}$ ise $\alpha\varphi + \beta\psi$, $\varphi\psi$ ve $\max\{\varphi,\psi\}$ nin değerleri sırasıyla $\alpha a_i + \beta b_j$, $a_i b_j$ ve $\max\{a_i, b_j\}$ biçimindedir; en fazla pq tanedir.*
Ölçülebilirlik. *Doğrusal birleşim ve çarpım Teorem 7.4 ile ölçülebilirdir. Maksimum için her c de*

$$\{\max\{\varphi,\psi\} > c\} = \{\varphi > c\} \cup \{\psi > c\}$$

iki ölçülebilir kümenin birleşimidir.
■

Bir basit fonksiyonu karakteristik fonksiyonlar cinsinden yazmanın tercih edilen bir yolu vardır.

Tanım 8.6 (Kanonik Gösterim). $\varphi : E \to \mathbb{R}$ basit olsun ve birbirinden farklı $c_1, \ldots, c_n$ değerlerini alsın. $E_k = \{x \in E : \varphi(x) = c_k\}$ için

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \chi_{E_k} \quad (E \text{ üzerinde})$$

 CC BY-NC-SA 4.0

yazılışına φ nin **kanonik gösterimi** (canonical representation) denir.

Yani kanonik gösterimde E_k lar ayrıktır, birleşimleri E dir ve c_k lar farklıdır; bu üç özellik gösterimi (terim sırası dışında) tek kılar, çünkü φ tam E_k üzerinde c_k değerini alır. $E_k = \{\varphi \geq c_k\} \cap \{\varphi \leq c_k\}$ olduğundan her E_k ölçülebilirdir.

Örnek 8.2 (Kanonik Gösterimi Bulmak). $\mathbb{R}$ üzerinde $\varphi = \chi_{[0,2]} + \chi_{[1,3]}$ basit fonksiyonunun kanonik gösterimini yazın.

> **Çözüm.**
> Her x için $\varphi(x)$, x i içeren aralık sayısıdır; değerler $0, 1, 2$ dir. İki aralıkta birden bulunan noktalar $[1, 2]$, yalnız birinde bulunanlar $[0, 1) \cup (2, 3]$ tür. Buna göre
>
> $$\varphi = 0 \cdot \chi_{E_0} + 1 \cdot \chi_{[0,1)\cup(2,3]} + 2 \cdot \chi_{[1,2]}, \qquad E_0 = \mathbb{R} \setminus [0, 3].$$
>
> Verilen yazılışta $[0, 2]$ ve $[1, 3]$ ayrık olmadığından o yazılış kanonik değildir.
> ■

8.3 Basit Yaklaşım

Sınırlı bir ölçülebilir fonksiyonu, değer kümesini küçük aralıklara bölerek alttan ve üstten basit fonksiyonlarla sıkıştırabiliriz. Riemann'ın tanım kümesini bölmesinin aksine burada bölünen, değer kümesidir.

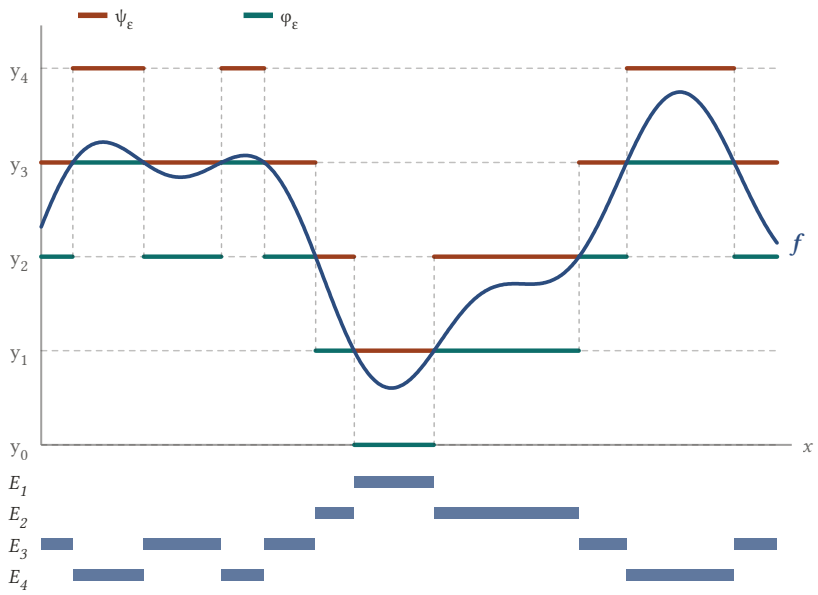
Lemma 8.1 (Basit Yaklaşım Lemması). *$f : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir ve sınırlı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için E üzerinde*

$$\varphi_\varepsilon \leq f \leq \psi_\varepsilon \quad \text{ve} \quad 0 \leq \psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon < \varepsilon$$

koşullarını sağlayan $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon : E \to \mathbb{R}$ basit fonksiyonları vardır. Ayrıca $f \geq 0$ ise $\varphi_\varepsilon \geq 0$ seçilebilir.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: Değer aralığını bölmek.*** *$f(E) \subseteq [c, d)$ olacak şekilde bir sınırlı $[c, d)$ aralığı seçelim ($f \geq 0$ ise $c = 0$ alınır). $[c, d]$ nin*
>
> $$c = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = d, \qquad y_k - y_{k-1} < \varepsilon \quad (1 \leq k \leq n)$$
>
> *bir bölüntüsünü alalım ve $1 \leq k \leq n$ için*
>
> $$I_k = [y_{k-1}, y_k), \qquad E_k = f^{-1}(I_k) = \{y_{k-1} \leq f < y_k\}$$
>
> *tanımlayalım. f ölçülebilir olduğundan her E_k ölçülebilirdir; I_k lar ayrık olup $[c, d)$ yi örttüğünden E_k lar da ayrıktır ve birleşimleri E dir.*
> ***Adım 2: Alt ve üst fonksiyon.***
>
> $$\varphi_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1}\, \chi_{E_k}, \qquad \psi_\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} y_k\, \chi_{E_k}$$
>
> *olsun. Bunlar ölçülebilir kümelerin karakteristik fonksiyonlarının doğrusal birleşimleri olduğundan basittir (Önerme 8.1).*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.2: Değer aralığı $y_0 < y_1 < \ldots < y_4$ *noktalarıyla bölünür.* $E_k = \{y_{k-1} \le f < y_k\}$ *kümeleri alttaki satırlarda görülür; birkaç aralıktan oluşabilirler.* φ_ε *her* E_k *üzerinde* y_{k-1}, ψ_ε *ise* y_k *değerini alır; ikisi* f*'yi alttan ve üstten bir şerit genişliği içinde sıkıştırır.*

Adım 3: Yaklaşım. *$x \in E$ ise x tam bir E_k ya aittir ve orada*

$$\varphi_\varepsilon(x) = y_{k-1} \le f(x) < y_k = \psi_\varepsilon(x)$$

olur; dolayısıyla $\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x) = y_k - y_{k-1}$ farkı negatif değildir ve ε dan küçüktür. $c = 0$ seçildiyse φ_ε nin değerleri $y_0, \ldots, y_{n-1} \ge 0$ dır.
■

Yani sınırlı ölçülebilir bir fonksiyon, istenen incelikte iki basit fonksiyonun arasına sıkıştırılabilir; f ile bu fonksiyonların farkı her yerde ε dan küçüktür.
Sınırsız fonksiyonlar ve sonsuz ölçülü tanım kümeleri için, sıfırdan farklı olduğu yeri küçük tutacağız.

Tanım 8.7 (Sonlu Destekli Fonksiyon). Ölçülebilir bir $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu, sonlu ölçülü bir $E_0 \subseteq E$ kümesinin dışında sıfırsa, yani $m(E_0) < \infty$ ve $E \setminus E_0$ üzerinde $f = 0$ ise, f ye **sonlu destekli** (of finite support) denir.

Yani sonlu destekli bir fonksiyonun sıfırdan farklı olduğu küme sonlu ölçülü bir kümenin içinde kalır.

Teorem 8.2 (Basit Yaklaşım Teoremi). *$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir olsun. E üzerinde f ye noktasal yakınsayan ve her n için*

$$|\,\varphi_n\,| \le |\,f\,| \quad (E \text{ üzerinde})$$

koşulunu sağlayan, sonlu destekli basit fonksiyonlardan oluşan bir $\{\varphi_n : E \to \mathbb{R}\}$ dizisi vardır. $f \ge 0$ ise $\{\varphi_n\}$ ayrıca artan ve her $\varphi_n \ge 0$ seçilebilir.

İspat.
Önce $f \ge 0$ durumunu kanıtlayıp genel durumu ona indirgeyeceğiz.
Adım 1: Kesme ve lemma ($f \ge 0$). *Her n için $E_n = \{x \in E : f(x) \le n\}$ ölçülebilirdir. Kısıtlama ile parçalara ayırma önermesine göre f nin E_n ye kısıtlaması ölçülebilirdir ve $0 \le f \le n$ sağladığından sınırlıdır. Basit yaklaşım lemmasını (Lemma 8.1) $\varepsilon = 1/n$ ile uygulayıp, $f \ge 0$ olduğundan $\varphi_n \ge 0$ seçerek E_n üzerinde $0 \le \varphi_n \le f \le \psi_n$ ve $\psi_n - \varphi_n < 1/n$ olan basit φ_n, ψ_n buluruz. Buradan*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$0 \le \varphi_n \le f \quad \text{ve} \quad 0 \le f - \varphi_n \le \psi_n - \varphi_n < \frac{1}{n} \qquad (E_n \text{ üzerinde}). \tag{1}$$

φ_n yi $f(x) > n$ olan noktalarda $\varphi_n(x) = n$ diyerek bütün E ye genişletelim. Genişletilmiş φ_n sonlu sayıda değer alır ve her c için $\{\varphi_n > c\}$ kümesi, E_n deki ölçülebilir $\{\varphi_n > c\}$ kümesiyle ($n > c$ ise) ölçülebilir $\{f > n\}$ kümesinin birleşimidir; yani φ_n, E üzerinde basittir. Ayrıca E üzerinde $0 \le \varphi_n \le f$ dir.

Adım 2: Noktasal yakınsaklık. *$x \in E$ olsun. $f(x) = \infty$ ise her n için $\varphi_n(x) = n \to \infty$. $f(x) < \infty$ ise her $n \ge f(x)$ için $x \in E_n$ olur ve (1) den $0 \le f(x) - \varphi_n(x) < 1/n$ bulunur. Her iki durumda $\varphi_n(x) \to f(x)$.*

Adım 3: Artanlık ve sonlu destek. *Her n için*

$$\theta_n = \max\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \cdot \chi_{E\cap[-n,n]}$$

tanımlayalım. Önerme 8.1 gereği θ_n basittir. İki çarpan da negatif olmayıp n ile artan olduğundan $\{\theta_n\}$ artandır ve $0 \le \theta_n \le f$ dir. θ_n, ölçüsü en çok $2n$ olan $E \cap [-n, n]$ dışında sıfırdır; yani sonlu desteklidir. Son olarak sabit bir x için $n \ge |\, x \,|$ olunca

$$\varphi_n(x) \le \theta_n(x) \le f(x)$$

olur ve Adım 2'den $\theta_n(x) \to f(x)$ çıkar. Böylece $\{\theta_n\}$, $f \ge 0$ için istenen dizidir.

Adım 4: Genel durum. *$f^+ = \max\{f, 0\}$ ve $f^- = \max\{-f, 0\}$ olsun. Her c için $\{f^+ > c\}$ kümesi $c \ge 0$ ise $\{f > c\}$, $c < 0$ ise E dir; f^- için de benzer olduğundan ikisi de negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlardır ve*

$$f = f^+ - f^-, \qquad |\, f \,| = f^+ + f^-$$

dir. Adım 3'ü f^+ ve f^- ye uygulayarak $0 \le \theta_n^{\pm} \le f^{\pm}$, $\theta_n^{\pm} \to f^{\pm}$ olan sonlu destekli basit θ_n^+, θ_n^- bulalım ve $\varphi_n = \theta_n^+ - \theta_n^-$ diyelim. φ_n basittir ve iki sonlu ölçülü kümenin birleşimi dışında sıfırdır. Her x te $f^+(x)$ ile $f^-(x)$ ten en az biri sıfırdır; o zaman karşılık gelen $\theta_n^{\pm}(x)$ de sıfırdır. Dolayısıyla $\infty - \infty$ belirsizliği doğmaz,

$$\varphi_n(x) \to f^+(x) - f^-(x) = f(x) \quad \text{ve} \quad |\, \varphi_n \,| \le \theta_n^+ + \theta_n^- \le |\, f \,|\,.$$

■

Yani her ölçülebilir fonksiyon, sonlu destekli basit fonksiyonların noktasal limitidir; negatif olmayan fonksiyonlara alttan artarak yaklaşılabilir. Lebesgue integrali tam da bu yaklaşım üzerine kurulacak.

8.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar düzgün yakınsaklığı, basit yaklaşımın çeşitlerini ve ölçülebilirliğin limitlerle korunmasını pekiştiriyor.

Alıştırma 8.1 (Dini Teoremi). $\{f_n : [a, b] \to \mathbb{R}\}$ sürekli fonksiyonların artan bir dizisi olsun ve sürekli bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna noktasal yakınsasın. Yakınsaklığın $[a, b]$ üzerinde düzgün olduğunu gösterin. (İpucu: $\varepsilon > 0$ için $E_n = \{x \in [a, b] : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$ kümelerini inceleyin ve Heine–Borel teoremini kullanın.)

Çözüm.
$\varepsilon > 0$ verilsin. Dizi artan ve f ye yakınsak olduğundan her x ve her n için $f_n(x) \le f(x)$ dir.
Adım 1: Açık örtü. Her n için

$$E_n = \{x \in [a, b] : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$$

olsun. $f - f_n$ sürekli olduğundan E_n, $(-\infty, \varepsilon)$ açık aralığının ters görüntüsüdür; yani bir $\mathcal{O}_n$ açık kümesi için $E_n = \mathcal{O}_n \cap [a, b]$ dir (bkz. Analiz 1: Süreklilik). $f_n \le f_{n+1}$ olduğundan $f - f_{n+1} \le f - f_n$ ve $E_n \subseteq E_{n+1}$ dir. Her x için $f_n(x) \to f(x)$ olduğundan bir n de $f(x) - f_n(x) < \varepsilon$, yani $x \in E_n$ olur. Buna göre $\{\mathcal{O}_n\}$, $[a, b]$ nin açık bir örtüsüdür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: Sonlu alt örtü. $[a,b]$ kapalı ve sınırlı olduğundan Heine–Borel teoremine göre kompakttır (bkz. Analiz 1: Kompaktlık ve Heine–Borel); dolayısıyla sonlu tane $\mathcal{O}_{n_1}, \dots, \mathcal{O}_{n_p}$ kümesi $[a,b]$ yi örter. $N = \max\{n_1, \dots, n_p\}$ alırsak E_n ler artan olduğundan

$$[a,b] = E_{n_1} \cup \dots \cup E_{n_p} = E_N.$$

Adım 3: Düzgünlük. $n \geq N$ ve $x \in [a,b]$ için $f_N(x) \leq f_n(x) \leq f(x)$ ve $x \in E_N$ olduğundan

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x) - f_N(x) < \varepsilon.$$

N yalnız ε a bağlıdır; yakınsaklık düzgündür.
■

Alıştırma 8.2 (Yarıbasit Fonksiyonlarla Düzgün Yaklaşım). $f : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir olsun. E üzerinde f ye düzgün yakınsayan yarıbasit fonksiyonlardan oluşan bir dizi bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Fikir, değer eksenini $1/n$ uzunluklu aralıklara bölmektir; f sınırsız olabileceğinden sayılabilir sonsuz aralık gerekir.
Adım 1: Tanım. $n \geq 1$ ve $k \in \mathbb{Z}$ için

$$E_{n,k} = \left\{ x \in E : \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \right\}, \qquad f_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{k}{n}\, \chi_{E_{n,k}}$$

olsun. f reel değerli olduğundan her x, $k = \lfloor n f(x) \rfloor$ için tam bir $E_{n,k}$ ya aittir; toplam her noktada tek terimlidir ve $f_n = \lfloor nf \rfloor / n$ dir.
Adım 2: Yarıbasitlik. Her

$$E_{n,k} = \{ f \geq k/n \} \cap \{ f < (k+1)/n \}$$

kümesi ölçülebilirdir. f_n nin değerleri $\{k/n : k \in \mathbb{Z}\}$ sayılabilir kümesindedir. Her c için

$$\{ x \in E : f_n(x) < c \} = \bigcup_{k\,:\,k/n < c} E_{n,k}$$

ölçülebilir kümelerin sayılabilir birleşimidir; dolayısıyla f_n ölçülebilir ve yarıbasittir.
Adım 3: Düzgün yakınsaklık. $x \in E_{n,k}$ ise $f_n(x) = k/n \leq f(x) < (k+1)/n$, yani

$$0 \leq f(x) - f_n(x) < \frac{1}{n} \qquad (x \in E).$$

Sınır x ten bağımsızdır; $\{f_n\}$, E üzerinde f ye düzgün yakınsar.
■

Alıştırma 8.3 (Büyük Bir Kümede Sınırlılık). $m(E) < \infty$ ve $f : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir olsun. Her $\varepsilon > 0$ için f nin E_0 üzerinde sınırlı olduğu ve $m(E \setminus E_0) < \varepsilon$ sağlayan ölçülebilir bir $E_0 \subseteq E$ bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Artan kümeler. Her k için

$$E_k = \{ x \in E : \mid f(x) \mid \leq k \} = \{ f \leq k \} \cap \{ f \geq -k \}$$

ölçülebilirdir ve $E_k \subseteq E_{k+1}$ dir. f reel değerli olduğundan her x için $\mid f(x) \mid \leq k$ olacak bir k vardır; yani $\bigcup_k E_k = E$.
Adım 2: Süreklilik. Ölçünün sürekliliğinden (Teorem 4.3) $m(E_k) \to m(E)$ dir. $m(E) < \infty$ olduğundan çıkarma özelliği

$$m(E \setminus E_k) = m(E) - m(E_k) \to 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

verir.
Adım 3: Seçim. $m(E \setminus E_k) < \varepsilon$ olan bir k seçip $E_0 = E_k$ alalım. E_0 üzerinde $\mid f \mid \leq k$, yani f sınırlıdır.
■

Alıştırma 8.4 (Büyük Bir Kümede Düzgün Basit Yaklaşım). $m(E) < \infty$ ve $f : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m(E \setminus E_0) < \varepsilon$ olan ölçülebilir bir $E_0 \subseteq E$ ve E_0 üzerinde f ye düzgün yakınsayan basit fonksiyonlardan oluşan bir $\{\varphi_n : E \to \mathbb{R}\}$ dizisi bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Sınırlı parça. Önceki alıştırmaya (Alıştırma 8.3) göre $m(E \setminus E_0) < \varepsilon$ olan ve üzerinde f nin sınırlı olduğu ölçülebilir bir $E_0 \subseteq E$ vardır.
Adım 2: Lemma. f nin E_0 ya kısıtlaması sınırlı ve ölçülebilirdir. Basit yaklaşım lemmasını (Lemma 8.1) $\varepsilon = 1/n$ ile uygulayarak E_0 üzerinde $\tilde{\varphi}_n \leq f \leq \tilde{\psi}_n$ ve $\tilde{\psi}_n - \tilde{\varphi}_n < 1/n$ olan basit $\tilde{\varphi}_n, \tilde{\psi}_n$ buluruz. Buradan E_0 üzerinde $0 \leq f - \tilde{\varphi}_n < 1/n$.
Adım 3: E ye genişletme. φ_n, E_0 üzerinde $\tilde{\varphi}_n$ ye, $E \setminus E_0$ üzerinde 0 a eşit olsun. φ_n sonlu sayıda değer alır ve her c için $\{\varphi_n > c\}$ kümesi $\{\tilde{\varphi}_n > c\}$ ile (yalnız $c < 0$ iken) $E \setminus E_0$ kümesinin birleşimidir; yani φ_n, E üzerinde basittir.
Adım 4: Düzgünlük. $\sup_{x \in E_0} \mid f(x) - \varphi_n(x) \mid \leq 1/n \to 0$; yani $\{\varphi_n\}$, E_0 üzerinde f ye düzgün yakınsar.
■

Alıştırma 8.5 (Karakteristik Fonksiyonun Basamak Fonksiyonuyla Yaklaşımı). $E \subseteq [a,b]$ ölçülebilir ve $f = \chi_E : [a,b] \to \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için E_0 üzerinde $h = f$ ve $m([a,b] \setminus E_0) < \varepsilon$ olacak şekilde ölçülebilir bir $E_0 \subseteq [a,b]$ ve bir $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ basamak fonksiyonu bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Aralıklarla yaklaşım. $m(E) \leq b - a < \infty$ dir. Teorem 3.3 gereği ayrık, sınırlı, açık $I_1, \ldots, I_n$ aralıkları vardır ki $\mathcal{U} = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ için

$$m(E \triangle \mathcal{U}) < \varepsilon.$$

Adım 2: Basamak fonksiyonu. $h = \chi_{\mathcal{U}}$ nun $[a,b]$ ye kısıtlaması olsun. a, b ve (a,b) ye düşen bütün I_k uç noktalarını sıralayarak $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ bölüntüsünü kuralım. Bir $J = (x_{i-1}, x_i)$ açık aralığı hiçbir $I_k = (\alpha, \beta)$ uç noktasını içermez. J bir I_k yı keserse $\alpha \leq x_{i-1}$ ve $x_i \leq \beta$ olmak zorundadır, yani $J \subseteq I_k$ dır. Dolayısıyla J ya $\mathcal{U}$ nun içindedir ya da onunla ayrıktır; h, J üzerinde sabittir. Demek ki h bir basamak fonksiyonudur.
Adım 3: Eşitlik kümesi. $E_0 = [a,b] \setminus (E \triangle \mathcal{U})$ ölçülebilirdir. $x \in E_0$ ise $x \in E \Leftrightarrow x \in \mathcal{U}$ dur, yani $h(x) = \chi_E(x) = f(x)$. Ayrıca

$$m([a,b] \setminus E_0) = m\left([a,b] \cap (E \triangle \mathcal{U}) \right) \leq m(E \triangle \mathcal{U}) < \varepsilon.$$

■

Alıştırma 8.6 (Kesişimin Karakteristik Fonksiyonu). A ve B aynı bir kümenin alt kümeleri olsun. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
İki taraf da yalnız 0 ve 1 değerlerini alır. $\chi_A(x)\chi_B(x) = 1$ ancak ve ancak iki çarpan da 1, yani $x \in A$ ve $x \in B$ ise sağlanır; bu da $x \in A \cap B$, yani $\chi_{A \cap B}(x) = 1$ demektir. Diğer bütün noktalarda iki taraf da 0 dır.
■

Alıştırma 8.7 (Birleşimin Karakteristik Fonksiyonu). A ve B aynı bir kümenin alt kümeleri olsun. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$ olduğunu gösterin.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Bir x noktasının dört olası konumunda sağ tarafı hesaplayalım:

Konum	χ_A	χ_B	$\chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$	$\chi_{A\cup B}$
$x \in A \cap B$	1	1	$1+1-1=1$	1
$x \in A \setminus B$	1	0	1	1
$x \in B \setminus A$	0	1	1	1
$x \notin A \cup B$	0	0	0	0

Her durumda iki taraf eşittir.
■

Alıştırma 8.8 (Farkın Karakteristik Fonksiyonu). A ve B aynı bir kümenin alt kümeleri olsun. $\chi_{A\setminus B} = [\chi_A - \chi_B] \cdot \chi_A$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
$x \notin A$ ise $\chi_A(x) = 0$ olduğundan sağ taraf 0 dır; $x \notin A \setminus B$ olduğundan sol taraf da 0 dır. $x \in A$ ise sağ taraf $1 - \chi_B(x)$ olur. Bu değer $x \in B$ iken 0, $x \notin B$ iken 1 dir. Sol taraf da tam olarak $x \in A \setminus B$, yani $x \notin B$ iken 1 dir. Her durumda iki taraf eşittir. (Başka bir yazılışla sağ taraf $\chi_A - \chi_A\chi_B = \chi_A - \chi_{A\cap B}$ dir.)
■

Alıştırma 8.9 (Dizinin İnfimum ve Supremumu). $\left\{f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}\right\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. $\inf_n f_n$ ve $\sup_n f_n$ fonksiyonlarının ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
$g = \inf_n f_n$ ve $h = \sup_n f_n$ genişletilmiş reel değerli fonksiyonlardır. Ölçülebilirliğin denk koşullarına (Teorem 7.1) göre h için $\{h > c\}$, g için $\{g < c\}$ kümelerinin her $c \in \mathbb{R}$ için ölçülebilir olduğunu göstermek yeter.
Supremum. $h(x) > c$ ancak ve ancak c sayısı $\{f_n(x)\}$ in bir üst sınırı değilse, yani bir n için $f_n(x) > c$ ise sağlanır. Dolayısıyla

$$\{x \in E : h(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) > c\}.$$

İnfimum. Aynı biçimde $g(x) < c$ ancak ve ancak bir n için $f_n(x) < c$ ise sağlanır:

$$\{x \in E : g(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) < c\}.$$

Sağ taraflar ölçülebilir kümelerin sayılabilir birleşimidir ve Teorem 2.4 gereği ölçülebilirdir.
■

Alıştırma 8.10 (Genel Durumun Pozitif Durumdan Elde Edilmesi). $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir olsun; $E_+ = \{x \in E : f(x) \geq 0\}$ ve $E_- = \{x \in E : f(x) \leq 0\}$ diyelim. f nin E_+ ve E_- ye kısıtlamalarını kullanarak, basit yaklaşım teoreminin genel hâlini negatif olmayan fonksiyonlar için olan hâlinden türetin.

Çözüm.
Adım 1: İki pozitif problem. $E_+ = \{f \geq 0\}$ ve $E_- = \{f \leq 0\}$ ölçülebilirdir (Teorem 7.1) ve $E_+ \cup E_- = E$ dir. Kısıtlama ile parçalara ayırma önermesine göre $f\,|_{E_+}$ ve $f\,|_{E_-}$ ölçülebilirdir. $-f\,|_{E_-}$ de ölçülebilirdir, çünkü her c için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\{x \in E_- : -f(x) < c\} = \{x \in E_- : f(x) > -c\}$$

ölçülebilirdir. Böylece $f\,|_{E_+}$ ve $-f\,|_{E_-}$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlardır. Basit yaklaşım teoreminin (Teorem 8.2) negatif olmayan hâline göre

$$0 \le \theta_n \le f \ (E_+ \ \text{üzerinde}), \qquad 0 \le \eta_n \le -f \ (E_- \ \text{üzerinde})$$

olan, sırasıyla f ye ve $-f$ ye noktasal yakınsayan sonlu destekli basit $\theta_n : E_+ \to \mathbb{R}$ ve $\eta_n : E_- \to \mathbb{R}$ fonksiyonları vardır.
Adım 2: Yapıştırma. $x \in E_+$ ise $\varphi_n(x) = \theta_n(x)$, $x \in E_-$ ise $\varphi_n(x) = -\eta_n(x)$ olsun. İki küme $\{f = 0\}$ üzerinde kesişir; orada $0 \le \theta_n \le f = 0$ ve $0 \le \eta_n \le -f = 0$ olduğundan iki tanım da 0 verir ve φ_n iyi tanımlıdır.
Adım 3: Basitlik ve sonlu destek. φ_n sonlu sayıda değer alır. Her c için

$$\{x \in E : \varphi_n(x) > c\} = \{x \in E_+ : \theta_n(x) > c\} \cup \{x \in E_- : -\eta_n(x) > c\}$$

ölçülebilir iki kümenin birleşimidir; yani φ_n basittir. $\varphi_n \neq 0$ olan küme, θ_n ve η_n nin sonlu ölçülü destek kümelerinin birleşiminde kalır; φ_n sonlu desteklidir.
Adım 4: Yaklaşım koşulları. E_+ üzerinde $|\,\varphi_n\,| = \theta_n \le f = |\,f\,|$ ve $\varphi_n = \theta_n \to f$; E_- üzerinde $|\,\varphi_n\,| = \eta_n \le -f = |\,f\,|$ ve $\varphi_n = -\eta_n \to f$. Böylece $\{\varphi_n\}$, E üzerinde f ye noktasal yakınsar ve $|\,\varphi_n\,| \le |\,f\,|$ sağlar.
■

Alıştırma 8.11 (Artan Fonksiyonun Ölçülebilirliği). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ artan olsun. Önce her n için $x \mapsto f(x) + x/n$ kesin artan fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösterip ardından noktasal limit alarak f nin ölçülebilir olduğunu kanıtlayın.

Çözüm.
Adım 1: Kesin artanlık. $g_n(x) = f(x) + x/n$ olsun. $x < y$ ise $f(x) \le f(y)$ ve $x/n < y/n$ olduğundan $g_n(x) < g_n(y)$ dir.
Adım 2: g_n ölçülebilir. $c \in \mathbb{R}$ ve $S = \{x \in [a,b] : g_n(x) < c\}$ olsun. $x \in S$ ve $a \le x' < x$ ise $g_n(x') < g_n(x) < c$, yani $x' \in S$ dir. Demek ki S boş değilse a yı içeren ve sola doğru "delik" içermeyen bir kümedir: $s = \sup S$ için $S = [a,s)$ ya da $S = [a,s]$ dir. Her durumda S bir aralıktır (ya da boştur) ve aralıklar ölçülebilirdir (Teorem 2.3). Ölçülebilirliğin denk koşullarından (Teorem 7.1) g_n ölçülebilirdir.
Adım 3: Limit. Her $x \in [a,b]$ için $|\,x/n\,| \le \max\{|\,a\,|, |\,b\,|\}/n \to 0$ olduğundan $g_n(x) \to f(x)$ dir. Ölçülebilir fonksiyonların noktasal limiti ölçülebilir olduğundan (Teorem 8.1) f ölçülebilirdir.
■

Noktasal yakınsaklık ölçülebilirliği korur, ama çoğu zaman düzgün yakınsaklığın sağladığı kontrolü vermez. Sıradaki bölüm Littlewood'un Üç İlkesi, Egoroff ve Lusin Teoremleri, sonlu ölçülü kümelerde noktasal yakınsaklığın küçük bir küme dışında düzgün olduğunu gösteriyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

9. Littlewood, Egoroff ve Lusin Teoremleri

Ölçülebilir kümeler ve fonksiyonlar ilk bakışta çok genel, hatta vahşi nesneler gibi görünür. Littlewood bu genelliğin sanıldığı kadar korkutucu olmadığını üç ilkeyle özetler (Littlewood's three principles):

- her ölçülebilir küme *neredeyse* sonlu sayıda aralığın birleşimidir;
- her ölçülebilir fonksiyon *neredeyse* süreklidir;
- ölçülebilir fonksiyonların noktasal yakınsak her dizisi *neredeyse* düzgün yakınsaktır.

Buradaki "neredeyse", "ölçüsü istenildiği kadar küçük bir küme dışında" demektir. Birinci ilkenin kesin biçimini zaten kanıtladık: sonlu ölçülü E ve $\varepsilon > 0$ için açık aralıkların sonlu, ayrık bir birleşimi $\mathcal{U}$ vardır ki $m(E \setminus \mathcal{U}) + m(\mathcal{U} \setminus E) < \varepsilon$ olur (Teorem 3.3). Bu bölümde üçüncü ilkeyi Egoroff teoremi, ikincisini Lusin teoremi olarak kanıtlıyoruz.

9.1 Egoroff Teoremi

Noktasal yakınsaklık düzgün olmayabilir; ama sonlu ölçülü bir kümede bozulma, ölçüsü küçük bir parçada toplanır. Anahtar adım, tek bir hata payı η için bu parçayı bulmaktır. Aşağıda $\{f_n\}$ dizisinin f'ye E üzerinde *düzgün* yakınsaması, $\sup_{x\in E} \mid f_n(x) - f(x) \mid \to 0$ demektir.

Lemma 9.1 (Tek Hata Payı İçin Egoroff). *$m(E) < \infty$ olsun ve $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisi E üzerinde noktasal olarak $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna yakınsasın. Her $\eta > 0$ ve $\delta > 0$ için*

$$A \subseteq E, \qquad m(E \setminus A) < \delta$$

ve her $n \geq N$ için A üzerinde $\mid f_n - f \mid < \eta$ olacak biçimde ölçülebilir bir A kümesi ve bir N indisi vardır.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: İyi noktalar kümeleri.*** *f ölçülebilir fonksiyonların noktasal limiti olduğundan ölçülebilirdir (Teorem 8.1). $f - f_k$ ölçülebilir (Teorem 7.4) ve*
>
> $$\{x \in E : \mid f(x) - f_k(x) \mid < \eta\} = \{f - f_k < \eta\} \cap \{f - f_k > -\eta\}$$
>
> *olduğundan (Teorem 7.1) her k için $\{x \in E : \mid f(x) - f_k(x) \mid < \eta\}$ ölçülebilirdir. Ölçülebilir kümeler bir σ-cebiri olduğundan (Teorem 2.4)*
>
> $$E_n = \{x \in E : \text{her} \quad k \geq n \quad \text{için} \quad \mid f(x) - f_k(x) \mid < \eta\}$$
>
> *kümesi, sayılabilir bir kesişim olarak ölçülebilirdir.*
> ***Adım 2: Artan birleşim.*** *Tanımdan $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ dir. Her $x \in E$ için $f_k(x) \to f(x)$ olduğundan bir n'den sonra $\mid f(x) - f_k(x) \mid < \eta$ olur; yani $x \in E_n$. Böylece $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ dir ve ölçünün sürekliliğinden (Teorem 4.3)*
>
> $$m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$
>
> *elde edilir.*
> ***Adım 3: İndisin seçimi.*** *$m(E)$ sonlu olduğundan $m(E_N) > m(E) - \delta$ olan bir N vardır. $A = E_N$ alalım. $A \subseteq E$ ve $m(A) < \infty$ olduğundan çıkarma özelliği (Önerme 2.5)*
>
> $$m(E \setminus A) = m(E) - m(E_N) < \delta$$
>
> *verir. $A = E_N$'nin tanımı gereği A üzerinde her $n \geq N$ için $\mid f_n - f \mid < \eta$ dır.*
> ■

Şimdi hata paylarını $\eta = 1/n$ diye küçültüp elde edilen kümeleri kesiştiriyoruz; ölçü kayıplarını $\varepsilon/2^{n+1}$ ile sınırlayınca toplam kayıp küçük kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 9.1 (Egoroff Teoremi). *$m(E) < \infty$ olsun ve $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisi E üzerinde noktasal olarak $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna yakınsasın. Her $\varepsilon > 0$ için*

$$F \subseteq E, \qquad m(E \setminus F) < \varepsilon, \qquad F \ \text{üzerinde} \ \ f_n \to f \ \ \text{düzgün}$$

olacak biçimde kapalı bir F kümesi vardır.

İspat.
Adım 1: Her n için bir iyi küme. *Lemma 9.1'yı $\eta = 1/n$ ve $\delta = \varepsilon/2^{n+1}$ ile uygulayalım. Ölçülebilir bir $A_n \subseteq E$ ve bir $N(n)$ indisi vardır ki*

$$m(E \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{1}$$

ve A_n üzerinde

$$| \, f_k - f \, | < \frac{1}{n} \quad (k \geq N(n)) \tag{2}$$

olur.
Adım 2: Kesişimin ölçüsü. *$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ölçülebilirdir ve $E \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \setminus A_n)$ dir. Sayılabilir alt toplamsallık (Teorem 1.3) ve (1) ile*

$$m(E \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E \setminus A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Adım 3: A üzerinde düzgün yakınsaklık. *$\eta > 0$ verilsin ve $1/n_0 < \eta$ olan bir n_0 seçelim. $A \subseteq A_{n_0}$ olduğundan (2)'ye göre $k \geq N(n_0)$ iken A'nın her noktasında $| \, f_k - f \, | < 1/n_0 < \eta$ dır. $N(n_0)$ noktadan bağımsız olduğundan yakınsaklık A üzerinde düzgündür.*
Adım 4: Kapalı bir alt küme. *Lebesgue ölçüsünün düzenliliğine (Teorem 3.1) göre $m(A \setminus F) < \varepsilon/2$ olan kapalı bir $F \subseteq A$ vardır. $E \setminus F$, ayrık $E \setminus A$ ve $A \setminus F$ kümelerinin birleşimi olduğundan*

$$m(E \setminus F) = m(E \setminus A) + m(A \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. $F \subseteq A$ olduğundan yakınsaklık F üzerinde de düzgündür.
■

Yani sonlu ölçülü bir kümede noktasal yakınsaklık, ölçüsü istenildiği kadar küçük bir kümeyi atınca düzgün yakınsaklığa dönüşür. $m(E) < \infty$ koşulu atılamaz; bunu alıştırmalarda göreceğiz.

