Nümerik Analiz

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com
Bu çalışma Creative Commons BY-NC-SA 4.0 lisansıyla paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 4 Kasım 2026

İçindekiler

Giriş 6

1 Ön Bilgiler ve Taylor Teoremi 7
1.1 Temel Kavramlar 7
1.2 Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri 8
1.3 Ekstrem Değer Teoremi 9
1.4 Genelleştirilmiş Rolle Teoremi 10
1.5 Ara Değer Teoremi 11
1.6 İntegraller İçin Ağırlıklı Ortalama Değer Teoremi 12
1.7 Taylor Teoremi 13
1.8 Bazı Temel Fonksiyonların Taylor Serileri 18
1.9 Alıştırmalar 18

2 Hatalar ve Makine Sayıları 23
2.1 Hata Türleri 23
2.2 Mutlak ve Bağıl Hata 23
2.3 Makine Sayıları 25
2.4 Ondalık Kayan Nokta Sayıları 27
2.5 Alıştırmalar 32

3 Algoritmalar ve Yakınsama Hızı 36
3.1 Algoritmalar ve Kararlılık 36
3.2 Üstel ve Lineer Hata Büyümesine Örnekler 37
3.3 Dizilerde Yakınsama Hızı 40
3.4 Fonksiyonlarda Yakınsama Hızı 42
3.5 Alıştırmalar 43

4 İkiye Bölme Metodu 49
4.1 İkiye Bölme Metodu 49
4.2 Durma Kriterleri 50
4.3 Başlangıç Aralığının Seçimi 51
4.4 Yakınsama ve Hata Sınırı 53
4.5 Alıştırmalar 55

5 Sabit Nokta İterasyonu 59
5.1 Sabit Nokta ve Kök Bulma Problemi 59
5.2 Sabit Noktanın Varlığı ve Tekliği 60
5.3 İterasyon ve İterasyon Fonksiyonu 62

 CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Sabit Nokta Teoremi . . . 64
5.5 Sabit Nokta İterasyonu ile Kök Bulma . . . 67
5.6 Alıştırmalar . . . 69

6 Newton-Raphson Metodu . . . 72
6.1 Taylor polinomundan türetme . . . 72
6.2 Yakınsama . . . 73
6.3 Yöntemin uygulanması . . . 75
6.4 Alıştırmalar . . . 76

7 Secant ve Regula Falsi Metodları . . . 78
7.1 Secant Metodu . . . 78
7.2 Regula Falsi Metodu . . . 81
7.3 Dört Yöntemin Karşılaştırılması . . . 85
7.4 Alıştırmalar . . . 86

8 Lagrange İnterpolasyonu . . . 90
8.1 İnterpolasyon ve polinomsal yaklaşımlar . . . 90
8.2 Lagrange interpolasyon polinomları . . . 95
8.3 Hata terimi . . . 100
8.4 Alıştırmalar . . . 102

9 Bölünmüş Farklar ve Newton Formülleri . . . 109
9.1 Newton Biçimi ve Bölünmüş Farklar . . . 109
9.2 Bölünmüş Farklar Tablosu . . . 111
9.3 Eşit Aralıklı Noktalar: Newton İleri Fark Formülü . . . 114
9.4 Newton Geri Fark Formülü . . . 116
9.5 Stirling Merkezi Fark Formülü . . . 121
9.6 Alıştırmalar . . . 124

10 Nümerik Türev . . . 128
10.1 İki nokta ile türev yaklaşımı . . . 128
10.2 (n + 1)-nokta formülü . . . 130
10.3 Üç-nokta formülleri . . . 131
10.4 İkinci türev için orta nokta formülü . . . 138
10.5 Alıştırmalar . . . 140

11 Nümerik İntegrasyon . . . 143
11.1 Lagrange Polinomunun İntegrali . . . 143
11.2 Yamuk Kuralı . . . 143
11.3 Simpson Kuralı . . . 147
11.4 Newton-Cotes Formülleri . . . 151
11.5 Alıştırmalar . . . 159

 CC BY-NC-SA 4.0

12 En Küçük Kareler Yöntemi . . . 163
12.1 Eğri Uydurma Problemi . . . 163
12.2 En Küçük Kareler Yöntemi . . . 163
12.3 Normal Denklemler . . . 164
12.4 Doğru Uydurma Örnekleri . . . 166
12.5 Alıştırmalar . . . 170

13 Uygulamalı Özet . . . 175
13.1 Soru Tipine Göre Yöntem . . . 175
13.2 Taylor Polinomu ve Hata Sınırı . . . 176
13.3 Hatalar ve k-Basamak Aritmetik . . . 177
13.4 Yakınsama Hızı . . . 177
13.5 Kök Bulma: Aralık ve Yöntem Seçimi . . . 178
13.6 İkiye Bölme Metodu . . . 178
13.7 Sabit Nokta İterasyonu . . . 179
13.8 Newton-Raphson Metodu . . . 180
13.9 Secant ve Regula Falsi . . . 181
13.10 Lagrange İnterpolasyonu ve Hata Sınırı . . . 181
13.11 Bölünmüş Farklar ve Newton Formülleri . . . 182
13.12 Nümerik Türev . . . 183
13.13 Nümerik İntegral . . . 184
13.14 En Küçük Kareler Doğrusu . . . 185

 CC BY-NC-SA 4.0

Giriş

Nümerik Analiz, analitik olarak çözülemeyen ya da çözümü çok zahmetli olan problemlere yalnız dört işlemle, hatası kontrol altında yaklaşık çözümler üretir. Makine sayılarının sınırlarından ve hata kavramından başlar; denklemlerin köklerini bulan iteratif yöntemleri, tablo hâlinde verilen fonksiyonlara polinomla yaklaşmayı, türev ve integrali sayısal olarak hesaplamayı ve veriye en uygun doğruyu uydurmayı her yöntemin hata analiziyle birlikte inceler.

> **i** Not
>
> Nümerik Analiz'in bütün başlıklarının notları hazırdır ve aşağıdaki bağlantılardan ulaşılabilir. Dersin dayandığı limit, süreklilik, türev ve integral bilgisi için Analiz 1 ve Analiz 2 notlarına bakılabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

1. Ön Bilgiler ve Taylor Teoremi

Nümerik analiz, analitik çözümü olmayan ya da çözümü bulunsa bile zor ve karmaşık olan problemlere yalnız dört işlemle hesaplanabilen yaklaşık çözümler üretir. Denklemlerin köklerini bulmak, bir fonksiyonu polinomla temsil etmek, türev ve integrali sayısal olarak hesaplamak bu problemlerin başlıcalarıdır. Görüntü işleme, bilgisayar grafikleri, hava durumu ve iklim modelleri, sanal çarpışma testleri, tıbbi görüntüleme ve finans matematiği bu yöntemlerin kullanıldığı alanlardan yalnız birkaçıdır. Bu kitapta klasik nümerik yöntemleri ele alıyoruz; amaç kod yazmak değil, her yöntemin nasıl ve neden çalıştığını, ne kadar hata yaptığını görmektir.
Bir yöntemin işe yaradığını göstermek için birkaç analiz aracına sürekli başvuracağız: süreklilik, türev, ortalama değer ve ara değer teoremleri, en çok da Taylor teoremi. Brook Taylor serisini 1715'te yayımladı; kalan terimin türevli biçimi Lagrange'a (1797) aittir. Bu bölümde bu araçları sonraki bölümlerde numarasıyla anabileceğimiz biçimde topluyoruz. İspatları Analiz 1 ve Analiz 2'de verilmiş olanlar için yalnız bağlantı veriyoruz.

1.1 Temel Kavramlar

Önce Analiz 1 ve Analiz 2'den gelen kavramları kısaca hatırlayalım; ayrıntılı tanımlar bağlantılardadır.

- **Fonksiyonlarda limit.** $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta_\varepsilon > 0$ varsa ki $0 < |\, x - x_0 \,| < \delta_\varepsilon$ olan her $x \in X$ için $|\, f(x) - L \,| < \varepsilon$ oluyorsa $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ yazılır (bkz. Analiz 1).
- **Süreklilik.** $x_0 \in X$ için $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ise f, x_0'da süreklidir; X'in her noktasında sürekliyse X üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 1).
- **Dizilerde limit.** Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ varsa ki $n > N_\varepsilon$ olan her n için $|\, x_n - x_0 \,| < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisi x_0'a yakınsar ve $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ ya da $x_n \to x_0$ yazılır (bkz. Analiz 1).
- **Türev.** $x_0 \in \operatorname{int}(X)$ olsun.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

  limiti sonlu bir reel sayı olarak varsa f, x_0'da diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir). $f'(x_0)$, f'nin grafiğine $(x_0, f(x_0))$ noktasında çizilen teğetin eğimidir (bkz. Analiz 2).
- **Riemann integrali.** $a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b$ bir bölüntü, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ve $z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ olsun.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i$$

  limiti sonlu olarak varsa ve z_i seçimine bağlı değilse bu sayıya f'nin $[a, b]$ üzerindeki Riemann integrali denir (bkz. Analiz 2).

Kapalı aralıkta sürekli her fonksiyon Riemann integrallenebilirdir (bkz. Analiz 2). Bu durumda bölüntüyü eşit aralıklı $x_i = a + \frac{b-a}{n}\, i$ noktalarıyla kurup $z_i = x_i$ seçebiliriz (bkz. Analiz 2):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Bu kavramlarla tanımlanan fonksiyon kümeleri için kitap boyunca kısa gösterimler kullanacağız.

Tanım 1.1 (Fonksiyon Sınıfları). $X \subseteq \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun.

- $C(X)$: X üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi.
- $C[a, b]$: $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi.
- $C^n(X)$: X üzerinde n. mertebeye kadar sürekli türevlere sahip fonksiyonların kümesi.

 CC BY-NC-SA 4.0

- $C^\infty(X)$: X üzerinde her mertebeden türeve sahip fonksiyonların kümesi.
- $R[a,b]$: $[a,b]$ kapalı aralığında Riemann integrallenebilir fonksiyonların kümesi.

Yani $f \in C^n[a,b]$ yazdığımızda $f, f', \ldots, f^{(n)}$ türevlerinin hepsinin var ve $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğunu söylüyoruz; uç noktalardaki türevler tek yönlüdür (bkz. Analiz 2). Polinomlar, rasyonel, trigonometrik, üstel ve logaritmik fonksiyonlar tanımlı oldukları küme üzerinde her mertebeden türeve sahiptir, yani C^∞ sınıfındadır. Az önceki gözlem de $C[a,b] \subseteq R[a,b]$ demektir.
Süreklilik dizilerle de ifade edilebilir. Nümerik yöntemler birer dizi ürettiği için bu biçim bizim en çok kullanacağımız biçimdir.

Teorem 1.1 (Dizisel Süreklilik). *$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in X$ olsun. Aşağıdaki iki ifade denktir:*
i) f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir.
ii) X içinde x_0'a yakınsayan her (x_n) dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ olur.
İspat için bkz. Analiz 1.

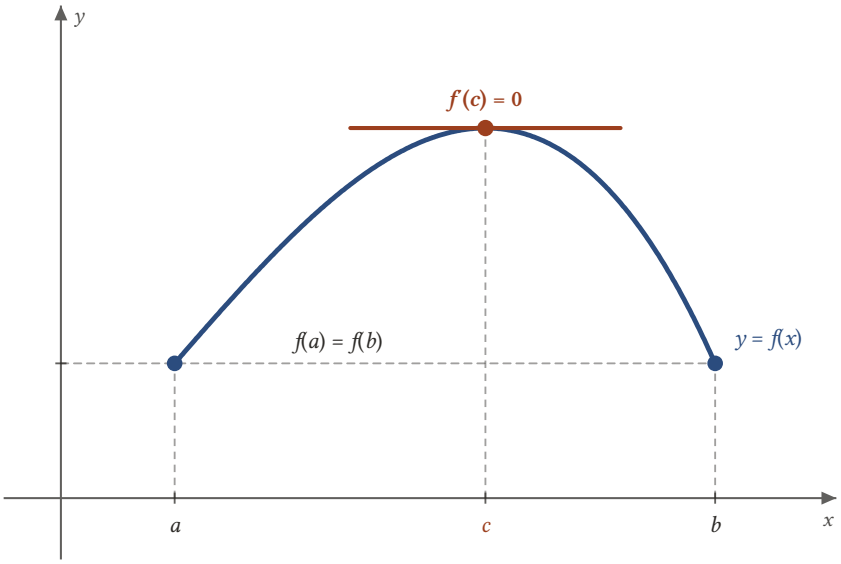
Yani bir yöntemin ürettiği p_n yaklaşımları p'ye yakınsıyorsa ve f sürekliyse $f(p_n)$ değerleri de $f(p)$'ye yakınsar.

Teorem 1.2 (Türevli Fonksiyon Süreklidir). *$f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $x_0 \in X$ olsun. f'nin x_0 noktasında türevi varsa f bu noktada süreklidir.*
İspat için bkz. Analiz 2.

1.2 Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri

Türevli fonksiyonlar için ilk iki araç, fonksiyonun iki noktadaki değerlerini aradaki bir noktada türevle ilişkilendirir.

Teorem 1.3 (Rolle Teoremi). *$f \in C[a,b]$ ve f fonksiyonu (a,b) açık aralığında diferansiyellenebilir olsun. $f(a) = f(b)$ ise öyle bir $c \in (a,b)$ vardır ki $f'(c) = 0$ olur.*



Şekil 1.1: Rolle teoremi: f(a) = f(b) *olduğundan grafik iki uçta aynı yüksekliktedir. Arada bir* c *noktasında teğet yataydır, yani* f´(c) = 0 *olur.*

İspat için bkz. Analiz 2.

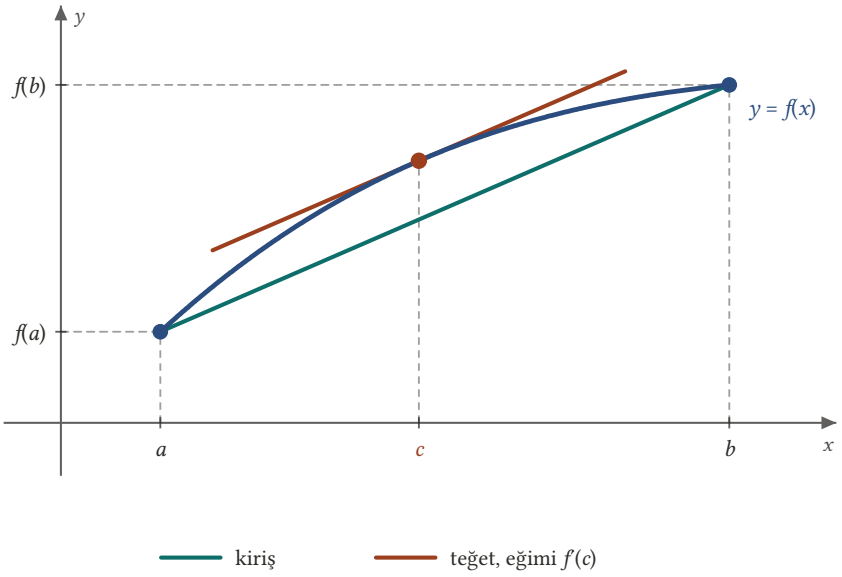
Yani uç noktalarda aynı yükseklikte olan türevli bir grafiğin arada en az bir yatay teğeti vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 1.4 (Ortalama Değer Teoremi). *$f \in C[a,b]$ ve f fonksiyonu (a,b) açık aralığında diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda en az bir $c \in (a,b)$ için*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olur.



Şekil 1.2: Ortalama değer teoremi: (a, f(a)) ile (b, f(b)) noktalarını birleştiren kirişin eğimi (f(b) – f(a))/(b – a)'dır. Arada bir c noktasındaki teğet bu kirişe paraleldir.

İspat için bkz. Analiz 2.

Yani $(a, f(a))$ ile $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren kirişe paralel en az bir teğet vardır. $f(a) = f(b)$ iken teorem Rolle teoremine döner.

1.3 Ekstrem Değer Teoremi

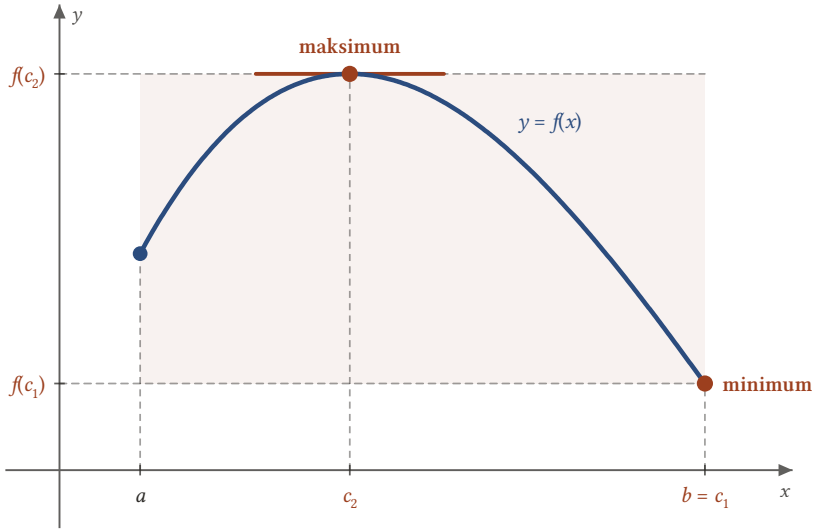
Hata sınırı bulurken bir fonksiyonun bir aralıktaki en büyük değerine sık sık ihtiyaç duyacağız. Bu değerin var olduğunu ve nerede aranacağını şu teorem söyler.

Teorem 1.5 (Ekstrem Değer Teoremi). *$f \in C[a,b]$ olsun. Öyle $c_1, c_2 \in [a,b]$ sayıları vardır ki her $x \in [a,b]$ için*

$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$$

olur. Burada $f(c_1)$, f'nin $[a,b]$ üzerindeki minimum değeri, $f(c_2)$ ise maksimum değeridir. Ayrıca f fonksiyonu (a,b) aralığında türevlenebilirse c_1 ve c_2 noktalarının her biri ya $[a,b]$ aralığının bir uç noktasıdır ya da f' türevini sıfır yapan bir noktadır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.3: Ekstrem değer teoremi: [a, b] üzerinde sürekli f bütün değerlerini f(c₁) ile f(c₂) arasında (taralı bant) alır. Maksimum bir iç noktada alınmıştır ve orada teğet yataydır (f′(c₂) = 0); minimum ise b uç noktasında alınmıştır.

İspat için bkz. Analiz 1. İkinci kısım, iç noktadaki ekstremumda türevin sıfır olmasından gelir (bkz. Analiz 2).

Yani $\max_{a\le x\le b} f(x)$ değerini bulmak için $f'(x)=0$ denkleminin (a,b) içindeki köklerinde ve iki uç noktada f'yi hesaplayıp en büyüğünü seçmek yeter.

1.4 Genelleştirilmiş Rolle Teoremi

Rolle teoremi iki sıfır arasında f''nin bir sıfırını verir. Sıfırların sayısı arttıkça teoremi tekrar tekrar uygulayıp daha yüksek mertebeden türevlerin sıfırlarını da yakalayabiliriz. İnterpolasyonun hata formülü bu fikre dayanacak.

Teorem 1.6 (Genelleştirilmiş Rolle Teoremi). *$n\ge 1$, $f\in C[a,b]$ ve f fonksiyonu (a,b) açık aralığında n kez diferansiyellenebilir olsun. f fonksiyonu $[a,b]$ içindeki birbirinden farklı $n+1$ tane $x_0,x_1,\ldots,x_n$ noktasında sıfır oluyorsa, yani*

$$f(x_0)=f(x_1)=\ldots=f(x_n)=0$$

ise en az bir $c\in(a,b)$ için $f^{(n)}(c)=0$ olur.

> ***İspat.***
> *Noktaları $x_0<x_1<\ldots<x_n$ olacak biçimde sıralayalım.*
> ***Birinci adım.*** *Her $i=1,\ldots,n$ için f, $[x_{i-1},x_i]$ üzerinde süreklidir ve $(x_{i-1},x_i)\subseteq(a,b)$ üzerinde türevlenebilirdir; ayrıca $f(x_{i-1})=f(x_i)=0$'dır. Rolle teoremi (Teorem 1.3) her aralıkta bir $z_i\in(x_{i-1},x_i)$ verir:*
>
> $$f'(z_1)=f'(z_2)=\ldots=f'(z_n)=0.$$
>
> *Aralıklar ayrık olduğundan $z_1<z_2<\ldots<z_n$ olur. Demek ki f' fonksiyonunun (a,b) içinde birbirinden farklı n sıfırı vardır.*
> ***Tümevarım.*** *$1\le k<n$ için $f^{(k)}$'nin (a,b) içinde birbirinden farklı $n-k+1$ sıfırı bulunduğunu varsayalım. $k<n$ olduğundan $f^{(k)}$ fonksiyonu (a,b) üzerinde türevlenebilir, dolayısıyla süreklidir (Teorem 1.2). Ardışık iki sıfır arasındaki kapalı aralık (a,b) içinde kaldığından Rolle teoremi bu aralıkların her birine uygulanır ve $f^{(k+1)}$'in birbirinden farklı $n-k$ sıfırı elde edilir.*
> *$k=n-1$ adımında $f^{(n)}$'nin (a,b) içinde $n-(n-1)=1$ sıfırı bulunur. Bu sıfır aranan c'dir.*
> ■

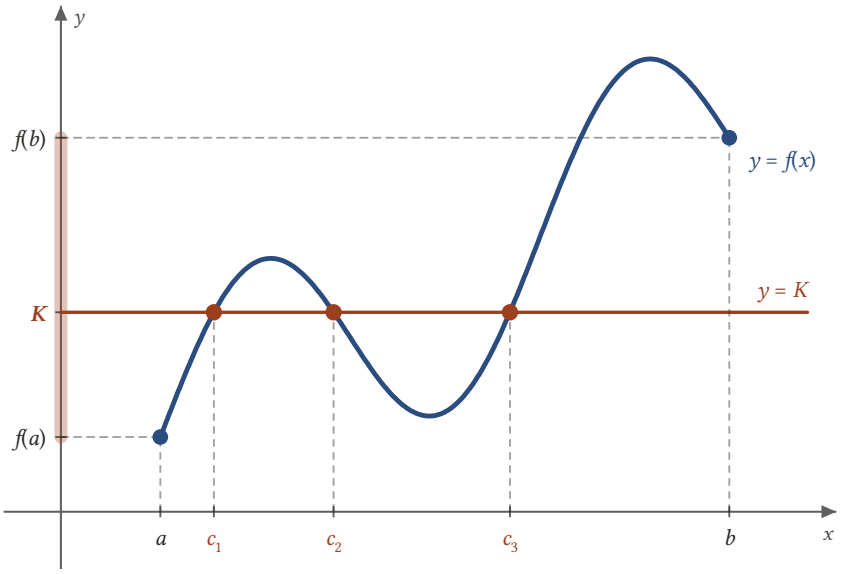
 CC BY-NC-SA 4.0

Yani $n+1$ farklı sıfırı olan yeterince türevli bir fonksiyonun n. türevi bir yerde sıfır olmak zorundadır. Ters yönden okursak: $f^{(n)}$ hiç sıfır olmuyorsa f'nin en çok n farklı sıfırı olabilir.

1.5 Ara Değer Teoremi

Kök bulma yöntemlerinin hepsi bir kökün var olduğu bir aralıkla başlar. Böyle bir aralığı bulmanın temel aracı ara değer teoremidir. İlk analitik ispatı Bolzano'nun (1817) çalışmasıdır.

Teorem 1.7 (Ara Değer Teoremi). *$f \in C[a,b]$ ve K, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında kesin olarak kalan (ikisine de eşit olmayan) herhangi bir sayı olsun. Bu durumda en az bir $c \in (a,b)$ için $f(c) = K$ olur.*



Şekil 1.4: Ara değer teoremi: K, f(a) *ile* f(b) *arasında (eksendeki kalın parça) olduğundan* y = K *doğrusu grafiği en az bir noktada keser. Bu grafikte üç kesim noktası var;* c_1, c_2, c_3*'ün her biri için* f(c) = K *olur.*

İspat için bkz. Analiz 1.

Yani sürekli bir fonksiyon $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki hiçbir değeri atlayamaz. En çok kullanacağımız özel durum $K = 0$'dır: $f(a)$ ile $f(b)$ zıt işaretliyse f'nin (a,b) içinde en az bir kökü vardır.

Örnek 1.1 (Bir Denklemin Köklerini İçeren Aralıklar). $4x^2 - e^x = 0$ denkleminin çözümlerini içeren aralıklar bulunuz.

Çözüm.
$f(x) = 4x^2 - e^x$ olsun. $4x^2$ ve e^x sürekli olduğundan f her kapalı aralıkta süreklidir. Kökler, $y = 4x^2$ parabolüyle $y = e^x$ eğrisinin kesiştiği noktalardır; bu yüzden f'nin işaretine birkaç tam sayıda bakmak yeterli ipucu verir.
$(0,1)$ aralığı. $f(0) = -1 < 0$ ve

$$f(1) = 4 - e \approx 1{,}2817 > 0$$

olduğundan $f(0) < 0 < f(1)$'dir. Ara değer teoremi (Teorem 1.7) $K = 0$ ile en az bir $c \in (0,1)$ için $f(c) = 0$ olduğunu verir.
$(-1,0)$ aralığı. $f(0) = -1 < 0$ ve

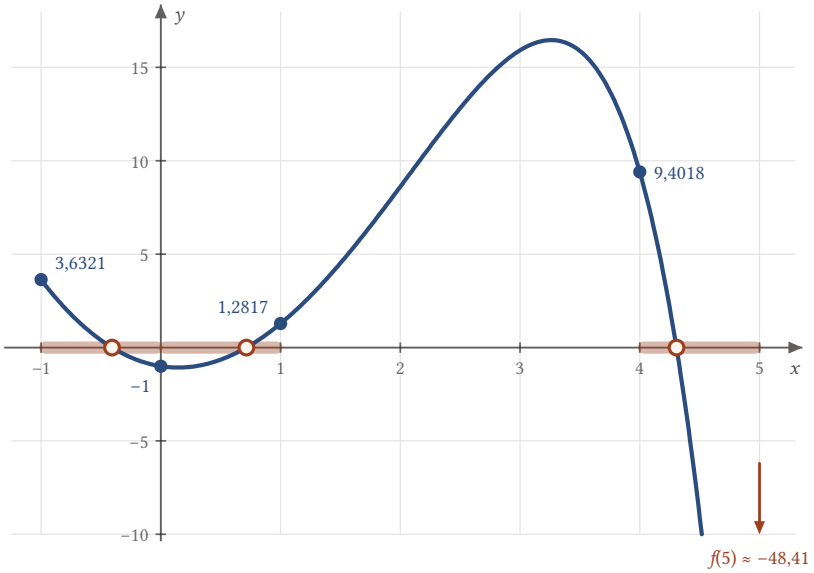
$$f(-1) = 4 - \frac{1}{e} \approx 3{,}6321 > 0$$

olduğundan aynı gerekçeyle en az bir $c \in (-1,0)$ için $f(c) = 0$ olur.
$(4,5)$ aralığı. Büyük x için üstel fonksiyon parabolü geçer:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(4) = 64 - e^4 \approx 9{,}4018 > 0, \qquad f(5) = 100 - e^5 \approx -48{,}4132 < 0.$$

Yine ara değer teoremi gereği en az bir $c \in (4,5)$ için $f(c) = 0$ olur.



Şekil 1.5: $y = 4x^2 - e^x$ grafiği. İşaretli noktalar $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ ve $f(4)$ değerleridir. Eğri x ekseninin altına iner ve $f(5) \approx -48{,}41$ olur. Boş daireler $x \approx -0{,}4078;\ 0{,}7148;\ 4{,}3066$ köklerini, kalın parçalar bu kökleri içeren $(-1,\,0)$, $(0,\,1)$ ve $(4,\,5)$ aralıklarını gösterir.

Başka kök yoktur. $f'''(x) = -e^x$ hiçbir noktada sıfır olmaz. f'nin dört farklı kökü olsaydı bu kökleri içeren kapalı aralıkta genelleştirilmiş Rolle teoremi (Teorem 1.6) $n = 3$ ile $f'''(c) = 0$ olan bir c verirdi. Demek ki f'nin en çok üç kökü vardır.
Sonuç olarak denklemin tam üç çözümü vardır; bunlar sırasıyla $(-1,0)$, $(0,1)$ ve $(4,5)$ aralıklarındadır.
■

1.6 İntegraller İçin Ağırlıklı Ortalama Değer Teoremi

Nümerik integrasyon formüllerinin hata terimlerini bulurken integralin içinden bir çarpanı, ara bir noktadaki değeriyle dışarı çıkarmamız gerekecek. Bunu sağlayan teorem şudur.

Teorem 1.8 (İntegraller İçin Ağırlıklı Ortalama Değer Teoremi). *$f \in C[a,b]$, $g \in R[a,b]$ olsun ve g fonksiyonu $[a,b]$ aralığında işaret değiştirmesin. Bu durumda öyle bir $c \in (a,b)$ sayısı vardır ki*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

olur.

İspat.
$g \le 0$ ise teoremi $-g$ için ispatlayıp iki yanı -1 ile çarpmak yeter; bu yüzden $g \ge 0$ alalım. f sürekli olduğundan $m = \min f$ ve $M = \max f$ değerleri $[a,b]$ içindeki x_m ve x_M noktalarında alınır (Teorem 1.5).
μ sayısının bulunması. *Analiz 2'deki birinci ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) bir $\mu \in [m,M]$ için*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx$$

olduğunu verir. Geriye $f(c) = \mu$ olan bir $c \in (a,b)$ bulmak kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\int_a^b g = 0$ durumu. *Eşitliğin iki yanı da sıfırdır; her $c \in (a,b)$ işe yarar.*
$m < \mu < M$ durumu. *μ, $f(x_m)$ ile $f(x_M)$ arasındadır. Ara değer teoremi (Teorem 1.7) x_m ile x_M arasında kesin olarak kalan, dolayısıyla (a,b) içinde olan bir c için $f(c) = \mu$ verir.*
$\int_a^b g > 0$ ve $\mu = m$ durumu. *O zaman*

$$\int_a^b \big(\, f(x) - m \,\big)\, g(x)\, dx = 0$$

olur. (a,b) içinde $f(c) = m$ olan bir nokta bulunmadığını varsayalım. $|\, g \,| \le B$ olsun (g integrallenebilir olduğundan sınırlıdır). $2B\delta < \int_a^b g$ olacak kadar küçük bir $\delta > 0$ seçersek, integralin aralığa göre toplamsallığından

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} g(x)\, dx \ge \int_a^b g(x)\, dx - 2B\delta > 0$$

olur. $f - m$ fonksiyonu $[a+\delta, b-\delta]$ üzerinde sürekli ve pozitiftir; dolayısıyla bu aralıkta pozitif bir η minimumu vardır. $(f-m)\, g \ge 0$ olduğundan

$$0 = \int_a^b (f-m)\, g\, dx \ge \eta \int_{a+\delta}^{b-\delta} g\, dx > 0$$

çelişkisi çıkar. Demek ki $f(c) = m = \mu$ olan bir $c \in (a,b)$ vardır. $\mu = M$ durumu f yerine $-f$ alınarak aynı biçimde çıkar.
■

Yani g bir ağırlık fonksiyonudur: fg'nin integrali, f'nin uygun bir ara noktadaki değeriyle g'nin integralinin çarpımıdır. g'nin işaret değiştirmemesi şarttır; aksi hâlde $\int_a^b g$ sıfır ya da çok küçük olabilir ve eşitlik bozulur.

Sonuç 1.1 (İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi). *$f \in C[a,b]$ ise öyle bir $c \in (a,b)$ vardır ki*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

olur.

İspat.
Teorem 1.8 teoreminde $g(x) \equiv 1$ alalım. g işaret değiştirmez ve $\int_a^b g(x)\, dx = b - a$ olduğundan bir $c \in (a,b)$ için $\int_a^b f(x)\, dx = f(c)\,(b-a)$ olur. İki yanı $b-a$ sayısına bölmek yeter.
■

Yani $f(c)$, f'nin $[a,b]$ üzerindeki ortalama değeridir ve sürekli bir fonksiyon ortalama değerini aralığın içinde bir noktada alır.

1.7 Taylor Teoremi

Nümerik analizin en çok kullanılan aracı Taylor teoremidir: bir fonksiyonu bir nokta civarında bir polinomla temsil eder ve yapılan hatayı ara bir noktadaki türevle açıkça yazar.

Teorem 1.9 (Taylor Teoremi). *$n \ge 0$ bir tam sayı, $f \in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}$ türevi (a,b) aralığında var ve $x_0 \in [a,b]$ olsun.*

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

 CC BY-NC-SA 4.0

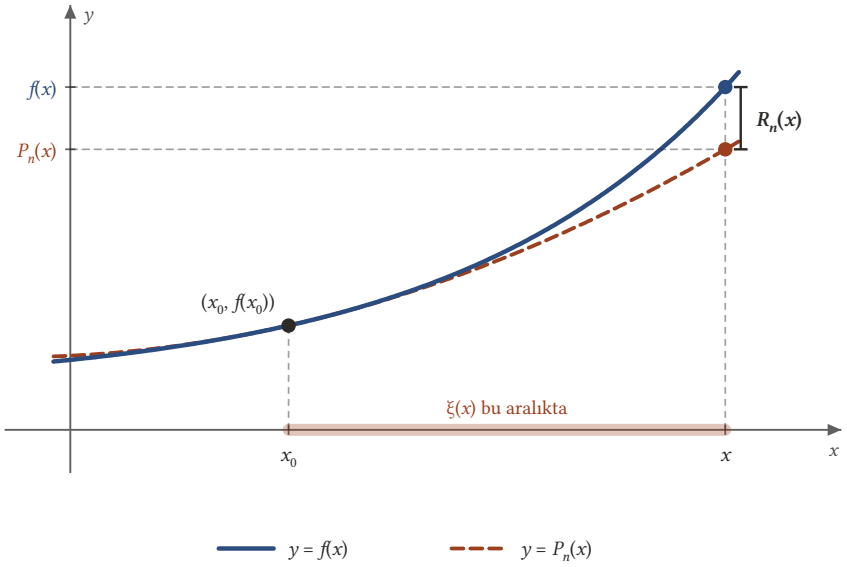
olsun. Bu durumda $x \neq x_0$ *olan her* $x \in [a,b]$ *için* x_0 *ile* x *arasında öyle bir* $\xi(x)$ *sayısı vardır ki*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

olmak üzere

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{1}$$

olur.



