

Raslantı Süreçleri

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 20 Eylül 2026

İçindekiler

	Giriş	7
1	Stokastik Süreç Kavramı	9
1.1	Stokastik Süreç Nedir?	9
1.2	Kesikli ve Sürekli Zamanlı Süreçler	9
1.3	Çok Boyutlu Süreçler	10
1.4	Bağımsız Toplamlar: Sarılım	10
2	Variş Sayma Süreci ve Erlang Dağılımı	13
2.1	Temel Büyüklükler	13
2.2	Erlang Dağılımı	14
2.3	Sayma ile Zaman Arasındaki Köprü	14
3	Poisson Süreci ve Uygulamaları	17
3.1	Beklenen Değer	17
3.2	Birleştirme ve Ayrıştırma	18
3.3	Çözümlü Problemler	19
4	Markov Zincirlerine Giriş	25
4.1	Markov Özelliği	25
4.2	Geçiş Olasılık Matrisi	25
4.3	Olasılık Vektörleri	26
4.4	Olasılık Vektörünün Korunması	27
4.5	Regüler Matrisler	28
5	Olasılık Dağılımı ve Chapman–Kolmogorov Eşitlikleri	29
5.1	Markov Zincirinin Olasılık Dağılımı	29
5.2	Chapman–Kolmogorov Teoremi	30
5.3	Çözümlü Uygulamalar	31
5.4	Alıştırma	33
6	Durumların Sınıflandırılması ve İndirgeme	35
6.1	Durum Tipleri	35
6.2	Sınıflandırma Örneği	35
6.3	Geçiş Matrisinin İndirgenmesi	36
7	Regüler Matrisler ve Daimi Durum Olasılıkları	39
7.1	Yakınsama Teoremi	39
7.2	Daimi Durum Olasılıkları	39

7.3	Çözüm Adımları	40
7.4	Çözümlü Uygulamalar	40
7.5	Genel 2×2 Regüler Matris	41
7.6	Regüler ve Yutucu Zincirlerin Karşılaştırması	43
8	Yutucu Matrisler ve Yutulma Olasılıkları	45
8.1	Kanonik Form	45
8.2	Temel Matris ve Yutulma Olasılıkları	45
8.3	Adım Adım Çözüm Algoritması	46
8.4	Çözümlü Uygulama	46
9	Basit Lineer Regresyon ve En Küçük Kareler Yöntemi	49
9.1	Serpilme Diyagramları ve Korelasyon	49
9.2	Basit Lineer Regresyon Modeli	50
9.3	En Küçük Kareler Yöntemi (EKK)	50
9.4	Adım Adım Çözüm Algoritması	51
9.5	Çözümlü Uygulamalar	51
10	Lineer Hâle Dönüştürülebilir Modeller	55
10.1	Sık Kullanılan Matematiksel Dönüşümler	55
10.2	Adım Adım Çözüm Algoritması	56
10.3	Çözümlü Uygulama	56
11	Otokorelasyon ve Tahmin Hatalarının Ölçülmesi	59
11.1	Otokorelasyon Kavramı	59
11.2	Tahmin Hatalarının Ölçülmesi	59
11.3	Adım Adım Çözüm Algoritması	60
11.4	Çözümlü Uygulama	60
12	Tabii Model, Trend ve Mevsimsellik Analizi	63
12.1	Trend ve Mevsimsellik Yoksa (Sabit Model)	63
12.2	Sadece Trend Varsa	64
12.3	Sadece Mevsimsellik Varsa	64
12.4	Hem Trend Hem Mevsimsellik Varsa	65
13	Hareketli Ortalamalar Metodu (Tek ve İki Katlı)	67
13.1	Tek Katlı Hareketli Ortalamalar (Trend Yoksa)	67
13.2	İki Katlı Hareketli Ortalamalar (Trend Varsa)	68
14	Oyun Teorisine Giriş ve Saf Stratejiler	71
14.1	Oyun Teorisi Nedir?	71
14.2	Terminoloji	71
14.3	Saf ve Karma Stratejiler	71
14.4	Maximin ve Minimax	72

15	Karma Stratejiler ve Grafik Çözüm Yöntemi	75
15.1	Ne Zaman Karma Strateji?	75
15.2	Yöntemin Kurulması	75
15.3	Çözümlü Uygulama	76

Giriş

Bu bölümde, belirsizlik içeren dinamik sistemlerin olasılıksal modellerini inceliyoruz. Stokastik temellerden başlayarak; sistemlerin zaman içindeki durum geçişlerini, veri tabanlı gelecek tahminlerini ve stratejik karar alma mekanizmalarını adım adım ilerleyen bir yapıda ele alıyoruz.

i Not

Aşağıdaki müfredatta bağlantılı olan başlıkların notları hazırdır. Bağlantısız başlıklar sırasıyla yazılmakta olup tamamlandıkça bu sayfaya eklenecektir.

1. Stokastik Süreç Kavramı

1.1 Stokastik Süreç Nedir?

Stokastik kelimesi “rasgele” ile aynı anlamdadır. Bir sistemin davranışı tamamen kontrol altına alınamıyorsa, yani sistemde giderilemeyen bir belirsizlik varsa, o sistemi olasılık teorisinin diliyle modellemek gerekir.

Tanım 1.1 (Stokastik Süreç). Ortak bir olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bir T indis kümesiyle indislenmiş rasgele değişkenler ailesine **stokastik süreç** (rasgele süreç) denir:

$$\{X_t \mid t \in T\}$$

Burada t genellikle **zamanı** temsil eder. Sürecin aldığı bütün olası değerlerin kümesine **durum uzayı** denir ve S ile gösterilir.

Kısacası bir stokastik süreç, belirsizliğe konu olan dinamik bir sistemin olasılıksal modelidir. Tek bir rasgele değişkenden farkı, sistemin **zaman içindeki evrimini** takip etmesidir.

1.2 Kesikli ve Sürekli Zamanlı Süreçler

Süreçleri ayıran ilk ölçüt, indis kümesi T 'nin yapısıdır.

Tanım 1.2 (Kesikli ve Sürekli Zamanlı Süreç). **Kesikli zamanlı stokastik süreç.** İndis kümesi $\{0, 1, 2, \dots\}$ gibi sayılabilir olan süreçtir:

$$\{S_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$$

Burada $S_0, S_1, S_2, \dots$ sürecin rasgele değişkenleridir. n değişkeni çoğu zaman bir **adım** ya da **deneme sayısı** anlamı taşır.

Sürekli zamanlı stokastik süreç. İndis kümesi bir aralık olan süreçtir:

$$\{Y_t \mid t \geq 0\}$$

Burada sıralama doğrudan $t \geq 0$ zaman parametresine göre yapılır.

i n ile t arasındaki fark

Her iki durumda da indis genel olarak zamana bağlıdır; fark, zamanın nasıl ölçüldüğündedir.

- Kesikli süreçte n , zamanın **dolaylı** ölçüsüdür: kaçınıcı adımda olduğumuzu söyler.
- Sürekli süreçte t **doğrudan zamandır**; iki gözlem arasında istediğiniz kadar ince aralık seçebilirsiniz.

Örnek 1.1 (Kesikli Stokastik Süreç). $\{S_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ süreci verilsin ve S_n 'in durum uzayı $S = \{1, 2, 3, 4\}$ olsun. Bu dört durum, bir kişinin bankada yapabileceği dört ayrı işlemi gösterebilir:

1 = para çekme, 2 = para yatırma, 3 = havale, 4 = bakiye sorgulama

Burada n , yapılan **işlem sayısıdır**. Örneğin bir müşteri 5 defa para çekme, 12 defa para yatırma, 3 defa havale ve 1 defa bakiye sorgulama yapmışsa

$$n = 5 + 12 + 3 + 1 = 20$$

olur; süreç $S_1, S_2, \dots, S_{20}$ adımlarıyla izlenir.

Örnek 1.2 (Sürekli Stokastik Süreç). $\{Y_t \mid t \geq 0\}$ süreci verilsin ve Y_t 'nin durum uzayı $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ olsun.

Y_t , bir alışveriş merkezinin otoparkına t anına kadar park etmiş araç sayısını gösterebilir. Zaman kesintisiz aktığı için süreç sürekli zamanlıdır; buna karşılık **durum uzayı kesiklidir** (araç sayısı bir tam sayıdır).

💡 Dört kombinasyon

Son örnek önemli bir noktayı gösteriyor: zamanın ve durum uzayının kesikli/sürekli olması **birbirinden bağımsız** iki özelliktir. Dolayısıyla dört sınıf vardır:

	Kesikli durum uzayı	Sürekli durum uzayı
Kesikli zaman	Yazı-tura dizisi	Günlük kapanış fiyatı
Sürekli zaman	Otoparktaki araç sayısı	Bir cismin sıcaklığı

1.3 Çok Boyutlu Süreçler

Bazı sistemlerde her adımda tek bir sayı değil, birden çok büyüklük birlikte gözlenir. Bu durumda süreç bir **rasgele vektör dizisi** olarak yazılır.

Tanım 1.3 (Çok Boyutlu Stokastik Süreç). Her adımda m tane büyüklük gözleniyorsa, j . adımdaki gözlem

$$S_j = \begin{pmatrix} S_{1j} \\ S_{2j} \\ \vdots \\ S_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, n$$

biçiminde bir rasgele vektördür. Sürecin tamamı ise $m \times n$ boyutlu

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mn} \end{pmatrix}$$

dizilimiyle temsil edilir; buradaki her S_{ij} bir rasgele değişkendir.

1.4 Bağımsız Toplamlar: Sarılım

Stokastik süreçlerin çoğu, bağımsız rasgele değişkenlerin **birikimli toplamı** olarak kurulur. Bu yüzden toplamın dağılımını bilmek gerekir.

Tanım 1.4 (Bağımsız Toplamların Dağılımı). $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız ve **aynı dağılımlı** rasgele değişkenler olsun; ortak kümülatif dağılım fonksiyonları F_X olsun. Toplamları

$$Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

olarak tanımlansın. Bu durumda Z_n 'in kümülatif dağılım fonksiyonu F_{Z_n} , F_X 'in **n katlı sarılımıdır** (konvolüsyondur).

i “Zamana göre kararlı” ne demek?

X_i 'lerin aynı dağılıma sahip olması, dağılımın zamandan etkilenmemesi anlamına gelir. Örneğin bir kaza sürecinde, kazalar arası sürenin dağılımı yılın hangi ayında olduğumuza bağlı değilse süreç bu anlamda kararlıdır.

Örnek 1.3 (Bernoulli'den Binom'a). F_X bir Bernoulli dağılımı ise $(X_i \in \{0, 1\}, P(X_i = 1) = p)$, toplam Z_n hangi dağılıma sahiptir?

Çözüm.

$Z_n = X_1 + \dots + X_n$, n bağımsız denemede başarı sayısını verir; yani Z_n , **n denemeli binom dağılımına** sahiptir. Olasılık fonksiyonu

$$P_{Z_n}(b) = \binom{n}{b} p^b q^{n-b} = \frac{n!}{b!(n-b)!} p^b (1-p)^{n-b}, \quad b = 0, 1, \dots, n$$

kümülatif dağılım fonksiyonu ise $0 \leq a \leq n$ için

$$F_{Z_n}(a) = \sum_{j=0}^{\lfloor a \rfloor} \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}$$

olur. Burada Z_n , n denemede **varış sayısını** göstermektedir.

■

Bir sonraki bölümde aynı kurguyu sürekli zamanda tekrarlayacağız: X_i 'ler üstel dağılımlı olduğunda toplamları **Erlang** dağılımına, sayma süreci ise **Poisson** sürecine götürecektir.

2. Varış Sayma Süreci ve Erlang Dağılımı

Bir sistemde **aynı türden olaylar** arka arkaya meydana geliyor olsun: bir kavşakta kazalar, bir acil serviste hastalar, bir santralde gelen çağrılar. Bu tür süreçlerde iki farklı bakış açısı vardır ve bunlar birbirinin ikizidir:

- **Zamana bakmak:** n . olayın gerçekleşmesi ne kadar sürer?
- **Saymaya bakmak:** t anına kadar kaç olay gerçekleşir?

Bu bölümde her iki bakışın notasyonunu kurup aralarındaki köprüyü atacağız.

2.1 Temel Büyüklükler

Tanım 2.1 (Varış Süreci Büyüklükleri). Arka arkaya meydana gelen aynı tür olaylar arasındaki zaman boşlukları $G_1, G_2, \dots$ olsun. Burada G_i , $(i - 1)$. olay ile i . olay arasında geçen süredir.

- T_n : n . olay oluncaya kadar geçen **toplam süredir**:

$$T_n = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

$\{T_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ sürecine **varış zamanları süreci** denir. Anlaşma gereği $T_0 = 0$ 'dır; bunun anlamı "henüz hiçbir olay olmamıştır".

- Y_t : t anı dâhil olmak üzere t zamanına kadar gerçekleşen **olay sayısıdır**. $\{Y_t \mid t \geq 0\}$ sürecine **varış sayma süreci** denir.
- R_a : a zamanından sonra **ilk olayın** olmasına kadar geçen süredir; **ileri rekürans süresi** olarak adlandırılır.

i Zaman boşlukları neden rasgeledir?

G_i süreleri genel olarak zamana göre karardır: bir kaza olduktan sonra diğer kazanın ne zaman olacağı belli değildir, ama bekleme süresinin **dağılımı** değişmez.

Sayma sürecinin farkları da sık kullanılır: $a \geq 0$ verilsin. a ile $a + \Delta a$ zamanları arasında gerçekleşen olay sayısı

$$Y_{a+\Delta a} - Y_a = Y_{\Delta a}$$

biçiminde yazılır. Yani sayma süreci **durağan artışıdır**: bir aralıktaki olay sayısının dağılımı, aralığın nerede başladığına değil yalnızca **uzunluğuna** bağlıdır.

Örnek 2.1 (Fark Notasyonu). Bir kavşakta kazalar olsun. $T_5 = 4$ ise, **5. kaza olana kadar** 4 birim zaman geçmiştir.

$$Y_5 - Y_3 = Y_2$$

ifadesi ise "3. ve 5. zaman birimleri arasında olan kaza sayısı" demektir; bu da 2 birimlik bir aralıktaki kaza sayısı ile aynı dağılıma sahiptir.

Örnek 2.2 (Sözelden Notasyona). "Bir a zamanından 24 birim zaman sonraya kadar olan olayların sayısının 30'dan fazla olması" olayı

$$\Pr\{Y_{a+24} - Y_a > 30\}$$

biçiminde ifade edilir.

2.2 Erlang Dağılımı

Sürekli zamanlı varış süreçlerinde G_i zaman boşlukları tipik olarak **üstel dağılımlıdır**. O hâlde T_n , n tane bağımsız üstel değişkenin toplamıdır.

Teorem 2.1 (Üstellerin Toplamı Erlang'dır). $G_1, \dots, G_n$ bağımsız ve her biri λ parametrelili üstel dağılıma sahip olsun. Bu durumda

$$T_n = G_1 + \dots + G_n$$

toplamı, λ parametrelili **n denemeli Erlang dağılımına** sahiptir. Kümülatif dağılım fonksiyonu ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $a \geq 0$ için

$$F_{T_n}(a) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda a} (\lambda a)^j}{j!}$$

$$f_{T_n}(a) = \frac{\lambda (\lambda a)^{n-1} e^{-\lambda a}}{(n-1)!}$$

biçimindedir.

İ Yoğunluk nereden geliyor?

Yoğunluk fonksiyonu, kümülatif dağılımın türevidir. Toplamdaki terimlerin büyük kısmı sadeleşir ve geriye tek bir terim kalır:

$$\frac{d}{da} F_{T_n}(a) = \lambda e^{-\lambda a} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\lambda a)^j}{j!} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(\lambda a)^k}{k!} \right] = \frac{\lambda (\lambda a)^{n-1} e^{-\lambda a}}{(n-1)!}$$

Baştaki çarpanın λa değil λ olduğuna dikkat edin; aksi hâlde yoğunluğun integrali 1 etmez.

İ Özel hâl

$n = 1$ için Erlang, üstel dağılıma indirgenir:

$$f_{T_1}(a) = \lambda e^{-\lambda a}, \quad F_{T_1}(a) = 1 - e^{-\lambda a}$$

Ayrıca üstel dağılımın beklenen değeri $E(G_i) = \frac{1}{\lambda}$ 'dir; buradan $E(T_n) = \frac{n}{\lambda}$ bulunur.

2.3 Sayma ile Zaman Arasındaki Köprü

Şimdi bölümün en önemli ilişkisine geldik. T_n ile Y_t aynı sürecin iki farklı okumasıdır ve birbirine şu denklikle bağlanır.

Teorem 2.2 (Sayma--Zaman Denkliği). Her $n \geq 1$ ve $t \geq 0$ için

$$\{T_n \leq t\} \Leftrightarrow \{Y_t \geq n\}$$

olayları aynıdır.

İspat.

$T_n \leq t$ demek, n . olayın en geç t anında gerçekleşmiş olması demektir. O hâlde t anına kadar en az n olay gerçekleşmiştir; yani $Y_t \geq n$ 'dir.

Tersine $Y_t \geq n$ ise, t anına kadar en az n olay olmuştur; özel olarak n . olay t 'den önce (ya da tam t 'de) gerçekleşmiştir, yani $T_n \leq t$ 'dir.

■

Bu denklik pratikte çok işe yarar: **dağılımı bilinmeyen bir büyüklüğü, dağılımı bilinen diğerine çevirmeyi** sağlar. Örneğin T_n 'in Erlang dağılımı doğrudan hesaplanması zor bir ifadedir; ama sayma tarafına geçilirse hesap Poisson olasılıklarına indirgenir:

$$\Pr\{T_n \leq t\} = \Pr\{Y_t \geq n\} = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!}$$

💡 Sayma tarafındaki üç temel ifade

$$\Pr\{Y_t < n\} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!}, \quad \Pr\{Y_t \leq n\} = \sum_{j=0}^n \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!}$$

İkisinin farkı, tek bir terimi yalıtır:

$$\Pr\{Y_t = n\} = \Pr\{Y_t \leq n\} - \Pr\{Y_t < n\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

Ayrıca tümleyen kuralı her zaman geçerlidir:

$$\Pr\{Y_t \geq n\} + \Pr\{Y_t < n\} = 1$$

Son eşitlik, $\{Y_t \mid t \geq 0\}$ sürecinin her t için **λt ortalamalı Poisson dağılımına** sahip olduğunu söyler. İşte bu yüzden bu sürece Poisson süreci denir; bir sonraki bölümün konusu odur.