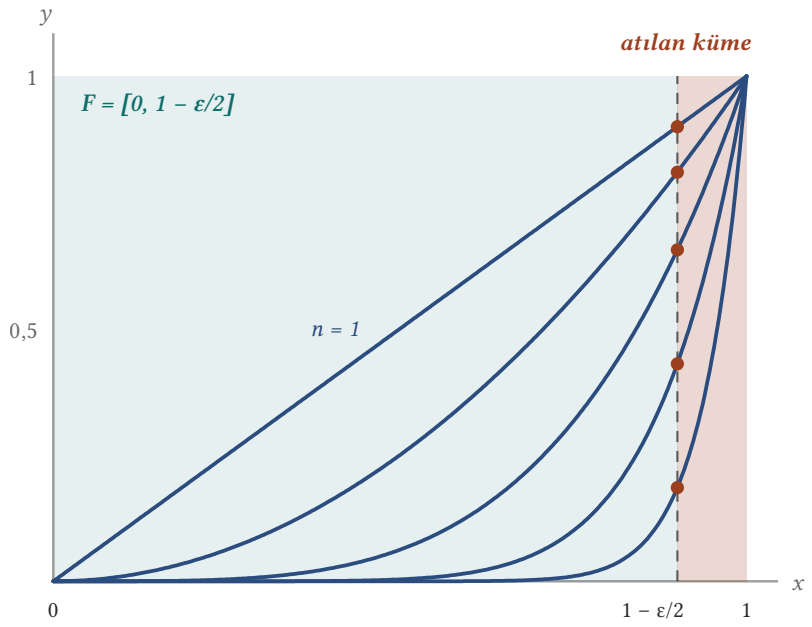
Örnek 9.1 (Kuvvet Dizisinde Egoroff). $E = [0,1]$ üzerinde $f_n(x) = x^n$ dizisinin noktasal limitini bulun, yakınsaklığın $[0,1]$ üzerinde düzgün olmadığını gösterin ve her $0 < \varepsilon < 1$ için Egoroff teoremindeki F kümesini açıkça yazın.

Çözüm.
Limit. $0 \leq x < 1$ için $x^n \to 0$, $x = 1$ için $x^n = 1$ dir. Limit $f = \chi_{\{1\}}$ dir.
Düzgün değil. Her n için $\sup_{0 \leq x < 1} | \, x^n - 0 \, | = 1$ dir, çünkü $x \to 1^-$ iken $x^n \to 1$. Dolayısıyla $\sup_{[0,1]} | \, f_n - f \, |$ sıfıra gitmez.
Kapalı küme. $F = [0, 1 - \varepsilon/2]$ kapalıdır ve $m(E \setminus F) = \varepsilon/2 < \varepsilon$ dur. F üzerinde $f = 0$ ve

$$\sup_{x \in F} | \, f_n(x) - f(x) \, | = \Big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\Big)^n \to 0$$

olduğundan yakınsaklık F üzerinde düzgündür. Bozulma 1 noktasının hemen solunda toplanmıştır ve oradan küçük bir aralık atmak yeter.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.1: $n = 1, 2, 4, 8, 16$ için x^n grafikleri (yukarıdan aşağıya; $\varepsilon = 0{,}2$). $F = [0, 1 - \varepsilon/2]$ üzerinde fark en çok $(1 - \varepsilon/2)^n$ olur (işaretli noktalar) ve sıfıra gider; düzgünlüğü bozan davranış, atılan dar $(1 - \varepsilon/2, 1]$ şeridinde toplanmıştır.

■

9.2 Lusin Teoremi

İkinci ilkeyi kanıtlamadan önce kapalı bir küme üzerinde sürekli olan bir fonksiyonu bütün doğruya sürekli olarak genişletmemiz gerekiyor. Fikir basittir: F'nin tümleyeni ayrık açık aralıklara ayrılır ve her boşluğu doğru parçasıyla doldururuz.

Lemma 9.2 (Kapalı Kümeden Sürekli Genişleme). *F, $\mathbb{R}$'nin kapalı bir alt kümesi ve $f : F \to \mathbb{R}$ sürekli ise f'nin sürekli bir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genişlemesi vardır; yani g süreklidir ve F üzerinde $g = f$ dir.*

İspat.
$F = \varnothing$ ise $g \equiv 0$ alınır; $F = \mathbb{R}$ ise $g = f$ dir. Bundan sonra F ile tümleyeni boş değil.
Adım 1: Boşluklar. *$\mathbb{R} \setminus F$ açık olduğundan açık aralıklardan oluşan sayılabilir, ayrık bir $\{I_n\}$ topluluğunun birleşimidir (Lemma 2.3). I_n'nin sonlu bir uç noktası F'ye aittir: o nokta $\mathbb{R} \setminus F$'de olsaydı bir I_m aralığında bulunurdu; uç nokta I_n'ye ait olmadığından $m \neq n$ dir. Açık I_m, bu noktanın yakınındaki I_n noktalarını da içerir; bu ayrıklıkla çelişir.*
Adım 2: Genişlemenin tanımı. *F üzerinde $g = f$ alalım. $I_n = (a_n, b_n)$ sınırlıysa $[a_n, b_n]$ üzerinde g'yi uç değerleri birleştiren doğru parçası olarak tanımlayalım:*

$$g(x) = f(a_n) + \frac{x - a_n}{b_n - a_n}\,\big(\, f(b_n) - f(a_n) \,\big)\,.$$

I_n sınırsızsa ($F \neq \varnothing$ olduğundan) tam bir sonlu uç noktası vardır; g'yi I_n üzerinde f'nin o uç noktadaki değerine eşit sabit alalım. Aralıklar ayrık olduğundan g iyi tanımlıdır.
Adım 3: Tümleyende süreklilik. *$x \in \mathbb{R} \setminus F$ ise x açık bir I_n aralığındadır ve g orada doğrusal ya da sabittir; dolayısıyla x'te süreklidir.*
Adım 4: F'de sağdan süreklilik. *$x \in F$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. İki durum var.*

- *x bir I_n'nin sol uç noktasıysa g, x'in sağındaki bir aralıkta doğrusal ya da sabittir ve $g(x) = f(x)$ olduğundan x'te sağdan süreklidir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

- *Değilse her $h > 0$ için $(x, x+h)$ aralığı F'nin bir noktasını içerir. (İçermeseydi $(x, x+h)$ bir I_n'nin içinde kalırdı ve $x \in F$ olduğundan x o I_n'nin sol ucu olurdu.) f'nin F üzerindeki sürekliliğinden, $y \in F$ ve $|\, y - x \,| < \rho$ iken $|\, f(y) - f(x) \,| < \varepsilon$ olan bir $\rho > 0$ vardır. $y_0 \in F \cap (x, x+\rho)$ seçelim. $t \in (x, y_0)$ olsun. $t \in F$ ise $|\, t - x \,| < y_0 - x < \rho$ olduğundan $|\, g(t) - f(x) \,| = |\, f(t) - f(x) \,| < \varepsilon$ dur. $t \notin F$ ise t bir (a_n, b_n) aralığındadır; x ile y_0 F'de olduğundan bu aralık (x, y_0)'ın içindedir ve $a_n, b_n \in F \cap [x, y_0]$ olur. $g(t)$, $f(a_n)$ ile $f(b_n)$'nin bir ağırlıklı ortalamasıdır ve ikisi de $f(x)$'e ε'dan yakındır; öyleyse $|\, g(t) - f(x) \,| < \varepsilon$ dur. Böylece $0 < t - x < y_0 - x$ iken $|\, g(t) - g(x) \,| < \varepsilon$ olur.*

Her iki durumda g, x'te sağdan süreklidir. Soldan süreklilik simetrik olarak gösterilir; böylece g her yerde süreklidir.

■

Boşlukları doğru parçasıyla doldurmak önemlidir: $g(t)$ uç değerlerin arasında kaldığı için, F'nin birikim noktalarında sonsuz sayıda küçülen boşluk olsa bile değerler kontrol altında kalır.

Örnek 9.2 (İki Aralıktan Sürekli Genişleme). $F = [0,1] \cup [2,3]$ üzerinde $[0,1]$'de $f = 0$, $[2,3]$'te $f = 1$ ile tanımlı fonksiyonun, lemmadaki yöntemle kurulan sürekli genişlemesini yazın.

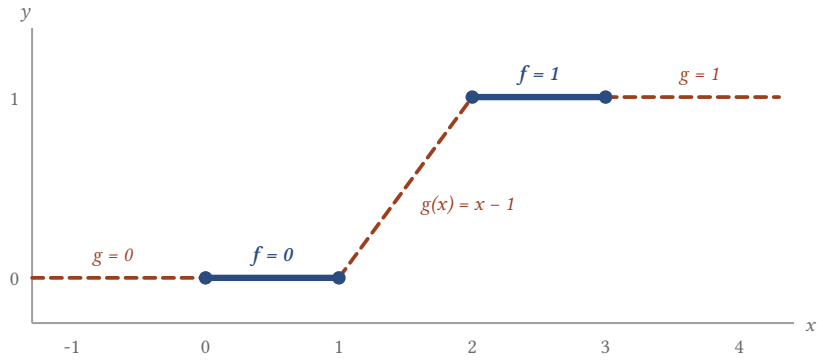
Çözüm.
f, F üzerinde süreklidir, çünkü F'nin iki parçası arasında pozitif uzaklık vardır ve her parçada f sabittir. $\mathbb{R} \setminus F$ kümesi $(-\infty, 0)$, $(1,2)$ ve $(3, \infty)$ aralıklarının birleşimidir.

- $(-\infty, 0)$ sınırsızdır, sonlu ucu 0: $g = f(0) = 0$.
- $(1,2)$ sınırlıdır: uçlarda $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ olduğundan doğru parçası $g(x) = x - 1$ dir.
- $(3, \infty)$ sınırsızdır, sonlu ucu 3: $g = f(3) = 1$.

Sonuç olarak

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ x - 1, & 1 < x < 2, \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

sürekli bir genişlemedir.



Şekil 9.2: $F = [0,1] \cup [2,3]$ üzerinde tanımlı f (kalın) ve sürekli genişlemesi g (kesikli). Sınırsız boşluklarda g en yakın uçtaki değerde sabit kalır; $(1,2)$ boşluğunda uç değerleri birleştiren doğru parçasıdır.

■

Şimdi ikinci ilkenin kesin biçimini verebiliriz. Bu teoremde $m(E) < \infty$ gerekmez.

Teorem 9.2 (Lusin Teoremi). *$f : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir olsun. Her $\varepsilon > 0$ için sürekli bir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\mathbb{R}$'nin kapalı bir F alt kümesi vardır ki*

$$F \subseteq E, \qquad m(E \setminus F) < \varepsilon, \qquad F \text{ üzerinde } f = g$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.

İspat.
Adım 1: Kapalı iç yaklaşımlar. *Uç noktaları rasyonel olan açık aralıklar, rasyonel sayı çiftleriyle eşlendiğinden sayılabilir çokluktadır; bunları $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ diye numaralayalım. f ölçülebilir olduğundan her aralığın ters görüntüsü ölçülebilirdir (Teorem 7.1); dolayısıyla $f^{-1}(I_n)$ ve $E \setminus f^{-1}(I_n)$ ölçülebilirdir. Lebesgue ölçüsünün düzenliliğine (Teorem 3.1) göre her n için*

$$F_n \subseteq f^{-1}(I_n), \qquad H_n \subseteq E \setminus f^{-1}(I_n)$$

olan kapalı F_n, H_n kümeleri vardır ki

$$m\left(f^{-1}(I_n) \setminus F_n \right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, \qquad m\left((E \setminus f^{-1}(I_n)) \setminus H_n \right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

olur.
Adım 2: Kapalı küme ve ölçüsü. *$F = \bigcap_{n=1}^{\infty}(F_n \cup H_n)$ tanımlayalım. F kapalı kümelerin kesişimi olarak kapalıdır ve $F_n \cup H_n \subseteq E$ olduğundan $F \subseteq E$ dir. E'nin $F_n \cup H_n$'de olmayan bir noktası ya $f^{-1}(I_n) \setminus F_n$'dedir ya da $(E \setminus f^{-1}(I_n)) \setminus H_n$'dedir; bu yüzden*

$$m\left(E \setminus (F_n \cup H_n) \right) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

$E \setminus F = \bigcup_n \left[E \setminus (F_n \cup H_n) \right]$ olduğundan sayılabilir alt toplamsallık (Teorem 1.3)

$$m(E \setminus F) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

verir.
Adım 3: f'nin F'ye kısıtlanışı sürekli. *$x \in F$ ve $f(x)$'i içeren bir açık I aralığı verilsin. $f(\mathcal{O} \cap F) \subseteq I$ olan açık bir $\mathcal{O} \ni x$ bulmak yeter ($I = (f(x) - \varepsilon', f(x) + \varepsilon')$ alınınca bu, ε'–δ sürekliliğidir). Rasyonel sayılar yoğun olduğundan $f(x) \in I_k \subseteq I$ olan bir k vardır. $H_k \cap f^{-1}(I_k) = \varnothing$ ve $f(x) \in I_k$ olduğundan $x \notin H_k$ dır; H_k kapalı olduğundan $\mathcal{O} = \mathbb{R} \setminus H_k$ açık ve x'i içerir. $F \subseteq F_k \cup H_k$ olduğundan*

$$\mathcal{O} \cap F \subseteq (\mathbb{R} \setminus H_k) \cap (F_k \cup H_k) \subseteq F_k,$$

dolayısıyla $f(\mathcal{O} \cap F) \subseteq f(F_k) \subseteq I_k \subseteq I$ dır.
Adım 4: Genişletme. *Lemma 9.2'ya göre $f\,|_F$'nin sürekli bir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genişlemesi vardır ($F = \varnothing$ ise $g \equiv 0$). F üzerinde $f = g$ dir.*
■

Yani ölçülebilir bir fonksiyon, ölçüsü küçük bir küme atıldıktan sonra sürekli bir fonksiyonla çakışır. Bu, f'nin F'nin noktalarında E üzerinde sürekli olduğunu söylemez; söylenen yalnız $f\,|_F$'nin sürekli olduğudur.
Lusin teoremini $\varepsilon = 2^{-n}$ ile tekrar tekrar uygulayıp Borel–Cantelli lemmasını kullanınca ölçülebilir fonksiyonun sürekli fonksiyonların hemen her yerde limiti olduğu çıkar.

Sonuç 9.1 (Sürekli Fonksiyonlarla Yaklaşım). *$f : E \to \mathbb{R}$ ölçülebilir ise sürekli fonksiyonlardan oluşan ve E üzerinde hemen her yerde f'ye noktasal yakınsayan bir $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ dizisi vardır.*

İspat.
Adım 1: Lusin ile dizi. *Her n için Lusin teoremini (Teorem 9.2) $\varepsilon = 1/2^n$ ile uygulayalım: sürekli bir $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve kapalı $F_n \subseteq E$ vardır ki $m(E \setminus F_n) < 1/2^n$ ve F_n üzerinde $f_n = f$ dir. Böylece*

$$\{x \in E : f_n(x) \neq f(x)\} \subseteq E \setminus F_n.$$

Adım 2: Borel–Cantelli. *$\sum_n m(E \setminus F_n) < \sum_n 1/2^n = 1$ dir. Borel–Cantelli lemmasına (Lemma 4.1) göre hemen her $x \in E$, $E \setminus F_n$ kümelerinin yalnız sonlu tanesine aittir. Böyle bir x için bir n vardır ki her $k \geq n$ için $x \in F_k$, yani $f_k(x) = f(x)$ olur. Özellikle $f_k(x) \to f(x)$ dir.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani ölçülebilir fonksiyonlar, sürekli fonksiyonların hemen her yerde (Tanım 4.2) noktasal limitleri olarak yakalanabilir; hatta hemen her noktada dizi bir yerden sonra $f(x)$'e *eşit* olur.

9.3 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorular, teoremlerdeki varsayımların neden gerektiğini ve sonuçların nasıl genişletilebileceğini sınıyor.

Alıştırma 9.1 (Genişlemenin Sürekliliği). Lemma 9.2'nın ispatında kurulan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu ayrıntılı olarak doğrulayın.

Çözüm.
F kapalı, $f : F \to \mathbb{R}$ sürekli, $\mathbb{R} \setminus F = \bigcup_n I_n$ ayrık açık aralıklar olsun. g, F üzerinde f'ye eşit; sınırlı $I_n = (a_n, b_n)$ üzerinde uç değerleri birleştiren doğru parçası; sınırsız I_n üzerinde sonlu uçtaki değere eşit sabittir. Sonlu uç noktalar F'dedir. ($F = \varnothing$ ya da $F = \mathbb{R}$ durumları apaçıktır.)
Adım 1: Tümleyenin noktaları. $x \notin F$ ise x açık bir I_n aralığındadır. I_n üzerinde g doğrusal ya da sabittir ve I_n, x'in bir komşuluğudur; bu yüzden g, x'te süreklidir.
Adım 2: Ağırlıklı ortalama gözlemi. Sınırlı (a_n, b_n) içindeki t için $\lambda = (t - a_n)/(b_n - a_n) \in (0, 1)$ ile

$$g(t) = (1 - \lambda) f(a_n) + \lambda f(b_n)$$

dir. Öyleyse bir c sayısı için $\mid f(a_n) - c \mid < \varepsilon$ ve $\mid f(b_n) - c \mid < \varepsilon$ ise

$$\mid g(t) - c \mid \le (1 - \lambda) \mid f(a_n) - c \mid + \lambda \mid f(b_n) - c \mid < \varepsilon$$

olur.
Adım 3: F'nin noktalarında sağdan süreklilik. $x \in F$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. f'nin sürekliliğinden, $y \in F$, $\mid y - x \mid < \rho$ iken $\mid f(y) - f(x) \mid < \varepsilon$ olan bir $\rho > 0$ vardır.

- *Durum 1: x bir I_n'nin sol ucu.* $I_n = (x, b_n)$ sınırlıysa g, $[x, b_n]$ üzerinde doğrusal ve $g(x) = f(x)$ olduğundan x'te sağdan süreklidir. $I_n = (x, \infty)$ ise g, $[x, \infty)$ üzerinde $f(x)$'e eşit sabittir.
- *Durum 2: x hiçbir I_n'nin sol ucu değil.* O zaman her $h > 0$ için $(x, x + h) \cap F \neq \varnothing$ dir. Aksi hâlde bağlantılı $(x, x + h)$ kümesi $\mathbb{R} \setminus F$'nin bir bileşeninde, yani bir $I_n = (a_n, b_n)$ içinde kalırdı; $a_n \le x$ ve $x \in F$, $x \notin I_n$ olduğundan $a_n = x$ olurdu. Şimdi $y_0 \in F \cap (x, x + \rho)$ seçelim ve $\delta = y_0 - x$ diyelim. $x < t < y_0$ olsun. $t \in F$ ise $\mid g(t) - g(x) \mid = \mid f(t) - f(x) \mid < \varepsilon$ dur. $t \notin F$ ise $t \in I_n$ için bir n vardır; $x, y_0 \in F$ ve $I_n \cap F = \varnothing$ olduğundan $I_n = (a_n, b_n) \subseteq (x, y_0)$, dolayısıyla $a_n, b_n \in F \cap [x, y_0]$ ve $\mid a_n - x \mid, \mid b_n - x \mid < \rho$ dur. $\mid f(a_n) - f(x) \mid < \varepsilon, \mid f(b_n) - f(x) \mid < \varepsilon$ olduğundan Adım 2 $\mid g(t) - g(x) \mid < \varepsilon$ verir.

İki durumda da g, x'te sağdan süreklidir.
Adım 4: Soldan süreklilik. Aynı akıl yürütme "sol uç" yerine "sağ uç" ve $(x, x + h)$ yerine $(x - h, x)$ alınarak aynen yapılır. Sağdan ve soldan sürekli olan g, x'te süreklidir.
Sonuç olarak g her noktada süreklidir. Doğru parçası seçimi Adım 2 için gereklidir: boşluklara uç değerleri tutan *herhangi* bir sürekli fonksiyon konsaydı, örneğin $F = \{0\} \cup \{1/k : k \ge 1\}$ ve $f \equiv 0$ için her $(1/(k+1), 1/k)$ boşluğuna yüksekliği 1 olan bir tümsek konulursa, genişleme 0 noktasında sürekli olmazdı.
■

Alıştırma 9.2 (Lusin Kümesine Kısıtlanış). Lusin teoremindeki $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve F kümesi için $f \mid_F$'nin sürekli olduğunu gösterin.

Çözüm.
Lusin teoremine (Teorem 9.2) göre $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ süreklidir ve F üzerinde $f = g$ dir.
$x \in F$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. g, x'te sürekli olduğundan $\mid y - x \mid < \delta$ iken $\mid g(y) - g(x) \mid < \varepsilon$ olan bir $\delta > 0$ vardır. $y \in F$ ve $\mid y - x \mid < \delta$ ise $f(y) = g(y)$, $f(x) = g(x)$ olduğundan

$$\mid f(y) - f(x) \mid = \mid g(y) - g(x) \mid < \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Bu, $f\mid_F$'nin x'te sürekli olduğunu söyler; $x \in F$ keyfi olduğundan $f\mid_F$ süreklidir. (Genel olarak: sürekli bir fonksiyonun bir alt kümeye kısıtlanışı süreklidir.)
■

Alıştırma 9.3 (Süreklilik Noktası Olmayabilir). Ölçülebilir bir $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun E üzerinde sürekli olduğu en az bir nokta bulunmak zorunda mıdır?

Çözüm.
Hayır. $E = \mathbb{R}$ ve $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ alalım.
Ölçülebilirlik. $\mathbb{Q}$ sayılabilir olduğundan dış ölçüsü sıfırdır, dolayısıyla ölçülebilirdir (Teorem 1.4). Ölçülebilir bir kümenin karakteristik fonksiyonu ölçülebilirdir: her c için $\{f > c\}$ kümesi $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ya da $\varnothing$'dir.
Hiçbir yerde sürekli değil. $x \in \mathbb{R}$ ve $\delta > 0$ olsun. $(x-\delta, x+\delta)$ aralığı hem rasyonel hem irrasyonel sayı içerir; bu yüzden bu aralıkta f hem 0 hem 1 değerini alır ve $\mid f(y) - f(x) \mid = 1$ olan bir y vardır. $\varepsilon = 1/2$ için hiçbir δ işe yaramaz; f, x'te sürekli değildir.
Öyleyse ölçülebilir bir fonksiyonun hiçbir süreklilik noktası olmayabilir. Lusin teoremi bununla çelişmez: $f\mid_F$'nin sürekli olması, f'nin F'nin noktalarında bütün E üzerinde sürekli olması demek değildir. Bu örnekte F irrasyonellerin içinde kalan bir kapalı küme seçilebilir ve $f\mid_F \equiv 0$ olur.
■

Alıştırma 9.4 (Sonsuz Ölçülü Kümede Egoroff). Tanım kümesinin sonlu ölçülü olduğu varsayımı atılırsa Egoroff teoreminin sonucunun geçerli olmayabileceğini gösterin.

Çözüm.
$E = \mathbb{R}$ ve $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ alalım.
Noktasal yakınsaklık. Her f_n ölçülebilir bir kümenin karakteristik fonksiyonu olarak ölçülebilirdir. $x \in \mathbb{R}$ sabit olsun; $n > x$ için $x \notin [n,\infty)$, yani $f_n(x) = 0$ dır. Dolayısıyla $\mathbb{R}$ üzerinde noktasal olarak $f_n \to f \equiv 0$ dır.
Egoroff'un sonucu bozulur. $\varepsilon = 1$ alalım ve ölçülebilir bir $F \subseteq \mathbb{R}$ için $m(\mathbb{R} \setminus F) < 1$ olduğunu varsayalım. Her n için $m([n,\infty)) = \infty$ olduğundan $[n,\infty) \not\subseteq \mathbb{R} \setminus F$ dir (aksi hâlde monotonluktan $m(\mathbb{R} \setminus F) = \infty$ olurdu). Öyleyse bir $x_n \in F \cap [n,\infty)$ vardır ve $f_n(x_n) = 1$ dir. Buna göre her n için

$$\sup_{x \in F} \mid f_n(x) - 0 \mid = 1$$

olur; yakınsaklık F üzerinde düzgün değildir.
Yani $m(\mathbb{R} \setminus F) < 1$ olan hiçbir (kapalı ya da değil) F üzerinde düzgün yakınsaklık yoktur ve $m(E) < \infty$ varsayımı atılamaz.
■

Alıştırma 9.5 (Hemen Her Yerde Yakınsaklıkla Egoroff). $m(E) < \infty$ olsun. f ve her f_n, E üzerinde hemen her yerde sonlu, ölçülebilir, genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar olsun ve E üzerinde hemen her yerde $f_n \to f$ olsun. Egoroff teoreminin sonucunun yine geçerli olduğunu gösterin.

Çözüm.
Fikir: kötü noktaları sıfır ölçülü bir küme içine toplayıp atmak ve kalan kümede Egoroff teoremini uygulamak.
Adım 1: Kötü noktalar. Varsayıma göre sıfır ölçülü Z, $Z_1, Z_2, \ldots$ ve Z' kümeleri vardır ki $E \setminus Z$ üzerinde f sonlu, $E \setminus Z_n$ üzerinde f_n sonlu ve $E \setminus Z'$ üzerinde $f_n \to f$ dir (Tanım 4.2). $E_0 = E \cap \big(Z \cup Z' \cup \bigcup_n Z_n \big)$ olsun. Sayılabilir alt toplamsallıktan (Teorem 1.3) $m^*(E_0) = 0$ dır, dolayısıyla E_0 ölçülebilirdir (Teorem 1.4).
Adım 2: İyi küme. $E' = E \setminus E_0$ ölçülebilirdir ve $m(E') \le m(E) < \infty$ dur. E' üzerinde f ve her f_n reel değerlidir ve $f_n \to f$ noktasal yakınsaktır. Ölçülebilir bir fonksiyonun ölçülebilir bir alt kümeye kısıtlanışı ölçülebilir olduğundan $f_n\mid_{E'}$ ve $f\mid_{E'}$ ölçülebilirdir.
Adım 3: Egoroff'un uygulanması. $\varepsilon > 0$ verilsin. Egoroff teoremi (Teorem 9.1) E' üzerinde kapalı bir $F \subseteq E'$ verir: $m(E' \setminus F) < \varepsilon$ ve F üzerinde $f_n \to f$ düzgündür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 4: Ölçü hesabı. $F \subseteq E$ dir ve $E \setminus F$, ayrık E_0 ile $E' \setminus F$ kümelerinin birleşimidir. Böylece

$$m(E \setminus F) = m(E_0) + m(E' \setminus F) < 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Egoroff teoreminin sonucu aynen geçerlidir.
■

Alıştırma 9.6 (Düzgün Yakınsaklık Parçalarına Ayrışım). $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisi E üzerinde noktasal olarak $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna yakınsasın ($m(E) = \infty$ olabilir). $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olacak biçimde ölçülebilir E_k kümeleri bulunduğunu gösterin: $m(E_1) = 0$ ve her $k > 1$ için $f_n \to f$ yakınsaklığı E_k üzerinde düzgündür.

Çözüm.
Egoroff teoremi sonlu ölçü ister; bu yüzden E'yi sonlu ölçülü parçalara bölüp her parçada teoremi sonsuz kez uygulayacağız.
Adım 1: Sonlu ölçülü parçalar. Her $p \in \mathbb{N}$ için $D_p = E \cap [-p, p]$ ölçülebilirdir ve $m(D_p) \le 2p < \infty$ dur. D_p üzerinde $f_n \to f$ noktasaldır.
Adım 2: Egoroff kümeleri. Her $p, j \in \mathbb{N}$ için Egoroff teoremini (Teorem 9.1) D_p üzerinde $\varepsilon = 1/j$ ile uygulayalım: kapalı bir $F_{p,j} \subseteq D_p$ vardır ki

$$m(D_p \setminus F_{p,j}) < \frac{1}{j}$$

ve $F_{p,j}$ üzerinde $f_n \to f$ düzgündür.
Adım 3: Artık küme sıfır ölçülü. $G = \bigcup_{p,j} F_{p,j}$ ve $E_1 = E \setminus G$ olsun; E_1 ölçülebilirdir. Her p ve her j için $D_p \setminus G \subseteq D_p \setminus F_{p,j}$ olduğundan $m(D_p \setminus G) < 1/j$, yani $m(D_p \setminus G) = 0$ dır. $E = \bigcup_p D_p$ olduğundan $E_1 = \bigcup_p (D_p \setminus G)$ ve sayılabilir alt toplamsallıktan $m(E_1) = 0$ dır.
Adım 4: Numaralama. $\{(p, j) : p, j \in \mathbb{N}\}$ sayılabilir olduğundan $F_{p,j}$ kümelerini $E_2, E_3, \ldots$ biçiminde sıralayabiliriz. Bu kümeler kapalı, dolayısıyla ölçülebilirdir ve her birinde yakınsaklık düzgündür. Son olarak

$$E = E_1 \cup G = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

olur.
■

Alıştırma 9.7 (Düzgün Sınırlı Sürekli Yaklaşım). Sonuç 9.1'da f sınırlıysa $\{f_n\}$ dizisinin düzgün sınırlı seçilebileceğini, yani her n ve her x için $|\, f_n(x) \,| \le M$ olan bir M bulunabileceğini gösterin.

Çözüm.
Fikir: sonuçtaki diziyi $[-M, M]$ aralığına "kırpmak".
Adım 1: Kırpma fonksiyonu. E üzerinde $|\, f \,| \le M$ olsun ve

$$\varphi(t) = \max\{-M, \min\{t, M\}\}$$

tanımlayalım: $|\, t \,| \le M$ iken $\varphi(t) = t$, $t > M$ iken M, $t < -M$ iken $-M$ dir. φ süreklidir; hatta her s, t için $|\, \varphi(s) - \varphi(t) \,| \le |\, s - t \,|$ dir, çünkü φ eğimi 0 ya da 1 olan parçalardan oluşan azalmayan bir fonksiyondur. Ayrıca $|\, \varphi \,| \le M$ dir.
Adım 2: Yeni dizi. Sonuç 9.1'daki sürekli $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dizisini alalım ve $h_n = \varphi \circ f_n$ tanımlayalım. Sürekli fonksiyonların bileşkesi olarak her h_n süreklidir ve her n, x için $|\, h_n(x) \,| \le M$ dir.
Adım 3: Yakınsaklık korunur. Hemen her $x \in E$ için $f_n(x) \to f(x)$ dir. Böyle bir x için φ'nin sürekliliğinden

$$h_n(x) = \varphi(f_n(x)) \to \varphi(f(x)) = f(x)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; son eşitlik $| f(x) | \leq M$ olmasındandır. Dolayısıyla $\{h_n\}$, E üzerinde hemen her yerde f'ye yakınsayan, düzgün sınırlı bir sürekli fonksiyonlar dizisidir.
■

Ölçülebilir fonksiyonları artık hem sürekli fonksiyonlarla hem de basit fonksiyonlarla yaklaşık olarak yakalayabiliyoruz. Sıradaki bölüm Riemann ve Lebesgue İntegrali, bu yaklaşımları integrali tanımlamak için kullanıyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

10. Riemann İntegraline Karşı Lebesgue İntegrali

Lebesgue integralini kurmamızın asıl nedeni limitlerle iyi geçinen bir integral elde etmektir: E üzerinde noktasal olarak $f_n \to f$ ise, oldukça genel koşullar altında

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \int_E f$$

olmasını istiyoruz. Buna *integral işareti altında limite geçiş* denir. Bu kısımda bu geçişi güvenceye alan üç sonuç kanıtlanacak: Sınırlı Yakınsaklık Teoremi, Monoton Yakınsaklık Teoremi ve Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi.
Başlamadan önce Riemann integraline bir kez daha, bu kez basamak fonksiyonları gözüyle bakıyoruz. Bu bakış hem Lebesgue integralinin tanımına doğrudan örnek olacak hem de Riemann integralinin nerede yetersiz kaldığını açıkça gösterecek.

10.1 Darboux Toplamları ve Riemann İntegrali

Riemann integralinin kuruluşu Analiz 2'de ayrıntılı işlendi (bkz. Analiz 2: Bölünüşler ve Darboux Toplamları); burada yalnız ihtiyaç duyacağımız tanımları, bu kitabın gösterimiyle topluyoruz.

Tanım 10.1 (Bölüntü). $[a,b]$ aralığının bir **bölüntüsü** (partition), $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ koşulunu sağlayan sonlu bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ kümesidir. x_i noktalarına bölüntü noktaları, (x_{i-1}, x_i) aralıklarına bölüntünün alt aralıkları denir.

Tanım 10.2 (Bölüntünün İncelmesi). P ve P', $[a,b]$ nin iki bölüntüsü olsun. $P \subseteq P'$ ise, yani P nin her bölüntü noktası P' nün de bölüntü noktasıysa, P' ye P nin bir **incelmesi** (refinement) denir.

Yani incelme, var olan noktalara yenilerini ekleyerek alt aralıkları küçültmektir. İki bölüntünün birleşimi ikisinin de incelmesidir; buna *ortak incelme* denir.

Tanım 10.3 (Alt ve Üst Darboux Toplamları). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı ve $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $[a,b]$ nin bir bölüntüsü olsun. $1 \le i \le n$ için

$$m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\}, \qquad M_i = \sup\{f(x) : x_{i-1} < x < x_i\}$$

diyelim. f nin P ye göre **alt** ve **üst Darboux toplamları**

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}), \qquad U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1})$$

sayılarıdır.

Yani $L(f,P)$ ve $U(f,P)$, grafiğin altına ve üstüne her alt aralıkta birer dikdörtgen yerleştirerek elde edilen alanlardır. İnfimum ve supremum *açık* alt aralıklar üzerinden alındığı için f nin bölüntü noktalarındaki değerleri bu toplamları etkilemez. Her alt aralıkta $m_i \le M_i$ olduğundan $L(f,P) \le U(f,P)$ dir. Daha fazlası da doğrudur: incelme alt toplamı büyütür, üst toplamı küçültür (Alıştırma 10.2) ve bu nedenle her alt toplam her üst toplamdan küçük ya da ona eşittir (Alıştırma 10.3).

Tanım 10.4 (Riemann İntegrali). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı olsun. $[a,b]$ nin bütün P bölüntüleri üzerinden

$$\underline{I}(f) = \sup_P L(f,P), \qquad \overline{I}(f) = \inf_P U(f,P)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

sayılarına f nin **alt** ve **üst Riemann integrali** denir. f,

$$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P) \tag{1}$$

eşitliği sağlandığında **Riemann integrallenebilir** olarak adlandırılır; bu ortak değer f nin **Riemann integrali**dir ve $\int_a^b f(x)\,dx$ ile gösterilir.

Yani f nin Riemann integrallenebilmesi, alttan ve üstten dikdörtgenlerle yapılan yaklaşımların aynı sayıda buluşmasıdır. Her zaman $\underline{I}(f) \le \overline{I}(f)$ dir (Alıştırma 10.3); integrallenebilirlik bu eşitsizliğin eşitlik olmasıdır. Sürekli bir fonksiyon $[a,b]$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan Riemann integrallenebilirdir (Alıştırma 10.5); artan fonksiyonlar da öyledir (Alıştırma 10.7).

10.2 Basamak Fonksiyonları

Darboux toplamlarındaki dikdörtgenler aslında birer fonksiyonun grafiğidir: her alt aralıkta sabit olan fonksiyonların. Bu fonksiyonlar Riemann integralinin yapı taşlarıdır.

Tanım 10.5 (Basamak Fonksiyonu). $\eta : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $[a,b]$ nin bir $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ bölüntüsü ve $c_1, \ldots, c_n$ sayıları

$$x_{i-1} < x < x_i \Longrightarrow \eta(x) = c_i \qquad (1 \le i \le n)$$

olacak biçimde varsa, η ya bir **basamak fonksiyonu** (step function) denir.

Yani basamak fonksiyonu, açık alt aralıkların her birinde sabittir; bölüntü noktalarındaki değerleri keyfidir.

Teorem 10.1 (Basamak Fonksiyonunun İntegrali). *Tanımdaki gibi bir η basamak fonksiyonu Riemann integrallenebilirdir ve*

$$\int_a^b \eta(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1})$$

dir.

> ***İspat.***
> *η sonlu sayıda değer aldığından sınırlıdır. P nin her açık alt aralığında $\eta \equiv c_i$ olduğundan $m_i = M_i = c_i$, dolayısıyla*
>
> $$L(\eta,P) = U(\eta,P) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1}) =: S$$
>
> *dir. Alt Riemann integrali bir supremum, üst Riemann integrali bir infimum olduğundan ve her zaman $\underline{I}(\eta) \le \overline{I}(\eta)$ olduğundan (Alıştırma 10.3)*
>
> $$S = L(\eta,P) \le \underline{I}(\eta) \le \overline{I}(\eta) \le U(\eta,P) = S$$
>
> *bulunur. Bütün eşitsizlikler eşitliktir; (1) sağlanır ve integral S dir.*
> ■

Özel olarak, integralin değeri basamak fonksiyonunu temsil etmek için seçilen bölüntüye bağlı değildir: hangi bölüntü kullanılırsa kullanılsın, toplam aynı sayıya, yani Riemann integraline eşittir.