Şekil 1.6: Taylor teoremi: $\mathrm{P_n}$*, f'nin grafiğine* $(\mathrm{x_o}, \mathrm{f(x_o)})$ *noktasında yapışır. Bir* x *noktasında iki grafik arasındaki düşey fark kesme hatası* $\mathrm{R_n(x) = f(x) - P_n(x)}$*'tir; formüldeki* ξ*(x),* $\mathrm{x_o}$ *ile* x *arasındaki (eksende kalın çizilen) aralıktadır.*

İspat için bkz. Analiz 2.

$x = x_0$ iken $P_n(x_0) = f(x_0)$ olduğundan (1) eşitliği $R_n(x_0) = 0$ ile kendiliğinden sağlanır. Teoremdeki iki parçanın adları sonraki bölümlerde sürekli geçecek.

Tanım 1.2 (Taylor Polinomu ve Kesme Hatası). Teorem 1.9 teoremindeki $P_n(x)$ polinomuna f fonksiyonunun x_0 civarındaki ***n*. mertebeden Taylor polinomu** denir. $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ farkına **kesme hatası** (kalan terim ya da hata terimi) denir.

Yani P_n, f'nin x_0'daki ilk n türevini taşıyan polinomdur; R_n ise sonsuz bir toplamı (Taylor serisini) sonlu sayıda terimde kestiğimiz için yaptığımız hatadır. $P_n(x)$ ifadesinde $n \to \infty$ için limit alındığında f'nin x_0 civarındaki **Taylor serisi** elde edilir; $x_0 = 0$ alınırsa bu polinoma **Maclaurin polinomu**, seriye de **Maclaurin serisi** denir (bkz. Analiz 2).
Kesme hatasındaki $\xi(x)$ sayısının yalnız varlığı bilinir; değeri bilinmez. Bu yüzden nümerik analizde en sık karşılaşılan problemlerden biri şudur: verilen aralıktaki her x için hata terimindeki $f^{(n+1)}(\xi(x))$ ifadesine bir **üst sınır** bulmak. Bulunan sınır ne kadar küçükse yaklaşımın ne kadar iyi olduğunu o kadar kesin söyleyebiliriz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dört adımda Taylor ile yaklaşık değer ve hata sınırı

1. Fonksiyonu, değerini kolayca bildiğimiz ve hesaplanacak noktaya yakın bir x_0'ı ve n mertebesini seç.
2. $f', f'', \ldots, f^{(n+1)}$ türevlerini hesapla; $P_n(x)$'i ve $R_n(x)$'i yaz.
3. Yaklaşık değer olarak $P_n(x)$'i hesapla.
4. $\xi(x)$, x_0 ile x arasındadır; bu aralıkta $\mid f^{(n+1)} \mid$ için bir M üst sınırı bul. O zaman

$$\mid f(x) - P_n(x) \mid \leq \frac{M}{(n+1)!} \mid x - x_0 \mid^{n+1}$$

olur ve $f(x)$, $P_n(x)$ etrafındaki bu genişlikte bir aralıktadır.

Örnek 1.2 (İkinci Mertebeden Taylor Polinomu ile cos(0,01)). $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ civarındaki 2. mertebeden Taylor polinomunu bulunuz. Bu polinomla $\cos(0{,}01)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayıp yapılan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Çözüm.
Taylor polinomu ve kalan terim. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ olduğundan Taylor teoremi (Teorem 1.9) uygulanabilir. Türevler

$$f'(x) = -\sin x, \qquad f''(x) = -\cos x, \qquad f'''(x) = \sin x$$

olduğundan $n = 2$ için

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 \\ &= \cos 0 - (\sin 0)\,x - \frac{\cos 0}{2}\,x^2 = 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

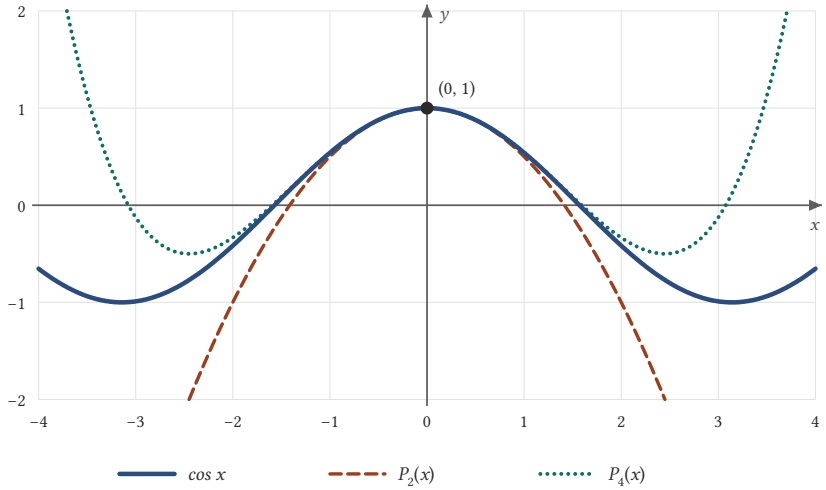
bulunur. Kalan terim, $\xi(x)$ sayısı 0 ile x arasında olmak üzere

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi(x))}{3!}\,x^3 = \frac{\sin(\xi(x))}{6}\,x^3$$

olur. Böylece

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3 \sin(\xi(x))}{6}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.7: $y = \cos x$ ile $x_0 = 0$ civarındaki Taylor polinomları $P_2(x) = 1 - x^2/2$ ve $P_4(x) = 1 - x^2/2 + x^4/24$. Üç eğri $(0, 1)$ noktası civarında üst üste biner. Uzaklaştıkça önce P_2, daha geç P_4 kosinüsten ayrılır: $x = 2$'de $\cos 2 \approx -0{,}4161$, $P_2(2) = -1$, $P_4(2) \approx -0{,}3333$ olur.

Yaklaşık değer. $x = 0{,}01$ için $0 < \xi(0{,}01) < 0{,}01$ olmak üzere

$$\cos(0{,}01) = 1 - \frac{(0{,}01)^2}{2} + \frac{(0{,}01)^3 \sin(\xi(0{,}01))}{6}$$

olduğundan

$$\cos(0{,}01) \approx P_2(0{,}01) = 1 - 0{,}00005 = 0{,}99995.$$

Hata için üst sınır. $|\sin x| \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} |\cos(0{,}01) - 0{,}99995| &= \frac{(0{,}01)^3}{6} |\sin(\xi(0{,}01))| \\ &\leq \frac{10^{-6}}{6} \approx 0{,}17 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$0{,}99995 - 0{,}17 \cdot 10^{-6} \leq \cos(0{,}01) \leq 0{,}99995 + 0{,}17 \cdot 10^{-6},$$
$$0{,}99994983 \leq \cos(0{,}01) \leq 0{,}99995017$$

olur.

Daha iyi bir sınır. $|\sin(\xi)|$ için 1 yerine $|\sin x| \leq |x|$ eşitsizliğini kullanalım. $0 < \xi(0{,}01) < 0{,}01$ olduğundan $|\sin(\xi(0{,}01))| \leq |\xi(0{,}01)| \leq 0{,}01$ ve

$$|\cos(0{,}01) - 0{,}99995| \leq \frac{(0{,}01)^3 \cdot 0{,}01}{6} \approx 0{,}17 \cdot 10^{-8}$$

olur. Aynı yaklaşım için yüz kat daha küçük bir sınır bulduk. Gerçekte $\cos(0{,}01) = 0{,}9999500004\ldots$ olduğundan gerçek hata yaklaşık $0{,}42 \cdot 10^{-9}$'dur; iki sınır da geçerlidir, ama $f'''(\xi(x))$ ifadesini ne kadar iyi sınırlarsak yaklaşımın kalitesini o kadar kesin biliriz.

■

Örnek 1.3 (Üçüncü Mertebeden Taylor Polinomu ile cos(0,01)). $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ civarındaki 3. mertebeden Taylor polinomunu bulunuz. Bu polinomla $\cos(0{,}01)$ değerini yaklaşık olarak hesaplayıp yapılan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Taylor polinomu ve kalan terim. Türevler $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$ ve $f^{(4)}(x) = \cos x$'tir. $f'''(0) = \sin 0 = 0$ olduğundan

$$P_3(x) = P_2(x) + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

bulunur; kosinüsün 2. ve 3. mertebeden Taylor polinomları aynıdır. Kalan terim ise değişir: $\xi(x)$ sayısı 0 ile x arasında olmak üzere

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}\,x^4 = \frac{\cos(\xi(x))}{24}\,x^4.$$

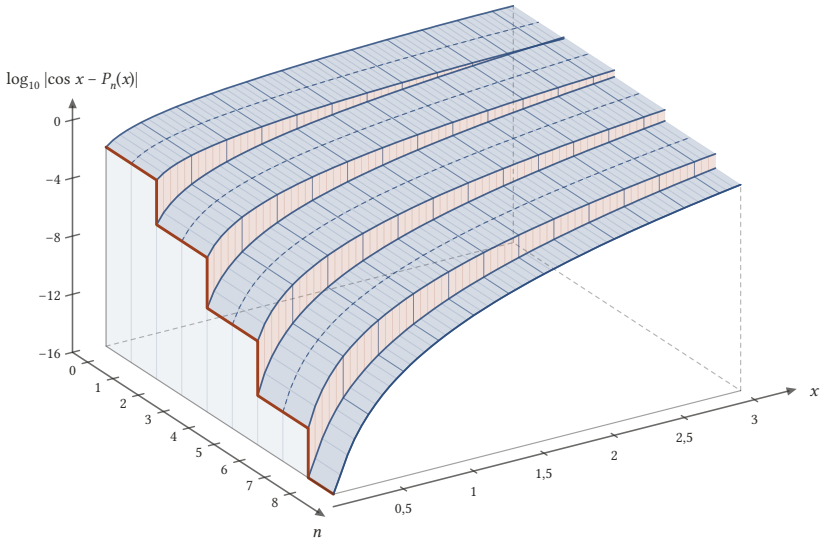
Yaklaşık değer. $\cos(0{,}01) \approx P_3(0{,}01) = 0{,}99995$, önceki örnekle aynıdır.
Hata için üst sınır. $|\cos x| \le 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} |\cos(0{,}01) - 0{,}99995| &= \frac{(0{,}01)^4}{24}\,|\cos(\xi(0{,}01))| \\ &\le \frac{10^{-8}}{24} \approx 0{,}42 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

olur. Üstelik $0 < \xi(0{,}01) < 0{,}01$ için $\cos(\xi(0{,}01)) > 0$, yani $R_3(0{,}01) > 0$'dır. Buna göre

$$0{,}99995 < \cos(0{,}01) \le 0{,}9999500004167.$$

Aynı polinomu 3. mertebeden polinom olarak görmek, 2. mertebeden kalan terimle bulunan $0{,}17 \cdot 10^{-6}$ sınırını yaklaşık $0{,}42 \cdot 10^{-9}$'a indirdi. Gerçek hata $0{,}4166653 \cdot 10^{-9}$ olduğundan bu sınır neredeyse tam isabetlidir.



Şekil 1.8: $z = \log_{10}|\cos x - P_n(x)|$ yüzeyi ($0{,}1 \le x \le 3$, $n = 0, 1, \ldots, 8$; $z \ge -16$ kırpılmıştır). Her n için x yönünde bir şerit vardır. Çift n ile ondan sonraki tek n şeridi aynı yüksekliktedir, çünkü $P_{2k} = P_{2k+1}$ olur; basamaklar yalnız çift n'lerde iner (yalnız $x > 2{,}78$ için $n = 2$ şeridi $n = 0$ şeridinin biraz üstüne çıkar).
Kalın eğri $x = 0{,}1$'deki profildir: x küçüldükçe ve n büyüdükçe hata hızla düşer.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

1.8 Bazı Temel Fonksiyonların Taylor Serileri

Sonraki bölümlerde sık kullanacağımız birkaç Taylor serisini, geçerli oldukları aralıklarla birlikte aşağıda topluyoruz. Çıkarılışları için bkz. Analiz 2.

Fonksiyon	x_0	Taylor serisi	İlk terimler	Geçerli olduğu aralık
e^x	0	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$(-\infty, +\infty)$
$\sin x$	0	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$	$(-\infty, +\infty)$
$\cos x$	0	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$	$(-\infty, +\infty)$
$\dfrac{1}{1-x}$	0	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$(-1, 1)$
$\ln x$	1	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}$	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots$	$(0, 2]$
$\ln(1+x)$	0	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$	$(-1, 1]$

Örneğin kosinüs serisinin ilk terimleri $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ olup P_2 ve P_4 polinomları bu serinin kısmi toplamlarıdır. Son iki satır aynı serinin iki yazılışıdır: $\ln x$ serisinde x yerine $1 + x$ yazılırsa $\ln(1+x)$ serisi çıkar.

1.9 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorular bölümdeki teoremlerin doğrudan uygulamalarıdır. Trigonometrik fonksiyonlarla hesap yaparken açıların radyan cinsinden alındığına dikkat ediniz.

Alıştırma 1.1 (Bir Denklemin Çözümünün Varlığı). $x - (\ln x)^x = 0$ denkleminin $[4, 5]$ aralığında en az bir çözümü olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Bu denklemi cebirsel olarak çözemeyiz; zaten istenen çözümü bulmak değil, var olduğunu göstermektir.
> **Süreklilik.** $f(x) = x - (\ln x)^x$ olsun. $[4, 5]$ üzerinde $\ln x > 0$ olduğundan
>
> $$f(x) = x - e^{x \ln(\ln x)}$$
>
> yazabiliriz. x, $\ln x$ ve e^x fonksiyonları bu aralıkta süreklidir ve f bunların çarpımı, bileşkesi ve farkıyla kurulduğundan $f \in C[4, 5]$'tir.
> **Uç noktalardaki işaretler.**
>
> $$f(4) = 4 - (\ln 4)^4 \approx 0{,}3066 > 0, \qquad f(5) = 5 - (\ln 5)^5 \approx -5{,}7987 < 0.$$
>
> Demek ki $f(5) < 0 < f(4)$'tür.
> **Sonuç.** Ara değer teoremi (Teorem 1.7) $K = 0$ ile en az bir $c \in (4, 5)$ için $f(c) = 0$, yani $c - (\ln c)^c = 0$ olduğunu verir.
> ■

Alıştırma 1.2 (Türevin Sıfır Olduğu Bir Nokta). $f(x) = x \sin(\pi x) - (x - 2) \ln x$ fonksiyonu için $[1, 2]$ aralığında en az bir kez $f'(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Hipotezler.** x, $\sin x$ ve $\ln x$ fonksiyonları $[1, 2]$ üzerinde sürekli ve türevlenebilirdir; f bunların çarpım ve farklarından oluştuğundan $f \in C[1, 2]$'dir ve f, $(1, 2)$ üzerinde türevlenebilirdir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f'(x) = \sin(\pi x) + \pi x \cos(\pi x) - \ln x - \frac{x-2}{x}.$$

Uç değerler. $\sin \pi = \sin 2\pi = 0$ ve $\ln 1 = 0$ olduğundan

$$f(1) = 1 \cdot \sin \pi - (1-2)\ln 1 = 0,$$
$$f(2) = 2\sin(2\pi) - (2-2)\ln 2 = 0.$$

Sonuç. Ortalama değer teoremi (Teorem 1.4) gereği en az bir $c \in (1,2)$ için

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{0-0}{1} = 0$$

olur. ($f(1) = f(2)$ olduğundan bu, Rolle teoreminin (Teorem 1.3) doğrudan sonucudur.) Sayısal olarak bu nokta $c \approx 1{,}5751$'dir.
■

Alıştırma 1.3 (Bir Mutlak Değerin Maksimumu).

$$\max_{x\in[0,1]} \left| \frac{2 - e^x + 2x}{3} \right|$$

değerini bulunuz.

Çözüm.
Maksimumun varlığı. $f(x) = \dfrac{2-e^x+2x}{3}$ olsun. $f \in C[0,1]$ olduğundan ekstrem değer teoremi (Teorem 1.5) gereği f bu aralıkta maksimum ve minimum değerini alır. f, $(0,1)$ üzerinde türevli olduğundan bu değerler uç noktalarda ya da $f'(x) = 0$ olan noktalarda alınır.
Kritik nokta.

$$f'(x) = \frac{-e^x + 2}{3} = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2.$$

$\ln 2 \approx 0{,}6931 \in (0,1)$'dir.
Değerler.

$$f(0) = \frac{2-1+0}{3} = \frac{1}{3} \approx 0{,}3333,$$
$$f(\ln 2) = \frac{2-2+2\ln 2}{3} = \frac{2\ln 2}{3} \approx 0{,}4621,$$
$$f(1) = \frac{2-e+2}{3} = \frac{4-e}{3} \approx 0{,}4272.$$

Mutlak değer. f'nin minimumu $\frac{1}{3} > 0$ olduğundan $[0,1]$ üzerinde $f > 0$ ve $|\ f\ | = f$'dir. Dolayısıyla

$$\max_{0\le x\le 1} |\ f(x)\ | = \max\left\{\frac{1}{3}, \frac{2\ln 2}{3}, \frac{4-e}{3}\right\} = \frac{2\ln 2}{3} \approx 0{,}4621.$$

■

Alıştırma 1.4 (Karekök 105 için Yaklaşık Değer). $\sqrt{105}$ sayısı için bir yaklaşık değer bulunuz ve yapılan hata için bir üst sınır belirleyiniz.

Çözüm.
Seçim. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 100$ ve $n = 1$ için Taylor teoremini (Teorem 1.9) kullanalım; $\sqrt{100} = 10$ bilinen bir değerdir. $\xi(x)$, 100 ile x arasında olmak üzere

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{P_1(x)} + \underbrace{\frac{f''(\xi(x))}{2}(x-x_0)^2}_{R_1(x)}.$$

Türevler ve polinom. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ve $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$ olduğundan

$$P_1(x) = \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}}(x-100) = 10 + \frac{x-100}{20}$$

ve

$$\sqrt{105} \approx P_1(105) = 10 + \frac{5}{20} = 10{,}25.$$

Hata için üst sınır. Kalan terim

$$R_1(x) = -\frac{(x-100)^2}{8\sqrt{(\xi(x))^3}}, \qquad R_1(105) = -\frac{25}{8\sqrt{(\xi(105))^3}}$$

olup $100 < \xi(105) < 105$'tir. $\sqrt{t^3}$ artan olduğundan

$$\mid R_1(105) \mid = \frac{25}{8\sqrt{(\xi(105))^3}} < \frac{25}{8\sqrt{100^3}} = \frac{25}{8000} = 0{,}003125$$

yapılan hata için bir üst sınırdır. Buna göre

$$10{,}25 - 0{,}003125 < \sqrt{105} < 10{,}25 + 0{,}003125,$$

yani $10{,}246875 < \sqrt{105} < 10{,}253125$. ($R_1(105) < 0$ olduğundan aslında $\sqrt{105} < 10{,}25$'tir.) Gerçek değer $\sqrt{105} = 10{,}2469508\ldots$ olduğundan gerçek hata yaklaşık $0{,}0030492$'dir ve bulunan sınırın altında kalır.

■

Alıştırma 1.5 (Beşinci Kökün Bulunduğu Aralık). $\sqrt[5]{1{,}1}$ sayısı virgülden sonra 4 ondalık basamak, yani 10^{-4} hassasiyetle hangi aralıktadır?

Çözüm.
Seçim. $f(x) = (1+x)^{1/5}$, $x_0 = 0$ ve $n = 2$ için Taylor teoremini (Teorem 1.9) uygulayalım. $\xi(x)$, 0 ile x arasında olmak üzere

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{P_2(x)} + \underbrace{\frac{f'''(\xi(x))}{3!}(x-x_0)^3}_{R_2(x)}.$$

Türevler.

$$f'(x) = \frac{1}{5(1+x)^{4/5}}, \quad f''(x) = -\frac{4}{25(1+x)^{9/5}},$$
$$f'''(x) = \frac{36}{125(1+x)^{14/5}}.$$

Polinom ve yaklaşık değer. $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{5}$, $f''(0) = -\frac{4}{25}$ olduğundan

$$P_2(x) = 1 + \frac{x}{5} - \frac{4x^2}{2! \cdot 25} = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25}.$$

$x = 0{,}1$ alınırsa

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sqrt[5]{1{,}1} = f(0{,}1) \approx P_2(0{,}1) = 1 + \frac{0{,}1}{5} - \frac{4(0{,}1)^2}{50} = 1{,}0192.$$

Hata için üst sınır. $0 < \xi(0{,}1) < 0{,}1$ olmak üzere

$$R_2(0{,}1) = \frac{36\,(0{,}1)^3}{3! \cdot 125\,\sqrt[5]{(1+\xi(0{,}1))^{14}}}$$

olur. $(1+\xi(0{,}1))^{14} > 1$ olduğundan

$$0 < R_2(0{,}1) < \frac{36\,(0{,}1)^3}{6 \cdot 125 \cdot 1} = 0{,}000048 = 0{,}48 \cdot 10^{-4} < 10^{-4}.$$

Aralık.

$$|\ f(0{,}1) - P_2(0{,}1)\ | = |\ R_2(0{,}1)\ | < 0{,}48 \cdot 10^{-4}$$

olduğundan

$$1{,}0192 - 0{,}000048 < \sqrt[5]{1{,}1} < 1{,}0192 + 0{,}000048,$$

yani $1{,}019152 < \sqrt[5]{1{,}1} < 1{,}019248$ bulunur. ($R_2 > 0$ olduğundan aslında $\sqrt[5]{1{,}1} > 1{,}0192$'dir.)
Gerçek hata ile karşılaştırma. $\sqrt[5]{1{,}1}$ sayısının gerçek değeri $1{,}019244876\ldots$ olduğundan bu yaklaşımdaki gerçek hata

$$|\ 1{,}019244876 - 1{,}0192\ | = 0{,}44876 \cdot 10^{-4}$$

olur. Her zaman gerçek hata, hata için bulunan üst sınırdan küçük ya da ona eşittir; burada $0{,}44876 \cdot 10^{-4} \leq 0{,}48 \cdot 10^{-4}$'tür.
■

Alıştırma 1.6 (Taylor Polinomu ile İntegral Hesabı). $\displaystyle\int_0^{0{,}1} \cos x\,dx$ integralini 3. mertebeden Taylor polinomu yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayınız. Oluşan hata için bir üst sınır belirleyip bu sınırı gerçek hata ile karşılaştırınız.

Çözüm.
Taylor açılımı. $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$ ve $n = 3$ alalım. $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$ olduğundan Taylor teoremi (Teorem 1.9) gereği

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\cos(\xi(x))$$

bulunur; burada $\xi(x)$ sayısı 0 ile x arasındadır. Son terim $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ farkına eşit olduğundan sürekli bir fonksiyondur ve integrali alınabilir.
İntegral.

$$\begin{aligned}\int_0^{0{,}1} \cos x\,dx &= \int_0^{0{,}1} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx + \frac{1}{24}\int_0^{0{,}1} x^4 \cos(\xi(x))\,dx \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^{0{,}1} + \frac{1}{24}\int_0^{0{,}1} x^4 \cos(\xi(x))\,dx \\ &= 0{,}1 - \frac{(0{,}1)^3}{6} + \frac{1}{24}\int_0^{0{,}1} x^4 \cos(\xi(x))\,dx.\end{aligned}$$

Buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{0,1} \cos x\,dx \approx 0,1 - \frac{0,001}{6} = 0,099833333333.$$

Hata için üst sınır. $|\cos(\xi(x))| \leq 1$ kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{24}\int_0^{0,1} x^4\cos(\xi(x))\,dx\right| &\leq \frac{1}{24}\int_0^{0,1} x^4\,|\cos(\xi(x))|\,dx \\ &\leq \frac{1}{24}\int_0^{0,1} x^4\,dx = \frac{1}{24}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^{0,1} \\ &= \frac{10^{-5}}{120} = 0,8\overline{3}\cdot 10^{-7}\end{aligned}$$

bulunur.
Gerçek hata. Gerçek değer

$$\int_0^{0,1} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{0,1} = \sin(0,1) \approx 0,099833416647$$

olduğundan

$$\text{Gerçek hata} = |\,0,099833416647 - 0,099833333333\,| \approx 0,83\cdot 10^{-7}$$

olur. $0,83\cdot 10^{-7} \leq 0,8\overline{3}\cdot 10^{-7}$ eşitsizliği, gerçek hatanın bulunan üst sınırı aşmadığını gösterir.
■

Bu bölümdeki örneklerde hep bir yaklaşık değer ile gerçek değer arasındaki farka baktık. Bu farkı ölçmenin yollarını ve bilgisayarın sayıları sonlu basamakla saklamasından doğan hataları sonraki bölümde inceliyoruz: Hatalar ve Makine Sayıları.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Hatalar ve Makine Sayıları

Bilgisayar sonsuz basamaklı bir reel sayıyı saklayamaz, sonsuz bir seriyi sonuna kadar toplayamaz. Bu yüzden her nümerik sonuç bir yaklaşımdır ve yaklaşımın ne kadar iyi olduğunu bilmek için hatanın nereden geldiğini ve ne kadar büyüyebileceğini bilmek gerekir. Küçük görünen hatalar pahalıya patlayabilir: 25 Şubat 1991'de Dhahran'da bir Patriot füzesi, zamanın 0,1 saniyelik adımlarla 24 bitte kesilerek tutulmasından doğan birikmiş hata (yaklaşık 100 saatte 0,34 saniye) yüzünden bir Scud füzesini kaçırdı ve 28 asker öldü. 4 Haziran 1996'da ise Ariane 5 roketi, 64 bitlik bir kayan noktalı sayının 16 bitlik işaretli tam sayıya çevrilmesinde oluşan taşma yüzünden fırlatıştan yaklaşık 37 saniye sonra yok edildi.
Bu bölümde önce hata türlerini ayırıp hatayı mutlak ve bağıl hata ile ölçeceğiz. Ardından bilgisayarın sayıları nasıl sakladığını, 64 bitlik makine sayılarını ve k-basamak kesme ile yuvarlamanın yaptığı hatanın sınırını göreceğiz.

2.1 Hata Türleri

Nümerik bir yöntemle bulunan sonuç ile analitik çözüm arasındaki farka **hata** denir. Nümerik hatalar kaynaklarına göre üç türe ayrılır.

Tanım 2.1 (Veri Hatası). Problemi kuran ya da çözen kişiden kaynaklanan hatalara **veri hatası** denir. Fiziksel ya da matematiksel modeli kurarken, işlem yaparken ya da program yazarken yapılan yanlışlar ve denklemlerin katsayılarını belirlemek için yapılan deneylerde ölçüm aletlerinin sınırlı hassaslığından doğan hatalar bu türdendir.

Yani veri hatası, yöntem çalışmaya başlamadan önce girdiye karışmış hatadır. Yöntemin kendisiyle ilgisi olmadığından bu notlarda bu tür hatalarla ilgilenmeyeceğiz.

Tanım 2.2 (Kesme Hatası). Matematiksel bir işlemin gerçek sonucunu ifade etmek için onun yerine bir yaklaşım kullanılmasından doğan farka **kesme hatası** denir.

Yani kesme hatası yöntemin kendisinden gelir: sonsuz bir süreç sonlu bir adımda kesilir. Örneğin bir fonksiyonun değerini Taylor polinomuyla hesapladığımızda serinin atılan terimleri kesme hatasını oluşturur; bu hata Taylor Teoremi'ndeki kalan terimle ölçülür (Teorem 1.9).

Tanım 2.3 (Yuvarlama Hatası). Bilgisayarın sayıları yalnız belirli sayıda basamakla gösterebilmesinden doğan hataya **yuvarlama hatası** denir.

Yani yöntem kusursuz olsa bile sayıların kendisi sonlu basamakla saklandığı için bir fark oluşur. Örneğin dört ondalık basamakla

$$\pi = 3{,}141592653\ldots \approx 3{,}1416,$$
$$e = 2{,}71828182\ldots \approx 2{,}7183,$$
$$\frac{1}{3} = 0{,}33333333\ldots \approx 0{,}3333$$

yazılır. Patriot füzesindeki hata da bu türdendir: 0,1 sayısı ikili sistemde sonlu basamakla yazılamaz $(0{,}000110011001100\ldots_2)$, 24 bitte kesilince her adımda küçük bir fark kalır ve bu fark adım adım birikir.

2.2 Mutlak ve Bağıl Hata

Bir yaklaşımın ne kadar iyi olduğunu bir sayıyla ölçmek için iki nicelik kullanılır.

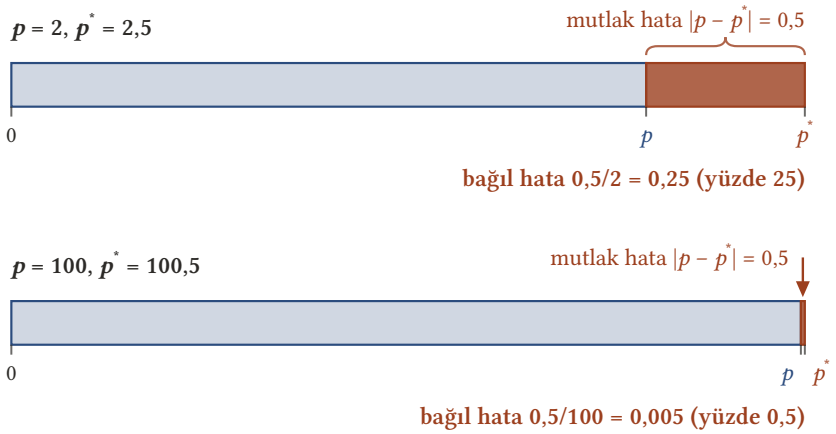
Tanım 2.4 (Mutlak ve Bağıl Hata). Bir p sayısına yapılan bir yaklaşım p^* ile gösterilsin. $|\, p - p^* \,|$ değerine bu yaklaşımın **mutlak hatası** denir. $p \neq 0$ olmak üzere

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\frac{p-p^*}{p}\right|$$

değerine de bu yaklaşımın **bağıl hatası** denir.

Yani mutlak hata yaklaşımın gerçek değerden ne kadar uzakta olduğunu, bağıl hata ise bu uzaklığın gerçek değerin büyüklüğüne oranını söyler. Bağıl hata birimsizdir; 0,01 bağıl hata "yüzde 1 hata" demektir.



Şekil 2.1: Aynı mutlak hata, iki farklı büyüklükte. Mavi çubuk p, turuncu parça $|p - p^*| = 0{,}5$ mutlak hatasıdır; her satır kendi ölçeğinde çizilmiştir. $p = 2$ iken hata çubuğun dörtte biri kadardır (bağıl hata 0,25). $p = 100$ iken aynı hata ancak ince bir çizgidir (bağıl hata 0,005).

Örnek 2.1 (Mutlak ve Bağıl Hatanın Hesabı). $p = 0{,}3$ sayısına $p^* = 0{,}31$ yaklaşımı yapılmıştır. Mutlak ve bağıl hatayı bulunuz.

Çözüm.
Mutlak hata

$$| p - p^* | = | 0{,}3 - 0{,}31 | = 0{,}01$$

ve bağıl hata

$$\left|\frac{p-p^*}{p}\right| = \frac{0{,}01}{0{,}3} = \frac{1}{30} \approx 0{,}0333$$

olur. ■

Bir yaklaşımın gerçek değere ne oranda yaklaştığını ölçmek için bağıl hata mutlak hatadan daha anlamlıdır. Aynı mutlak hata, küçük bir nicelikte büyük, büyük bir nicelikte küçük bir kusurdur.

Örnek 2.2 (Aynı Mutlak Hata, Farklı Bağıl Hata). 100 km'lik bir yol 101 km, 1 km'lik bir yol 2 km olarak ölçülmüştür. Hangi ölçme daha kabul edilebilirdir?

Çözüm.
Mutlak hatalar. İki ölçmede de mutlak hata aynıdır:

$$| 100 - 101 | = 1 \ \text{km}, \qquad | 1 - 2 | = 1 \ \text{km} .$$

Bu yüzden mutlak hata iki ölçmeyi ayırt etmez.
Bağıl hatalar. Birinci ölçmenin bağıl hatası

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\frac{100-101}{100}\right| = \frac{1}{100} = 0{,}01,$$

ikinci ölçmeninki

$$\left|\frac{1-2}{1}\right| = 1$$

olur. $0{,}01 < 1$ olduğundan birinci ölçme daha kabul edilebilirdir: ilki yüzde 1, ikincisi yüzde 100 hatalıdır. ■

2.3 Makine Sayıları

Bilgisayarda sayılar iki biçimde saklanır: **tam sayı** değerleri ve **kayan noktalı sayı** değerleri. Yalnız tam sayılarla çalışılacaksa tam sayı değeri yeterlidir; herhangi bir reel sayıyla işlem yapılacaksa kayan noktalı sayı değerine ihtiyaç vardır.
Tam sayılar ikili sayı sisteminde yazılır ve ayrılan bit sayısı gösterilebilecek en büyük tam sayıyı sınırlar. Örneğin 16 bitle yazılabilecek en büyük tam sayı

$$2^{16} - 1 = 65535$$

olur. Bu 16 bitin biri sayının işaretine ayrılırsa geriye 15 bit kalır ve işaretli olarak yazılabilecek en büyük tam sayı

$$2^{16-1} - 1 = 32767$$

olur.

Tanım 2.5 (Taşma). Bir sayının, onu saklamak için ayrılan bitlerle gösterilebilecek en büyük (ya da en küçük) değeri aşmasına **taşma problemi** denir.

Yani sonuç ayrılan yere sığmaz ve saklanan değer artık gerçek değerle ilgisizdir. Ariane 5'i yok eden hata buydu: 16 bitlik işaretli bir tam sayıya 32767'yi aşan bir değer yazılmak istendi.
Kayan nokta gösterimi hem kesirleri hem de çok büyük reel sayıları saklamayı mümkün kılar. Bugün kullanılan biçim, IEEE'nin (The Institute of Electrical and Electronics Engineers) 1985'te yayımladığı ve 2008 ile 2019'da güncellediği IEEE 754 kayan nokta standardıdır. Bu standart 64 bitlik bir reel sayıyı şöyle saklar:

$$s\ c_{10}c_9\ldots c_1c_0\ m_{51}m_{50}\ldots m_1m_0$$

Bitlerin görevleri aşağıdaki tablodadır.