3. Poisson Süreci ve Uygulamaları

Önceki bölümde, zaman boşlukları λ parametrelili üstel dağılıma sahip olduğunda sayma sürecinin

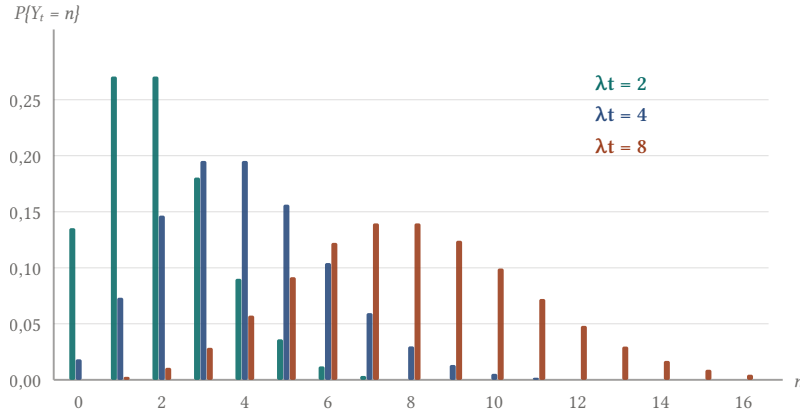
$$\Pr\{Y_t = n\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

olasılıklarını verdiğini görmüştük. Bu, λt ortalamalı Poisson dağılımıdır.

Tanım 3.1 (Poisson Varış Süreci). Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\{Y_t \mid t \geq 0\}$ sayma sürecine, **λ oranlı Poisson varış süreci** denir:

1. $Y_0 = 0$;
2. **Bağımsız artışlar:** ayrık zaman aralıklarındaki olay sayıları bağımsızdır;
3. **Durağan artışlar:** bir aralıktaki olay sayısının dağılımı yalnızca aralığın uzunluğuna bağlıdır;
4. Her t için Y_t , λt ortalamalı Poisson dağılımına sahiptir.

Burada λ 'ya sürecin **varış oranı** (birim zamandaki ortalama olay sayısı) denir.



Şekil 3.1: Poisson olasılıklarının λt ile değişimi. Ortalama büyüdükçe dağılımın tepesi sağa kayar ve yayvanlaşır; $\lambda t = 2$ gibi küçük değerlerde dağılım belirgin biçimde çarpıktır.

! İki özelliğin pratikteki karşılığı

Problemleri çözerken sürekli şu iki sadeleştirmeyi kullanacağız:

- **Durağanlık.** $Y_{a+\Delta a} - Y_a$ ile $Y_{\Delta a}$ aynı dağılıma sahiptir. Yani “saat 3 ile 6 arasında” demekle “3 saatlik bir aralıkta” demek aynı şeydir.
- **Bağımsızlık.** Ayrık aralıklar birbirini etkilemez; bu yüzden

$$\Pr\{Y_6 - Y_3 = 4 \mid Y_3 = 2\} = \Pr\{Y_6 - Y_3 = 4\} = \Pr\{Y_3 = 4\}$$

gibi koşullar düşer. Koşullu olasılıklarda ilk iş, **koşulun bilgi taşıyıp taşımadığına** bakmaktır.

3.1 Beklenen Değer

Teorem 3.1 (Poisson Sürecinin Beklenen Değeri). $\{Y_t \mid t \geq 0\}$, λ oranlı bir Poisson süreci ise

$$E(Y_t) = \lambda t$$

olur.

İspat.

Tanım gereği

$$E(Y_t) = \sum_{n=0}^{\infty} n \Pr\{Y_t = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

yazılır. $n = 0$ terimi sıfır olduğundan toplama $n = 1$ 'den başlanabilir:

$$E(Y_t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

Şimdi $n \rightarrow n + 1$ indis kaydırması yapalım:

$$E(Y_t) = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n (\lambda t)}{n!}$$

λt çarpanı toplamın dışına alınırsa geriye üstel fonksiyonun seri açılımı kalır:

$$E(Y_t) = e^{-\lambda t} (\lambda t) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!}}_{=e^{\lambda t}} = \lambda t$$

■

3.2 Birleştirme ve Ayrıştırma

Poisson süreçlerini bu kadar kullanışlı yapan iki özellik daha vardır. Aşağıdaki problemlerin neredeyse tamamı bu ikisine dayanır.

Teorem 3.2 (Birleştirme (Superposition)). λ_1 ve λ_2 oranlı **bağımsız** iki Poisson süreci birlikte gözlemlerse, ortaya çıkan süreç yine bir Poisson sürecidir ve oranı

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$$

olur. Bu, ikiden fazla süreç için de geçerlidir.

Teorem 3.3 (Ayrıştırma (Thinning)). λ oranlı bir Poisson sürecinde her olay, diğerlerinden bağımsız olarak p olasılıkla “A tipi”, $1 - p$ olasılıkla “B tipi” olarak sınıflansın. Bu durumda

- A tipi olaylar λp oranlı bir Poisson süreci,
- B tipi olaylar $\lambda(1 - p)$ oranlı bir Poisson süreci

oluşturur ve **bu iki süreç birbirinden bağımsızdır.**

⚠ Ayrıştırmadaki bağımsızlık şartıdır

Ayrıştırma teoreminin en çok gözden kaçan kısmı sondaki bağımsızlıktır: A tipi olayların sayısını öğrenmek, B tipi olayların sayısı hakkında **hiçbir bilgi vermez**. Aşağıda [Örnek 3.3](#)’un (b) şıkında bu noktaya döneceğiz.

3.3 Çözümlü Problemler

Örnek 3.1 (Temel Hesaplar). Varış oranı saat başına 2 olan $\{Y_t \mid t \geq 0\}$ Poisson varış süreci için aşağıdakileri hesaplayınız.

- a) $\Pr\{Y_2 = 5\}$ b) $\Pr\{Y_4 - Y_3 = 1\}$ c) $\Pr\{Y_6 - Y_3 = 4 \mid Y_3 = 2\}$ d) $\Pr\{Y_5 = 4 \mid Y_4 = 2\}$

Çözüm.

- a) 2 saat içinde 5 olay: $t = 2$, $\lambda = 2$, dolayısıyla $\lambda t = 4$ 'tür.

$$\Pr\{Y_2 = 5\} = \frac{e^{-4} 4^5}{5!} = 0,1563$$

- b) Durağanlık gereği $Y_4 - Y_3$ ile Y_1 aynı dağılımlıdır: $\lambda t = 2$.

$$\Pr\{Y_4 - Y_3 = 1\} = \Pr\{Y_1 = 1\} = \frac{e^{-2} 2^1}{1!} = 0,2707$$

- c) $(0, 3]$ ile $(3, 6]$ ayrık aralıklar olduğundan koşul düşer; kalan aralık 3 saattir, $\lambda t = 6$.

$$\Pr\{Y_6 - Y_3 = 4 \mid Y_3 = 2\} = \Pr\{Y_6 - Y_3 = 4\} = \Pr\{Y_3 = 4\} = \frac{e^{-6} 6^4}{4!} = 0,1339$$

- d) $Y_5 = 4$ ve $Y_4 = 2$ ise $(4, 5]$ aralığında 2 olay olmuştur; bu aralık 1 saattir, $\lambda t = 2$.

$$\Pr\{Y_5 = 4 \mid Y_4 = 2\} = \Pr\{Y_1 = 2\} = \frac{e^{-2} 2^2}{2!} = 0,2707$$

■

Örnek 3.2 (Acil Servis). Bir hastanenin acil servisine saatte 2 varış oranında hasta gelmektedir. Bir doktor saat 6'dan 18'e kadar çalışmaktadır. Aşağıdaki soruları, sürecin Poisson varış süreci olduğunu kabul ederek cevaplayınız.

- a) Doktor saat 8'e kadar 6 hasta bakmışsa, saat 10'a kadar toplam 9 hasta bakma olasılığı nedir?
b) Art arda gelen hastaların varışları arasındaki zamanın beklenen değeri nedir?
c) Doktorun işe gelmesinden ilk hastaya bakmasına kadar geçen sürenin 15 dakika veya daha az olma olasılığı nedir?
d) Doktorun 13. hastasına saat 13'ten önce bakma olasılığı nedir?
e) Acil servise başvuran hastaların %14'ü çok acil olarak sınıflandırılmıştır. Buna göre doktorun gün boyunca 6 çok acil hastaya bakma olasılığı nedir?
f) Hastanenin ayrıca ayakta tedavi servisi vardır; buraya hastalar saatte 4 oranında gelmektedir. Her iki serviste de saat 6'dan 12'ye kadar başvuran hastaların toplam sayısının 30'dan fazla olma olasılığı nedir?

Çözüm.

- a) Saat 8 ile 10 arasında $9 - 6 = 3$ hasta gelmelidir. Aralık 2 saat, $\lambda t = 4$ 'tür.

$$\Pr\{Y_2 = 3\} = \frac{e^{-4} 4^3}{3!} = 0,1954$$

- b) Varışlar arası süre G_i , λ parametrelili üstel dağılıma sahiptir:

$$E(G_i) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \text{ saat} = 30 \text{ dakika}$$

- c) 15 dakika = $\frac{1}{4}$ saattir. Üstel dağılımın kümülatif dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = [-e^{-\lambda u}]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

olduğundan

$$\Pr\left\{G_1 \leq \frac{1}{4}\right\} = \left(\frac{1}{4}\right) = 1 - e^{-2 \cdot 1/4} = 1 - e^{-1/2} = 0,3935$$

d) Saat 6'dan 13'e kadar 7 saat vardır. Sayma-zaman denkliğiyle ($\lambda t = 14$):

$$\Pr\{T_{13} \leq 7\} = \Pr\{Y_7 \geq 13\} = 1 - \sum_{k=0}^{12} \frac{e^{-14} 14^k}{k!} = 0,6415$$

e) Ayırıştırma teoremiyle çok acil hastalar, oranı

$$\lambda^* = \lambda \cdot \frac{14}{100} = 2 \cdot 0,14 = 0,28$$

olan bir Poisson sürecidir. Gün boyu çalışma süresi 12 saat olduğundan $\lambda^* t = 3,36$ 'dır:

$$\Pr\{Y_{12} = 6\} = \frac{e^{-3,36} (3,36)^6}{6!} = 0,0694$$

f) Birleştirme teoremiyle toplam oran $\lambda = 2 + 4 = 6$ 'dır. 6 saatlik aralıkta $\lambda t = 36$:

$$\Pr\{Y_6 > 30\} = 1 - \sum_{k=0}^{30} \frac{e^{-36} 36^k}{k!} = 0,8194$$

■

! “Fazla olma” bir kuyruk olasılığıdır

(f) şıkında sorulan $\Pr\{Y_6 > 30\}$ ile tek bir terim olan $\Pr\{Y_6 = 30\} = 0,0427$ birbirine karıştırılmamalıdır. “Daha fazla”, “en az”, “daha az” gibi ifadeler bir **kuyruk** olasılığı ister; bunlar ya toplamla ya da tümleyenden hesaplanır.

Hangi tarafın kısa olduğuna bakıp onu seçin: burada $\Pr\{Y_6 > 30\}$ için 31'den sonsuza toplamak yerine, 0'dan 30'a toplayıp 1'den çıkarmak daha kolaydır.

Örnek 3.3 (Otoyol). Bir otoyolun bir noktasında dakikada 1 oranında motorlu araç geçmektedir. Bunların %5'i kamyonudur ve süreç bir Poisson varış sürecidir.

a) Bir saat boyunca en az bir kamyonun geçme olasılığı nedir?

b) Bir saatte 10 kamyonun geçtiği biliniyorsa, bu süreçte geçen motorlu araçların beklenen toplam sayısı nedir?

c) Bir saatte 50 motorlu araç geçmesi hâlinde bunların 5 tanesinin kamyon olma olasılığı nedir?

Çözüm.

Dakikada 1 araç, saatte $\lambda_M = 60$ araç demektir. Ayırıştırma teoremiyle

$$\lambda_K = 60 \cdot 0,05 = 3 \quad (\text{kamyon}), \quad \lambda_D = 60 \cdot 0,95 = 57 \quad (\text{diğer})$$

olur ve bu iki süreç **bağımsızdır**.

a) Tümleyenden:

$$\Pr\{Y_{K,1} \geq 1\} = 1 - \Pr\{Y_{K,1} = 0\} = 1 - \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = 1 - e^{-3} = 0,9502$$

b) Kamyon ve diğer araç süreçleri bağımsız olduğundan, kamyon sayısını bilmek diğer araçlar hakkında bilgi vermez:

$$E(Y_{M,1} | Y_{K,1} = 10) = 10 + E(Y_{D,1}) = 10 + 57 = 67$$

c) Koşullu olasılığı tanımdan açalım. $\{Y_{K,1} = 5, Y_{M,1} = 50\}$ olayı, $\{Y_{K,1} = 5, Y_{D,1} = 45\}$ olayına eşdeğerdir:

$$\Pr\{Y_{K,1} = 5 \mid Y_{M,1} = 50\} = \frac{\Pr\{Y_{K,1} = 5\} \cdot \Pr\{Y_{D,1} = 45\}}{\Pr\{Y_{M,1} = 50\}} = \frac{\frac{e^{-3}3^5}{5!} \cdot \frac{e^{-57}57^{45}}{45!}}{\frac{e^{-60}60^{50}}{50!}} = 0,0658$$

■

💡 şıkkının gizli kimliği

Yukarıdaki ifade sadeleştirilirse tam olarak bir **binom** olasılığı çıkar:

$$\Pr\{Y_{K,1} = 5 \mid Y_{M,1} = 50\} = \binom{50}{5} (0,05)^5 (0,95)^{45} = 0,0658$$

Bu tesadüf değildir: toplam araç sayısı sabitlendiğinde her aracın bağımsız olarak $p = 0,05$ olasılıkla kamyon olması, tam da ayırıştırma teoreminin tersinden okunuşudur.

⚠ şıkta sık yapılan hata

“Kamyonlar toplamın %5’i ise 10 kamyon 200 araca karşılık gelir” diyerek 200 cevabına ulaşmak çok yaygındır. Bu oransal akıl yürütme, Poisson varsayımı altında **geçerli değildir**.

Sebebi ayırıştırma teoremidir: kamyon ve diğer araç süreçleri bağımsız olduğundan, $Y_{K,1} = 10$ bilgisi $Y_{D,1}$ ’in dağılımını hiç değiştirmez. Diğer araçların beklenen sayısı, kamyon sayısı ne olursa olsun 57 kalır; toplam da $10 + 57 = 67$ olur.

%5 oranı yalnızca **uzun vadeli ortalama**yı belirler; tek bir saatte gözlenen kamyon sayısından toplam trafiği geri hesaplamaya yaramaz.

Örnek 3.4 (Baskı Hataları). Bir kitabın basımında baskı hatalarının ortaya çıkışı, 1000 kelimede bir hata oranında bir Poisson sürecidir. Ön baskılarının yazar tarafından her okunuşunda hata sayısı %50 oranında azalmaktadır. Kitapta 200.000 kelime olduğuna göre, hiç hata kalmamasının olasılığının en az %98 olması için yazarın kitabı en az kaç kez okuması gerekir?

Çözüm.

200.000 kelime ve 1000 kelimede bir hata olduğundan başlangıçtaki beklenen hata sayısı $\lambda_1 = 200$ ’dür. Her okuma bunu yarıya indirdiğinden

$$\lambda_2 = \frac{200}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{200}{2^2}, \quad \dots, \quad \lambda_n = \frac{200}{2^{n-1}}$$

olur. n . okumadan sonra hiç hata kalmaması olasılığı:

$$\Pr\{Y = 0\} = \frac{e^{-\lambda_n} \lambda_n^0}{0!} = e^{-\lambda_n} = e^{-200/2^{n-1}} \geq 0,98$$

Her iki tarafın doğal logaritması alınır (ln artan olduğundan yön korunur):

$$-\frac{200}{2^{n-1}} \geq \ln(0,98) = -0,02020$$

Negatiflerle çarpım yön değiştirir:

$$\frac{200}{2^{n-1}} \leq 0,02020 \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq \frac{200}{0,02020} = 9899,5$$

Her iki tarafın 2 tabanında logaritması alınır:

$$n - 1 \geq \log_2(9899,5) = 13,27 \Rightarrow n \geq 14,27$$

n bir tam sayı olduğundan $n = 15$ bulunur.

Sağlama.

n	$\lambda_n = 200/2^{n-1}$	$\Pr\{Y = 0\} = e^{-\lambda_n}$
14	0,02441	$0,9759 < 0,98$
15	0,01221	$0,9879 \geq 0,98$

Yazarın kitabı en az 15 kez okuması gerekir.

■

⚠ Eşitsizliğin yönüne dikkat

Bu çözümde eşitsizliğin yönü iki kez kritik hâle geliyor:

- İki tarafı **negatif** bir sayıyla çarparken ya da böler gibi -1 ile çarparken yön döner ($-\frac{200}{2^{n-1}} \geq \ln 0,98$ adımıdan sonrası).
- 2^{n-1} paydadan paya geçerken yön yine döner.

Sonuçta “en az kaç kez” sorusuna $n \geq 14,27$ cevabı gelmelidir. Ters yönde bir eşitsizlik ($n \leq 14,27$) elde ederseniz bir adımda yön atlamışsınız demektir; sağlama tablosu bunu hemen gösterir.

Örnek 3.5 (Dağ Yolundaki Lokanta). Bir dağ yolundaki lokanta, kamyon ve otomobillerdeki yolculara servis yapmaktadır. Kamyonların dağ yolundan geçme oranı saatte 10, otomobillerin ise saatte 20’dir. Kamyon ve otomobillerin %10’u bu lokantada mola vermektedir.

- Bir saatte lokantaya gelen otomobillerin ve kamyonların beklenen değeri nedir?
- Bir saatte lokantaya hiç araç uğramamasının olasılığı nedir?
- Kamyonlar daima 1 yolcu, otomobillerin %30’u 1 yolcu, %50’si 2 yolcu, geri kalanları da 3 yolcu taşımaktadır. Buna göre saatte lokantaya gelen yolcu sayısının beklenen değeri nedir?

Çözüm.

Ayrıştırma teoremiyle lokantaya **mola veren** araçların oranları:

$$\lambda_{MK} = 10 \cdot 0,10 = 1 \quad (\text{kamyon}), \quad \lambda_{MO} = 20 \cdot 0,10 = 2 \quad (\text{otomobil})$$

- Bir saatlik aralıkta ($t = 1$) beklenen değerler $E(Y_t) = \lambda t$ formülünden:

$$E(Y_{MK,1}) = 1, \quad E(Y_{MO,1}) = 2, \quad E(Y_1) = 1 + 2 = 3$$

- Birleştirme teoremiyle toplam oran $\lambda = \lambda_{MK} + \lambda_{MO} = 3$ ’tür:

$$\Pr\{Y_1 = 0\} = \frac{e^{-3} 3^0}{0!} = e^{-3} = 0,0498$$

- Otomobilleri taşıdıkları yolcu sayısına göre bir kez daha ayrıştıralım. Otomobillerin %30 + %50 = %80’i belirtildiğine göre kalan %20’si 3 yolcu taşımaktadır:

$$\lambda' = 2 \cdot 0,30(1 \text{ yolcu}), \quad \lambda'' = 2 \cdot 0,50(2 \text{ yolcu}), \quad \lambda''' = 2 \cdot 0,20(3 \text{ yolcu})$$

Beklenen değer doğrusal olduğundan her kolu kendi yolcu sayısı ile ağırlıklandırıp toplarız:

$$\begin{aligned} E(\text{yolcu}) &= \underbrace{1 \cdot 1}_{\text{kamyon}} + \underbrace{(2 \cdot 0,30) \cdot 1 + (2 \cdot 0,50) \cdot 2 + (2 \cdot 0,20) \cdot 3}_{\text{otomobil}} \\ &= 1 + 0,6 + 2,0 + 1,2 \\ &= 4,8 \end{aligned}$$

Saatte lokantaya beklenen yolcu sayısı 4,8’dir.