Örnek 10.1 (Bir Basamak Fonksiyonunun İntegrali). $[0,3]$ üzerinde $0 < x < 1$ için $\eta(x) = 2$, $1 < x < 1{,}5$ için $\eta(x) = -1$, $1{,}5 < x < 3$ için $\eta(x) = 4$ olsun; η nın 0, 1, 1,5 ve 3 noktalarındaki değerleri keyfi olsun. $\int_0^3 \eta(x)\,dx$ integralini bulun.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

$P = \{0; 1; 1{,}5; 3\}$ bölüntüsünün açık alt aralıklarında η sabittir; yani η bir basamak fonksiyonudur. Teorem 10.1 gereği

$$\int_0^3 \eta(x)\,dx = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$$

dir. Bölüntü noktalarındaki değerler sonucu etkilemez.
■

Şimdi Darboux toplamlarını basamak fonksiyonlarının integralleri olarak okuyabiliriz. Aşağıda $\varphi \le f$ yazımı, $[a,b]$ nin her noktasında $\varphi(x) \le f(x)$ demektir.

Teorem 10.2 (Basamak Fonksiyonlarıyla Riemann İntegrali). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı olsun. Supremum ve infimum $[a,b]$ üzerindeki basamak fonksiyonları üzerinden alınmak üzere*

$$\underline{I}(f) = \sup_{\varphi \le f} \int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad \overline{I}(f) = \inf_{\psi \ge f} \int_a^b \psi(x)\,dx$$

dir. Dolayısıyla f nin Riemann integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\varphi \le f} \int_a^b \varphi(x)\,dx = \inf_{\psi \ge f} \int_a^b \psi(x)\,dx$$

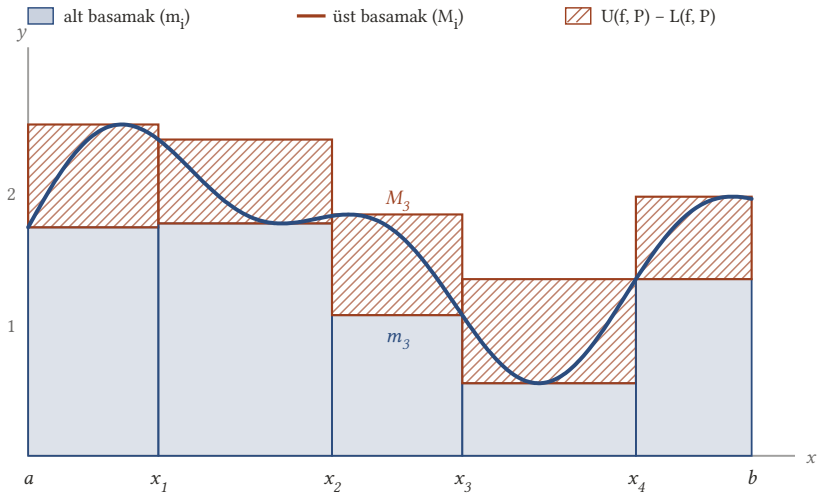
olmasıdır.

İspat.
Alt integral için yapalım; üst integral aynı biçimde (eşitsizlikler ters çevrilerek) gösterilir. Sağdaki supremuma A diyelim.
Adım 1 ($A \ge \underline{I}(f)$). *$P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ rastgele bir bölüntü olsun. φ yi, $x_{i-1} < x < x_i$ için $\varphi(x) = m_i$ ve bölüntü noktalarında $\varphi(x_i) = f(x_i)$ olarak tanımlayalım. φ bir basamak fonksiyonudur ve m_i nin tanımından $\varphi \le f$ dir. Teorem 10.1 gereği $\int_a^b \varphi = L(f,P)$, dolayısıyla $A \ge L(f,P)$. P rastgele olduğundan $A \ge \underline{I}(f)$.*
Adım 2 ($A \le \underline{I}(f)$). *$\varphi \le f$ bir basamak fonksiyonu olsun; $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ ona eşlik eden bölüntü ve c_i açık alt aralıklardaki değerleri olsun. $x_{i-1} < x < x_i$ için $c_i = \varphi(x) \le f(x)$ olduğundan c_i, bu aralıkta f nin bir alt sınırıdır; yani $c_i \le m_i$. Buradan*

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(x_i - x_{i-1}) \le L(f,P) \le \underline{I}(f)$$

çıkar. φ üzerinden supremum alınarak $A \le \underline{I}(f)$ bulunur.
İki adım $A = \underline{I}(f)$ verir. Son önerme, (1) eşitliğinin bu iki ifadeyle yeniden yazılmasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.1: Beş alt aralıklı bir P *bölüntüsü için alt basamak fonksiyonu (dolgulu,* m_i *yüksekliğinde) ve üst basamak fonksiyonu (*M_i *yüksekliğinde). Birincinin integrali* L(f, P)*, ikincininki* U(f, P)*'dir; taralı şeritlerin toplam alanı aradaki farktır.*

■

Yani Riemann integrali, f yi alttan ve üstten basamak fonksiyonlarıyla sıkıştırmaktır. Lebesgue integralinde aynı fikri koruyacağız, ama basamak fonksiyonlarının yerine çok daha esnek olan basit fonksiyonları (Tanım 8.4) koyacağız: bir basit fonksiyon aralıklar üzerinde değil, rastgele ölçülebilir kümeler üzerinde sabittir.

10.3 Dirichlet Fonksiyonu

Basamak fonksiyonlarının yetersizliğini gösteren klasik örnek, rasyonel sayılarda 1, irrasyonel sayılarda 0 değerini alan fonksiyondur.

Örnek 10.2 (Dirichlet Fonksiyonu). $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ ve $f = \chi_E : [0,1] \to \mathbb{R}$ olsun. f nin Riemann integrallenebilir olmadığını gösterin.

Çözüm.
$P = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $[0,1]$ in rastgele bir bölüntüsü olsun. Rasyonel sayılar da irrasyonel sayılar da $\mathbb{R}$ de yoğundur; bu yüzden her (x_{i-1}, x_i) aralığı hem rasyonel hem irrasyonel bir nokta içerir. Dolayısıyla her i için $m_i = 0$ ve $M_i = 1$, yani

$$L(f,P) = 0, \qquad U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = 1$$

dir. P rastgele olduğundan $\underline{I}(f) = 0 \neq 1 = \overline{I}(f)$; (1) sağlanmaz ve f Riemann integrallenebilir değildir.
■

Oysa E sayılabilir olduğundan $m(E) = 0$ dır (Teorem 1.4); ileride Lebesgue integralinin f ye doğal olarak 0 değerini verdiğini göreceğiz. Daha da çarpıcı olanı, f nin çok iyi fonksiyonların limiti olmasıdır.

Örnek 10.3 (Basamak Fonksiyonlarının İntegrallenemeyen Limiti). $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ kümesinin bir numaralaması olsun ve her n için $f_n = \chi_{\{q_1,\ldots,q_n\}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ tanımlansın. Her f_n nin integrali 0 olan bir basamak fonksiyonu olduğunu, $\{f_n\}$ nin artan ve $| f_n | \leq 1$ olduğunu ve $[0,1]$ üzerinde noktasal olarak Dirichlet fonksiyonu $f = \chi_E$ ye yakınsadığını gösterin.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Basamak fonksiyonu. $q_1, \ldots, q_n$ noktalarını ve $0, 1$ i sıralayarak $[0,1]$ in bir P bölüntüsünü elde ederiz. P nin açık alt aralıkları hiçbir q_k $(k \leq n)$ içermez; bu aralıklarda $f_n \equiv 0$ dır. O hâlde f_n bir basamak fonksiyonudur ve Teorem 10.1 gereği $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ dır.
Monotonluk ve sınırlılık. $\{q_1, \ldots, q_n\} \subseteq \{q_1, \ldots, q_{n+1}\}$ olduğundan $f_n \leq f_{n+1}$; ayrıca f_n yalnız 0 ve 1 değerlerini aldığından $\mid f_n \mid \leq 1$.
Noktasal yakınsaklık. x irrasyonelse her n için $f_n(x) = 0 = f(x)$. $x \in E$ ise bir k için $x = q_k$ dır; $n \geq k$ için $f_n(x) = 1 = f(x)$. Her iki durumda $f_n(x) \to f(x)$.
■

Yani Riemann integrallenebilir fonksiyonların düzgün sınırlı, artan bir dizisi, Riemann integrallenebilir olmayan bir fonksiyona noktasal olarak yakınsayabilir. Burada $\int_0^1 f_n = 0$ integralleri bir limite gider, ama bu limiti karşılayacak bir Riemann integrali yoktur. Yakınsaklık düzgün olsaydı böyle bir şey olamazdı (Alıştırma 10.8); nitekim bu dizi düzgün yakınsamaz (Alıştırma 10.1).

10.4 Riemann İntegralinin Sınırlılıkları

Dirichlet örneği Riemann integralinin iki zayıflığını birden gösterir: integrallenebilir fonksiyonların sınıfı noktasal limitler altında kapalı değildir ve bu yüzden limit ile integralin yer değiştirmesi, limit fonksiyonunun integrallenebilir olduğu *önceden bilinmedikçe* anlamsızdır.
Lebesgue integrali bu durumu açıklar. Sınırlı bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Riemann integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşul, süreksizlik noktalarının kümesinin sıfır ölçülü olmasıdır (Lebesgue'ün Riemann integrallenebilirlik ölçütü; kanıtı bu kitabın kapsamı dışındadır). Dirichlet fonksiyonu her noktada süreksizdir. Ayrıca Riemann integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue integrallenebilir olduğunu ve iki integralin çakıştığını (Teorem 11.4), sınırlı fonksiyonlar için de Sınırlı Yakınsaklık Teoremi'ni (Teorem 11.5) kanıtlayacağız. Bu ikisi birlikte Riemann integrali için Arzelà'nın Sınırlı Yakınsaklık Teoremi'ni verir: $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ Riemann integrallenebilir fonksiyonların düzgün sınırlı bir dizisi olsun ve noktasal olarak bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna yakınsasın. f nin Riemann integrallenebilir olduğu **varsayılırsa**

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

dir. Lebesgue integralinde bu varsayıma gerek kalmayacak: ölçülebilir fonksiyonların noktasal limiti yine ölçülebilirdir (Teorem 8.1).

10.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar Darboux toplamlarının temel özelliklerini ve bunların birkaç klasik sonucunu kanıtlatıyor.

Alıştırma 10.1 (Dirichlet Dizisi Düzgün Yakınsamaz). $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ in bir numaralaması, $f_n = \chi_{\{q_1,\ldots,q_n\}}$ ve $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ olsun (Örnek 10.3). $\{f_n\}$ nin $[0,1]$ üzerinde f ye düzgün olarak yakınsamadığını gösterin.

Çözüm.
Düzgün yakınsaklık, $\sup_{x\in[0,1]} \mid f_n(x) - f(x) \mid \to 0$ demektir. Bu supremumun her n için 1 olduğunu gösterelim.
n rastgele olsun. Numaralama birebir olduğundan $q_{n+1} \notin \{q_1, \ldots, q_n\}$, dolayısıyla $f_n(q_{n+1}) = 0$. Öte yandan q_{n+1} rasyoneldir, yani $f(q_{n+1}) = 1$. Buradan

$$\sup_{x\in[0,1]} \mid f_n(x) - f(x) \mid \geq \mid f_n(q_{n+1}) - f(q_{n+1}) \mid = 1$$

çıkar; fonksiyonlar yalnız 0 ve 1 değerlerini aldığından supremum tam olarak 1 dir. Supremum sıfıra gitmediğinden yakınsaklık düzgün değildir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 10.2 (İncelme ve Darboux Toplamları). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı olsun. P', $[a,b]$ nin bir P bölüntüsünün incelmesiyse

$$L(f,P) \le L(f,P') \quad \text{ve} \quad U(f,P') \le U(f,P)$$

olduğunu, yani incelme altında alt Darboux toplamlarının azalmadığını ve üst Darboux toplamlarının artmadığını gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Tek nokta eklemek. Önce $P' = P \cup \{y\}$ olduğunu, y nin P nin bir (x_{j-1}, x_j) alt aralığında bulunduğunu varsayalım. İki toplam yalnız j indisli terimde ayrılır.

$$m' = \inf_{(x_{j-1},\, y)} f, \qquad m'' = \inf_{(y,\, x_j)} f$$

diyelim. (x_{j-1}, y) ve (y, x_j) aralıkları (x_{j-1}, x_j) nin alt kümeleridir; daha küçük bir kümenin infimumu daha büyük ya da eşit olduğundan $m' \ge m_j$ ve $m'' \ge m_j$. Buradan

$$\begin{aligned} m'(y - x_{j-1}) + m''(x_j - y) &\ge m_j(y - x_{j-1}) + m_j(x_j - y) \\ &= m_j(x_j - x_{j-1}) \end{aligned}$$

bulunur; yani $L(f,P') \ge L(f,P)$. Supremumlar için aynı akıl yürütme, daha küçük kümenin supremumu daha küçük ya da eşit olduğundan, $U(f,P') \le U(f,P)$ verir.
Adım 2: Genel durum. $P' \setminus P$ sonlu bir kümedir, elemanları $y_1, \ldots, y_k$ olsun. P ye bu noktaları birer birer ekleyerek

$$P = Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_k = P'$$

bölüntülerini elde ederiz; her Q_r, Q_{r-1} e tek nokta eklenerek bulunur. Adım 1 her geçişte alt toplamın azalmadığını, üst toplamın artmadığını söyler:

$$L(f,P) \le L(f,Q_1) \le \cdots \le L(f,P'), \qquad U(f,P') \le \cdots \le U(f,P).$$

■

Alıştırma 10.3 (Alt İntegral Üst İntegrali Aşmaz). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı olsun. $\sup_P L(f,P) \le \inf_P U(f,P)$ olduğunu, yani (1) eşitliğinin sol tarafının sağ tarafından büyük olamayacağını gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Her alt toplam her üst toplamı aşmaz. P_1 ve P_2 iki bölüntü olsun ve $P' = P_1 \cup P_2$ ortak incelmelerini alalım. Her alt aralıkta infimum supremumu aşmadığından $L(f,P') \le U(f,P')$. Alıştırma 10.2 gereği

$$L(f,P_1) \le L(f,P') \le U(f,P') \le U(f,P_2)$$

dir.
Adım 2: Supremum ve infimum. P_2 yi sabit tutalım. Adım 1'e göre $U(f,P_2)$, bütün alt toplamların bir üst sınırıdır; dolayısıyla $\sup_P L(f,P) \le U(f,P_2)$. Bu, her P_2 için doğru olduğundan $\sup_P L(f,P)$ bütün üst toplamların bir alt sınırıdır ve

$$\sup_P L(f,P) \le \inf_P U(f,P)$$

bulunur.
■

Alıştırma 10.4 (Bölüntü Dizisiyle İntegrallenebilirlik). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı olsun. f nin Riemann integrallenebilmesi için gerek ve yeter koşulun, her P_{n+1} in P_n nin bir incelmesi olduğu ve

$$\lim_{n\to\infty} \big[\, U(f,P_n) - L(f,P_n) \,\big] = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

eşitliğini sağlayan bir $\{P_n\}$ bölüntü dizisinin var olması olduğunu gösterin.

Çözüm.
Kısaca $\underline{I} = \sup_P L(f,P)$ ve $\overline{I} = \inf_P U(f,P)$ yazalım; Alıştırma 10.3 gereği $\underline{I} \le \overline{I}$.
Yeterlilik. Böyle bir $\{P_n\}$ varsa her n için $L(f,P_n) \le \underline{I} \le \overline{I} \le U(f,P_n)$, dolayısıyla

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le U(f,P_n) - L(f,P_n).$$

Sağ taraf sıfıra gider, sol taraf n den bağımsızdır; demek ki $\overline{I} = \underline{I}$ ve f Riemann integrallenebilirdir. (Bu yönde incelme koşuluna gerek yoktur.)
Gereklilik. f Riemann integrallenebilir olsun; $I = \underline{I} = \overline{I}$. Her n için supremum ve infimumun tanımından

$$L(f,Q_n) > I - \frac{1}{n}, \qquad U(f,R_n) < I + \frac{1}{n}$$

olan Q_n, R_n bölüntüleri vardır. Tümevarımla $P_1 = Q_1 \cup R_1$ ve $P_n = P_{n-1} \cup Q_n \cup R_n$ tanımlayalım. $P_n \supseteq P_{n-1}$ olduğundan her P_n, P_{n-1} in incelmesidir. Ayrıca P_n, hem Q_n nin hem R_n nin incelmesidir; Alıştırma 10.2 gereği

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) \le U(f,R_n) - L(f,Q_n) < \frac{2}{n}$$

dir. Fark negatif olmadığından $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$.
■

Alıştırma 10.5 (Sürekli Fonksiyonlar İntegrallenebilir). Alıştırma 10.4 ve düzgün sürekliliği kullanarak sürekli her $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Sınırlılık ve düzgün süreklilik. Kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan f sınırlıdır ve düzgün süreklidir (bkz. Analiz 1: Düzgün Süreklilik ve Cantor Teoremi). Dolayısıyla Darboux toplamları tanımlıdır.
Adım 2: Bölüntü dizisi. P_n, $[a,b]$ yi 2^n eşit parçaya bölen bölüntü olsun. P_n nin noktaları P_{n+1} in de noktalarıdır (her alt aralık ikiye bölünür); yani P_{n+1}, P_n nin incelmesidir. P_n nin alt aralıklarının uzunluğu $(b-a)/2^n$ dir.
Adım 3: Farkın tahmini. $\varepsilon > 0$ verilsin. Düzgün süreklilikten, $|\, x-y \,| < \delta$ iken $|\, f(x)-f(y) \,| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır. $(b-a)/2^N < \delta$ olan bir N seçelim ve $n \ge N$ alalım. P_n nin bir (x_{i-1}, x_i) alt aralığındaki her x, y için $|\, x-y \,| < \delta$, dolayısıyla $f(x) < f(y) + \varepsilon$. Önce x üzerinden supremum, sonra y üzerinden infimum alırsak $M_i \le m_i + \varepsilon$ buluruz. Böylece

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \sum_{i=1}^{2^n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon\,(b-a)$$

dir.
Adım 4: Sonuç. ε keyfi olduğundan $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$. $\{P_n\}$ ardışık incelmelerden oluştuğundan Alıştırma 10.4 gereği f Riemann integrallenebilirdir.
■

Alıştırma 10.6 (Artan Fonksiyonun Darboux Farkı). $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ artan olsun ve P_n, $[0,1]$ in $1/n$ uzunluklu n alt aralığa bölüntüsü olsun.

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) \le \frac{1}{n}\,[\, f(1) - f(0) \,]$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$P_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$, $x_i = i/n$ olsun. f artan olduğundan $f(0) \le f(x) \le f(1)$; yani f sınırlıdır ve Darboux toplamları tanımlıdır.
Adım 1: Alt aralıkta sınırlar. $x_{i-1} < x < x_i$ için artanlıktan $f(x_{i-1}) \le f(x) \le f(x_i)$. Dolayısıyla $f(x_i)$ bu aralıkta bir üst sınır, $f(x_{i-1})$ bir alt sınırdır:

$$M_i \le f(x_i), \qquad m_i \ge f(x_{i-1}).$$

Adım 2: Teleskopik toplam. Her alt aralığın uzunluğu $1/n$ olduğundan

$$\begin{aligned} U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i) \\ &\le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big[\, f(x_i) - f(x_{i-1}) \,\big] \end{aligned}$$

dir. Toplam açıldığında ardışık terimler birbirini götürür:

$$\sum_{i=1}^{n}\big[\, f(x_i) - f(x_{i-1}) \,\big] = f(x_n) - f(x_0) = f(1) - f(0).$$

Böylece $U(f, P_n) - L(f, P_n) \le \frac{1}{n}[f(1) - f(0)]$.
■

Alıştırma 10.7 (Artan Fonksiyonlar İntegrallenebilir). $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ artan olsun. Alıştırma 10.6 ve Alıştırma 10.4 yardımıyla f nin Riemann integrallenebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
Alıştırma 10.4 ardışık incelmelerden oluşan bir dizi ister; $1/n$ uzunluklu bölüntüler bu koşulu sağlamaz (P_3, P_2 nin incelmesi değildir). Bu yüzden yalnız $n = 2^k$ indislerini kullanırız.
$Q_k = P_{2^k}$, yani $[0,1]$ i 2^k eşit parçaya bölen bölüntü olsun. Q_k nin her noktası $j/2^k = 2j/2^{k+1}$ biçimindedir ve Q_{k+1} e aittir; yani Q_{k+1}, Q_k nin incelmesidir. Alıştırma 10.6 gereği

$$0 \le U(f, Q_k) - L(f, Q_k) \le \frac{f(1) - f(0)}{2^k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$$

dır. Alıştırma 10.4 gereği f Riemann integrallenebilirdir.
■

Alıştırma 10.8 (Düzgün Limitin Riemann İntegrali). $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$, bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsayan, Riemann integrallenebilir fonksiyonların düzgün sınırlı bir dizisi olsun. f nin de Riemann integrallenebilir olduğunu ve

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: f sınırlıdır. Dizi düzgün sınırlı olduğundan her n ve her x için $|\, f_n(x) \,| \le K$ olacak bir K vardır; $n \to \infty$ için $|\, f(x) \,| \le K$. Dolayısıyla f nin Darboux toplamları tanımlıdır.
Adım 2: Toplamların karşılaştırılması. $\varepsilon > 0$ verilsin. Düzgün yakınsaklıktan, $n \ge N$ iken her $x \in [a,b]$ için

$$f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$$

olacak bir N vardır. $n \ge N$ ve P rastgele bir bölüntü olsun. Bir alt aralıkta $f < f_n + \varepsilon$ eşitsizliğinden supremumlar için $M_i(f) \le M_i(f_n) + \varepsilon$, benzer biçimde $m_i(f) \ge m_i(f_n) - \varepsilon$ çıkar. Uzunluklarla çarpıp toplarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$U(f,P) \le U(f_n,P) + \varepsilon(b-a), \qquad L(f,P) \ge L(f_n,P) - \varepsilon(b-a)$$

bulunur.
Adım 3: f integrallenebilir. f_N Riemann integrallenebilir olduğundan Alıştırma 10.4 (ya da doğrudan tanım) gereği $U(f_N,P) - L(f_N,P) < \varepsilon$ olan bir P vardır. Adım 2 deki eşitsizlikleri $n = N$ için kullanırsak

$$\overline{I}(f) - \underline{I}(f) \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon + 2\varepsilon(b-a)$$

dir. ε keyfi olduğundan $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$; f Riemann integrallenebilirdir.
Adım 4: İntegrallerin yakınsaklığı. $n \ge N$ olsun. Her P için Adım 2 deki eşitsizliklerden

$$L(f_n,P) - \varepsilon(b-a) \le L(f,P) \le \int_a^b f(x)\,dx \le U(f,P) \le U(f_n,P) + \varepsilon(b-a)$$

dir. Soldaki eşitsizlikte P üzerinden supremum, sağdakinde infimum alırsak, f_n integrallenebilir olduğundan

$$\int_a^b f_n(x)\,dx - \varepsilon(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b f_n(x)\,dx + \varepsilon(b-a)$$

bulunur. Yani $n \ge N$ için

$$\Big| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \Big| \le \varepsilon(b-a).$$

ε keyfi olduğundan integraller $\int_a^b f(x)\,dx$ e yakınsar.
■

Riemann integralinin sınırlarını gördük. Sıradaki bölüm Sınırlı Fonksiyonların İntegrali, basamak fonksiyonlarının yerine basit fonksiyonları koyarak Lebesgue integralinin ilk adımını atıyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

11. Sınırlı Fonksiyonların İntegrali

Riemann integralinin zayıf noktasını Dirichlet fonksiyonunda gördük: Riemann integrallenebilir fonksiyonlardan oluşan düzgün sınırlı, artan bir dizi, Riemann integrallenebilir olmayan bir fonksiyona noktasal yakınsayabilir. Lebesgue integrali bu kusuru taşımaz.
Kuruluş Riemann integraline benzer, tek fark basamak fonksiyonlarının yerini basit fonksiyonların almasıdır. Önce sonlu destekli basit fonksiyonları integralleriz; sonra sınırlı bir fonksiyonu bunlarla alttan ve üstten sıkıştırırız. Bu bölüm boyunca bir fonksiyonun **sonlu destekli** olması, sonlu ölçülü bir kümenin tümleyeninde sıfır olması demektir (bkz. Noktasal Limitler ve Yaklaşım).

11.1 Basit Fonksiyonların İntegrali

Basit bir fonksiyon sonlu sayıda değer alır; her değeri, aldığı kümenin ölçüsüyle ağırlıklandırıp toplamak en doğal tanımdır.

Tanım 11.1 (Basit Fonksiyonun İntegrali). E ölçülebilir ve $\psi : E \to \mathbb{R}$ sonlu destekli basit bir fonksiyon olsun (bkz. Tanım 8.4). $\psi \equiv 0$ ise $\int_E \psi = 0$ tanımlanır. Aksi hâlde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ψ nin aldığı birbirinden farklı sıfırdan farklı değerler ve $E_i = \psi^{-1}(\lambda_i)$ olmak üzere

$$\int_E \psi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, m(E_i)$$

tanımlanır. Bu sayıya ψ nin E üzerindeki **integrali** denir; gerektiğinde $\int_E \psi \, dm$ yazılır.

Yani integral, sıfırdan farklı her değerin "değer × taban ölçüsü" katkılarının toplamıdır. ψ sonlu destekli olduğundan her E_i sonlu ölçülü bir kümenin içindedir; bu yüzden her $m(E_i)$ sonludur ve toplam anlamlıdır. Özel olarak sonlu ölçülü ölçülebilir $A \subseteq E$ için $\int_E \chi_A = m(A)$ dır.
Tanımda değer kümeleri kullanıldı; ama bir basit fonksiyonu yazmanın başka yolları da vardır. Aşağıdaki lemma, hangi ayrık yazılış seçilirse seçilsin aynı sonucun çıktığını söyler.

Lemma 11.1 (Ayrık Yazılıştan Bağımsızlık). *$A_1, \ldots, A_m$, E nin sonlu ölçülü, ikişer ikişer ayrık ölçülebilir alt kümeleri ve $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ olsun. $\eta = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$ ise*

$$\int_E \eta = \sum_{j=1}^{m} a_j \, m(A_j).$$

İspat.
η, $\bigcup_j A_j$ dışında sıfır olduğundan sonlu destekli ve basittir. $\eta \equiv 0$ ise her $a_j \neq 0$ için $A_j = \varnothing$ olur ve iki taraf da sıfırdır. Aksi hâlde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, η nin sıfırdan farklı farklı değerleri ve $E_i = \eta^{-1}(\lambda_i)$ olsun.
Adım 1: Kümelerin parçalanması. *A_j ler ayrık olduğundan A_j üzerinde $\eta = a_j$ dir. Buna göre $E_i \cap A_j \neq \varnothing$ ise $a_j = \lambda_i$ olur. Ayrıca:*

- *$a_j \neq 0$ ise η nin A_j üzerindeki değeri bazı λ_i ye eşittir; yani A_j, ayrık $E_i \cap A_j$ $(1 \le i \le n)$ kümelerinin birleşimidir.*
- *η, $\bigcup_j A_j$ dışında sıfırdır; yani her E_i, ayrık $E_i \cap A_j$ $(1 \le j \le m)$ kümelerinin birleşimidir.*

Adım 2: Toplamların yeniden düzenlenmesi. *Ölçünün sonlu toplamsallığını (Teorem 4.1) iki kez kullanırız. $a_j = 0$ olan terimler sıfır katkı verir, $a_j \neq 0$ olanlar için*

$$a_j \, m(A_j) = \sum_{i=1}^{n} a_j \, m(E_i \cap A_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, m(E_i \cap A_j)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dir; son eşitlikte $E_i \cap A_j \neq \varnothing$ olan terimlerde $a_j = \lambda_i$ olduğunu kullandık. $a_j = 0$ olan j ler için $E_i \cap A_j = \varnothing$ dir (çünkü $\lambda_i \neq 0$), yani sağdaki toplam bu j ler için de sıfırdır. Toplayıp sırayı değiştirirsek

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} a_j\, m(A_j) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{j=1}^{m} m(E_i \cap A_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, m(E_i) = \int_E \eta.\end{aligned}$$

■

Bu lemma doğrusallığın anahtarıdır: iki basit fonksiyonu, ikisinin de sabit olduğu ortak parçalar üzerinde yazmak yeter.

Teorem 11.1 (Basit Fonksiyonlarda Doğrusallık). *$\varphi, \psi : E \to \mathbb{R}$ sonlu destekli basit fonksiyonlarsa her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için*

$$\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_E \varphi + \beta \int_E \psi.$$

İspat.
Adım 1: Ortak parçalar. *φ nin değerleri a, ψ nin değerleri b ile gösterilsin. İkisi birden sıfır olmayan her (a, b) değer çifti için*

$$A_{ab} = \varphi^{-1}(a) \cap \psi^{-1}(b)$$

diyelim. Bu sonlu sayıda küme ölçülebilir ve ikişer ikişer ayrıktır. Her biri $\{\varphi \neq 0\} \cup \{\psi \neq 0\}$ içinde kaldığından sonlu ölçülüdür. $\bigcup A_{ab}$ dışında φ ile ψ nin ikisi de sıfırdır.
Adım 2: Lemmanın uygulanması. *Buna göre E üzerinde*

$$\begin{aligned}\varphi = \sum a\, \chi_{A_{ab}}, \qquad \psi = \sum b\, \chi_{A_{ab}}, \\ \alpha\varphi + \beta\psi = \sum (\alpha a + \beta b)\, \chi_{A_{ab}}\end{aligned}$$

dir. $\alpha\varphi + \beta\psi$ de sonlu destekli basittir. Lemma 11.1 üç yazılışa da uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_E (\alpha\varphi + \beta\psi) &= \sum (\alpha a + \beta b)\, m(A_{ab}) \\ &= \alpha \int_E \varphi + \beta \int_E \psi.\end{aligned}$$

■

Doğrusallıktan iki önemli özellik hemen çıkar. $A \subseteq E$ ölçülebilir ise $\int_A \psi$, ψ nin A ya kısıtlanışının integralidir; $\psi\,|_A$ ile $\psi\chi_A$ nın sıfırdan farklı değer kümeleri aynı olduğundan $\int_A \psi = \int_E \psi\chi_A$ dır.

Önerme 11.1 (Basit Fonksiyonlarda Monotonluk ve Toplamsallık). *$\varphi, \psi : E \to \mathbb{R}$ sonlu destekli basit fonksiyonlar olsun.*

(i) E üzerinde $\varphi \leq \psi$ ise $\int_E \varphi \leq \int_E \psi$ dir.

(ii) $A, B \subseteq E$ ayrık ve ölçülebilir ise $\int_{A\cup B} \varphi = \int_A \varphi + \int_B \varphi$ dir.

İspat.

(i) $\psi - \varphi$ negatif olmayan, sonlu destekli basit bir fonksiyondur; sıfırdan farklı değerleri pozitif olduğundan tanım gereği integrali ≥ 0 dır. Doğrusallıktan (Teorem 11.1)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_E \psi - \int_E \varphi = \int_E (\psi - \varphi) \geq 0.$$

(ii) A ile B ayrık olduğundan $\varphi\chi_{A\cup B} = \varphi\chi_A + \varphi\chi_B$ dir. Kısıtlama gözlemi ve doğrusallıkla

$$\int_{A\cup B} \varphi = \int_E \varphi\chi_{A\cup B} = \int_E \varphi\chi_A + \int_E \varphi\chi_B = \int_A \varphi + \int_B \varphi.$$

■

11.2 Sınırlı Fonksiyonların Lebesgue İntegrali

Sınırlı bir fonksiyonu, Darboux'nun basamak fonksiyonlarıyla yaptığı gibi, bu kez basit fonksiyonlarla alttan ve üstten yaklaşırız.

Tanım 11.2 (Sınırlı Fonksiyonun Lebesgue İntegrali). E ölçülebilir ve $f : E \to \mathbb{R}$ sınırlı olsun. Aşağıda φ ve ψ, E üzerindeki sonlu destekli basit fonksiyonlar üzerinde değişir.

$$\underline{I}_E(f) = \sup_{\varphi\leq f} \int_E \varphi, \qquad \overline{I}_E(f) = \inf_{\psi\geq f} \int_E \psi$$

sayılarına f nin **alt** ve **üst Lebesgue integrali** denir. $\underline{I}_E(f) = \overline{I}_E(f)$ ise f ye E üzerinde **Lebesgue integrallenebilir** ya da kısaca **integrallenebilir** denir; ortak değer f nin **Lebesgue integrali**dir ve $\int_E f$ ya da $\int_E f\,dm$ ile gösterilir.

Yani f, altındaki basit fonksiyonların integrallerinin en iyisiyle üstündekilerin en iyisi çakışınca integrallenebilirdir. $\varphi \leq f \leq \psi$ ise Önerme 11.1 ile $\int_E \varphi \leq \int_E \psi$ olduğundan $\underline{I}_E(f) \leq \overline{I}_E(f)$ dir. Genel durumda bu supremum ve infimum $\overline{\mathbb{R}}$ de alınır ($m(E) = \infty$ ise bir yaklaşım kümesi boş kalabilir; ör. $E = \mathbb{R}$, $f \equiv 1$ için f nin üstünde sonlu destekli basit fonksiyon yoktur). f sonlu destekliyse bu sorun çıkmaz: f nin dışında sıfır olduğu sonlu ölçülü bir E_0 ve $|\,f\,| \leq M$ için $-M\chi_{E_0} \leq f \leq M\chi_{E_0}$ olduğundan

$$-M\,m(E_0) \leq \underline{I}_E(f) \leq \overline{I}_E(f) \leq M\,m(E_0)$$

olur. Bu bölümde integrallenebilirlik yalnız böyle fonksiyonlar için kullanılır. Sonlu destekli basit bir ψ kendi kendisinin alt ve üst yaklaşımı olduğundan integrallenebilirdir ve bu tanım Tanım 11.1 ile aynı değeri verir.

Bir fonksiyonun sıfır olduğu yer integrale katkı vermez. Aşağıdaki önerme, integrali fonksiyonun sıfırdan farklı olduğu kısmı içeren herhangi bir kümeye taşımamıza izin verir; ispatlarda "$m(E) < \infty$ varsayabiliriz" dememizin gerekçesi budur.

Önerme 11.2 (Desteğe İndirgeme). *$f : E \to \mathbb{R}$ sınırlı, $E_0 \subseteq E$ ölçülebilir ve $\{x \in E : f(x) \neq 0\} \subseteq E_0$ olsun. f nin E üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul E_0 üzerinde integrallenebilir olmasıdır; bu durumda*

$$\int_E f = \int_{E_0} f.$$

İspat.
Üst integrallerin eşit olduğunu gösterelim; alt integraller için ispat aynıdır (eşitsizlikler ters döner).
Adım 1 ($\overline{I}_{E_0}(f) \leq \overline{I}_E(f)$). *$\psi \geq f$, E üzerinde sonlu destekli basit olsun. $E \setminus E_0$ üzerinde $f = 0$ olduğundan orada $\psi \geq 0$, yani $\psi\chi_{E\setminus E_0} \geq 0$ dır. $\psi\,|_{E_0}$, E_0 üzerinde f nin üstünde kalan sonlu destekli basit bir fonksiyondur ve Önerme 11.1 ile*

$$\int_{E_0} \psi = \int_E \psi - \int_{E\setminus E_0} \psi \leq \int_E \psi.$$

ψ üzerinden infimum alınırsa istenen çıkar.

 CC BY-NC-SA 4.0

> ***Adım 2 ($\overline{I}_E(f) \le \overline{I}_{E_0}(f)$).*** *$\psi_0 \ge f$, E_0 üzerinde sonlu destekli basit olsun. ψ_0 ı $E \setminus E_0$ üzerinde 0 olarak genişletelim; elde edilen $\tilde{\psi}$, E üzerinde sonlu destekli basittir, f orada sıfır olduğundan $\tilde{\psi} \ge f$ dir ve sıfırdan farklı değer kümeleri ψ_0 ınkilerle aynı olduğundan $\int_E \tilde{\psi} = \int_{E_0} \psi_0$ dır. İnfimum alınırsa istenen çıkar.*
> *İki adımdan $\overline{I}_E(f) = \overline{I}_{E_0}(f)$ ve aynı biçimde $\underline{I}_E(f) = \underline{I}_{E_0}(f)$ olur; bu da iddianın ikisini birden verir.*
> ■

Özel olarak f sonlu destekliyse, f nin dışında sıfır olduğu sonlu ölçülü bir E_0 alıp E yerine E_0 üzerinde çalışabiliriz.
Artık asıl soruya gelebiliriz: hangi sınırlı fonksiyonlar integrallenebilir? Yanıt: sonlu destekli ölçülebilir olanların hepsi.

Teorem 11.2 (Sınırlı Ölçülebilir Fonksiyonların İntegrallenebilirliği). *$f : E \to \mathbb{R}$ sınırlı, sonlu destekli ve ölçülebilir ise E üzerinde integrallenebilirdir.*

> ***İspat.***
> *Önerme 11.2 ile $m(E) < \infty$ varsayabiliriz. $n \in \mathbb{N}$ verilsin. f sınırlı ve ölçülebilir olduğundan Basit Yaklaşım Lemmasına (Lemma 8.1) göre E üzerinde*
>
> $$\varphi_n \le f \le \psi_n, \qquad 0 \le \psi_n - \varphi_n \le \frac{1}{n}$$
>
> *olan basit φ_n, ψ_n vardır; $m(E) < \infty$ olduğundan bunlar sonlu destekli basittir. $\psi_n - \varphi_n \le \frac{1}{n}\chi_E$ olduğundan Teorem 11.1 ve Önerme 11.1 ile*
>
> $$0 \le \overline{I}_E(f) - \underline{I}_E(f) \le \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n = \int_E (\psi_n - \varphi_n) \le \frac{m(E)}{n}.$$
>
> *n rastgele olduğundan ve $m(E)$ sonlu olduğundan $\overline{I}_E(f) = \underline{I}_E(f)$ olur.*
> ■

Tersi de doğrudur: sınırlı, sonlu destekli bir fonksiyon ancak ve ancak ölçülebilirse Lebesgue integrallenebilirdir. Bu bölümde bu yöne ihtiyacımız olmayacak.