Sembol	Bit	Tanım
s	1	İşaret Biti: 0 = pozitif, 1 = negatif
c	11	Karakteristik
m	52	Mantis

Tanım 2.6 (64 Bitlik Makine Sayısı). s işaret biti, $c_{10}, \ldots, c_0$ karakteristik bitleri ve $m_{51}, \ldots, m_0$ mantis bitleri olmak üzere

$$c = \sum_{k=0}^{10} c_k\, 2^k, \qquad m = \sum_{k=0}^{51} m_k \left(\frac{1}{2}\right)^{52-k}$$

denirse 64 bitlik makine sayısının gösterdiği reel sayı

$$r = (-1)^s\, 2^{c-1023}\, (1+m)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Karakteristiğin $c = 0$ (00000000000) değeri 0 sayısını, $c = 2047$ (11111111111) değeri sonsuzu göstermek için ayrılmıştır; bu formülle yazılan sayılarda $1 \leq c \leq 2046$'dır.

Yani karakteristik sayının büyüklük mertebesini (2'nin kuvvetini), mantis ise anlamlı basamaklarını taşır. c'den 1023 çıkarılması üssün negatif de olabilmesini sağlar. Mantisteki ilk bit $\frac{1}{2}$, ikincisi $\frac{1}{4}$ ağırlığındadır ve $0 \leq m < 1$ olur. Mantis yalnız 52 ikili basamak tutabildiğinden bu gösterimde bir yuvarlama hatası oluşur.

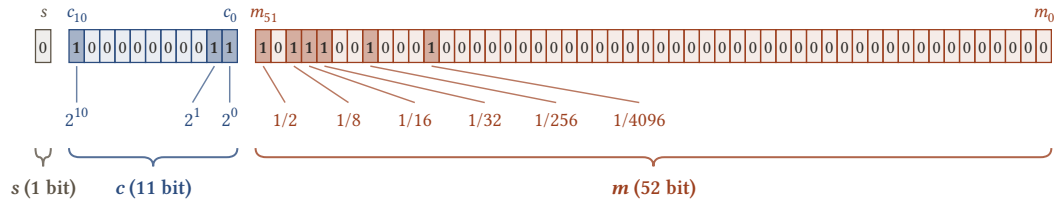
Örnek 2.3 (Bir Bit Dizisinin Çözülmesi). Aşağıdaki 64 bitlik makine sayısının gösterdiği r reel sayısını bulunuz.

```
0100000000111011100100010000000000000000000000000000000000000000
```

Çözüm.
Bitleri ayıralım. İlk bit s, sonraki 11 bit c, kalan 52 bit m'dir:

$$\underbrace{0}_{s}\ \underbrace{10000000011}_{c}$$

$$\underbrace{1011100100010000000000000000000000000000000000000000}_{m}$$



$s = 0,\ c = 1027,\ r = 2^4\ (1 + m) = 27{,}56640625$

Şekil 2.2: Örnekteki 64 bitlik makine sayısı. İlk bit işaret biti s, sonraki 11 bit karakteristik c, kalan 52 bit mantis m'dir. 1 olan bitlerin altında basamak ağırlıkları yazılıdır: $c = 2^{10} + 2 + 1 = 1027$ ve $m = 1/2 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/256 + 1/4096$.

İşaret. $s = 0$ olduğundan sayı pozitiftir.
Karakteristik. c'nin yalnız c_{10}, c_1 ve c_0 bitleri 1'dir:

$$c = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + \ldots + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^{10} = 1 + 2 + 1024 = 1027.$$

Mantis. Soldan 1., 3., 4., 5., 8. ve 12. bitler 1, geri kalanlar 0'dır:

$$\begin{aligned} m &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &\quad + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096}. \end{aligned}$$

Sayı. Formülde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} r &= (-1)^0 \cdot 2^{1027-1023}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \frac{1}{4096}\right) \\ &= 16 + 8 + 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}0625 + 0{,}00390625 \\ &= 27{,}56640625 = 0{,}2756640625 \cdot 10^2 \end{aligned}$$

bulunur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

c'nin aldığı değerler sınırlı olduğundan 64 bitlik gösterimin yazabildiği pozitif sayılar da iki yandan sınırlıdır.

Önerme 2.1 (64 Bitlik Gösterimde En Küçük ve En Büyük Pozitif Sayı). *64 bitlik makine sayısı gösteriminde yazılabilecek en küçük pozitif reel sayı*

$$2^{-1022} \approx 0{,}22251 \cdot 10^{-307},$$

en büyük reel sayı ise

$$2^{1023}(2 - 2^{-52}) \approx 0{,}17977 \cdot 10^{309}$$

olur.

> ***İspat.***
> $r = (-1)^s\, 2^{c-1023}(1+m)$ *sayısının pozitif olması için* $s = 0$ *olmalıdır.* r *hem* c*'ye hem* m*'ye göre artandır.*
> ***En küçük sayı.*** $c = 0$ *değeri* 0 *sayısına ayrıldığından* c*'nin alabileceği en küçük değer* 00000000001*, yani* $c = 1$*'dir. Mantisin en küçük değeri bütün bitleri* 0 *olan* $m = 0$*'dır. Buradan*
>
> $$r = (-1)^0 \cdot 2^{1-1023}(1+0) = 2^{-1022}$$
>
> *olur. Ondalığa çevirirsek*
>
> $$2^{-1022} = 10^{-1022\log_{10} 2} \approx 10^{-307{,}65266} \approx 0{,}22251 \cdot 10^{-307}$$
>
> *bulunur.*
> ***En büyük sayı.*** $c = 2047$ *değeri sonsuza ayrıldığından* c*'nin en büyük değeri* 11111111110*, yani* $c = 2046$*'dır. Mantisin en büyük değeri bütün bitleri* 1 *olan değerdir:*
>
> $$m = \sum_{k=0}^{51} \left(\frac{1}{2}\right)^{52-k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{52}} = 1 - 2^{-52}.$$
>
> *Buradan*
>
> $$\begin{aligned} r &= (-1)^0 \cdot 2^{2046-1023}(1 + 1 - 2^{-52}) \\ &= 2^{1023}(2 - 2^{-52}) \approx 2^{1024} \approx 0{,}17977 \cdot 10^{309} \end{aligned}$$
>
> *olur; son adımda* $2^{1024} = 10^{1024\log_{10} 2} \approx 10^{308{,}25472}$ *kullanıldı.* ■

Yani 64 bitlik gösterim yaklaşık 10^{-308} ile 10^{308} arasındaki büyüklükleri kapsar. İşlemler belirli bir hassasiyetle yapılmazsa bu sınırlar aşılabilir ve taşma problemleri ortaya çıkar.

2.4 Ondalık Kayan Nokta Sayıları

Makinenin ikili gösteriminde olanları elle izleyebilmek için aynı fikri 10 tabanında, az sayıda basamakla inceleyeceğiz.

Tanım 2.7 (k-Basamak Normalize Edilmiş Ondalık Kayan Nokta Sayısı). $1 \le d_1 \le 9$ ve $i = 2, 3, \ldots, k$ için $0 \le d_i \le 9$ olmak üzere

$$\pm\, 0{,}d_1 d_2 \ldots d_k \cdot 10^n$$

biçiminde yazılabilen sayılara **k-basamak normalize edilmiş ondalık kayan nokta sayıları** denir.

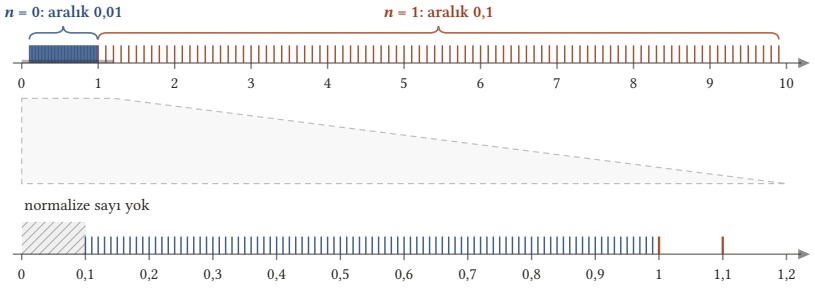
Yani virgülden hemen sonra sıfır olmayan bir basamak gelir ve yalnız k basamak tutulur; sayının büyüklüğü 10^n çarpanına aktarılır. $d_1 \neq 0$ koşulu gösterimi tek kılar: $0{,}27 \cdot 10^{-5}$ yazılır, $0{,}027 \cdot 10^{-4}$ yazılmaz. Birkaç sayının normalize edilmiş ondalık formu şöyledir:

 CC BY-NC-SA 4.0

Sayı	Normalize edilmiş ondalık form
1222000	$0{,}1222 \cdot 10^{7}$
$-0{,}0000345$	$-0{,}345 \cdot 10^{-4}$
$0{,}0027 \cdot 10^{-3}$	$0{,}27 \cdot 10^{-5}$
$0{,}1001 \cdot 10^{-5}$	$0{,}1001 \cdot 10^{-5}$

Örnek 2.4 (İki Basamaklı Normalize Sayıların Dağılımı). $k = 2$ için üssü $n = 0$ ve $n = 1$ olan pozitif normalize edilmiş ondalık kayan nokta sayılarını sayınız ve ardışık iki sayı arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
$n = 0$. Sayılar $0{,}d_1d_2$ biçimindedir: 0,10; 0,11; ...; 0,99. d_1 için 9, d_2 için 10 seçenek olduğundan $9 \cdot 10 = 90$ sayı vardır ve ardışık ikisi arasındaki uzaklık $0{,}01 = 10^{0-2}$'dir.
$n = 1$. Sayılar $0{,}d_1d_2 \cdot 10 = d_1{,}d_2$ biçimindedir: 1,0; 1,1; ...; 9,9. Yine 90 sayı vardır, ama ardışık ikisi arasındaki uzaklık $0{,}1 = 10^{1-2}$'dir.
Sonuç. Her üs için sayı adedi aynıdır, aralık ise üs bir arttıkça 10 katına çıkar. Bu yüzden normalize sayılar 0'a yakın yerde sık, büyük sayılar arasında seyrektir. Aralığın sayının kendisine oranı ise yaklaşık sabit kalır: $n = 0$'da $\frac{0{,}01}{0{,}10} = 0{,}1$ ile $\frac{0{,}01}{0{,}99} \approx 0{,}0101$ arasındadır, $n = 1$'de de aynı aralıktadır. Genel olarak k basamakta her üs için $9 \cdot 10^{k-1}$ sayı vardır ve aralık 10^{n-k}'dir. ■



Şekil 2.3: İki basamaklı ($k = 2$) pozitif normalize sayılar. Üstte [0, 10] aralığı: $n = 0$ için 0,10; 0,11; ...; 0,99 sayıları [0,1; 1) içine sıkışır, $n = 1$ için 1,0; 1,1; ...; 9,9 sayıları 0,1 aralıkla dizilir. Altta [0; 1,2] parçasının büyütmesi: 0 ile 0,10 arasında normalize sayı yoktur.

$y = 0{,}d_1d_2d_3...d_kd_{k+1}d_{k+2}... \cdot 10^n$ taşmaya neden olmayan normalize edilmiş bir sayı olsun. Bu sayının basamakları genellikle k'dan çoktur, hatta sonsuzdur; makinede onun yerine k basamaklı bir sayı saklanır.

Tanım 2.8 (Kayan Nokta Formu: k-Basamak Kesme ve Yuvarlama). $y = 0{,}d_1d_2...d_kd_{k+1}d_{k+2}... \cdot 10^n$ sayısının ondalık kısmının yalnız k basamağı alınarak elde edilen sayıya y'nin **kayan nokta formu** denir ve $KN(y)$ ile gösterilir. k basamak iki yolla belirlenir:

- **k-basamak kesme:** $d_{k+1}d_{k+2}...$ basamakları atılır,

$$KN(y) = 0{,}d_1d_2...d_k \cdot 10^n.$$

- **k-basamak yuvarlama:** y'ye $5 \cdot 10^{n-(k+1)}$ eklenir ve sonuca k-basamak kesme uygulanır,

$$KN(y) = 0{,}\delta_1\delta_2...\delta_k \cdot 10^n.$$

Negatif sayılarda aynı işlem $|\ y\ |$'ye uygulanır ve işaret korunur.

Yani kesmede fazla basamaklar düpedüz atılır. Yuvarlamada $d_{k+1} \geq 5$ ise d_k'ya 1 eklenir (yukarı yuvarlama), $d_{k+1} < 5$ ise k basamaktan sonra kesilir (aşağı yuvarlama). Aşağı yuvarlamada $i = 1, 2, ..., k$ için $\delta_i = d_i$ olur; yukarı yuvarlamada ise elde yüzünden önceki basamaklar, hatta üs de değişebilir; örneğin $0{,}99996 \cdot 10^1$ sayısı 4-basamak yuvarlamayla $0{,}1000 \cdot 10^2$ olur. Buradaki "kesme" sayının basamaklarını atmaktır; kesme hatası ise (Tanım 2.2) bir sonsuz sürecin yarıda bırakılmasından doğar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.5 (π Sayısının 5-Basamak Kesmesi). π sayısını 5-basamak kesme yaparak normalize edilmiş ondalık kayan nokta formunda yazınız.

Çözüm.
Normalize form. $\pi = 3{,}141592654\ldots$ olduğundan normalize edilmiş ondalık formu

$$\pi = 0{,}3141592654\ldots \cdot 10^{1}$$

olur; burada $n = 1$'dir.
Kesme. İlk beş basamak $3, 1, 4, 1, 5$'tir; altıncı ve sonraki basamaklar atılır:

$$KN(\pi) = 0{,}31415 \cdot 10^{1}.$$

Mutlak hata $\mid \pi - 3{,}1415 \mid \approx 0{,}0000927$, bağıl hata yaklaşık $0{,}29 \cdot 10^{-4}$'tür. ■

Örnek 2.6 (π Sayısının 5-Basamak Yuvarlaması). π sayısını 5-basamak yuvarlama yaparak normalize edilmiş ondalık kayan nokta formunda yazınız.

Çözüm.
Normalize form. $\pi = 0{,}3141592654\ldots \cdot 10^{1}$, yani $n = 1$'dir.
Yuvarlama. $k = 5$ ve $n = 1$ için eklenecek sayı $5 \cdot 10^{1-6} = 0{,}00005$'tir:

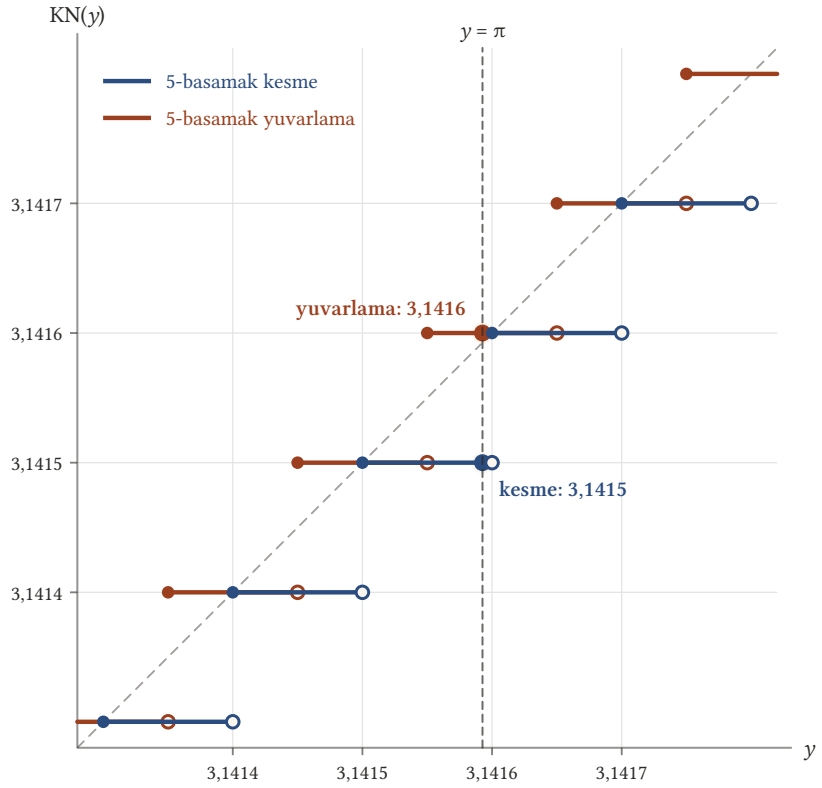
$$\pi + 0{,}00005 = 3{,}14164265\ldots = 0{,}314164265\ldots \cdot 10^{1}.$$

Bunu 5 basamaktan sonra kesersek

$$KN(\pi) = 0{,}31416 \cdot 10^{1}$$

bulunur. Kısa yoldan: altıncı basamak $d_6 = 9 \geq 5$ olduğundan beşinci basamak 5'ten 6'ya çıkar. Mutlak hata $\mid \pi - 3{,}1416 \mid \approx 0{,}0000073$, bağıl hata yaklaşık $0{,}23 \cdot 10^{-5}$'tir; yuvarlama kesmeden yaklaşık on üç kat daha iyi sonuç verdi.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.4: π yakınındaki sayıların 5-basamak kesme (mavi) ve 5-basamak yuvarlama (turuncu) ile bulunan $KN(y)$ değerleri. Basamakların sol ucu dahil, sağ ucu hariçtir; kesikli köşegen $KN(y) = y$ doğrusudur. Kesme basamakları köşegenin hep altında kalır, yuvarlama basamakları köşegeni ortalar. $y = \pi$ doğrusu kesmede 3,1415, yuvarlamada 3,1416 değerini verir.

Gerçek hesaplarda yalnız sayılar değil, her işlemin sonucu da k basamağa indirilir.

Tanım 2.9 (k-Basamak Kesme ve Yuvarlama Aritmetiği). Bir ifadenin hesabında her sayının ve her ara işlem sonucunun yerine onun k-basamak kesmeyle bulunan KN formu kullanılırsa hesap **k-basamak kesme aritmetiğiyle**, k-basamak yuvarlamayla bulunan KN formu kullanılırsa **k-basamak yuvarlama aritmetiğiyle** yapılmış olur.

Yani makine yalnız sonucu değil, yolda bulduğu her ara değeri de k basamağa indirir; bu yüzden ara adımların hataları sonuca taşınır ve birikebilir.

Üç adımda k-basamak aritmetiğiyle hesap

1. **Girdileri indir.** İfadedeki her sayıyı normalize forma getirip KN formunu al ($\frac{1}{3} \to 0{,}333$ gibi).
2. **İşlemleri sırayla yap.** İşlem önceliğine göre her işlemi yap ve sonucu hemen KN formuna indir; bir sonraki işleme bu indirilmiş değerle geç.
3. **Hatayı ölç.** Gerçek değer biliniyorsa son sonucun mutlak ve bağıl hatasını hesapla.

Örnek 2.7 (Üç-Basamak Kesme Aritmetiğiyle Bir Kesir Hesabı). $\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{11}\right) - \frac{3}{20}$ işleminin gerçek değerini bulunuz. İşlemi 3-basamak kesme aritmetiğiyle yapıp yaklaşık değeri ve bu değerin bağıl hatasını hesaplayınız.

Çözüm.
Gerçek değer.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{11}\right)-\frac{3}{20}=\frac{11+9}{33}-\frac{3}{20}=\frac{400-99}{660}=\frac{301}{660}=0{,}4560606\ldots$$

Girdiler. $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots\to 0{,}333$, $\frac{3}{11}=0{,}2727\ldots\to 0{,}272$ ve $\frac{3}{20}=0{,}15\to 0{,}150$.
İşlemler. $0{,}333+0{,}272=0{,}605$ ve $0{,}605-0{,}150=0{,}455$; ikisi de zaten üç basamaklıdır. Yaklaşık değer $0{,}455$'tir.
Bağıl hata.

$$\left|\frac{\frac{301}{660}-0{,}455}{\frac{301}{660}}\right|=\frac{301-300{,}3}{301}=\frac{0{,}7}{301}=\frac{1}{430}\approx 0{,}002325581.$$

■

Örnek 2.8 (Üç-Basamak Yuvarlama Aritmetiğiyle Bir Kesir Hesabı). $\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{11}\right)-\frac{3}{20}$ işlemini 3-basamak yuvarlama aritmetiğiyle yapıp yaklaşık değeri ve bu değerin bağıl hatasını hesaplayınız. (Gerçek değer $\frac{301}{660}$'dır.)

Çözüm.
Girdiler. $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots\to 0{,}333$; $\frac{3}{11}=0{,}2727\ldots$ sayısının dördüncü basamağı $7\geq 5$ olduğundan $\frac{3}{11}\to 0{,}273$; $\frac{3}{20}\to 0{,}150$.
İşlemler. $0{,}333+0{,}273=0{,}606$ ve $0{,}606-0{,}150=0{,}456$. Yaklaşık değer $0{,}456$'dır.
Bağıl hata.

$$\left|\frac{\frac{301}{660}-0{,}456}{\frac{301}{660}}\right|=\frac{301-300{,}96}{301}=\frac{0{,}04}{301}=\frac{1}{7525}\approx 0{,}00013289.$$

Yuvarlama aritmetiğinin bağıl hatası kesmeninkinin yaklaşık on yedide biridir. ■

Bir sayıyı saklarken yapılan bağıl hata yalnız k'ya bağlı bir sayıyla sınırlıdır; işlemler art arda yapıldığında ise bu hatalar birikebilir.

Önerme 2.2 (Kesme ve Yuvarlamada Bağıl Hata Sınırı). *$y\neq 0$ bir reel sayı ve $KN(y)$ onun k basamaklı kayan nokta formu olsun.*

- *$KN(y)$ k-basamak kesmeyle bulunmuşsa* $\left|\dfrac{y-KN(y)}{y}\right|\leq 10^{-k+1}$ *olur.*
- *$KN(y)$ k-basamak yuvarlamayla bulunmuşsa* $\left|\dfrac{y-KN(y)}{y}\right|\leq 0{,}5\cdot 10^{-k+1}$ *olur.*

İspat.
İşaret iki yanda da aynı kaldığından $y>0$ almak yeterlidir. $y=0{,}d_1d_2\ldots d_kd_{k+1}\ldots\cdot 10^n$ olsun.
Payda. *$d_1\geq 1$ olduğundan $y=0{,}d_1d_2\ldots\cdot 10^n\geq 0{,}1\cdot 10^n$ olur.*
Atılan kısım. *y'yi ilk k basamak ve geri kalan olarak ayıralım:*

$$y=\left(0{,}d_1d_2\ldots d_k+0{,}\underbrace{0\ldots0}_{k}d_{k+1}d_{k+2}\ldots\right)\cdot 10^n.$$

İkinci terim $0{,}d_{k+1}d_{k+2}\ldots\cdot 10^{n-k}$'ya eşittir.
Kesme. *$KN(y)=0{,}d_1\ldots d_k\cdot 10^n$ olduğundan*

$$\left|\frac{y-KN(y)}{y}\right|=\frac{0{,}d_{k+1}d_{k+2}\ldots\cdot 10^{n-k}}{0{,}d_1d_2\ldots\cdot 10^n}\leq\frac{1\cdot 10^{n-k}}{0{,}1\cdot 10^n}=10^{-k+1}$$

olur, çünkü $0{,}d_{k+1}d_{k+2}\ldots\leq 1$'dir.
Yuvarlama, $d_{k+1}<5$ durumu. *Aşağı yuvarlama yapılır ve $KN(y)$ kesmedeki ile aynıdır. Bu kez $d_{k+1}\leq 4$ olduğundan $0{,}d_{k+1}d_{k+2}\ldots\leq 0{,}5$'tir:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\frac{y - KN(y)}{y}\right| = \frac{0{,}d_{k+1}d_{k+2}... \cdot 10^{n-k}}{0{,}d_1d_2... \cdot 10^n} \leq \frac{0{,}5 \cdot 10^{n-k}}{0{,}1 \cdot 10^n} = 0{,}5 \cdot 10^{-k+1}.$$

Yuvarlama, $d_{k+1} \geq 5$ durumu. *Yukarı yuvarlama yapılır: k-ıncı basamağa 1 eklenir, yani*

$$KN(y) = \left(0{,}d_1d_2...d_k + 10^{-k}\right) \cdot 10^n$$

olur (elde oluşsa da bu eşitlik sayı değeri olarak doğrudur). Bu durumda $KN(y) > y$ ve

$$\begin{aligned} \mid KN(y) - y \mid &= \left(1 \cdot 10^{-k} - 0{,}d_{k+1}d_{k+2}... \cdot 10^{-k}\right) \cdot 10^n \\ &= \left(1 - 0{,}d_{k+1}d_{k+2}...\right) \cdot 10^{n-k} \end{aligned}$$

olur. $d_{k+1} \geq 5$ olduğundan $0{,}d_{k+1}d_{k+2}... \geq 0{,}5$, dolayısıyla $1 - 0{,}d_{k+1}d_{k+2}... \leq 0{,}5$'tir. Buradan

$$\left|\frac{y - KN(y)}{y}\right| = \frac{\left(1 - 0{,}d_{k+1}d_{k+2}...\right) \cdot 10^{n-k}}{0{,}d_1d_2... \cdot 10^n} \leq \frac{0{,}5 \cdot 10^{n-k}}{0{,}1 \cdot 10^n} = 0{,}5 \cdot 10^{-k+1}$$

bulunur. ■

Yani k basamakla çalışan bir makinede tek bir sayıyı saklamanın bağıl hatası, sayının büyüklüğünden bağımsız olarak, kesmede 10^{-k+1}'i, yuvarlamada bunun yarısını aşmaz. Örneğin π'nin 5-basamak kesmesinde bağıl hata $0{,}29 \cdot 10^{-4} \leq 10^{-4}$, 5-basamak yuvarlamasında $0{,}23 \cdot 10^{-5} \leq 0{,}5 \cdot 10^{-4}$'tür. Sınır tek bir sayı içindir; art arda yapılan işlemlerde hatalar birikir ve bu sınır aşılabilir.

2.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar mutlak ve bağıl hatayı, k-basamak aritmetiğini ve seri yaklaşımlarının hatasını birlikte kullanır.

Alıştırma 2.1 (Bağıl Hatası Sınırlı Yaklaşımlar). p^* sayısının $\sqrt{2}$'ye en fazla 10^{-4} bağıl hata ile yaklaştığı en geniş aralığı bulunuz.

Çözüm.
Koşulu yazalım. Tanım 2.4 gereği istenen koşul

$$\frac{\mid p^* - \sqrt{2} \mid}{\mid \sqrt{2} \mid} \leq 10^{-4}$$

eşitsizliğidir.
Mutlak değeri açalım. $\sqrt{2} > 0$ olduğundan iki yanı $\sqrt{2}$ ile çarparız:

$$\begin{aligned} \mid p^* - \sqrt{2} \mid \leq \sqrt{2} \cdot 10^{-4} &\Leftrightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot 10^{-4} \leq p^* \leq \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 10^{-4} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}\,(1 - 0{,}0001) \leq p^* \leq \sqrt{2}\,(1 + 0{,}0001). \end{aligned}$$

Aralık. Aranan en geniş aralık

$$\left[0{,}9999\sqrt{2};\, 1{,}0001\sqrt{2}\right] \approx [1{,}4140721;\, 1{,}4143550]$$

olur. ■

Alıştırma 2.2 (Üç-Basamak Yuvarlama Aritmetiğiyle Bir Oran).

$$\frac{\frac{13}{14} - \frac{6}{7}}{2e - 5{,}4}$$

kesrinin değerini üç-basamak yuvarlama aritmetiği kullanarak hesaplayınız. Kesrin gerçek değeri yaklaşık olarak $1{,}954$ olduğuna göre hesaptaki mutlak ve bağıl hataları bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Pay. $\frac{13}{14} = 0{,}92857\ldots \to 0{,}929$ ve $\frac{6}{7} = 0{,}85714\ldots \to 0{,}857$ olduğundan

$$\frac{13}{14} - \frac{6}{7} \approx 0{,}929 - 0{,}857 = 0{,}072 = 0{,}720 \cdot 10^{-1}.$$

Payda. $e = 2{,}71828\ldots$ sayısı $0{,}272 \cdot 10^{1} = 2{,}72$ olarak alınır ve

$$2e - 5{,}4 \approx 2 \cdot 2{,}72 - 5{,}40 = 5{,}44 - 5{,}40 = 0{,}0400 = 0{,}400 \cdot 10^{-1}.$$

Kesir.

$$\frac{0{,}720 \cdot 10^{-1}}{0{,}400 \cdot 10^{-1}} = 1{,}80 = 0{,}180 \cdot 10^{1}.$$

Hatalar. Mutlak hata

$$\mid 1{,}80 - 1{,}954 \mid = 0{,}154,$$

bağıl hata

$$\frac{\mid 1{,}80 - 1{,}954 \mid}{\mid 1{,}954 \mid} = \frac{0{,}154}{1{,}954} \approx 0{,}0788 = 0{,}788 \cdot 10^{-1}$$

bulunur. Bağıl hata yaklaşık yüzde 8'dir; paydada birbirine çok yakın $5{,}44$ ve $5{,}40$ sayılarının farkı alındığı için üç basamaklık hassasiyetin çoğu kaybolmuştur. ■

Alıştırma 2.3 (Arktanjant Serisiyle π Yaklaşımı). $\pi = 4\big(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\big)$ eşitliği ile verilen π sayısına, $\arctan x$ fonksiyonunun Maclaurin serisinin ilk üç terimini kullanarak yaklaşımda bulununuz; oluşan mutlak ve bağıl hataları hesaplayınız. İşlemlerde virgülden sonra 7. basamağa yuvarlayınız.

Çözüm.
Eşitlik. $a = \arctan\frac{1}{2}$ ve $b = \arctan\frac{1}{3}$ olsun. Tanjantın toplam formülüyle

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$$

olur. $a, b \in \big(0, \frac{\pi}{4}\big)$ olduğundan $a + b \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$'dir ve $a + b = \frac{\pi}{4}$ bulunur.
Yaklaşım polinomu. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ serisinin (bkz. Analiz 2) ilk üç terimi

$$p(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

polinomudur ve $\pi \approx 4\big(p\big(\frac{1}{2}\big) + p\big(\frac{1}{3}\big)\big)$ alınır.
Polinom değerleri.

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160} = \frac{223}{480} \approx 0{,}4645833,$$
$$p\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} = \frac{391}{1215} \approx 0{,}3218107.$$

Yaklaşık değer.

$$\pi \approx 4\,(0{,}4645833 + 0{,}3218107) = 4 \cdot 0{,}7863940 = 3{,}1455760.$$

Hatalar. Mutlak hata

$$\mid \pi - 3{,}1455760 \mid \approx 0{,}0039833,$$

bağıl hata

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{|\,\pi - 3{,}1455760\,|}{|\,\pi\,|} \approx 0{,}0012679$$

bulunur. Buradaki hatanın büyük kısmı kesme hatasıdır: serinin dördüncü ve sonraki terimleri atılmıştır. ■

Sonraki üç alıştırma aynı fonksiyonu kullanır:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}.$$

Alıştırma 2.4 (Bir Bölümün Sıfırdaki Limiti). $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ olsun. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ limitini bulunuz.

Çözüm.
Belirsizlik. $x \to 0$ iken pay $e^0 - e^0 = 0$'a, payda 0'a gider; limit $\frac{0}{0}$ belirsizliğidir.
L'Hôpital Kuralı. Pay ve paydanın türevlerini alırız (bkz. Analiz 2):

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} = 1 + 1 = 2.$$

■

Alıştırma 2.5 (Doğrudan Hesapta Üç-Basamak Yuvarlama). $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ olsun. Üç-basamak yuvarlama aritmetiği kullanarak $f(0{,}1)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm.
Üsteller. $e^{0{,}100} = 1{,}10517\ldots$ sayısının dördüncü basamağı 5 olduğundan $e^{0{,}100} \to 0{,}111 \cdot 10^1 = 1{,}11$; $e^{-0{,}100} = 0{,}904837\ldots \to 0{,}905$.
Fark ve bölüm.

$$f(0{,}1) \approx \frac{1{,}11 - 0{,}905}{0{,}100} = \frac{0{,}205}{0{,}100} = 2{,}05 = 0{,}205 \cdot 10^1.$$

Yani $f(0{,}1) \approx 2{,}05$ bulunur. Gerçek değer $f(0{,}1) = 2{,}003335\ldots$ olduğundan bağıl hata yaklaşık $0{,}023$'tür. ■

Alıştırma 2.6 (Maclaurin Polinomuyla Üç-Basamak Yuvarlama). $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ olsun. e^x için 3. mertebeden Maclaurin polinomunu kullanarak üç-basamak yuvarlama aritmetiği yardımıyla $f(0{,}1)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm.
Polinomlar. 3. mertebeden Maclaurin polinomuyla

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \qquad e^{-x} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

olur.
Sadeleştirme. Farkta çift dereceli terimler birbirini götürür:

$$f(x) \approx \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)}{x} = \frac{2x + \frac{x^3}{3}}{x} = 2 + \frac{x^2}{3}.$$

Hesap. $(0{,}100)^2 = 0{,}0100$ ve $\frac{0{,}0100}{3} = 0{,}00333\ldots \to 0{,}00333$ olduğundan

$$f(0{,}1) \approx 2 + 0{,}00333 = 2{,}00333 \to 0{,}200 \cdot 10^1 = 2{,}00$$

bulunur. Gerçek değer $2{,}003335\ldots$ olduğundan bağıl hata yaklaşık $0{,}0017$'dir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani doğrudan hesaptaki (Alıştırma 2.5) büyük hata yöntemden değil, birbirine çok yakın 1,11 ve 0,905 sayılarının farkından gelir: baştaki basamaklar birbirini götürür ve geriye yuvarlama hatalarıyla dolu birkaç basamak kalır (**anlamlı basamak kaybı**). İfadeyi önce $2 + \frac{x^2}{3}$ biçimine getirmek bu çıkarmayı ortadan kaldırır ve üç basamakla bile on dört kat daha doğru sonuç verir.