■

Örnek 3.6 (Elektrik Arızaları). Farklı şekillerde meydana gelen elektrik arızaları bilgisayarları bozabilmektedir.

- **Küçük arızalar** saatte 8 oranında olmakta ve bilgisayarı bozmamaktadır.
- **Orta arızalar** 18 saatte bir olmakta ve bilgisayarı %0,5 oranında bozmaktadır.
- **Büyük arızalar** 46 saatte bir olmakta ve bilgisayarı %8 oranında bozmaktadır.

- a) 8 saatte herhangi bir tipte arıza oluşmasının beklenen değeri nedir?
b) 8 saatte bilgisayarı bozan arızaların oluşmasının beklenen değeri nedir?
c) 8 saatte bilgisayarı bozan arızaların oluşmamasının olasılığı nedir?

Çözüm.

Önce oranları ortak birime (saat başına) çevirelim:

$$\lambda_K = 8, \quad \lambda_O = \frac{1}{18}, \quad \lambda_B = \frac{1}{46}$$

- a) Birleştirme teoremiyle toplam oran $\lambda_K + \lambda_O + \lambda_B$ 'dir; $t = 8$ için

$$E(Y_8) = 8 \cdot 8 + 8 \cdot \frac{1}{18} + 8 \cdot \frac{1}{46} = 64 + 0,4444 + 0,1739 = 64,62$$

- b) Bilgisayarı bozan arızalar, orta ve büyük arıza süreçlerinin ayrıştırılmasıyla elde edilir:

$$E(Y_{8,B}) = 8 \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{5}{1000} + 8 \cdot \frac{1}{46} \cdot \frac{8}{100} = 0,002222 + 0,013913 = 0,01614$$

- c) Bozucu arızalar, ortalaması 0,01614 olan bir Poisson dağılımına sahiptir:

$$\Pr\{Y_{8,B} = 0\} = \frac{e^{-0,01614} (0,01614)^0}{0!} = e^{-0,01614} = 0,9840$$

Yani 8 saatlik bir vardiyada bilgisayarın bozulmama olasılığı yaklaşık %98,4'tür.

i Birim tuzağı

“18 saatte bir” ifadesi saatlik oranı $\lambda_O = \frac{1}{18}$ yapar. Soruda “saatte 18” deseydi $\lambda_O = 18$ olurdu. Oranların birimini yazmadan hesaba başlamayın.

⚠ Beklenen değeri iki kez ölçeklemeyin

(b) şıkında bulunan 0,01614 değeri **zaten 8 saatlik** beklenen değerdir; (c) şıkında bunu tekrar 8 ile çarpmak sık yapılan bir hatadır. Poisson formülüne giren büyüklük λt 'dir ve burada $\lambda t = 0,01614$ 'tür.

Sağduyu kontrolü de bunu doğrular: 8 saatte ortalama 0,016 bozucu arıza bekleniyorsa, hiç arıza olmaması olasılığı 1'e çok yakın çıkmalıdır.

4. Markov Zincirlerine Giriş

4.1 Markov Özelliği

Şimdiye kadar incelediğimiz süreçlerde geleceği tahmin etmek için sürecin bütün geçmişine ihtiyaç duyulabiliyordu. Markov süreçleri bu yükü ortadan kaldırır: **şu anki durumu bilmek yeterlidir**, geçmiş fazladan bilgi taşımaz.

Tanım 4.1 (Markov Özelliği). $\{X_n \mid n \geq 0\}$ bir stokastik süreç olsun. Her n ve her durum dizisi için

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i_n\}$$

eşitliği sağlanıyorsa sürecin **Markov özelliğine** sahip olduğu söylenir ve sürece **Markov süreci** denir. X_i rasgele değişkenlerinin bütün olası değerlerinin kümesi **durum uzayı** olarak adlandırılır ve S ile gösterilir.

Tanım 4.2 (Markov Zinciri). Durum uzayı **kesikli** olan bir Markov sürecine **Markov zinciri** denir.

Markov zincirleri, stokastik sistemlerin kısa veya uzun dönemdeki davranışlarının modellenmesinde kullanılır.

i Notasyon

Bir adımlık geçiş olasılığı çoğu kaynakta

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = p_{ij}(n, n+1)$$

biçiminde yazılır. Geçiş olasılıkları n 'den bağımsızsa zincire **homojen** denir ve kısaca p_{ij} yazılır. Bu derste aksi belirtilmedikçe zincirler homojendir.

n adımlık geçiş olasılığı ise

$$P\{X_n = j \mid X_0 = i\} = p_{ij}(0, n) = p_{ij}^{(n)}$$

ile gösterilir.

4.2 Geçiş Olasılık Matrisi

Tanım 4.3 (Geçiş Olasılık Matrisi). $\{X_n \mid n \geq 0\}$, durum uzayı $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ olan bir Markov zinciri olsun. i durumundan j durumuna **bir adım geçiş olasılığı**

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

ile tanımlansın. Bu olasılıkların oluşturduğu

$$P = [p_{ij}] = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

matrisine sürecin **geçiş olasılık matrisi** denir.

Bu matrisin iki temel özelliği vardır:

$$p_{ij} \geq 0 \quad \text{ve} \quad \sum_j p_{ij} = 1 \quad (\text{her } i \text{ için})$$

İkinci koşul şunu söyler: **her satırın toplamı 1 olmalıdır**. Bunun sebebi açıktır – i durumundan bir adım sonra mutlaka bir yere gidilir.

Tanım 4.4 (Stokastik Süreç Matrisi (SSM)). Örnek uzay sonlu, $S = \{1, 2, \dots, m\}$ ise geçiş matrisi $m \times m$ boyutlu

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$$

olur. Elemanları negatif olmayan ve her satırının toplamı 1 olan bu tür bir kare matrise **Markov matrisi** ya da **stokastik süreç matrisi (SSM)** denir.

4.3 Olasılık Vektörleri

Tanım 4.5 (Olasılık Vektörü). Bir stokastik matrisin her satırı bir **olasılık vektörü** olarak adlandırılır. Bir vektörün olasılık vektörü olması için iki koşul birlikte sağlanmalıdır:

1. bütün elemanları negatif olmamalı;
2. elemanlarının toplamı 1 olmalıdır.

Örnek 4.1 (Hangileri Olasılık Vektörüdür?). Aşağıdakilerden hangileri olasılık vektörüdür?

$$\text{i)} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \quad \text{ii)} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad \text{iii)} \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Çözüm.

i) $-\frac{1}{3} < 0$ olduğundan **negatif olmama** koşulu sağlanmaz. Olasılık vektörü değildir.

ii) Bütün elemanlar negatif değildir, ancak toplam

$$0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \neq 1$$

olduğundan olasılık vektörü değildir.

iii) Bütün elemanlar negatif değil ve toplamı $0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 'dir. **Olasılık vektörüdür.**

■

Örnek 4.2 (Hangileri SSM'dir?). Verilen matrislerden hangileri stokastik süreç matrisidir?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Çözüm.

A: Her satırın toplamı 1'dir, elemanlar negatif değildir; ancak matris **kare değildir** (2×3). SSM değildir.

B: İlk satır $\frac{15}{16} + \frac{1}{16} = 1$ ✓; fakat ikinci satır $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \neq 1$ 'dir. SSM değildir.

C: Kare matristir, elemanlar negatif değildir, satır toplamı $1 + 0 = 1$ ve $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 'dir. **SSM'dir.**

D: Satır toplamı 1'dir, ancak $-\frac{1}{2} < 0$ olduğundan negatif olmama koşulu sağlanmaz. SSM değildir.

■

4.4 Olasılık Vektörünün Korunması

Bir Markov zincirinde durum dağılımı, olasılık vektörünün geçiş matrisiyle çarpılmasıyla iletirilir. Bu işlemin bizi olasılık vektörleri dünyasının dışına çıkarmadığını göstermemiz gerekir.

Teorem 4.1 (Olasılık Vektörü Korunur). *A bir SSM ve u herhangi bir olasılık vektörü olsun. Bu durumda uA çarpımı da bir olasılık vektörüdür.*

İspat.

Gösterimi somutlaştırmak için 3×3 hâlini yazalım; genel durum aynı biçimde yürür. $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

olsun. Çarpım

$$uA = (u_1a_1 + u_2a_2 + u_3a_3, u_1b_1 + u_2b_2 + u_3b_3, u_1c_1 + u_2c_2 + u_3c_3)$$

biçimindedir.

Negatif olmama. u bir olasılık vektörü olduğundan $u_1, u_2, u_3 \geq 0$; A bir SSM olduğundan bütün $a_i, b_i, c_i \geq 0$ 'dir. Negatif olmayan sayıların çarpımları ve toplamı da negatif olmadığından uA 'nın bütün bileşenleri negatif değildir.

Toplamın 1 olması. uA 'nın bileşenlerini toplayıp u_i 'lere göre gruplayalım:

$$\sum (uA)_j = u_1(a_1 + b_1 + c_1) + u_2(a_2 + b_2 + c_2) + u_3(a_3 + b_3 + c_3)$$

Parantez içindeki her ifade A 'nın bir **satır toplamıdır** ve A bir SSM olduğundan hepsi 1'e eşittir:

$$\sum (uA)_j = u_1 + u_2 + u_3 = 1$$

Son eşitlik u 'nun olasılık vektörü olmasından gelir. Dolayısıyla uA bir olasılık vektörüdür.

■

Teorem 4.2 (Markov Matrisinin Kuvvetleri). *P bir Markov matrisi ise, her pozitif n tam sayısı için P^n de bir Markov matrisidir.*

İspat.

P , $m \times m$ boyutlu bir Markov matrisi olsun. Bütün bileşenleri 1 olan

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{m \times 1}$$

sütun vektörünü alalım. Pv çarpımının i . bileşeni, P 'nin i . satırının toplamıdır; P bir Markov matrisi olduğundan bu toplam 1'dir. O hâlde

$$Pv = v$$

olur. Şimdi her iki tarafı soldan P ile çarpalım:

$$P(Pv) = Pv \implies P^2v = v$$

Aynı işlem tekrarlanırsa

$$P^3v = v, \quad P^4v = v, \quad \dots, \quad P^nv = v$$

elde edilir. $P^nv = v$ eşitliği, P^n 'in **satır toplamlarının 1 olduğunu** söyler. Ayrıca negatif olmayan sayıların çarpımı ve toplamı negatif olmadığından P^n 'in bütün elemanları da negatif değildir. O hâlde P^n de bir Markov matrisidir.



4.5 Regüler Matrisler

Tanım 4.6 (Regüler Matris). Bir SSM'nin bir n kuvveti alındığında bütün sıfır bileşenlerinden kurtuluyorsa, yani öyle bir n pozitif tam sayısı için P^n 'in **bütün** elemanları pozitif oluyorsa, P matrisine **regüler** denir.

! Esas köşegende 1 varsa regüler değildir

Bir SSM'nin esas köşegeninde 1 varsa, o satırın diğer bütün elemanları sıfır olmak zorundadır (satır toplamı 1'dir). Bu durumda o durumdan hiç çıkılmaz; P^n 'in aynı satırı her n için değişmez ve içinde sıfırlar kalır. Dolayısıyla matris **hiçbir zaman regüler olamaz**.

Dikkat: bu kontrol yalnızca **soruda verilen** P matrisi için yapılır. P^2 , P^3 gibi kuvvetlerin esas köşegeninde 1 çıkması bir engel değildir.

Örnek 4.3 (Regülerlik İncelemesi). Aşağıdaki matrislerin regüler olup olmadığını inceleyiniz.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Çözüm.

A: Esas köşegende 1 vardır (ikinci satır $(0, 1)$). O hâlde A **regüler değildir**.

B: Kuvvetlerini alalım:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Buradan $B^4 = B^2$, $B^5 = B$, ... olur; kaç kere çarparsak çarpalım içindeki sıfırlardan kurtulamayız. B **regüler değildir**.

C: Hiç sıfır elemanı yoktur; $n = 1$ ile koşul zaten sağlanır. C **regülerdir**.

D: Esas köşegende 1 yoktur (matriste 1 vardır ama köşegen üzerinde değil), o hâlde sıfırlardan kurtulmayı deneyelim:

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{32} & \frac{41}{64} & \frac{13}{64} \\ \frac{1}{8} & \frac{5}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

D^3 'ün bütün elemanları 0'dan büyük olduğundan D **regülerdir**.



💡 Çarpımların sağlaması

Bir Markov matrisinin her kuvveti yine Markov olduğundan (Teorem 4.2), hesapladığımız her satırın toplamı 1 çıkmalıdır. Örneğin D^2 'nin ikinci satırı:

$$\frac{1}{8} + \frac{5}{16} + \frac{9}{16} = \frac{2}{16} + \frac{5}{16} + \frac{9}{16} = 1 \checkmark$$

Bu, elle matris çarpımı yaparken hata yakalamanın en hızlı yoludur.

5. Olasılık Dağılımı ve Chapman–Kolmogorov Eşitlikleri

Geçiş matrisi bize **bir adımlık** geçiş olasılıklarını verir. Peki n adım sonra sürecin hangi durumda olacağını nasıl buluruz? Bu bölümde iki soruyu birlikte yanıtlayacağız:

- Sürecin n . adımdaki **durum dağılımı** nedir?
- i durumundan j durumuna n adımda geçme olasılığı nedir?

5.1 Markov Zincirinin Olasılık Dağılımı

Tanım 5.1 (Durum Olasılık Vektörü). $\{X_n \mid n \geq 0\}$ homojen bir Markov zinciri ve

$$p_i(n) = P(X_n = i)$$

olsun. Burada her n için

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(n) = 1$$

sağlanır. Bu olasılıklardan oluşan satır vektörü

$$p(n) = [p_0(n), p_1(n), \dots]$$

biçiminde yazılır.

- $p(0) = [p_0(0), p_1(0), \dots]$ vektörüne **başlangıç durum olasılıkları vektörü** (başlangıç olasılık dağılımı) denir.
- $p(n)$ vektörüne **n adım sonraki durum olasılık vektörü** ya da Markov zincirinin olasılık dağılımı denir.

Teorem 5.1 (Dağılımın İlerletilmesi). *Bir adım ilerlemek, dağılımı geçiş matrisiyle sağdan çarpmak demektir:*

$$p(n) = p(n-1) P$$

Bu bağıntı tekrarlanırsa dağılım doğrudan başlangıçtan da hesaplanabilir:

$$p(n) = p(0) P^n$$

i Neden sağdan çarpım?

$p(n)$ bir **satır** vektörüdür ve P 'nin satırları “nereden”, sütunları “nereye” bilgisini taşır. $p(n-1)P$ çarpımının j . bileşeni

$$\sum_i p_i(n-1) p_{ij}$$

olur; bu da toplam olasılık kuralının ta kendisidir: “ j 'ye varmanın olasılığı = her i 'den gelme olasılıklarının toplamı”.

Teorem 4.1 gereği bu çarpım bizi olasılık vektörleri dünyasının dışına çıkarmaz.

Örnek 5.1 (Basit Hava Modeli). Bir günün yağmurlu (0) veya güneşli (1) olmasını içeren basit hava modelini ele alalım. Geçiş matrisi

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

olsun. Başlangıç olarak havanın **yağmurlu** olduğunu kabul edelim. Sonraki iki günün hava dağılımını bulunuz.

Çözüm.

Bugün kesin olarak yağmurlu olduğundan başlangıç dağılımı

$$p(0) = (1,0)$$

olur. (1 yağmurlu durumuna, 0 güneşli durumuna karşılık gelir; bugünün yağmurlu olduğunu bildiğimiz için ikinci bileşen sıfırdır.)

Bir gün sonra:

$$p(1) = p(0) P = (1,0) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,5;0,5)$$

İki gün sonra:

$$p(2) = p(1) P = (0,5;0,5) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,3;0,7)$$

Yani bugün yağmurluysa, iki gün sonra havanın güneşli olma olasılığı 0,7'dir.

■

💡 Dağılım nereye gidiyor?

Aynı işlemi sürdürürseniz $p(3) = (0,22;0,78)$, $p(4) = (0,188;0,812)$, ... çıkar ve dizi $(\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$ vektörüne yaklaşır. Başlangıç neresi olursa olsun ulaşılan bu vektöre **daimi durum olasılıkları** denir; ilerideki bölümlerin konusu odur.

5.2 Chapman–Kolmogorov Teoremi

Şimdi n adımlık geçiş olasılıklarına geçelim.

Tanım 5.2 (n Adımlık Geçiş Matrisi).

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

olasılıklarından oluşan $P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}]$ matrisine **n adımlık geçiş olasılık matrisi** denir.

Teorem 5.2 (Chapman–Kolmogorov Teoremi). Homojen bir Markov zincirinde her $n, m \geq 0$ için

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$$

olur. Ayrıca n adımlık geçiş matrisi, tek adımlık matrisin n . kuvvetine eşittir:

$$P^{(n)} = P^n$$

İspat.

Birinci kısım. $P^{(n+m)}$ matrisinin (i, j) . bileşenini yazalım. Süreç i 'den çıkıp $n + m$ adım sonra j 'ye varıyor; ama **arada nereden geçtiğini bilmiyoruz**. O hâlde n . adımdaki durumu k diyerek bütün olasılıklar üzerinden toplayalım:

$$p_{ij}^{(n+m)} = P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+m} = j, X_n = k \mid X_0 = i)$$

Koşullu olasılığın çarpım kuralıyla:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i) \cdot P(X_n = k \mid X_0 = i)$$

Markov özelliği gereği ilk çarpımda $X_0 = i$ koşulu **düşer**; çünkü $X_n = k$ bilindiğinde gelecek, geçmişten bağımsızdır:

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P(X_{n+m} = j \mid X_n = k)}_{=p_{kj}^{(m)}} \cdot \underbrace{P(X_n = k \mid X_0 = i)}_{=p_{ik}^{(n)}} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$

Sağdaki toplam tam olarak $P^{(n)} P^{(m)}$ çarpımının (i, j) . bileşenidir. O hâlde

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$$

İkinci kısım. Tümevarımla ilerleyelim.

Başlangıç adımı: $P^{(1)} = P = P^1$ tanım gereği doğrudur.

Tümevarım hipotezi: $P^{(n)} = P^n$ olsun.

Tümevarım adımı: Birinci kısmı $m = 1$ ile kullanırsak

$$P^{(n+1)} = P^{(n)} P^{(1)} = P^n \cdot P = P^{n+1}$$

bulunur. O hâlde her $n \geq 1$ için $P^{(n)} = P^n$ 'dir.

■

! Teoremin pratik değeri

$P^{(n)} = P^n$ eşitliği, “kaç adım sonra nerede olurum?” sorusunu bir **matris kuvveti** hesabına indirger. Ayrıca $P^{(n)}$ de bir Markov matrisidir (Teorem 4.2), dolayısıyla her satırının toplamı 1 olmalıdır – hesabınızın en hızlı sağlaması budur.