11.3 Doğrusallık ve Monotonluk

Basit fonksiyonlar için elde ettiğimiz üç özellik, alttan ve üstten sıkıştırma sayesinde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlara aynen taşınır.

Teorem 11.3 (İntegralin Doğrusallığı ve Monotonluğu). *$f, g : E \to \mathbb{R}$ sınırlı, sonlu destekli ve ölçülebilir olsun.*

(i) ***Doğrusallık.*** *Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$.*

(ii) ***Monotonluk.*** *E üzerinde $f \le g$ ise $\int_E f \le \int_E g$.*

(iii) ***Tanım kümesi üzerinde toplamsallık.*** *$A, B \subseteq E$ ayrık ve ölçülebilir ise $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.*

> ***İspat.***
> *Sınırlı, sonlu destekli ve ölçülebilir fonksiyonların doğrusal birleşimleri ve ölçülebilir kümelerin karakteristik fonksiyonlarıyla çarpımları yine böyledir (Teorem 7.4); dolayısıyla aşağıda geçen bütün fonksiyonlar Teorem 11.2 ile integrallenebilirdir. f ve g nin dışında sıfır olduğu sonlu ölçülü kümelerin birleşimini E_0 alıp Önerme 11.2 uygularsak $m(E) < \infty$ varsayabiliriz.*
> ***Adım 1: Toplam.*** *$n \in \mathbb{N}$ için Basit Yaklaşım Lemmasıyla (Lemma 8.1) E üzerinde*
>
> $$\varphi_n \le f \le \psi_n, \qquad \bar{\varphi}_n \le g \le \bar{\psi}_n$$
>
> *ve $0 \le \psi_n - \varphi_n \le \frac{1}{n}, 0 \le \bar{\psi}_n - \bar{\varphi}_n \le \frac{1}{n}$ olan basit fonksiyonlar seçelim. İntegralin tanımından $\int_E \varphi_n \le \int_E f \le \int_E \psi_n$ ve g için benzeri geçerlidir; toplarsak ve Teorem 11.1 kullanırsak*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_E (\varphi_n + \bar{\varphi}_n) \le \int_E f + \int_E g \le \int_E (\psi_n + \bar{\psi}_n).$$

Öte yandan $\varphi_n + \bar{\varphi}_n \le f + g \le \psi_n + \bar{\psi}_n$ *olduğundan, yine tanımdan,* $\int_E (f+g)$ *de aynı iki sayı arasındadır. Bu aralığın uzunluğu*

$$\int_E (\psi_n - \varphi_n) + \int_E (\bar{\psi}_n - \bar{\varphi}_n) \le \frac{2\,m(E)}{n}$$

olduğundan

$$\Big| \int_E (f+g) - \int_E f - \int_E g \Big| \le \frac{2m(E)}{n}$$

bulunur. $n \to \infty$ *ile* $\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g$.
Adım 2: Skalerle çarpım. $\alpha > 0$ *ise* $\psi \ge f \Leftrightarrow \alpha\psi \ge \alpha f$ *ve* $\int_E \alpha\psi = \alpha \int_E \psi$ *dir (Teorem 11.1); dolayısıyla* $\overline{I}_E(\alpha f) = \alpha\, \overline{I}_E(f)$, *yani* $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f$. $\alpha < 0$ *ise* $\psi \ge f \Leftrightarrow \alpha\psi \le \alpha f$ *olduğundan*

$$\underline{I}_E(\alpha f) = \sup_{\psi \ge f} \int_E \alpha\psi = \alpha \inf_{\psi \ge f} \int_E \psi = \alpha \int_E f.$$

$\alpha = 0$ *durumu açıktır; iki fonksiyon da sıfırdır. Adım 1 ile birleşince (i) çıkar.*
Adım 3: Monotonluk. $h = g - f \ge 0$ *ise sıfır fonksiyonu* h *nin altında kalan basit bir fonksiyon olduğundan* $\int_E h = \underline{I}_E(h) \ge 0$ *dır. (i) ile* $\int_E g - \int_E f = \int_E h \ge 0$.
Adım 4: Toplamsallık. *Ölçülebilir* $A \subseteq E$ *için* $f\chi_A$, A *dışında sıfırdır ve* A *üzerinde* f *ile çakışır; Önerme 11.2 ile* $\int_E f\chi_A = \int_A f$. A, B *ayrık olduğundan* $f\chi_{A\cup B} = f\chi_A + f\chi_B$; *(i) ile*

$$\int_{A\cup B} f = \int_E f\chi_{A\cup B} = \int_E f\chi_A + \int_E f\chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

■

Monotonluğun sık kullanılan bir biçimi: $m(E) < \infty$ ve E üzerinde $|\, f \,| \le M$ ise $\big|\int_E f\,\big| \le M\, m(E)$ dır, çünkü $-M\chi_E \le f \le M\chi_E$.

Sonuç 11.1 (İntegralin Mutlak Değeri). $f : E \to \mathbb{R}$ *sınırlı, sonlu destekli ve ölçülebilir ise*

$$\Big| \int_E f \Big| \le \int_E |\, f \,| \,.$$

İspat.
$|\, f \,|$ *de sınırlı, sonlu destekli ve ölçülebilirdir* ($\{|\, f \,| > c\}$, $c \ge 0$ *için* $\{f > c\} \cup \{f < -c\}$, $c < 0$ *için* E *dir).* E *üzerinde* $-|\, f \,| \le f \le |\, f \,|$ *olduğundan Teorem 11.3 (ii) ve (i) ile*

$$-\int_E |\, f \,| \le \int_E f \le \int_E |\, f \,| \,.$$

■

11.4 Riemann İntegraliyle Karşılaştırma

Yeni integral eskisini genişletir: Riemann integrallenebilir her fonksiyon Lebesgue integrallenebilirdir ve iki integral aynı sayıyı verir. Kilit gözlem, Darboux toplamlarının birer basit fonksiyonun integrali olmasıdır.

Lemma 11.2 (Darboux Toplamları Basit Fonksiyonların İntegralidir). $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sınırlı ve* $P = \{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$, $[a,b]$ *nin bir bölüntüsü olsun.* m_i *ve* M_i, f *nin* $[x_{i-1}, x_i]$ *üzerindeki infimum ve supremumu olmak üzere*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\varphi_P = \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_{(x_{i-1},x_i)} + \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\chi_{\{x_k\}}$$

ve ψ_P de m_i yerine M_i yazılarak tanımlansın. φ_P ve ψ_P basittir, $\varphi_P \le f \le \psi_P$ dir ve

$$\int_{[a,b]} \varphi_P = L(f,P), \qquad \int_{[a,b]} \psi_P = U(f,P).$$

İspat.
Açık aralıklar ile tek noktalı kümeler ölçülebilir ve ikişer ikişer ayrıktır; birleşimleri $[a,b]$ dir. Dolayısıyla φ_P sonlu sayıda değer alan, ölçülebilir, basit bir fonksiyondur ve $m([a,b]) < \infty$ olduğundan sonlu desteklidir. Açık aralıklarda $m_i \le f$, bölüntü noktalarında eşitlik vardır; yani $\varphi_P \le f$. Nokta kümelerinin ölçüsü 0, (x_{i-1},x_i) ninki $x_i - x_{i-1}$ olduğundan Lemma 11.1

$$\int_{[a,b]} \varphi_P = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = L(f,P)$$

verir. ψ_P için aynı hesap $U(f,P)$ yi verir.
■

Teorem 11.4 (Riemann İntegrallenebilir Fonksiyonların Lebesgue İntegrali). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı ve Riemann integrallenebilir ise Lebesgue integrallenebilirdir ve*

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

İspat.
Her P bölüntüsü için Lemma 11.2 ve alt, üst Lebesgue integrallerinin tanımından

$$\begin{aligned} L(f,P) = \int_{[a,b]} \varphi_P &\le \underline{I}_{[a,b]}(f) \\ &\le \overline{I}_{[a,b]}(f) \le \int_{[a,b]} \psi_P = U(f,P). \end{aligned}$$

Soldan P üzerinden supremum, sağdan infimum alınırsa

$$\sup_P L(f,P) \le \underline{I}_{[a,b]}(f) \le \overline{I}_{[a,b]}(f) \le \inf_P U(f,P).$$

f Riemann integrallenebilir olduğundan (Tanım 10.4) en dıştaki iki sayı eşit ve Riemann integraline eşittir. Aradaki bütün eşitsizlikler eşitlik olur.
■

Sınırlı Yakınsaklık Teoremini Riemann integraline uygulayabilmek için bir adım daha gerekir: Riemann integrallenebilir fonksiyonlar ölçülebilirdir.

Lemma 11.3 (Riemann İntegrallenebilir Fonksiyonların Ölçülebilirliği). *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı ve Riemann integrallenebilir ise ölçülebilirdir.*

İspat.
Adım 1: Sıkıştıran iki ölçülebilir fonksiyon. *$\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$ olduğundan her k için $U(f,Q_k) - L(f,P_k) < 1/k$ olan P_k ve Q_k bölüntüleri vardır. Lemma 11.2 deki fonksiyonlarla*

$$\varphi^* = \sup_k \varphi_{P_k}, \qquad \psi^* = \inf_k \psi_{Q_k}$$

diyelim. Basit fonksiyonlar ölçülebilirdir ve $\{\varphi^* > c\} = \bigcup_k \{\varphi_{P_k} > c\}$ olduğundan φ^* ölçülebilirdir; benzer biçimde $\{\psi^* < c\} = \bigcup_k \{\psi_{Q_k} < c\}$. Ayrıca $\varphi^* \le f \le \psi^*$ dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: Farkın integrali sıfır. *$u = \psi^* - \varphi^*$ sınırlı, ölçülebilir ve ≥ 0 dır. Her k için $0 \leq u \leq \psi_{Q_k} - \varphi_{P_k}$ olduğundan Teorem 11.3 ve Lemma 11.2 ile*

$$0 \leq \int_{[a,b]} u \leq U(f, Q_k) - L(f, P_k) < \frac{1}{k},$$

yani $\int_{[a,b]} u = 0$.
Adım 3: $u = 0$ hemen her yerde. *$j \in \mathbb{N}$ ve $A_j = \{u \geq 1/j\}$ olsun. $\frac{1}{j}\chi_{A_j} \leq u$ olduğundan monotonluk $\frac{1}{j}\, m(A_j) \leq \int_{[a,b]} u = 0$ verir. $\{u > 0\} = \bigcup_j A_j$ olduğundan $N = \{u > 0\}$ sıfır ölçülüdür.*
Adım 4: Ölçülebilirlik. *N dışında $f = \varphi^*$ dir. Her c için*

$$\{f > c\} = \big(\{\varphi^* > c\} \setminus N \big) \cup \big(\{f > c\} \cap N \big)$$

dir. İlk küme ölçülebilir kümelerin farkıdır; ikincisi dış ölçüsü sıfır olan bir kümedir ve Teorem 1.4 ile ölçülebilirdir. Demek ki f ölçülebilirdir.
■

Genişlemenin gerçek olduğunu Dirichlet fonksiyonu gösterir.

Örnek 11.1 (Dirichlet Fonksiyonunun Lebesgue İntegrali). $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ olmak üzere $\chi_E : [0,1] \to \mathbb{R}$ Dirichlet fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösterin ve integralini bulun.

Çözüm.
E sayılabilir olduğundan dış ölçüsü sıfırdır; Teorem 1.4 ile ölçülebilirdir ve $m(E) = 0$ dır. Böylece χ_E, $[0,1]$ üzerinde sonlu destekli basit bir fonksiyondur. Basit fonksiyonlar integrallenebilir olduğundan

$$\int_{[0,1]} \chi_E = 1 \cdot m(E) = 0.$$

Öte yandan χ_E nin Riemann integrallenebilir olmadığını biliyoruz (bkz. Riemann ve Lebesgue İntegrali): her bölüntüde alt Darboux toplamı 0, üst Darboux toplamı 1 dir. Yani Lebesgue integrali Riemann integralinin gerçek bir genişlemesidir.
■

11.5 Sınırlı Yakınsaklık Teoremi

$\{f_n\}$ sınırlı, sonlu destekli, ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan bir dizi ve E üzerinde noktasal olarak $f_n \to f$ olsun. Ne zaman

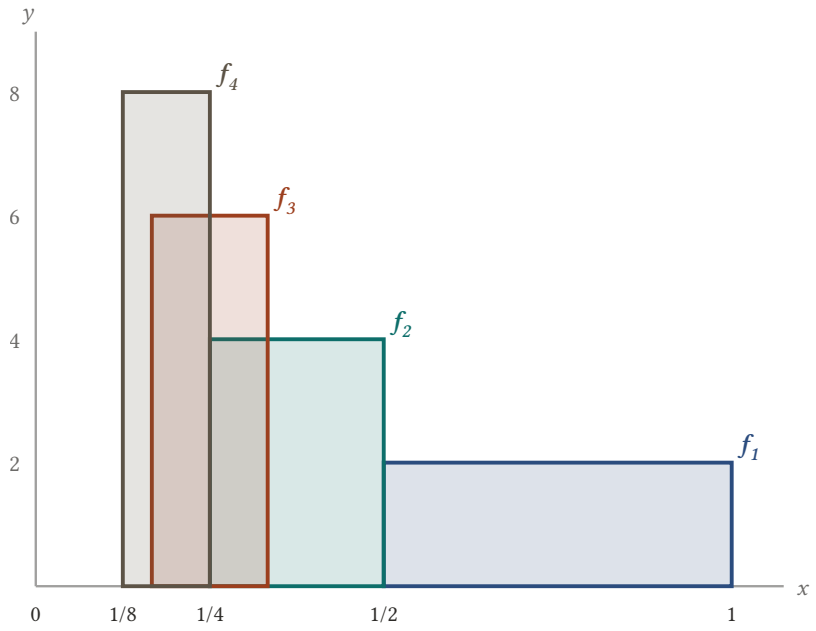
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n = \int_E f$$

yazabiliriz? Bu eşitliğe **integral işareti altında limite geçme** denir. Her zaman geçerli değildir; kütle ya dar bir yere sıkışarak ya da sonsuza kaçarak kaybolabilir.

Örnek 11.2 (Sivrilen Tepeler). $I_n = [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$ ve $f_n = 2n\,\chi_{I_n} : [0,1] \to \mathbb{R}$ olsun. $[0,1]$ üzerinde $f_n \to 0$ noktasal olduğunu ama $\int_{[0,1]} f_n \not\to 0$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
İntegraller. $m(I_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$ olduğundan her n için $\int_{[0,1]} f_n = 2n \cdot \frac{1}{2n} = 1$ dir.
Noktasal limit. $x = 0$ hiçbir I_n de değildir, yani her n için $f_n(0) = 0$. $x \in (0,1]$ ise $n > 1/x$ için $\frac{1}{n} < x$ olur, $x \notin I_n$ ve $f_n(x) = 0$. Demek ki $f_n \to f \equiv 0$ noktasal.
Sonuç. $\lim_n \int_{[0,1]} f_n = 1 \neq 0 = \int_{[0,1]} f$. Tepeler gitgide daralıp yükselir; alanları hep 1 kalır ama sıfıra doğru sıkışarak kaybolur. Dizi düzgün sınırlı değildir: $\sup f_n = 2n \to \infty$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.1: $n = 1, 2, 3, 4$ için $f_n = 2n\chi_{I_n}$, $I_n = [1/(2n), 1/n]$. Her tepenin alanı 1'dir; tepeler daralıp yükselerek sıfıra doğru kayar ve her sabit $x > 0$ noktasını bir süre sonra terk eder.

■

Örnek 11.3 (Sonsuza Kaçan Kütle). $E_n = [n, n+1]$ ve $g_n = n\,\chi_{E_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. $g_n \to 0$ noktasal olduğunu ama integrallerin sıfıra yakınsamadığını gösterin.

Çözüm.
Her g_n sınırlı, ölçülebilir ve E_n dışında sıfır olduğundan sonlu desteklidir; $\int_{\mathbb{R}} g_n = n \cdot m(E_n) = n$. Sabit bir x için $n > x$ olunca $x \notin E_n$, yani $g_n(x) = 0$; dolayısıyla $g_n \to 0$ noktasal. Ama $\int_{\mathbb{R}} g_n = n \to \infty$ ve limit fonksiyonunun integrali 0 dır. Buradaki kütle sonsuza doğru kaçar; ölçüsü sonsuz olan $\mathbb{R}$ bu kaçışa yer açar.
Bu dizi düzgün sınırlı da değildir ($\sup g_n = n$). $h_n = \chi_{[n,n+1]}$ dizisi ise $|\,h_n\,| \le 1$ ile düzgün sınırlıdır, yine $h_n \to 0$ noktasal yakınsar ama $\int_{\mathbb{R}} h_n = 1 \not\to 0$; burada tek kusur $m(\mathbb{R}) = \infty$ olmasıdır.
■

İki örnekteki kusur da, fonksiyonların tek bir sabitle sınırlanamaması ya da tanım kümesinin ölçüsünün sonsuz olmasıdır. Bu iki kusuru dışlamak yeter.

Tanım 11.3 (Düzgün Noktasal Sınırlı Dizi). $f_n : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarından oluşan $\{f_n\}$ dizisi için her n ve her $x \in E$ de $|\,f_n(x)\,| \le M$ olacak biçimde bir $M \ge 0$ varsa diziye **düzgün noktasal sınırlı** (uniformly pointwise bounded) denir.

Yani bütün fonksiyonların grafikleri aynı $[-M, M]$ şeridinde kalır.

Teorem 11.5 (Sınırlı Yakınsaklık Teoremi). *$m(E) < \infty$ ve $\{f_n\}$, E üzerinde ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan düzgün noktasal sınırlı bir dizi olsun. E üzerinde noktasal olarak $f_n \to f$ ise*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Adım 1: Hazırlık. *Her n için $|\, f_n \,| \le M$ olsun. f, ölçülebilir fonksiyonların noktasal limiti olarak ölçülebilirdir (Teorem 8.1) ve $|\, f \,| \le M$ dir. $m(E) < \infty$ olduğundan bütün bu fonksiyonlar sonlu destekli ve integrallenebilirdir. $m(E) = 0$ ya da $M = 0$ ise bütün integraller sıfırdır; bu yüzden $m(E) > 0$ ve $M > 0$ alalım.*
Adım 2: Temel tahmin. *Ölçülebilir her $A \subseteq E$ için Teorem 11.3 ve Sonuç 11.1 ile*

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_n - \int_E f\right| &\le \int_A |\, f_n - f \,| + \int_{E\setminus A} |\, f_n - f \,| \\ &\le \int_A |\, f_n - f \,| + 2M\, m(E \setminus A).\end{aligned}$$

İkinci satırda $E \setminus A$ üzerinde $|\, f_n - f \,| \le 2M$ olduğunu kullandık.
Adım 3: Egoroff ile düzgünlük. *$\varepsilon > 0$ verilsin. $m(E) < \infty$ ve f reel değerli olduğundan Egoroff teoremi (Teorem 9.1), $\{f_n\}$ in A üzerinde f ye düzgün yakınsadığı ve $m(E \setminus A) < \frac{\varepsilon}{4M}$ olan ölçülebilir bir $A \subseteq E$ verir. Düzgün yakınsaklıktan, her $n \ge N$ için A üzerinde $|\, f_n - f \,| < \frac{\varepsilon}{2m(E)}$ olan bir N vardır.*
Adım 4: Sonuç. *$n \ge N$ için monotonluk ve Adım 2 ile*

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_n - \int_E f\right| &\le \frac{\varepsilon}{2m(E)}\, m(A) + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Yani sonlu ölçülü bir kümede, ortak bir sabitle sınırlı ölçülebilir fonksiyonlar için noktasal yakınsaklık integrallerin yakınsaklığına yeter. Riemann integrali için de, limitin Riemann integrallenebilir olduğu bilindiği sürece, aynı sonuç geçerlidir.

Teorem 11.6 (Arzelà Sınırlı Yakınsaklık Teoremi). *$\{f_n\}$, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir fonksiyonlardan oluşan düzgün noktasal sınırlı bir dizi olsun ve Riemann integrallenebilir bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna noktasal yakınsasın. Bu durumda, Riemann integralleri olarak,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

İspat.
$|\, f_n \,| \le M$ ise noktasal limitte $|\, f \,| \le M$ dir, yani $|\, f_n - f \,| \le 2M$. Lemma 11.3 ile f_n ve f ölçülebilir, dolayısıyla $f_n - f$ ölçülebilirdir (Teorem 7.4). Böylece $\{f_n - f\}$, $[a,b]$ üzerinde ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan, düzgün noktasal sınırlı ve 0 a noktasal yakınsayan bir dizidir. Sınırlı Yakınsaklık Teoremi (Teorem 11.5) ve doğrusallık

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{[a,b]} f_n - \int_{[a,b]} f\right) = \lim_{n\to\infty}\int_{[a,b]} (f_n - f) = 0$$

verir. Teorem 11.4 ile f_n ve f nin Lebesgue integralleri Riemann integralleriyle aynıdır; iddia budur.
■

11.6 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda integralin bu bölümde kurulan özellikleri kullanılır.

Alıştırma 11.1 (Düzgün Yakınsaklık ve İntegral). $m(E) < \infty$ ve $\{f_n\}$, E üzerinde sınırlı ölçülebilir fonksiyonlardan oluşan bir dizi olsun. E üzerinde $f_n \to f$ düzgün ise $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$ olduğunu, Sınırlı Yakınsaklık Teoremini ya da Egoroff teoremini kullanmadan, doğrudan gösterin.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: f integrallenebilir. f, ölçülebilir fonksiyonların noktasal limiti olduğundan ölçülebilirdir (Teorem 8.1). Düzgün yakınsaklıktan E üzerinde $|\,f_N - f\,| \le 1$ olan bir N vardır; $|\,f_N\,| \le K$ ise $|\,f\,| \le K+1$, yani f sınırlıdır. $m(E) < \infty$ olduğundan f_n ler ve f sonlu destekli, dolayısıyla integrallenebilirdir (Teorem 11.2).
Adım 2: Tahmin. $\varepsilon_n = \sup_{x\in E}|\,f_n(x) - f(x)\,|$ diyelim; düzgün yakınsaklık $\varepsilon_n \to 0$ demektir. E üzerinde $|\,f_n - f\,| \le \varepsilon_n \chi_E$ olduğundan doğrusallık, Sonuç 11.1 ve monotonluk (Teorem 11.3) ile

$$\Big|\int_E f_n - \int_E f\,\Big| = \Big|\int_E (f_n - f)\,\Big| \le \int_E |\,f_n - f\,| \le \varepsilon_n\, m(E).$$

Adım 3: Sonuç. $m(E)$ sonlu ve $\varepsilon_n \to 0$ olduğundan sağ taraf sıfıra gider; yani $\int_E f_n \to \int_E f$.
■

Alıştırma 11.2 (İntegralle Sayılabilir Toplamsallık). $m(E) < \infty$ ve $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, E nin ayrık ölçülebilir kümelere bir ayrışımı olsun. Yalnız integralin doğrusallığını ve Sınırlı Yakınsaklık Teoremini kullanarak $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Kısmi toplamları integral olarak yazma. Her n için

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}$$

olsun. E_k ler ayrık olduğundan $f_n = \chi_{E_1\cup\ldots\cup E_n}$, yani $0 \le f_n \le 1$ dir. Her $E_k \subseteq E$ sonlu ölçülüdür ve $\int_E \chi_{E_k} = m(E_k)$ dir; doğrusallıktan (Teorem 11.3)

$$\int_E f_n = \sum_{k=1}^{n} m(E_k).$$

Adım 2: Noktasal limit. $x \in E$ ise x tam olarak bir E_k ya aittir; $n \ge k$ için $f_n(x) = 1$ dir. Demek ki E üzerinde $f_n \to \chi_E \equiv 1$ noktasal.
Adım 3: Sınırlı Yakınsaklık Teoremi. $m(E) < \infty$, f_n ler ölçülebilir ve $|\,f_n\,| \le 1$ olduğundan Teorem 11.5 uygulanır:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \chi_E = m(E).$$

■

Alıştırma 11.3 (Kısıtlamanın İntegrali). $f : E \to \mathbb{R}$ sınırlı, sonlu destekli ve ölçülebilir olsun. Ölçülebilir her $A \subseteq E$ için $\int_A f\,|_A = \int_E f \cdot \chi_A$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: İki fonksiyon da integrallenebilir. $f\chi_A$, ölçülebilir iki fonksiyonun çarpımı olarak ölçülebilirdir (Teorem 7.4); $|\,f\chi_A\,| \le |\,f\,|$ olduğundan sınırlıdır ve f nin sıfır olduğu yerde sıfır olduğundan sonlu desteklidir. $f\,|_A$ da A üzerinde sınırlı ve sonlu desteklidir; her c için $\{f\,|_A > c\} = \{f > c\} \cap A$ ölçülebilir olduğundan ölçülebilirdir. Teorem 11.2 ile ikisi de integrallenebilirdir.
Adım 2: Desteğe indirgeme. $f\chi_A$, A dışında sıfırdır, yani $\{f\chi_A \neq 0\} \subseteq A$. Önerme 11.2 $E_0 = A$ ile

$$\int_E f\chi_A = \int_A (f\chi_A)\,|_A$$

verir. A üzerinde $\chi_A = 1$ olduğundan $(f\chi_A)\,|_A = f\,|_A$ dır; böylece $\int_E f\chi_A = \int_A f\,|_A$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 11.4 (Riemann İntegralinde Sınırlı Yakınsaklık). Sınırlı Yakınsaklık Teoremi Riemann integrali için geçerli midir? Yani $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir fonksiyonlardan oluşan düzgün noktasal sınırlı ve noktasal yakınsak her dizinin limiti Riemann integrallenebilir midir ve integraller limite yakınsar mı?

Çözüm.
Genel olarak **hayır**: limit fonksiyonu Riemann integrallenebilir olmayabilir, o zaman limitin Riemann integrali tanımlı bile değildir.
Karşı örnek. $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ sayılabilirdir; $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ bir numaralaması olsun ve

$$f_n = \chi_{\{q_1,\dots,q_n\}} : [0,1]\to\mathbb{R}$$

tanımlayalım.

- Her f_n yalnız sonlu sayıda noktada sıfırdan farklı olan bir basamak fonksiyonudur; Riemann integrallenebilirdir ve $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$ dır.
- Her n için $0\le f_n\le 1$; dizi düzgün noktasal sınırlıdır (ve artandır).
- x rasyonel ise bir k için $x=q_k$ dır ve $n\ge k$ için $f_n(x)=1$; x irrasyonel ise her n için $f_n(x)=0$. Yani $f_n\to\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ noktasal.

Limit Dirichlet fonksiyonudur ve Riemann integrallenebilir değildir: rasyoneller ve irrasyoneller $[0,1]$ de yoğun olduğundan her bölüntüde alt Darboux toplamı 0, üst Darboux toplamı 1 dir. Dolayısıyla Riemann integrali için "noktasal limitin integrali, integrallerin limitidir" ifadesi anlamını yitirir.
Olumlu kısım. Limit fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olduğu ayrıca biliniyorsa sonuç doğrudur; bu Arzelà Sınırlı Yakınsaklık Teoremidir (Teorem 11.6). Lebesgue integralinde ise böyle bir ek varsayım gerekmez: yukarıdaki örnekte $\int_{[0,1]} f_n = 0\to 0 = \int_{[0,1]}\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ (Örnek 11.1), tam Teorem 11.5 in öngördüğü gibi.
■

Alıştırma 11.5 (Hemen Her Yerde Eşit Fonksiyonlar). $f,g:E\to\mathbb{R}$ sınırlı, sonlu destekli ve ölçülebilir olsun ve E üzerinde hemen her yerde $f=g$ olsun. $\int_E f=\int_E g$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Fark fonksiyonu. $h=f-g$ sınırlı, sonlu destekli ve ölçülebilirdir (Teorem 7.4); $|\,h\,|\le M$ olsun. $N=\{x\in E : h(x)\neq 0\}$ ölçülebilirdir ve varsayım gereği $m(N)=0$ dır (Tanım 4.2).
Adım 2: İntegral sıfır ölçülü kümeye iner. $\{h\neq 0\}=N$ olduğundan Önerme 11.2 ile $\int_E h=\int_N h$. N üzerinde $|\,h\,|\le M\chi_N$ olduğundan Sonuç 11.1 ve monotonluk

$$\Big|\int_N h\Big|\le\int_N |\,h\,|\le M\,m(N)=0$$

verir.
Adım 3: Doğrusallık. Teorem 11.3 ile $\int_E f-\int_E g=\int_E h=0$.
■

Alıştırma 11.6 (Basamak Fonksiyonlarıyla Riemann ve Lebesgue). Her basamak fonksiyonunun basit olduğunu ve Riemann integraliyle Lebesgue integralinin eşit olduğunu gösterin. Buradan, sınırlı her $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ için

$$\sup_{\varphi\le f}\int_a^b\varphi\le\underline{I}_{[a,b]}(f)\le\overline{I}_{[a,b]}(f)\le\inf_{\psi\ge f}\int_a^b\psi$$

olduğunu (supremum ve infimum basamak fonksiyonları üzerinden) çıkarın ve Riemann integrallenebilir her sınırlı fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olup iki integralin eşit olduğunu bu yoldan kanıtlayın.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: Basamak fonksiyonu basittir. φ, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ bölüntüsüne göre bir basamak fonksiyonu olsun: (x_{i-1}, x_i) üzerinde $\varphi = c_i$, bölüntü noktalarındaki değerler ise rastgele. Buna göre

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{(x_{i-1},x_i)} + \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k)\chi_{\{x_k\}}.$$

Açık aralıklar ve tek noktalı kümeler ölçülebilir, ikişer ikişer ayrık ve birleşimleri $[a, b]$ dir. φ sonlu sayıda değer alır ve her değer kümesi bu kümelerin sonlu birleşimi olduğundan ölçülebilirdir; yani φ basittir. $m([a, b]) < \infty$ olduğundan sonlu desteklidir.
Adım 2: İki integral eşittir. Lemma 11.1, $m((x_{i-1}, x_i)) = x_i - x_{i-1}$ ve $m(\{x_k\}) = 0$ ile

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Adım 3: Sıkıştırma. $\varphi \le f \le \psi$ basamak fonksiyonları ise Adım 1'e göre bunlar f nin altında ve üstünde kalan sonlu destekli basit fonksiyonlardır; Adım 2 ve alt, üst Lebesgue integrallerinin tanımıyla (Tanım 11.2)

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi = \int_{[a,b]} \varphi &\le \underline{I}_{[a,b]}(f) \\ &\le \overline{I}_{[a,b]}(f) \le \int_{[a,b]} \psi = \int_a^b \psi.\end{aligned}$$

Soldan φ üzerinden supremum, sağdan ψ üzerinden infimum almak istenen zinciri verir.
Adım 4: Riemann integrallenebilir fonksiyonlar. f Riemann integrallenebilir ve $I = \int_a^b f(x)\,dx$ olsun; yani $\sup_P L(f, P) = \inf_P U(f, P) = I$ (Tanım 10.4). Her P bölüntüsü için, (x_{i-1}, x_i) üzerinde $m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f$ ve bölüntü noktalarında f değerini alan φ_P bir basamak fonksiyonudur, $\varphi_P \le f$ ve $\int_a^b \varphi_P = L(f, P)$ dir. Benzer biçimde $\psi_P \ge f$ ve $\int_a^b \psi_P = U(f, P)$. Dolayısıyla

$$I = \sup_P L(f, P) \le \sup_{\varphi \le f} \int_a^b \varphi, \qquad \inf_{\psi \ge f} \int_a^b \psi \le \inf_P U(f, P) = I.$$

Adım 3'teki zincirle birleşince

$$I \le \underline{I}_{[a,b]}(f) \le \overline{I}_{[a,b]}(f) \le I$$

olur. Yani f Lebesgue integrallenebilirdir ve $\int_{[a,b]} f = I = \int_a^b f(x)\,dx$ dir.
■

Sınırlı fonksiyonlar için kurduğumuz integral, sıradaki adımın tuğlasıdır: Negatif Olmayan Fonksiyonların İntegrali bölümünde integrali, sınırlı ve sonlu destekli fonksiyonlarla alttan yaklaşarak sınırsız fonksiyonlara ve sonsuz ölçülü kümelere genişleteceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

12. Negatif Olmayan Fonksiyonların İntegrali

Sınırlı ve sonlu destekli fonksiyonların integralini biliyoruz. Şimdi sınırlılık ve sonlu destek koşullarını bırakıp $[0,\infty]$ değerli her ölçülebilir fonksiyona bir integral atıyoruz. Fikir basit: fonksiyonu alttan, integralini zaten bildiğimiz fonksiyonlarla yoklamak ve bu integrallerin supremumunu almak.
Bu yolla gelen integral hem doğrusal ve monoton olur hem de limitlerle çok iyi geçinir. Bölümün iki temel sonucu Fatou lemması ve Monoton Yakınsaklık Teoremi'dir; ikisi de integral ile limitin yer değiştirmesini hiçbir sınırlılık varsayımı olmadan, yalnız negatif olmama sayesinde sağlar.

12.1 Tanım

Bir h fonksiyonu, $\{x \in E : h(x) \neq 0\}$ kümesinin ölçüsü sonluysa **sonlu destekli** adını alır. Bu bölüm boyunca E ölçülebilir bir kümedir ve

$$\mathcal{F}_E = \{\, h : E \to \mathbb{R} : h \ \text{ ölçülebilir, sınırlı, sonlu destekli, } \ h \geq 0 \,\}$$

yazarız. $\mathcal{F}_E$ deki fonksiyonların integrali doğrusal ve monotondur (Teorem 11.3). Ayrıca $[0,\infty]$ içindeki işlemlerde $0 \cdot \infty = 0$ ve her $c \in [0,\infty]$ için $c + \infty = \infty$ kabul ederiz.

Tanım 12.1 (Negatif Olmayan Fonksiyonun İntegrali). $f : E \to [0,\infty]$ ölçülebilir olsun. f nin E üzerindeki **integrali**

$$\int_E f = \sup\Big\{ \int_E h : h \in \mathcal{F}_E,\ 0 \leq h \leq f \ \ (\ E \ \text{ üzerinde}) \Big\}$$

genişletilmiş reel sayısıdır. Ölçülebilir $A \subseteq E$ için $\int_A f$, f nin A ya kısıtlanışının integralidir.

Yani f nin integrali, f nin altında kalan "iyi" fonksiyonların integrallerinin en küçük üst sınırıdır; değeri ∞ olabilir.
İki gözlem hemen çıkar. Birincisi, $f \in \mathcal{F}_E$ ise supremum $h = f$ de erişilir ve monotonluktan başka bir h daha büyük integral veremez; yani yeni tanım eskisiyle çelişmez. Özel olarak $A \subseteq E$ ölçülebilir, $m(A) < \infty$ ve $c \geq 0$ ise $\int_E c\,\chi_A = c\,m(A)$ dır. İkincisi, E üzerinde $0 \leq f \leq g$ ise f nin altında kalan her h, g nin de altında kalır; dolayısıyla

$$\int_E f \leq \int_E g. \tag{1}$$

12.2 Chebychev Eşitsizliği

Negatif olmayan bir fonksiyonun integrali, fonksiyonun büyük olduğu kümenin ölçüsünü kontrol eder.

Lemma 12.1 (Chebychev Eşitsizliği). *$f : E \to [0,\infty]$ ölçülebilir olsun. Her $\lambda > 0$ için*

$$m\{x \in E : f(x) \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_E f. \tag{2}$$

> ***İspat.***
> *$E_\lambda = \{x \in E : f(x) \geq \lambda\}$ diyelim; f ölçülebilir olduğundan E_λ ölçülebilirdir. E_λ üzerinde $f \geq \lambda$ ve $f \geq 0$ olduğundan E üzerinde $\lambda\,\chi_{E_\lambda} \leq f$ dir.*
> ***Durum 1: $m(E_\lambda) < \infty$.*** *Bu durumda $h = \lambda\,\chi_{E_\lambda}$ sınırlı, ölçülebilir ve sonlu destekli, yani $\mathcal{F}_E$ dedir ve $0 \leq h \leq f$ dir. İntegralin tanımından*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lambda\, m(E_\lambda) = \int_E h \le \int_E f.$$

Durum 2: $\boldsymbol{m(E_\lambda) = \infty}$. *Her* n *için* $E_{\lambda,n} = E_\lambda \cap [-n, n]$ *ve* $\psi_n = \lambda\, \chi_{E_{\lambda,n}}$ *alalım.* $m(E_{\lambda,n}) \le 2n$ *olduğundan* $\psi_n \in \mathcal{F}_E$, $0 \le \psi_n \le f$ *ve* $\int_E \psi_n = \lambda\, m(E_{\lambda,n})$ *dir.* $\{E_{\lambda,n}\}_n$ *artan bir topluluktur ve birleşimi* E_λ *dır; ölçünün sürekliliğinden (Teorem 4.3)*

$$\infty = \lambda\, m(E_\lambda) = \lim_{n\to\infty} \lambda\, m(E_{\lambda,n}) = \lim_{n\to\infty} \int_E \psi_n \le \int_E f.$$

Demek ki $\int_E f = \infty$ *dur ve (2) nin iki tarafı da* ∞ *olur.*
■

Yani f nin en az λ olduğu küme, integral sonlu kaldıkça, λ büyüdükçe $1/\lambda$ hızıyla küçülür.
Chebychev eşitsizliğinin ilk önemli sonucu, integrali sıfır olan fonksiyonları tam olarak betimlemesidir.