Hataların bir algoritma boyunca nasıl büyüdüğünü ve bir dizinin limitine ne hızla yaklaştığını ölçmek bir sonraki bölümün konusudur: Algoritmalar ve Yakınsama Hızı.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. Algoritmalar ve Yakınsama Hızı

Nümerik bir yöntem, bir problemin çözümüne adım adım yaklaşan bir algoritmadır. Her adımda yapılan işlemler makinede yuvarlanır; bu yüzden iki soru öne çıkar. Birincisi, küçük bir yuvarlama hatası sonraki adımlarda büyüyüp sonucu bozuyor mu? İkincisi, algoritmanın ürettiği yaklaşımlar gerçek değere ne kadar hızlı yaklaşıyor?
Bu bölümde ilk soru için hata büyümesini lineer ve üstel diye ikiye ayırıyoruz. İkinci soru için de O gösterimini kuruyoruz: $y_n = y_0 + O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ ve $f(h) = L + O(h^p)$. Sonraki bölümlerdeki her yöntemi bu dille karşılaştıracağız.

3.1 Algoritmalar ve Kararlılık

Önce algoritmanın ne olduğunu ve iyi bir algoritmadan ne beklediğimizi belirleyelim.

Tanım 3.1 (Algoritma). Belirli bir sırayla uygulanacak adımların sonlu bir dizisini kesin biçimde tarif eden yönteme **algoritma** denir.

Yani algoritma, ne yapılacağı her adımda açıkça belli olan ve sonlu sayıda adımda biten bir tariftir. Bu kitaptaki algoritmaların amacı bir problemin çözümüne (bir köke, bir integralin değerine, bir fonksiyonun değerine) yaklaşımda bulunmaktır.

Tanım 3.2 (Kararlı Algoritma). Girdideki küçük değişiklikler çıktıda da yalnız küçük değişikliklere yol açıyorsa algoritmaya **kararlı algoritma** denir.

Yani kararlı bir algoritmada girdilerin makinede yuvarlanmasından doğan küçük hatalar (Tanım 2.8) sonucu bozmaz. Bir algoritmanın kararlı olup olmadığını, hatanın adım sayısıyla nasıl büyüdüğüne bakarak anlarız.

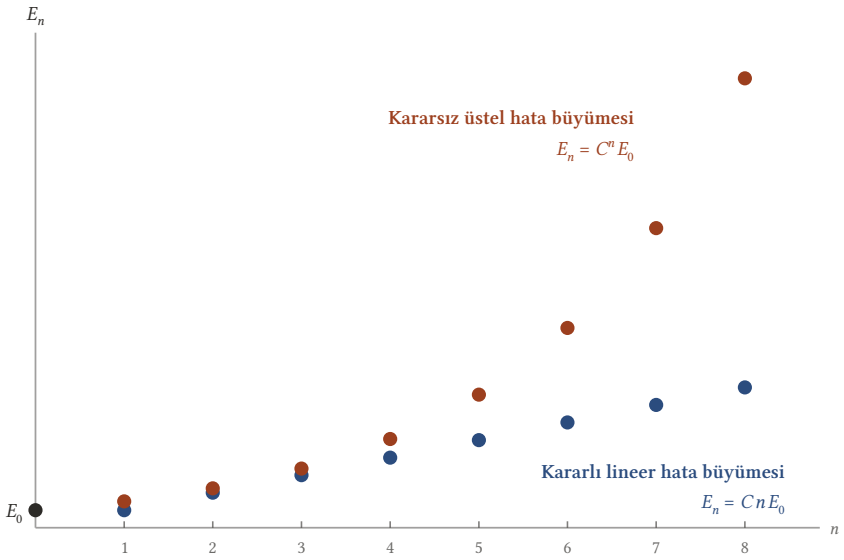
Tanım 3.3 (Lineer ve Üstel Hata Büyümesi). Bir hesabın herhangi bir adımında ilk ortaya çıkan hata $E_0 > 0$, bu adımı izleyen n adımdan sonraki hatanın büyüklüğü E_n olsun. C, n'den bağımsız bir sabit olmak üzere

1. $E_n \approx C \cdot n \cdot E_0$ ise hatanın büyümesi **lineerdir**,
2. $C > 1$ ve $E_n \approx C^n E_0$ ise hatanın büyümesi **üsteldir**

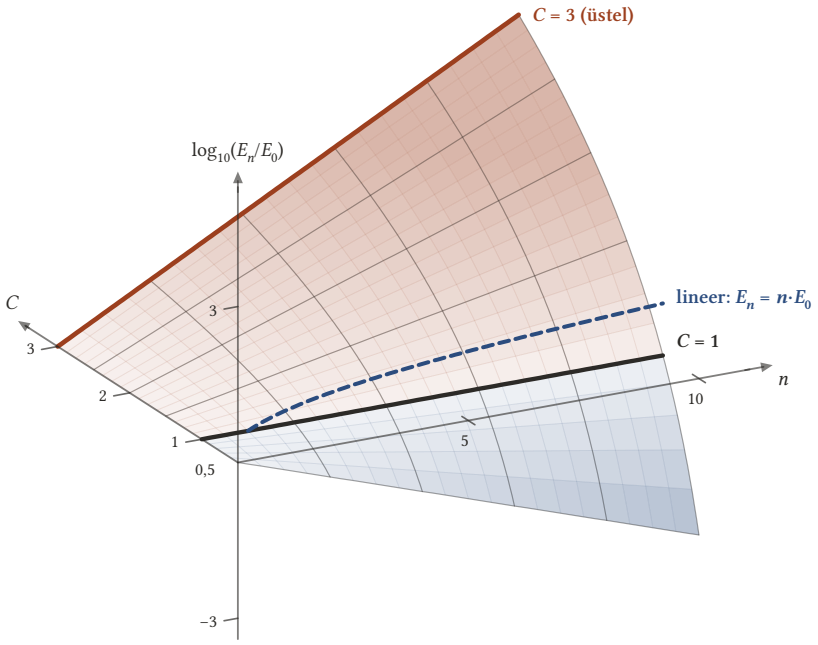
denir. Hata büyümesi lineer olan yaklaşıma **kararlı hata büyümesine sahip**, üstel olan yaklaşıma **kararsız hata büyümesine sahip** yaklaşım denir.

Yani lineer büyümede 100 adım sonra hata ilk hatanın yaklaşık $100\,C$ katıdır; üstel büyümede ise C^{100} katıdır. $C = 3$ için bu $3^{100} \approx 5 \cdot 10^{47}$ eder. Bu yüzden hata büyümesi lineer olan bir algoritmayla yaklaşımda bulunmak genellikle kabul edilebilirdir; hata büyümesi üstel olan algoritmalardan kaçınılır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.1: İlk hata E_0 olmak üzere $n = 1, 2, \ldots, 8$ adım sonraki hatalar. Mavi noktalar lineer büyüme $E_n = C\,n\,E_0$ ($C = 1$), kırmızı noktalar üstel büyüme $E_n = C^n E_0$ ($C = 1{,}5$) içindir. İlk adımlarda iki hata birbirine yakındır; $n = 8$'de lineer hata $8\,E_0$, üstel hata yaklaşık $25{,}6\,E_0$ olur.



Şekil 3.2: $z = \log_{10}(E_n/E_0) = n\log_{10} C$ yüzeyi ($0 \le n \le 10$, $0{,}5 \le C \le 3$). Mavi bölgede ($C < 1$) hata söner, kırmızı bölgede ($C > 1$) üstel olarak büyür; $C = 1$ kesitinde yüzey düzdür. Kırmızı kalın eğri $C = 3$ kesitidir, kesikli mavi eğri ise lineer büyüme $E_n = n\,E_0$ için $\log_{10} n$ değeridir. Yüzeyin arkasında kalan çizgiler soluk çizilmiştir.

3.2 Üstel ve Lineer Hata Büyümesine Örnekler

Aşağıdaki iki örnekte başlangıç değerindeki 10^{-5} mertebesinde tek bir yuvarlama hatasının izini sürüyoruz. Birinci örnekte hata her adımda üç katına çıkar, ikincisinde ise yalnız adım sayısıyla orantılı büyür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 3.1 (İndirgeme bağıntısının çözümü). c_1 ve c_2 reel sabitler olmak üzere $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi $n = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$p_n = c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2\, 3^n$$

ile tanımlansın. Bu dizinin $n = 2, 3, \ldots$ için

$$p_n = \frac{10}{3}\, p_{n-1} - p_{n-2} \tag{1}$$

indirgeme bağıntısının bir çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
p_{n-1} ve p_{n-2}'yi (1)'in sağ tarafında yerine yazıp ortak çarpanları ayıralım:

$$\begin{aligned}
\frac{10}{3}\, p_{n-1} - p_{n-2} &= \frac{10}{3}\left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + c_2\, 3^{n-1}\right] \\
&\quad - \left[c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + c_2\, 3^{n-2}\right] \\
&= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3} - 1\right) \\
&\quad + c_2\, 3^{n-2}\left(\frac{10}{3}\cdot 3 - 1\right) \\
&= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\cdot\frac{1}{9} + c_2\, 3^{n-2}\cdot 9 \\
&= c_1\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + c_2\, 3^{n} = p_n.
\end{aligned}$$

Demek ki c_1 ve c_2 ne olursa olsun (p_n) dizisi (1) bağıntısını sağlar. ■

Örnek 3.2 (Başlangıç değerlerinden sabitler). $p_n = c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2\, 3^n$ dizisinde $p_0 = 1$ ve $p_1 = \frac{1}{3}$ verilirse c_1 ve c_2 sabitleri ne olur?

Çözüm.
$n = 0$ ve $n = 1$ yazalım:

$$\begin{aligned}
p_0 = 1 &\Longrightarrow c_1 + c_2 = 1, \\
p_1 = \frac{1}{3} &\Longrightarrow \frac{1}{3}\, c_1 + 3c_2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow c_1 + 9c_2 = 1.
\end{aligned}$$

İkinci denklemden birinciyi çıkarırsak $8c_2 = 0$, yani $c_2 = 0$ ve $c_1 = 1$ bulunur. Bu sabitlerle dizi

$$p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

olur ve $n \to \infty$ iken sıfıra yakınsar. ■

Örnek 3.3 (Beş-basamak yuvarlamada hatanın büyümesi). $p_n = c_1\left(\frac{1}{3}\right)^n + c_2\, 3^n$ dizisinde $p_0 = 1$ ve $p_1 = \frac{1}{3}$ başlangıç değerleri beş-basamak yuvarlama aritmetiğiyle (Tanım 2.8) gösterilsin ve c_1, c_2 sabitleri bu değerlerden bulunsun. Dizi (1) bağıntısıyla hesaplandığında oluşan hatanın karakteristiğini araştırınız.

Çözüm.
Başlangıç değerleri. Beş-basamak yuvarlamayla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$p_0^* = 0{,}10000 \cdot 10^1, \qquad p_1^* = 0{,}33333$$

olur. Yalnız p_1 yuvarlanmıştır; $|p_1 - p_1^*| = \frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$.
Sabitler. $n = 0$ için $c_1^* + c_2^* = 0{,}10000 \cdot 10^1$, yani $c_1^* = 1 - c_2^*$. Bunu $n = 1$ denkleminde kullanalım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\,c_1^* + 3c_2^* = 0{,}33333 &\Longrightarrow \frac{1}{3}(1 - c_2^*) + 3c_2^* = 0{,}33333 \\ &\Longrightarrow \frac{8}{3}\,c_2^* = 0{,}33333 - \frac{1}{3} = -0{,}33333 \cdot 10^{-5} \\ &\Longrightarrow c_2^* = -0{,}12500 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

Buradan $c_1^* = 1 + 0{,}12500 \cdot 10^{-5}$, yani $c_1^* = 1{,}00000125$ bulunur; beş basamağa yuvarlanınca $c_1^* = 0{,}10000 \cdot 10^1$ olur. Böylece

$$p_n^* = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 0{,}12500 \cdot 10^{-5} \cdot 3^n.$$

Bu biçimdeki her dizi (1)'i sağlar (bkz. Örnek 3.1). Bu dizi $n = 0$'da $1 - 0{,}125 \cdot 10^{-5}$ verir; beş basamakta bu yine $0{,}10000 \cdot 10^1 = p_0^*$ demektir. Dolayısıyla (1) bağıntısını p_0^* ve p_1^*'dan başlatırsak (ara işlemlerdeki yeni yuvarlamaları bir yana bırakırsak) beş basamak duyarlığında bu diziyi üretiriz. Gerçek çözümde sıfır olan 3^n katsayısı, yuvarlama yüzünden sıfır olmayan küçük bir c_2^* değeri almıştır.
Hatanın büyümesi. Mutlak hata

$$\begin{aligned} E_n = |p_n - p_n^*| &= \left| \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + 0{,}12500 \cdot 10^{-5} \cdot 3^n \right| \\ &= 0{,}12500 \cdot 10^{-5} \cdot 3^n \end{aligned}$$

olur. Bu, $E_n \approx C^n E_0$ biçimidir (Tanım 3.3): $C = 3 > 1$ ve $E_0 = 0{,}12500 \cdot 10^{-5}$. Burada E_0, 3^n çarpanının önündeki sabittir; başlangıçtaki $\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$ yuvarlama hatasıyla aynı mertebededir. Demek ki (p_n^*) dizisiyle (p_n) dizisine yaklaşım **üstel hata büyümesine** sahiptir; bu yaklaşım kararsızdır.
Tablo. Aşağıdaki tabloda p_n^* değerleri (1) bağıntısından, $\frac{10}{3}$ yerine $0{,}33333 \cdot 10^1$ alınarak ve her çarpma ile her çıkarmanın sonucu beş basamağa yuvarlanarak hesaplanmıştır. Gerçek $p_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ değerleri de beş basamakla verilmiş, mutlak ve bağıl hatalar (Tanım 2.4) bu beş basamaklı değerlerden hesaplanmıştır; bu yüzden $n = 0$ ve $n = 1$ satırlarında hata 0 görünür.

n	Hesaplanan p_n^*	Gerçek p_n	Bağıl Hata	Mutlak Hata
0	$0{,}10000 \cdot 10^1$	$0{,}10000 \cdot 10^1$	0	0
1	0,33333	0,33333	0	0
2	0,11110	0,11111	$0{,}90001 \cdot 10^{-4}$	$0{,}10000 \cdot 10^{-4}$
3	$0{,}37000 \cdot 10^{-1}$	$0{,}37037 \cdot 10^{-1}$	$0{,}99900 \cdot 10^{-3}$	$0{,}37000 \cdot 10^{-4}$
4	$0{,}12230 \cdot 10^{-1}$	$0{,}12346 \cdot 10^{-1}$	$0{,}93958 \cdot 10^{-2}$	$0{,}11600 \cdot 10^{-3}$
5	$0{,}37660 \cdot 10^{-2}$	$0{,}41152 \cdot 10^{-2}$	$0{,}84856 \cdot 10^{-1}$	$0{,}34920 \cdot 10^{-3}$
6	$0{,}32300 \cdot 10^{-3}$	$0{,}13717 \cdot 10^{-2}$	0,76453	$0{,}10487 \cdot 10^{-2}$
7	$-0{,}26893 \cdot 10^{-2}$	$0{,}45725 \cdot 10^{-3}$	$0{,}68815 \cdot 10^{1}$	$0{,}31466 \cdot 10^{-2}$
8	$-0{,}92872 \cdot 10^{-2}$	$0{,}15242 \cdot 10^{-3}$	$0{,}61932 \cdot 10^{2}$	$0{,}94396 \cdot 10^{-2}$

Mutlak hata her adımda yaklaşık üç katına çıkıyor ($0{,}10487 \cdot 10^{-2}$, $0{,}31466 \cdot 10^{-2}$, $0{,}94396 \cdot 10^{-2}$); bu, 3^n çarpanının tahmin ettiği davranıştır. Gerçek değerler sıfıra giderken hesaplanan değerler $n = 7$'den itibaren negatife düşer ve $n = 8$'de bağıl hata 60'ı aşar. ■

Aynı başlangıç değerleriyle bu kez çözümleri n'ye göre doğrusal olan bir bağıntıya bakalım.

Örnek 3.4 (Lineer hata büyümesi). $c_1 + c_2 n$ biçimindeki diziler $n \geq 2$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$p_n = 2\,p_{n-1} - p_{n-2} \tag{2}$$

bağıntısını sağlar. $p_0 = 1$ ve $p_1 = \frac{1}{3}$ başlangıç değerleri beş-basamak yuvarlamayla gösterilip c_1, c_2 bu değerlerden bulunursa hata nasıl büyür?

Çözüm.
Çözüm olduğu. $p_n = c_1 + c_2 n$ için

$$2[c_1 + c_2(n-1)] - [c_1 + c_2(n-2)] = c_1 + c_2 n = p_n.$$

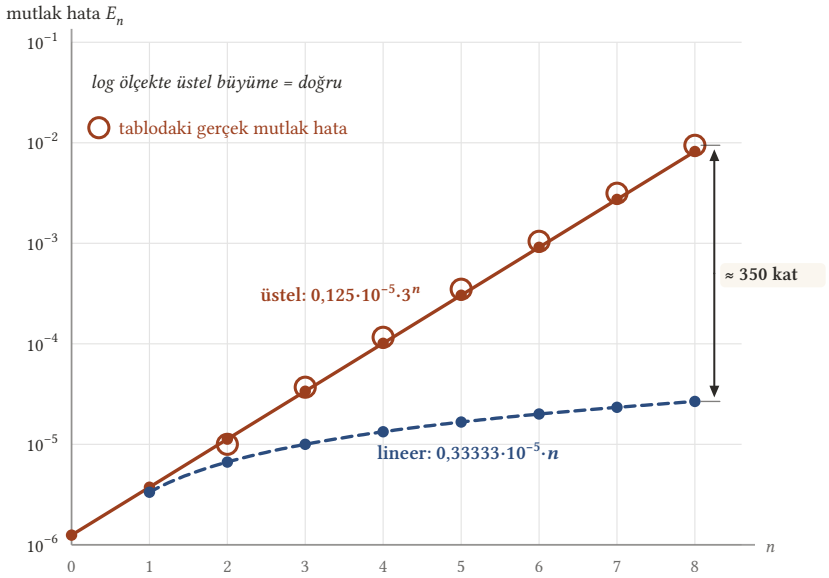
Gerçek sabitler. $p_0 = 1$ ile $c_1 = 1$, $p_1 = \frac{1}{3}$ ile $c_2 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ bulunur; $p_n = 1 - \frac{2}{3}n$.
Beş-basamak sabitler. $p_0^* = 0{,}10000 \cdot 10^1$ ve $p_1^* = 0{,}33333$ ile

$$c_1^* = 0{,}10000 \cdot 10^1, \qquad c_2^* = 0{,}33333 - 1 = -0{,}66667$$

olur; $p_n^* = 1 - 0{,}66667\,n$.
Hatanın büyümesi.

$$E_n = |p_n - p_n^*| = \left|0{,}66667 - \frac{2}{3}\right| n \approx 0{,}33333 \cdot 10^{-5} \cdot n.$$

Bu, $E_n \approx C \cdot n \cdot E_0$ biçimidir (Tanım 3.3; $C = 1$, $E_0 = 0{,}33333 \cdot 10^{-5}$). Hata büyümesi lineerdir, yaklaşım kararlıdır.
Karşılaştıralım: $n = 8$'de buradaki hata yaklaşık $0{,}26667 \cdot 10^{-4}$'tür; üstel örnekteki (Örnek 3.3) mutlak hata ise $0{,}94396 \cdot 10^{-2}$, yani yaklaşık 350 kat büyüktür. Başlangıçtaki yuvarlama hatası iki örnekte de aynı mertebededir; farkı yaratan, bağıntının hatayı nasıl taşıdığıdır.



Şekil 3.3: Logaritmik eksende iki hata büyümesi. Kırmızı doğru üstel büyüme $E_n = 0{,}125{\cdot}10^{-5}{\cdot}3^n$, içi boş daireler tablodaki beş-basamak hesabın gerçek mutlak hatalarıdır; kesikli mavi eğri lineer büyüme $E_n = 0{,}33333{\cdot}10^{-5}{\cdot}n$'dir. $n = 8$'de tablodaki hata lineer hatanın yaklaşık 350 katıdır.

■

3.3 Dizilerde Yakınsama Hızı

Bir algoritma çoğu zaman bir yaklaşımlar dizisi üretir. Dizinin yakınsaması yetmez; iki algoritmayı karşılaştırmak için dizinin limitine **ne kadar hızlı** yaklaştığını da ölçmek isteriz. Bunu, hızı bilinen bir sıfır dizisiyle karşılaştırarak yaparız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 3.4 (Dizilerde Yakınsama Hızı). $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi sıfıra ($x_n \to 0$), (y_n) dizisi de bir y_0 sayısına ($y_n \to y_0$) yakınsasın. Yeterince büyük n değerleri için

$$|y_n - y_0| \leq K|x_n|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sayısı varsa $y_n \to y_0$ yakınsaması $\boldsymbol{O(x_n)}$ **hızındadır** denir ve $y_n = y_0 + O(x_n)$ yazılır.

Yani y_n ile limiti arasındaki fark, sabit bir çarpan dışında, en az x_n kadar hızlı küçülür. Bu kitapta karşılaştırma dizisi olarak $p > 0$ için $x_n = \frac{1}{n^p}$ biçimindeki dizileri alıyoruz ve eşitsizliğin sağlandığı **en büyük** p'yi arıyoruz:

$$y_n = y_0 + O\Big(\frac{1}{n^p}\Big).$$

p ne kadar büyükse yakınsama o kadar hızlıdır.

Örnek 3.5 (İki dizinin hızını karşılaştırma). $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$ ve $b_n = \dfrac{n+3}{n^3}$ dizilerinin yakınsama hızlarını karşılaştırınız.

Çözüm.
İki dizi de sıfıra yakınsar. Paydaki sabitleri n ile üstten sınırlayalım. $n \geq 1$ için $1 \leq n$ olduğundan

$$|a_n - 0| = \frac{n+1}{n^2} \leq \frac{n+n}{n^2} = \frac{2n}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n},$$

yani $a_n = 0 + O(\frac{1}{n})$. Benzer biçimde $3 \leq 3n$ olduğundan

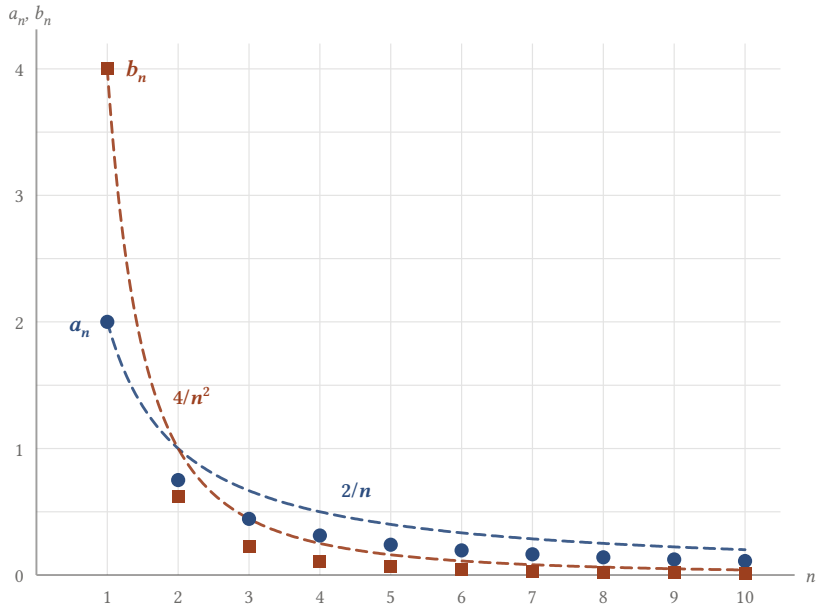
$$|b_n - 0| = \frac{n+3}{n^3} \leq \frac{n+3n}{n^3} = \frac{4n}{n^3} = 4 \cdot \frac{1}{n^2},$$

yani $b_n = 0 + O(\frac{1}{n^2})$.
Bu üsler en büyüktür: $a_n \geq \frac{1}{n}$ olduğundan $p > 1$ için $n^p a_n \geq n^{p-1} \to \infty$ ve hiçbir K yetmez; aynı nedenle $b_n \geq \frac{1}{n^2}$ olduğundan b_n için $p = 2$'den büyük üs alınamaz.
Demek ki (a_n) dizisi sıfıra $\frac{1}{n}$ hızında, (b_n) dizisi ise $\frac{1}{n^2}$ hızında yakınsar; (b_n) sıfıra (a_n)'den daha hızlı yakınsar. İlk değerler (beş anlamlı basamakla):

n	a_n	b_n
1	2,0000	4,0000
2	0,75000	0,62500
3	0,44444	0,22222
4	0,31250	0,10938
5	0,24000	0,064000
6	0,19444	0,041667
7	0,16327	0,029155

$n = 1$'de b_n daha büyükken $n = 2$'den itibaren a_n'nin gerisinde kalır ve fark hızla açılır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.4: $a_n = (n+1)/n^2$ (mavi daireler) ve $b_n = (n+3)/n^3$ (kırmızı kareler) dizilerinin ilk on terimi ile üst sınırları $2/n$ ve $4/n^2$ (kesikli). $n = 1$'de iki dizi de sınırına eşittir; $n \geq 3$ için b_n sıfıra a_n'den çok daha hızlı iner.

■

3.4 Fonksiyonlarda Yakınsama Hızı

Nümerik türev ve integral formüllerinde yaklaşım bir adım uzunluğu h'ye bağlıdır ve $h \to 0$ iken gerçek değere yaklaşır. Bu durumda hızı, h'nin bir kuvvetiyle ölçeriz.

Tanım 3.5 (Fonksiyonlarda Yakınsama Hızı). $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$ ve $\lim_{h\to 0} f(h) = L$ olsun. Yeterince küçük h değerleri için

$$|f(h) - L| \leq K|g(h)|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K > 0$ sayısı varsa $f(h)$ fonksiyonu L sayısına **$O(g(h))$ hızında yakınsar** denir ve $f(h) = L + O(g(h))$ yazılır.

Yani h küçüldükçe $f(h)$ ile L arasındaki fark, sabit bir çarpan dışında, en az $g(h)$ kadar hızlı küçülür. Bu kitapta $p > 0$ için $g(h) = h^p$ biçimindeki fonksiyonları alıyor ve en büyük p'yi arıyoruz: $f(h) = L + O(h^p)$. Örneğin $p = 4$ ise h yarıya indiğinde hata kabaca 16'da birine düşer.

Örnek 3.6 (Kosinüsün Taylor polinomuyla hız). Kosinüs fonksiyonunun $h = 0$ civarındaki 3. mertebeden Taylor polinomunu kullanarak

$$\cos(h) + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4)$$

olduğunu, yani $h \to 0$ iken $\cos(h) + \frac{1}{2}h^2$ fonksiyonunun 1 sayısına h^4 hızında yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm.
cos fonksiyonunun 0'daki türevleri sırasıyla $1, 0, -1, 0$ olduğundan 3. mertebeden Taylor polinomu $P_3(h) = 1 - \frac{1}{2}h^2$'dir. Dördüncü türev yine cos olduğundan Taylor teoremi (Teorem 1.9) gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\cos(h) = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{\cos(\xi(h))}{24}\,h^4$$

olur; burada $\xi(h)$, 0 ile h arasındadır. $|\cos(\xi(h))| \le 1$ olduğundan

$$0 \le \left|\cos(h) + \frac{1}{2}h^2 - 1\right| = \frac{h^4}{24}|\cos(\xi(h))| \le \frac{1}{24}\,h^4.$$

$h \to 0$ iken sağ taraf sıfıra gittiğinden sıkıştırma teoremiyle $\cos(h) + \frac{1}{2}h^2 \to 1$ olur. Bu eşitsizlik, $K = \frac{1}{24}$ ve $g(h) = h^4$ ile Tanım 3.5 koşuludur:

$$\cos(h) + \frac{1}{2}h^2 = 1 + O(h^4).$$

4 en büyük üstür: $\xi(h) \to 0$ olduğundan fark bölü h^4 oranı $\frac{\cos(\xi(h))}{24} \to \frac{1}{24} \neq 0$ olur; bu yüzden $p > 4$ için fark bölü h^p sınırsız büyür. ■

3.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda hata kestirimleri ve O gösterimiyle yakınsama hızları üzerinde çalışıyoruz. $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ serisini Leibniz 1674'te buldu. İlk alıştırma bu serinin π'yi ne kadar yavaş verdiğini gösterir.

Alıştırma 3.1 (Leibniz serisiyle π). $-1 < x \le 1$ için

$$\arctan(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x), \qquad P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} \tag{3}$$

olduğuna göre, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ eşitliğini kullanarak $|4 \cdot P_n(1) - \pi| < 10^{-3}$ eşitsizliğinin sağlanması için n'nin en az kaç olması gerektiğini belirleyiniz.

Çözüm.
Seriyi kuralım. $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ olduğundan $\frac{\pi}{4} = \arctan(1)$, yani

$$\pi = 4\arctan(1) = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right).$$

Hatayı sınırlayalım. $a_k = \frac{1}{2k-1}$ terimleri pozitif, azalan ve sıfıra yakınsaktır. Alterne seriler için hata kestirimine göre kısmi toplamın hatası atılan ilk terimi aşmaz (bkz. Analiz 2):

$$|P_n(1) - \arctan(1)| \le a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Dolayısıyla

$$|4 \cdot P_n(1) - \pi| = 4|P_n(1) - \arctan(1)| \le \frac{4}{2n+1}.$$

***n*'yi bulalım.** Sağ tarafın 10^{-3}'ten küçük olması yeterlidir:

$$\frac{4}{2n+1} < 10^{-3} \Leftrightarrow 4000 < 2n+1 \Leftrightarrow \frac{3999}{2} < n \Leftrightarrow 1999{,}5 < n.$$

Hata kestirimi $n \ge 2000$ terim alındığında istenen hassasiyeti garanti eder.
Kestirim yalnız yeterli bir koşuldur. Doğrudan hesap, gerçek hatanın yaklaşık $\frac{1}{n}$ olduğunu gösterir: $n = 999$'da $1{,}0010 \cdot 10^{-3}$, $n = 1000$'de $0{,}99999975 \cdot 10^{-3}$. Yani hata 10^{-3}'ün altına ilk kez $n = 1000$'de iner. İki durumda da sonuç aynıdır: üç basamak için bile binlerce terim gerekir, bu seri π'yi hesaplamak için çok yavaştır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

John Machin 1706'da $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ formülüyle π'nin 100 basamağını hesapladı. Küçük argümanlarda arctan serisi çok daha hızlı yakınsar.

Alıştırma 3.2 (Machin formülüyle π). $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$ eşitliğini ve $\arctan(x)$'in (3)'teki Maclaurin serisi açılımını kullanarak π sayısına 10^{-3} hassasiyetle yaklaşımda bulunmak için en az kaç terim kullanılmalıdır?

Çözüm.
Seriyi kuralım. Eşitliği 4 ile çarpıp iki arctan'ı da serisine açalım:

$$\pi = 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{5^{2k-1}(2k-1)} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{239^{2k-1}(2k-1)}.$$

İkinci serinin ilk terimi $\frac{4}{239} \approx 0{,}016736$'dır; 10^{-3}'ten büyük olduğu için atılamaz. Bu terimden sonra kalan kısım ise hata kestirimi gereği

$$4 \cdot \frac{1}{239^3 \cdot 3} \approx 0{,}98 \cdot 10^{-7}$$

ile sınırlıdır, yani ihmal edilebilir. Bu yüzden ikinci seriden yalnız ilk terimi alırız ve yaklaşımımız

$$\pi \approx 16\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{5^{2k-1}(2k-1)} - \frac{4}{239}$$

olur. Belirleyici olan, birinci seriden kaç terim gerektiğidir.
Hatayı sınırlayalım. Birinci serinin terimleri $\frac{1}{5^{2k-1}(2k-1)}$ pozitif, azalan ve sıfıra yakınsaktır. Önceki alıştırmadaki kestirimle (Alıştırma 3.1), n terimden sonra kalan kısmın 16 katı

$$16 \cdot \frac{1}{5^{2n+1}(2n+1)}$$

ile sınırlıdır. Bunun 10^{-3}'ten küçük olması gerekir:

$$\frac{16}{5^{2n+1}(2n+1)} < 10^{-3} \Leftrightarrow 16000 < (2n+1)\cdot 5^{2n+1}.$$

***n*'yi bulalım.**

$$\begin{aligned} n=1: &\quad 3\cdot 5^3 = 375 < 16000,\\ n=2: &\quad 5\cdot 5^5 = 15625 < 16000,\\ n=3: &\quad 7\cdot 5^7 = 546875 > 16000. \end{aligned}$$

Eşitsizliğin sağlandığı ilk değer $n = 3$'tür. $n = 3$ için iki kalanın toplamı da $2{,}93 \cdot 10^{-5} + 0{,}98 \cdot 10^{-7} < 10^{-3}$ olur. Demek ki birinci seriden 3 terim, ikinci seriden 1 terim yeterlidir:

$$\begin{aligned} \pi &\approx 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5}\right) - \frac{4}{239}\\ &= 3{,}1583573 - 0{,}0167364 = 3{,}1416209. \end{aligned}$$

Gerçek hata $|\pi - 3{,}1416209| \approx 2{,}8 \cdot 10^{-5}$'tir. $n = 2$'de kestirim $1{,}024 \cdot 10^{-3}$ verdiği için hassasiyeti garanti etmez (gerçek hata $0{,}996 \cdot 10^{-3}$ ile sınırın hemen altında kalır). Leibniz serisinin gerektirdiği binlerce terimle (Alıştırma 3.1) karşılaştırınca, küçük argümanın yakınsamayı ne kadar hızlandırdığı görülür. ■

Sıradaki dört alıştırmada dizilerde yakınsama hızını (Tanım 3.4) kullanıyoruz.

Alıştırma 3.3 (sin(1/n) dizisinin hızı). $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin yakınsama hızını belirleyiniz.

Çözüm.
$\frac{1}{n} \to 0$ ve sin sürekli olduğundan $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sin 0 = 0$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Her x için $|\sin x| \le |x|$'dir: ortalama değer teoremine (Teorem 1.4) göre $\sin x - \sin 0 = \cos(\xi)\, x$ ve $|\cos \xi| \le 1$. Buna göre

$$|a_n - 0| = \left|\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| \le \frac{1}{n} = 1 \cdot \frac{1}{n^1},$$

yani

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

$p = 1$ en büyük üstür: $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 1$ olduğundan $p > 1$ için $n^p \sin\left(\frac{1}{n}\right) = n^{p-1} \cdot n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \to \infty$. ■

Alıştırma 3.4 (sin(1/n²) dizisinin hızı). $b_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dizisinin yakınsama hızını belirleyiniz.