5.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 5.2 (Üç Durumlu Zincir). $S = \{1, 2, 3\}$ durum uzayına sahip bir Markov zincirinin geçiş olasılık matrisi

$$P = \begin{pmatrix} 0, 2 & 0, 3 & 0, 5 \\ 0, 1 & 0, 6 & 0, 3 \\ 0, 4 & 0, 3 & 0, 3 \end{pmatrix}$$

ve başlangıç olasılık dağılımı $p(0) = (0, 5; 0, 3; 0, 2)$ olarak verilsin.

a) $P(X_2 = 2)$ olasılığını bulunuz.

b) $P(X_3 = 3, X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 3)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.

a) Toplam olasılık kuralıyla, üç başlangıç durumu üzerinden toplayalım:

$$P(X_2 = 2) = \sum_{i=1}^3 P(X_2 = 2 \mid X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i=1}^3 p_{i2}^{(2)} p_i(0)$$

O hâlde $P^{(2)} = P^2$ matrisinin **ikinci sütununa** ihtiyacımız var. Kareyi alalım:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,27 & 0,39 & 0,34 \\ 0,20 & 0,48 & 0,32 \\ 0,23 & 0,39 & 0,38 \end{pmatrix}$$

(Sağlama: satır toplamları $0,27 + 0,39 + 0,34 = 1$, $0,20 + 0,48 + 0,32 = 1$, $0,23 + 0,39 + 0,38 = 1$.)

Şimdi yerine koyalım:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2) &= p_{12}^{(2)} p_1(0) + p_{22}^{(2)} p_2(0) + p_{32}^{(2)} p_3(0) \\ &= (0,39)(0,5) + (0,48)(0,3) + (0,39)(0,2) \\ &= 0,195 + 0,144 + 0,078 \\ &= 0,417 \end{aligned}$$

b) Ortak olasılığı, en eski olaydan başlayarak adım adım açalım. Her adımda Markov özelliği sayesinde yalnızca **bir önceki** duruma bakmak yeterlidir.

Birinci adım:

$$P(X_1 = 1, X_0 = 3) = P(X_1 = 1 | X_0 = 3) P(X_0 = 3) = p_{31} \cdot p_3(0) = (0,4)(0,2) = 0,08$$

İkinci adım:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 3) &= P(X_2 = 2 | X_1 = 1, X_0 = 3) \cdot P(X_1 = 1, X_0 = 3) \\ &= \underbrace{p_{12}}_{0,3} \cdot 0,08 = 0,024 \end{aligned}$$

Üçüncü adım:

$$P(X_3 = 3, X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 3) = \underbrace{p_{23}}_{0,3} \cdot 0,024 = 0,0072$$

■

💡 için kısayol

Bir yörüngenin olasılığı, başlangıç olasılığı ile yol üzerindeki tek adım geçişlerinin çarpımıdır:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = p_{i_0}(0) \cdot p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

Bu örnekte: $0,2 \times 0,4 \times 0,3 \times 0,3 = 0,0072$. Kaç durum olursa olsun, **beni kayıta en yakın olan ilgilendirir**.

Örnek 5.3 (Marka Tercihi). Bir araştırma şirketi, bir firmanın A ve B markalı iki tür içecek satışlarını incelemektedir.

- A marka içeceği satan bir firmanın 1 hafta sonra tekrar A marka içecek satma olasılığı 0,9'dur.
- B marka içeceği satan bir firmanın 1 hafta sonra tekrar B marka içecek satma olasılığı 0,8'dir.

a) İlk alışverişte A marka içeceği satan firmanın 3 hafta sonra B marka içeceği satma olasılığı nedir?

b) İlk alışverişte müşterilerin %60'ı A marka içecek tercih etmiştir. Buna göre 3 hafta sonra B marka içeceği tercih etme olasılığı nedir?

Çözüm.

Durumları 1 = A, 2 = B olarak numaralandıralım. Satır toplamları 1 olacağından geçiş matrisi:

$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

a) Üç haftalık geçiş matrisini hesaplayalım:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0,83 & 0,17 \\ 0,34 & 0,66 \end{pmatrix}, \quad P^{(3)} = P^3 = \begin{pmatrix} 0,781 & 0,219 \\ 0,438 & 0,562 \end{pmatrix}$$

Aranan olasılık, A'dan B'ye üç adımlık geçiştir:

$$p_{AB}^{(3)} = 0,219$$

b) Bu kez başlangıç dağılımı verilmiştir:

$$p(0) = (0,6;0,4)$$

Üç hafta sonraki dağılım:

$$p(3) = p(0) P^3 = (0,6;0,4) \begin{pmatrix} 0,781 & 0,219 \\ 0,438 & 0,562 \end{pmatrix} = (0,644;0,356)$$

O hâlde 3 hafta sonra B marka içecek tercih etme olasılığı 0,356'dır.

■

i ile (b) neyi soruyor?

İki şık birbirine benzese de farklı büyüklükler ister:

- **(a)** tek bir firmanın **kesin olarak** A sattığı bilindiğinde sorar; cevap doğrudan $P^{(3)}$ matrisinin bir elemanıdır.
- **(b)** başlangıçta bir **dağılım** verir; cevap $p(0)P^3$ vektörünün bir bileşenidir.

Başlangıç kesin bir durumsa (a), belirsizse (b) yolunu izleyin.

5.4 Alıştırma

Alıştırma 5.1 (Üç Durumlu Zincir). $S = \{0,1,2\}$ durum uzayına sahip Markov zincirinin geçiş olasılık matrisi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

olsun. Başlangıç olasılık vektörü olarak da her bir durumun **eşit olasılıklı** olduğu kabul edilsin.

a) $P(X_2 = 0)$ olasılığını bulunuz.

b) $P(X_3 = 1, X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 2)$ olasılığını bulunuz.

İpucu: (a) için P^2 'nin **birinci sütununu**, (b) için yörünge kısayolunu kullanın. Eşit olasılık, $p(0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ demektir.

6. Durumların Sınıflandırılması ve İndirgeme

Bir Markov zincirinin uzun dönemli davranışını anlamak için önce durumların **nasıl davrandığını** ayırt etmek gerekir: hangilerine bir daha dönülmez, hangilerinde sonsuza kadar dolaşılır, hangilerinden hiç çıkmaz?

6.1 Durum Tipleri

Tanım 6.1 (Geçici Durum). Sürecin bir kere kendisinden çıktığı zaman tekrar dönülemediği durumlara **geçici durum** denir. Geçici durumların kümesi T ile gösterilir.

Tanım 6.2 (Tekrar Eden Durum). Sürecin kendisinden çıkıldıktan sonra tekrar dönülebildiği durumlara **tekrar eden durum** denir. Tekrar eden durumların kümesi R ile gösterilir.

Tanım 6.3 (Yutucu Durum). Sürece bir kere girildiğinde tekrar çıkmayan durumlara **yutucu durum** denir.

Yutucu durum aynı zamanda bir tekrar eden durumdur; ancak hep kendisini tekrar eder. Yani **tek elemanlı, tekrar eden bir durumdur**.

💡 Yutucu durumu matriste görmek

i durumunun yutucu olması, tam olarak $p_{ii} = 1$ demektir. Satır toplamı 1 olduğundan o satırdaki diğer bütün elemanlar sıfırlanır:

$$i \text{ yutucu} \Leftrightarrow p_{ii} = 1 \Leftrightarrow \text{esas köşegen üzerinde } 1 \text{ var}$$

Bu yüzden geçiş matrisine bakarken ilk iş esas köşegeni taramaktır.

Tanım 6.4 (İndirgenemez Markov Zinciri). Bir Markov zincirinde herhangi bir alt durum kümesi tek başına bir Markov zinciri oluşturamıyorsa, zincire **indirgenemez Markov zinciri** denir.

Buna karşılık $T \neq \emptyset$ ise, yani zincirde en az bir geçici durum varsa, zincir **kesinlikle indirgenebilir**.

6.2 Sınıflandırma Örneği

Örnek 6.1 (Dört Durumlu Zincir). $S = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere geçiş matrisi

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olan zincirin geçiş diyagramını çizin ve durumları sınıflandırınız.

Çözüm.

Geçiş diyagramı. Matristeki sıfırdan farklı her p_{ij} elemanı, i durumundan j durumuna bir ok demektir:

Durum	Gittiği durumlar
1	1 (kendine, 0, 2), 2 (0, 8)
2	3 (1)
3	2 (0, 5), 3 (kendine, 0, 4), 4 (0, 1)
4	2 (1)

Sınıflandırma. Sorunun “durumları sınıflandırınız” ifadesi, T ve R kümelerinin elemanlarını bulmak demektir.

- **Durum 1:** 1 numaralı **sütuna** bakalım. Yalnızca $p_{11} = 0$, 2 sıfırdan farklıdır; başka hiçbir durumdan 1’e ok gelmez. Süreç bir kez 1’den çıkıp 2’ye geçtiğinde (0, 8 olasılıkla) bir daha 1’e dönemez. O hâlde 1 **geçicidir**.
- **Durumlar 2, 3, 4:** $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ ve $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ çevrimleri vardır; bu üç durumdan çıkıldıktan sonra hepsine geri dönülebilir. O hâlde üçü de **tekrar edendir**.

$$T = \{1\}, \quad R = \{2, 3, 4\}$$

■

i Aynı matrisin yutucu varyantı

Yukarıdaki matriste ikinci satır (0, 1, 0, 0) olsaydı:

$$P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

esas köşegen üzerinde 1 bulunduğundan 2 durumu **yutucu** olurdu: sürece bir kez 2’ye girildiğinde sonsuza kadar orada kalınır.

6.3 Geçiş Matrisinin İndirgenmesi

Zincirde geçici durumlar varsa, uzun dönemde süreç eninde sonunda onları terk eder ve yalnızca tekrar eden durumlar arasında dolaşır. Bu yüzden uzun dönem analizinde geçici durumlar atılabilir.

Tanım 6.5 (İndirgenmiş Matris). $T \neq \emptyset$ olan bir zincirde, geçici durumlara karşılık gelen **satır ve sütunlar** geçiş matrisinden silinir. Geriye kalan matrise **indirgenmiş matris** denir ve P_R ile gösterilir.

Örnek 6.2 (Dört Durumlu Zincirin İndirgenmesi). Örnek 6.1’teki zinciri indirgeyiniz.

Çözüm.

$T = \{1\}$ olduğundan 1. satır ve 1. sütun silinir. Geriye 2, 3, 4 durumlarına karşılık gelen 3×3 ’lük matris kalır:

$$P_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4×4 ’lük matrisi 3×3 ’lüğe indirdik. Silme işleminin doğru yapıldığının en hızlı kontrolü, kalan matrisin de bir SSM olmasıdır: satır toplamaları sırasıyla 1, 1 ve 1’dir. ✓

■

! Silme işleminde satır ve sütun birlikte gider

Yalnızca satırı silmek yetmez; aynı numaralı sütun da silinmelidir. Aksi hâlde matris kare olmaktan çıkar ve satır toplamaları 1 vermez.

Bu işlem ancak silinen durumlar **geçici** olduğunda anlamlıdır: tekrar eden durumlardan geçicilere hiç ok gitmediği için, silinen sütunlarda kalan satırlar zaten sıfırdır.

Örnek 6.3 (Beş Durumlu Zincir). $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere

$$P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,5 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

zincirinin durumlarını sınıflandırıp indirgenmiş matrisini bulunuz.

Çözüm.

Yutucu durum var mı? Esas köşegende 1 yoktur, dolayısıyla yutucu durum yoktur.

Geçiş diyagramı.

Durum	Gittiği durumlar
1	1, 2, 3, 4, 5
2	2, 5
3	3, 5
4	3
5	2, 5

Sınıflandırma. Her durum için “çıkınca geri dönebiliyor muyum?” sorusunu soralım.

- **Durum 1:** 1. sütunda p_{11} dışında sıfırdan farklı eleman yoktur; hiçbir durumdan 1’e dönülemez. **Geçici.**
- **Durum 3:** $3 \rightarrow 5$ geçişi vardır ve 5’ten yalnızca 2 ve 5’e gidilir. 3’e dönüş yalnızca 4’ten mümkündür, 4’e ise yalnızca 1’den gelinir; 1 de geçicidir. O hâlde 3’ten çıkıldıktan sonra geri dönülemez. **Geçici.**
- **Durum 4:** 4. sütunda yalnızca $p_{14} = 0,1$ vardır. 4’ten çıkılınca 3’e gidilir ve 4’e bir daha dönülemez. **Geçici.**
- **Durumlar 2 ve 5:** $2 \rightarrow 5 \rightarrow 2$ çevrimi vardır; ikisi de **tekrar edendir**.

$$T = \{1, 3, 4\}, \quad R = \{2, 5\}$$

İndirgeme. $T \neq \emptyset$ olduğundan zincir indirgenebilir. 1, 3 ve 4 numaralı satır ve sütunlar silinip 2 ile 5 numaralı satır ve sütunlar bırakılır:

$$P_R = \begin{pmatrix} p_{22} & p_{25} \\ p_{52} & p_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Satır toplamaları 1’dir; P_R geçerli bir SSM’dir. ✓

■

 İndirgemenin sağlaması

P_R 'yi yazdıktan sonra satır toplamalarını mutlaka kontrol edin. Silinen sütunlarda kalan satırların değerleri sıfır olduğu için toplamlar bozulmamalıdır; 1'den farklı bir toplam, yanlış satır ya da sütunun silindiğini gösterir.

 Sınıflandırmada pratik yöntem

Bir durumun geçici mi tekrar eden mi olduğunu anlamanın en hızlı yolu **sütuna bakmaktır**:

- j sütununda, j durumuna ulaşılabilen durumların hepsi görünür.
- j 'ye yalnızca kendisinden ve geçici durumlardan ok geliyorsa, j de geçicidir.

Diyagram çizmeden önce bu taramayı yapmak, çoğu soruda yeterli olur.

7. Regüler Matrisler ve Daimi Durum Olasılıkları

Olasılık dağılımı bölümünde basit hava modelini adım adım iletmiş ve dağılımın giderek sabit bir vektöre yaklaştığını görmüştük. Bu bölümde bu gözlemin ne zaman geçerli olduğunu ve limit vektörünün nasıl bulunduğunu inceleyeceğiz.

7.1 Yakınsama Teoremi

Teorem 7.1 (Regüler Zincirlerin Yakınsaması). $\{X_n \mid n \geq 0\}$, geçiş olasılık matrisi P olan **regüler**, **homojen** ve **sonlu** durumlu bir Markov zinciri olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = B$$

limiti vardır. Burada B ; **satırları özdeş** olan ve her satırı zincirin π sabit dağılımına eşit olan bir matristir:

$$B = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_m \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_m \end{pmatrix}$$

! Satırların özdeş olması ne anlama gelir?

B 'nin i . satırı, “ i durumundan başlayıp çok uzun süre sonra nerede olacağım?” sorusunun cevabıdır. Bütün satırlar aynı olduğuna göre bu cevap **başlangıç durumundan bağımsızdır**. Regüler bir zincir, yeterince uzun çalıştırıldığında nereden başladığını unuttur.

⚠ Regülerlik şart

Teorem yalnızca regüler zincirler için geçerlidir. **Yutucu zincirlerde** sonuç tam tersidir: sürecin nerede sonlanacağı **tamamen nereden başladığına** bağlıdır ve $B = NR$ matrisinin satırları birbirinden farklıdır.

Regülerliğin nasıl kontrol edileceğini **Tanım 4.6** ve onu izleyen örnekte görmüştük: esas köşegeninde 1 bulunan bir matris hiçbir zaman regüler olamaz.

7.2 Daimi Durum Olasılıkları

Tanım 7.1 (Daimi Durum Olasılığı). Tekrar eden durumlar üzerinde tanımlı

$$\pi' = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m), \quad \pi_j \geq 0$$

vektörüne, aşağıdaki iki koşulu birlikte sağlıyorsa **daimi durum olasılığı** (sabit dağılım) denir:

$$\pi' = \pi' P \quad \text{ve} \quad \pi' \cdot \mathbf{1} = 1$$

Burada $\mathbf{1}$, bütün bileşenleri 1 olan sütun vektörüdür; ikinci koşul $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_m = 1$ demektir.

i İki koşul da gerekli

İlk koşul π' 'nin bir **denge** vektörü olmasını sağlar: dağılım bir adım ilerletildiğinde değişmez. Ancak $\pi' = \pi'P$ denklem sistemi tek başına çözümü belirlemez, çünkü P 'nin satır toplamaları 1 olduğundan denklemlerden **biri diğerlerinin sonucudur**.

Bu yüzden denklemlerden birini atıp yerine $\sum \pi_j = 1$ normalizasyon koşulunu koymak zorundayız. Çözümü belirleyen ikinci koşul budur.

Bilinmeyen sayısını azaltmak

m durumlu bir zincirde π vektörünü

$$\pi' = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{m-1}, 1 - \pi_1 - \pi_2 - \dots - \pi_{m-1})$$

biçiminde yazarsanız normalizasyon koşulunu baştan sağlamış olur, bir bilinmeyenden kurtulursunuz. 3×3 ve daha büyük matrislerde bu kısayol işi belirgin biçimde hafifletir.

7.3 Çözüm Adımları

1. **Zincirin regüler olduğunu doğrula.** Geçici durum varsa önce zinciri indirge; daimi durum olasılıkları yalnızca tekrar eden durumlar üzerinde tanımlıdır.
2. **Denge denklemlerini kur.** $\pi'P = \pi'$ çarpımını açarak her sütun için bir denklem yaz.
3. **Bir denklemi at, normalizasyonu ekle.** Denklemlerden biri gereksizdir; yerine $\sum \pi_j = 1$ koşulunu koy.
4. **Sistemi çöz.** Elde edilen π vektörü hem sabit dağılım hem de $\lim P^n$ matrisinin ortak satırıdır.

7.4 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 7.1 (Basit Hava Modeli). Yağmurlu (0) ve güneşli (1) günlerden oluşan basit hava modelinin geçiş matrisi

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

olarak verilsin. Bu model için daimi durum olasılıklarını bulunuz.

Çözüm.

1. **Regülerlik.** Matrisin esas köşegeninde 1 yoktur ve bütün elemanları zaten pozitiftir; P regülerdir. Ayrıca $T = \emptyset$, $R = \{0, 1\}$ olduğundan indirgemeye gerek yoktur.

2. **Denge denklemleri.** $\pi' = (\pi_0, \pi_1)$ diyelim:

$$(\pi_0, \pi_1) = (\pi_0, \pi_1) \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

Sütun sütun açalım:

$$0,5\pi_0 + 0,1\pi_1 = \pi_0$$

$$0,5\pi_0 + 0,9\pi_1 = \pi_1$$

3. **Sadeleştirme ve normalizasyon.** Birinci denklemden

$$0,1\pi_1 = 0,5\pi_0 \implies \pi_1 = 5\pi_0$$

(İkinci denklem de aynı bağıntıyı verir; beklendiği gibi gereksizdir.) Şimdi normalizasyon koşulunu kullanalım:

$$\pi_0 + \pi_1 = 1 \implies \pi_0 + 5\pi_0 = 1 \implies 6\pi_0 = 1$$

Sonuç.

$$\pi' = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right)$$

Uzun vadede günlerin $\frac{1}{6}$ 'sı yağmurlu, $\frac{5}{6}$ 'sı güneşli olur. Aynı zamanda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} 1/6 & 5/6 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$$

olur — bugünün havası ne olursa olsun.