Teorem 12.1 (İntegrali Sıfır Olan Fonksiyonlar). *$f : E \to [0, \infty]$ ölçülebilir olsun. $\int_E f = 0$ olması için gerek ve yeter koşul E üzerinde hemen her yerde $f = 0$ olmasıdır.*

İspat.
(⇒) $\int_E f = 0$ *olsun. Her* n *için Chebychev eşitsizliği (Lemma 12.1)* $\lambda = 1/n$ *ile*

$$m\{x \in E : f(x) \ge 1/n\} \le n \int_E f = 0$$

verir.

$$\{x \in E : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) \ge 1/n\}$$

olduğundan sayılabilir alt toplamsallık (Teorem 1.3) bu kümenin ölçüsünün 0 *olduğunu gösterir; yani hemen her yerde* $f = 0$ *dır (Tanım 4.2).*
(⇐) $Z = \{x \in E : f(x) > 0\}$ *için* $m(Z) = 0$ *olsun.* $h \in \mathcal{F}_E$, $0 \le h \le f$ *ve* M, h *nin bir üst sınırı ise* h, Z *dışında sıfırdır; dolayısıyla* E *üzerinde* $0 \le h \le M\chi_Z$ *dir. Sınırlı fonksiyonların integralinin monotonluğundan (Teorem 11.3)*

$$0 \le \int_E h \le M\, m(Z) = 0.$$

Supremumu alınan bütün integraller sıfır olduğundan $\int_E f = 0$ *dır.*
■

12.3 Doğrusallık ve Monotonluk

Sınırlı durumdaki doğrusallık, supremum yoluyla negatif olmayan fonksiyonlara taşınır. Önce bir ölçülebilirlik notu: $f, g : E \to [0, \infty]$ ölçülebilirse $f + g$ iyi tanımlıdır ($-\infty$ değeri olmadığı için $\infty - \infty$ belirsizliği çıkmaz) ve her c için

$$\{f + g > c\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \big(\{f > q\} \cap \{g > c - q\} \big)$$

olduğundan ölçülebilirdir. Pozitif sabitle çarpım da ölçülebilirliği korur.

Teorem 12.2 (Doğrusallık ve Monotonluk). *$f, g : E \to [0, \infty]$ ölçülebilir ve $\alpha, \beta > 0$ olsun.*

- ***Doğrusallık:*** $\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$
- ***Monotonluk:*** *E üzerinde $f \le g$ ise* $\int_E f \le \int_E g.$

 CC BY-NC-SA 4.0

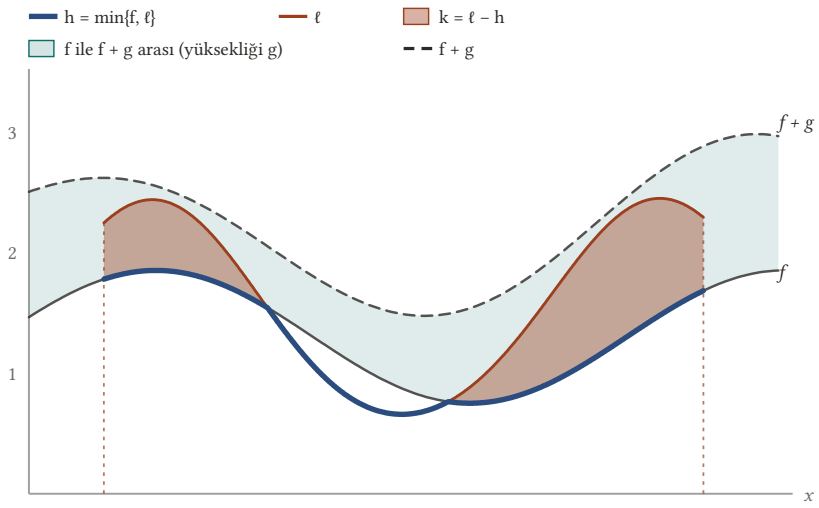
İspat.
Monotonluk (1) ile gösterildi. Doğrusallığı iki adımda kanıtlarız.
Adım 1: Pozitif katla çarpım. *$h \mapsto \alpha h$ eşlemesi, $0 \le h \le f$ koşulunu sağlayan $h \in \mathcal{F}_E$ fonksiyonlarını $0 \le k \le \alpha f$ koşulunu sağlayan $k \in \mathcal{F}_E$ fonksiyonlarına birebir ve örten biçimde götürür (tersi $k \mapsto k/\alpha$). $\mathcal{F}_E$ de $\int_E \alpha h = \alpha \int_E h$ olduğundan supremumlar da $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f$ ilişkisini sağlar. Böylece $\alpha = \beta = 1$ durumunu kanıtlamak yeter.*
Adım 2a: $\int_E f + \int_E g \le \int_E (f+g)$. *$h, k \in \mathcal{F}_E$, $0 \le h \le f$ ve $0 \le k \le g$ olsun. O zaman $h + k \in \mathcal{F}_E$ ve $0 \le h + k \le f + g$ dir; $\mathcal{F}_E$ deki doğrusallıktan*

$$\int_E h + \int_E k = \int_E (h+k) \le \int_E (f+g).$$

Soldaki toplamda önce h, sonra k üzerinden supremum almak istenen eşitsizliği verir.
Adım 2b: $\int_E (f+g) \le \int_E f + \int_E g$. *$\ell \in \mathcal{F}_E$ ve $0 \le \ell \le f + g$ olsun. $\int_E \ell \le \int_E f + \int_E g$ olduğunu göstermek yeter. E üzerinde*

$$h = \min\{f, \ell\}, \qquad k = \ell - h$$

tanımlayalım. h ölçülebilir, $0 \le h \le \ell$ olduğundan sınırlı ve sonlu destekli, yani $h \in \mathcal{F}_E$ ve $h \le f$ dir. k da ölçülebilir, $0 \le k \le \ell$ ve dolayısıyla $k \in \mathcal{F}_E$ dir. Ayrıca $k \le g$ dir: $\ell(x) \le f(x)$ olan noktada $k(x) = 0 \le g(x)$; $f(x) < \ell(x)$ olan noktada $f(x)$ sonludur ve $k(x) = \ell(x) - f(x) \le g(x)$ dir.



Şekil 12.1: $\ell \le f + g$ fonksiyonunun ayrışımı. $h = \min\{f, \ell\}$ kalın çizgidir; $k = \ell - h$ yalnız ℓ'nin f'yi aştığı yerlerde sıfırdan farklıdır (turuncu). Turuncu bölge, yüksekliği g olan yeşil şeridin içinde kalır; yani $k \le g$.

Bu durumda $\ell = h + k$ ve $\mathcal{F}_E$ deki doğrusallıkla

$$\int_E \ell = \int_E h + \int_E k \le \int_E f + \int_E g.$$

ℓ üzerinden supremum alınırsa istenen eşitsizlik çıkar. Adım 2a ile 2b birlikte eşitliği verir.
■

Yani negatif olmayan fonksiyonlarda integral toplamı toplamlara, pozitif katı katlara taşır. $0 \cdot \infty = 0$ kuralıyla sonuç $\alpha = 0$ ya da $\beta = 0$ için de geçerlidir. Özel olarak integrallenebilir (integrali sonlu) iki fonksiyonun toplamının integrali de sonludur.
Doğrusallıktan, integralin tanım kümesine göre toplamsallığı çıkar.

Teorem 12.3 (Tanım Kümesine Göre Toplamsallık). *$f : E \to [0, \infty]$ ölçülebilir olsun.*

 CC BY-NC-SA 4.0

- *Ölçülebilir her $A \subseteq E$ için* $\int_A f = \int_E f \cdot \chi_A$ *dır.*
- *$A, B \subseteq E$ ayrık ve ölçülebilir ise* $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$ *dir.*
- *$E_0 \subseteq E$ ölçülebilir ve $m(E \setminus E_0) = 0$ ise* $\int_E f = \int_{E_0} f$ *dir.*

> ***İspat.***
> ***Birinci kısım.*** *$h \in \mathcal{F}_A$ ve A üzerinde $0 \le h \le f$ olsun. h yi $E \setminus A$ üzerinde 0 diye genişletirsek elde edilen $\hat{h}$ fonksiyonu $\mathcal{F}_E$ dedir, $0 \le \hat{h} \le f\chi_A$ dır. $E_0 = \{h \neq 0\} \subseteq A$ sonlu ölçülü olduğundan sınırlı fonksiyonlar için desteğe indirgeme önermesine göre $\int_E \hat{h} = \int_{E_0} \hat{h} = \int_{E_0} h = \int_A h$ dir. Tersine, $k \in \mathcal{F}_E$ ve $0 \le k \le f\chi_A$ ise k, A dışında sıfırdır; A ya kısıtlanışı $\mathcal{F}_A$ dadır, f nin altındadır ve aynı integrale sahiptir. İki supremum aynı sayılar kümesi üzerinden alındığından eşittir.*
> ***İkinci kısım.*** *$A \cup B$ üzerinde $f = f\chi_A + f\chi_B$ dir. Birinci kısım (E yerine $A \cup B$ ile) ve doğrusallık (Teorem 12.2) sonucu verir.*
> ***Üçüncü kısım.*** *İkinci kısımdan $\int_E f = \int_{E_0} f + \int_{E\setminus E_0} f$ dir. $E \setminus E_0$ sıfır ölçülü olduğundan f orada hemen her yerde sıfırdır ve Teorem 12.1 son terimi 0 yapar.*
> ■

Yani integral, tanım kümesinin ayrık parçaları üzerinde toplanır ve sıfır ölçülü bir kümeyi atmak integrali değiştirmez.

12.4 Fatou Lemması ve Monoton Yakınsaklık

Şimdi limitlere geçiyoruz. Negatif olmayan fonksiyonlarda integral, noktasal limitte "kütle kaybedebilir" ama hiçbir zaman kütle kazanamaz.

Lemma 12.2 (Fatou Lemması). *$\{f_n\}$, E üzerinde tanımlı $[0,\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun ve E üzerinde noktasal olarak $f_n \to f$ olsun. O zaman*

$$\int_E f \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n. \tag{3}$$

> ***İspat.***
> *f, ölçülebilir fonksiyonların noktasal limiti olduğundan ölçülebilirdir (Teorem 8.1) ve negatif değildir. İntegralin tanımı gereği, $0 \le h \le f$ koşulunu sağlayan her $h \in \mathcal{F}_E$ için*
>
> $$\int_E h \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$
>
> *olduğunu göstermek yeter. Böyle bir h ve onun bir üst sınırı M alalım.*
> ***Adım 1: Sonlu ölçülü kümeye inme.*** *$E_0 = \{x \in E : h(x) \neq 0\}$ için $m(E_0) < \infty$ dır. h, E_0 dışında sıfır olduğundan sınırlı fonksiyonlar için desteğe indirgeme önermesine göre $\int_E h = \int_{E_0} h$; tanım kümesine göre toplamsallıktan (Teorem 12.3) de $\int_{E_0} f_n \le \int_E f_n$ dir. Bu yüzden E yerine E_0 alarak $m(E) < \infty$ varsayabiliriz.*
> ***Adım 2: Kesilmiş dizi.*** *Her n için E üzerinde*
>
> $$h_n = \min\{h, f_n\}$$
>
> *tanımlayalım. h_n ölçülebilir ve $0 \le h_n \le M$ dir; yani $\{h_n\}$, sonlu ölçülü bir kümede düzgün sınırlı bir ölçülebilir fonksiyon dizisidir. Her $x \in E$ için $h(x)$ sonlu, $f_n(x) \to f(x)$ ve $h(x) \le f(x)$ olduğundan*
>
> $$h_n(x) = \min\{h(x), f_n(x)\} \to \min\{h(x), f(x)\} = h(x).$$
>
> ***Adım 3: Sınırlı yakınsaklık.*** *Sınırlı Yakınsaklık Teoremi'nden (Teorem 11.5) $\lim_n \int_E h_n = \int_E h$ dir. Öte yandan her n için $h_n \in \mathcal{F}_E$ ve $h_n \le f_n$ olduğundan tanım gereği $\int_E h_n \le \int_E f_n$ dir. Buna göre*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_E h = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

■

Yani limit fonksiyonun integrali, integrallerin alt limitini aşamaz. Eşitsizlik gerçekten kesin olabilir; kütle ya bir noktaya sıkışarak ya da sonsuza kaçarak kaybolur.

Örnek 12.1 (Bir Noktaya Sıkışan Kütle). $[0,1]$ üzerinde $f_n = n\,\chi_{(0,1/n]}$ dizisi için Fatou lemmasındaki eşitsizliğin kesin olduğunu gösterin.

Çözüm.
f_n sınırlı ve sonlu destekli olduğundan

$$\int_{[0,1]} f_n = n \cdot m\left(\,(0,1/n]\,\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Noktasal limit sıfırdır: $f_n(0) = 0$ ve her $x \in (0,1]$ için $n > 1/x$ olunca $x \notin (0,1/n]$, yani $f_n(x) = 0$ olur. Dolayısıyla $f = 0$ ve

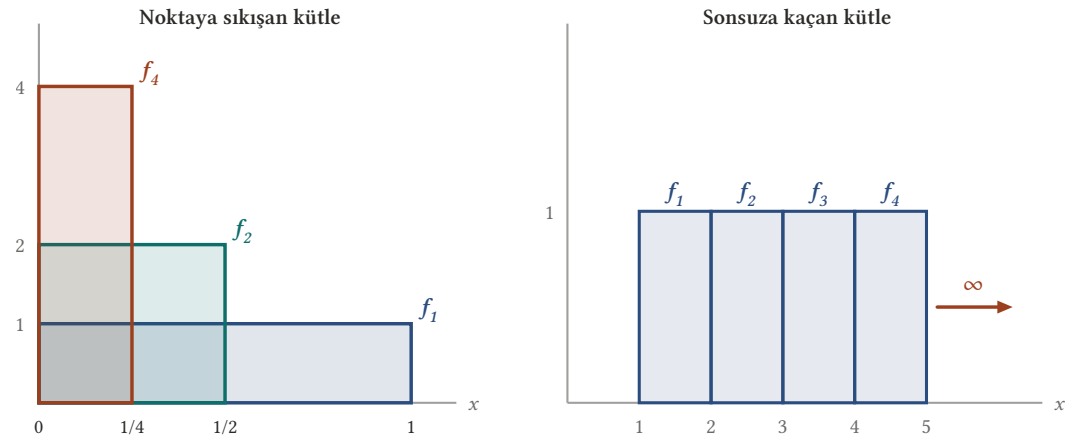
$$\int_{[0,1]} f = 0 < 1 = \liminf_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n.$$

■

Örnek 12.2 (Sonsuza Kaçan Kütle). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ dizisi için Fatou lemmasındaki eşitsizliğin kesin olduğunu gösterin.

Çözüm.
Her n için $\int_{\mathbb{R}} f_n = m([n,n+1]) = 1$ dir. Her $x \in \mathbb{R}$ için $n > x$ olunca $f_n(x) = 0$ olduğundan noktasal limit $f = 0$ dır. Buna göre

$$\int_{\mathbb{R}} f = 0 < 1 = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$



Şekil 12.2: Fatou lemmasında kesin eşitsizliğe yol açan iki durum. Solda $n\chi_{(0,\,1/n]}$ dikdörtgenleri daralıp yükselir, sağda $\chi_{[n,\,n+1]}$ birim kareleri sağa kayar. Her f_n'nin integrali 1'dir; ama iki dizinin de noktasal limiti sıfırdır, kütle limitte kaybolur.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Dizi artan olduğunda böyle bir kayıp mümkün değildir ve Fatou eşitsizliği eşitliğe döner.

Teorem 12.4 (Monoton Yakınsaklık Teoremi). *$\{f_n\}$, E üzerinde $[0,\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların artan bir dizisi olsun ve E üzerinde noktasal olarak $f_n \to f$ olsun. O zaman*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

İspat.
Fatou lemmasından (Lemma 12.2) $\int_E f \le \liminf_n \int_E f_n$ dir. Öte yandan dizi artan olduğundan her n için E üzerinde $f_n \le f$ dir; monotonluktan (Teorem 12.2) $\int_E f_n \le \int_E f$ ve dolayısıyla

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \le \int_E f \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Alt limit üst limiti aşamayacağından hepsi eşittir; limit vardır ve $\int_E f$ ye eşittir.
■

Yani negatif olmayan fonksiyonlar artarak yakınsıyorsa integraller de limitin integraline artarak yakınsar; hiçbir sınırlılık varsayımı gerekmez.

Örnek 12.3 (Sabit Fonksiyonun Doğru Üzerindeki İntegrali). Monoton Yakınsaklık Teoremi'ni kullanarak $\int_{\mathbb{R}} 1 = \infty$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
$f_n = \chi_{[-n,n]}$ dizisi artandır ve her x için $\mid x \mid \le n$ olunca $f_n(x) = 1$ olduğundan noktasal olarak 1 e yakınsar. Her n için $\int_{\mathbb{R}} f_n = m([-n,n]) = 2n$ dir. Monoton Yakınsaklık Teoremi'nden (Teorem 12.4)

$$\int_{\mathbb{R}} 1 = \lim_{n\to\infty} 2n = \infty.$$

■

Monoton Yakınsaklık Teoremi, terimleri negatif olmayan serilerde integral ile toplamın yer değiştirmesine izin verir.

Sonuç 12.1 (Serilerin Terim Terim İntegrali). *$\{u_n\}$, E üzerinde $[0,\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve E üzerinde noktasal olarak $f = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ olsun. O zaman*

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n.$$

İspat.
Terimler negatif olmadığından her x için kısmi toplamlar $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ artan biçimde $f(x) \in [0,\infty]$ değerine gider. Her s_n ölçülebilir ve negatif değildir; doğrusallıktan (Teorem 12.2, tümevarımla)

$$\int_E s_n = \sum_{k=1}^{n} \int_E u_k$$

dir. Monoton Yakınsaklık Teoremi (Teorem 12.4) sol tarafın limitinin $\int_E f$, sağ tarafın limiti ise tanım gereği $\sum_{k=1}^{\infty} \int_E u_k$ olduğunu verir.
■

Yani terimleri negatif olmayan bir fonksiyon serisi, hiçbir yakınsaklık koşulu aranmadan terim terim integrallenebilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

12.5 İntegrallenebilirlik

İntegrali sonlu olan fonksiyonlar ayrı bir ad alır; genel Lebesgue integralini bu sınıf üzerine kuracağız.

Tanım 12.2 (Negatif Olmayan İntegrallenebilir Fonksiyon). Ölçülebilir $f : E \to [0, \infty]$ fonksiyonu $\int_E f < \infty$ ise E üzerinde **integrallenebilir** (integrable) adını alır.

Yani integrallenebilirlik, integralin sonlu bir sayı olmasıdır. Doğrusallıktan iki integrallenebilir fonksiyonun toplamı da integrallenebilirdir.

Teorem 12.5 (İntegrallenebilir Fonksiyon Hemen Her Yerde Sonludur). *$f : E \to [0, \infty]$ integrallenebilir ise E üzerinde hemen her yerde sonludur.*

> ***İspat.***
> *Her n için $\{f = \infty\} \subseteq \{f \geq n\}$ dir (kümeler E içinde alınır). Monotonluk ve Chebychev eşitsizliğinden (Lemma 12.1)*
>
> $$m\{x \in E : f(x) = \infty\} \leq \frac{1}{n} \int_E f$$
>
> *bulunur. $\int_E f$ sonlu olduğundan sağ taraf $n \to \infty$ için 0 a gider; dolayısıyla f nin sonsuz olduğu kümenin ölçüsü 0 dır.*
> ■

Monoton Yakınsaklık Teoremi, integralleri sınırlı kalan artan dizilerin integrallenebilir bir limite yakınsadığını da söyler.

Lemma 12.3 (Beppo Levi Lemması). *$\{f_n\}$, E üzerinde $[0, \infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların artan bir dizisi ve $\left\{ \int_E f_n \right\}$ integral dizisi sınırlı olsun. O zaman $\{f_n\}$, E üzerinde noktasal olarak ölçülebilir bir $f : E \to [0, \infty]$ fonksiyonuna yakınsar, f integrallenebilirdir ve*

$$\lim_{n \to \infty} \int_E f_n = \int_E f < \infty.$$

> ***İspat.***
> *Her $x \in E$ için $\{f_n(x)\}$, $[0, \infty]$ içinde artan bir dizi olduğundan bir limite sahiptir; $f(x) = \lim_n f_n(x)$ diyelim. f ölçülebilir fonksiyonların noktasal limiti olarak ölçülebilirdir (Teorem 8.1) ve negatif değildir. Monoton Yakınsaklık Teoremi'nden (Teorem 12.4) $\int_E f_n \to \int_E f$ dir. $\left\{ \int_E f_n \right\}$ bir C sayısıyla sınırlı olduğundan limiti de en çok C dir; yani $\int_E f \leq C < \infty$ ve f integrallenebilirdir.*
> ■

Yani artan bir dizide integrallerin sınırlı kalması, hem limitin var olmasına hem de limitin integrallenebilir olmasına yeter.

Hemen her yerde yeterlidir. $E_0 \subseteq E$ ölçülebilir ve $m(E \setminus E_0) = 0$ ise bir fonksiyon E üzerinde ancak ve ancak E_0 üzerinde ölçülebilirdir ve Teorem 12.3 gereği $\int_E f = \int_{E_0} f$ dir. Bu yüzden Fatou lemmasında, Monoton Yakınsaklık Teoremi'nde ve Beppo Levi lemmasında noktasal yakınsaklık (ve artanlık) yerine hemen her yerde yakınsaklık yeterlidir: kural dışı noktaları içeren sıfır ölçülü küme atılır, sonuç kalan küme üzerinde uygulanır. Aynı nedenle ve Teorem 12.5 sayesinde integrallenebilir fonksiyonların bir dizisini, genelliği bozmadan, reel değerli kabul edebiliriz. Bu, hemen her yerde eşit fonksiyonları özdeş saymakla uyumludur.

12.6 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar tanımı, doğrusallığı ve iki limit teoremini pekiştirir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 12.1 (İntegral Yoluyla Sayılabilir Toplamsallık). $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, ölçülebilir E kümesinin ayrık ölçülebilir kümelere bir ayrışması olsun. Yalnız Monoton Yakınsaklık Teoremi'ni ve integralin doğrusallığını kullanarak

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Karakteristik fonksiyonun integrali. Ölçülebilir her $A \subseteq E$ için $\int_E \chi_A = m(A)$ dır. $m(A) < \infty$ ise bu, tanımdan sonraki gözlemdir. $m(A) = \infty$ ise Chebychev eşitsizliği (Lemma 12.1) $\lambda = 1$ ile

$$\infty = m(A) = m\{x \in E : \chi_A(x) \geq 1\} \leq \int_E \chi_A$$

verir; iki taraf da ∞ dur.
Adım 2: Karakteristik fonksiyonlar. Her n için $s_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}$ olsun. Kümeler ayrık olduğundan $s_n = \chi_{E_1 \cup \ldots \cup E_n}$ dir; $\{s_n\}$ artandır ve her $x \in E$ tam bir E_k ya ait olduğundan $s_n(x)$, $n \geq k$ için 1 olur. Yani E üzerinde noktasal olarak $s_n \to \chi_E = 1$ dir.
Adım 3: İntegraller. Adım 1 ve doğrusallıktan (Teorem 12.2)

$$\int_E s_n = \sum_{k=1}^{n} \int_E \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{n} m(E_k).$$

Monoton Yakınsaklık Teoremi (Teorem 12.4) sol tarafın $\int_E \chi_E = m(E)$ ye yakınsadığını söyler; sağ taraf ise $[0, \infty]$ içinde serinin toplamına yakınsayan kısmi toplamdır. Limitte, $m(E) = \infty$ durumu da dahil,

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

■

Alıştırma 12.2 (Kuvvet Fonksiyonunun Birim Aralıktaki İntegrali). $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $0 < x \leq 1$ için $g(x) = x^{\alpha}$ ve $g(0) = 0$ diye tanımlanan fonksiyon için $\int_{[0,1]} g$ integralini hesaplayın.

Çözüm.
Adım 1: Artan kesilmiş dizi. g negatif değildir ve $(0, 1]$ üzerinde sürekli olduğundan ölçülebilirdir. Her n için $g_n = g\,\chi_{[1/n,\,1]}$ alalım. $g \geq 0$ ve $[1/n, 1] \subseteq [1/(n+1), 1]$ olduğundan $\{g_n\}$ artandır. $g_n(0) = 0 = g(0)$ ve her $x \in (0, 1]$ için $n \geq 1/x$ olunca $g_n(x) = g(x)$ dir; yani noktasal olarak $g_n \to g$.
Adım 2: Her terimin integrali. g, $[1/n, 1]$ üzerinde sürekli, dolayısıyla sınırlı ve Riemann integrallenebilirdir; Lebesgue integrali Riemann integraline eşittir (Teorem 11.4). Tanım kümesine göre toplamsallıkla (Teorem 12.3)

$$\int_{[0,1]} g_n = \int_{1/n}^{1} x^{\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1-n^{-(\alpha+1)}}{\alpha+1}, & \alpha \neq -1, \\ \ln n, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Adım 3: Limit. Monoton Yakınsaklık Teoremi'nden (Teorem 12.4) $\int_{[0,1]} g = \lim_n \int_{[0,1]} g_n$ dir.

- $\alpha > -1$ ise $\alpha + 1 > 0$ ve $n^{-(\alpha+1)} \to 0$; limit $\dfrac{1}{\alpha+1}$ dir.
- $\alpha = -1$ ise $\ln n \to \infty$.
- $\alpha < -1$ ise $-(\alpha+1) > 0$, $n^{-(\alpha+1)} \to \infty$ ve payda negatif olduğundan terim $+\infty$ a gider.

Sonuç olarak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{[0,1]} g = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}, \alpha > -1, \\ \infty, \quad \alpha \leq -1. \end{cases}$$

Örneğin $\alpha = -\frac{1}{2}$ için integral 2 dir.
■

Alıştırma 12.3 (Kuvvet Fonksiyonunun Sonsuz Aralıktaki İntegrali). $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $x \geq 1$ için $h(x) = x^\alpha$ diye tanımlanan fonksiyon için $\int_{[1,\infty)} h$ integralini hesaplayın.

Çözüm.
Adım 1: Artan kesilmiş dizi. h sürekli ve pozitiftir. $h_n = h\,\chi_{[1,n]}$ dizisi artandır ve her $x \geq 1$ için $n \geq x$ olunca $h_n(x) = h(x)$ dir; yani noktasal olarak $h_n \to h$.
Adım 2: Her terimin integrali. h, $[1, n]$ üzerinde sürekli olduğundan Lebesgue integrali Riemann integraline eşittir (Teorem 11.4):

$$\int_{[1,\infty)} h_n = \int_1^n x^\alpha \, dx = \begin{cases} \frac{n^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}, \alpha \neq -1, \\ \ln n, \quad \alpha = -1. \end{cases}$$

Adım 3: Limit. Monoton Yakınsaklık Teoremi'nden (Teorem 12.4) $\int_{[1,\infty)} h = \lim_n \int_{[1,\infty)} h_n$ dir.

- $\alpha < -1$ ise $n^{\alpha+1} \to 0$ ve limit $\dfrac{-1}{\alpha+1} = \dfrac{1}{|\,\alpha\,| - 1}$ dir.
- $\alpha = -1$ ise $\ln n \to \infty$.
- $\alpha > -1$ ise $n^{\alpha+1} \to \infty$ ve payda pozitif olduğundan limit ∞ dur.

Sonuç olarak

$$\int_{[1,\infty)} h = \begin{cases} \frac{-1}{\alpha+1}, \alpha < -1, \\ \infty, \quad \alpha \geq -1. \end{cases}$$

Örneğin $\alpha = -2$ için integral 1 dir. Önceki alıştırmayla karşılaştırınca: x^α, sıfır yakınında $\alpha > -1$ için, sonsuzda ise $\alpha < -1$ için integrallenebilirdir; $\alpha = -1$ iki yerde de sınırdır.
■

Alıştırma 12.4 (Uç Noktalar İntegrali Değiştirmez). $f : [a, b] \to [0, \infty]$ ölçülebilir ise $\int_{[a,b]} f = \int_{(a,b)} f$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
$[a, b] = (a, b) \cup \{a, b\}$ ayrık bir birleşimdir ve iki küme de ölçülebilirdir. $\{a, b\}$ sonlu bir küme olduğundan ölçüsü 0 dır (her nokta uzunluğu sıfır olan bir kapalı aralıktır, bkz. Teorem 1.1). Böylece $E_0 = (a, b)$ için $m([a, b] \setminus E_0) = 0$ dır.
Tanım kümesine göre toplamsallığın (Teorem 12.3) üçüncü kısmından

$$\int_{[a,b]} f = \int_{(a,b)} f.$$

Bu, f uç noktalarda ∞ değerini alsa bile doğrudur: sıfır ölçülü bir kümede her fonksiyon hemen her yerde sıfırdır ve oradaki integral Teorem 12.1 gereği 0 dır.
■

Alıştırma 12.5 (Negatif Olmayan Terimli Serinin İntegrali). $\{u_n\}$, E üzerinde $[0, \infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve $s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ olsun. $\int_E s = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n$ olduğunu gösterin.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: Kısmi toplamlar. $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ olsun. Negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların sonlu toplamı olarak s_n ölçülebilirdir ve $[0,\infty]$ değerlidir. Terimler negatif olmadığından her x için $\{s_n(x)\}$ artandır ve $[0,\infty]$ içinde $s(x)$ e yakınsar. Özel olarak s ölçülebilirdir (Teorem 8.1).
Adım 2: Sonlu toplamlar. Doğrusallık (Teorem 12.2) ve n üzerinden tümevarımla

$$\int_E s_n = \sum_{k=1}^{n} \int_E u_k.$$

Adım 3: Limit. Monoton Yakınsaklık Teoremi'nden (Teorem 12.4) $\int_E s_n \to \int_E s$ dir. Sağ taraf, terimleri negatif olmayan $\sum_k \int_E u_k$ serisinin kısmi toplamıdır ve $[0,\infty]$ içinde serinin toplamına yakınsar. İki limit eşit olduğundan

$$\int_E s = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n.$$

Bu, Sonuç 12.1 ifadesinin kendisidir.
■

Alıştırma 12.6 (Kapalı Aralıkta Sıfır İntegral). $f : [a,b] \to [0,\infty]$ ölçülebilir olsun. $\int_{[a,b]} f = 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $[a,b]$ üzerinde hemen her yerde $f = 0$ olması olduğunu gösterin.

Çözüm.
($\Rightarrow$) $\int_{[a,b]} f = 0$ olsun. Her n için Chebychev eşitsizliği (Lemma 12.1) $\lambda = 1/n$ ile

$$m\{x \in [a,b] : f(x) \geq 1/n\} \leq n \int_{[a,b]} f = 0$$

verir. f nin pozitif olduğu küme bu kümelerin sayılabilir birleşimidir:

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f(x) \geq 1/n\}.$$

Sayılabilir alt toplamsallıktan (Teorem 1.3) ölçüsü 0 dır; yani hemen her yerde $f = 0$ dır.
($\Leftarrow$) $Z = \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$ sıfır ölçülü olsun. h sınırlı, ölçülebilir, sonlu destekli ve $0 \leq h \leq f$ ise h, Z dışında sıfırdır; M bir üst sınır olmak üzere $0 \leq h \leq M\chi_Z$ ve sınırlı fonksiyonların integralinin monotonluğundan (Teorem 11.3)

$$0 \leq \int_{[a,b]} h \leq M\, m(Z) = 0.$$

İntegralin tanımındaki supremum yalnız sıfırlardan oluştuğundan $\int_{[a,b]} f = 0$ dır.
■

Alıştırma 12.7 (Genel Katsayılarla Doğrusallık). $f, g : E \to [0,\infty]$ ölçülebilir ve $\alpha, \beta > 0$ olsun. Yalnız $\alpha = \beta = 1$ durumunu ve integralin tanımını kullanarak $\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$ olduğunu kanıtlayın.

Çözüm.
Adım 1: Pozitif katla çarpım. $c > 0$ için $\int_E cf = c \int_E f$ olduğunu gösterelim. $\mathcal{F}_E$, E üzerinde sınırlı, ölçülebilir, sonlu destekli, negatif olmayan fonksiyonların sınıfı olsun.

- $h \in \mathcal{F}_E$ ve $0 \leq h \leq f$ ise $ch \in \mathcal{F}_E$, $0 \leq ch \leq cf$ ve sınırlı durumdaki doğrusallıktan (Teorem 11.3) $\int_E ch = c \int_E h$ dir. Dolayısıyla $c \int_E h \leq \int_E cf$; h üzerinden supremum alınırsa $c \int_E f \leq \int_E cf$.
- Tersine $k \in \mathcal{F}_E$ ve $0 \leq k \leq cf$ ise $k/c \in \mathcal{F}_E$ ve $0 \leq k/c \leq f$ dir; $\int_E k = c \int_E (k/c) \leq c \int_E f$. k üzerinden supremum alınırsa $\int_E cf \leq c \int_E f$.

 CC BY-NC-SA 4.0

$c\int_E f$ ifadesinde $\int_E f = \infty$ ise iki taraf da ∞ olur; hesap bu durumda da geçerlidir.
Adım 2: Birleştirme. αf ve βg negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlardır. $\alpha = \beta = 1$ durumu (Teorem 12.2) ve Adım 1 ile

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \int_E \alpha f + \int_E \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

$0 \cdot \infty = 0$ kuralıyla $\alpha = 0$ ya da $\beta = 0$ durumu da geçerlidir, çünkü sıfır fonksiyonunun integrali 0 dır.
■

Alıştırma 12.8 (Basamak Fonksiyonunun İntegrali Bir Seridir). $\{a_n\}$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi olsun. $E = [1, \infty)$ üzerinde f fonksiyonu, $n \le x < n+1$ iken $f(x) = a_n$ diye tanımlansın. $\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Seri gösterimi. $[n, n+1)$ aralıkları ayrıktır ve E yi örter; her $x \in E$ tam bir aralığa düşer. Buna göre E üzerinde

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \chi_{[n,n+1)}$$

dir; her noktada serinin yalnız bir terimi sıfırdan farklıdır.
Adım 2: Terimlerin integrali. $u_n = a_n \, \chi_{[n,n+1)}$ negatif olmayan, sınırlı, ölçülebilir ve sonlu destekli bir fonksiyondur; bu yüzden

$$\int_E u_n = a_n \, m([n, n+1)) = a_n.$$

Adım 3: Terim terim integral. Serilerin terim terim integrali (Sonuç 12.1) ile

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Özel olarak f nin integrallenebilir olması, $\sum a_n$ serisinin yakınsak olmasına denktir. Örneğin $a_n = 2^{-n}$ için integral 1 dir.
■

Alıştırma 12.9 (Basit Fonksiyonlarla Supremum). $f : E \to [0, \infty]$ ölçülebilir olsun. Supremum, E üzerinde $0 \le \varphi \le f$ koşulunu sağlayan sonlu destekli basit φ fonksiyonları üzerinden alınmak üzere

$$\int_E f = \sup_{0 \le \varphi \le f} \int_E \varphi$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
Sağ taraftaki supremuma S diyelim. $\mathcal{F}_E$, E üzerinde sınırlı, ölçülebilir, sonlu destekli, negatif olmayan fonksiyonların sınıfıdır.
Adım 1: $S \le \int_E f$. Basit bir fonksiyon (Tanım 8.4) ölçülebilirdir ve sonlu çok reel değer aldığından sınırlıdır. Demek ki sonlu destekli ve $0 \le \varphi \le f$ olan her basit φ, $\mathcal{F}_E$ dedir ve integralin tanımındaki supremuma katılır. Dolayısıyla $S \le \int_E f$.
Adım 2: $\int_E f \le S$. $h \in \mathcal{F}_E$, $0 \le h \le f$ ve $\varepsilon > 0$ olsun; M, h nin bir üst sınırı ve $E_0 = \{h \neq 0\}$ olsun, $m(E_0) < \infty$. Bir N doğal sayısı için

$$\varphi = \frac{1}{N} \lfloor N h \rfloor$$

 CC BY-NC-SA 4.0

tanımlayalım. φ yalnız $0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{\lfloor NM \rfloor}{N}$ değerlerini alır ve

$$\{\varphi = j/N\} = \{\, j/N \le h < (j+1)/N \,\}$$

ölçülebilir olduğundan basittir. Ayrıca $0 \le \varphi \le h \le f$, $h = 0$ olan yerde $\varphi = 0$ (yani φ de sonlu destekli) ve her yerde $h - \varphi < 1/N$ dir. Sınırlı durumdaki doğrusallık ve monotonluktan (Teorem 11.3), $h - \varphi$ fonksiyonu E_0 dışında sıfır olduğundan

$$\int_E h - \int_E \varphi = \int_E (h - \varphi) \le \frac{m(E_0)}{N}.$$

N yi $m(E_0)/N < \varepsilon$ olacak kadar büyük seçersek $\int_E h < \int_E \varphi + \varepsilon \le S + \varepsilon$ olur. ε keyfi olduğundan $\int_E h \le S$; h üzerinden supremum alınırsa $\int_E f \le S$.
İki adım birlikte eşitliği verir.
■

Alıştırma 12.10 (Limitin Altında Kalan Dizi). $\{f_n\}$, E üzerinde $[0, \infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun, E üzerinde noktasal olarak f ye yakınsasın ve her n için E üzerinde $f_n \le f$ olsun. $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Üst limit. Her n için $f_n \le f$ olduğundan monotonluk (Teorem 12.2) $\int_E f_n \le \int_E f$ verir; dolayısıyla

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \le \int_E f.$$

Alt limit. Fatou lemmasından (Lemma 12.2)

$$\int_E f \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Sonuç. Alt limit hiçbir zaman üst limiti aşmadığından

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \le \int_E f \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \le \limsup_{n\to\infty} \int_E f_n$$

zincirindeki bütün terimler eşittir. Yani $\left\{ \int_E f_n \right\}$ yakınsaktır ve limiti $\int_E f$ dir. Dizinin artan olması gerekmez; Monoton Yakınsaklık Teoremi'nin ispatında yalnız $f_n \le f$ kullanılmıştı.
■

Alıştırma 12.11 (Azalan Dizilerde Monoton Yakınsaklık). Monoton Yakınsaklık Teoremi'nin negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların azalan dizileri için geçerli olmadığını gösterin.