Çözüm.
$\frac{1}{n^2} \to 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0$'dır. $|\sin x| \le |x|$ eşitsizliğini $x = \frac{1}{n^2}$ ile kullanırsak

$$|b_n - 0| = \left|\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right| \le 1 \cdot \frac{1}{n^2},$$

yani

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 1$ olduğundan $p = 2$'den büyük üs alınamaz. ■

Alıştırma 3.5 (sin²(1/n) dizisinin hızı). $c_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^2$ dizisinin yakınsama hızını belirleyiniz.

Çözüm.
$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ olduğundan karesi de sıfıra gider. $|\sin x| \le |x|$ eşitsizliğinin iki tarafının karesini alırsak

$$|c_n - 0| = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^2 \le \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2},$$

yani

$$\left(\sin \frac{1}{n}\right)^2 = 0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$n^2 c_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^2 \to 1$ olduğundan $p = 2$ en büyük üstür. ■

Alıştırma 3.6 (ln(n+1) - ln(n) dizisinin hızı). $d_n = \ln(n+1) - \ln(n)$ dizisinin yakınsama hızını belirleyiniz.

Çözüm.
Logaritmanın özelliği ve sürekliliğiyle

$$\lim_{n\to\infty} (\ln(n+1) - \ln(n)) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

$x > 0$ için $\ln(1+x) \le x$'tir: ortalama değer teoremiyle $\ln(1+x) - \ln 1 = \frac{x}{1+\xi}$, $0 < \xi < x$, ve $\frac{1}{1+\xi} < 1$. Bunu $x = \frac{1}{n}$ ile kullanalım:

$$|d_n - 0| = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Buradan

$$\ln(n+1) - \ln(n) = 0 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

bulunur. $n \to \infty$ iken

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \ln e = 1$$

olduğundan $p = 1$ en büyük üstür. ■

Sonraki dört alıştırmada fonksiyonlarda yakınsama hızını (Tanım 3.5) Maclaurin açılımlarıyla belirliyoruz. Açılımda sıfıra en yavaş giden terim, yani x'in en küçük kuvvetli terimi, hızı belirler. K sabitini ise kalan terimin Taylor teoremindeki (Teorem 1.9) biçiminden okuruz; ξ her seferinde 0 ile x arasındadır.

Alıştırma 3.7 (sin x / x fonksiyonunun hızı). $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ yakınsamasının hızını belirleyiniz.

Çözüm.
Açılım. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$ olduğundan

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots$$

Sıfıra en yavaş giden terim x^2'li terimdir; hız x^2'dir.
Sabit. Taylor teoremiyle $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos(\xi)}{120}\,x^5$. Buna göre $0 < |x| \le 1$ için

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \left|-\frac{x^2}{6} + \frac{\cos(\xi)}{120}\,x^4\right| \le \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{120} = \frac{7}{40}\,x^2;$$

burada $|\cos\xi| \le 1$ ve $x^4 \le x^2$ kullanıldı.
Demek ki $K = \frac{7}{40}$ ile

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + O(x^2).$$

$\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)/x^2 \to -\frac{1}{6} \neq 0$ olduğundan $p = 2$ en büyük üstür. ■

Alıştırma 3.8 ((1 - cos x) / x fonksiyonunun hızı). $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$ yakınsamasının hızını belirleyiniz.

Çözüm.
Açılım. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$ olduğundan

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right)}{x} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{24} + \cdots$$

En yavaş giden terim x'li terimdir.
Sabit. Taylor teoremiyle $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos(\xi)}{24}\,x^4$. $0 < |x| \le 1$ için

$$\left|\frac{1-\cos x}{x} - 0\right| = \left|\frac{x}{2} - \frac{\cos(\xi)}{24}\,x^3\right| \le \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{24} = \frac{13}{24}|x|;$$

burada $|x|^3 \le |x|$ kullanıldı.
Demek ki

$$\frac{1-\cos x}{x} = 0 + O(x).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Oran $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2} \neq 0$ olduğundan $p = 1$ en büyük üstür. ■

Alıştırma 3.9 ((sin x – x cos x) / x fonksiyonunun hızı). $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x} = 0$ yakınsamasının hızını belirleyiniz.

Çözüm.
Açılım. İki açılımı yerine yazıp aynı kuvvetleri toplayalım:

$$\begin{aligned}\frac{\sin x - x\cos x}{x} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\right)}{x} \\ &= -\frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^4}{24} + \cdots \\ &= \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30} + \cdots\end{aligned}$$

En yavaş giden terim x^2'li terimdir.
Sabit. Taylor teoremiyle

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos(\xi_1)}{120}\,x^5, \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos(\xi_2)}{24}\,x^4.$$

Bunları yerine yazarsak

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x} = \frac{x^2}{3} + \left(\frac{\cos(\xi_1)}{120} - \frac{\cos(\xi_2)}{24}\right)x^4$$

olur. $0 < |x| \leq 1$ için

$$\left|\frac{\sin x - x\cos x}{x}\right| \leq \frac{x^2}{3} + \left(\frac{1}{120} + \frac{1}{24}\right)x^2 = \frac{23}{60}\,x^2;$$

burada $x^4 \leq x^2$ kullanıldı.
Demek ki

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x} = 0 + O(x^2).$$

Fonksiyon bölü x^2 oranı $\frac{1}{3} \neq 0$'a gittiğinden $p = 2$ en büyük üstür. ■

Alıştırma 3.10 ((1 – e^x) / x fonksiyonunun hızı). $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - e^x}{x} = -1$ yakınsamasının hızını belirleyiniz.

Çözüm.
Açılım. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ olduğundan

$$\frac{1 - e^x}{x} = \frac{1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} - \cdots$$

-1'den sonra en yavaş giden terim x'li terimdir.
Sabit. Taylor teoremiyle $e^x = 1 + x + \frac{e^\xi}{2}\,x^2$. $0 < |x| \leq 1$ için $e^\xi \leq e$ olduğundan

$$\left|\frac{1 - e^x}{x} - (-1)\right| = \frac{e^\xi}{2}|x| \leq \frac{e}{2}|x|.$$

Demek ki

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1-e^x}{x} = -1 + O(x).$$

Fark bölü x oranı $-\frac{1}{2} \neq 0$'a gittiğinden $p = 1$ en büyük üstür. ■

Fibonacci dizisi Leonardo Fibonacci'nin 1202 tarihli Liber Abaci'sinde geçer. Son alıştırmada bu dizinin ardışık terimlerinin oranının limitini buluyoruz.

Alıştırma 3.11 (Fibonacci oranları ve altın oran). $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ ve $n \geq 0$ için $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ ile tanımlanan Fibonacci dizisini ele alalım ve $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ yakınsamasında limitin altın oran olarak bilinen $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Oranın bağıntısı. x_{n+1}'i x_n cinsinden yazalım:

$$x_{n+1} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Limit denklemi. $x_n \to x$ ise $x_{n+1} \to x$'tir. Bağıntıda limit alırsak ($x \neq 0$ olduğu aşağıda görülüyor)

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Longrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Diskriminant $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$ olduğundan iki kök vardır:

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0, \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0.$$

Doğru kökü seçelim. Dizinin ilk terimleri

$$(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots),$$

$$(x_n) = \left(1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \ldots\right)$$

olur. Fibonacci sayıları pozitif ve $n \geq 1$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq F_n$ olduğundan her n için $x_n \geq 1$'dir. Limit de $x \geq 1$ olmalıdır; negatif kök elenir ve

$$x = x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618034$$

bulunur.
Yakınsama hızı. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ diyelim; $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$'dir. Bağıntıdan

$$x_{n+1} - \varphi = \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) - \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\varphi - x_n}{x_n\,\varphi}$$

ve $x_n \geq 1$ olduğundan $\left|x_{n+1} - \varphi\right| \leq \frac{1}{\varphi}|x_n - \varphi|$ elde edilir. Bunu tekrar tekrar uygularsak ($|x_0 - \varphi| = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$)

$$|x_n - \varphi| \leq \frac{1}{\varphi^n}|x_0 - \varphi| = \frac{1}{\varphi^{n+1}}.$$

$\frac{1}{\varphi} \approx 0{,}618 < 1$ olduğundan bu, limitin gerçekten var olduğunu da gösterir: hata her adımda en az $0{,}618$ çarpanıyla küçülür. Örneğin $x_{10} = \frac{144}{89} \approx 1{,}617978$ ve $|x_{10} - \varphi| \approx 0{,}56 \cdot 10^{-4}$'tür. ■

Yakınsama hızını ölçecek dili kurduk. Bir sonraki bölümde ilk kök bulma algoritmasını ve hata sınırını bu dille inceliyoruz: İkiye Bölme Metodu.

 CC BY-NC-SA 4.0

4. İkiye Bölme Metodu

Nümerik analizin en temel uğraşlarından biri $f(x) = 0$ denklemini çözmektir. Çarpanlarına ayrılabilen bir polinomun köklerini tam olarak buluruz; ama $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ ya da $\sqrt{x} - \cos x = 0$ gibi denklemlerde kökü kapalı bir formülle yazmak ya imkânsızdır ya da pratik değildir. Bu durumda köke istediğimiz kadar yaklaşan bir sayı dizisi üretmeye razı oluruz. Bu kısımda böyle dört yöntem göreceğiz; ilki ve en sağlamı ikiye bölme metodudur.
Yöntemin dayandığı ara değer teoreminin ilk analitik ispatı Bolzano'nun 1817 tarihli çalışmasıdır. Fikir basittir: uç noktalarında işaret değiştiren sürekli bir fonksiyonun kökünü içeren aralığı her adımda ikiye bölüp kökün bulunduğu yarıyı tutarız.
Önce neyi aradığımızı kesinleştirelim.

Tanım 4.1 (Kök). Bir f fonksiyonu verilsin. $f(p) = 0$ eşitliğini sağlayan p reel sayısına $f(x) = 0$ denkleminin **kökü** ya da **çözümü** denir.

Yani kök, f'nin grafiğinin x-eksenini kestiği noktanın apsisidir.

Tanım 4.2 (Yaklaşık Kök). $f(x) = 0$ denkleminin kökü tam olarak bulunamıyorsa, $|\ f(p^*)\ |$ değerini yeterince küçük yapan bir p^* sayısına denklemin bir **yaklaşık kökü** denir.

Yani yaklaşık kök, denklemi tam değil ama istenen ölçüde sağlayan bir sayıdır. Bu bölümden itibaren göreceğimiz yöntemler p köküne yaklaşan bir (p_n) dizisi üretir ve sonlu sayıda adımdan sonra durup son terimi yaklaşık kök olarak verir.

4.1 İkiye Bölme Metodu

İkiye bölme (yarılama) metodu, kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlar için ara değer teoremine (Teorem 1.7) dayanır. $f \in C[a,b]$ ve $f(a) \cdot f(b) < 0$ ise f uç noktalarda zıt işaretlidir ve teorem (a,b) içinde en az bir p kökü bulunduğunu söyler.

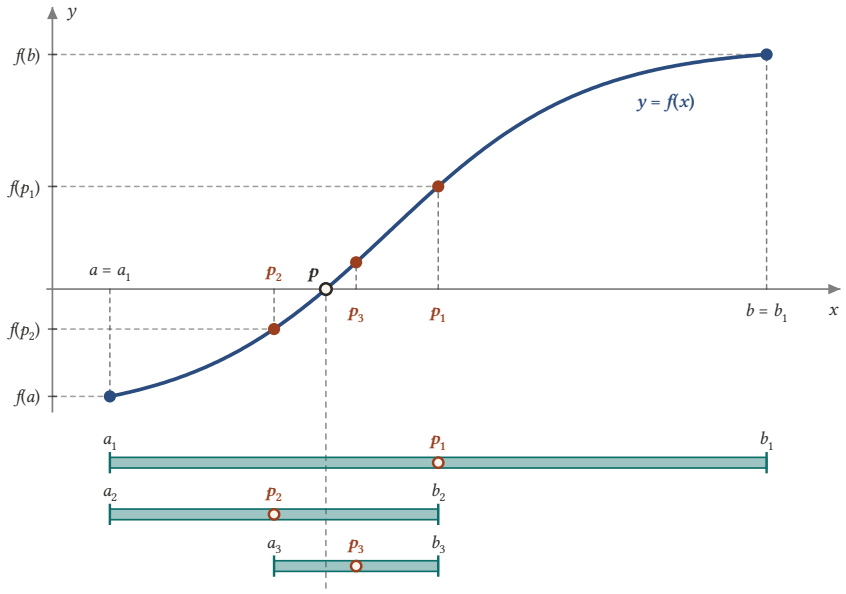
Tanım 4.3 (İkiye Bölme Metodu). $f \in C[a,b]$ ve $f(a) \cdot f(b) < 0$ olsun. $a_1 = a$, $b_1 = b$ alınır ve $n = 1, 2, \ldots$ için

- $[a_n, b_n]$ aralığının orta noktası $p_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ bulunur;
- $f(p_n) = 0$ ise $p = p_n$ denklemin köküdür ve süreç durur;
- $f(p_n)$ ile $f(a_n)$ aynı işaretliyse $a_{n+1} = p_n$, $b_{n+1} = b_n$;
- $f(p_n)$ ile $f(b_n)$ aynı işaretliyse $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = p_n$

alınır. Bu süreçle elde edilen (p_n) dizisi kök için **ikiye bölme metodu** yaklaşımlarıdır.

Yani her adımda aralığın ortasına bakıp, fonksiyonun işaret değiştirdiği yarıyı saklarız. $f(p_n) \neq 0$ ise $f(p_n)$, $f(a_n)$ ile $f(b_n)$'den tam birisiyle aynı işaretlidir, çünkü bu ikisi zıt işaretlidir.
Seçim kuralının neden doğru olduğunu ara değer teoremi söyler. $f(p_n)$ ile $f(a_n)$ aynı işaretliyse $f(p_n)$ ile $f(b_n)$ zıt işaretlidir; teorem $[p_n, b_n]$ üzerinde uygulanınca $p \in (p_n, b_n)$ olan bir kök bulunur. Öbür durumda aynı akıl yürütme $p \in (a_n, p_n)$ verir. Böylece her $[a_n, b_n]$ aralığı bir kök içerir ve bir öncekinin yarısı uzunluğundadır.

CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.1: İkiye bölme metodunun ilk üç adımı. $f(p_1) > 0$ olduğundan kök $[a_1, p_1]$ yarısında, $f(p_2) < 0$ olduğundan $[p_2, b_2]$ yarısındadır. Alttaki iç içe aralıkların her biri bir öncekinin yarısıdır ve p kökünü içerir.

4.2 Durma Kriterleri

Süreç sonsuza kadar sürmez; sonlu sayıda adımdan sonra bulunan değer köke bir yaklaşım olarak kabul edilir. Bunun için yaklaşımın istenen ε hassaslığına ulaştığını sınayan bir ölçüt gerekir.

Tanım 4.4 (Durma Kriterleri). $\varepsilon > 0$ verilsin ve $p_1, p_2, \ldots, p_N$ köke yapılan ardışık yaklaşımlar olsun. Aşağıdaki eşitsizliklerden biri sağlandığında yaklaşımın istenen hassaslıkta olduğu kabul edilir ve süreç durdurulur:

$$| p_N - p_{N-1} | < \varepsilon, \tag{1}$$

$$\frac{| p_N - p_{N-1} |}{| p_N |} < \varepsilon, \quad p_N \neq 0, \tag{2}$$

$$| f(p_N) | < \varepsilon. \tag{3}$$

Bu eşitsizliklere sırasıyla (1), (2) ve (3) numaralı **durma kriteri** denir.

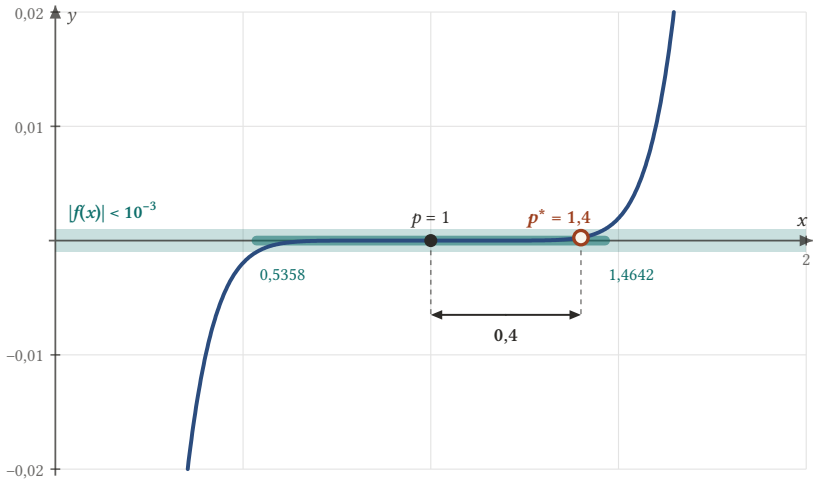
Yani (1) numaralı kriter ardışık iki yaklaşımın farkına, (2) numaralı kriter bu farkın son yaklaşıma oranına, (3) numaralı kriter ise denklemin ne ölçüde sağlandığına bakar. (2) numaralı kriter, köke dair bilgi olmadan bağıl hatayı (Tanım 2.4) test etmenin bir yoludur.
Üç kriter eşit derecede güvenilir değildir. (1) numaralı kriter aldatıcı olabilir, çünkü ardışık farkları sıfıra giden ama ıraksak olan diziler vardır. Örneğin $p_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ dizisinde $| p_n - p_{n-1} | = \frac{1}{n} \to 0$ iken $p_n \to \infty$'dur; $\varepsilon = 10^{-3}$ alınırsa (1) numaralı kriter $N = 1001$'de sağlanır, oysa dizinin yaklaştığı bir sayı yoktur. (3) numaralı kriter de aldatıcı olabilir: $f(p_N)$ sıfıra çok yakın olduğu hâlde p_N gerçek kökten uzak olabilir.

Örnek 4.1 (Küçük Fonksiyon Değeri, Uzak Kök). $f(x) = (x-1)^9$ fonksiyonunun tek kökü $p = 1$'dir. $p^* = 1{,}4$ için (3) numaralı durma kriterini $\varepsilon = 10^{-3}$ ile sınayınız ve p^*'ın köke uzaklığını bulunuz.

> **Çözüm.**
> $f(1{,}4) = 0{,}4^9 = 0{,}000262144$ olduğundan
>
> $$| f(p^*) | = 0{,}262144 \cdot 10^{-3} < 10^{-3}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve (3) numaralı kriter p^*'ı yaklaşık kök olarak kabul eder. Oysa $\mid p^* - p \mid = 0{,}4$'tür; bağıl hata da $0{,}4/1 = 0{,}4$, yani yüzde kırktır.
Sorun fonksiyonun kök çevresinde çok yatık olmasıdır. $\mid f(x) \mid < 10^{-3}$ eşitsizliği $\mid x-1 \mid^9 < 10^{-3}$, yani $\mid x-1 \mid < 10^{-1/3} \approx 0{,}4642$ demektir. Dolayısıyla $(0{,}5358;\, 1{,}4642)$ aralığındaki her sayı (3) numaralı kriteri geçer.



Şekil 4.2: $f(x) = (x-1)^9$ grafiği. Taralı şerit $|f(x)| < 10^{-3}$ bölgesidir. Grafik bu şeridin içinde $(0{,}5358;\, 1{,}4642)$ aralığı boyunca kalır, kalın parça bu aralıktır. $p^* = 1{,}4$ noktasında $f(1{,}4) \approx 0{,}000262$ olduğundan nokta eksenin hemen üstündedir, ama kökten uzaklığı 0,4'tür.

Kökün çevresinde bu kadar yatık bir fonksiyonda $\mid f(p_N) \mid$'nin küçüklüğü p_N'nin köke yakınlığı hakkında hiçbir şey söylemez. ■

Bu nedenlerle f ve p hakkında ek bir bilgi yoksa bağıl hataya yakın sonuç veren (2) numaralı durma kriterini kullanmak daha uygundur.

4.3 Başlangıç Aralığının Seçimi

Yöntemi başlatmak için önce $f(a) \cdot f(b) < 0$ sağlayan bir $[a, b]$ aralığı bulunmalıdır. Her adım aralığı yarıya indirdiğinden, başlangıç aralığı ne kadar kısa olursa istenen hassaslığa o kadar az işlemle ulaşılır. Örneğin $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$ için $f(-4) = -149$, $f(4) = 115$, $f(0) = -1$ ve $f(1) = 1$'dir. Hem $f(-4) \cdot f(4) < 0$ hem de $f(0) \cdot f(1) < 0$ sağlanır, ama başlangıç aralığı olarak $[-4, 4]$ yerine $[0, 1]$ almak daha uygundur. Uzunluğu 8 olan aralık, uzunluğu 1 olan aralığa ancak $8 \to 4 \to 2 \to 1$ diye üç adımda iner; yani $[-4, 4]$ ile başlamak her hassaslık için üç fazla iterasyon demektir.

İkiye bölme dört adımda

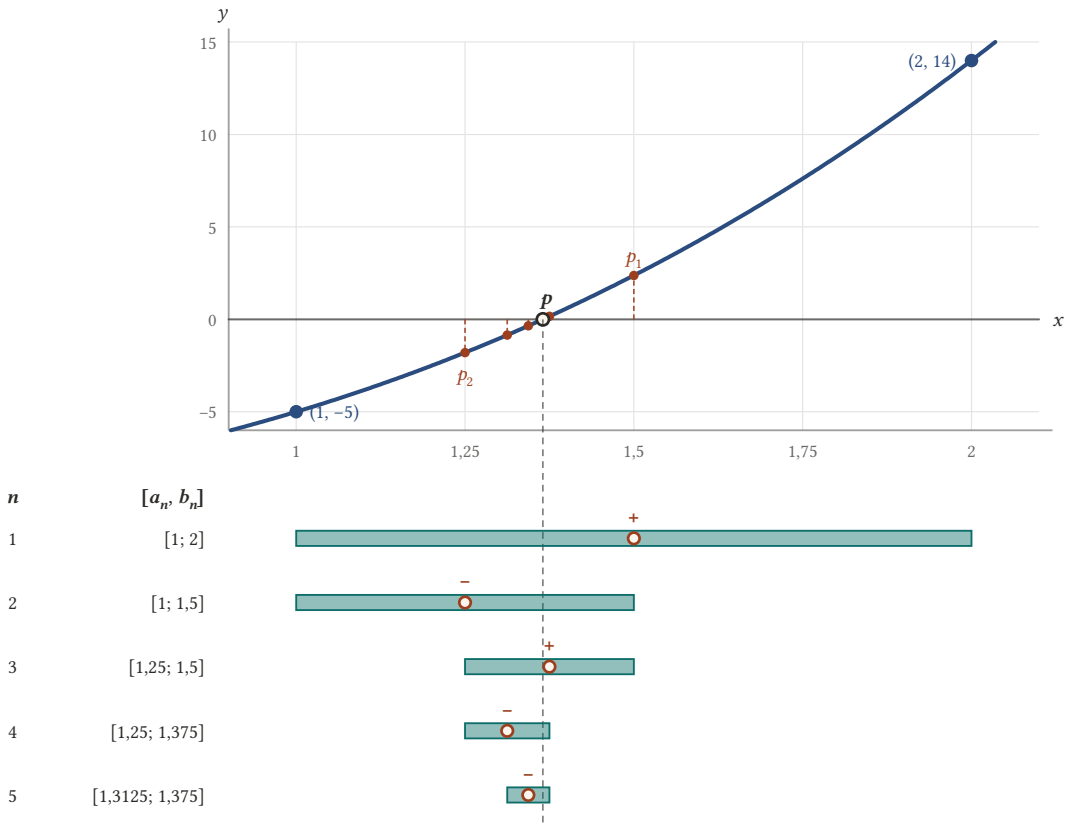
1. **Aralığı denetle.** f'nin $[a, b]$ üzerinde sürekli ve $f(a) \cdot f(b) < 0$ olduğunu göster; $a_1 = a$, $b_1 = b$ al.
2. **Orta noktayı bul.** $p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ ve $f(p_n)$ değerini hesapla.
3. **Kökü içeren yarıyı seç.** $f(p_n)$, $f(a_n)$ ile aynı işaretliyse $a_{n+1} = p_n$, $b_{n+1} = b_n$; değilse $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = p_n$.
4. **Durma kriterini sına.** Kriter sağlanıyorsa $p \approx p_n$; sağlanmıyorsa n'yi bir artırıp 2. adıma dön. Değerleri bir tabloda topla.

Örnek 4.2 (Bir Kübik Denklemin Kökü). $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin $[1, 2]$ aralığında bir kökü olduğunu gösteriniz. İkiye bölme metodunu ve (2) numaralı durma kriterini kullanarak bu köke en az 10^{-4} hassaslıkta bir yaklaşımda bulununuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
f polinom olduğundan $[1,2]$ üzerinde süreklidir. $f(1) = -5 < 0$ ve $f(2) = 14 > 0$ olduğundan ara değer teoremi gereği $(1,2)$ aralığında $f(p) = 0$ sağlayan en az bir p vardır.
İlk üç adım şöyledir:

- $p_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5$ ve $f(1{,}5) = 2{,}375 > 0$. Bu değer $f(b_1)$ ile aynı işaretli olduğundan $p \in (1;\,1{,}5)$ ve yeni aralık $[1;\,1{,}5]$'tir.
- $p_2 = \frac{1+1{,}5}{2} = 1{,}25$ ve $f(1{,}25) = -1{,}796875 < 0$. Bu kez $f(a_2)$ ile aynı işaretli olduğundan $p \in (1{,}25;\,1{,}5)$.
- $p_3 = \frac{1{,}25+1{,}5}{2} = 1{,}375$ ve $f(1{,}375) = 0{,}162109375 > 0$, dolayısıyla $p \in (1{,}25;\,1{,}375)$.



Şekil 4.3: Üstte $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ grafiği; kesikli dikey parçalar $p_1 = 1{,}5$, $p_2 = 1{,}25$, $p_3 = 1{,}375$, $p_4 = 1{,}3125$, $p_5 = 1{,}34375$ orta noktalarındaki fonksiyon değerleridir. Altta aynı ölçekte ilk beş $[a_n, b_n]$ aralığı, orta noktaları ve $f(p_n)$ değerinin işareti. Her aralık bir öncekinin yarısıdır ve hepsi $p \approx 1{,}3652$ kökünü (kesikli çizgi) içerir.

Aynı işlemler sürdürülerek aşağıdaki tablo elde edilir. Hesaplar yuvarlama yapılmadan yürütülmüş, tablodaki değerler dokuz basamağa yuvarlanmıştır.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\frac{\lvert p_n - p_{n-1}\rvert}{\lvert p_n\rvert}$
1	1	2	1,5	2,375	
2	1	1,5	1,25	−1,796875	0,2
3	1,25	1,5	1,375	0,162109375	0,090909091
4	1,25	1,375	1,3125	−0,848388672	0,047619048
5	1,3125	1,375	1,34375	−0,350982666	0,023255814

 CC BY-NC-SA 4.0

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\frac{\mid p_n - p_{n-1} \mid}{\mid p_n \mid}$
6	1,34375	1,375	1,359375	−0,096408844	0,011494253
7	1,359375	1,375	1,3671875	0,032355785	0,005714286
8	1,359375	1,3671875	1,36328125	−0,032149971	0,002865330
9	1,36328125	1,3671875	1,365234375	0,000072025	0,001430615
10	1,36328125	1,365234375	1,364257813	−0,016046691	0,000715820
11	1,364257813	1,365234375	1,364746094	−0,007989263	0,000357782
12	1,364746094	1,365234375	1,364990234	−0,003959102	0,000178859
13	1,364990234	1,365234375	1,365112305	−0,001943659	0,000089421

$n = 12$'de bağıl fark $0{,}000178859 > 10^{-4}$ iken $n = 13$'te

$$\frac{\mid p_{13} - p_{12} \mid}{\mid p_{13} \mid} = 0{,}000089421 = 0{,}89421 \cdot 10^{-4} < 10^{-4}$$

olur. (2) numaralı kriter 13 iterasyon sonunda sağlandığından kök için $p \approx p_{13} = 1{,}365112305$ yaklaşımını buluruz.
Tabloda $\mid f(p_9) \mid < \mid f(p_{13}) \mid$ olduğuna dikkat edin. Bu, p_9'un köke p_{13}'ten daha yakın olduğunu düşündürür; ama kökün gerçek değeri bilinmedikçe bundan emin olamayız. ■

4.4 Yakınsama ve Hata Sınırı

İkiye bölme metodu kolay anlaşılır; ama $\mid p - p_n \mid$'yi istenen küçüklüğe indirecek n bazen çok büyüktür, yani köke yakınsama yavaştır. Buna karşılık yöntem hiçbir ek koşul istemeden köke er ya da geç istenen hassaslıkta yaklaşır. Bunu ve hızını şu teorem verir.

Teorem 4.1 (İkiye Bölme Metodunun Yakınsaması). *$f \in C[a,b]$ ve $f(a) \cdot f(b) < 0$ olsun. İkiye bölme metoduyla elde edilen $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi f'nin (a,b) aralığındaki bir p köküne yakınsar ve her $n \geq 1$ için*

$$\mid p_n - p \mid \leq \frac{b-a}{2^n}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.
Bir N adımında $f(p_N) = 0$ olursa süreç durur ve $p = p_N$ kesin köktür. p_N bütün $[a_n, b_n]$ $(n \leq N)$ aralıklarında yattığından aşağıdaki 4. adımın hesabı $n \leq N$ için aynen geçer. Bu yüzden hiçbir adımda $f(p_n) = 0$ olmadığını varsayabiliriz. Ayrıca $f(a) < 0 < f(b)$ alabiliriz; aksi hâlde $-f$ ile çalışırız, çünkü $-f$'nin kökleri ve işaret karşılaştırmaları, dolayısıyla üretilen dizi, f'ninkilerle aynıdır.
1. İşaretler korunur. *Her n için $f(a_n) < 0 < f(b_n)$'dir. Gerçekten $n = 1$ için bu varsayımdır; a_{n+1} ya a_n'dir ya da $f(p_n)$'nin $f(a_n)$ ile aynı işaretli, yani negatif olduğu p_n'dir. Benzer biçimde $f(b_{n+1}) > 0$'dır.*
2. Aralık her adımda yarıya iner. *p_n orta nokta olduğundan $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$'dir. $b_1 - a_1 = b - a$ olduğundan tümevarımla*

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \qquad n \geq 1.$$

3. Aralıklar bir köke büzülür. *Kural gereği $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$'dir. (a_n) azalmayan ve b ile üstten sınırlı, (b_n) artmayan ve a ile alttan sınırlı olduğundan ikisi de yakınsaktır (bkz. Analiz 1). 2. adım gereği $b_n - a_n \to 0$ olduğundan limitleri aynıdır; bu ortak limite p diyelim. Her n için $a_n \leq p \leq b_n$'dir. f sürekli olduğundan 1. adımdan*

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0, \qquad f(p) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur; yani $f(p) = 0$'dır. $f(a) \neq 0$ ve $f(b) \neq 0$ olduğundan $p \in (a, b)$'dir.
4. Hata sınırı. *p ve p_n aynı $[a_n, b_n]$ aralığındadır ve p_n bu aralığın orta noktasıdır. Orta noktanın aralıktaki herhangi bir noktaya uzaklığı aralık uzunluğunun yarısını aşmaz, dolayısıyla*

$$| p_n - p | \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}$$

olur. Sağ taraf $n \to \infty$ iken sıfıra gittiğinden $p_n \to p$'dir. ■

Teoremdeki eşitsizlik $| p_n - p | \leq (b-a) \cdot \frac{1}{2^n}$ biçiminde yazılırsa, yakınsama hızı tanımına (Tanım 3.4) göre $K = b - a$ sabitiyle

$$p_n = p + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

elde edilir. Yani ikiye bölme dizisi köke $\frac{1}{2^n}$ hızıyla yakınsar: her iterasyon hata sınırını yarıya indirir.
Teoremdeki eşitsizlik (Teorem 4.1) n. adımdaki mutlak hata için bir **üst sınır** verir; bu sınır gerçek hatadan çok büyük olabilir. Kübik denklem örneğinde (Örnek 4.2) gerçek kök dokuz basamakla $p = 1{,}365230013$'tür. p_9 için gerçek hata

$$| p_9 - p | = | 1{,}365234375 - 1{,}365230013 | = 0{,}4362 \cdot 10^{-5}$$

iken teoremden elde edilen sınır

$$| p_9 - p | \leq \frac{2-1}{2^9} = 0{,}1953125 \cdot 10^{-2}$$

olup gerçek hatanın yaklaşık 450 katıdır.
Buna karşılık sınırın değeri, istenen hassaslık için **kaç adım gerektiğini önceden** söyler; bunun için ne kökü ne de iterasyonları bilmemiz gerekir.

Örnek 4.3 (Gerekli Adım Sayısı). İkiye bölme metoduyla $[1, 2]$ aralığında $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ denkleminin köküne 10^{-3}'ten küçük bir mutlak hatayla yaklaşmak için gereken adım (iterasyon) sayısını belirleyiniz.

Çözüm.
$a = 1, b = 2$ alıp yakınsama teoremindeki (Teorem 4.1) üst sınırı kullanırız:

$$| p_n - p | \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < 10^{-3}$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük n aranıyor. Her iki tarafın logaritmasını alırsak

$$\begin{aligned} 2^{-n} < 10^{-3} &\Leftrightarrow -n \log 2 < -3 \log 10 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{3}{\log 2} = 9{,}965784285 \end{aligned}$$

bulunur; yani $n = 10$ adım yeterlidir.
Bunu kübik denklem örneğindeki (Örnek 4.2) tabloyla denetleyelim: $p_{10} = 1{,}364257813$ ve $p = 1{,}365230013$ olduğundan

$$| p_{10} - p | = 0{,}9722 \cdot 10^{-3} < 10^{-3}$$

gerçekten sağlanır. ■

Aynı hesap genel olarak yapılabilir.