■

Örnek 7.2 (Önce İndirge, Sonra Çöz). Durumların sınıflandırılması bölümündeki beş durumlu zincirin daimi durum olasılıklarını bulunuz. Orada $T = \{1, 3, 4\}$, $R = \{2, 5\}$ bulunmuş ve indirgenmiş matris

$$P_R = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

olarak elde edilmişti.

Çözüm.

Daimi durum olasılıkları yalnızca tekrar eden durumlar üzerinde tanımlı olduğundan hesabı P_R üzerinde yapıyoruz. $\pi' = (\pi_2, \pi_5)$ olsun:

$$(\pi_2, \pi_5) = (\pi_2, \pi_5) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Birinci sütundan:

$$0,8\pi_2 + 0,5\pi_5 = \pi_2 \implies 0,5\pi_5 = 0,2\pi_2 \implies \pi_5 = \frac{2}{5}\pi_2$$

Normalizasyon:

$$\pi_2 + \pi_5 = 1 \implies \pi_2 \left(1 + \frac{2}{5} \right) = 1 \implies \frac{7}{5}\pi_2 = 1$$

Sonuç.

$$\pi' = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7} \right)$$

Geçici durumların (1, 3 ve 4) uzun vadeli olasılıkları sıfırdır; süreç eninde sonunda $\{2, 5\}$ kümesine yerleşir ve zamanının $\frac{5}{7}$ 'sini 2'de, $\frac{2}{7}$ 'sini 5'te geçirir.

■

i İndirgemeyi atlarsanız

Denge denklemlerini indirgenmemiş 5×5 matris üzerinde kurarsanız da doğru sonuca ulaşırsınız; sistem $\pi_1 = \pi_3 = \pi_4 = 0$ sonucunu kendiliğinden verir. Ancak bu, gereksiz üç bilinmeyenle uğraşmak demektir. İndirgeme tam olarak bu yükü ortadan kaldırır.

7.5 Genel 2×2 Regüler Matris

Aşağıdaki örnek, iki durumlu bütün regüler zincirleri tek seferde çözer ve P^n 'in yakınsama sebebini açıkça gösterir.

Örnek 7.3 (Genel Çözüm).

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1$$

regüler stokastik süreç matrisi için

a) daimi durum olasılıklarını, b) P^n matrisini, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ limitini bulunuz.

Çözüm.

a) **Daimi durum olasılıkları.** $\pi' = (\pi_1, \pi_2)$ olsun. Birinci sütundan:

$$(1-\alpha)\pi_1 + \beta\pi_2 = \pi_1 \implies \beta\pi_2 = \alpha\pi_1 \implies \pi_1 = \frac{\beta}{\alpha}\pi_2$$

Normalizasyon $\pi_1 + \pi_2 = 1$ ile:

$$\frac{\beta}{\alpha}\pi_2 + \pi_2 = 1 \implies \pi_2 \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha} = 1$$

$$\pi' = \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)$$

b) **P^n matrisi.** Spektral ayrışımı kullanacağız:

$$P^n = \lambda_1^n E_1 + \lambda_2^n E_2, \quad E_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [P - \lambda_2 I], \quad E_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} [P - \lambda_1 I]$$

Öz değerler. Karakteristik denklemi kuralım:

$$|\lambda I - P| = \begin{vmatrix} \lambda - (1-\alpha) & -\alpha \\ -\beta & \lambda - (1-\beta) \end{vmatrix} = 0$$

Determinantı açıp düzenlersek

$$\lambda^2 - (2 - \alpha - \beta)\lambda + (1 - \alpha - \beta) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - (1 - \alpha - \beta)) = 0$$

bulunur. O hâlde öz değerler

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - \alpha - \beta$$

Spektral izdüşümler. $\lambda_1 - \lambda_2 = \alpha + \beta$ olduğundan:

$$E_1 = \frac{1}{\alpha + \beta} [P - (1 - \alpha - \beta)I] = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \frac{1}{-(\alpha + \beta)} [P - I] = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix}$$

Sonuç. $\lambda_1^n = 1$ olduğundan

$$P^n = \frac{1}{\alpha + \beta} \left[\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} + (1 - \alpha - \beta)^n \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} \right]$$

c) **Limit.** $0 < \alpha < 1$ ve $0 < \beta < 1$ iken

$$|1 - \alpha - \beta| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \alpha - \beta)^n = 0$$

olur. O hâlde ikinci terim yok olur ve geriye yalnızca E_1 kalır:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = E_1 = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha + \beta} & \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\ \frac{\beta}{\alpha + \beta} & \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{pmatrix}$$

Limit matrisinin iki satırı da (a) şıkında bulunan π' vektörüne eşittir — **Teorem 7.1**'nın tam olarak söylediği budur.

💡 Yakınsama hızı

P^n 'in π' 'ye yaklaşma hızını belirleyen büyüklük $|\lambda_2| = |1 - \alpha - \beta|$ 'dir. $\alpha + \beta$ toplamı 1'e yaklaştıkça λ_2 sıfıra yaklaşır ve zincir dengeye **çok hızlı** oturur; $\alpha + \beta$ küçüldükçe yakınsama yavaşlar. Uç durumlar bu yüzden regüler değildir: $\alpha = \beta = 0$ için $P = I$ ve $\lambda_2 = 1$ olur (hiç yakınsama yok), $\alpha = \beta = 1$ için $\lambda_2 = -1$ olur (süreç iki durum arasında sonsuza dek salınır).

📌 Sağlama alışkanlığı

Bulduğunuz π vektörünü mutlaka denetleyin:

1. Bütün bileşenler 0 ile 1 arasında olmalı.
2. Toplamları 1 etmeli.
3. $\pi'P$ çarpımı tekrar π' vermeli.

Üçüncü kontrol, denge denklemlerini kurarken satır-sütun karıştırmadığınızı da doğrular.

7.6 Regüler ve Yutucu Zincirlerin Karşılaştırması

Markov zincirlerinin uzun dönem davranışı iki uça toplandır. Aşağıdaki tablo bu iki dünyanın ayrımını özetler.

	Regüler zincir	Yutucu zincir
Koşul	Bir n için P^n 'in tüm elemanları pozitif	En az bir yutucu durum var ve her geçici durumdan ona ulaşılabilir
Uzun dönem	Süreç dolaşmaya devam eder	Süreç bir yutucu durumda durur
Limit matrisi	$\lim P^n = B$, satırları özdeş	$B = NR$, satırları farklı
Başlangıcın etkisi	Yok — nereden başlanırsa başlansın aynı π	Belirleyici — hangi yutucuda durulacağını başlangıç belirler
Aranan büyüklük	Daimi durum vektörü π	Yutulma olasılıkları ve ortalama adım sayısı N
Yöntem	$\pi' = \pi'P$, $\sum \pi_j = 1$	Kanonik form, $N = (I - Q)^{-1}$, $B = NR$

Ayrıntılar için [yutucu matrisler ve yutulma olasılıkları](#) bölümüne bakınız.

8. Yutucu Matrisler ve Yutulma Olasılıkları

Bir Markov zincirinde, **regüler sistemlerin** aksine “nereden başlarsan başla dengeye ulaşırsın” mantığı her zaman geçerli değildir. Bazı durumlara girildiğinde sistem bir daha asla o durumdan çıkamaz. Bu tür geri dönüşü olmayan durumlara sahip zincirlere **yutucu Markov zincirleri** denir.

Tanım 8.1 (Yutucu Durum ve Yutucu Zincir). Bir Markov zincirinde i durumundan çıkış olasılığı sıfır (yani $P_{ii} = 1$ ve $j \neq i$ için $P_{ij} = 0$), bu i durumuna **yutucu durum (absorbing state)** denir. Bir Markov zincirinin yutucu zincir olabilmesi için şu **iki şartı** aynı anda sağlaması gerekir:

1. En az bir yutucu duruma sahip olmalıdır.
2. Yutucu olmayan her bir durumdan (geçici durumlardan) eninde sonunda bir yutucu duruma ulaşmak mümkün olmalıdır.

8.1 Kanonik Form

Yutucu bir Markov matrisinin geleceğini analiz etmek için matrisi belirli bir hiyerarşiye göre yeniden düzenlememiz gerekir. Tüm **geçici (transient)** durumları matrisin üstüne ve soluna, tüm **yutucu (absorbing)** durumları ise altına ve sağına taşıyarak elde ettiğimiz yapıya **kanonik form** denir.

Teorem 8.1 (Kanonik Formun Yapısı). Kanonik forma getirilmiş bir P geçiş olasılık matrisi dört alt matrise bölünür:

$$P_{\text{kanonik}} = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Bu blokların anlamları şunlardır:

- Q (**geçici $\rightarrow$ geçici**): Geçici durumlardan yine geçici durumlara olan geçiş olasılıklarını barındıran kare alt matris.
- R (**geçici $\rightarrow$ yutucu**): Geçici durumlardan yutucu durumlara doğrudan geçiş olasılıklarını barındıran alt matris.
- 0 (**yutucu $\rightarrow$ geçici**): Yutucu bir durumdan tekrar geçici bir duruma dönmek imkânsız olduğundan bu blok tamamen sıfırlardan oluşur.
- I (**yutucu $\rightarrow$ yutucu**): Yutucu duruma giren orada kalacağı için bu blok bir birim matristir.

i Matris nasıl yeniden sıralanır?

Bir matrisi kanonik forma sokarken rastgele yer değiştirme yapamayız. Bir i durumunu j durumuyla yer değiştireceksek; **önce i . satır ile j . satırı, ardından i . sütun ile j . sütunu** birlikte yer değiştirmeliyiz. Yani durum isimleri matrisin hem üst (sütun) hem de sol (satır) kenarında mutlaka aynı sırayla okunmalıdır.

8.2 Temel Matris ve Yutulma Olasılıkları

Matrisi kanonik forma getirdikten sonra, karmaşık lineer denklem sistemleri yerine doğrudan **temel matris** kullanılır.

Teorem 8.2 (Temel Matris NS ve Yutulma Matrisi BS). 1. **Temel matris.** Sistemin yutulmadan önce geçici durumlarda ortalama kaç adım geçireceğini gösterir:

$$N = (I - Q)^{-1}$$

Buradaki I , Q ile aynı boyutta birim matristir.

2. Yutulma olasılıkları. Herhangi bir geçici durumdan başlayan sürecin nihai olarak hangi yutucu durumda sonlanacağını olasılıklarını verir:

$$B = N \cdot R$$

Bu B matrisinin **satırları başlangıç (geçici) durumlarını, sütunları bitiş (yutucu) durumlarını** temsil eder.

8.3 Adım Adım Çözüm Algoritması

1. **Durumları sınıflandır.** Hangi durumların geçici, hangilerinin yutucu olduğunu tespit et.
2. **Kanonik formu kur.** Satır ve sütunları önce geçici, sonra yutucu gelecek şekilde eş zamanlı yeniden sıralayarak Q ve R alt matrislerini elde et.
3. **Temel matrisi bul.** Önce $(I - Q)$ farkını hesapla, ardından tersini alarak N matrisini bul.
4. **Çarpımı gerçekleştir.** $B = N \cdot R$ çarpımıyla tüm yutulma olasılıklarını tek bir matriste elde et.

8.4 Çözümlü Uygulama

Örnek 8.1. Durum uzayı $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olan bir Markov zincirine ait geçiş olasılık matrisi aşağıda verilmiştir. Sürecin **3 durumunda başlayıp 2 durumunda yutulma** olasılığını bulunuz.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 & 0 & 0,4 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,4 & 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Çözüm.

1. Durumların sınıflandırılması.

Matrisin köşegenine baktığımızda 2, 5 ve 6 numaralı satırların yalnızca kendi üzerlerine geçiş yaptığını, diğer girdilerinin sıfır olduğunu görüyoruz:

- Geçici durumlar: $\{1, 3, 4\}$
- Yutucu durumlar: $\{2, 5, 6\}$

2. Kanonik formun oluşturulması.

Satır ve sütun sırasını önce $\{1, 3, 4\}$, sonra $\{2, 5, 6\}$ gelecek şekilde yeniden dizelim:

$$P_{\text{kanonik}} = \begin{array}{c|ccc|ccc} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0,4 & 0,5 & 0,1 & 0 \\ \mathbf{3} & 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0 & 0 & 0,1 \\ \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0,9 & 0,1 & 0 \\ \hline \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Sol üst blok Q , sağ üst blok R 'dir:

$$Q = \begin{array}{c|ccc} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 0,4 \\ \mathbf{3} & 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad R = \begin{array}{c|ccc} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \hline \mathbf{1} & 0,5 & 0,1 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 0 & 0,1 \\ \mathbf{4} & 0,9 & 0,1 & 0 \end{array}$$

3. Temel matrisin bulunması.

Önce $(I - Q)$ farkını hesaplayalım:

$$I - Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,4 \\ -0,2 & 0,6 & -0,3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin tersini alarak temel matrisi elde ederiz:

$$N = (I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{19}{30} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Yutulma olasılıklarının hesaplanması.

$B = N \cdot R$ çarpımını gerçekleştiriyoruz; satırlar başlangıç, sütunlar bitiş durumlarını temsil eder:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{19}{30} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c|ccc} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \hline \mathbf{1} & 0,86 & 0,14 & 0 \\ \mathbf{3} & \frac{221}{300} & \frac{29}{300} & \frac{50}{300} \\ [0.3em] \mathbf{4} & 0,9 & 0,1 & 0 \end{array}$$

Sonuç: Soru, 3 durumunda başlayıp 2 durumunda yutulma olasılığını istiyor. B matrisinde **3** numaralı satır ile **2** numaralı sütunun kesişimine bakarız:

$$P(3 \rightarrow 2) = \frac{221}{300} \approx 0,7367$$

Öz kontrol: B matrisinin her satırının toplamı 1 olmalıdır — süreç eninde sonunda mutlaka bir yutucu durumda son bulur. Üçüncü satır için

$$\frac{221}{300} + \frac{29}{300} + \frac{50}{300} = \frac{300}{300} = 1$$

sağlandığından işlemlerimiz doğrudur.

☒

9. Basit Lineer Regresyon ve En Küçük Kareler Yöntemi

Gerçek hayatta birçok olay birbiriyle bağlantılıdır. Bir değişkenin değerinin, başka bir değişkenin durumuna göre nasıl değiştiğini incelemek istatistiğin temel konularından biridir. İki değişken arasındaki ilişkileri genel olarak ikiye ayırırız:

1. **Fonksiyonel ilişki.** İki değişken arasındaki mutlak ve kesin matematiksel ilişkidir. Örneğin bir karenin kenar uzunluğu (x) ile alanı (Y) arasındaki ilişki $Y = x^2$ şeklindedir ve istisnasız her zaman geçerlidir.
2. **İstatistiksel ilişki.** Kesin bir formülle ifade edilemeyen, aralarında bir eğilim bulunan ilişkidir. Örneğin öğrencilerin çalışma süreleri ile sınav notları arasında bir ilişki vardır, ancak bu herkes için aynı sonucu vermez. Regresyon analizi bu tür istatistiksel ilişkileri modellemek için kullanılır.

9.1 Serpilme Diyagramları ve Korelasyon

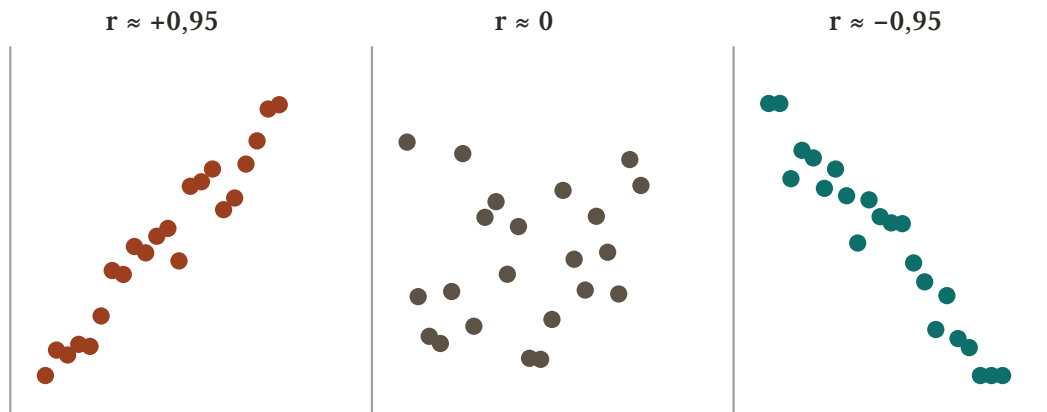
İki değişken arasındaki istatistiksel ilişkiyi görsel olarak incelemek için verilerin koordinat sistemine yerleştirilmesiyle elde edilen grafiğe **serpilme diyagramı (scatter plot)** denir. Noktaların dağılımına bakılarak ilişkinin varlığı, yönü ve kuvveti hakkında fikir sahibi olunur.

Bu ilişkinin yönünü ve şiddetini matematiksel olarak ölçen analize ise **korelasyon** denir.

Tanım 9.1 (Pearson Korelasyon Katsayısı). İki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin şiddetini ve yönünü gösteren katsayıdır; $-1 \leq r \leq 1$ aralığında değer alır:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

- $r = 1$: Mükemmel pozitif doğrusal ilişki – biri artarken diğeri de aynı oranda artar.
- $r = -1$: Mükemmel negatif doğrusal ilişki – biri artarken diğeri aynı oranda azalır.
- $r = 0$: İki değişken arasında hiçbir **doğrusal** ilişki yoktur.



Şekil 9.1: Korelasyon katsayısının işareti ilişkinin **yönünü**, mutlak değeri **şiddetini** verir. Ortadaki dağılımda doğrusal bir eğilim yoktur.

Korelasyon “burada bir ilişki var mı ve ne kadar güçlü?” sorusunu yanıtlarken; regresyon, “bu ilişkiyi hangi doğru denklemiyle modelleyebilirim?” sorusuna cevap verir.

9.2 Basit Lineer Regresyon Modeli

Tanım 9.2 (Basit Lineer Regresyon Modeli). Bir bağımlı değişken (Y) ile tek bir bağımsız değişken (X) arasındaki doğrusal ilişkiyi modelleyen istatistiksel yaklaşımdır:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i$$

Burada

- Y_i : bağımlı değişken (gözlem değeri),
- X_i : bağımsız değişken (açıklayıcı değişken),
- ϵ_i : hata terimi — gerçek değer ile modelin öngördüğü değer arasındaki fark.

9.3 En Küçük Kareler Yöntemi (EKK)

Gözlemlediğimiz veri noktaları arasından sonsuz sayıda doğru geçirebiliriz. Amacımız, eğilimi en iyi yansıtan “ideal” doğruyu bulmaktır. Bunun için tahminlerimiz ile gerçek değerler arasındaki farkı minimize etmemiz gerekir:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)$$

Hataların doğrudan toplamını almak yanıltıcıdır; çünkü pozitif ve negatif sapmalar birbirini sıfırlayabilir. Bu sorunu aşmak için hataların **karelerinin toplamını** minimize eden optimum β_0 ve β_1 değerlerini ararız.