Çözüm.
Bir karşı örnek yeter. $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ alalım.
Azalanlık ve limit. $[n+1, \infty) \subseteq [n, \infty)$ olduğundan $f_{n+1} \le f_n$ dir. Her x için $n > x$ olunca $f_n(x) = 0$ olduğundan noktasal limit $f = 0$ ve $\int_{\mathbb{R}} f = 0$ dır.
İntegraller. Her n ve her k için $\chi_{[n,n+k]}$ sınırlı, ölçülebilir, sonlu destekli ve $0 \le \chi_{[n,n+k]} \le f_n$ dir; integralin tanımından

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \ge m([n, n+k]) = k.$$

k keyfi olduğundan her n için $\int_{\mathbb{R}} f_n = \infty$ dur.
Sonuç. Buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n = \infty \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Sorun integrallerin sonsuz olmasındadır: f_1 integrallenebilir olsaydı azalan dizi için de eşitlik sağlanırdı; bu, Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi'nin bir sonucudur.
■

Alıştırma 12.12 (Fatou Lemmasının Genelleştirilmesi). $\{f_n\}$, E üzerinde $[0,\infty]$ değerli ölçülebilir fonksiyonların herhangi bir dizisi olsun. Noktasal yakınsaklık varsaymadan

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

olduğunu kanıtlayın.

Çözüm.
Adım 1: Yakınsak bir yardımcı dizi. Her n için E üzerinde

$$g_n = \inf_{k\geq n} f_k$$

tanımlayalım. Ölçülebilir fonksiyonların sayılabilir bir ailesinin infimumu olarak g_n ölçülebilirdir ve $[0,\infty]$ değerlidir. İnfimum daha küçük bir küme üzerinden alındıkça büyüdüğünden $\{g_n\}$ artandır ve tanım gereği her x için

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

dir. Yani $\{g_n\}$, E üzerinde noktasal olarak $g = \liminf_n f_n$ fonksiyonuna yakınsar.
Adım 2: Fatou lemmasını uygulama. Fatou lemmasından (Lemma 12.2)

$$\int_E g \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E g_n.$$

Adım 3: Karşılaştırma. Her n için $g_n \leq f_n$ dir; monotonluktan (Teorem 12.2) $\int_E g_n \leq \int_E f_n$ ve dolayısıyla $\liminf_n \int_E g_n \leq \liminf_n \int_E f_n$ dir. Adım 2 ile birleştirince

$$\int_E \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

■

Negatif olmayan fonksiyonlarda kurduğumuz integral, işaret değiştiren fonksiyonlara pozitif ve negatif kısımlar yoluyla taşınır. Sıradaki bölüm Genel Lebesgue İntegrali, bu genişlemeyi ve Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi'ni ele alıyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

13. Genel Lebesgue İntegrali

Negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların integralini kurduk. İşaret değiştiren bir fonksiyonu pozitif ve negatif kısımlarına ayırıp iki integralin farkını almak doğal bir fikirdir; tek sorun $\infty - \infty$ belirsizliğidir. Bu belirsizliği dışlayan koşul integrallenebilirliktir: $| f |$ nin integrali sonlu olmalıdır.
Bu bölümde integrallenebilir fonksiyonlar için integralin doğrusal ve monoton olduğunu gösteriyor, ardından Lebesgue kuramının en çok kullanılan aracını, Baskın Yakınsaklık Teoremini kanıtlıyoruz.

13.1 Pozitif ve Negatif Kısımlar

Her ölçülebilir fonksiyon iki negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonun farkıdır. Bu ayrışmayı hatırlayalım.

Tanım 13.1 (Pozitif ve Negatif Kısım). $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir olsun. f nin **pozitif kısmı** ve **negatif kısmı**

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \qquad f^- = \max\{-f, 0\}$$

fonksiyonlarıdır. İkisi de negatif olmayan ve ölçülebilirdir, ve E üzerinde

$$f = f^+ - f^-, \qquad | f | = f^+ + f^-.$$

Yani her noktada f^+ ile f^- den en az biri sıfırdır; f pozitifken f^+, negatifken f^- devrededir. Özel olarak $0 \le f^+ \le | f |$ ve $0 \le f^- \le | f |$ olduğundan, negatif olmayan fonksiyonlar için integralin monotonluğuna göre $\int_E | f | < \infty$ ise $\int_E f^+$ ve $\int_E f^-$ ikisi de sonludur.

13.2 İntegrallenebilirlik

Bu gözlem integralin tanımını belirsizlikten kurtarır.

Tanım 13.2 (İntegrallenebilir Fonksiyon ve İntegrali). Ölçülebilir bir $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $\int_E | f | < \infty$ ise E üzerinde **integrallenebilir** (integrable) adını alır. Bu durumda f nin E üzerindeki integrali

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

dir.

Yani integral, iki sonlu sayının farkıdır. $f \ge 0$ ise $f^- = 0$ olur ve tanım, negatif olmayan fonksiyonlar için bilinen integralle çakışır. Ölçülebilir bir $C \subseteq E$ üzerindeki integral her zamanki gibi kısıtlamanın integralidir: $\int_C f = \int_C f \,|_C$.

Teorem 13.1 (İntegrallenebilir Fonksiyon Hemen Her Yerde Sonludur). *$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrallenebilir ise f hemen her yerde sonludur.*

> ***İspat.***
> *$E_\infty = \{x \in E : | f(x) | = \infty\}$ ölçülebilirdir ve her n için $\{x \in E : | f(x) | \ge n\}$ kümesinin içindedir. Chebychev eşitsizliğinden (Lemma 12.1)*
>
> $$m(E_\infty) \le m\{| f | \ge n\} \le \frac{1}{n} \int_E | f | .$$
>
> *Sağ taraf sonlu bir sayının n ye bölümüdür ve $n \to \infty$ için 0 a gider. Böylece $m(E_\infty) = 0$ dır.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu sonuç sayesinde integrallenebilir bir fonksiyonu sıfır ölçülü bir kümede değiştirip reel değerli yapabiliriz. Aşağıdaki lemma bunun integrali etkilemediğini söyler.

Lemma 13.1 (Hemen Her Yerde Eşit Fonksiyonlar). *$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrallenebilir, $h : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir ve E üzerinde hemen her yerde $h = f$ olsun. O zaman h integrallenebilirdir ve $\int_E h = \int_E f$.*

> ***İspat.***
> *$E_0 \subseteq E$, $m(E_0) = 0$ ve $E \setminus E_0$ üzerinde $h = f$ olsun (Tanım 4.2). Bu kümede $h^{\pm} = f^{\pm}$ ve $| h | = | f |$ dir. Negatif olmayan fonksiyonlar için bölgeye göre toplamsallıktan ve sıfır ölçülü küme üzerindeki integralin 0 olmasından, negatif olmayan her ölçülebilir u için $\int_E u = \int_{E\setminus E_0} u$ dur. Bunu $| h |$, h^+ ve h^- ye uygularsak*
>
> $$\int_E | h | = \int_{E\setminus E_0} | f | = \int_E | f | < \infty, \qquad \int_E h^{\pm} = \int_E f^{\pm}$$
>
> *bulunur. İlki integrallenebilirliği, ikincisi integrallerin eşitliğini verir.*
> ■

Yani integral, fonksiyonun sıfır ölçülü kümelerdeki değerlerini görmez. Bundan sonra integrallenebilir fonksiyonları gerektiğinde reel değerli kabul edeceğiz; iki integrallenebilir fonksiyonun toplamı, ikisinin de sonlu olduğu kümede tanımlıdır ve kalan sıfır ölçülü kümede nasıl tanımlandığı integrali değiştirmez. İntegrallenebilirlik için pratik ölçüt, serilerdeki karşılaştırma testinin karşılığıdır.

Teorem 13.2 (İntegral Karşılaştırma Testi). *$f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ölçülebilir olsun. E üzerinde $| f | \leq g$ olacak biçimde integrallenebilir bir $g : E \to [0, \infty]$ varsa f integrallenebilirdir ve*

$$\left| \int_E f \right| \leq \int_E | f | .$$

> ***İspat.***
> *Negatif olmayan fonksiyonlar için integralin monotonluğundan $\int_E | f | \leq \int_E g < \infty$; demek ki f integrallenebilirdir. Üçgen eşitsizliği ve negatif olmayan fonksiyonlar için integralin doğrusallığı ile*
>
> $$\left| \int_E f^+ - \int_E f^- \right| \leq \int_E f^+ + \int_E f^- = \int_E | f | .$$
>
> ■

Yani sonlu integralli bir fonksiyonun altında kalan her ölçülebilir fonksiyon integrallenebilirdir.

13.3 Doğrusallık, Monotonluk ve Bölgeye Göre Toplamsallık

Negatif olmayan fonksiyonlar için bildiğimiz iki temel özellik, pozitif ve negatif kısımlar üzerinden genel duruma taşınır.

Teorem 13.3 (İntegralin Doğrusallığı ve Monotonluğu). *$f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrallenebilir olsun.*
(i) Doğrusallık. *Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha f + \beta g$ integrallenebilirdir ve*

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g.$$

(ii) Monotonluk. *E üzerinde hemen her yerde $f \leq g$ ise $\int_E f \leq \int_E g$.*

> ***İspat.***
> ***Adım 1: Reel değerlere indirgeme.*** *Teorem 13.1 gereği $E_0 = \{| f | = \infty\} \cup \{| g | = \infty\}$ sıfır ölçülüdür. f ve g yi E_0 üzerinde 0 yaparsak integraller değişmez (Lemma 13.1) ve $\alpha f + \beta g$ yalnız E_0 üzerinde değişir. Bu yüzden f ve g yi reel değerli kabul edebiliriz. O zaman $\alpha f + \beta g$ ölçülebilirdir (Teorem 7.4).*

Adım 2: İntegrallenebilirlik. $\mid \alpha f + \beta g \mid \leq \mid \alpha \mid \mid f \mid + \mid \beta \mid \mid g \mid$ *dir ve sağ taraf, negatif olmayan fonksiyonlar için doğrusallıktan,* $\mid \alpha \mid \int_E \mid f \mid + \mid \beta \mid \int_E \mid g \mid < \infty$ *integralli negatif olmayan bir fonksiyondur. Karşılaştırma testi (Teorem 13.2)* $\alpha f + \beta g$ *nin integrallenebilir olduğunu verir.*
Adım 3: Skalerle çarpım. $\alpha \geq 0$ *ise* $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ *ve* $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ *dir.* $\alpha < 0$ *ise işaret değiştiği için* $(\alpha f)^+ = \mid \alpha \mid f^-$ *ve* $(\alpha f)^- = \mid \alpha \mid f^+$ *olur. İki durumda da negatif olmayan fonksiyonlar için doğrusallık* $\int_E \alpha f = \alpha \int_E f$ *verir; örneğin* $\alpha < 0$ *iken*

$$\int_E \alpha f = \mid \alpha \mid \int_E f^- - \mid \alpha \mid \int_E f^+ = \alpha \int_E f.$$

Adım 4: Toplam. $h = f + g$ *olsun.*

$$h^+ - h^- = h = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$$

eşitliğinde bütün terimler reel olduğundan terimler yer değiştirebilir:

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

İki taraf da negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların toplamıdır; negatif olmayan fonksiyonlar için doğrusallıktan

$$\int_E h^+ + \int_E f^- + \int_E g^- = \int_E h^- + \int_E f^+ + \int_E g^+.$$

f, g *ve* h *integrallenebilir olduğundan bu altı integral sonludur. Yeniden düzenlersek* $\int_E h = \int_E f + \int_E g$ *çıkar.*
Adım 3 ile Adım 4 birlikte (i) yi verir.
Adım 5: Monotonluk. *Adım 1'deki gibi* f *ve* g *yi reel değerli alalım.* $g - f$ *hemen her yerde negatif değildir;* $\{g - f < 0\}$ *sıfır ölçülü kümesinde* $g - f$ *yi* 0 *yapmak integrali değiştirmez (Lemma 13.1). Negatif olmayan bir fonksiyonun integrali negatif olmadığından (i) ile*

$$\int_E g - \int_E f = \int_E (g - f) \geq 0.$$

■

Yani integrallenebilir fonksiyonlar bir vektör uzayı oluşturur ve integral bu uzay üzerinde monoton bir doğrusal fonksiyoneldir.

Sonuç 13.1 (Bölgeye Göre Toplamsallık). $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *integrallenebilir ve* A, B, E *nin ayrık ölçülebilir alt kümeleri olsun. O zaman* f, A *ve* B *üzerinde integrallenebilirdir ve*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

İspat.
Negatif olmayan fonksiyonlar için bölgeye göre toplamsallıktan

$$\int_A \mid f \mid \leq \int_A \mid f \mid + \int_{E \setminus A} \mid f \mid = \int_E \mid f \mid < \infty;$$

aynısı B *ve* $A \cup B$ *için de geçerlidir, dolayısıyla* f *bu kümeler üzerinde integrallenebilirdir. Kısıtlamanın pozitif kısmı pozitif kısmın kısıtlamasıdır:* $(f \mid_A)^+ = f^+ \mid_A$. *Negatif olmayan fonksiyonlar için bölgeye göre toplamsallık*

$$\int_{A \cup B} f^{\pm} = \int_A f^{\pm} + \int_B f^{\pm}$$

verir. Bu dört terimin hepsi sonludur; $+$ *eşitliğinden* $-$ *eşitliğini çıkarmak iddiayı verir.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Özel olarak sıfır ölçülü bir $Z \subseteq E$ üzerinde $\int_Z f^{\pm} = 0$ olduğundan $\int_Z f = 0$ dır; böylece $\int_E f = \int_{E\setminus Z} f$. Aralıklar üzerindeki integraller için kalkülüsteki gösterimi kullanmak rahattır.

Tanım 13.3 (Aralık Üzerinde İntegral Gösterimi). $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ integrallenebilir ise

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \int_{(a,b)} f$$

yazarız. Değişkeni belirtmek gerektiğinde $\int_a^b f(x)\,dx$ gösterimini kullanırız.

Yani uç noktaların önemi yoktur: $m\{a\} = m\{b\} = 0$ olduğundan Sonuç 13.1 iki integralin eşit olduğunu verir.

13.4 Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi

Sınırlı Yakınsaklık Teoremi (Teorem 11.5) sonlu ölçülü bir küme ve düzgün bir sınır ister. Lebesgue'in teoremi ikisini birden kaldırır: dizinin tamamını tek bir integrallenebilir fonksiyonun altında tutmak yeter.

Teorem 13.4 (Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi). *$\{f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}\}$ ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun ve E üzerinde noktasal olarak $f_n \to f$ olsun. Her n için E üzerinde*

$$|\, f_n \,| \le g$$

*olacak biçimde integrallenebilir bir $g : E \to [0,\infty]$ varsa (yani g diziyi **baskılıyorsa**, dominates), f integrallenebilirdir ve*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

İspat.
Adım 1: İntegrallenebilirlik. *f ölçülebilir fonksiyonların noktasal limiti olarak ölçülebilirdir (Teorem 8.1). $|\, f_n \,| \le g$ nin limiti $|\, f \,| \le g$ dir. Karşılaştırma testi (Teorem 13.2) f nin ve her f_n nin integrallenebilir olduğunu verir.*
Adım 2: Reel değerlere indirgeme. *$Z = \{g = \infty\}$ sıfır ölçülüdür (Teorem 13.1). Bütün f_n, f ve g yi Z üzerinde 0 yapmak integralleri değiştirmez (Lemma 13.1) ve varsayımları korur. Artık g reel değerlidir, dolayısıyla $|\, f_n \,| \le g$ ve $|\, f \,| \le g$ den bütün fonksiyonlar reel değerlidir.*
Adım 3: Üst limit. *$g - f_n$ negatif olmayan, ölçülebilir ve noktasal olarak $g - f$ ye yakınsayan bir dizidir. Fatou lemmasından (Lemma 12.2)*

$$\int_E (g - f) \le \liminf_{n\to\infty} \int_E (g - f_n).$$

Doğrusallıkla (Teorem 13.3) bu $\int_E g - \int_E f \le \int_E g - \limsup_n \int_E f_n$ demektir. $\int_E g$ sonlu olduğundan iki taraftan çıkarılabilir:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n \le \int_E f.$$

Adım 4: Alt limit. *Aynı akıl yürütmeyi negatif olmayan $g + f_n \to g + f$ dizisine uygularsak $\int_E g + \int_E f \le \int_E g + \liminf_n \int_E f_n$, yani*

$$\int_E f \le \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Adım 3 ve 4 birlikte limitin var olduğunu ve $\int_E f$ ye eşit olduğunu gösterir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani ortak bir integrallenebilir tavan varsa integral ile limit yer değiştirir. Adım 2′deki gibi sıfır ölçülü kümeler atılabildiğinden noktasal yakınsaklık yerine hemen her yerde yakınsaklık da yeter.

Örnek 13.1 (Büyüyen Aralıklar Üzerinde İntegral). $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ integrallenebilir ise

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]} f = \int_{\mathbb{R}} f$$

olduğunu gösterin.

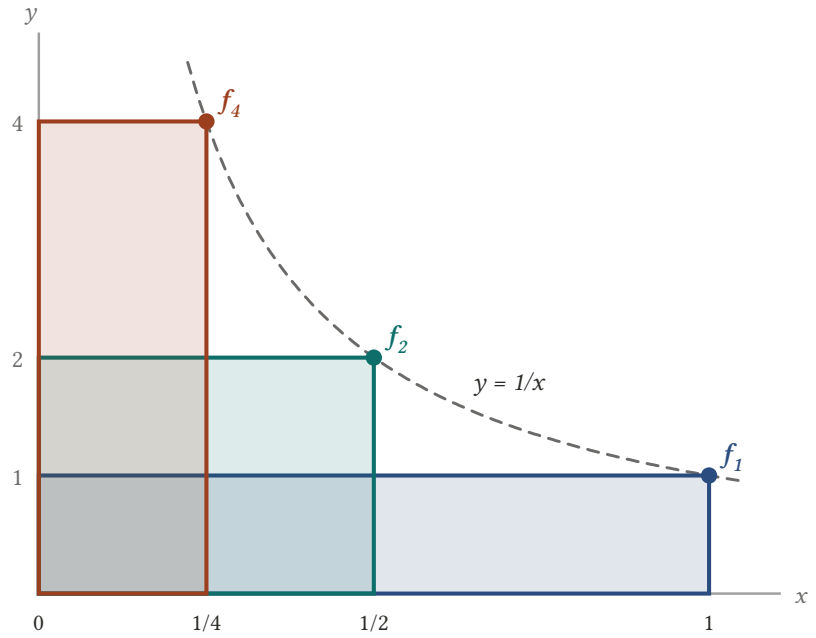
> **Çözüm.**
> $f_n = f \cdot \chi_{[-n,n]}$ alalım. Her x için $n \geq |\, x \,|$ olduğunda $f_n(x) = f(x)$ olduğundan $f_n \to f$ noktasal olarak yakınsar. Ayrıca $|\, f_n \,| \leq |\, f \,|$ ve $|\, f \,|$ integrallenebilirdir. Baskın Yakınsaklık Teoremi (Teorem 13.4) $\int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} f$ verir.
> Geriye $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{[-n,n]} f$ olduğunu görmek kalıyor. Bölgeye göre toplamsallıktan (Sonuç 13.1)
>
> $$\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{[-n,n]} f_n + \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} f_n = \int_{[-n,n]} f + 0,$$
>
> çünkü f_n, $[-n,n]$ üzerinde f ye, dışında 0 a eşittir.
> ■

Baskılayan fonksiyon koşulu süs değildir; onsuz sonuç bozulabilir.

Örnek 13.2 (Baskılayan Fonksiyon Olmadan). $[0,1]$ üzerinde $f_n = n\,\chi_{(0,1/n]}$ olsun. $f_n \to 0$ noktasal olarak yakınsadığı hâlde $\int_{[0,1]} f_n \not\to 0$ olduğunu gösterin ve bunun Baskın Yakınsaklık Teoremiyle neden çelişmediğini açıklayın.

> **Çözüm.**
> $x = 0$ da her $f_n(0) = 0$ dır. $x > 0$ için $1/n < x$ olduğunda $f_n(x) = 0$ olur; demek ki $f_n \to 0$. Öte yandan her n için
>
> $$\int_{[0,1]} f_n = n \cdot m\left(\,(0,1/n]\,\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$
>
> dir, yani integraller 1 e yakınsar, limitin integrali ise 0 dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.1: $n = 1, 2, 4$ için $f_n = n\chi_{(0,\,1/n]}$. Dikdörtgenler daralıp yükselir, alanları hep 1'dir; köşeleri $y = 1/x$ eğrisi üzerindedir. Bütün f_n'leri baskılayan bir fonksiyon bu merdiveni aşmak zorunda kalır ve integrali sonsuz olur.

Teorem uygulanamaz, çünkü diziyi baskılayan integrallenebilir bir g yoktur. Böyle bir g her n için $f_n \le g$ sağlasaydı $(1/(n+1), 1/n]$ üzerinde $g \ge n$ olurdu. Bu aralıklar ayrıktır ve uzunlukları $\frac{1}{n(n+1)}$ dir. Her N için $[0,1]$ üzerinde $g \ge \sum_{n=1}^{N} n\,\chi_{(1/(n+1),\,1/n]}$ olur; sağ taraf basit bir fonksiyon olduğundan monotonlukla

$$\int_{[0,1]} g \ge \sum_{n=1}^{N} n \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$$

çıkar. $N \to \infty$ alınca $\int_{[0,1]} g = \infty$ olurdu.

■

Baskılayan fonksiyon n ye bağlı olabilir; yeter ki baskılayanlar da iyi davranan bir diziye yakınsasın.

Teorem 13.5 (Genel Baskın Yakınsaklık Teoremi). *$\{f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}\}$ ölçülebilir fonksiyonların E üzerinde noktasal olarak f ye yakınsayan bir dizisi olsun. $\{g_n : E \to [0,\infty]\}$ integrallenebilir fonksiyonların E üzerinde noktasal olarak g ye yakınsayan bir dizisi olsun ve her n için E üzerinde $|f_n| \le g_n$ olsun.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n = \int_E g < \infty$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f.$$

İspat.
Adım 1: Hazırlık. *f ve g, ölçülebilir fonksiyonların noktasal limitleri olarak ölçülebilirdir (Teorem 8.1); $g \ge 0$ ve hipotez gereği $\int_E g < \infty$ olduğundan g integrallenebilirdir. $|f_n| \le g_n$ nin limiti $|f| \le g$ dir. Karşılaştırma testi (Teorem 13.2) $|f| \le g$ den f nin, $|f_n| \le g_n$ den her f_n nin integrallenebilir olduğunu*

verir. Teorem 13.1 gereği $Z = \{g = \infty\} \cup \bigcup_n \{g_n = \infty\}$ sayılabilir sayıda sıfır ölçülü kümenin birleşimi olarak sıfır ölçülüdür. Bütün fonksiyonları Z üzerinde 0 yapmak integralleri değiştirmez (Lemma 13.1) ve varsayımları korur; böylece hepsi reel değerlidir.

Adım 2: Üst limit. *$g_n - f_n \geq 0$ ölçülebilirdir ve noktasal olarak $g - f$ ye yakınsar. Fatou lemması (Lemma 12.2) ve doğrusallıkla*

$$\int_E g - \int_E f \leq \liminf_{n\to\infty} \Big(\int_E g_n - \int_E f_n \Big).$$

$\int_E g_n$ sonlu $\int_E g$ ye yakınsadığından sağ taraf $\int_E g - \limsup_n \int_E f_n$ dir. $\int_E g$ yi iki taraftan çıkarırsak $\limsup_n \int_E f_n \leq \int_E f$.

Adım 3: Alt limit. *$g_n + f_n \geq 0$ dizisi $g + f$ ye yakınsar; aynı akıl yürütme $\int_E g + \int_E f \leq \int_E g + \liminf_n \int_E f_n$, yani $\int_E f \leq \liminf_n \int_E f_n$ verir.*

İki eşitsizlik birlikte sonucu verir.

■

Yani baskılayan fonksiyonların integralleri limitte kaybolmuyorsa, baskılanan dizinin integralleri de kaybolmaz. $g_n = g$ sabit dizisi Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremini geri verir.

13.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar integrallenebilirliği ve baskın yakınsaklığı farklı durumlarda sınar.

Alıştırma 13.1 (Genel Katsayılarla Doğrusallık). $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ integrallenebilir olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha f + \beta g$ nin integrallenebilir olduğunu ve

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

olduğunu, yalnız $\alpha = \beta = 1$ durumunu kullanarak kanıtlayın.

Çözüm.
Teorem 13.1 ve Lemma 13.1 sayesinde f ve g yi sıfır ölçülü bir kümede 0 yaparak reel değerli kabul edebiliriz; bu, hiçbir integrali değiştirmez. Toplam durumu bilindiğine göre, her integrallenebilir f ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\alpha f \ \text{ integrallenebilir ve } \int_E \alpha f = \alpha \int_E f$$

olduğunu göstermek yeter. Gerçekten bu durumda αf ve βg integrallenebilir olur, toplam durumu da

$$\int_E (\alpha f + \beta g) = \int_E \alpha f + \int_E \beta g = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$$

verir.

Adım 1: İntegrallenebilirlik. αf ölçülebilirdir (Teorem 7.4) ve $\mid \alpha f \mid = \mid \alpha \mid \mid f \mid$ dir. Negatif olmayan fonksiyonlar için doğrusallıktan $\int_E \mid \alpha f \mid = \mid \alpha \mid \int_E \mid f \mid < \infty$.

Adım 2: $\alpha \geq 0$. Her noktada $\max\{\alpha f, 0\} = \alpha \max\{f, 0\}$ olduğundan $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$, aynı biçimde $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ dir. Negatif olmayan fonksiyonlar için doğrusallıkla

$$\int_E \alpha f = \alpha \int_E f^+ - \alpha \int_E f^- = \alpha \int_E f.$$

Adım 3: $\alpha < 0$. Bu kez $\alpha f = \mid \alpha \mid (-f)$ ve $(-f)^+ = f^-$, $(-f)^- = f^+$ dir. Böylece $(\alpha f)^+ = \mid \alpha \mid f^-$ ve $(\alpha f)^- = \mid \alpha \mid f^+$ olur ve

$$\int_E \alpha f = \mid \alpha \mid \int_E f^- - \mid \alpha \mid \int_E f^+ = - \mid \alpha \mid \int_E f = \alpha \int_E f.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İki durum birlikte istenen skaler eşitliği kanıtlar.
■

Alıştırma 13.2 (Mutlak Değeri İntegrallenebilen Ölçülemez Fonksiyon). $|f|$ integrallenebilir olduğu hâlde kendisi integrallenebilir olmayan bir $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ örneği verin. (İpucu: ölçülebilirliği düşünün.)

Çözüm.
İntegrallenebilirlik tanımı (Tanım 13.2) ölçülebilirliği şart koşar; bu yüzden $|f|$ ölçülebilir ama f ölçülemez olacak bir örnek arayacağız.
Adım 1: Ölçülemez bir küme. $m^*([0,1])=1>0$ olduğundan Vitali teoremine (Teorem 5.1) göre ölçülebilir olmayan bir $V\subseteq[0,1]$ vardır.
Adım 2: Fonksiyon.

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in V,\\ -1, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

tanımlayalım. $\{x\in[0,1]:f(x)>0\}=V$ ölçülebilir olmadığından f ölçülebilir değildir (Tanım 7.2); dolayısıyla integrallenebilir değildir.
Adım 3: Mutlak değer. $[0,1]$ üzerinde $|f|=1$ sabittir; ölçülebilirdir ve $\int_{[0,1]}|f|=m([0,1])=1<\infty$. Böylece $|f|$ integrallenebilirdir.
■

Alıştırma 13.3 (Karesi İntegrallenemeyen Fonksiyon). İntegrallenebilir olduğu hâlde f^2 integrallenebilir olmayan bir $f:[0,1]\to[0,\infty]$ örneği verin.

Çözüm.
$f(0)=0$ ve $0<x\le 1$ için $f(x)=1/\sqrt{x}$ alalım. f ölçülebilir ve negatif değildir; $f^2(x)=1/x$ dir $(x>0)$.
Adım 1: Kesilmiş fonksiyonlar. $n\ge 1$ için $f_n=f\cdot\chi_{[1/n,1]}$ olsun. f_n ölçülebilirdir, $\{f_n\}$ artandır ve noktasal olarak f ye yakınsar: $x=0$ da hepsi 0, $x>0$ için $1/n\le x$ olduğunda $f_n(x)=f(x)$.
Adım 2: $\int f_n$. Bölgeye göre toplamsallıkla $\int_{[0,1]}f_n=\int_{[1/n,1]}f$ dir. f, $[1/n,1]$ üzerinde sürekli ve sınırlıdır; Riemann integrali Lebesgue integraline eşittir (Teorem 11.4):

$$\int_{[1/n,1]}f=\int_{1/n}^{1}x^{-1/2}\,dx=2-\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Adım 3: f integrallenebilir. Monoton Yakınsaklık Teoremi (Teorem 12.4) ile

$$\int_{[0,1]}f=\lim_{n\to\infty}\Big(2-\frac{2}{\sqrt{n}}\Big)=2<\infty.$$

Adım 4: f^2 integrallenemez. Her n için $f^2\ge f^2\chi_{[1/n,1]}$ dir; monotonluk ve aynı Riemann hesabıyla

$$\int_{[0,1]}f^2\ge\int_{1/n}^{1}\frac{dx}{x}=\ln n.$$

n keyfi olduğundan $\int_{[0,1]}f^2=\infty$.
■

Alıştırma 13.4 (Kareleri İntegrallenebilen Fonksiyonların Çarpımı). $f,g:E\to\mathbb{R}$ ölçülebilir ve f^2, g^2 integrallenebilir olsun. $f\cdot g$ nin integrallenebilir olduğunu gösterin. (İpucu: $(|a|-|b|)^2\ge 0$.)

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: Ölçülebilirlik. Ölçülebilir reel değerli fonksiyonların çarpımı ölçülebilirdir (Teorem 7.4); $f \cdot g$ ölçülebilirdir.
Adım 2: Nokta nokta eşitsizlik. Reel a, b için $0 \leq (\mid a \mid - \mid b \mid)^2 = a^2 - 2 \mid ab \mid + b^2$ olduğundan $\mid ab \mid \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Buna göre E üzerinde

$$\mid fg \mid \leq \frac{1}{2} \left(f^2 + g^2 \right).$$

Adım 3: Karşılaştırma. Sağ taraf negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyondur ve negatif olmayan fonksiyonlar için doğrusallıktan integrali $\frac{1}{2} \left(\int_E f^2 + \int_E g^2 \right) < \infty$ dur. Karşılaştırma testi (Teorem 13.2) $f \cdot g$ nin integrallenebilir olduğunu verir.
■

Alıştırma 13.5 (Sınırlı Fonksiyonla Çarpım). $f : E \to \mathbb{R}$ integrallenebilir, $g : E \to \mathbb{R}$ sınırlı ve ölçülebilir olsun. $f \cdot g$ nin integrallenebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
E üzerinde $\mid g \mid \leq M$ olacak bir $M \geq 0$ seçelim. $f \cdot g$ ölçülebilirdir (Teorem 7.4) ve

$$\mid fg \mid \leq M \mid f \mid$$

dir. $M \mid f \mid$ negatif değildir ve $\int_E M \mid f \mid = M \int_E \mid f \mid < \infty$. Karşılaştırma testi (Teorem 13.2) $f \cdot g$ nin integrallenebilir olduğunu verir.
■

Alıştırma 13.6 (Kısıtlama ve Karakteristik Fonksiyonla Çarpım). $f : E \to \mathbb{R}$ integrallenebilir ve $C \subseteq E$ ölçülebilir olsun. $f \mid_C$ nin integrallenebilir olduğunu ve

$$\int_C f \mid_C = \int_E f \cdot \chi_C$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: $f \mid_C$ integrallenebilir. Ölçülebilir bir fonksiyonun ölçülebilir bir alt kümeye kısıtlaması ölçülebilirdir. Negatif olmayan fonksiyonlar için bölgeye göre toplamsallıktan

$$\int_C \mid f \mid \leq \int_C \mid f \mid + \int_{E \setminus C} \mid f \mid = \int_E \mid f \mid < \infty.$$

Adım 2: $f\chi_C$ integrallenebilir. $f\chi_C$ ölçülebilir fonksiyonların çarpımıdır (Teorem 7.4) ve $\mid f\chi_C \mid \leq \mid f \mid$; karşılaştırma testi (Teorem 13.2) integrallenebilir olduğunu verir.
Adım 3: Eşitlik. $E = C \cup (E \setminus C)$ ayrık birleşimdir. $f\chi_C$ nin C ye kısıtlaması $f \mid_C$, $E \setminus C$ ye kısıtlaması ise sıfır fonksiyonudur. Bölgeye göre toplamsallıktan (Sonuç 13.1)

$$\int_E f\chi_C = \int_C f\chi_C + \int_{E \setminus C} f\chi_C = \int_C f \mid_C + 0.$$

■

Alıştırma 13.7 (Parça İntegrallerinin Serisi). $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ ölçülebilir ve her sınırlı küme üzerinde sınırlı olsun; her n için $a_n = \int_{[n, n+1)} f$ tanımlayalım. "f integrallenebilirdir ancak ve ancak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsaktır" önermesi doğru mudur?

Çözüm.
Önerme yanlıştır. Bir yönü doğru, öbürü yanlıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: a_n tanımlı. $[n, n+1)$ üzerinde $|f| \le M_n$ ise $\int_{[n,n+1)} |f| \le M_n < \infty$; f bu aralıkta integrallenebilirdir.
Adım 2: "⇒" doğrudur. f integrallenebilir olsun ve $f_N = f\chi_{[1,N+1)}$ diyelim. Bölgeye göre toplamsallık (Sonuç 13.1) ve Alıştırma 13.6 ile

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \int_{[1,N+1)} f = \int_{[1,\infty)} f_N.$$

$f_N \to f$ noktasal olarak yakınsar ve $|f_N| \le |f|$. Baskın Yakınsaklık Teoremi (Teorem 13.4) kısmi toplamların $\int_{[1,\infty)} f$ ye yakınsadığını verir.
Adım 3: "⇐" yanlıştır. $x \in [n, n+1)$ için $f(x) = (-1)^n/n$ alalım. f ölçülebilirdir (her $\{f > c\}$ kümesi $[n, n+1)$ aralıklarının birleşimidir) ve sınırlıdır ($|f| \le 1$). $a_n = (-1)^n/n$ olduğundan $\sum a_n$ alterne seri testiyle yakınsaktır (toplamı $-\ln 2$).
Öte yandan $|f|\chi_{[1,N+1)}$ artarak $|f|$ ye yakınsar ve $\int_{[1,N+1)} |f| = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ dir. Monoton Yakınsaklık Teoremi (Teorem 12.4) ile

$$\int_{[1,\infty)} |f| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

yani f integrallenebilir değildir.
■

Alıştırma 13.8 (Parça İntegrallerinin Mutlak Yakınsak Serisi). $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ ölçülebilir ve her sınırlı küme üzerinde sınırlı olsun; her n için $a_n = \int_{[n,n+1)} f$ tanımlayalım. "f integrallenebilirdir ancak ve ancak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsaktır" önermesi doğru mudur?