Örnek 4.4 (Adım Sayısının Genel Formülü). Uzunluğu $b - a$ olan bir başlangıç aralığında, ikiye bölme metodunun mutlak hatasının ε'dan küçük olmasını teoremdeki sınırla garanti eden en küçük adım sayısını $b - a$ ve ε cinsinden bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

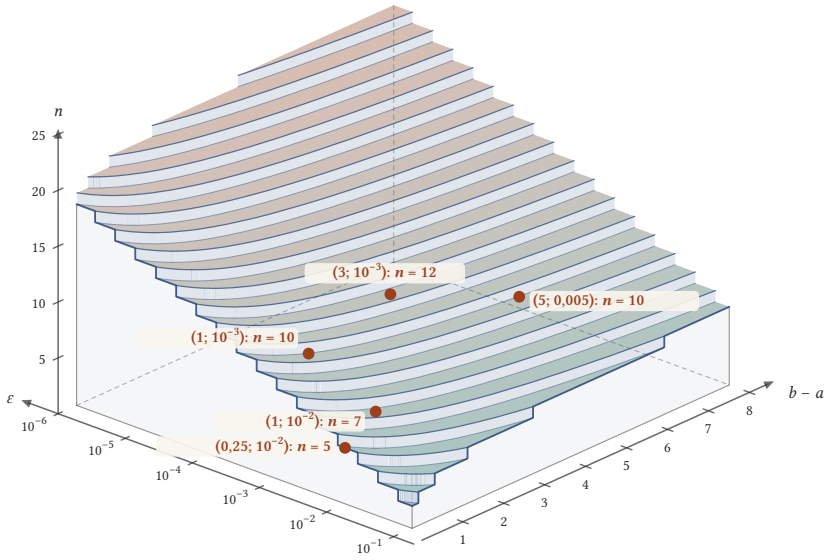
Çözüm.
Yakınsama teoremi (Teorem 4.1) gereği $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ olması yeter. Bu eşitsizlik $2^n > \frac{b-a}{\varepsilon}$, yani

$$n > \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} = \frac{\log(b-a) - \log \varepsilon}{\log 2}$$

demektir. Dolayısıyla aranan sayı bu logaritmadan büyük en küçük tam sayıdır:

$$n = \left\lfloor \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

Örneğin $b-a = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$ için $n = \lfloor 9{,}97 \rfloor + 1 = 10$ bulunur; bu bir önceki örneğin (Örnek 4.3) sonucudur.



Şekil 4.4: $n = \lfloor \log_2((b-a)/\varepsilon) \rfloor + 1$ adım sayısı: $b-a \in [0{,}25;\ 8]$ ve $\varepsilon \in [10^{-6},\ 10^{-1}]$ (logaritmik eksen) üzerinde tam sayı değerli teraslardan oluşan bir merdiven. Renk n büyüdükçe değişir. Etiketlerde $(b-a;\ \varepsilon)$ çifti ve adım sayısı yazılıdır. $(1;\ 10^{-3})$ ile $(5;\ 0{,}005)$ aynı terastadır, çünkü ikisinde de $(b-a)/\varepsilon = 1000$'dir.

Formül iki gözlem verir. Hassaslığı on kat artırmak (ε'u 10'a bölmek) yalnız $\log_2 10 \approx 3{,}32$ adım ekler. Başlangıç aralığını yarıya indirmek ise tam bir adım kazandırır. ■

4.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorularda istenen yuvarlama her adımda uygulanır ve sonraki adım yuvarlanmış değerlerle sürdürülür. Tablolarda son sütun, yakınsama teoremindeki (Teorem 4.1) $\frac{b-a}{2^n}$ hata sınırıdır.

Alıştırma 4.1 (Karekök ve Kosinüs). $\sqrt{x} - \cos x = 0$ denkleminin köküne $[0, 1]$ aralığında ikiye bölme metoduyla p_3 yaklaşımında bulununuz. İşlemlerde virgülden sonra 5. basamağa yuvarlama yapınız ve sonuçları bir tabloda gösteriniz.

Çözüm.
$f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde süreklidir. $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ için

$$f(a_1) = -1 < 0, \qquad f(b_1) = 1 - \cos 1 = 0{,}45970 > 0$$

olduğundan $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

- $p_1 = \frac{0+1}{2} = 0{,}5$ ve $f(0{,}5) = -0{,}17048 < 0$. $f(p_1)$, $f(a_1)$ ile aynı işaretli olduğundan $a_2 = 0{,}5$, $b_2 = 1$.
- $p_2 = \frac{0{,}5+1}{2} = 0{,}75$ ve $f(0{,}75) = 0{,}13434 > 0$. Bu kez $f(b_2)$ ile aynı işaretli olduğundan $a_3 = 0{,}5$, $b_3 = 0{,}75$.
- $p_3 = \frac{0{,}5+0{,}75}{2} = 0{,}625$ ve $f(0{,}625) = -0{,}02039$.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	0	1	0,5	−0,17048
2	0,5	1	0,75	0,13434
3	0,5	0,75	0,625	−0,02039

İstenen yaklaşım $p_3 = 0{,}625$'tir. ■

Alıştırma 4.2 (Dördüncü Dereceden Bir Polinom). $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ denkleminin $[-1, 4]$ aralığındaki bir kökünü en fazla 0,005 mutlak hatayla ikiye bölme metoduyla bulunuz. İşlemlerde virgülden sonra 4. basamağa yuvarlama yapınız ve sonuçları bir tabloda gösteriniz.

Çözüm.
$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$ polinom olduğundan $f \in C[-1, 4]$'tür. $f(-1) = -1 < 0$ ve $f(4) = 84 > 0$ olduğundan yöntem uygulanabilir.
Kaç adım gerektiğini önceden bulalım. $\frac{b-a}{2^n} = \frac{5}{2^n} < 0{,}005$ eşitsizliği $2^n > 1000$ demektir. $2^9 = 512$ ve $2^{10} = 1024$ olduğundan $n = 10$ adım yeterlidir.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\frac{b-a}{2^n}$
1	−1	4	1,5	−0,6875	2,5
2	1,5	4	2,75	0,3477	1,25
3	1,5	2,75	2,125	−4,3630	0,625
4	2,125	2,75	2,4375	−3,6797	0,3125
5	2,4375	2,75	2,5938	−2,1738	0,1563
6	2,5938	2,75	2,6719	−1,0522	0,0781
7	2,6719	2,75	2,7110	−0,3877	0,0391
8	2,7110	2,75	2,7305	−0,0293	0,0195
9	2,7305	2,75	2,7403	0,1578	0,0098
10	2,7305	2,7403	2,7354	0,0637	0,0049

$n = 10$'da hata sınırı $0{,}0049 < 0{,}005$ olduğundan $p \approx p_{10} = 2{,}7354$'tür.
Sonucu denetleyebiliriz: $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 2x - 2)$ çarpanlarına ayrılır, dolayısıyla $[-1, 4]$ aralığında $1 - \sqrt{3}$, $\sqrt{2}$ ve $1 + \sqrt{3}$ olmak üzere üç kök vardır. Yöntem bunlardan $p = 1 + \sqrt{3} = 2{,}7320508\ldots$ köküne yaklaşmıştır ve gerçek hata $\mid p_{10} - p \mid \approx 0{,}0033 < 0{,}005$'tir. ■

Alıştırma 4.3 (Altıncı Dereceden Bir Polinom). $x^6 - x - 1 = 0$ denkleminin $\left[1, \frac{5}{4}\right]$ aralığındaki köküne mutlak hata 0,01'den küçük olacak biçimde ikiye bölme metoduyla bir yaklaşımda bulununuz. İşlemlerde virgülden sonra 4. basamağa yuvarlama yapınız ve sonuçları bir tabloda gösteriniz.

Çözüm.
$f(x) = x^6 - x - 1$ polinom olduğundan $f \in C[1; 1{,}25]$'tir. $f(1) = -1 < 0$ ve $f(1{,}25) = 1{,}5647 > 0$'dır.
$\frac{b-a}{2^n} = \frac{0{,}25}{2^n} < 0{,}01$ eşitsizliği $2^n > 25$ demektir; $2^4 = 16$, $2^5 = 32$ olduğundan $n = 5$ adım yeterlidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\frac{b-a}{2^n}$
1	1	1,25	1,125	−0,0977	0,125
2	1,125	1,25	1,1875	0,6167	0,0625
3	1,125	1,1875	1,1563	0,2338	0,0313
4	1,125	1,1563	1,1407	0,0624	0,0156
5	1,125	1,1407	1,1329	−0,0187	0,0078

$| p_5 - p | \leq 0{,}0078 < 0{,}01$ olduğundan $p \approx p_5 = 1{,}1329$'dur. ■

Alıştırma 4.4 (İterasyon Sayısı ve Yaklaşım). $x^3 + x - 4 = 0$ denkleminin $[1, 4]$ aralığındaki köküne 10^{-3} hassasiyetle (yani mutlak hata 0,001'den küçük olacak biçimde) yaklaşmak için ikiye bölme metodunda en az kaç iterasyon gerekir? Bu sayıda iterasyonla kökü yaklaşık olarak bulunuz. İşlemlerde virgülden sonra 4. basamağa yuvarlama yapınız.

Çözüm.
$f(x) = x^3 + x - 4$ polinomu için $f(1) = -2 < 0$ ve $f(4) = 64 > 0$'dır. Teorem 4.1 gereği

$$| p - p_n | \leq \frac{b-a}{2^n} = \frac{4-1}{2^n} < 10^{-3}$$

olması yeter. Bu, $2^n > 3000$ demektir:

$$n > \frac{\log 3000}{\log 2} = 11{,}5507,$$

yani $n \geq 12$. İstenen kritere uygun ilk yaklaşım p_{12}'dir.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\frac{b-a}{2^n}$
1	1	4	2,5	14,1250	1,5
2	1	2,5	1,75	3,1094	0,75
3	1	1,75	1,375	−0,0254	0,375
4	1,375	1,75	1,5625	1,3772	0,1875
5	1,375	1,5625	1,4688	0,6376	0,0938
6	1,375	1,4688	1,4219	0,2967	0,0469
7	1,375	1,4219	1,3985	0,1337	0,0234
8	1,375	1,3985	1,3868	0,0539	0,0117
9	1,375	1,3868	1,3809	0,0141	0,0059
10	1,375	1,3809	1,3780	−0,0053	0,0029
11	1,3780	1,3809	1,3795	0,0047	0,0015
12	1,3780	1,3795	1,3788	0,0000	0,0007

$n = 11$'de hata sınırı 0,0015 henüz 0,001'in üstündedir; $n = 12$'de $0{,}0007 < 0{,}001$ olur. Böylece $p \approx p_{12} = 1{,}3788$ bulunur. Son satırdaki $f(p_{12})$ değeri sıfır değildir ($f(1{,}3788) \approx 0{,}00002$); yalnız dört basamağa yuvarlanınca 0,0000 görünür. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 4.5 (Yaklaşım ve Bağıl Hatası). $3x^2 - e^x = 0$ denkleminin $[0,1]$ aralığındaki köküne ikiye bölme metoduyla 10^{-2} hassasiyetle (yani mutlak hata $0{,}01$'den küçük olacak biçimde) bir yaklaşımda bulununuz. İşlemlerde virgülden sonra 4. basamağa yuvarlama yapınız ve sonuçları bir tabloda gösteriniz. Denklemin bu aralıktaki gerçek kökü $p = 0{,}910007572$ olduğuna göre yaklaşımın bağıl hatasını belirleyiniz.

Çözüm.
$f(x) = 3x^2 - e^x$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde süreklidir; $f(0) = -1 < 0$ ve $f(1) = 3 - e = 0{,}2817 > 0$'dır.
$\frac{b-a}{2^n} = \frac{1}{2^n} < 0{,}01$ eşitsizliği $2^n > 100$ demektir; $2^6 = 64$, $2^7 = 128$ olduğundan $n = 7$ adım yeterlidir.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\frac{b-a}{2^n}$
1	0	1	0,5	−0,8987	0,5
2	0,5	1	0,75	−0,4295	0,25
3	0,75	1	0,875	−0,1020	0,125
4	0,875	1	0,9375	0,0831	0,0625
5	0,875	0,9375	0,9063	−0,0110	0,0313
6	0,9063	0,9375	0,9219	0,0356	0,0156
7	0,9063	0,9219	0,9141	0,0122	0,0078

$0{,}0078 < 0{,}01$ olduğundan $p \approx p_7 = 0{,}9141$'dir.
Gerçek kök $p = 0{,}910007572$ olduğuna göre bu yaklaşımın bağıl hatası

$$\left|\frac{p - p_7}{p}\right| = \frac{|\,0{,}910007572 - 0{,}9141\,|}{0{,}910007572} \approx 0{,}0045$$

olur. Mutlak hata da $|\,p - p_7\,| \approx 0{,}0041 < 0{,}01$ olup istenen hassaslık sağlanmıştır. ■

İkiye bölme metodu her zaman yakınsar ama yavaştır ve yalnız işaret bilgisini kullanır. Sonraki bölümde denklemi $x = g(x)$ biçimine sokup $p_n = g(p_{n-1})$ iterasyonuyla köke yaklaşan, uygun koşullarda çok daha hızlı yakınsayan bir yönteme geçiyoruz: Sabit Nokta İterasyonu.

 CC BY-NC-SA 4.0

5. Sabit Nokta İterasyonu

İkiye Bölme Metodu her adımda kökü içeren aralığı yarıya indirir ve $| p_n - p | \leq (b-a)/2^n$ güvencesini verir (Teorem 4.1). Bu güvence sağlamdır ama yavaştır: yöntem fonksiyonun yalnız işaretine bakar, değerlerinin ne kadar büyük ya da küçük olduğunu hiç kullanmaz. Bu bölümde kök bulma problemine başka bir açıdan bakıyoruz. $f(x) = 0$ denklemini $x = g(x)$ biçimine getirir, bir p_0 başlangıç değerinden $p_1 = g(p_0), p_2 = g(p_1), \ldots$ dizisini kurarız. Dizi yakınsarsa limiti g'nin bir sabit noktası, dolayısıyla f'nin bir köküdür.
Böyle bir dizinin hangi koşulda yakınsadığını genel biçimde Stefan Banach 1922'de büzülme dönüşümleri için ispatladı. Biz aynı sonucu bir aralık üzerinde, türev ve Ortalama Değer Teoremi yardımıyla kuracağız. Bu yöntemin bir sonraki bölümdeki Newton-Raphson Metodu'nun da temeli olduğunu göreceğiz.

5.1 Sabit Nokta ve Kök Bulma Problemi

Önce sabit noktayı tanımlayıp kök bulma problemine nasıl bağlandığını görelim.

Tanım 5.1 (Sabit Nokta). Bir g fonksiyonu verilsin. $g(p) = p$ eşitliğini sağlayan bir p noktasına g fonksiyonunun **sabit noktası** denir.

Yani g, sabit noktasını yerinden oynatmaz. Geometrik olarak sabit noktalar, $y = g(x)$ grafiğinin $y = x$ doğrusunu kestiği noktaların apsisleridir.
Sabit nokta problemi ile kök bulma problemi birbirine dönüştürülebilir:

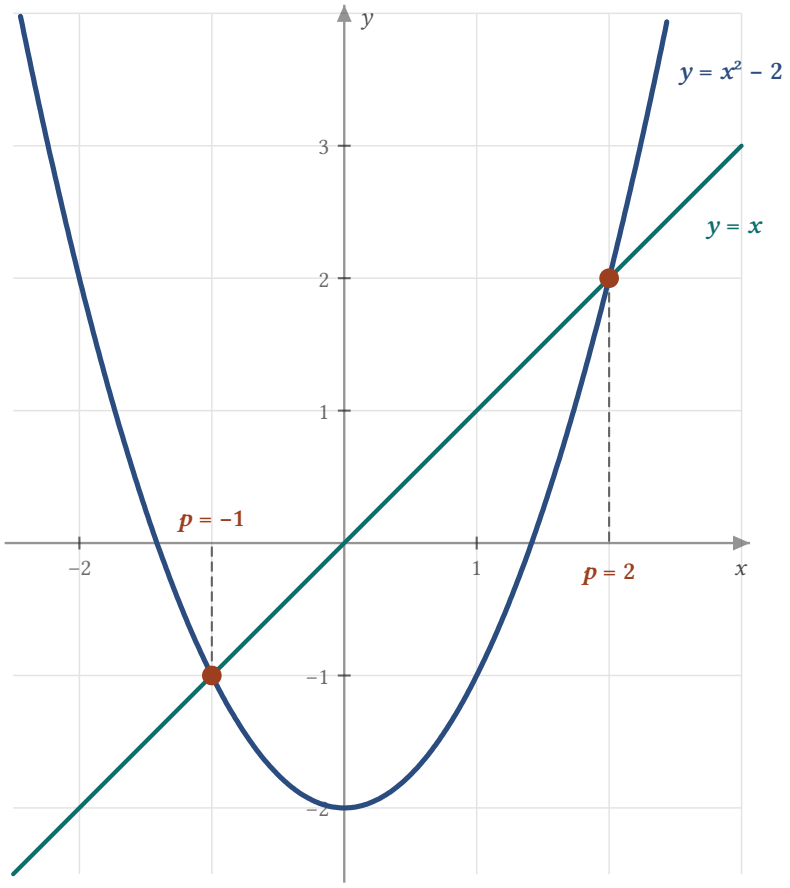
- $f(p) = 0$ kök bulma problemi verilsin. $g(x) = x - f(x)$ ya da $g(x) = x + 3f(x)$ gibi pek çok farklı biçimde, p'yi sabit nokta kabul eden g fonksiyonları kurulabilir. Örneğin ilki için $g(p) = p - f(p) = p - 0 = p$ olur.
- Tersine, $g(p) = p$ ise $f(x) = x - g(x)$ tanımlanırsa $f(p) = p - g(p) = p - p = 0$ olur, yani p, f'nin bir köküdür.

Bu yüzden bir sabit noktayı bulmak için geliştirilen her yöntem bir kök bulma yöntemi olarak da kullanılabilir.

Örnek 5.1 (Bir Polinomun Sabit Noktaları). $g(x) = x^2 - 2$ fonksiyonunun sabit noktalarını bulunuz.

> **Çözüm.**
> Sabit nokta tanımından
>
> $$g(p) = p \Leftrightarrow p^2 - 2 = p \Leftrightarrow p^2 - p - 2 = 0 \Leftrightarrow (p-2)(p+1) = 0$$
>
> olur. Buradan $p = -1$ ve $p = 2$ bulunur. Gerçekten
>
> $$g(-1) = (-1)^2 - 2 = -1, \qquad g(2) = 2^2 - 2 = 2$$
>
> sağlanır. Bu iki nokta, $y = x^2 - 2$ parabolünün $y = x$ doğrusunu kestiği $(-1, -1)$ ve $(2, 2)$ noktalarının apsisleridir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.1: $y = x^2 - 2$ parabolü $y = x$ doğrusunu $(-1, -1)$ ve $(2, 2)$ noktalarında keser. Bu noktaların apsisleri $g(x) = x^2 - 2$ fonksiyonunun sabit noktalarıdır.

■

5.2 Sabit Noktanın Varlığı ve Tekliği

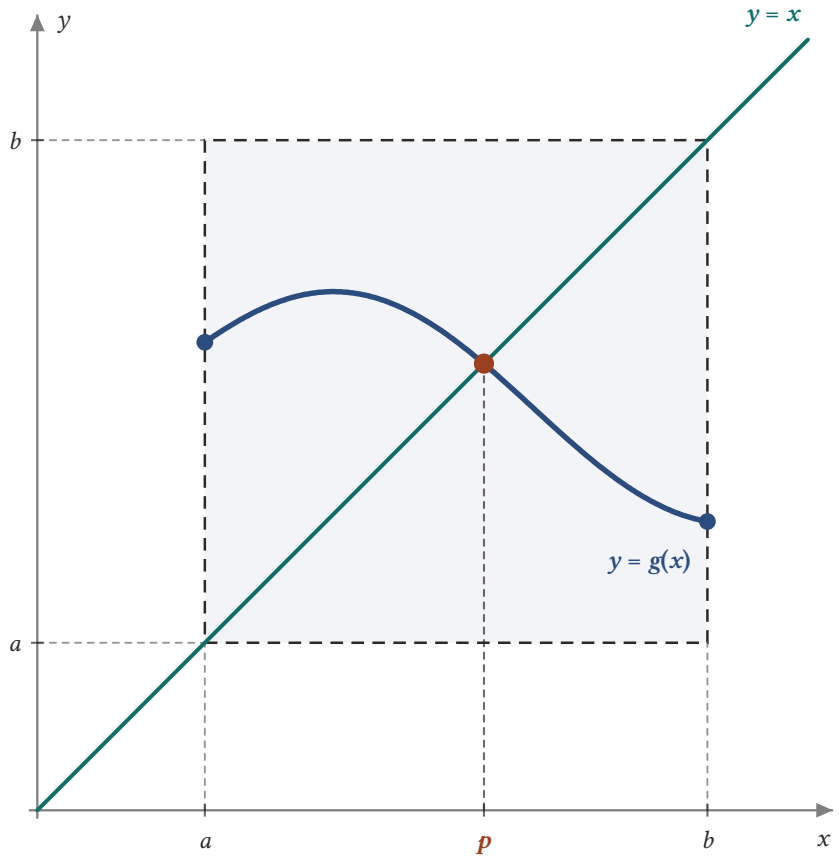
Bir fonksiyonun sabit noktası olup olmadığını, varsa tek olup olmadığını denklemi çözmeden nasıl anlarız? Aşağıdaki teorem bunun için iki yeter koşul verir.

Teorem 5.1 (Sabit Noktanın Varlığı ve Tekliği). *(i) $g \in C[a,b]$ ve her $x \in [a,b]$ için $g(x) \in [a,b]$, yani $a \leq g(x) \leq b$ ise g fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında en az bir sabit noktası vardır.*
(ii) $g \in C[a,b]$ ve her $x \in [a,b]$ için $g(x) \in [a,b]$ olsun. Ayrıca g' türevi (a,b) aralığında mevcut olsun ve her $x \in (a,b)$ için

$$| \, g'(x) \, | \leq k$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k < 1$ sabiti bulunsun. Bu durumda g fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında tek türlü belirli bir sabit noktası vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.2: g, [a, b] *aralığını kendi içine gönderdiğinden grafiği kesikli karenin içinde kalır. Grafik karenin sol kenarında* y = x *doğrusunun üstünde, sağ kenarında altındadır; bu yüzden doğruyu bir* (p, p) *noktasında keser ve* p *bir sabit noktadır.*

İspat.
(i) $g(a) = a$ *ya da* $g(b) = b$ *ise uç noktalardan biri sabit noktadır ve söylenecek bir şey kalmaz. Aksi hâlde* $g(a) \neq a$ *ve* $g(b) \neq b$*'dir.* $g(a) \in [a, b]$ *olduğundan* $g(a) \geq a$*'dır ve eşitlik olmadığına göre* $a < g(a)$ *olur. Aynı biçimde* $g(b) \leq b$ *ve* $g(b) \neq b$ *olduğundan* $g(b) < b$ *olur.*
$h(x) = g(x) - x$ *fonksiyonunu tanımlayalım.* h*,* $[a, b]$ *aralığında süreklidir ve*

$$h(a) = g(a) - a > 0, \qquad h(b) = g(b) - b < 0$$

olduğundan $h(a) \cdot h(b) < 0$*'dır. Ara Değer Teoremi'ne (Teorem 1.7) göre* $h(p) = 0$ *olan bir* $p \in (a, b)$ *vardır. Bu,* $g(p) - p = 0$*, yani* $g(p) = p$ *demektir.*
(ii) Varlık (i)'den gelir. Teklik için g*'nin* $[a, b]$ *aralığında* $p \neq q$ *olan iki sabit noktası olduğunu varsayalım.* g*,* p *ile* q *arasındaki kapalı aralıkta sürekli, açık aralıkta türevlidir. Ortalama Değer Teoremi'ne (Teorem 1.4) göre* p *ile* q *arasında bir* ξ *için*

$$g'(\xi) = \frac{g(p) - g(q)}{p - q}$$

olur. Buradan

$$| p - q | = | g(p) - g(q) | = | g'(\xi) | | p - q | \leq k | p - q | < | p - q |$$

elde edilir. $| p - q | < | p - q |$ *bir çelişkidir. Dolayısıyla* $p = q$*'dur ve sabit nokta tek türlü belirlidir.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 5.2 (Bir Parabolün Tek Sabit Noktası). $g(x) = \dfrac{x^2-1}{3}$ fonksiyonunun $[-1,1]$ aralığında tek türlü belirli bir sabit noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
g bir polinom olduğundan $g \in C[-1,1]$'dir ve $g'(x) = \dfrac{2x}{3}$ türevi $(-1,1)$ üzerinde vardır.
Değerlerin aralıkta kalması. Ekstremum Değer Teoremi'ne (Teorem 1.5) göre g, $[-1,1]$ aralığında mutlak en küçük ve en büyük değerlerini ya uç noktalarda ya da $g'(x)=0$ olan noktalarda alır.

$$g(-1) = g(1) = 0, \qquad g'(x) = \frac{2x}{3} = 0 \Rightarrow x = 0, \qquad g(0) = -\frac{1}{3}$$

olduğundan

$$g : [-1,1] \to \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \subset [-1,1]$$

olur. Teorem 5.1 (i)'ye göre g'nin $[-1,1]$ aralığında, hatta $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$ aralığında en az bir sabit noktası vardır.
Teklik. Her $x \in (-1,1)$ için

$$\mid g'(x) \mid = \left|\frac{2x}{3}\right| = \frac{2}{3} \mid x \mid \leq \frac{2}{3} = k < 1$$

olduğundan Teorem 5.1 (ii)'ye göre bu sabit nokta tek türlü belirlidir.
Bu örnekte sabit nokta açıkça da bulunabilir: $\dfrac{p^2-1}{3} = p \Leftrightarrow p^2 - 3p - 1 = 0$ denkleminin $[-1,1]$'deki kökü $p = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \approx -0{,}30278$'dir. Diğer kök $\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3{,}30278$ aralığın dışındadır. ■

Teorem 5.1 sabit noktanın varlığı ve tekliği için yeter koşullar verir, ama sabit noktanın nasıl bulunacağını söylemez. Şimdi sabit noktaya istenen hassasiyette nasıl yaklaşılacağını ele alıyoruz.

5.3 İterasyon ve İterasyon Fonksiyonu

Sabit noktaya yaklaşmanın en doğal yolu g'yi art arda uygulamaktır.

Tanım 5.2 (Sabit Nokta İterasyonu ve İterasyon Fonksiyonu). Bir g fonksiyonu ve bir p_0 **ilk yaklaşım** değeri verilsin. Her $n \geq 1$ için

$$p_n = g(p_{n-1}) \tag{1}$$

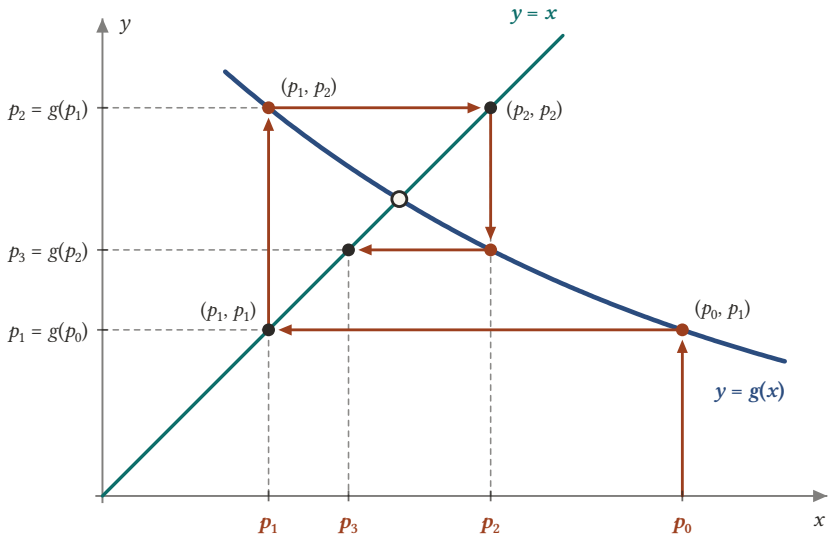
kuralıyla $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisini üretme tekniğine **sabit nokta iterasyonu**, g fonksiyonuna da **iterasyon fonksiyonu** denir.

Yani p_0'dan başlayıp her terimi bir öncekinin g altındaki görüntüsü olarak hesaplarız: $p_1 = g(p_0)$, $p_2 = g(p_1)$, ... Bu dizi bir p'ye yakınsar ve g sürekli ise

$$p = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g\Big(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}\Big) = g(p)$$

olur, yani limit $x = g(x)$ denkleminin bir çözümüdür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.3: Sabit nokta iterasyonunun geometrik yorumu. p_0'dan dikey olarak $y = g(x)$ grafiğine çıkılır ve $p_1 = g(p_0)$ okunur. Yatay olarak $y = x$ doğrusuna gidilince p_1 yatay eksene taşınır ve adım tekrarlanır. Azalan g için terimler sabit noktanın (içi boş nokta) iki yanında dolanarak ona yaklaşır.

$f(x) = 0$ denkleminin bir kökünü sabit nokta iterasyonuyla bulmak için önce bir iterasyon fonksiyonu seçilir; seçilen g'nin sabit noktası $f(x) = 0$ denkleminin gerçek köküdür. Bu seçim tek türlü değildir.

Örnek 5.3 (Aynı Denklem İçin Farklı İterasyon Fonksiyonları). $f(x) = x^2 - x - 2$ fonksiyonu için $g(x)$ iterasyon fonksiyonlarını belirleyiniz.

Çözüm.
$f(x) = 0$ denklemini $x = g(x)$ biçimine getirmek istiyoruz. Bunun birçok yolu vardır.
Birinci seçenek. x terimini yalnız bırakalım:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = x^2 - 2 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2.$$

İkinci seçenek. x^2 terimini yalnız bırakıp $x \geq 0$ için karekök alalım:

$$x^2 = x + 2 \Rightarrow x = \sqrt{x+2} \Rightarrow g(x) = \sqrt{x+2}.$$

Karekök negatif olmadığından bu g yalnız pozitif kökü ($p = 2$) sabit nokta olarak taşır: $g(-1) = 1 \neq -1$.
Üçüncü seçenek. $x^2 = x + 2$ eşitliğini $x \neq 0$ için x'e bölelim:

$$x = 1 + \frac{2}{x} \Rightarrow g(x) = 1 + \frac{2}{x}.$$

Dördüncü seçenek. $m \neq 0$ bir sabit olmak üzere

$$x = x + m(x^2 - x - 2) \Rightarrow g(x) = x + m(x^2 - x - 2).$$

Bu ailedeki her g'nin sabit noktaları tam olarak f'nin kökleridir. m serbest bir parametre olduğundan, m uygun seçilerek kök civarında $|\, g'(x) \,| $ küçültülebilir.
Dört fonksiyonun da 2'de sabit noktası vardır: $g(2) = 2$. ■

Hangi seçimin iyi olduğunu, yani iterasyonun yakınsayıp yakınsamadığını ve ne hızla yakınsadığını bir sonraki teorem belirler.

 CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Sabit Nokta Teoremi

Teorem 5.1'in (ii) koşulları yalnız sabit noktanın tekliğini değil, iterasyonun her başlangıç noktasından ona yakınsadığını da güvenceye alır.

Teorem 5.2 (Sabit Nokta Teoremi). *$g \in C[a,b]$ ve her $x \in [a,b]$ için $g(x) \in [a,b]$ olsun. Ayrıca g' türevi (a,b) aralığında mevcut olsun ve her $x \in (a,b)$ için*

$$| \, g'(x) \, | \leq k$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 < k < 1$ sayısı bulunsun. Bu durumda $[a,b]$ aralığındaki her p_0 için, $n \geq 1$ olmak üzere $p_n = g(p_{n-1})$ ile tanımlanan $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi, $[a,b]$ aralığındaki tek türlü belirli p sabit noktasına yakınsar.

> ***İspat.***
> *Teorem 5.1'e göre g'nin $[a,b]$ aralığında tek bir p sabit noktası vardır. $p_0 \in [a,b]$ ve g, $[a,b]$'yi kendi içine gönderdiğinden tümevarımla her $n \geq 0$ için $p_n \in [a,b]$ olur.*
> *$n \geq 1$ olsun. $p_{n-1} = p$ ise $p_n = g(p) = p$ olur. Aksi hâlde Ortalama Değer Teoremi'ne (Teorem 1.4) göre p_{n-1} ile p arasında, dolayısıyla (a,b) içinde bir ξ_n için*
>
> $$| \, p_n - p \, | = | \, g(p_{n-1}) - g(p) \, | = | \, g'(\xi_n) \, | \, | \, p_{n-1} - p \, | \leq k \, | \, p_{n-1} - p \, |$$
>
> *olur. İki durumda da $| \, p_n - p \, | \leq k \, | \, p_{n-1} - p \, |$'dir. Bu eşitsizliği art arda uygularsak*
>
> $$| \, p_n - p \, | \leq k \, | \, p_{n-1} - p \, | \leq k^2 \, | \, p_{n-2} - p \, | \leq \ldots \leq k^n \, | \, p_0 - p \, | \tag{2}$$
>
> *elde ederiz. $0 < k < 1$ olduğundan $n \to \infty$ iken $k^n \to 0$'dır. Böylece*
>
> $$0 \leq \lim_{n \to \infty} | \, p_n - p \, | \leq \lim_{n \to \infty} k^n \, | \, p_0 - p \, | = 0$$
>
> *olur, yani $p_n \to p$'dir.* ■

Teorem yakınsamayı güvenceye alır. Pratikte ise kaç adım atılacağını bilmek isteriz; bunun için hatayı sınırlamamız gerekir.

Sonuç 5.1 (Sabit Nokta İterasyonunda Hata Sınırları). *g fonksiyonu Sabit Nokta Teoremi'nin (Teorem 5.2) koşullarını sağlasın. p sabit noktasına yapılan p_n yaklaşımının mutlak hatası, $n \geq 1$ olmak üzere*
(i) $| \, p_n - p \, | \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$,
(ii) $| \, p_n - p \, | \leq \dfrac{k^n}{1-k} \, | \, p_1 - p_0 \, |$
eşitsizlikleriyle sınırlanır.