Teorem 9.1 (Gauss Normal Denklemleri ve EKK Katsayıları). $\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X$ modelini kurabilmek için, hata kareleri toplamı fonksiyonunu minimum yapan katsayılar şu formüllerle hesaplanır:

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

Burada n toplam gözlem sayısını, $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ ise sırasıyla X ve Y değişkenlerinin aritmetik ortalamalarını ifade eder.

İspat: bu formüller nereden geliyor?

Hata kareleri toplamı, β_0 ve β_1 ’e bağlı iki değişkenli bir fonksiyondur:

$$E(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

Çok değişkenli analizden biliyoruz ki bir fonksiyonun minimum noktasını bulmak için, her bir değişkene göre kısmi türevini alıp sıfıra eşitlemeliyiz.

1. β_0 ’a göre kısmi türev:

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

Her iki tarafı -2 ’ye bölüp toplam sembolünü dağıttığımızda birinci normal denklemi elde ederiz:

$$\sum y_i = n\beta_0 + \beta_1 \sum x_i \quad (1)$$

2. β_1 ’e göre kısmi türev: Zincir kuralı gereği fazladan bir $-x_i$ çarpanı gelir:

$$\frac{\partial E}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i = 0$$

Sadeleştirip x_i 'yi dağıtırsak ikinci normal denklemi elde ederiz:

$$\sum x_i y_i = \beta_0 \sum x_i + \beta_1 \sum x_i^2 \quad (2)$$

Elde ettiğimiz bu iki bilinmeyenli denklem sistemine **Gauss normal denklemleri** denir. Sistem yok etme veya yerine koyma yöntemiyle çözüldüğünde yukarıdaki β_1 ve β_0 formülleri ortaya çıkar.

☒

⚠ Kritik uyarı: farklı modeller için hazır formüller kullanılamaz

Yukarıda çıkardığımız β_0 ve β_1 formülleri **yalnızca** $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ biçimindeki basit doğrusal modeller için geçerlidir.

Veriye $y = ax^2 + b$ (kuadratik) veya $y = ce^{ax}$ (üstel) gibi farklı formatta bir eğri uydurmamız istenirse bu hazır formüller **kullanılamaz**. Böyle bir durumda hata kareleri toplamı fonksiyonunu istenen modele göre yeniden yazmalı, ilgili parametrelere göre kısmi türev alıp sıfıra eşitleyerek **kendi normal denklemlerimizi sıfırdan çıkarmalıyız**.

9.4 Adım Adım Çözüm Algoritması

El hesaplamalarında en güvenilir yol bir tablo oluşturmaktır.

1. **Tabloyu hazırlayın.** X_i ve Y_i değerlerini alt alta yazın.
2. **Ortalamaları bulun.** $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ değerlerini hesaplayın.
3. **Sapmaları hesaplayın.** Her satır için $(x_i - \bar{x})$ ve $(y_i - \bar{y})$ değerlerini bulun.
4. **Çarpım ve kareleri alın.** Her satır için $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ ve $(x_i - \bar{x})^2$ hesaplayıp sütunları toplayın. Bu değerler korelasyon formülünde de kullanılır.
5. **Katsayıları yerine koyun.** Önce β_1 'i, ardından bulduğunuz değeri kullanarak β_0 'ı hesaplayın.

9.5 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 9.1. Aşağıda verilen X ve Y değerleri için en küçük kareler yöntemini kullanarak tahmini regresyon doğrusunu bulunuz.

X	1	2	3	4	5
Y	2	4	5	4	5

Çözüm.

Öncelikle ortalamaları bulalım ($n = 5$):

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = 3, \quad \bar{y} = \frac{2 + 4 + 5 + 4 + 5}{5} = 4$$

Tablomuzu oluşturalım:

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	2	-2	-2	4	4	4
2	4	-1	0	0	1	0
3	5	0	1	0	0	1
4	4	1	0	0	1	0
5	5	2	1	2	4	1

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
Toplam				6	10	6

Formülleri uygulayalım:

$$\beta_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x} = 4 - (0,6 \cdot 3) = 4 - 1,8 = 2,2$$

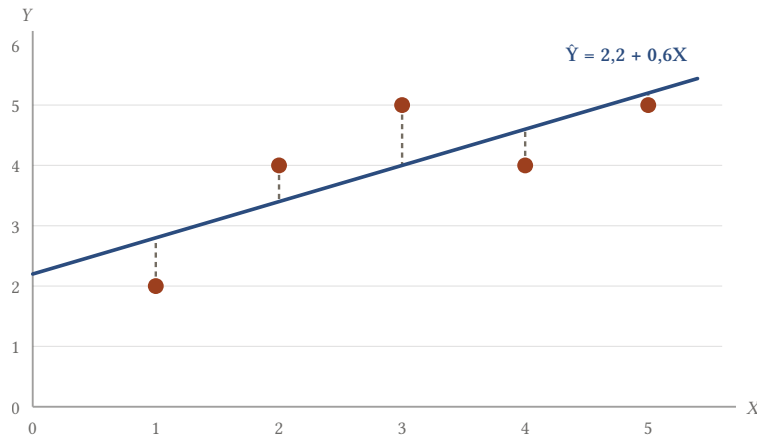
Tahmini regresyon doğrusu:

$$\hat{Y} = 2,2 + 0,6X$$

Korelasyon katsayısı. Tablodaki son sütunu da kullanarak ilişkinin şiddetini ölçelim:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{6}{\sqrt{10 \cdot 6}} = \frac{6}{\sqrt{60}} \approx 0,775$$

r pozitif olduğundan ilişki artan yönlüdür; 1'e değil 0,775'e eşit olması ise noktaların doğrunun üzerinde tam oturmadığını, yani ilişkinin kuvvetli ama mükemmel olmadığını gösterir.



Şekil 9.2: Serpilme diyagramı, en küçük kareler doğrusu ve artıklar. Kesikli dikey parçalar $e_i = y_i - \hat{y}_i$ hatalarıdır; EKK yöntemi bu parçaların **karelerinin toplamını** en küçük yapar.

☒

Örnek 9.2. Bir laboratuvar deneyinde elde edilen X ve Y verileri aşağıda verilmiştir. Gauss normal denklemlerini kullanarak regresyon doğrusunu bulunuz.

X	-1	0	1	2	3	4	5	6
Y	10	9	7	5	4	3	0	-1

Çözüm.

Bu kez formülün diğer versiyonunu, yani Gauss denklemlerini doğrudan çözmeyi kullanalım. $n = 8$ adet verimiz var; gerekli toplamaları bulalım:

$$\begin{aligned}
\sum X_i &= (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20 \\
\sum Y_i &= 10 + 9 + 7 + 5 + 4 + 3 + 0 + (-1) = 37 \\
\sum X_i^2 &= 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 92 \\
\sum X_i Y_i &= -10 + 0 + 7 + 10 + 12 + 12 + 0 - 6 = 25
\end{aligned}$$

Normal denklemleri yazalım:

$$37 = 8\beta_0 + 20\beta_1 \quad (1)$$

$$25 = 20\beta_0 + 92\beta_1 \quad (2)$$

Birinci denklemi $-2,5$ ile çarpalım:

$$-92,5 = -20\beta_0 - 50\beta_1$$

İkinci denklemle taraf tarafa toplayalım:

$$25 - 92,5 = 42\beta_1 \Rightarrow -67,5 = 42\beta_1 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{67,5}{42} = -\frac{45}{28} \approx -1,607$$

Bulduğumuz eğimi birinci denklemde yerine koyalım:

$$37 = 8\beta_0 + 20\left(-\frac{45}{28}\right) \Rightarrow 8\beta_0 = 37 + \frac{900}{28} = \frac{1936}{28} \Rightarrow \beta_0 = \frac{121}{14} \approx 8,643$$

Sonuç:

$$\hat{Y} = 8,643 - 1,607X$$

X değerleri artarken Y değerlerinin sürekli düştüğüne dikkat edin; bu yüzden eğimin negatif çıkması beklenen sonuçtur.

Korelasyon katsayısı için sapma toplamlarını ham toplamlardan da elde edebiliriz:

$$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = 25 - 8(2,5)(4,625) = -67,5$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = 92 - 8(6,25) = 42, \quad \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - n\bar{y}^2 = 281 - 171,125 = 109,875$$

$$r = \frac{-67,5}{\sqrt{42 \cdot 109,875}} \approx -0,994$$

r 'nin -1 'e bu kadar yakın olması, noktaların neredeyse tam bir doğru üzerinde ve azalan yönde sıralandığını gösterir.

☒

10. Lineer Hâle Dönüştürülebilir Modeller

Regresyon analizinde bağımlı (Y) ve bağımsız (X) değişkenler arasındaki ilişki her zaman $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ gibi düz bir doğru şeklinde olmak zorunda değildir. Bazen veriler bir eğri çizerek üstel, logaritmik veya üslü biçimde artış ya da azalış gösterir.

Eğrisel bir ilişkiye en küçük kareler yöntemini doğrudan uygulamaya kalkarsak, çözümü çok zor denklem sistemleriyle karşılaşırız. Bunun yerine şu matematiksel hileyi yaparız: **orijinal denklemi logaritma veya ters alma gibi işlemlerle doğrusal bir formata dönüştürürüz.**

Eğrisel bir modeli çözebilmek için değişkenleri yeni birer isme (örneğin Y^* ve X^*) atayarak modeli $Y^* = A + BX^*$ formatına getiririz. Denklem artık doğrusal olduğundan, standart regresyon işlemlerini bu **yıldızlı değişkenler** üzerinden rahatça uygularız. İşlem bitince ters dönüşüm yaparak orijinal katsayıları döneriz.

10.1 Sık Kullanılan Matematiksel Dönüşümler

10.1.1 1. Üstel (Exponential) Model

Verilerin başlangıçta yavaş, sonra hızlanarak arttığı durumlarda kullanılır. Genel denklem

$$Y = c \cdot e^{aX}$$

biçimindedir. Doğrusallaştırmak için her iki tarafın doğal logaritmasını alırız:

$$\ln(Y) = \ln(c \cdot e^{aX}) = \ln(c) + \ln(e^{aX}) = \ln(c) + aX$$

$Y^* = \ln(Y)$ ve $c^* = \ln(c)$ dersek denklem bilinen doğrusal formata dönüşür:

$$Y^* = c^* + aX$$

10.1.2 2. Üslü (Power) Model

Bağımsız değişkenin üs olarak değil taban olarak yer aldığı modeldir:

$$Y = a_1 \cdot X^{a_2}$$

Doğrusallaştırmak için her iki tarafın logaritmasını alırız:

$$\log(Y) = \log(a_1 \cdot X^{a_2}) = \log(a_1) + a_2 \log(X)$$

$Y^* = \log(Y)$, $a_1^* = \log(a_1)$ ve $X^* = \log(X)$ dersek model doğrusallaşır:

$$Y^* = a_1^* + a_2 X^*$$

Bu modelde yalnızca Y değil, **X de dönüştürülür**; tablo kurarken bunu atlamamak gerekir.

10.1.3 3. Rasyonel (Ters) Model

Bağımlı ve bağımsız değişkenlerin bir oran ilişkisi içinde olduğu modeldir:

$$Y = \frac{a_1 X}{b_1 + X}$$

Doğrusallaştırmak için eşitliğin her iki tarafının çarpmaya göre tersini alırız:

$$\frac{1}{Y} = \frac{b_1 + X}{a_1 X} = \frac{b_1}{a_1 X} + \frac{X}{a_1 X} = \left(\frac{b_1}{a_1}\right) \frac{1}{X} + \frac{1}{a_1}$$

$Y^* = \frac{1}{Y}$ ve $X^* = \frac{1}{X}$ dersek denklem doğrusallaşır:

$$Y^* = CX^* + D, \quad C = \frac{b_1}{a_1}, \quad D = \frac{1}{a_1}$$

10.2 Adım Adım Çözüm Algoritması

1. **Modeli dönüştür.** Verilen modeli logaritma veya ters alma işlemiyle $Y^* = c^* + aX^*$ formatına getir.
2. **Tabloyu güncelle.** Orijinal değerleri değil, dönüştürülmüş yıldızlı değerleri hesaplayarak yeni bir tablo oluştur.
3. **Normal denklemleri yaz.** Yıldızlı değişkenlere göre Gauss normal denklemlerini kur.
4. **Denklemleri çöz.** Tablodaki toplamaları yerine koyup bilinmeyen katsayıları bul.
5. **Orijinal formata dön.** Bulduğun geçici katsayıları ters işlemle asıl sabitlere çevir ve modeli yaz.

10.3 Çözümlü Uygulama

Örnek 10.1. Aşağıdaki verilere en uygun $\hat{Y} = c \cdot e^{aX}$ üstel regresyon eğrisini, en küçük kareler yöntemiyle uydurunuz.

X	0	1	2	3	4
Y	1,5	2,5	3,5	5,0	7,5

Çözüm.

1. Modelin lineerleştirilmesi.

$Y = ce^{aX}$ denkleminin her iki tarafının doğal logaritmasını alıyoruz:

$$\ln(Y) = \ln(c) + aX \Rightarrow Y^* = c^* + aX$$

2. Tablonun oluşturulması ($n = 5$).

Hesaplamalarda Y yerine dönüştürülmüş değişken $Y^* = \ln(Y)$ kullanılacaktır. Değerler virgülden sonra beş basamağa yuvarlanmıştır.

X_i	Y_i	$Y_i^* = \ln(Y_i)$	X_i^2	$X_i Y_i^*$
0	1,5	0,40547	0	0,00000
1	2,5	0,91629	1	0,91629
2	3,5	1,25276	4	2,50552
3	5,0	1,60944	9	4,82832
4	7,5	2,01490	16	8,05960
Toplam		6,19886	30	16,30973

Ayrıca $\sum X_i = 10$ 'dur.

3. Gauss normal denklemlerinin kurulması.

Doğrusal formumuz $Y^* = c^* + aX$ için normal denklemler:

$$6,19886 = 5c^* + 10a \quad (1)$$

$$16,30973 = 10c^* + 30a \quad (2)$$

4. Denklemin çözülmesi.

c^* terimlerini yok etmek için birinci denklemi -2 ile çarpıp ikinciye ekleyelim:

$$-12,39772 = -10c^* - 20a$$

Taraf tarafa topladığımızda:

$$3,91201 = 10a \Rightarrow a = 0,39120$$

Bulduğumuz a değerini birinci denklemde yerine koyalım:

$$6,19886 = 5c^* + 3,91201 \Rightarrow 5c^* = 2,28685 \Rightarrow c^* = 0,45737$$

5. Orijinal katsayıya dönüş.

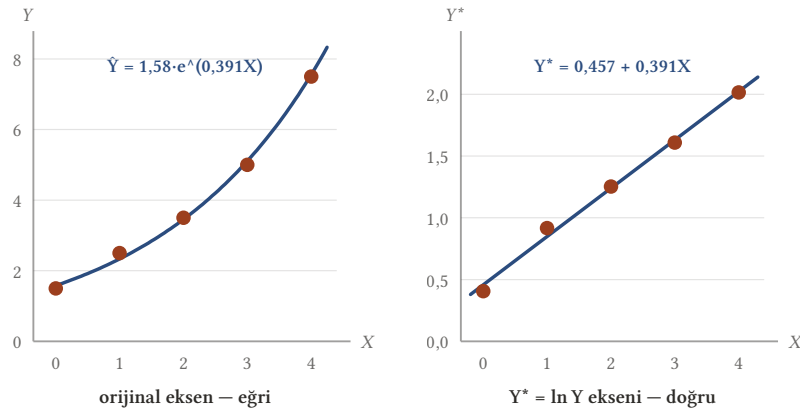
$c^* = \ln(c)$ olduğundan, c 'yi bulmak için ters işlem uygularız:

$$c = e^{c^*} = e^{0,45737} \approx 1,5799$$

Sonuç: Elde ettiğimiz değerleri orijinal üstel denklemde yerine koyarsak regresyon modelimiz

$$\hat{Y} = 1,5799 \cdot e^{0,3912X}$$

olur.



Şekil 10.1: Aynı beş gözlem. Solda orijinal eksen eği, sağda $Y^* = \ln Y$ ekseninde doğru. Dönüşümün tek amacı sağdaki resmi elde etmektir; en küçük kareler orada uygulanır.

Kontrol: $X = 4$ için $\hat{Y} = 1,5799 \cdot e^{1,5648} \approx 1,5799 \cdot 4,782 \approx 7,56$ – gözlenen 7,5 değerine oldukça yakındır.

☒

11. Otokorelasyon ve Tahmin Hatalarının Ölçülmesi

Zaman serisi analizlerinde, elimizdeki verinin geçmiş değerlerden ne kadar etkilendiğini anlamak ve kurduğumuz tahmin modellerinin ne kadar başarılı olduğunu ölçmek zorundayız. Bu bölümde verinin kendi geçmişiyle ilişkisini ölçen **otokorelasyon** kavramını ve model performansını test ettiğimiz **hata ölçütlerini** inceleyeceğiz.

11.1 Otokorelasyon Kavramı

Bir değişkenin farklı bir değişkene göre değil, **kendi geçmiş (gecikmeli) değerlerine göre** gösterdiği ilişkiye **otokorelasyon** denir. Örneğin “dünkü hava sıcaklığı bugünkü sıcaklığı etkiliyor mu?” veya “geçen ayki satışlar bu ayki satışların bir göstergesi mi?” sorularının matematiksel cevabını bu yöntemle ararız.

Tanım 11.1 (\$k\$. Dereceden Otokorelasyon Katsayısı). $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$ şeklinde sıfırdan başlayan bir zaman serisinde, t zamanındaki değer ile k periyot önceki gecikmeli değer arasındaki doğrusal ilişkinin yönünü ve gücünü ölçen katsayıdır; -1 ile $+1$ arasında değer alır:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k}^n (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-k} - \bar{Y})}{\sum_{t=0}^n (Y_t - \bar{Y})^2}$$

Burada n serideki son zaman indeksini (toplam veri sayısı $n + 1$ 'dir), k gecikme periyodunu, $\bar{Y}$ ise serinin aritmetik ortalamasını ifade eder.

i İndis kuralı ve başlangıç noktası

Zaman serisi $t = 0$ 'dan başladığı için, gecikmeli terim Y_{t-k} 'nin tanımlı olabilmesi adına paydaki toplam işlemi mutlaka $t = k$ 'dan başlamalıdır; çünkü $t - k \geq 0 \Rightarrow t \geq k$ 'dır. Paydadaki toplam ise serinin tamamı üzerinden, yani $t = 0$ 'dan $t = n$ 'e kadar alınır.

11.2 Tahmin Hatalarının Ölçülmesi

Bir tahmin modeli kurduğumuzda, modelin ürettiği beklenen değerler ile gözlenen gerçek değerler arasındaki farka **tahmin hatası** denir:

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t$$

Modelin performansını değerlendirmek için, pozitif ve negatif hataların birbirini sıfırlamasını engelleyen dört temel ölçüt kullanılır. Seri $t = 0$ 'dan $t = n$ 'e kadar olduğundan toplam veri sayısı $n + 1$ 'dir.