Çözüm.
Önerme yanlıştır. Yine bir yönü doğru, öbürü yanlıştır.
Adım 1: "⇒" doğrudur. Karşılaştırma testinden (Teorem 13.2) $|a_n| \le \int_{[n,n+1)} |f|$. Negatif olmayan $|f|$ için bölgeye göre toplamsallık ve Monoton Yakınsaklık Teoremi (Teorem 12.4), $|f|\chi_{[1,N+1)} \uparrow |f|$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n,n+1)} |f| = \int_{[1,\infty)} |f| < \infty$$

verir.
Adım 2: "⇐" yanlıştır. $f(x) = \sin(2\pi x)$ alalım; sürekli olduğundan ölçülebilir, $|f| \le 1$ olduğundan sınırlıdır. Her n için $[n, n+1]$ bir tam periyottur ve (uç nokta sıfır ölçülü olduğundan, Teorem 11.4 ile)

$$a_n = \int_n^{n+1} \sin(2\pi x)\, dx = 0,$$

dolayısıyla $\sum |a_n| = 0$ mutlak yakınsaktır. Oysa

$$\int_n^{n+1} |\sin(2\pi x)|\, dx = 2\int_0^{1/2} \sin(2\pi x)\, dx = \frac{2}{\pi},$$

ve Adım 1'deki gibi Monoton Yakınsaklık Teoremi $\int_{[1,\infty)} |f| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} = \infty$ verir. f integrallenebilir değildir.
■

Alıştırma 13.9 (Basit Fonksiyonlarla İntegral Yaklaşımı). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrallenebilir olsun. Noktasal olarak f ye yakınsayan ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\psi_n=\int_{\mathbb{R}}f$$

sağlayan, sonlu destekli basit fonksiyonlardan oluşan bir $\{\psi_n\}$ dizisi bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Dizi. f ölçülebilir olduğundan Basit Yaklaşım Teoremi (Teorem 8.2), $\mathbb{R}$ üzerinde noktasal olarak f ye yakınsayan ve her n için $|\psi_n|\le|f|$ sağlayan, sonlu destekli basit fonksiyonlardan oluşan bir $\{\psi_n\}$ dizisi verir.
Adım 2: Baskılama. $|f|$ integrallenebilir ve negatif olmayan bir fonksiyondur ve bütün diziyi baskılar. Baskın Yakınsaklık Teoremi (Teorem 13.4)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\psi_n=\int_{\mathbb{R}}f$$

verir.
■

Alıştırma 13.10 (Genel Baskın Yakınsaklık Teoreminin İspatı). Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoreminin ispatını izleyip $\{g-f_n\}$ ve $\{g+f_n\}$ dizilerini sırasıyla $\{g_n-f_n\}$ ve $\{g_n+f_n\}$ ile değiştirerek Genel Baskın Yakınsaklık Teoremini kanıtlayın.

Çözüm.
Varsayımlar: $f_n\to f$ ve $g_n\to g$ noktasal, $|f_n|\le g_n$, her g_n integrallenebilir ve $\int_E g_n\to\int_E g<\infty$.
Adım 1: İntegrallenebilirlik. f ve g ölçülebilir fonksiyonların noktasal limitleri olarak ölçülebilirdir (Teorem 8.1). $|f_n|\le g_n$ de limite geçersek $|f|\le g$. g integrallenebilir olduğundan karşılaştırma testi (Teorem 13.2) f nin, $|f_n|\le g_n$ ise her f_n nin integrallenebilir olduğunu verir.
Adım 2: Reel değerlere indirgeme. Teorem 13.1 ile $\{g=\infty\}$ ve her $\{g_n=\infty\}$ sıfır ölçülüdür; sayılabilir birleşimleri Z de sıfır ölçülüdür. $E\setminus Z$ üzerinde $|f_n|\le g_n<\infty$ ve $|f|\le g<\infty$. Bütün fonksiyonları Z üzerinde 0 yapmak hiçbir integrali değiştirmez (Lemma 13.1) ve varsayımları korur. Böylece bütün fonksiyonlar reel değerlidir.
Adım 3: $\{g_n-f_n\}$ dizisi. $g_n-f_n\ge 0$ ölçülebilirdir ve noktasal olarak $g-f$ ye yakınsar. Fatou lemmasından (Lemma 12.2) ve doğrusallıktan (Teorem 13.3)

$$\int_E g-\int_E f\le\liminf_{n\to\infty}\Big(\int_E g_n-\int_E f_n\Big).$$

$b_n=\int_E g_n$ sonlu $b=\int_E g$ ye yakınsıyorsa her $\{c_n\}$ reel dizisi için $\liminf(b_n-c_n)=b-\limsup c_n$ dir. Buna göre sağ taraf $\int_E g-\limsup_n\int_E f_n$ dir; $\int_E g$ sonlu olduğundan çıkarılabilir:

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n\le\int_E f.$$

Adım 4: $\{g_n+f_n\}$ dizisi. $g_n+f_n\ge 0$ ölçülebilirdir ve $g+f$ ye yakınsar. Aynı yolla ve $\liminf(b_n+c_n)=b+\liminf c_n$ kullanılarak

$$\int_E g+\int_E f\le\int_E g+\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n,$$

yani $\int_E f\le\liminf_n\int_E f_n$.
Adım 5: Sonuç. $\limsup_n\int_E f_n\le\int_E f\le\liminf_n\int_E f_n$; demek ki limit vardır ve $\int_E f$ ye eşittir.
■

Alıştırma 13.11 (Farkın İntegralinin Sıfıra Gitmesi). $\{f_n:E\to\overline{\mathbb{R}}\}$ integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi, E üzerinde noktasal olarak $f_n\to f$ ve f integrallenebilir olsun.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_E |\, f - f_n \,| \to 0 \Leftrightarrow \int_E |\, f_n \,| \to \int_E |\, f \,|$$

olduğunu gösterin. (İpucu: Genel Baskın Yakınsaklık Teoremini kullanın.)

Çözüm.
Adım 0: Reel değerlere indirgeme. Teorem 13.1 ile $\{|\, f \,| = \infty\} \cup \bigcup_n \{|\, f_n \,| = \infty\}$ sıfır ölçülüdür. Bütün fonksiyonları bu kümede 0 yapmak integralleri değiştirmez (Lemma 13.1) ve noktasal yakınsaklığı korur. Böylece f ve f_n reel değerlidir.
Adım 1: "⇒". Üçgen eşitsizliğinden $\big|\, |\, f_n \,| - |\, f \,|\, \big| \le |\, f_n - f \,|$. Doğrusallık ve karşılaştırma testi (Teorem 13.3, Teorem 13.2) ile

$$\Big| \int_E |\, f_n \,| - \int_E |\, f \,| \Big| = \Big| \int_E \big(|\, f_n \,| - |\, f \,| \big) \Big| \le \int_E |\, f_n - f \,| \to 0.$$

Adım 2: "⇐", kurulum. $\int_E |\, f_n \,| \to \int_E |\, f \,|$ olsun. Genel Baskın Yakınsaklık Teoremini (Teorem 13.5)

$$h_n = |\, f - f_n \,|, \qquad g_n = |\, f \,| + |\, f_n \,|$$

ile uygulayacağız. Her g_n negatif olmayan ve integrallenebilirdir, ve üçgen eşitsizliğinden $|\, h_n \,| \le g_n$.
Adım 3: Varsayımların denetimi. Noktasal olarak $h_n \to 0$ ve $g_n \to 2\,|\, f \,|$ dir. Ayrıca

$$\int_E g_n = \int_E |\, f \,| + \int_E |\, f_n \,| \to 2 \int_E |\, f \,| = \int_E 2\,|\, f \,| < \infty.$$

Adım 4: Sonuç. Teorem $\int_E h_n \to \int_E 0 = 0$, yani $\int_E |\, f - f_n \,| \to 0$ verir.
■

Alıştırma 13.12 (Parametreye Bağlı İntegralin Limiti). $Q = [0,1] \times [0,1]$ ve $f : Q \to \mathbb{R}$ olsun. Her sabit y için $x \mapsto f(x,y)$ ölçülebilir, her sabit x için $\lim_{y\to 0} f(x,y) = f_0(x)$ olsun ve $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir bir g için her $(x,y) \in Q$ da $|\, f(x,y) \,| \le g(x)$ olsun.

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 f_0(x)\,dx$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
$F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$ yazalım. $x \mapsto f(x,y)$ ölçülebilir ve $|\, f(\cdot,y) \,| \le g$ olduğundan karşılaştırma testi (Teorem 13.2) her $F(y)$ nin tanımlı olduğunu verir.
Adım 1: Dizisel ölçüt. Limit dizilerle karakterize edilir (bkz. Analiz 1: Süreklilik): $(0,1]$ de 0 a yakınsayan her $\{y_n\}$ için $F(y_n) \to \int_0^1 f_0$ olduğunu göstermek yeter.
Adım 2: Dizi. Böyle bir $\{y_n\}$ sabitleyip $f_n(x) = f(x,y_n)$ diyelim. Her f_n ölçülebilirdir, $|\, f_n \,| \le g$ ve her x için $f_n(x) \to f_0(x)$.
Adım 3: Baskın yakınsaklık. g bütün diziyi baskılayan integrallenebilir bir fonksiyondur. Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi (Teorem 13.4) f_0 ın integrallenebilir olduğunu ve

$$F(y_n) = \int_0^1 f_n \to \int_0^1 f_0$$

olduğunu verir.
■

Alıştırma 13.13 (Parametreye Bağlı İntegralin Sürekliliği). $Q = [0,1] \times [0,1]$ ve $f : Q \to \mathbb{R}$ olsun. Her sabit y için $x \mapsto f(x,y)$ ölçülebilir, her sabit x için $y \mapsto f(x,y)$ sürekli olsun ve $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir bir g için her $(x,y) \in Q$ da $|\, f(x,y) \,| \le g(x)$ olsun.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$h(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$$

fonksiyonunun $[0,1]$ üzerinde sürekli olduğunu gösterin.

Çözüm.
$\mid f(\cdot,y) \mid \leq g$ olduğundan karşılaştırma testi (Teorem 13.2) her $h(y)$ nin tanımlı ve sonlu olduğunu verir. $y_0 \in [0,1]$ sabitleyelim; dizisel süreklilik ölçütüne göre (bkz. Analiz 1: Süreklilik) $[0,1]$ de y_0 a yakınsayan her $\{y_n\}$ için $h(y_n) \to h(y_0)$ olduğunu göstermek yeter.
Adım 1: Dizi. $f_n(x) = f(x,y_n)$ ölçülebilirdir ve $\mid f_n \mid \leq g$. $y \mapsto f(x,y)$ sürekli olduğundan her x için $f_n(x) \to f(x,y_0)$.
Adım 2: Baskın yakınsaklık. Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi (Teorem 13.4)

$$h(y_n) = \int_0^1 f_n \to \int_0^1 f(x,y_0)\,dx = h(y_0)$$

verir. y_0 keyfi olduğundan h, $[0,1]$ üzerinde süreklidir.
■

Alıştırma 13.14 (İntegral İşareti Altında Türev). $Q = [0,1]\times[0,1]$ ve $f : Q \to \mathbb{R}$ olsun. Her sabit y için $x \mapsto f(x,y)$ ölçülebilir ve $x \mapsto f(x,0)$ integrallenebilir olsun. Her $(x,y) \in Q$ da $\partial f/\partial y$ var olsun ($y = 0,1$ da tek yanlı) ve $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir bir g için

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \leq g(x), \qquad (x,y) \in Q$$

olsun. Her $y \in [0,1]$ için

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

olduğunu kanıtlayın.

Çözüm.
Adım 1: Ortalama değer tahmini. Her x için $y \mapsto f(x,y)$, $[0,1]$ üzerinde türevlenebilir, dolayısıyla süreklidir. Ortalama Değer Teoremiyle $y, y' \in [0,1]$ için y ile y' arasında bir ξ vardır ve

$$\mid f(x,y') - f(x,y) \mid = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi) \right| \mid y' - y \mid \leq g(x) \mid y' - y \mid .$$

Adım 2: F tanımlı. Bu tahminde $y = 0$ alırsak $\mid f(x,y') \mid \leq \mid f(x,0) \mid + g(x)$. Sağ taraf integrallenebilir olduğundan karşılaştırma testi (Teorem 13.2) her y' için $F(y') = \int_0^1 f(x,y')\,dx$ nin tanımlı ve sonlu olduğunu verir.
Adım 3: Fark bölümleri. $y \in [0,1]$ sabitleyelim ve $[0,1]\setminus\{y\}$ de y ye yakınsayan bir $\{y_n\}$ alalım. Doğrusallıkla (Teorem 13.3)

$$\frac{F(y_n) - F(y)}{y_n - y} = \int_0^1 D_n, \qquad D_n(x) = \frac{f(x,y_n) - f(x,y)}{y_n - y}.$$

Her D_n ölçülebilir fonksiyonların doğrusal birleşimi olarak ölçülebilirdir (Teorem 7.4) ve Adım 1'deki tahminden $\mid D_n \mid \leq g$. Kısmi türevin tanımından her x için $D_n(x) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$; özel olarak $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ölçülebilirdir (Teorem 8.1).
Adım 4: Baskın yakınsaklık. g, $\{D_n\}$ dizisini baskılar. Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi (Teorem 13.4)

$$\frac{F(y_n) - F(y)}{y_n - y} \to \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

 CC BY-NC-SA 4.0

> verir. Bu her $y_n \to y$ ($y_n \neq y$) dizisi için geçerli olduğundan dizisel ölçüt $F'(y)$ nin var olduğunu ve bu integrale eşit olduğunu gösterir ($y = 0, 1$ da tek yanlı türev olarak).
> ■

İntegrallenebilir fonksiyonlar için doğrusallık ve baskın yakınsaklık elimizde. Sıradaki bölüm İntegrasyonun Sayılabilir Toplamsallığı ve Sürekliliği, integralin bölgeye göre sayılabilir toplamsal ve sürekli olduğunu gösteriyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

14. İntegrasyonun Toplamsallığı

Doğrusallık ve monotonluk, Riemann integralinden tanıdığımız özelliklerin genişlemesiydi. Bu son bölümde Lebesgue integralinin Riemann integralinde karşılığı olmayan iki özelliğini kanıtlıyoruz: integral, tanım kümesinin sayılabilir sayıda ayrık parçaya bölünmesine uyum sağlar ve iç içe küme dizileri boyunca limitle yer değiştirir.
Bu iki sonuç, Lebesgue ölçüsünün sayılabilir toplamsallığının (Teorem 4.1) ve sürekliliğinin (Teorem 4.3) integraldeki karşılıklarıdır.

14.1 Sayılabilir Toplamsallık

Önce kısa bir hatırlatma. f, ölçülebilir bir E kümesi üzerinde integrallenebilir (Tanım 13.2) ve $A \subseteq E$ ölçülebilir ise f, A üzerinde de integrallenebilirdir ve

$$\int_A f = \int_E f \cdot \chi_A$$

dır (bkz. Alıştırma 13.6). Ayrıca $m(A) = 0$ ise $\int_A f = 0$ dır (Sonuç 13.1 sonrasındaki gözlem). Tanım kümesini parçalara bölmenin dilini sabitleyelim.

Tanım 14.1 (Ölçülebilir Ayrışma). E ölçülebilir bir küme olsun. Ölçülebilir kümelerin ayrık ve sayılabilir bir $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ topluluğu $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ koşulunu sağlıyorsa bu topluluğa E nin bir **ölçülebilir ayrışması** (measurable decomposition) denir.

Yani E yi, her noktası tam olarak bir parçaya düşecek biçimde, sayılabilir sayıda ölçülebilir parçaya bölüyoruz. Sonlu ayrışmalar da bu tanıma girer: fazladan parçalar boş küme alınır.

Teorem 14.1 (İntegrasyonun Sayılabilir Toplamsallığı). *f, E üzerinde integrallenebilir ve $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, E nin bir ölçülebilir ayrışması olsun. Bu durumda*

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f. \tag{1}$$

İspat.
Adım 1: Kesilmiş fonksiyonlar. *Her n için $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ ve $f_n = f \cdot \chi_{U_n}$ tanımlayalım. U_n ölçülebilir olduğundan f_n, E üzerinde ölçülebilirdir ve E üzerinde $| f_n | \leq | f |$ dir.*
Adım 2: Limite geçiş. *Her $x \in E$ bir E_k ya aittir; $n \geq k$ için $x \in U_n$ ve $f_n(x) = f(x)$ olur. Yani $\{f_n\}$, E üzerinde noktasal olarak f ye yakınsar. $| f |$ integrallenebilir bir baskın fonksiyon olduğundan Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi (Teorem 13.4)*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$$

verir.
Adım 3: Sonlu toplam. *$E_1, \ldots, E_n$ ayrık olduğundan $\chi_{U_n} = \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k}$ dır. İntegralin doğrusallığından (Teorem 13.3)*

$$\int_E f_n = \sum_{k=1}^{n} \int_E f \cdot \chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f.$$

Adım 4: Sonuç. *Adım 2 ve Adım 3 birlikte*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f$$

verir; özellikle sağdaki seri yakınsaktır.

■

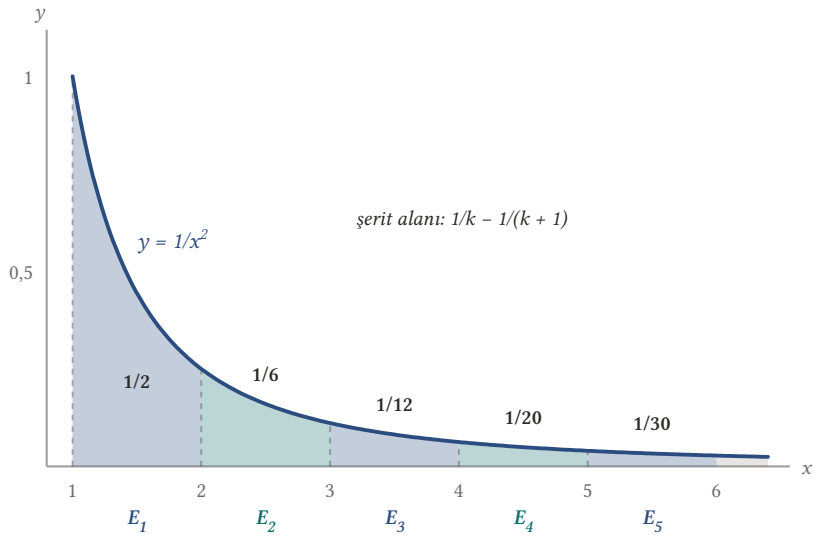
Yani integrallenebilir bir fonksiyonun integrali, tanım kümesinin ayrık ölçülebilir parçaları üzerindeki integrallerin toplamıdır. Teoremi $|f|$ ye uygulamak $\sum_n \int_{E_n} |f| = \int_E |f| < \infty$ verir; dolayısıyla (1) deki seri mutlak yakınsaktır ve terimlerin sırası değiştirilebilir.

Örnek 14.1 (Şeritlere Bölerek İntegral). $f(x) = 1/x^2$ fonksiyonunun $[1,\infty)$ üzerindeki integralini, bu kümeyi $[k, k+1)$ şeritlerine bölerek hesaplayın.

Çözüm.
Adım 1: İntegrallenebilirlik. Her n için $\int_{[1,n]} f = 1 - 1/n \le 1$ dir (sürekli fonksiyonun Riemann ve Lebesgue integralleri eşittir, Teorem 11.4). $f \cdot \chi_{[1,n]}$ artarak f ye yakınsadığından monoton yakınsaklık teoremi (Teorem 12.4) $\int_{[1,\infty)} f \le 1$ verir; f integrallenebilirdir.
Adım 2: Ayrışma. $E_k = [k, k+1)$ kümeleri $[1,\infty)$ nın bir ölçülebilir ayrışmasıdır ve

$$\int_{E_k} f = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

dir.



Şekil 14.1: $y = 1/x^2$ altındaki bölge $E_k = [k, k+1)$ şeritlerine ayrılır. Şeritlerin alanları 1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30, … iç içe sadeleşen bir seri oluşturur ve toplamları 1'dir.

Adım 3: Toplam. Sayılabilir toplamsallıktan (Teorem 14.1) ve iç içe sadeleşen toplamdan

$$\int_{[1,\infty)} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

14.2 İntegrasyonun Sürekliliği

Ölçünün sürekliliği sayılabilir toplamsallıktan nasıl çıktıysa, integralin sürekliliği de aynı yolla integralin sayılabilir toplamsallığından (Teorem 14.1) çıkar. Artan ve azalan küme toplulukları Tanım 4.1 ile tanımlandı.

Teorem 14.2 (İntegrasyonun Sürekliliği). *f, E üzerinde integrallenebilir olsun.*
(i) *$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, E nin ölçülebilir alt kümelerinin artan bir topluluğuysa*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f.$$

(ii) *$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, E nin ölçülebilir alt kümelerinin azalan bir topluluğuysa*

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f.$$

İspat.
Bütün kümeler E nin ölçülebilir alt kümeleri olduğundan geçen her integral sonlu bir reel sayıdır. Sayılabilir toplamsallık sonlu ayrışmalara da uygulanır (fazla parçalar boş, onlar üzerindeki integral 0); buna ***sonlu toplamsallık*** *diyeceğiz.*
(i) kısmı. *$E_0 = \varnothing$ alıp $n \geq 1$ için $C_n = E_n \setminus E_{n-1}$ tanımlayalım. Topluluk artan olduğundan C_n ler ayrık ve ölçülebilirdir; her n için $E_n = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$ ve*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

dir: birleşimdeki her nokta, ait olduğu ilk E_k nın C_k sına düşer. Böylece $\{C_n\}$, $\bigcup_n E_n$ nin bir ölçülebilir ayrışmasıdır. Sayılabilir toplamsallıktan, ardından sonlu toplamsallıktan

$$\begin{aligned}\int_{\bigcup_n E_n} f &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{C_k} f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\end{aligned}$$

bulunur.
(ii) kısmı. *$D_n = E_1 \setminus E_n$ olsun. $\{E_n\}$ azalan olduğundan $\{D_n\}$ artan bir topluluktur ve $\bigcup_n D_n = E_1 \setminus \bigcap_n E_n$ dir. E_1, E_n ile D_n nin ayrık birleşimi olduğundan sonlu toplamsallık*

$$\int_{D_n} f = \int_{E_1} f - \int_{E_n} f$$

verir; aynı gerekçeyle $E_1 = \bigcap_n E_n \cup \bigcup_n D_n$ ayrışmasından

$$\int_{\bigcup_n D_n} f = \int_{E_1} f - \int_{\bigcap_n E_n} f$$

olur. (i) kısmını $\{D_n\}$ ye uygularsak

$$\int_{E_1} f - \int_{\bigcap_n E_n} f = \lim_{n\to\infty} \left[\int_{E_1} f - \int_{E_n} f \right]$$

elde edilir. $\int_{E_1} f$ sonlu bir sayı olduğundan iki taraftan çıkarılabilir; bu (ii) dir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani integral, artan dizilerde birleşime, azalan dizilerde kesişime sürekli biçimde geçer. Ölçünün sürekliliğindeki $m(E_1) < \infty$ koşulunun burada karşılığı yoktur: gerekli sonluluğu f nin integrallenebilirliği sağlar.

Örnek 14.2 (Kuyruk İntegralleri Sıfıra Gider). f, $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilir olsun. $E_n = \{x : |\, x \,| \geq n\}$ için $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f = 0$ olduğunu gösterin.

> **Çözüm.**
> Her E_n kapalı olduğundan ölçülebilirdir ve $E_{n+1} \subseteq E_n$ dir; topluluk azalandır. Hiçbir x bütün E_n lere ait olamaz, çünkü $n > |\, x \,|$ için $x \notin E_n$ dir; yani $\bigcap_n E_n = \varnothing$ dır. İntegrasyonun sürekliliğinin (ii) kısmından (Teorem 14.2)
>
> $$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f = \int_{\varnothing} f = 0.$$
>
> Burada her $m(E_n) = \infty$ olmasına karşın sonuç geçerlidir; gerekli olan yalnız f nin integrallenebilirliğidir.
> ■

14.3 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar toplamsallık ve süreklilik teoremlerini kullanmayı, integrallenebilirlik koşulunun rolünü ve integrallenebilir fonksiyonların yaklaşımını pekiştirir.

Alıştırma 14.1 (Artan Kümelerde Doğrudan İspat). f, E üzerinde integrallenebilir ve $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, E nin ölçülebilir alt kümelerinin artan bir topluluğu olsun. Lebesgue baskın yakınsaklık teoremini doğrudan kullanarak aşağıdaki eşitliği kanıtlayın:

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f.$$

> **Çözüm.**
> $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ve $f_n = f \cdot \chi_{E_n}$ olsun. Her f_n, E üzerinde ölçülebilirdir ve $\int_{E_n} f = \int_E f_n$ dir.
> **Adım 1: Noktasal limit.** $x \in U$ ise x bir E_k ya aittir; topluluk artan olduğundan $n \geq k$ için $x \in E_n$ ve $f_n(x) = f(x)$ olur. $x \notin U$ ise her n için $f_n(x) = 0$ dır. Yani $\{f_n\}$, E üzerinde noktasal olarak $f \cdot \chi_U$ ya yakınsar.
> **Adım 2: Baskınlık.** Her n için E üzerinde $|\, f_n \,| \leq |\, f \,|$ dir ve $|\, f \,|$ integrallenebilirdir.
> **Adım 3: Sonuç.** Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden (Teorem 13.4)
>
> $$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f \cdot \chi_U = \int_U f.$$
>
> ■

Alıştırma 14.2 (Azalan Kümelerde Doğrudan İspat). f, E üzerinde integrallenebilir ve $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, E nin ölçülebilir alt kümelerinin azalan bir topluluğu olsun. Lebesgue baskın yakınsaklık teoremini doğrudan kullanarak aşağıdaki eşitliği kanıtlayın:

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f.$$

> **Çözüm.**
> $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ ve $f_n = f \cdot \chi_{E_n}$ olsun.
> **Adım 1: Noktasal limit.** $x \in K$ ise her n için $f_n(x) = f(x)$ dir. $x \notin K$ ise $x \notin E_k$ olan bir k vardır; topluluk azalan olduğundan $n \geq k$ için $x \notin E_n$ ve $f_n(x) = 0$ olur. Yani $\{f_n\}$, E üzerinde noktasal olarak $f \cdot \chi_K$ ya yakınsar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: Baskınlık ve sonuç. E üzerinde $|f_n| \le |f|$ ve $|f|$ integrallenebilir olduğundan Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi (Teorem 13.4)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E f\cdot\chi_K = \int_K f$$

verir. Ölçünün sürekliliğinden farklı olarak burada $m(E_1)<\infty$ gibi bir koşula gerek yoktur; bu işi $|f|$ baskın fonksiyonu görür.
■

Alıştırma 14.3 (Uçlara Doğru Genişleyen Aralıklar). f, $[0,\infty)$ üzerinde integrallenebilir olsun. Aşağıdaki eşitliği gösterin:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1/n,\,n]} f = \int_{[0,\infty)} f.$$

Çözüm.
Adım 1: Artan topluluk. $E_n=[1/n,n]$ olsun. $1/(n+1)<1/n$ ve $n<n+1$ olduğundan $E_n\subseteq E_{n+1}$ dir; topluluk artandır ve her E_n, $[0,\infty)$ nın ölçülebilir bir alt kümesidir.
Adım 2: Birleşim. Her $x>0$ için $n\ge\max\{x,1/x\}$ seçilirse $x\in E_n$ olur; 0 hiçbir E_n ye ait değildir. Dolayısıyla $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=(0,\infty)$.
Adım 3: Süreklilik. İntegrasyonun sürekliliğinin (i) kısmından (Teorem 14.2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1/n,\,n]} f = \int_{(0,\infty)} f.$$

Adım 4: Sıfır noktası. $[0,\infty)$, $\{0\}$ ile $(0,\infty)$ nın ayrık birleşimidir ve $m(\{0\})=0$ olduğundan $\int_{\{0\}} f = 0$ dır. Toplamsallıktan (Teorem 14.1)

$$\int_{[0,\infty)} f = \int_{\{0\}} f + \int_{(0,\infty)} f = \int_{(0,\infty)} f,$$

ve istenen eşitlik elde edilir.
■

Alıştırma 14.4 (Belirsiz İntegralin Sürekliliği). f, $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilir olsun ve her $x\in\mathbb{R}$ için

$$F(x)=\int_{(-\infty,\,x]} f$$

tanımlansın. F nin iyi tanımlı ve sürekli olduğunu gösterin. F her zaman Lipschitz midir?

Çözüm.
Adım 1: İyi tanımlılık. $(-\infty,x]$ kapalı, dolayısıyla ölçülebilir bir kümedir. f nin $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilir olması, f nin bu küme üzerinde de integrallenebilir olmasını gerektirir ($|f\cdot\chi_{(-\infty,x]}|\le|f|$). Yani $F(x)$ sonlu bir reel sayıdır.
Adım 2: Farkın kestirimi. $x<y$ ise $(-\infty,y]$, $(-\infty,x]$ ile $(x,y]$ nin ayrık birleşimidir; toplamsallıktan (Teorem 14.1) $F(y)-F(x)=\int_{(x,y]}f$ olur; $y<x$ ise aynı gerekçeyle $F(x)-F(y)=\int_{(y,x]}f$ dir. J, x ile y arasındaki yarı açık aralık olsun. İntegral karşılaştırma testine göre $|F(y)-F(x)| = \left|\int_J f\right| \le \int_J|f|$ dir. $h>0$ ve $|y-x|\le h$ ise $J\subseteq[x-h,x+h]$ olduğundan, negatif olmayan fonksiyonlar için integralin monotonluğuyla

$$|F(y)-F(x)| \le \int_{[x-h,\,x+h]} |f| =: \varphi(h)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur; aynı gerekçeyle φ, h ye göre artandır.
Adım 3: φ sıfıra gider. $I_n = [x - 1/n, x + 1/n]$ azalan bir topluluktur ve $\bigcap_n I_n = \{x\}$ tir. İntegrasyonun sürekliliğini (Teorem 14.2, (ii) kısmı) integrallenebilir $\mid f \mid$ ye uygularsak

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(1/n) = \int_{\{x\}} \mid f \mid = 0$$

bulunur, çünkü $m(\{x\}) = 0$ dır.
Adım 4: Süreklilik. $\varepsilon > 0$ verilsin. Adım 3'e göre $\varphi(1/n) < \varepsilon$ olan bir n vardır. $\delta = 1/n$ için $\mid y - x \mid < \delta$ ise Adım 2'den $\mid F(y) - F(x) \mid \le \varphi(1/n) < \varepsilon$ olur. Yani F, her x noktasında süreklidir.
Adım 5: Lipschitz olmayabilir. $f(x) = x^{-1/2}$ $(0 < x \le 1)$ ve diğer durumlarda $f(x) = 0$ olsun. $0 < t \le 1$ ve $n \ge 1/t$ için $[1/n, t]$ üzerinde f sürekli olduğundan (Teorem 11.4)

$$\int_{[1/n,\,t]} f = 2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

dir. $f \ge 0$ ve $n \ge 1/t$ iken $f \cdot \chi_{[1/n,t]}$ artarak $f \cdot \chi_{(0,t]}$ ye yakınsadığından, limiti $n \ge 1/t$ üzerinden alırsak monoton yakınsaklık teoremi (Teorem 12.4) $\int_{(0,t]} f = 2\sqrt{t}$ verir; özellikle $\int_{\mathbb{R}} f = 2$ ve f integrallenebilirdir. Buna göre $F(0) = 0$ ve $0 < h \le 1$ için $F(h) = 2\sqrt{h}$ dir; dolayısıyla

$$\frac{\mid F(h) - F(0) \mid}{h} = \frac{2}{\sqrt{h}} \to \infty \quad (h \to 0^+).$$

Hiçbir L sabiti $\mid F(h) - F(0) \mid \le Lh$ eşitsizliğini sağlayamaz; F Lipschitz değildir. Buna karşılık f sınırlıysa, $\mid f \mid \le M$ için Adım 2 den $\mid F(y) - F(x) \mid \le M \mid y - x \mid$ olur ve F Lipschitzdir.
■

Alıştırma 14.5 (Alterne Basamak Fonksiyonu). $[1, \infty)$ üzerinde, her $k \in \mathbb{N}$ ve $k \le x < k + 1$ için $f(x) = (-1)^k/k$ tanımlansın. $\lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} f$ limitinin var olduğunu, ancak f nin $[1, \infty)$ üzerinde integrallenebilir olmadığını gösterin. Bu, integrasyonun sürekliliğiyle çelişir mi?

Çözüm.
Adım 1: Kısmi integraller. $[1, n]$, $[k, k + 1)$ $(1 \le k \le n - 1)$ aralıkları ile $\{n\}$ noktasının ayrık birleşimidir. $[k, k + 1)$ üzerinde f sabit $(-1)^k/k$ ve tek noktanın ölçüsü sıfır olduğundan, sonlu toplamsallıktan

$$\int_{[1,n]} f = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}$$

bulunur.
Adım 2: Limit vardır. $1/k$ azalarak sıfıra gittiğinden alterne seri testine göre $\sum_{k\ge1} (-1)^k/k$ yakınsaktır. Dolayısıyla limit vardır; değeri $-\ln 2 \approx -0{,}6931$ dir.
Adım 3: İntegrallenebilir değildir. Adım 1'deki hesap $\mid f \mid$ için

$$\int_{[1,\infty)} \mid f \mid \ge \int_{[1,n]} \mid f \mid = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

verir (negatif olmayan fonksiyonlarda integralin monotonluğu). Harmonik seri ıraksak olduğundan sağ taraf $n \to \infty$ iken sınırsız büyür; $\int_{[1,\infty)} \mid f \mid = \infty$ ve f integrallenebilir değildir.
Adım 4: Çelişki yoktur. İntegrasyonun sürekliliği (Teorem 14.2) f nin artan kümelerin birleşimi olan $[1, \infty)$ üzerinde integrallenebilir olduğunu varsayar. Burada bu varsayım sağlanmaz; $\int_{[1,\infty)} f$ tanımlı bile değildir. Kısmi integrallerin limitinin var olması teoremin kapsamı dışındadır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 14.6 (Sinüs Bölü x). $[1,\infty)$ üzerinde $f(x)=(\sin x)/x$ tanımlansın. $\lim_{n\to\infty}\int_{[1,n]} f$ limitinin var olduğunu, ancak f nin $[1,\infty)$ üzerinde integrallenebilir olmadığını gösterin. Bu, integrasyonun sürekliliğiyle çelişir mi?

Çözüm.
Adım 1: Riemann integraline geçiş. f, $[1,n]$ üzerinde süreklidir; Lebesgue ve Riemann integralleri eşittir (Teorem 11.4). Kısmi integrasyonla

$$\int_1^n \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \frac{\cos n}{n} - \int_1^n \frac{\cos x}{x^2}\,dx.$$

Adım 2: Limit vardır. $|\cos n/n| \le 1/n \to 0$ dır. $g(x)=\cos x/x^2$ için $|g(x)| \le 1/x^2$ ve $1/x^2$, $[1,\infty)$ üzerinde integrallenebilir olduğundan (Örnek 14.1) g de integrallenebilirdir. $[1,n]$ artan bir topluluk olduğundan integrasyonun sürekliliği (Teorem 14.2) $\int_{[1,n]} g \to \int_{[1,\infty)} g$ verir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[1,n]} f = \cos 1 - \int_{[1,\infty)} g$$

vardır; sayısal değeri yaklaşık $0{,}6247$ dir.
Adım 3: İntegrallenebilir değildir. $k \ge 1$ için $[k\pi,(k+1)\pi] \subseteq [1,\infty)$ dur ve bu aralıkta $x \le (k+1)\pi$ olduğundan

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

dir. Bu aralıklar yalnız uç noktalarda kesiştiğinden

$$\int_{[1,\infty)} |f| \ge \sum_{k=1}^{N} \frac{2}{(k+1)\pi} \quad (N\in\mathbb{N})$$

ve harmonik serinin ıraksaklığından $\int_{[1,\infty)}|f| = \infty$ olur.
Adım 4: Çelişki yoktur. Önceki alıştırmada olduğu gibi integrasyonun sürekliliği f nin birleşim olan $[1,\infty)$ üzerinde integrallenebilir olmasını varsayar; bu varsayım burada sağlanmaz. $\int_1^\infty (\sin x)/x\,dx$ genelleştirilmiş Riemann integrali olarak vardır ama bir Lebesgue integrali değildir.
■

Sıradaki üç alıştırma, $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilir bir f için şu dört önermenin denk olduğunu gösterir: $f=0$ h.h.y.; sınırlı, sonlu destekli her ölçülebilir g için $\int_{\mathbb{R}} fg = 0$; her ölçülebilir A için $\int_A f = 0$; her açık $\mathcal{O}$ için $\int_{\mathcal{O}} f = 0$. Açık kümeler ölçülebilir olduğundan üçüncü önerme dördüncüyü kendiliğinden verir; zinciri kalan üç gerektirme kapatır.