> ***İspat.***
> *(i) $p, p_0 \in [a,b]$ olduğundan p_0 ile p arasındaki uzaklık, p_0'ın uç noktalara uzaklıklarının büyüğünü aşamaz: $| \, p_0 - p \, | \leq \max\{p_0 - a, b - p_0\}$. Bunu (2) eşitsizliğinde yerine koyarsak*
>
> $$| \, p_n - p \, | \leq k^n \, | \, p_0 - p \, | \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$$
>
> *elde ederiz.*
> *(ii) Teoremin ispatındaki gibi Ortalama Değer Teoremi'ni ardışık terimlere uygularsak her $n \geq 1$ için*
>
> $$\begin{aligned} | \, p_{n+1} - p_n \, | &= | \, g(p_n) - g(p_{n-1}) \, | \leq k \, | \, p_n - p_{n-1} \, | \\ &\leq k^2 \, | \, p_{n-1} - p_{n-2} \, | \leq \ldots \leq k^n \, | \, p_1 - p_0 \, | \end{aligned}$$
>
> *olur. $m > n \geq 1$ için $p_m - p_n$ farkını ardışık farkların toplamı olarak yazıp üçgen eşitsizliğini kullanalım:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} \mid p_m - p_n \mid &= \mid (p_m - p_{m-1}) + (p_{m-1} - p_{m-2}) + \ldots + (p_{n+1} - p_n) \mid \\ &\leq \mid p_m - p_{m-1} \mid + \mid p_{m-1} - p_{m-2} \mid + \ldots + \mid p_{n+1} - p_n \mid \\ &\leq k^{m-1} \mid p_1 - p_0 \mid + k^{m-2} \mid p_1 - p_0 \mid + \ldots + k^n \mid p_1 - p_0 \mid \\ &= k^n \mid p_1 - p_0 \mid (1 + k + k^2 + \ldots + k^{m-n-1}). \end{aligned}$$

Teoreme göre $m \to \infty$ iken $p_m \to p$'dir. Parantezdeki toplam $\sum_{i=0}^{\infty} k^i$ geometrik serisinin bir kısmi toplamı olduğundan seriyi aşamaz. Böylece

$$\begin{aligned} \mid p - p_n \mid &= \lim_{m\to\infty} \mid p_m - p_n \mid \leq k^n \mid p_1 - p_0 \mid \sum_{i=0}^{\infty} k^i \\ &= k^n \mid p_1 - p_0 \mid \cdot \frac{1}{1-k} \end{aligned}$$

olur, yani $\mid p_n - p \mid \leq \dfrac{k^n}{1-k} \mid p_1 - p_0 \mid$*'dır.* ■

İki sınırda da hata k^n ile orantılı azalır. Dolayısıyla k değeri ne kadar küçükse yakınsama o kadar hızlıdır. Bu gözlem Örnek 5.3'deki seçenekleri karşılaştırmayı sağlar. g' sürekli ve $\mid g'(p) \mid < 1$ ise p'nin yeterince küçük bir $[p-\delta, p+\delta]$ komşuluğunda $\mid g'(x) \mid \leq k < 1$ olur. Bu komşuluktaki her x için Ortalama Değer Teoremi'nden

$$\mid g(x) - p \mid = \mid g(x) - g(p) \mid \leq k \mid x - p \mid \leq \delta$$

olduğundan g komşuluğu kendi içine gönderir ve Sabit Nokta Teoremi uygulanır. Kök civarındaki hızı belirleyen $\mid g'(p) \mid$ değeridir. $p = 2$ kökünde:

- $g(x) = x^2 - 2$ için $g'(x) = 2x$ ve $\mid g'(2) \mid = 4 > 1$'dir. 2'ye yeterince yakın ama ondan farklı bir p_n için $\mid g'(\xi) \mid > 1$ olur ve $\mid p_{n+1} - 2 \mid = \mid g'(\xi) \mid \mid p_n - 2 \mid$ farkı $\mid p_n - 2 \mid$'den büyüktür; iterasyon kökten uzaklaşır.
- $g(x) = \sqrt{x+2}$ için $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$ ve $\mid g'(2) \mid = \dfrac{1}{4}$'tür.
- $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$ için $g'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$ ve $\mid g'(2) \mid = \dfrac{1}{2}$'dir.
- $g(x) = x + m(x^2 - x - 2)$ için $g'(2) = 1 + 3m$'dir. $m = -\dfrac{1}{3}$ seçilirse $g(x) = \dfrac{-x^2 + 4x + 2}{3}$ ve $g'(2) = 0$ olur.

Yani ilk seçim $p = 2$ kökünü bulmakta işe yaramaz, ikincisi üçüncüsünden hızlıdır, dördüncüsünde ise $m = -\frac{1}{3}$ seçilerek kökteki türev sıfırlanır. $g'(p) = 0$ yapacak biçimde iterasyon fonksiyonu seçmek, bir sonraki bölümde Newton-Raphson Metodu'na götürecek fikirdir.

Örnek 5.4 (Gereken İterasyon Sayısının Belirlenmesi). $\sin x - \dfrac{x}{1{,}4} = 0$ denkleminin $[1, \frac{\pi}{2}]$ aralığındaki çözümünü sabit nokta iterasyonuyla bulmak için bir $g(x)$ iterasyon fonksiyonu belirleyiniz. Bu g ile $p_0 = 1{,}4$ alındığında denklemin çözümünü 10^{-6} hassasiyetle bulmak için gereken iterasyon sayısını Sonuç 5.1 (ii) ile belirleyiniz. İşlemlerde beş-basamak yuvarlama aritmetiği kullanınız.

Çözüm.
İterasyon fonksiyonu. Denklemi x'e göre düzenlersek

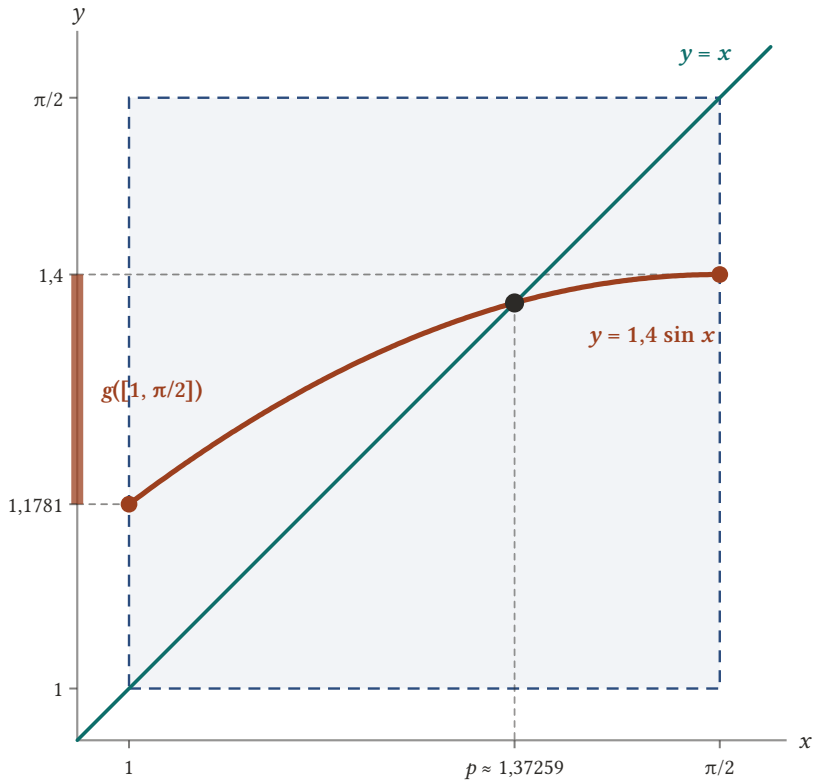
$$\sin x - \frac{x}{1{,}4} = 0 \Rightarrow x = 1{,}4 \sin x \Rightarrow g(x) = 1{,}4 \sin x$$

olur. Bu g'nin Sabit Nokta Teoremi'nin koşullarını sağladığını gösterelim.
Süreklilik ve aralıkta kalma. $g \in C[1, \frac{\pi}{2}]$'dir. $g'(x) = 1{,}4 \cos x$ ve $x \in [1, \frac{\pi}{2}]$ için $\cos x \geq 0$ olduğundan $g'(x) \geq 0$'dır; g bu aralıkta monoton artandır. Dolayısıyla her $x \in [1, \frac{\pi}{2}]$ için $g(1) \leq g(x) \leq g(\frac{\pi}{2})$ olur. Burada

$$\begin{aligned} g(1) &= 1{,}4 \sin 1 = 1{,}1781 > 1, \\ g\Big(\frac{\pi}{2}\Big) &= 1{,}4 \sin \frac{\pi}{2} = 1{,}4 < \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan her $x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ için $g(x) \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ sağlanır.



Şekil 5.4: $g(x) = 1{,}4 \sin x$ fonksiyonu $[1, \pi/2]$ aralığında artandır ve değerleri $[1{,}1781;\ 1{,}4]$ aralığında kalır; bu aralık kesikli karenin içindedir. Eğri $y = x$ doğrusunu karenin içinde tek bir $p \approx 1{,}37259$ noktasında keser.

Türev sınırı. $\cos x$ fonksiyonu $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında negatif olmayan ve azalan bir fonksiyondur; en büyük değerini $x = 1$'de alır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \mid g'(x) \mid &= 1{,}4 \mid \cos x \mid \leq 1{,}4 \max_{1 \leq x \leq \pi/2} \mid \cos x \mid \\ &= 1{,}4 \cos 1 = 0{,}75642 = k < 1 \end{aligned}$$

olur. Sabit Nokta Teoremi'nin koşulları sağlanır.
İterasyon sayısı. $p_0 = 1{,}4$ için

$$p_1 = g(p_0) = 1{,}4 \sin(1{,}4) = 1{,}4 \cdot 0{,}98545 = 1{,}3796$$

bulunur. Sonuç 5.1 (ii)'ye göre

$$\mid p_n - p \mid \leq \frac{k^n}{1-k} \mid p_1 - p_0 \mid < 10^{-6}$$

olmasını istiyoruz. Değerleri yerine koyalım:

$$\begin{aligned} &\frac{0{,}75642^n}{1 - 0{,}75642} \mid 1{,}3796 - 1{,}4 \mid < 10^{-6} \\ &\Rightarrow \frac{0{,}75642^n}{0{,}24358} \cdot 0{,}0204 < 10^{-6} \\ &\Rightarrow 0{,}75642^n < 11{,}940 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

İki tarafın onluk logaritmasını alalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$n \log 0{,}75642 < \log 11{,}940 - 6 \log 10$$
$$\Rightarrow n \cdot (-0{,}12124) < 1{,}0770 - 6 = -4{,}9230.$$

Negatif sayıya bölerken eşitsizlik yön değiştirir:

$$n > \frac{4{,}9230}{0{,}12124} = 40{,}605 \Rightarrow n \geq 41.$$

Yani 41 iterasyon 10^{-6} hassasiyeti güvenceye alır. ■

Aynı soruyu Sonuç 5.1'nin öteki sınırıyla da yanıtlayabiliriz.

Örnek 5.5 (Öteki Hata Sınırıyla İterasyon Sayısı). $g(x) = 1{,}4 \sin x$, $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ ve $p_0 = 1{,}4$ için (Örnek 5.4) 10^{-6} hassasiyet için gereken iterasyon sayısını Sonuç 5.1 (i) ile belirleyiniz ve (ii) ile bulunan sonuçla karşılaştırınız. İşlemlerde beş-basamak yuvarlama aritmetiği kullanınız.

Çözüm.
Örnek 5.4'nde koşulların sağlandığını ve $k = 0{,}75642$ olduğunu gördük. $a = 1$, $b = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$ ve $p_0 = 1{,}4$ için

$$p_0 - a = 1{,}4 - 1 = 0{,}4,$$
$$b - p_0 = 1{,}5708 - 1{,}4 = 0{,}1708$$

olduğundan $\max\{p_0 - a, b - p_0\} = 0{,}4$'tür. Sonuç 5.1 (i)'ye göre

$$| p_n - p | \leq 0{,}75642^n \cdot 0{,}4 < 10^{-6}$$

olmasını istiyoruz:

$$0{,}75642^n < \frac{10^{-6}}{0{,}4} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$$
$$\Rightarrow n \log 0{,}75642 < \log 2{,}5 - 6 \log 10$$
$$\Rightarrow n \cdot (-0{,}12124) < 0{,}39794 - 6 = -5{,}6021$$
$$\Rightarrow n > \frac{5{,}6021}{0{,}12124} = 46{,}207 \Rightarrow n \geq 47.$$

Karşılaştırma. (i) sınırı 47, (ii) sınırı 41 iterasyon verir; burada (ii) daha keskindir. (i) yalnız p'nin $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ içinde olduğunu bilir ve $| p_0 - p |$ için en kötü durumu, 0,4 uzaklığı kullanır. (ii) ise ilk adımın büyüklüğünü kullanır. $p_0 = 1{,}4$ köke yakın olduğundan $| p_1 - p_0 | = 0{,}0204$ küçüktür ve sınır daha iyi çıkar.
İki sınır da gerçek durumdan çok daha karamsardır. Sabit nokta $p \approx 1{,}37259$'dur ve tam duyarlıkla hesaplandığında $| p_n - p | < 10^{-6}$ eşitsizliği $n = 8$'de sağlanır. Bunun nedeni, $k = 0{,}75642$'nin $| g' |$'nün bütün aralıktaki en büyük değeri olmasıdır; kökte ise $| g'(p) | = 1{,}4 \cos p \approx 0{,}27568$'dir. ■

5.5 Sabit Nokta İterasyonu ile Kök Bulma

Yöntemi bir denklemin kökünü bulmak için baştan sona uygulayalım. Durma kriteri olarak ya ardışık iki terimin farkı ya da $| p_n - g(p_n) |$ kullanılır; $g(p_n) = p_{n+1}$ olduğundan ikisi aynı büyüklüğü ölçer.

Dört adımda sabit nokta iterasyonu

1. $f(x) = 0$ denklemini $x = g(x)$ biçimine getir.
2. $g \in C[a, b]$ olduğunu ve monotonluk ya da ekstremumlar yardımıyla $g([a, b]) \subset [a, b]$ olduğunu göster.
3. $k = \max| g'(x) |$ değerini hesapla ve $k < 1$ olduğunu doğrula.
4. p_0'dan başlayıp $p_n = g(p_{n-1})$ değerlerini durma kriteri sağlanana kadar bir tabloda hesapla.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 5.6 (Bir Üstel Denklemin Kökü). $xe^x = 0{,}3$ denkleminin $[0{,}1;\ 0{,}9]$ aralığındaki kökünü, uygun bir g iterasyon fonksiyonuyla, $p_0 = 0{,}2$ alarak ve

$$\mid p_n - g(p_n) \mid < 10^{-4} \tag{3}$$

durma kriterini kullanarak sabit nokta iterasyonuyla belirleyiniz. İşlemlerde virgülden sonra 5. basamağa yuvarlama yapınız ve sonuçları bir tabloda gösteriniz.

Çözüm.
İterasyon fonksiyonu. $f(x) = xe^x - 0{,}3 = 0$ denkleminin iki tarafını e^x'e bölersek $x = 0{,}3e^{-x}$ olur. $g(x) = 0{,}3e^{-x}$ alalım.
Aralıkta kalma. $g \in C[0{,}1;\ 0{,}9]$'dur. $g'(x) = -0{,}3e^{-x} < 0$ olduğundan g bu aralıkta monoton azalandır. Dolayısıyla her $0{,}1 \le x \le 0{,}9$ için $g(0{,}9) \le g(x) \le g(0{,}1)$ olur. Burada

$$g(0{,}9) = 0{,}12197 > 0{,}1, \qquad g(0{,}1) = 0{,}27145 < 0{,}9$$

olduğundan

$$g(x) \in [0{,}12197;\ 0{,}27145] \subset [0{,}1;\ 0{,}9]$$

sağlanır. Teorem 5.1 (i)'ye göre g'nin bu aralıkta en az bir sabit noktası vardır.
Türev sınırı. e^{-x} azalan olduğundan en büyük değerini $x = 0{,}1$'de alır:

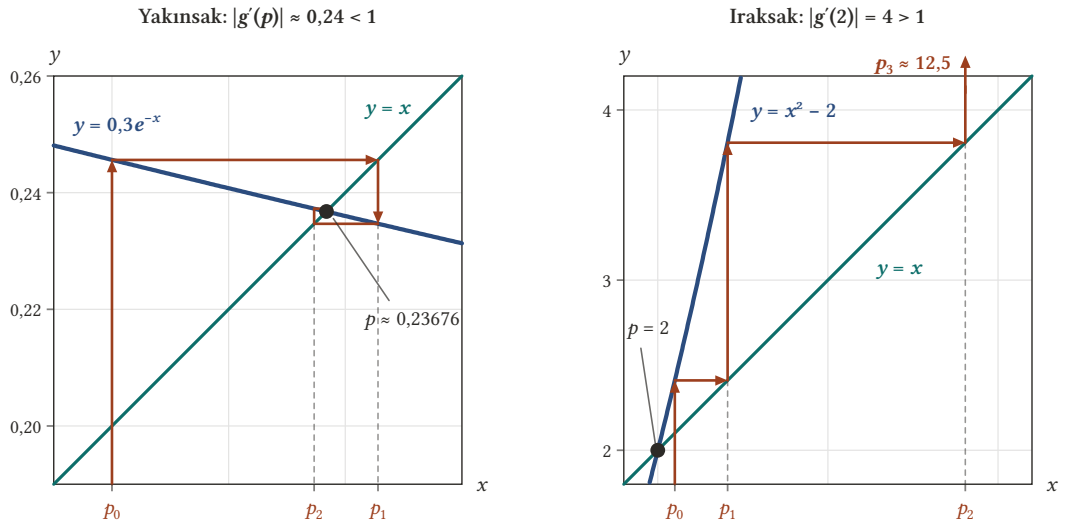
$$\begin{aligned} \mid g'(x) \mid &= 0{,}3e^{-x} \le 0{,}3 \max_{0{,}1 \le x \le 0{,}9} e^{-x} \\ &= 0{,}3e^{-0{,}1} = 0{,}27145 = k < 1. \end{aligned}$$

Sabit Nokta Teoremi'ne (Teorem 5.2) göre sabit nokta tek türlü belirlidir ve iterasyon ona yakınsar.
İterasyon. $p_0 = 0{,}2$ ve $n \ge 1$ için $p_n = g(p_{n-1})$ ile hesaplarsak şu tabloyu elde ederiz:

n	p_n	$g(p_n)$	$\mid p_n - g(p_n) \mid$
0	0,20000	0,24562	0,04562
1	0,24562	0,23467	0,01095
2	0,23467	0,23725	0,00258
3	0,23725	0,23664	0,00061
4	0,23664	0,23678	0,00014
5	0,23678	0,23675	0,00003

$n = 5$'te $\mid p_5 - g(p_5) \mid = 0{,}00003 < 10^{-4}$ olduğundan (3) numaralı durma kriteri sağlanır ve $p \approx p_5 = 0{,}23678$ bulunur.
Terimler kökün bir sağında bir solunda kalarak ona yaklaşır. Bunun nedeni g''nün negatif olmasıdır: $g'(x) = -g(x)$ olduğundan $g'(p) = -p \approx -0{,}24$'tür. Aşağıdaki örümcek ağı diyagramında bu salınımlı yakınsama, $\mid g' \mid > 1$ olan bir iterasyonun ıraksamasıyla karşılaştırılıyor. Sağdaki panel Örnek 5.3'deki $g(x) = x^2 - 2$ fonksiyonunu $p_0 = 2{,}1$ ile gösterir: $p_1 = 2{,}41$, $p_2 = 3{,}8081$, $p_3 \approx 12{,}5$ ve terimler $p = 2$ kökünden hızla uzaklaşır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.5: Örümcek ağı diyagramları. Solda $g(x) = 0{,}3e^{-x}$ ve $p_0 = 0{,}2$: eğriye dikey, $y = x$ doğrusuna yatay adımlar kökün iki yanında dolanarak $p \approx 0{,}23676$ noktasına daralır. Sağda $g(x) = x^2 - 2$ ve $p_0 = 2{,}1$: adımlar 2,41 ve 3,8081 üzerinden $p = 2$ kökünden uzaklaşır, $p_3 \approx 12{,}5$ çerçevenin dışındadır.

■

5.6 Alıştırmalar

Alıştırma 5.1 (Kök Üçe Sabit Nokta İterasyonuyla Yaklaşım). $\sqrt{3}$ sayısına $[1{,}5;\,2]$ aralığında

$$g(x) = 0{,}5\left(x + \frac{3}{x}\right)$$

iterasyon fonksiyonu ve

$$| p_n - p_{n-1} | < 10^{-4} \tag{4}$$

durma kriteriyle sabit nokta iterasyonu kullanarak yaklaşınız. $p_0 = 1{,}5$ alıp işlemlerde virgülden sonra 5. basamağa yuvarlama yaparak bir tablo oluşturunuz.

Çözüm.
Denklem. $\sqrt{3}$, $x^2 - 3 = 0$ denkleminin bir köküdür. $f(x) = x^2 - 3$ olmak üzere bu denklemi $[1{,}5;\,2]$ aralığında ele alalım. $x \neq 0$ için

$$g(x) = x \Leftrightarrow \frac{3}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 3$$

olduğundan g'nin bu aralıktaki sabit noktası $\sqrt{3}$'tür.
Aralıkta kalma. $g \in C[1{,}5;\,2]$'dir ve

$$g'(x) = 0{,}5\left(1 - \frac{3}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

kritik noktadır. $g(1{,}5) = 1{,}75$, $g(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ ve $g(2) = 1{,}75$'tir. g''nün işaretine göre:

x	$1{,}5$		$\sqrt{3}$		2
g'		$-$	0	$+$	

x	1,5		$\sqrt{3}$		2
g	1,75	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	1,75

Buna göre

$$x \in [1{,}5;\, 2] \Rightarrow g(x) \in [\sqrt{3};\, 1{,}75] \subset [1{,}5;\, 2]$$

olur.

Türev sınırı. $h(x) = \left|1 - \dfrac{3}{x^2}\right|$ diyelim. Parçalı olarak

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^2} - 1, & 1{,}5 \le x \le \sqrt{3}, \\ 1 - \dfrac{3}{x^2}, & \sqrt{3} \le x \le 2 \end{cases}$$

ve

$$h'(x) = \begin{cases} -\dfrac{6}{x^3}, & 1{,}5 \le x < \sqrt{3}, \\ \dfrac{6}{x^3}, & \sqrt{3} < x \le 2 \end{cases}$$

olur. h, $[1{,}5;\, \sqrt{3}]$ üzerinde azalan, $[\sqrt{3};\, 2]$ üzerinde artandır ($h'(\sqrt{3})$ yoktur). $h(1{,}5) = 0{,}33333$, $h(\sqrt{3}) = 0$ ve $h(2) = 0{,}25$ olduğundan her $x \in [1{,}5;\, 2]$ için $0 \le h(x) \le 0{,}33333$'tür. En büyük değer $x = 1{,}5$'te alınır:

$$\begin{aligned} |\, g'(x)\, | &= 0{,}5 \cdot h(x) \le 0{,}5 \cdot \left|1 - \frac{3}{1{,}5^2}\right| \\ &= 0{,}5 \cdot 0{,}33333 = 0{,}16667 = k < 1. \end{aligned}$$

Sabit Nokta Teoremi'nin (Teorem 5.2) koşulları sağlanır.

İterasyon. $p_0 = 1{,}5$ ve $n \ge 1$ için $p_n = g(p_{n-1})$ olmak üzere:

n	p_n	$g(p_n)$	$\lvert\, p_n - p_{n-1}\, \rvert$
0	1,50000	1,75000	
1	1,75000	1,73214	0,25000
2	1,73214	1,73205	0,01786
3	1,73205	1,73205	0,00009

Örneğin

$$g(p_1) = 0{,}5\,(1{,}75 + 1{,}714286) = 1{,}732143$$

değeri 1,73214'e yuvarlanır. $n = 3$'te $|\, p_3 - p_2\, | = 0{,}00009 < 10^{-4}$ olduğundan (4) numaralı durma kriteri sağlanır ve

$$\sqrt{3} \approx p_3 = 1{,}73205$$

bulunur. ■

Alıştırma 5.2 (Gereken İterasyon Sayısı İçin Bir Alıştırma). Örnek 5.3'deki $g(x) = \sqrt{x+2}$ iterasyon fonksiyonunun $[1, 3]$ aralığında Sabit Nokta Teoremi'nin koşullarını sağladığını gösteriniz. $p_0 = 1$ için $p = 2$ köküne 10^{-4} hassasiyetle yaklaşmak üzere gereken iterasyon sayısını Sonuç 5.1 (ii) ile belirleyiniz. İşlemlerde virgülden sonra 5. basamağa yuvarlama yapınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Aralıkta kalma. $x+2>0$ olduğundan $g\in C[1,3]$'tür. $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}>0$ olduğundan g artandır ve

$$g(1)=\sqrt{3}=1{,}73205,\qquad g(3)=\sqrt{5}=2{,}23607$$

olur. Böylece $g(x)\in[1{,}73205;\,2{,}23607]\subset[1,3]$'tür.
Türev sınırı. g' pozitif ve azalandır; en büyük değerini $x=1$'de alır:

$$\mid g'(x)\mid \le \frac{1}{2\sqrt{3}}=0{,}28868=k<1.$$

Koşullar sağlanır ve $[1,3]$'teki tek sabit nokta $p=2$'dir.
İterasyon sayısı. $p_1=g(1)=1{,}73205$, $\mid p_1-p_0\mid=0{,}73205$ ve $1-k=0{,}71132$'dir. Sonuç 5.1 (ii)'ye göre

$$\begin{aligned}&\frac{0{,}28868^{n}}{0{,}71132}\cdot 0{,}73205<10^{-4}\\ &\Rightarrow 0{,}28868^{n}<0{,}97168\cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

olmalıdır. Onluk logaritma alırsak

$$\begin{aligned}&n\log 0{,}28868<\log 0{,}97168-4\log 10\\ &\Rightarrow n\cdot(-0{,}53958)<-0{,}01248-4=-4{,}01248\\ &\Rightarrow n>\frac{4{,}01248}{0{,}53958}=7{,}4363\Rightarrow n\ge 8\end{aligned}$$

bulunur. Yani 8 iterasyon 10^{-4} hassasiyeti güvenceye alır. Gerçekte hata $n=7$'de ($p_7\approx 1{,}99993$) 10^{-4}'ün altına iner; hata sınırı her zaman güvenli tarafta kalır. ■

Sabit nokta iterasyonunda hız $\mid g'(p)\mid$ ile belirlenir ve iyi bir iterasyon fonksiyonu bulmak çoğu zaman deneme yanılma ister. Bir sonraki bölümde $g'(p)=0$ olacak biçimde g'yi türevle kuran ve çok daha hızlı yakınsayan yöntemi inceliyoruz: Newton-Raphson Metodu.

 CC BY-NC-SA 4.0

6. Newton-Raphson Metodu

İkiye Bölme Metodu her durumda yakınsar ama yavaştır; Sabit Nokta İterasyonu ise iyi bir g seçimine bağlıdır. Newton-Raphson Metodu (kısaca Newton metodu), fonksiyonun türevini de kullanarak kök bulma problemleri için bilinen en etkili yöntemlerden biri olur: köke yeterince yakın bir başlangıçtan sonra her adımda doğru basamak sayısı hızla artar.
Newton yöntemini 1669'da yazdı, ama çalışma ancak 1711'de basıldı; Joseph Raphson 1690'da daha sade bir biçimini yayımladı. Bugün kullandığımız türevli yazım Thomas Simpson'a (1740) dayanır.

6.1 Taylor polinomundan türetme

Yöntem, f fonksiyonunu başlangıç yaklaşımı civarında birinci dereceden Taylor polinomuyla değiştirmekten doğar.
$f \in C^2[a,b]$ olsun ve p kökü için $p_0 \in [a,b]$ öyle bir başlangıç yaklaşımı olsun ki $f'(p_0) \neq 0$ ve $\mid p - p_0 \mid$ yeterince küçük olsun. Taylor Teoremine (Teorem 1.9) göre her $x \in [a,b]$ için x ile p_0 arasında bir $\xi(x)$ sayısı vardır ve

$$f(x) = f(p_0) + (x - p_0)f'(p_0) + \frac{(x-p_0)^2}{2}f''(\xi(x))$$

yazılabilir. Burada $x = p$ alalım. $f(p) = 0$ olduğundan, p ile p_0 arasındaki $\xi(p)$ için

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p-p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

elde edilir. $\mid p - p_0 \mid$ küçük olduğundan $(p-p_0)^2$ çok daha küçüktür; son terimi ihmal edersek

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) \quad \Rightarrow \quad p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

bulunur (son adımda $f'(p_0) \neq 0$ ile bölündü). Sağdaki sayıyı p_1 diye adlandırıp aynı işlemi p_1'den başlayarak tekrarlarsak p_2, sonra p_3, ... elde edilir.

Tanım 6.1 (Newton-Raphson Metodu). $f \in C^2[a,b]$ ve $p_0 \in [a,b]$ verilsin.

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \qquad n \geq 1 \tag{1}$$

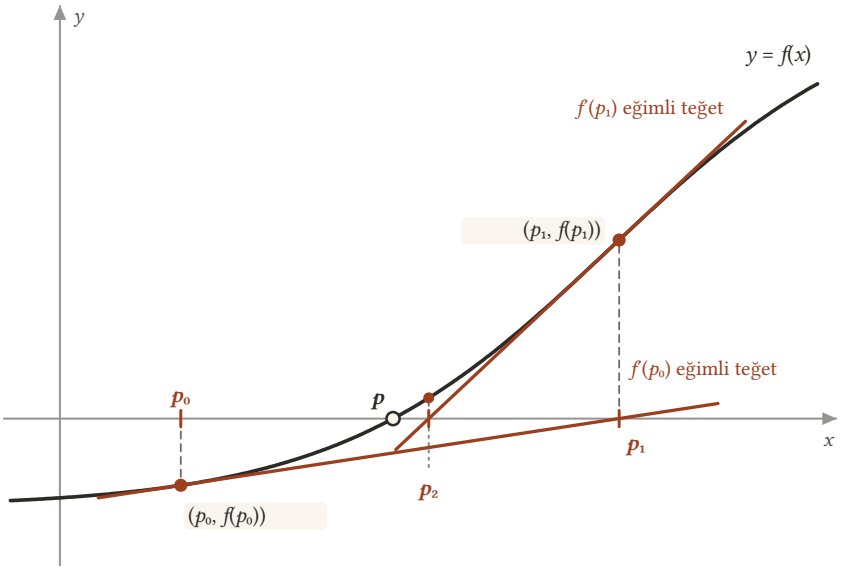
indirgeme bağıntısıyla $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisini üreten yönteme **Newton-Raphson Metodu**, p_0 sayısına da **başlangıç yaklaşımı** denir. Her adımda $f'(p_{n-1}) \neq 0$ olması gerekir.

Yani her adımda f yerine onun p_{n-1}'deki doğrusal yaklaşımı konur ve bu doğrunun kökü bir sonraki yaklaşım olarak alınır.
Bu doğrusal yaklaşım, f'nin grafiğine $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$ noktasında çizilen teğettir:

$$y = f(p_{n-1}) + f'(p_{n-1})\,(x - p_{n-1}).$$

$y = 0$ konursa $x = p_n$ çıkar. Demek ki p_n, grafiğe $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$ noktasında çizilen teğetin x eksenini kestiği noktadır. Aşağıdaki şekil ilk iki adımı gösteriyor; somut bir denklemdeki teğetler Örnek 6.1 çözümündedir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.1: Newton-Raphson Metodunun geometrik anlamı. $(p_0, f(p_0))$ noktasındaki teğet x eksenini p_1'de, $(p_1, f(p_1))$ noktasındaki teğet p_2'de keser; p_2, p köküne p_0'dan çok daha yakındır.

İterasyon, İkiye Bölme Metodu bölümündeki durma kriterlerinden biriyle durdurulur; bu bölümde çoğunlukla verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$| p_n - p_{n-1} | < \varepsilon \tag{2}$$

kriteri kullanılır.

6.2 Yakınsama

Newton-Raphson Metodu, $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ fonksiyonuyla yapılan bir sabit nokta iterasyonudur. Bu gözlem, yakınsamayı Sabit Nokta Teoreminden elde etmemizi sağlar.