Tanım 11.2 (MAD --- Ortalama Mutlak Sapma). Hataların mutlak değerlerinin ortalamasıdır. Hataların yönünü göz ardı ederek hedeften ortalama ne kadar saptığımızı gösterir:

$$\text{MAD} = \frac{\sum_{t=0}^n |e_t|}{n + 1}$$

Tanım 11.3 (MSE --- Ortalama Kareli Hata). Hataların karelerinin ortalamasıdır. Büyük hataların karesini alarak onları daha ağır cezalandırdığı için, modeldeki aşırı sapmaları tespit etmede etkilidir:

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{t=0}^n e_t^2}{n+1}$$

Tanım 11.4 (MPE --- Ortalama Yüzde Hata). Hataların gerçek değere oranlarının ortalamasıdır. Mutlak değer kullanılmadığı için modelin sürekli fazla mı yoksa eksik mi tahmin yaptığını (yanlılığını) gösterir:

$$\text{MPE} = \frac{\sum_{t=0}^n \left(\frac{e_t}{Y_t} \right)}{n+1}$$

Tanım 11.5 (MAPE --- Ortalama Mutlak Yüzde Hata). Mutlak hataların gerçek değerlere oranının ortalamasıdır. Sonucu yüzde olarak verdiği için yorumlanması en kolay ölçüttür:

$$\text{MAPE} = \frac{\sum_{t=0}^n \left| \frac{e_t}{Y_t} \right|}{n+1}$$

11.3 Adım Adım Çözüm Algoritması

1. **Ortalamayı bulun.** Otokorelasyon için tüm Y_t değerlerinin aritmetik ortalamasını hesaplayın.
2. **Sütunları hazırlayın.** Hatalar için e_t , $|e_t|$, e_t^2 , e_t/Y_t ve $|e_t|/Y_t$ sütunlarını hesaplayıp tabloya yazın.
3. **Gecikmeli seriyi kaydırın.** Otokorelasyon hesabı için Y_t değerlerini istenen k periyodu kadar kaydırarak Y_{t-k} sütununu oluşturun.
4. **Formülleri uygulayın.** Sütun toplamalarını ilgili formüllerde yerine koyun.

11.4 Çözümlü Uygulama

Örnek 11.1. Bir zaman serisine ait gerçekleşen değerler (Y_t) ve bir tahmin modeliyle elde edilen beklenen değerler ($\hat{Y}_t$) aşağıda verilmiştir. İndisin $t = 0$ 'dan başladığını kabul ederek bu veri seti için birinci dereceden otokorelasyon katsayısını ve dört temel hata ölçütünü hesaplayınız.

t	0	1	2	3	4
Y_t	10	12	15	14	17
$\hat{Y}_t$	11	11	14	16	16

Çözüm.

1. Hata değerlerinin tablolaştırılması.

Veriler $t = 0, \dots, 4$ aralığındadır; yani $n = 4$ ve toplam veri sayısı $n + 1 = 5$ 'tir. Hataları $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ ile hesaplıyoruz (oranlar virgülden sonra dört basamağa yuvarlanmıştır):

t	Y_t	$\hat{Y}_t$	e_t	$ e_t $	e_t^2	e_t/Y_t	$ e_t /Y_t$
0	10	11	-1	1	1	-0,1000	0,1000
1	12	11	1	1	1	0,0833	0,0833
2	15	14	1	1	1	0,0667	0,0667
3	14	16	-2	2	4	-0,1429	0,1429
4	17	16	1	1	1	0,0588	0,0588
Σ			0	6	8	-0,0341	0,4517

2. Hata ölçütlerinin hesaplanması.

$$MAD = \frac{6}{5} = 1,2$$

$$MSE = \frac{8}{5} = 1,6$$

$$MPE = \frac{-0,0341}{5} = -0,0068 \quad (\approx -\%0,68)$$

$$MAPE = \frac{0,4517}{5} = 0,0903 \quad (\approx \%9,03)$$

3. Birinci dereceden otokorelasyon hesabı.

Önce gerçek değerlerin ortalamasını bulalım:

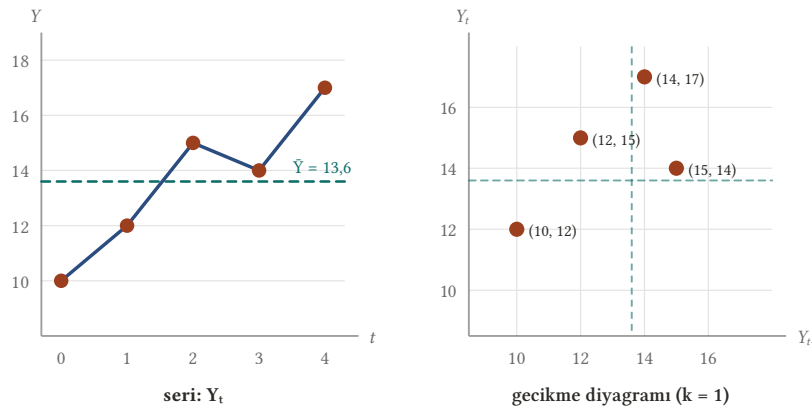
$$\bar{Y} = \frac{10 + 12 + 15 + 14 + 17}{5} = \frac{68}{5} = 13,6$$

$k = 1$ olduğu için gecikmeli çarpım işlemine $t = 1$ 'den başlıyoruz:

t	Y_t	$Y_t - \bar{Y}$	$(Y_t - \bar{Y})^2$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y})$
0	10	-3,6	12,96	—
1	12	-1,6	2,56	$(-1,6)(-3,6) = 5,76$
2	15	1,4	1,96	$(1,4)(-1,6) = -2,24$
3	14	0,4	0,16	$(0,4)(1,4) = 0,56$
4	17	3,4	11,56	$(3,4)(0,4) = 1,36$
Σ	68	0	29,2	5,44

Toplamı formülde yerine koyarsak:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^4 (Y_t - 13,6)(Y_{t-1} - 13,6)}{\sum_{t=0}^4 (Y_t - 13,6)^2} = \frac{5,44}{29,2} \approx 0,1863$$



Şekil 11.1: Solda serinin kendisi, sağda her noktanın bir önceki değerine karşı çizimi. Noktalar sol-alt ve sağ-üst çeyreklere toplansaydı r_1 güçlü pozitif olurdu; burada çeyreklere dağıldıkları için $r_1 = 0,186$ gibi zayıf bir değer çıkar.

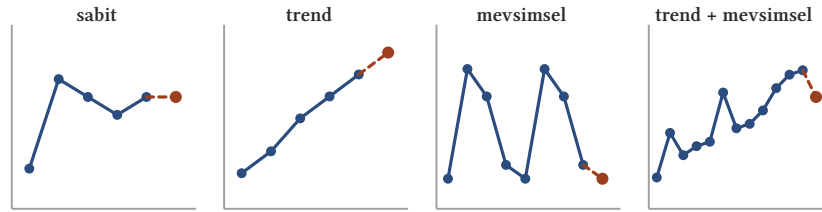
Yorum: Zaman serisinde çok zayıf düzeyde pozitif bir otokorelasyon vardır; bir önceki periyodun gelecek üzerindeki doğrusal etkisi oldukça düşüktür.



12. Tabii Model, Trend ve Mevsimsellik Analizi

Zaman serisi, belirli aralıklarla gözlemlenen ve kronolojik olarak sıralanmış veriler dizisidir. Geleceği tahmin etmek için karmaşık istatistiksel modellere geçmeden önce başvurulacak en temel yaklaşım **tabii model (naive model)** yaklaşımıdır.

Tabii model, gelecekteki değerin doğrudan geçmişteki son duruma veya belirli bir örüntüye eşit olacağını varsayar. Bu modeli kurarken serinin içinde **trend (sürekli eğilim)** veya **mevsimsellik (periyodik dalgalanma)** olup olmadığı mutlaka analiz edilmelidir.



Şekil 12.1: Tabii modelin dört hâli. Kesik kırmızı parça, her durumda bir sonraki periyot için yapılan tahmindir; hangi formülün kullanılacağını serinin şekli belirler.

12.1 Trend ve Mevsimsellik Yoksa (Sabit Model)

Zaman serisinde belirgin bir artış/azalış veya periyodik dalgalanma yoksa, bir sonraki periyodun tahmini değeri gerçekleşen son periyodun değerine eşittir.

Tanım 12.1 (Sabit Tabii Model). Zaman serisinde trend ve mevsimsellik gözlenmediğinde tahmini değer, bir önceki gerçek değere eşittir:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t$$

Örnek 12.1. Aşağıda verilen zaman serisinde trend ve mevsimsellik bulunmamaktadır. Tabii model kullanarak tahmini değerleri hesaplayınız.

t	1	2	3	4	5
Y_t	10	15	14	13	14

Çözüm.

Modelimiz $\hat{Y}_{t+1} = Y_t$ olduğundan her tahmin, kendisinden bir önceki gerçek değere eşit olacaktır. İlk periyot için geçmiş veri olmadığından tahmin yapılamaz.

t	Y_t	$\hat{Y}_t$
1	10	—
2	15	10
3	14	15

t	Y_t	$\hat{Y}_t$
4	13	14
5	14	13
6	—	14

Son satır, gelecek periyot için yapılan tahmindir: $\hat{Y}_6 = Y_5 = 14$.

☒

12.2 Sadece Trend Varsa

Zaman serisinde istikrarlı bir büyüme ya da küçülme varsa buna **trend** denir. Sabit model bu durumda yetersiz kalır; çünkü sürekli artan bir seride gelecekteki değerin dünkü değere eşit olmasını beklemek bizi daima eksik tahmine götürür.

Tanım 12.2 (Trend İçeren Tabii Model). Trend içeren bir seride tahmini değer; son gerçekleşen değere, son iki periyot arasındaki **değişim miktarının** eklenmesiyle bulunur:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t + (Y_t - Y_{t-1})$$

Örnek 12.2. Aşağıda verilen ve istikrarlı bir artış sergileyen veri kümesi için tahmini değerleri bulunuz.

t	1	2	3	4	5
Y_t	6	8	11	13	15

Çözüm.

Tahmin yapabilmek için geriye dönük en az iki gerçek değere ihtiyacımız olduğundan hesaplamalar $t = 3$ 'ten başlar:

$$\hat{Y}_3 = Y_2 + (Y_2 - Y_1) = 8 + (8 - 6) = 10$$

$$\hat{Y}_4 = Y_3 + (Y_3 - Y_2) = 11 + (11 - 8) = 14$$

$$\hat{Y}_5 = Y_4 + (Y_4 - Y_3) = 13 + (13 - 11) = 15$$

$$\hat{Y}_6 = Y_5 + (Y_5 - Y_4) = 15 + (15 - 13) = 17$$

t	Y_t	$\hat{Y}_t$
1	6	—
2	8	—
3	11	10
4	13	14
5	15	15
6	—	17

☒

12.3 Sadece Mevsimsellik Varsa

Zaman serisinde belirli periyotlarla düzenli bir dalgalanma varsa buna **mevsimsellik** denir. Mevsimselliği tespit etmek için verilerin en az birkaç devir boyunca karşılaştırılması gerekir.

Mevsimsel serilerde tahmini değer, bir önceki periyoda değil **tam bir devir önceki aynı periyoda** ait değere eşit alınır. Veriler dört çeyreklik ($s = 4$) dönemler hâlinde veriliyorsa:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_{t-3}$$

Yani sonraki tahmin, mevcut t 'den üç periyot geriye gidilerek —tam dört periyot önceki aynı döneme— eşitlenir.

Örnek 12.3. Aşağıda bir işletmenin iki yıllık çeyreklik ($s = 4$) veri seti verilmiştir. Verilerde belirgin bir büyüme yoktur, ancak her yılın aynı çeyreklerinde benzer satış dalgalanmaları yaşanmaktadır. Tabii model kullanarak 3. yılın tüm çeyrekleri için tahmini değerleri bulunuz.

Yıl	1. çeyrek	2. çeyrek	3. çeyrek	4. çeyrek
1. yıl	10 (Y_1)	50 (Y_2)	40 (Y_3)	15 (Y_4)
2. yıl	10 (Y_5)	50 (Y_6)	40 (Y_7)	15 (Y_8)

Çözüm.

Yalnızca mevsimsellik olduğu için her çeyreğin tahmini değeri, tam bir yıl (dört periyot) önceki aynı çeyreğin değerine eşit olacaktır:

$$\hat{Y}_9 = Y_5 = 10 \text{ (3. yıl 1. çeyrek)}$$

$$\hat{Y}_{10} = Y_6 = 50 \text{ (3. yıl 2. çeyrek)}$$

$$\hat{Y}_{11} = Y_7 = 40 \text{ (3. yıl 3. çeyrek)}$$

$$\hat{Y}_{12} = Y_8 = 15 \text{ (3. yıl 4. çeyrek)}$$

t (3. yıl)	Gerçekleşen Y_t	Tahmin $\hat{Y}_t$
9 (1. çeyrek)	—	10
10 (2. çeyrek)	—	50
11 (3. çeyrek)	—	40
12 (4. çeyrek)	—	15

☒

12.4 Hem Trend Hem Mevsimsellik Varsa

Zaman serisi hem periyodik dalgalanma gösteriyor hem de genel bir artış eğiliminde ilerliyorsa, her iki etkiyi de formüle aynı anda dâhil etmemiz gerekir.

Tanım 12.3 (Trend ve Mevsimsellik İçeren Tabii Model). Bu modelde tahmini değer; **tam bir devir önceki aynı dönemin** değerine, son devir boyunca gerçekleşen **ortalama periyot trendinin** eklenmesiyle bulunur. Dönem sayısı $s = 4$ varsayımıyla uzun formül:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_{t-3} + \frac{(Y_t - Y_{t-1}) + (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + (Y_{t-2} - Y_{t-3}) + (Y_{t-3} - Y_{t-4})}{4}$$

Paydaki ara terimler birbirini götürdüğünden (teleskopik toplam) formül şu sade hâline dönüşür:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_{t-3} + \frac{Y_t - Y_{t-4}}{4}$$

i Formülün mantığı ve sadeleşmesi

Paydaki uzun toplam, ardışık periyotlar arasındaki değişim miktarlarının toplanmasıdır. Ara değerler birbirini sıfırladığı için geriye yalnızca **son gerçekleşen değer ile tam bir devir önceki değer arasındaki net fark** kalır.

Bu net fark, periyot sayısına bölünerek ortalama büyüme adımı bulunur ve geçmişteki mevsimsel ana değere eklenerek tahmin yapılır.

Örnek 12.4. Aşağıdaki tabloda üç yıla ait çeyreklik ($s = 4$) veriler sırasıyla verilmiştir. Verilerde hem mevsimsellik hem de yıllar geçtikçe sürekli bir artış görülmektedir. Buna göre 2003 yılının ilk periyodu ($t = 13$) için tahmini değeri bulunuz.

Yıl	1. çeyrek	2. çeyrek	3. çeyrek	4. çeyrek
2000	10 (Y_1)	20 (Y_2)	15 (Y_3)	17 (Y_4)
2001	18 (Y_5)	29 (Y_6)	21 (Y_7)	22 (Y_8)
2002	25 (Y_9)	30 (Y_{10})	33 (Y_{11})	34 (Y_{12})

Çözüm.

Bizden istenen $t = 13$ tahminidir. Formülde $\hat{Y}_{t+1}$ ifadesi bulunduğundan, $t + 1 = 13$ için formülü $t = 12$ referansına göre kurmalıyız.

Sadeleştirilmiş formülü kullanalım:

$$\hat{Y}_{13} = Y_9 + \frac{Y_{12} - Y_8}{4}$$

Buradaki Y_9 değeri, tam bir yıl önceki (2002) birinci çeyrek değeridir. Tablodan gerekli değerleri alalım: $Y_{12} = 34$, $Y_9 = 25$, $Y_8 = 22$.

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{13} &= 25 + \frac{34 - 22}{4} \\ &= 25 + \frac{12}{4} \\ &= 25 + 3 = 28\end{aligned}$$

Sonuç: Uzun uzun ara farkları hesaplamaya gerek kalmadan, doğrudan sadeleşmiş formül üzerinden 2003 yılının ilk çeyreği için tabii model tahmini $\hat{Y}_{13} = 28$ olarak bulunmuştur.

☒

13. Hareketli Ortalamalar Metodu (Tek ve İki Katlı)

Zaman serilerinde veriler bazen rastgele ve anlık dalgalanmalar (gürültü) gösterir. Bu anlık zıplama ve düşüşleri yumuşatıp serinin asıl gidişatını görmek için **hareketli ortalamalar metodu** kullanılır. Yöntemin temel mantığı, geçmişteki belirli sayıda periyodun ortalamasını alarak geleceği tahmin etmektir. Zaman serisinde trend (istikrarlı büyüme veya küçülme) olup olmamasına göre yöntem ikiye ayrılır: **tek katlı** ve **iki katlı** hareketli ortalamalar.

13.1 Tek Katlı Hareketli Ortalamalar (Trend Yoksa)

Verilerde zamanla sürekli artan veya azalan bir trend yoksa, geçmiş n dönemin basit aritmetik ortalaması alınarak bir sonraki periyot tahmin edilir. Zaman ilerledikçe en eski veri hesaplamadan çıkarılır ve en yeni veri dâhil edilir; bu yüzden ortalama “hareket eder”.

Tanım 13.1 (Tek Katlı Hareketli Ortalama). n periyotluk tek katlı hareketli ortalama, t zamanı dâhil olmak üzere geçmiş n adet gerçek değerlerin ortalamasıdır:

$$\mu_t = \frac{Y_t + Y_{t-1} + Y_{t-2} + \dots + Y_{t-n+1}}{n}$$

Bir sonraki periyodun tahmini değeri bu ortalamaya eşittir:

$$\hat{Y}_{t+1} = \mu_t$$

Burada n , hareketli ortalamanın hesaplanacağı geçmiş periyot sayısını ifade eder.

⚠ Formül hatasına dikkat: indis kuralı

Bazı kaynaklarda formülün pay kısmında Y_{t+1} (gelecek zaman) ifadesinin yer aldığı hatalı yazımlar görülebilir. Bir model, geleceği tahmin etmek için gelecekteki veriyi kullanamaz. Doğru hesaplama, içinde bulunduğumuz t anından geriye doğru giderek tam n adet terimi toplamaktır.

Örnek 13.1. Aşağıdaki zaman serisi için üç aylık ($n = 3$) tek katlı hareketli ortalamaları hesaplayarak 6. ay için tahmini değeri bulunuz.

t (ay)	1	2	3	4	5
Y_t	12	15	18	14	16

Çözüm.

Periyot sayımız $n = 3$ olduğu için ortalama almaya ancak 3. aydan itibaren başlayabiliriz:

$$\begin{aligned}\mu_3 &= \frac{12 + 15 + 18}{3} = 15,00 \Rightarrow \hat{Y}_4 = 15,00 \\ \mu_4 &= \frac{15 + 18 + 14}{3} \approx 15,67 \Rightarrow \hat{Y}_5 = 15,67 \\ \mu_5 &= \frac{18 + 14 + 16}{3} = 16,00 \Rightarrow \hat{Y}_6 = 16,00\end{aligned}$$

Tablo hâlinde:

t	Y_t	μ_t (hareketli ortalama)	$\hat{Y}_t$ (tahmin)
1	12	—	—
2	15	—	—
3	18	15,00	—
4	14	15,67	15,00
5	16	16,00	15,67
6	—	—	16,00

Sonuç: 5. aydaki ortalamayı kullanarak 6. ayın tahmini değerini $\hat{Y}_6 = 16,00$ olarak buluruz.