Alıştırma 14.7 (Sıfır Fonksiyonla Çarpımın İntegrali). f, $\mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilir ve $f=0$ h.h.y. olsun. Sınırlı, sonlu destekli her ölçülebilir g için $\int_{\mathbb{R}} fg = 0$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: İntegrallenebilirlik. $|g| \le M$ ise $|fg| \le M|f|$ dir; fg ölçülebilir ve integrallenebilirdir.
Adım 2: Sonuç. $f(x)=0$ olan her x te $f(x)g(x)=0$ dır; dolayısıyla $fg=0$ h.h.y. Sıfır fonksiyonu integrallenebilir ve integrali 0 olduğundan, hemen her yerde eşit fonksiyonların integrallerinin eşitliği (Lemma 13.1)

$$\int_{\mathbb{R}} fg = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$$

verir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 14.8 (Her Ölçülebilir Küme Üzerinde Sıfır İntegral). $f, \mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilir olsun ve sınırlı, sonlu destekli her ölçülebilir g için $\int_{\mathbb{R}} fg = 0$ olsun. Her ölçülebilir A kümesi için $\int_A f = 0$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Sınırlı parçalar. A ölçülebilir olsun ve $A_n = A \cap [-n, n]$ tanımlansın. $g_n = \chi_{A_n}$ ölçülebilir, 1 ile sınırlı ve $[-n, n]$ dışında sıfır, yani sonlu desteklidir. Varsayımdan

$$\int_{A_n} f = \int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_{A_n} = 0.$$

Adım 2: Limite geçiş. $\{A_n\}$ ölçülebilir kümelerin artan bir topluluğudur ve $\bigcup_n A_n = A$ dır. İntegrasyonun sürekliliğinin (i) kısmından (Teorem 14.2)

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f = 0.$$

■

Alıştırma 14.9 (Açık Kümeler Üzerinde Sıfır İntegral). $f, \mathbb{R}$ üzerinde integrallenebilir olsun ve her açık $\mathcal{O}$ kümesi için $\int_{\mathcal{O}} f = 0$ olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde $f = 0$ h.h.y. olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Her ölçülebilir küme üzerinde integral sıfırdır. A ölçülebilir olsun. Her k için Teorem 3.1, $A \subseteq \mathcal{O}_k$ ve $m(\mathcal{O}_k \setminus A) < 1/k$ olan açık bir $\mathcal{O}_k$ verir. $\mathcal{V}_k = \mathcal{O}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{O}_k$ açıktır, A yı içerir, $m(\mathcal{V}_k \setminus A) < 1/k$ dır ve $\{\mathcal{V}_k\}$ azalan bir topluluktur. $G = \bigcap_k \mathcal{V}_k$ için her k da $m(G \setminus A) \le m(\mathcal{V}_k \setminus A) < 1/k$, yani $m(G \setminus A) = 0$ dır. İntegrasyonun sürekliliğinin (ii) kısmından (Teorem 14.2)

$$\int_G f = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{V}_k} f = 0.$$

G, A ile sıfır ölçülü $G \setminus A$ kümesinin ayrık birleşimi olduğundan $\int_A f = \int_G f - \int_{G\setminus A} f = 0$ bulunur.
Adım 2: Pozitif kısım. $P = \{x : f(x) > 0\}$ ölçülebilirdir ve Adım 1'e göre $\int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_P = \int_P f = 0$ dır. $f \cdot \chi_P \ge 0$ olduğundan Chebychev eşitsizliği (Lemma 12.1) her $j \in \mathbb{N}$ için

$$m\left(\{x : f(x) \cdot \chi_P(x) \ge 1/j\}\right) \le j \int_{\mathbb{R}} f \cdot \chi_P = 0$$

verir. P bu kümelerin $j \in \mathbb{N}$ üzerinden birleşimi olduğundan alt toplamsallıktan (Teorem 1.3) $m(P) = 0$ dır.
Adım 3: Negatif kısım. $-f$ de varsayımı sağlar; Adım 2 ona uygulanırsa $\{x : f(x) < 0\}$ kümesinin ölçüsü de sıfır çıkar. Böylece $\{x : f(x) \neq 0\}$ sıfır ölçülüdür, yani $f = 0$ h.h.y.
■

Alıştırma 14.10 (Basit Fonksiyonla Yaklaşım). f, $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir ve $\varepsilon > 0$ olsun. $[a, b]$ üzerinde $\int_{[a,b]} | f - \eta | < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir η basit fonksiyonunun bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Basit yaklaşım dizisi. f ölçülebilir olduğundan basit yaklaşım teoremi (Teorem 8.2), $[a, b]$ üzerinde f ye noktasal yakınsayan ve her n için $| \eta_n | \le | f |$ koşulunu sağlayan basit η_n fonksiyonları verir.
Adım 2: Baskın yakınsaklık. $| f - \eta_n |$ noktasal olarak 0 a yakınsar ve $| f - \eta_n | \le | f | + | \eta_n | \le 2 | f |$ dir; $2 | f |$ integrallenebilirdir. Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden (Teorem 13.4)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} | f - \eta_n | = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: Seçim. Bu limit nedeniyle $\int_{[a,b]} | f - \eta_n | < \varepsilon$ olan bir n vardır; $\eta = \eta_n$ istenen basit fonksiyondur.
■

Alıştırma 14.11 (Basamak Fonksiyonuyla Yaklaşım). f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ve $\varepsilon > 0$ olsun. $[a,b]$ üzerinde $\int_{[a,b]} | f - s | < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir s basamak fonksiyonunun bulunduğunu gösterin. (İpucu: Teorem 3.3.)

Çözüm.
Adım 1: Önce basit fonksiyon. Önceki alıştırmaya göre $\int_{[a,b]} | f - \eta | < \varepsilon/2$ olan bir η basit fonksiyonu vardır. η yı

$$\eta = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i}$$

biçiminde yazalım; burada $A_i \subseteq [a,b]$ ayrık ve ölçülebilir, c_i ler reel sayılardır. Bütün c_i ler sıfırsa $s = 0$ alınır; aksi halde $C = \sum_{i=1}^{N} | c_i | > 0$ olsun.
Adım 2: Kümeleri aralıklarla değiştirmek. Her A_i nin ölçüsü en çok $b - a$, yani sonludur. Teorem 3.3, sonlu sayıda ayrık açık aralığın birleşimi olan ve $m(A_i \triangle U_i) < \varepsilon/(2C)$ koşulunu sağlayan bir U_i verir. $V_i = U_i \cap [a,b]$ de sonlu sayıda aralığın birleşimidir. $A_i \subseteq [a,b]$ olduğundan $A_i \triangle V_i \subseteq A_i \triangle U_i$ dir.
Adım 3: Basamak fonksiyonu. $s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{V_i}$ olsun. Bütün V_i aralıklarının uç noktaları a ve b ile birlikte $[a,b]$ nin bir bölüntüsünü verir ve s bu bölüntünün her açık alt aralığında sabittir; yani s bir basamak fonksiyonudur.
Adım 4: Kestirim. $| \chi_{A_i} - \chi_{V_i} | = \chi_{A_i \triangle V_i}$ olduğundan

$$\int_{[a,b]} | \eta - s | \leq \sum_{i=1}^{N} | c_i | m(A_i \triangle V_i) < C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Üçgen eşitsizliğinden

$$\int_{[a,b]} | f - s | \leq \int_{[a,b]} | f - \eta | + \int_{[a,b]} | \eta - s | < \varepsilon.$$

■

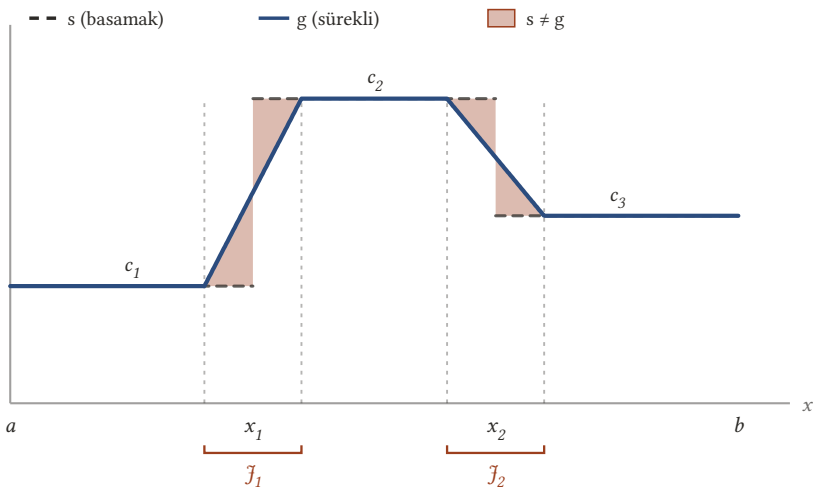
Alıştırma 14.12 (Sürekli Fonksiyonla Yaklaşım). f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ve $\varepsilon > 0$ olsun. $[a,b]$ üzerinde $\int_{[a,b]} | f - g | < \varepsilon$ koşulunu sağlayan sürekli bir g fonksiyonunun bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1: Önce basamak fonksiyonu. Önceki alıştırmaya göre $\int_{[a,b]} | f - s | < \varepsilon/2$ olan bir s basamak fonksiyonu vardır: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ bölüntüsü için s, her (x_{j-1}, x_j) aralığında sabit c_j değerini alır. $M = \max_j | c_j |$ olsun. $n = 1$ ya da $M = 0$ ise s hemen her yerde sabittir ve $g = c_1$ yeter; bu yüzden $n \geq 2$ ve $M > 0$ varsayalım.
Adım 2: Köşeleri yumuşatmak. $\delta > 0$ sayısını

$$\delta < \frac{1}{2} \min_j (x_j - x_{j-1}), \qquad 4M(n-1)\delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde seçelim. Birinci koşul, $1 \leq j \leq n-1$ için $J_j = [x_j - \delta, x_j + \delta]$ aralıklarının ayrık ve (a,b) içinde olmasını sağlar. g yi şöyle tanımlayalım: J_j üzerinde $x_j - \delta$ da c_j, $x_j + \delta$ da c_{j+1} değerini alan doğrusal fonksiyon; bu aralıkların dışında, (x_{j-1}, x_j) içindeki noktalarda c_j; ayrıca $g(a) = c_1$ ve $g(b) = c_n$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.2: Üç basamaklı s fonksiyonu (kesikli) ve onu yumuşatan sürekli g. Her sıçrama noktası x_j çevresindeki $J_j = [x_j - \delta, x_j + \delta]$ aralığında g doğrusaldır; iki fonksiyon yalnız taralı dar bölgelerde ayrılır ve bu bölgelerde $|s - g| \le 2M$ olur.

Adım 3: g süreklidir. Her parça süreklidir ve parçaların birleştiği $x_j \pm \delta$, a, b noktalarında soldan ve sağdan değerler çakışır. Ayrıca her yerde $|\,g\,| \le M$ dir.
Adım 4: Kestirim. g ile s, $\bigcup_{j=1}^{n-1} J_j$ ve sonlu sayıda bölüntü noktası dışında eşittir. J_j üzerinde $|\,s - g\,| \le |\,s\,| + |\,g\,| \le 2M$ (x_j noktası hariç, o da sıfır ölçülü) olduğundan

$$\int_{[a,b]} |\,s - g\,| \le 2M \sum_{j=1}^{n-1} m(J_j) = 4M(n-1)\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Üçgen eşitsizliğinden

$$\int_{[a,b]} |\,f - g\,| \le \int_{[a,b]} |\,f - s\,| + \int_{[a,b]} |\,s - g\,| < \varepsilon.$$

■

Böylece Lebesgue integralinin temel özelliklerini tamamlamış olduk: doğrusallık ve monotonluğun yanında yakınsaklık teoremleri, sayılabilir toplamsallık ve süreklilik. Kitabın son bölümü, bu araçları bir arada çalıştıran Ek Alıştırmalar'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

15. Ek Alıştırmalar

Bu bölümdeki alıştırmalar, ölçü ve integral kuramının temel araçlarını kısa ve somut sorular üzerinde çalıştırır. Her sorunun çözümü kendi kutusunun içindedir.

15.1 Dış Ölçü ve Ölçülebilir Kümeler

İlk üç soru, dış ölçünün infimum tanımını ve Carathéodory koşulunu doğrudan kullanır.

Alıştırma 15.1 (Dış Ölçüye Yakın Toplamlı Örtü). $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $m^*(A) < \infty$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < m^*(A) + \varepsilon$$

olacak biçimde boş olmayan, açık ve sınırlı aralıklardan oluşan bir $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin var olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1. Dış ölçünün tanımına göre (Tanım 1.5)

$$m^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \Big\},$$

burada infimum, A'yı örten boş olmayan, açık ve sınırlı aralık dizileri $\{I_k\}$ üzerinden alınır.
Adım 2. Tersini varsayalım: A'yı örten her $\{I_k\}$ dizisi için $\sum_k \ell(I_k) \geq m^*(A) + \varepsilon$ olsun. O zaman $m^*(A) + \varepsilon$, infimumu alınan kümenin bir alt sınırıdır. İnfimum en büyük alt sınır olduğundan (bkz. Analiz 1: Supremum, İnfimum ve Tamlık)

$$m^*(A) \geq m^*(A) + \varepsilon$$

olur.
Adım 3. $m^*(A)$ sonlu bir reel sayı olduğundan her iki yandan çıkarılabilir ve $0 \geq \varepsilon$ elde edilir. Bu, $\varepsilon > 0$ ile çelişir. Demek ki toplamı $m^*(A) + \varepsilon$'dan küçük olan bir örtü vardır.
Yani $m^*(A)$ sonluyken $m^*(A) + \varepsilon$ sayısı infimumdan kesin olarak büyüktür ve bu yüzden alt sınır olamaz. $m^*(A) = \infty$ olsaydı bu sayı ∞ olur ve istenen kesin eşitsizlik sağlanamazdı; sonluluk varsayımı bu yüzden gereklidir.
■

Alıştırma 15.2 (Aralığın Ölçülebilir Kümeyle Bölünmesi). E ölçülebilir bir küme ve $a < b$ olsun.

$$b - a = m\,\big(\,(a,b) \cap E\,\big) + m\,\big(\,(a,b) \setminus E\,\big)$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1. E ölçülebilir olduğundan Carathéodory koşulu (Tanım 1.6) her $A \subseteq \mathbb{R}$ test kümesi için

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$$

eşitliğini verir. Test kümesi olarak $A = (a,b)$ seçelim.
Adım 2. Bir aralığın dış ölçüsü uzunluğuna eşittir (Teorem 1.1), yani $m^*((a,b)) = b - a$. Böylece

$$b - a = m^*\,\big(\,(a,b) \cap E\,\big) + m^*\,\big(\,(a,b) \setminus E\,\big)\,.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3. (a,b) ve E ölçülebilirdir. Ölçülebilir kümeler bir σ-cebiri oluşturduğundan (Teorem 2.4) $(a,b)\cap E$ ve $(a,b)\setminus E = (a,b)\cap E^c$ kümeleri de ölçülebilirdir. Ölçülebilir kümelerde m, m^*'ın kısıtlanışıdır; bu yüzden sağ taraftaki dış ölçüler m ile yazılabilir ve istenen eşitlik elde edilir.
■

Alıştırma 15.3 (Aralıktan İrrasyonelleri Çıkarmak). $A=[1,2]$ ve $B=[1,2]\setminus\mathbb{Q}$ olsun. $m(A\setminus B)$ değerini bulun.

Çözüm.
Adım 1. Farkı sadeleştirelim. $A\setminus B = A\cap B^c$ ve De Morgan kuralıyla $B^c = [1,2]^c\cup\mathbb{Q}$ olduğundan

$$\begin{aligned} A\setminus B &= [1,2]\cap\left([1,2]^c\cup\mathbb{Q}\right)\\ &= \left([1,2]\cap[1,2]^c\right)\cup\left([1,2]\cap\mathbb{Q}\right)\\ &= [1,2]\cap\mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Adım 2. $[1,2]\cap\mathbb{Q}$, sayılabilir $\mathbb{Q}$ kümesinin bir alt kümesi olduğundan sayılabilirdir (bkz. Analiz 1: Sayılabilir Kümeler). Elemanlarını $q_1, q_2, \ldots$ diye sıralayalım. Verilen $\varepsilon>0$ için

$$I_k = \left(q_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}},\, q_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$$

aralıkları kümeyi örter ve $\sum_k \ell(I_k) = \sum_k \varepsilon/2^k = \varepsilon$ olur. Buradan $m^*([1,2]\cap\mathbb{Q})\le\varepsilon$ bulunur; ε keyfi olduğundan dış ölçü 0'dır.
Adım 3. Dış ölçüsü sıfır olan küme ölçülebilirdir (Teorem 1.4). Dolayısıyla

$$m(A\setminus B) = m\left([1,2]\cap\mathbb{Q}\right) = 0.$$

■

15.2 Ölçülebilir Fonksiyonlar

Aşağıdaki sorularda ölçülebilirlik, $\{f>c\}$ ya da $\{f<c\}$ biçimindeki kümelerin ölçülebilirliği üzerinden denetlenir.

Alıştırma 15.4 (Sayılabilir Kümede Tanımlı Fonksiyon). $A\subseteq\mathbb{R}$ sayılabilir bir küme ve $f:A\to\mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. f ölçülebilir midir?

Çözüm.
Evet, f her zaman ölçülebilirdir.
Adım 1. Tanım kümesi ölçülebilirdir. Sayılabilir bir kümenin dış ölçüsü 0'dır (bir önceki sorudaki örtü bunu her sayılabilir küme için verir); dış ölçüsü sıfır olan küme ölçülebilir olduğundan (Teorem 1.4) A ölçülebilirdir ve $m(A)=0$ olur.
Adım 2. $c\in\mathbb{R}$ keyfi olsun. $\{x\in A : f(x)>c\}\subseteq A$ olduğundan dış ölçünün monotonluğuyla

$$0\le m^*\left(\{x\in A: f(x)>c\}\right)\le m^*(A)=0$$

bulunur. Demek ki bu kümenin dış ölçüsü sıfırdır ve küme ölçülebilirdir.
Adım 3. c keyfi olduğundan her $c\in\mathbb{R}$ için $\{f>c\}$ ölçülebilirdir. Ölçülebilir fonksiyon tanımına göre (Tanım 7.2) f ölçülebilirdir.
Yani ölçüsü sıfır olan bir küme üzerinde tanımlı her fonksiyon, değerleri ne olursa olsun, ölçülebilirdir.
■

Alıştırma 15.5 (Ölçülebilir Fonksiyonların İnfimumu). $\{f_n\}$, E üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Her $x\in E$ için

$$f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

diye tanımlanan f fonksiyonunun (değerleri $\overline{\mathbb{R}}$'de olabilir) ölçülebilir olduğunu gösterin.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Adım 1. $c \in \mathbb{R}$ ve $x \in E$ olsun. İnfimumun tanımından

$$\inf_n f_n(x) < c \Leftrightarrow \text{bir } \; n \in \mathbb{N} \; \text{ için } \; f_n(x) < c$$

olur. Gerçekten, c sayısı infimumdan büyükse alt sınır olamaz, dolayısıyla bir $f_n(x)$ değeri c'nin altındadır; tersine bir $f_n(x) < c$ ise $f(x) \leq f_n(x) < c$ olur.
Adım 2. Bu denklik küme diliyle şöyle yazılır:

$$\{x \in E : f(x) < c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) < c\}.$$

Adım 3. Her f_n ölçülebilir olduğundan sağdaki her küme ölçülebilirdir (Teorem 7.1). Ölçülebilir kümeler bir σ-cebiri oluşturduğundan (Teorem 2.4) bunların sayılabilir birleşimi de ölçülebilirdir.
Adım 4. Böylece her $c \in \mathbb{R}$ için $\{f < c\}$ ölçülebilirdir. Ölçülebilirliğin denk koşullarına göre (Teorem 7.1) f ölçülebilirdir.
■

Alıştırma 15.6 (Daralan Aralıklarda Büyüyen Basamaklar). Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$,

$$f_n = n\,\chi_{(0,\,1/\sqrt{n})}$$

olsun. $\{f_n\}$ dizisinin $(0,1)$ üzerinde noktasal olarak 0'a yakınsadığını ve limit fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1. $x \in (0,1)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Arşimet özelliğine göre $n_0 > 1/x^2$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır (bkz. Analiz 1: Supremum, İnfimum ve Tamlık). Bu, $1/\sqrt{n_0} < x$ demektir.
Adım 2. Her $n \geq n_0$ için $1/\sqrt{n} \leq 1/\sqrt{n_0} < x$ olduğundan $x \notin (0, 1/\sqrt{n})$ ve

$$|\, f_n(x) - 0 \,| = \left|\, n\,\chi_{(0,\,1/\sqrt{n})}(x) \,\right| = n \cdot 0 = 0 < \varepsilon.$$

Demek ki $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. x keyfi olduğundan dizi $(0,1)$ üzerinde noktasal olarak $f \equiv 0$ fonksiyonuna yakınsar.
Adım 3. $f \equiv 0$ ölçülebilirdir: $c \in \mathbb{R}$ için $\{f > c\}$ kümesi $c < 0$ ise $(0,1)$, $c \geq 0$ ise $\varnothing$ olur ve ikisi de ölçülebilirdir. Aynı sonuç, her f_n basit (dolayısıyla ölçülebilir) bir fonksiyon olduğundan, ölçülebilir fonksiyonların noktasal limitinin ölçülebilir olmasından (Teorem 8.1) da çıkar.
Örneğin $x = 0{,}3$ için $1/\sqrt{n} < 0{,}3$ koşulu $n \geq 12$ iken sağlanır; $f_1(x), \ldots, f_{11}(x)$ değerleri $1, \ldots, 11$ olup sonraki bütün terimler 0'dır.
■

15.3 Basit ve Sınırlı Fonksiyonların İntegrali

Bu kesimde integral, basit fonksiyonlar için doğrudan tanımdan hesaplanır ve sınırlı fonksiyonlara basit yaklaşım yoluyla taşınır.

Alıştırma 15.7 (Ters Karelerle Basamak Fonksiyonu). $n \in \mathbb{N}$ ve $E = (1, n+1]$ olsun. $u : E \to \mathbb{R}$,

$$u = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\,\chi_{(k,\,k+1]}$$

basit fonksiyonu için $\int_E u$ integralini hesaplayın.

Çözüm.
Adım 1. $(k, k+1]$ aralıkları $(k = 1, \ldots, n)$ ikişer ikişer ayrıktır ve birleşimleri $E = (1, n+1]$'dir. u fonksiyonu $(k, k+1]$ üzerinde sabit $1/k^2$ değerini alır ve bu değerler birbirinden farklıdır; dolayısıyla verilen yazılış u'nun kanonik gösterimidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2. Basit bir fonksiyonun integrali, aldığı her değerle o değeri aldığı kümenin ölçüsünün çarpımlarının toplamıdır:

$$\int_E u = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\, m\left(\,(k, k+1]\,\right).$$

Adım 3. $m((k,k+1]) = (k+1) - k = 1$ olduğundan

$$\int_E u = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Örneğin $n = 3$ için $\int_E u = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$ bulunur.
■

Alıştırma 15.8 (Sonlu Ölçülü Kümede Sınırlı Fonksiyon). $m(E) < \infty$ ve $f : E \to \mathbb{R}$ sınırlı, ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f'nin E üzerinde Lebesgue integrallenebilir olduğunu, yani alt ve üst Lebesgue integrallerinin eşit olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1. $n \in \mathbb{N}$ olsun. Basit yaklaşım lemmasına göre (Lemma 8.1) E üzerinde

$$\varphi_n \le f \le \psi_n, \qquad 0 \le \psi_n - \varphi_n \le \frac{1}{n}$$

olacak biçimde φ_n ve ψ_n basit fonksiyonları vardır.
Adım 2. $m(E) < \infty$ olduğundan basit fonksiyonların E üzerindeki integralleri sonludur. Basit fonksiyonlar için integralin doğrusallığı ve monotonluğundan

$$\begin{aligned} 0 \le \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n &= \int_E (\psi_n - \varphi_n) \\ &\le \int_E \frac{1}{n}\,\chi_E = \frac{m(E)}{n} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğe $(*)$ diyelim.
Adım 3. Alt ve üst Lebesgue integrallerini

$$L = \sup\Big\{ \int_E \varphi : \varphi \ \text{ basit}, \varphi \le f \Big\},$$
$$U = \inf\Big\{ \int_E \psi : \psi \ \text{ basit}, \psi \ge f \Big\}$$

ile gösterelim. $\varphi \le f \le \psi$ olan her basit φ, ψ için monotonluktan $\int_E \varphi \le \int_E \psi$ olduğundan $L \le U$ olur.
Adım 4. φ_n ve ψ_n bu kümelerin elemanları olduğundan $L \ge \int_E \varphi_n$ ve $U \le \int_E \psi_n$ olur. $(*)$ ile birlikte her n için

$$0 \le U - L \le \int_E \psi_n - \int_E \varphi_n \le \frac{m(E)}{n}.$$

Adım 5. $n \to \infty$ iken sağ taraf 0'a gider. Dolayısıyla $U = L$ olur ve f, E üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir.
■

15.4 Limit ile İntegralin Yer Değiştirmesi

Aşağıdaki sorular, limit ile integralin hangi koşullarda yer değiştirebildiğini ve bu koşullar sağlanmadığında neler olabileceğini gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 15.9 (Sivri Dizinin İntegralleri). Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$,

$$f_n(x) = n\,\chi_{[0,\,1/n]}(x) = \begin{cases} n, & x \in [0,1/n], \\ 0, & x \in (1/n,1] \end{cases}$$

olsun. $\int_{[0,1]} f_n$ integrallerini ve $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n$ limitini bulun.

Çözüm.
Adım 1. $n = 1$ için $f_1 = 1 \cdot \chi_{[0,1]}$ olduğundan

$$\int_{[0,1]} f_1 = 1 \cdot m([0,1]) = 1.$$

Adım 2. $n \geq 2$ için f_n, $[0,1/n]$ üzerinde n, $(1/n,1]$ üzerinde 0 değerini alan basit bir fonksiyondur. Basit fonksiyonun integralinden

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f_n &= n \cdot m\left([0,\frac{1}{n}] \right) + 0 \cdot m\left((\frac{1}{n},1] \right) \\ &= n \cdot \frac{1}{n} + 0 = 1. \end{aligned}$$

Adım 3. Demek ki her n için $\int_{[0,1]} f_n = 1$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n = 1.$$

■

Alıştırma 15.10 (Sivri Dizinin Limitinin İntegrali). Her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n = n\,\chi_{[0,\,1/n]}$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde tanımlı olsun. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ noktasal limitini ve $\int_{[0,1]} f$ integralini bulun; sonucu $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n = 1$ ile karşılaştırın.

Çözüm.
Adım 1. $x = 0$ için her n'de $0 \in [0,1/n]$ olduğundan $f_n(0) = n \to \infty$, yani $f(0) = \infty$.
Adım 2. $x \in (0,1]$ olsun. Arşimet özelliğiyle $1/n_0 < x$ olan bir n_0 vardır. Her $n \geq n_0$ için $1/n \leq 1/n_0 < x$ olduğundan $x \notin [0,1/n]$ ve $f_n(x) = 0$ olur. Demek ki $f(x) = 0$. Sonuç olarak

$$f(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0, \\ 0, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Adım 3. f negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyondur ve yalnız $m(\{0\}) = 0$ ölçülü kümede sıfırdan farklıdır; yani $[0,1]$ üzerinde hemen her yerde $f = 0$'dır. f'nin integrali, $0 \leq h \leq f$ olan sınırlı, ölçülebilir ve sonlu destekli h fonksiyonlarının integrallerinin supremumudur. Böyle bir h, $(0,1]$ üzerinde 0'dır ve bir M sayısıyla sınırlıdır; bu yüzden $\int_{[0,1]} h \leq M \cdot m(\{0\}) = 0$. Dolayısıyla

$$\int_{[0,1]} f = 0.$$

Adım 4. Karşılaştırma:

$$\int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} f_n = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n.$$

Limit ile integral burada yer değiştirmez. Bu, Fatou lemmasıyla (Lemma 12.2) uyumludur; lemma yalnız $\int f \leq \liminf \int f_n$ eşitsizliğini verir ve eşitsizlik bu örnekte kesindir. Monoton yakınsaklık teoremi de uygulanamaz, çünkü dizi artan değildir: örneğin $x = 1/3$ noktasında $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 2$, $f_3(x) = 3$ iken $f_4(x) = 0$ olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 15.11 (Kayan Blok Dizisinin Noktasal Limiti). Her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n = \chi_{(n,\,n+1)}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı olsun. $\{g_n\}$ dizisinin noktasal olarak bir g fonksiyonuna yakınsadığını gösterin ve g'yi bulun.

Çözüm.
Adım 1. $x \in \mathbb{R}$ olsun. Arşimet özelliğine göre $n_0 > x$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.
Adım 2. Her $n \geq n_0$ için $x < n_0 \leq n$ olduğundan $x \notin (n, n+1)$ ve

$$\mid g_n(x) - 0 \mid = \mid \chi_{(n,\,n+1)}(x) - 0 \mid = 0.$$

Adım 3. Demek ki her $x \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ ve $g \equiv 0$ olur.
Yani birim yüksekliğindeki blok sağa doğru kayar; sabit bir x noktası bir süre sonra bloğun hep solunda kalır.
■

Alıştırma 15.12 (Kayan Blok Dizisinin Limitinin İntegrali). Her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n = \chi_{(n,\,n+1)}$ olsun ve g, $\{g_n\}$ dizisinin $\mathbb{R}$ üzerindeki noktasal limiti olsun. $\int_{\mathbb{R}} g$ integralini bulun.

Çözüm.
Adım 1. Bir önceki sorudan her $x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = 0$, yani $g \equiv 0$'dır.
Adım 2. $g = 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}}$ basit bir fonksiyondur. Negatif olmayan fonksiyonların integralinde $0 \cdot \infty = 0$ uzlaşımı kullanılır; ayrıca $0 \leq h \leq g$ olan her h özdeşçe sıfırdır. Dolayısıyla

$$\int_{\mathbb{R}} g = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0.$$

■

Alıştırma 15.13 (Kayan Blok Dizisinin İntegrallerinin Limiti). Her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n = \chi_{(n,\,n+1)}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n$ limitini bulun ve noktasal limitin integraliyle karşılaştırın.

Çözüm.
Adım 1. $n \in \mathbb{N}$ olsun. g_n, $(n, n+1)$ üzerinde 1, dışında 0 olan basit bir fonksiyondur. Basit fonksiyonun integralinden

$$\int_{\mathbb{R}} g_n = 1 \cdot m\,\big(\,(n, n+1)\,\big) = 1 \cdot \big(\,(n+1) - n\,\big) = 1.$$

Adım 2. Her n için integral 1 olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n = 1.$$

Adım 3. Önceki iki sorudan noktasal limit $g \equiv 0$ ve $\int_{\mathbb{R}} g = 0$'dır. Böylece

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} g_n = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n.$$

Burada da limit ile integral yer değiştirmez. Dizi artan değildir. Ayrıca her n için $h \geq g_n$ olan bir h, tam sayı olmayan her $x > 1$ noktasında $h(x) \geq 1$ sağlar; bu yüzden $\int_{\mathbb{R}} h = \infty$ olur ve bütün g_n'leri sınırlayan integrallenebilir bir fonksiyon yoktur. Dolayısıyla ne monoton ne de baskın yakınsaklık teoremi uygulanabilir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 15.14 (Negatif Olmayan Serinin Terim Terim İntegrali). $\{g_n\}$, E üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ve her $x \in E$ için $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ olsun (değerler $[0,\infty]$'da olabilir).

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E g_n$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1. Kısmi toplamları tanımlayalım: her $n \in \mathbb{N}$ için

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} g_k.$$

Adım 2. $\{s_n\}$ dizisinin özellikleri:

- Her n için $s_n \geq 0$, çünkü negatif olmayan terimlerin toplamıdır.
- Her s_n ölçülebilirdir. Terimler negatif olmadığından toplam $[0,\infty]$'da iyi tanımlıdır ve her $c \in \mathbb{R}$ için

  $$\{g_1 + g_2 > c\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\{g_1 > q\} \cap \{g_2 > c - q\} \right)$$

  eşitliği gereği $\{g_1 + g_2 > c\}$ kümesi, ölçülebilir kümelerin sayılabilir birleşimi olarak ölçülebilirdir. Tümevarımla her s_n ölçülebilirdir.
- Her n için $s_{n+1} = s_n + g_{n+1} \geq s_n$, yani dizi artandır.
- Serinin tanımı gereği E üzerinde noktasal olarak $s_n \to g$.

Adım 3. Bu dört özellik monoton yakınsaklık teoreminin (Teorem 12.4) varsayımlarıdır. Teoremden

$$\int_E g = \lim_{n\to\infty} \int_E s_n.$$

Adım 4. Negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların integrali toplamsaldır; bu yüzden

$$\int_E s_n = \int_E \sum_{k=1}^{n} g_k = \sum_{k=1}^{n} \int_E g_k.$$

Adım 5. Son iki eşitlik birleştirilirse

$$\int_E g = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_E g_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E g_n$$

bulunur. Terimler negatif olmadığından sağdaki seri ya yakınsar ya da ∞'a ıraksar; eşitlik her iki durumda da geçerlidir.
■

15.5 Genel Lebesgue İntegrali

Son iki soru, işaret değiştirebilen integrallenebilir fonksiyonlarla çalışır ve baskın yakınsaklık teoremini ve karşılaştırma ilkesini kullanır.

Alıştırma 15.15 (İntegralin Tanım Kümesine Göre Sayılabilir Toplamsallığı). f, E üzerinde integrallenebilir olsun ve $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ikişer ikişer ayrık ölçülebilir kümelerden oluşan, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ koşulunu sağlayan bir dizi olsun.

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1. $n \in \mathbb{N}$ için $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ ve

$$f_n = f \cdot \chi_{F_n}$$

olsun. F_n ölçülebilir olduğundan χ_{F_n} ölçülebilirdir. f integrallenebilir olduğundan E üzerinde hemen her yerde sonludur; dolayısıyla $f_n = f\,\chi_{F_n}$, hemen her yerde sonlu iki ölçülebilir fonksiyonun çarpımı olarak ölçülebilirdir (Teorem 7.4). Ayrıca E üzerinde $\mid f_n \mid \leq \mid f \mid$ olur.
Adım 2. E üzerinde $f_n \to f$ noktasal olarak: $x \in E$ ise x, kümelerin ayrıklığından tam olarak bir E_m kümesindedir. Her $n \geq m$ için $x \in F_n$ ve $f_n(x) = f(x)$ olur.
Adım 3. $\mid f \mid$ integrallenebilir ve bütün f_n'leri sınırlar. Baskın yakınsaklık teoremine göre (Teorem 13.4)

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n. \tag{1}$$

Adım 4. F_n ayrık $E_1, \ldots, E_n$ kümelerinin birleşimi olduğundan $f_n = \sum_{k=1}^{n} f\chi_{E_k}$ olur. Her $f\chi_{E_k}$ integrallenebilirdir, çünkü $\mid f\chi_{E_k} \mid \leq \mid f \mid$. İntegralin doğrusallığından (Teorem 13.3)

$$\int_E f_n = \sum_{k=1}^{n} \int_E f\chi_{E_k} = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f. \tag{2}$$

Adım 5. (1) ve (2) birleştirilirse

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f$$

elde edilir; özellikle sağdaki seri yakınsaktır.
Burada sınırlı yakınsaklık teoremi yeterli olmaz: f sınırlı olmayabilir ve $m(E)$ sonsuz olabilir. Gereken, bütün f_n'leri integrallenebilir tek bir fonksiyonun sınırlamasıdır; bunu $\mid f \mid$ sağlar.
■

Alıştırma 15.16 (İntegrallenebilir Fonksiyonla Sınırlı Fonksiyonun Çarpımı). f, E üzerinde integrallenebilir ve g, E üzerinde sınırlı ve ölçülebilir olsun. fg çarpımının E üzerinde integrallenebilir olduğunu gösterin.

Çözüm.
Adım 1. g sınırlı olduğundan E üzerinde $\mid g \mid \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır.
Adım 2. f integrallenebilir olduğundan hemen her yerde sonludur; sıfır ölçülü bir kümede değer değiştirmek ne ölçülebilirliği ne de integrali etkiler. Böylece fg, ölçülebilir iki fonksiyonun çarpımı olarak ölçülebilirdir (Teorem 7.4).
Adım 3. Bir fonksiyon ancak ve ancak mutlak değeri integrallenebilirse integrallenebilirdir (Tanım 13.2). $\mid f \mid$ integrallenebilir olduğundan $M \mid f \mid$ de integrallenebilirdir ve E üzerinde

$$\mid fg \mid = \mid f \mid \mid g \mid \leq M \mid f \mid .$$

Adım 4. Negatif olmayan fonksiyonlar için integralin monotonluğundan

$$\int_E \mid fg \mid \leq M \int_E \mid f \mid < \infty.$$

Demek ki $\mid fg \mid$ integrallenebilir, dolayısıyla fg de E üzerinde integrallenebilirdir.
Adım 5. Ayrıca integralin mutlak değer eşitsizliğinden

$$\left| \int_E fg \right| \leq \int_E \mid fg \mid \leq M \int_E \mid f \mid$$

 CC BY-NC-SA 4.0

> elde edilir.
> ■

Bu alıştırmalar, dış ölçüden yakınsaklık teoremlerine kadar kitaptaki temel araçların birlikte nasıl işlediğini kısa hesaplar üzerinde bir kez daha gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0