☒

13.2 İki Katlı Hareketli Ortalamalar (Trend Varsa)

Verilerde sürekli bir artış veya azalış varken tek katlı ortalama kullanırsak, tahminlerimiz her zaman gerçek değerlerin gerisinde kalır. Trendi yakalamak için **hareketli ortalamanın da hareketli ortalamasını** alır ve bunu doğrusal bir denkleme çeviririz.

Tanım 13.2 (İki Katlı Hareketli Ortalama Formülleri). İki katlı metot uygulanırken dört aşamalı bir model kurulur.

1. Birinci ortalama. Standart tek katlı ortalama:

$$\mu_t = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \dots + Y_{t-n+1}}{n}$$

2. İkinci ortalama. Birinci ortalamaların kendi içindeki ortalamasıdır:

$$\mu'_t = \frac{\mu_t + \mu_{t-1} + \dots + \mu_{t-n+1}}{n}$$

3. Düzeltme katsayıları. Gecikmeyi telafi eden doğru denkleminin bileşenleridir:

$$a_t = 2\mu_t - \mu'_t, \quad b_t = \frac{2}{n-1}(\mu_t - \mu'_t)$$

4. Tahmin denklemi. t anında dururken p periyot sonrası için:

$$\hat{Y}_{t+p} = a_t + p \cdot b_t$$

Burada n hareketli ortalama periyodunu, p ise kaç periyot sonrasının tahmin edileceğini ifade eder.

Örnek 13.2. Aşağıda belirgin bir yükseliş trendi gösteren veriler için üç aylık ($n = 3$) hareketli ortalama periyodu kullanarak 6. ve 7. aylar için tahmini değerleri hesaplayınız.

t	1	2	3	4	5
Y_t	10	14	21	29	34

Çözüm.

Tahmin yapabilmek için en son an olan $t = 5$ periyodu için düzeltme katsayılarını bulmamız gerekir.

1. Birinci ortalamalar. $n = 3$ ile $t = 3$ 'ten itibaren hesaplanır:

$$\mu_3 = \frac{10 + 14 + 21}{3} = 15,00, \quad \mu_4 = \frac{14 + 21 + 29}{3} \approx 21,33, \quad \mu_5 = \frac{21 + 29 + 34}{3} = 28,00$$

2. İkinci ortalama. Elimizde üç adet μ_t biriktiğinde, yani $t = 5$ anında hesaplanabilir:

$$\mu'_5 = \frac{15,00 + 21,33 + 28,00}{3} \approx 21,44$$

Tablo hâlinde:

t	Y_t	μ_t	μ'_t	a_t	b_t
1	10	—	—	—	—
2	14	—	—	—	—
3	21	15,00	—	—	—
4	29	21,33	—	—	—
5	34	28,00	21,44	34,56	6,56

3. Düzeltme katsayılarının hesaplanması.

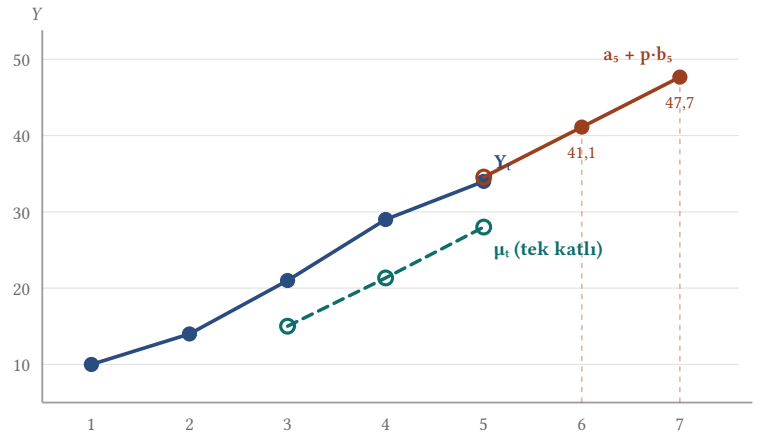
$$a_5 = 2\mu_5 - \mu'_5 = 2(28) - 21,44 = 34,56$$

$$b_5 = \frac{2}{n-1}(\mu_5 - \mu'_5) = \frac{2}{2}(28 - 21,44) = 6,56$$

4. Gelecek periyotların tahmini.

Tahmin denklemimiz $\hat{Y}_{5+p} = 34,56 + p \cdot 6,56$ olarak şekillendi:

- **6. ay** ($p = 1$): $\hat{Y}_6 = 34,56 + 6,56 = 41,12$
- **7. ay** ($p = 2$): $\hat{Y}_7 = 34,56 + 2(6,56) = 47,68$



Şekil 13.1: Trendli bir seride tek katlı hareketli ortalama (kesikli) veriyi **geriden takip eder**. İki katlı yöntem bu gecikmeyi a_5 ve b_5 katsayılarıyla düzelterek tahmini trendin üstüne oturtur.

Dikkat ederseniz trend eğilimi korunmuş ve gelecek aylardaki tahminler düzenli biçimde artmaya devam etmiştir. Tek katlı yöntem kullanılsaydı 6. ay tahmini 28,00 olacak, yani gerçek eğilimin epey gerisinde kalacaktı.

☒

14. Oyun Teorisine Giriş ve Saf Stratejiler

14.1 Oyun Teorisi Nedir?

Kaynakların kısıtlı ve çıkarların zıt olduğu bir ortamda amaçlarını gerçekleştirmeye çalışan iki ya da daha fazla karar verici **rekabet hâlinde**dir. Karar vericilerin bu rekabeti kendilerine en yüksek getiriye sağlamak için birbirlerine karşı kullandıkları stratejileri vardır.

Bu stratejiler matematiksel olarak modellenabilir ve çözülebilir. Bunun için geliştirilen yöntem **oyun teorisi** adı verilmiştir.

14.2 Terminoloji

Tanım 14.1 (Oyuncular). Bir oyunda amaçlarını optimize etmeye çalışan kişi ya da kurumlardır. Bir oyunda **en az iki oyuncu** bulunmalıdır.

Tanım 14.2 (Stratejiler). Her oyuncunun sahip olduğu eylem seçenekleridir.

Tanım 14.3 (Kazanç ve Ödemeler). Bir oyunun sonucu kazanma, kaybetme veya oyundan çekilme olabilir. Her sonuç veya ödeme; negatif, pozitif veya sıfır olmak üzere her oyuncunun rakibine göre kazancını ya da kaybını belirler.

Tanım 14.4 (Ödemeler Matrisi). Oyuncuların strateji seçimlerinin türlü bileşiminden oluşan kayıp veya kazançları gösteren matristir. Elemanları pozitif, negatif veya sıfır olabilir. Matrisin herhangi bir elemanı için ödeme yönü şöyledir:

- **Pozitif** ise, sütunda yer alan oyuncu satırda yer alan oyuncuya bu miktarda ödeme yapar.
- **Negatif** ise, satırdaki oyuncu sütundaki oyuncuya bu elemanın mutlak değerine eşit ödeme yapar.
- **Sıfır** ise herhangi bir ödeme yapılmaz.

! Matris kimin gözünden yazılır?

Ödemeler matrisi daima **satır oyuncusunun** kazancı olarak yazılır. Bu yüzden satır oyuncusu matristeki değerleri **büyütmeye**, sütun oyuncusu ise **küçültmeye** çalışır. Bu derste satır oyuncusuna A, sütun oyuncusuna B diyeceğiz.

i Oyunların sınıflandırılması

Oyunlar oyuncu sayısına göre sınıflandırılır:

- $n = 2$ ise **iki kişilik** oyun,
 - $n > 2$ ise **n kişilik** oyun
- olarak adlandırılır.

14.3 Saf ve Karma Stratejiler

Tanım 14.5 (Saf (Arı) Stratejiler). Oyunun sonucunu **tek bir strateji çiftinin** oluşturduğu oyunlardır. Bu çift oyunun tepe noktasını belirler.

Tanım 14.6 (Karma Stratejiler). Oyunun sonucunu **birden fazla strateji çiftinin** belirlemesi durumudur. Strateji çiftleri olasılık değerleriyle ifade edilir ve bu olasılık değerlerinin toplamı 1'dir.

Tanım 14.7 (Beklenen Değer). Oyunun sonucunda herhangi bir oyuncunun elde edeceği değerdir.

14.4 Maximin ve Minimax

Oyunun sonucu ister saf ister karma strateji olsun, çözüm süreci ödemeler matrisi üzerinde gerçekleştirilir. Hangi yöntemin kullanılacağı, çözümü kimin gözünden yaptığımıza bağlıdır.

Tanım 14.8 (Maximin ve Minimax Yöntemleri).

- **Maximin (minimumların maksimumu):** Ödemeler matrisinin **satırlarını** temsil eden oyuncu için çözüm yöntemidir. Önce her satırın en küçük elemanı seçilir, sonra bu değerler arasından en büyüğü belirlenir.

$$\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}$$

- **Minimax (maksimumların minimumu):** **Sütunları** temsil eden oyuncu için çözüm yöntemidir. Önce her sütunun en büyük elemanı seçilir, sonra bunların en küçüğü alınır.

$$\bar{v} = \min_j \max_i a_{ij}$$

💡 Neden bu iki yöntem?

Maximin yönteminde bulunan değer, satırları temsil eden oyuncunun **garantileyebileceği** en yüksek kazançtır: rakip ne yaparsa yapsın A oyuncusu en az bu kadarını alır. Sütunları temsil eden oyuncu açısından bakıldığında doğan mantık bunun tersi olur; çünkü sütunları temsil eden oyuncu, diğer oyuncunun maximin stratejisini bilir ve minimax stratejisi ile oynar. Yani her bir sütunun en büyük değerini seçer ve bunların en küçüğü ile yoluna devam eder.

Teorem 14.1 (Eyer Noktası). Bir oyunda

$$\underline{v} = \bar{v} = v$$

ise, yani maximin ve minimax değerleri birbirine eşitse, oyunun **saf stratejili** bir oyun olduğuna karar verilir. Bu ortak değere **oyunun değeri**, bu değer gerçekleştiği (A_i, B_j) strateji çiftine ise **eyer noktası** denir.

Örnek 14.1 (Rekabet Hâlindeki İki Firma). Rekabet hâlindeki A ve B firmalarından A'nın 3, B'nin ise 4 stratejisi bulunmaktadır. Yıllık kâr açısından ödemeler matrisi aşağıdaki gibidir. Buna göre A ve B firmaları arasındaki rekabet oyununu değerlendiriniz.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	-1	5	3
A_2	10	4	5	-3
A_3	6	5	7	4

Çözüm.

Maximin (A firması için). Her satırın en küçük elemanını bulup aralarından en büyüğünü seçelim:

Satır	Elemanlar	Satır minimumu
A_1	6, -1, 5, 3	-1
A_2	10, 4, 5, -3	-3

Satır	Elemanlar	Satır minimumu
A_3	6,5,7,4	4

$$\underline{v} = \max\{-1, -3, 4\} = 4 \quad (A_3 \text{ stratejisi})$$

Minimax (B firması için). Her sütunun en büyük elemanını bulup aralarından en küçüğünü seçelim:

Sütun	Elemanlar	Sütun maksimumu
B_1	6,10,6	10
B_2	-1,4,5	5
B_3	5,5,7	7
B_4	3,-3,4	4

$$\bar{v} = \min\{10, 5, 7, 4\} = 4 \quad (B_4 \text{ stratejisi})$$

Sonuç. İki değer birbirine eşittir:

$$\underline{v} = \bar{v} = 4$$

O hâlde bu oyun **saf stratejili** bir oyundur; eyer noktası (A_3, B_4) çiftidir ve oyunun değeri $v = 4$ 'tür. Oyunun sonucunda A firmasının beklenen değeri 4 olarak gerçekleşecektir. Bu değer ise B firması için bir kayıptır.

■

i Eyer noktasını matriste görmek

$a_{34} = 4$ elemanı hem **kendi satırının en küçüğü** hem de **kendi sütununun en büyüğüdür**. Eyer noktasının tanımı tam olarak budur; bu yüzden bir eyer noktası bulmak için matrisi taramak, iki tabloyu ayrı ayrı kurmaktan hızlıdır.

⚠ Peki iki değer eşit değilse?

$\underline{v} \neq \bar{v}$ ise oyunun saf stratejili bir çözümü **yoktur**; hiçbir strateji çifti kararlı değildir. Bu durumda oyuncular stratejilerini belirli olasılıklarla karıştırmak zorundadır. Böyle oyunların çözümü **karma stratejiler ve grafik yöntem** bölümünün konusudur.

15. Karma Stratejiler ve Grafik Çözüm Yöntemi

15.1 Ne Zaman Karma Strateji?

Karma stratejili oyunların belirgin özelliği, **maximin ve minimax değerlerinin eşit olmamasıdır**:

$$\underline{v} \neq \bar{v}$$

Bu durumda eyer noktası yoktur ve oyuncular tek bir stratejide karar kılamaz; stratejilerini belirli olasılıklarla karıştırırlar. Grafik yöntem, böyle problemler için bir çözüm yöntemidir.

Tanım 15.1 (Grafik Yöntemin Uygulanabilirliği). Ödemeler matrisi $(m \times 2)$ veya $(2 \times n)$ boyutlarından birini taşıyorsa oyun grafik yöntem ile çözülebilir.

Diğer bir deyişle **satır veya sütunları temsil eden oyunculardan birinin ikiden fazla stratejisi olmamalıdır**.

15.2 Yöntemin Kurulması

İki stratejisi olan oyuncunun A olduğunu, yani ödemeler matrisinin $2 \times n$ boyutlu olduğunu kabul edelim:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

Yatay eksen. Koordinat sisteminin yatay eksenini, iki stratejiye sahip oyuncunun birinci stratejisinin gerçekleşme olasılığını gösterir:

$$x_1, \quad 0 \leq x_1 \leq 1$$

İkinci stratejisinin olasılık değeri ise bu durumda

$$x_2 = 1 - x_1$$

olur.

Beklenen değer doğruları. Daha sonra A oyuncusunun, B oyuncusunun Y_j stratejileri karşısındaki beklenen değerleri $E_j(A)$ hesaplanır.

Teorem 15.1 (Beklenen Değer Doğrusu). B oyuncusunun j . stratejisine karşı A oyuncusunun beklenen değeri

$$E_j(A) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 = a_{1j}x_1 + a_{2j}(1 - x_1)$$

olur. Düzenlenirse x_1 'e göre **birinci dereceden** bir denklem elde edilir:

$$E_j(A) = (a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}$$

Grafığın çizilmesi. Elde edilen doğru denklemleri grafiğe işlenir. Koordinat sisteminin düşey eksenini beklenen değerleri gösterir ve **iki düşey eksen** vardır:

$$x_1 = 0 \quad \text{ve} \quad x_1 = 1$$

Her doğruyu çizmek için bu iki eksenindeki değerlerini hesaplamak yeterlidir: $E_j(A)$ doğrusu $x_1 = 0$ ekseninde a_{2j} , $x_1 = 1$ ekseninde ise a_{1j} değerini alır.

Tanım 15.2 (Optimum Çözüm). Koordinat sistemindeki mümkün çözüm noktaları, doğruların kesiştiği noktalarda gerçekleşir.

A oyuncusunun hareket ettiği göz önüne alındığında, mümkün noktalardan optimum olanı **maximin yöntemine göre**, yani **minimumların maksimumunda** gerçekleşenidir.

Alt zarf

Her x_1 değeri için A oyuncusunun garantileyebileceği kazanç, o noktadaki doğruların **en küçüğüdür**. Bütün x_1 değerleri için bu minimumları birleştiren kırık çizgiye **alt zarf** denir. Grafik yöntem, kısaca bu alt zarfın **en yüksek noktasını** aramaktır. O nokta daima iki doğrunun kesişimidir: biri artan, diğeri azalan.

15.3 Çözümlü Uygulama

Örnek 15.1 (Grafik Yöntemle Karma Strateji). Ödemeler matrisi

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	3	1	1
A_2	1	1	3	2

olan oyunu çözünüz.

Çözüm.

1. Oyunun tipini belirleyelim.

Satır	Satır minimumu
A_1	1
A_2	1

$$\underline{v} = \max\{1, 1\} = 1$$

Sütun	B_1	B_2	B_3	B_4
Sütun maksimumu	5	3	3	2

$$\bar{v} = \min\{5, 3, 3, 2\} = 2$$

$\underline{v} = 1 \neq 2 = \bar{v}$ olduğundan sonuçlar farklıdır; oyun **karma stratejilidir**. A oyuncusunun iki stratejisi olduğu için grafik yöntem uygulanabilir.

2. Beklenen değer doğrularını kuralım.

$E_j(A) = (a_{1j} - a_{2j})x_1 + a_{2j}$ formülünü her sütuna uygulayalım:

$$E_1(A) = (5 - 1)x_1 + 1 = 4x_1 + 1$$

$$E_2(A) = (3 - 1)x_1 + 1 = 2x_1 + 1$$

$$E_3(A) = (1 - 3)x_1 + 3 = 3 - 2x_1$$

$$E_4(A) = (1 - 2)x_1 + 2 = 2 - x_1$$

3. Doğruların düşey eksenleri kestiği noktaları bulalım.

	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
$E_1(A)$	1	5
$E_2(A)$	1	3

	$x_1 = 0$	$x_1 = 1$
$E_3(A)$	3	1
$E_4(A)$	2	1

4. Grafiği çizelim.**5. Optimum noktayı belirleyelim.**

Şekilden görüleceği üzere beklenen değer doğruları altı yerde kesişmektedir. A oyuncusu için iyi strateji maximin yöntemine göre seçileceğinden, optimum nokta alt zarfın en yüksek noktasıdır ve bu nokta $E_2(A)$ ile $E_4(A)$ doğrularından belirlenir.

$$E_2(A) = E_4(A)$$

$$2x_1 + 1 = 2 - x_1 \Rightarrow 3x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$$

6. Oyunun değerini bulalım.

A oyuncusunun beklenen değeri, kesişen iki doğrudan biri yardımıyla belirlenir:

$$E_2(A) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}, \quad E_4(A) = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

Sonuç. A oyuncusu birinci stratejisini $\frac{1}{3}$, ikinci stratejisini $\frac{2}{3}$ olasılıkla oynamalıdır:

$$x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Oyunun değeri $v = \frac{5}{3}$ 'tür.

■

i Sağlama

Bulunan değer $\underline{v} = 1$ ile $\bar{v} = 2$ arasında kalmalıdır:

$$1 \leq \frac{5}{3} \leq 2 \checkmark$$

Karma stratejili her oyunun değeri bu iki sınır arasındadır. Bu aralığın dışına çıkan bir sonuç, doğrulardan birinin yanlış kurulduğunu gösterir.

! Hangi iki doğru kesişir?

Alt zarfın tepe noktasında daima **artan bir doğru ile azalan bir doğru** buluşur. Bu örnekte $E_2(A) = 2x_1 + 1$ artan, $E_4(A) = 2 - x_1$ azalandır.

Bu yüzden bütün kesişim noktalarını hesaplamaya gerek yoktur: $x_1 = 0$ ve $x_1 = 1$ eksenlerindeki en küçük değerleri veren doğrulardan başlayıp alt zarfı takip etmek yeterlidir.