Teorem 6.1 (Newton-Raphson Metodunun yakınsaması). *$f \in C^2[a,b]$ olsun. Bir $p \in (a,b)$ için $f(p) = 0$ ve $f'(p) \neq 0$ ise öyle bir $\delta > 0$ vardır ki her $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ başlangıç yaklaşımı için (1) ile üretilen $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi p köküne yakınsar.*

İspat.
$g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ diyelim. O zaman (1) bağıntısı $p_n = g(p_{n-1})$, $n \geq 1$ fonksiyonel iterasyonudur ve $f(p) = 0$ olduğundan $g(p) = p$ sağlanır. $0 < k < 1$ sabitlensin. Amacımız

- *$g([p-\delta, p+\delta]) \subseteq [p-\delta, p+\delta]$ ve*
- *her $x \in (p-\delta, p+\delta)$ için $| g'(x) | \leq k$*

olacak biçimde bir $\delta > 0$ bulmak; bu durumda Sabit Nokta Teoreminin (Teorem 5.2) koşulları $[p-\delta, p+\delta]$ aralığında sağlanmış olur.
g'nin tanımlı ve türevlenebilir olduğu bir aralık. *f' sürekli ve $f'(p) \neq 0$ olduğundan, ayrıca p iç nokta olduğundan, öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki $[p-\delta_1, p+\delta_1] \subseteq [a,b]$ ve bu aralıktaki her x için $f'(x) \neq 0$ olur. Böylece g, $[p-\delta_1, p+\delta_1]$ üzerinde tanımlı ve süreklidir. Bölüm kuralıyla bu aralıkta*

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{f'(x)\,f'(x) - f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2} \\ &= \frac{f(x)\,f''(x)}{[f'(x)]^2} \end{aligned}$$

bulunur. f, f', f'' sürekli ve payda sıfırdan farklı olduğundan $g \in C^1[p-\delta_1, p+\delta_1]$ olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

$|\, g' \,| \le k$ olan daha küçük bir aralık. $f(p) = 0$ *olduğundan*

$$g'(p) = \frac{f(p)\, f''(p)}{[f'(p)]^2} = 0$$

dır. g' *fonksiyonu* p *noktasında sürekli olduğundan öyle bir* $0 < \delta < \delta_1$ *vardır ki her* $x \in [p-\delta, p+\delta]$ *için* $|\, g'(x) \,| \le k$ *olur.*
***g* aralığı kendi içine gönderir.** $x \in [p-\delta, p+\delta]$ *alalım.* $x = p$ *ise* $g(x) = p$ *aralıktadır.* $x \neq p$ *ise Ortalama Değer Teoremine (Teorem 1.4) göre* x *ile* p *arasında bir* ξ *vardır ve* $|\, g(x) - g(p) \,| = |\, g'(\xi) \,||\, x - p \,|$ *olur.* ξ *de* $[p-\delta, p+\delta]$ *içinde olduğundan* $|\, g'(\xi) \,| \le k$ *dır; dolayısıyla*

$$|\, g(x) - p \,| = |\, g(x) - g(p) \,| = |\, g'(\xi) \,||\, x - p \,| \le k\,|\, x - p \,| \le k\delta < \delta$$

ve $g(x) \in [p-\delta, p+\delta]$ *elde edilir.*
Sonuç. g, $[p-\delta, p+\delta]$ *üzerinde Sabit Nokta Teoreminin bütün koşullarını sağlar. Bu aralıktaki tek sabit nokta* p *olduğundan, her* $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ *için*

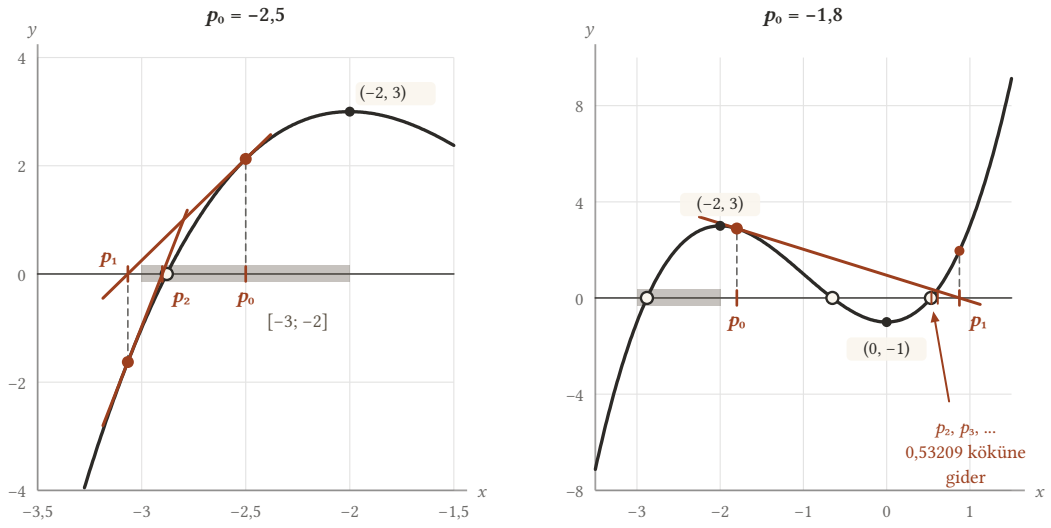
$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \qquad n \ge 1$$

dizisi p*'ye yakınsar.* ■

Yani $f'(p) \neq 0$ olan basit bir kökte, p_0 köke yeterince yakın seçilirse Newton-Raphson Metodu yakınsar. Teorem yalnız böyle bir δ'nın var olduğunu söyler, büyüklüğünü vermez; bu yüzden uygulamada önce kökü içeren dar bir aralık belirlenir ve p_0 bu aralıktan seçilir.

⚠ Türev sıfıra yakınsa teğet uzağa gider

$f'(p_{n-1})$ küçükse teğet neredeyse yataydır ve x eksenini çok uzakta keser. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ için $f'(x) = 3x(x+2)$ türevi $x = -2$ ve $x = 0$'da sıfırdır. $[-3; -2]$ aralığındaki kökü ararken $p_0 = -1{,}8$ seçilirse $f(p_0) = 2{,}888$, $f'(p_0) = -1{,}08$ ve $p_1 = 0{,}87407$ olur; dizi bundan sonra aranan kök yerine $0{,}53209$ köküne yakınsar. $p_0 = -2{,}5$ seçilince de $p_1 = -3{,}06667$ aralığın dışına düşer, ama dizi geri dönüp aranan köke yakınsar (Alıştırma 6.2).



Şekil 6.2: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ için iki başlangıç. Solda (yakınlaştırılmış pencere) $p_0 = -2{,}5$'teki teğet x eksenini $[-3; -2]$ bandının solunda, $p_1 = -3{,}06667$'de keser; p_1'deki teğet $p_2 = -2{,}90088$'i verir ve dizi banttaki köke döner. Sağda $p_0 = -1{,}8$ yerel maksimuma yakındır, $f'(p_0) = -1{,}08$ küçüktür; neredeyse yatay teğet $p_1 = 0{,}87407$'ye uzanır ve $p_2 = 0{,}61403$, $p_3 = 0{,}53873$ ile dizi $0{,}53209$ köküne gider. İçi boş daireler köklerdir.

 CC BY-NC-SA 4.0

6.3 Yöntemin uygulanması

Yöntemi bir tabloyla yürütmek, hem hesabı düzenli tutar hem de durma kriterini her satırda okumayı sağlar.

Newton-Raphson metodu dört adımda

1. f ve f' fonksiyonlarını yaz; kökü içeren bir $[a, b]$ aralığı belirle (uç noktalarda işaret değişimi) ve $f \in C^2[a, b]$ olduğunu gör.
2. Bu aralıktan bir p_0 seç; $f'(p_0) \neq 0$ olduğunu, mümkünse aralık boyunca $f' \neq 0$ olduğunu kontrol et.
3. (1) bağıntısını uygula; her satıra n, p_n, $f(p_n)$, $f'(p_n)$, $f(p_n)/f'(p_n)$ ve $\mid p_n - p_{n-1} \mid$ değerlerini yaz. Bir sonraki yaklaşım $p_{n+1} = p_n - f(p_n)/f'(p_n)$ dir.
4. (2) numaralı durma kriteri sağlanınca (ya da istenen p_n'ye ulaşınca) dur ve $p \approx p_n$ al.

Örnek 6.1 (cos x − x = 0 denkleminin kökü). $\cos x - x = 0$ denkleminin p köküne, $p_0 = \pi/4$ başlangıç yaklaşımı ve $\mid p_n - p_{n-1} \mid < 10^{-8}$ durma kriteriyle Newton-Raphson Metodu kullanarak bir yaklaşımda bulunun. İşlemleri yuvarlama yapmadan bir tabloda gösterin.

Çözüm.
Aralık ve koşullar. $f(x) = \cos x - x$ olsun. $f(0) = 1 > 0$ ve $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$ olduğundan Ara Değer Teoremine (Teorem 1.7) göre $p \in [0, \pi/2]$ dir. Türev

$$f'(x) = -\sin x - 1$$

$[0, \pi/2]$ üzerinde -1 ile -2 arasındadır, yani sıfırdan farklıdır; özellikle $f'(p) \neq 0$. $f \in C^2[0, \pi/2]$ olduğundan Teorem 6.1 koşulları sağlanır; dolayısıyla köke yeterince yakın başlangıçlar için yöntem yakınsar. $p_0 = \pi/4$'ün bu komşulukta olduğunu tablo gösterir.
İterasyon. $p_0 = \pi/4 \approx 0{,}785398163$ ve $n \geq 1$ için

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\cos(p_{n-1}) - p_{n-1}}{-\sin(p_{n-1}) - 1}$$

dir. İlk adımda $f(p_0) = -0{,}078291382$, $f'(p_0) = -1{,}707106781$ ve

$$p_1 = 0{,}785398163 - 0{,}045862030 = 0{,}739536134$$

bulunur (gösterilen değerler 9 basamağa yuvarlanmıştır). Hesap tam duyarlıkla sürdürülür; tabloda yalnız gösterim 9 ondalık basamağa yuvarlandığı için son basamakta 1 birimlik farklar görünebilir. 10^{-9}'dan küçük değerler bilimsel yazımla verilmiştir.

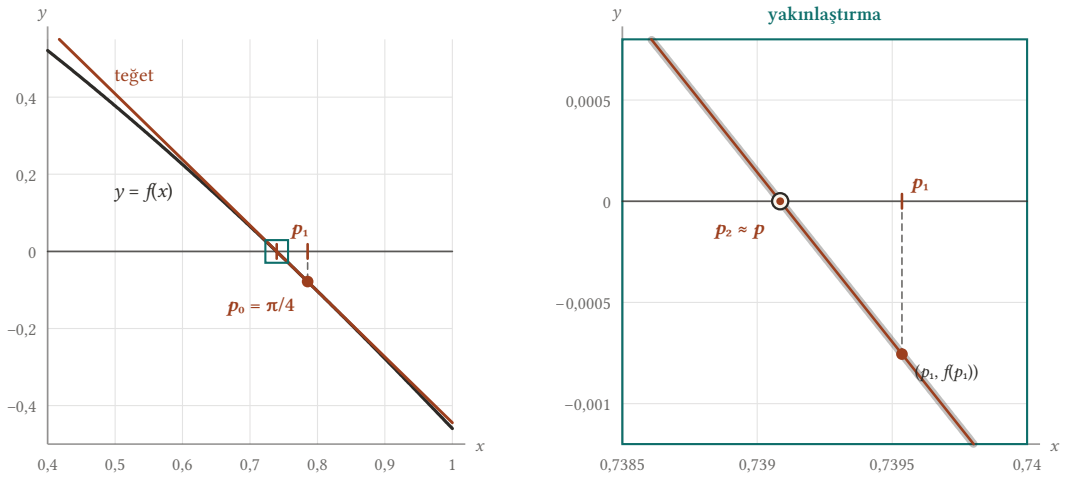
n	p_n	$f(p_n)$	$f'(p_n)$	$f(p_n)/f'(p_n)$	$\mid p_n - p_{n-1} \mid$
0	0,785398163	−0,078291382	−1,707106781	0,045862030	
1	0,739536134	−0,000754875	−1,673945288	0,000450955	0,045862030
2	0,739085178	−0,000000075	−1,673612062	0,000000045	0,000450955
3	0,739085133	$-0{,}745 \cdot 10^{-15}$	−1,673612029	$0{,}445 \cdot 10^{-15}$	0,000000045
4	0,739085133				$0{,}445 \cdot 10^{-15}$

$n = 3$ satırında $\mid p_3 - p_2 \mid = 0{,}000000045 > 10^{-8}$ olduğundan bir adım daha atılır; $n = 4$ satırında $\mid p_4 - p_3 \mid < 10^{-8}$ olur ve iterasyon durur:

$$p \approx p_4 = 0{,}739085133.$$

Teğetlerin yaklaşımları nasıl ürettiği aşağıda görülüyor. p_0'daki teğet x eksenini p_1'de keser; p_1'deki teğet ise p_2'de keser ve p_2 kökten ancak $4{,}5 \cdot 10^{-8}$ kadar uzaktadır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.3: $f(x) = \cos x - x$ için Newton-Raphson adımları. Solda $p_0 = \pi/4$ noktasındaki teğet x eksenini $p_1 = 0{,}739536$'da keser; teğet grafiğe o kadar yakındır ki ancak uçlarda ayrılır. Küçük kare, sağda büyütülen $[0{,}7385;\, 0{,}7400] \times [-0{,}0012;\, 0{,}0008]$ penceresinin yerini gösterir (gerçek boyutu bu ölçekte bir pikselden küçüktür). Sağda grafik ile p_1'deki teğet ayırt edilemez; teğet x eksenini $p_2 = 0{,}739085178$'de keser ve içi boş daireyle gösterilen $p = 0{,}739085133$ kökü bu ölçekte p_2 ile üst üstedir.

$|\, p_n - p_{n-1} \,|$ sütunu $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}$ mertebelerinden geçer: her adımda doğru basamak sayısı kabaca iki katına çıkar. ■

6.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda her adımda virgülden sonra 5. basamağa yuvarlanır ve hesaba yuvarlanmış değerle devam edilir.

Alıştırma 6.1 ($x^2 - 6 = 0$ denkleminin pozitif kökü). $x^2 - 6 = 0$ denkleminin pozitif köküne, Newton-Raphson Metodu ile $p_0 = 2$ alarak p_3 yaklaşımında bulunun. İşlemlerde virgülden sonra 5. basamağa yuvarlama yaparak bir tablo oluşturun.

Çözüm.
Aralık ve koşullar. $f(x) = x^2 - 6$ olsun. Pozitif kök $\sqrt{6}$ dır ve $2 = \sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$ olduğundan $[2, 3]$ aralığında çalışırız. $f \in C^2[2, 3]$ ve $f'(x) = 2x \geq 4$ olduğundan türev bu aralıkta sıfırdan farklıdır.
İterasyon. $p_0 = 2{,}00000$ ve $n \geq 1$ için

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^2 - 6}{2p_{n-1}}$$

dir. İlk satırda $f(2) = -2$, $f'(2) = 4$, $f(p_0)/f'(p_0) = -0{,}5$ ve $p_1 = 2 - (-0{,}5) = 2{,}5$ olur. İkinci satırda $f(2{,}5) = 0{,}25$, $f'(2{,}5) = 5$, oran $0{,}05$ ve $p_2 = 2{,}45$ bulunur. Üçüncü satırda $0{,}0025/4{,}9 = 0{,}000510\ldots$ değeri $0{,}00051$'e yuvarlanır ve $p_3 = 2{,}45 - 0{,}00051 = 2{,}44949$ elde edilir.

n	p_n	$f(p_n)$	$f'(p_n)$	$f(p_n)/f'(p_n)$
0	2,00000	−2,00000	4,00000	−0,50000
1	2,50000	0,25000	5,00000	0,05000
2	2,45000	0,00250	4,90000	0,00051
3	2,44949			

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç $p_3 = 2{,}44949$ dur. $\sqrt{6} = 2{,}4494897\ldots$ olduğundan p_3 beş basamağa kadar doğrudur.
Bağıntı sadeleştirilirse $p_n = \frac{1}{2}\left(p_{n-1} + \frac{6}{p_{n-1}}\right)$ olur: Sabit Nokta İterasyonu bölümünde $\sqrt{3}$ için kullanılan $g(x) = 0{,}5\left(x + \frac{3}{x}\right)$ fonksiyonu, $f(x) = x^2 - 3$'e uygulanan Newton-Raphson Metodundan başka bir şey değildir. ■

Alıştırma 6.2 (Kübik denklemin −3 ile −2 arasındaki kökü). $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ denkleminin $[-3; -2]$ aralığındaki köküne Newton-Raphson Metodu ile $p_0 = -2{,}5$ alarak $\mid p_n - p_{n-1} \mid < 10^{-4}$ durma kriteriyle bir p_n yaklaşımında bulunun. Hesapları her adımda virgülden sonra 5. basamağa yuvarlayarak bir tabloda gösterin.

Çözüm.
Aralık ve koşullar. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ olsun. $f(-3) = -1 < 0$ ve $f(-2) = 3 > 0$ olduğundan Ara Değer Teoremine göre $(-3, -2)$ aralığında bir kök vardır. $f \in C^2[-3; -2]$ ve

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

türevi $[-3; -2)$ üzerinde sıfırdan farklıdır (yalnız uç nokta $x = -2$'de sıfırdır). Kök -2'den uzakta olduğundan $f'(p) \neq 0$ dır.
İterasyon. $p_0 = -2{,}5$ ve $n \geq 1$ için

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 + 3p_{n-1}^2 - 1}{3p_{n-1}^2 + 6p_{n-1}}$$

dir. İlk satırın hesabı şöyledir:

$$\begin{aligned} f(-2{,}5) &= -15{,}625 + 18{,}75 - 1 = 2{,}125, \\ f'(-2{,}5) &= 18{,}75 - 15 = 3{,}75, \\ \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} &= \frac{2{,}125}{3{,}75} = 0{,}566666\ldots \approx 0{,}56667, \\ p_1 &= -2{,}5 - 0{,}56667 = -3{,}06667. \end{aligned}$$

p_1 aralığın biraz dışına düşer, ama sonraki adımlar köke geri döner.

n	p_n	$f(p_n)$	$f'(p_n)$	$f(p_n)/f'(p_n)$	$\mid p_n - p_{n-1} \mid$
0	$-2{,}50000$	2,12500	3,75000	0,56667	
1	$-3{,}06667$	$-1{,}62700$	9,81337	$-0{,}16579$	0,56667
2	$-2{,}90088$	$-0{,}16589$	7,84003	$-0{,}02116$	0,16579
3	$-2{,}87972$	$-0{,}00254$	7,60004	$-0{,}00033$	0,02116
4	$-2{,}87939$	$-0{,}00004$	7,59632	$-0{,}00001$	0,00033
5	$-2{,}87938$				0,00001

$\mid p_4 - p_3 \mid = 0{,}00033$ henüz 10^{-4}'ten büyüktür; $\mid p_5 - p_4 \mid = 0{,}00001 < 10^{-4}$ olduğundan iterasyon durur:

$$p \approx p_5 = -2{,}87938.$$

Gerçek kök $p = -2{,}8793852\ldots$ olduğundan $\mid p_5 - p \mid \approx 0{,}52 \cdot 10^{-5}$ tir. Beş basamaklı yuvarlamayla yaklaşımlar artık $-2{,}87939$ ile $-2{,}87938$ arasında gidip gelir; bu duyarlıkla daha iyisi elde edilemez. ■

Newton-Raphson Metodu her adımda f' türevini hesaplamayı gerektirir. Türev yerine iki yaklaşımdan geçen kesenin eğimini kullanan yöntemler bir sonraki bölümün konusu: Secant ve Regula Falsi Metodları.

 CC BY-NC-SA 4.0

7. Secant ve Regula Falsi Metodları

Newton-Raphson metodu hızlıdır ama her adımda $f'(p_{n-1})$ değerini ister. Türevin fonksiyonun kendisinden daha karmaşık olduğu ya da hiç kapalı biçimde yazılamadığı durumlarda bu, yöntemin zayıf yanıdır. Bu bölümde türevi, son iki yaklaşımdan hesaplanan bir fark bölümüyle değiştiriyoruz. Ortaya çıkan Secant metodu iki başlangıç değeriyle çalışır, her adımda yalnız bir fonksiyon değeri hesaplar ve Newton-Raphson'dan biraz yavaş yakınsar.
Secant metodu da Newton-Raphson gibi kökün bulunduğu aralığı korumaz. Kirişlerle ilerlerken her adımda kökü içeren aralığı ikiye bölme metodundaki gibi denetlersek Regula Falsi metodunu elde ederiz. "Yanlış konum" anlamına gelen bu adın arkasındaki fikir, Antik Mısır'daki Rhind papirüsüne (MÖ yaklaşık 1650) kadar uzanır.

7.1 Secant Metodu

Newton-Raphson metodunun $p_n = p_{n-1} - \dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$ bağıntısından yola çıkalım. p_{n-1} noktasındaki türev bir limittir:

$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}.$$

p_{n-2} değeri p_{n-1}'e yakınsa limitin yerine $x = p_{n-2}$ için fark bölümünü yazabiliriz:

$$f'(p_{n-1}) \approx \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}.$$

Bu yaklaşımı Newton-Raphson bağıntısında türevin yerine koyarsak

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{\frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}} \\ &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1}) \cdot (p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \end{aligned}$$

bulunur.

Tanım 7.1 (Secant Metodu). p_0 ve p_1 başlangıç değerleri olmak üzere

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1}) \cdot (p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}, \qquad n \geq 2 \tag{1}$$

bağıntısıyla köke yaklaşma işlemine **Secant metodu** denir.

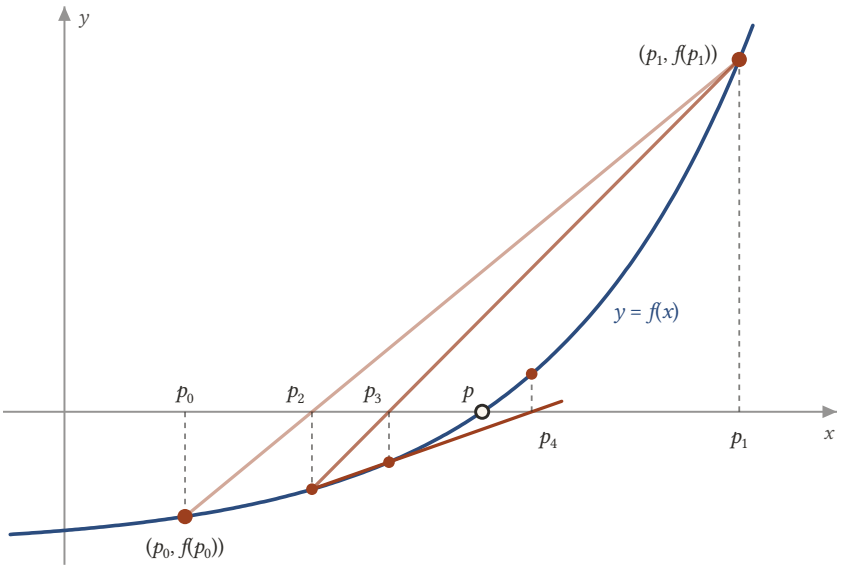
Yani Secant metodu, Newton-Raphson metodunda $f'(p_{n-1})$ yerine son iki yaklaşımdan geçen doğrunun eğimini kullanır. $f(p_{n-2})$ bir önceki adımda hesaplandığı için her adımda yeni olarak yalnız $f(p_{n-1})$ hesaplanır; türev hiç gerekmez.
(1) bağıntısının geometrik anlamı açıktır. $(p_{n-2}, f(p_{n-2}))$ ve $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$ noktalarından geçen doğru

$$y = f(p_{n-1}) + \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}} (x - p_{n-1})$$

doğrusudur. $y = 0$ koyup x'i çözersek tam olarak (1) bağıntısındaki p_n çıkar. Böylece $(p_0, f(p_0))$ ve $(p_1, f(p_1))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta p_2 olur. Ardından $(p_1, f(p_1))$ ve $(p_2, f(p_2))$ noktalarını birleştiren doğrunun x eksenini kestiği nokta p_3 olur. Süreç böyle sürdürülerek

 CC BY-NC-SA 4.0

$p_4, p_5, \ldots$ yaklaşımları bulunur. Yöntemin adı da eğriyi iki noktada kesen bu doğrudan (kesen, sekant) gelir.



Şekil 7.1: Secant metodu. $(p_0, f(p_0))$ ile $(p_1, f(p_1))$ noktalarından geçen kiriş x eksenini p_2'de keser. Sonraki her kiriş son iki noktadan geçer: $(p_1, f(p_1))$ ile $(p_2, f(p_2))$ kirişi p_3'ü, $(p_2, f(p_2))$ ile $(p_3, f(p_3))$ kirişi p_4'ü verir. p_4, p kökünün öbür yanına düşer.

Secant metodu dört adımda

1. p_0, p_1 başlangıç değerlerini seç; $f(p_0)$ ve $f(p_1)$'i hesapla.
2. $\text{Pay} = f(p_{n-1}) \cdot (p_{n-1} - p_{n-2})$ ve $\text{Payda} = f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})$ değerlerini bul; $p_n = p_{n-1} - \text{Pay} \,/\, \text{Payda}$ olur.
3. Durma kriterini (örneğin $\mid p_n - p_{n-1} \mid < \varepsilon$) dene; sağlanıyorsa $p \approx p_n$ al.
4. Sağlanmıyorsa $f(p_n)$'yi hesapla, en eski noktayı bırak, n'yi bir artırıp 2. adıma dön.

Örnek 7.1 (cos x − x = 0 Denklemine Secant Metodu ile Yaklaşım). $\cos x - x = 0$ denkleminin çözümüne Secant metodu ile yaklaşımda bulununuz. $p_0 = 0{,}5$ ve $p_1 = \dfrac{\pi}{4}$ alıp işlemlerinizi yuvarlama yapmadan bir tabloda gösteriniz.

Çözüm.
$f(x) = \cos x - x$, $p_0 = 0{,}5$, $p_1 = \dfrac{\pi}{4}$ olsun. (1) bağıntısı $n \geq 2$ için

$$p_n = p_{n-1} - \frac{\text{Pay}}{\text{Payda}},$$
$$\text{Pay} = (\cos p_{n-1} - p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2}),$$
$$\text{Payda} = \cos p_{n-1} - p_{n-1} - \cos p_{n-2} + p_{n-2}$$

biçimini alır. Başlangıç değerlerinde

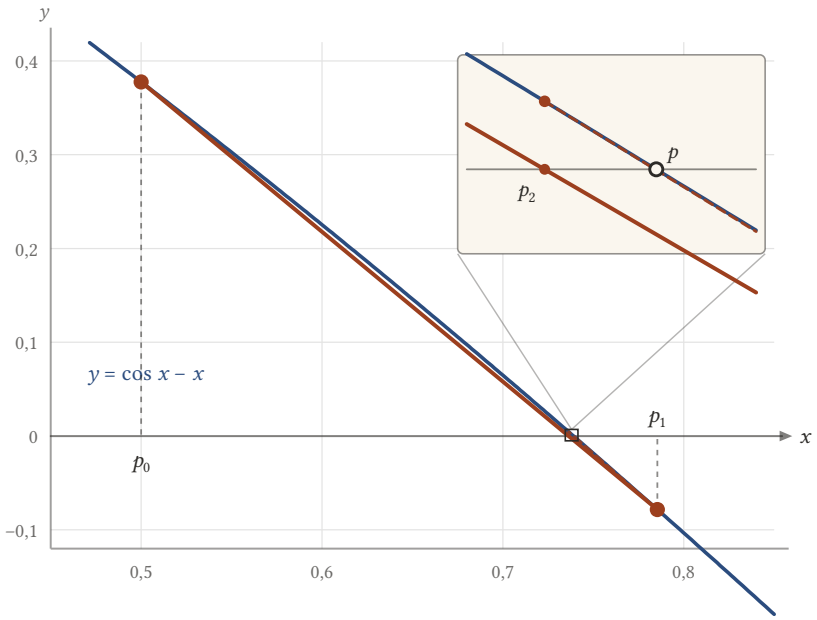
$$f(p_0) = \cos 0{,}5 - 0{,}5 = 0{,}377582562, \qquad f(p_1) = \cos\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -0{,}078291382$$

olur. Hesaplar yuvarlanmamış değerlerle sürdürülür; sayılar dokuz ondalık basamağa yuvarlanarak gösterilir, bu yüzden elle yapılan çıkarmalarda son basamakta bir birimlik fark görülebilir. İlk adımda

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\text{Pay} = (-0{,}078291382)(0{,}285398163) = -0{,}022344217,$$
$$\text{Payda} = -0{,}078291382 - 0{,}377582562 = -0{,}455873944,$$
$$p_2 = 0{,}785398163 - 0{,}049014025 = 0{,}736384139$$

bulunur. p_2, $(p_0, f(p_0))$ ve $(p_1, f(p_1))$ noktalarından geçen kirişin x eksenini kestiği noktadır ve köke p_1'den çok daha yakındır.



Şekil 7.2: $y = \cos x - x$ eğrisi ve Secant metodunun ilk iki kirişi. $(p_0, f(p_0))$ ile $(p_1, f(p_1))$ noktalarından geçen kiriş x eksenini $p_2 = 0{,}736384139$'da keser. Büyütülmüş pencerede kesikli çizilen ikinci kiriş eğriyle neredeyse çakışır ve ekseni $p_3 = 0{,}739058139$'da, $p = 0{,}739085133$ kökünün hemen yanında keser.

Örnekte durma kriteri verilmediğinden yaklaşımları, ardışık iki yaklaşım dokuz ondalık basamakta çakışana, yani $|\, p_n - p_{n-1} \,| < 10^{-9}$ olana kadar sürdürelim:

n	p_n	Pay	Payda	Pay/Payda	$\lvert\, p_n - p_{n-1} \,\rvert$
0	0,500000000				
1	0,785398163				0,285398163
2	0,736384139	−0,022344217	−0,455873944	0,049014025	0,049014025
3	0,739058139	−0,000221432	0,082809101	−0,002674000	0,002674000
4	0,739085149	0,000000121	−0,004472541	−0,000027010	0,000027010
5	0,739085133	$-0{,}72879 \cdot 10^{-12}$	−0,000045204	0,000000016	0,000000016
6	0,739085133	$-0{,}25929 \cdot 10^{-20}$	0,000000027	$-0{,}96096 \cdot 10^{-13}$	$0{,}96096 \cdot 10^{-13}$

Son iki satırda Pay dokuz basamakta sıfır göründüğü için bilimsel gösterimle yazıldı. $|\, p_6 - p_5 \,| < 10^{-9}$ olduğundan

$$p \approx p_6 = 0{,}739085133$$

bulunur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Aynı denklemi Newton-Raphson metodu $p_0 = \frac{\pi}{4}$'ten başlayarak p_3'te dokuz basamak doğrulukla çözmüştü (Örnek 6.1). Secant metodu buna p_5'te ulaştı. Buna karşılık Secant metodunun her adımı tek bir fonksiyon değeri ister, Newton-Raphson'ınki ise hem f'yi hem f''yi. Newton-Raphson'ın yakınsama garantisi (Teorem 6.1) türevin varlığına ve $f'(p) \neq 0$ koşuluna dayanır. İki yöntem de kökü bir aralıkta tutmaz; yaklaşımlar kökün iki yanına gelişigüzel düşebilir.

7.2 Regula Falsi Metodu

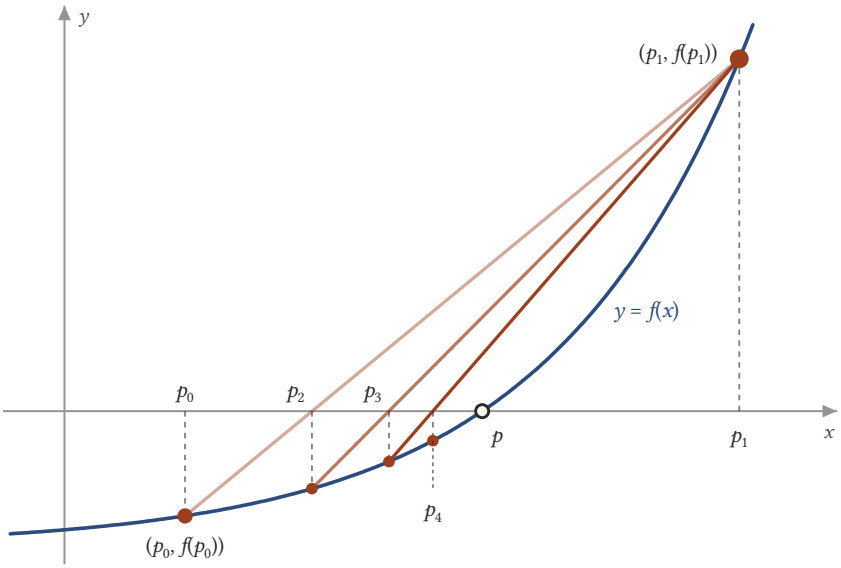
İkiye bölme metodunda kök her adımda bir aralığın içinde kalır ve aralık her adımda yarıya iner (Teorem 4.1). Newton-Raphson ve Secant metodlarında ise kökün bulunduğu aralık garanti edilmez. Secant metodunun kirişleriyle ilerleyip her adımda kökü içeren aralığı ikiye bölme metodundaki gibi denetlersek bu iki iyi özelliği birleştiririz.
Önce $f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$ koşulunu sağlayan p_0 ve p_1 seçilir; ara değer teoremi (Teorem 1.7) gereği bu iki nokta arasında bir kök vardır. $(p_0, f(p_0))$ ve $(p_1, f(p_1))$ noktalarını birleştiren kirişin x eksenini kestiği nokta p_2 olur. Eğer $f(p_1) \cdot f(p_2) < 0$ ise kök p_1 ile p_2 arasındadır ve p_3, $(p_1, f(p_1))$ ile $(p_2, f(p_2))$ noktalarından geçen kirişle bulunur. Değilse kök p_0 ile p_2 arasındadır ve p_3 için $(p_0, f(p_0))$ ile $(p_2, f(p_2))$ noktaları kullanılır. Süreç böyle sürdürülür.

Tanım 7.2 (Regula Falsi Metodu). $f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$ olsun. $n \geq 2$ için p_k, $k < n-1$ ve $f(p_k) \cdot f(p_{n-1}) < 0$ koşullarını sağlayan en büyük k indisli yaklaşım olmak üzere

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1}) \cdot (p_{n-1} - p_k)}{f(p_{n-1}) - f(p_k)} \tag{2}$$

bağıntısıyla köke yaklaşma işlemine **Regula Falsi metodu** denir.

Yani formül Secant metodunun formülüdür; değişen yalnız kirişin ikinci ucudur. Secant metodunda bu uç her zaman p_{n-2}'dir. Regula Falsi metodunda ise f'nin işaretinin $f(p_{n-1})$'inkine zıt olduğu en son yaklaşımdır. $f(p_{n-1}) \cdot f(p_{n-2}) < 0$ ise $p_k = p_{n-2}$ olur ve adım bir Secant adımıyla aynıdır.



Şekil 7.3: Secant metodunun şeklindeki eğri ve başlangıç noktalarıyla Regula Falsi metodu. Yeni yaklaşımlarda f hep negatif kaldığından her kiriş, f'nin pozitif olduğu $(p_1, f(p_1))$ ucuna bağlı kalır ve x eksenini p_2, p_3, p_4'te keser. İlk iki kiriş Secant metodundakilerle aynıdır; ama p_4 kökün öbür yanına geçmez. Yaklaşımlar p'ye hep soldan yaklaşır ve kök her adımda kirişin iki ucu arasında kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 7.1 (Regula Falsi Metodunda Kök Aralıkta Kalır). *f, p_0 ile p_1 uçlu kapalı aralıkta sürekli ve $f(p_0)\cdot f(p_1)<0$ olsun. Regula Falsi metodunun her adımında p_{n-1} ile p_k uçlu aralık f'nin bir kökünü içerir ve p_n bu aralığın içinde kalır.*

> ***İspat.***
> *p_k'nin seçimi gereği $f(p_{n-1})$ ile $f(p_k)$ zıt işaretlidir. Ara değer teoremi (Teorem 1.7) gereği p_{n-1} ile p_k arasında f'nin bir kökü vardır.*
> *p_n'nin bu iki noktanın arasında olduğunu görmek için*
>
> $$t=\frac{f(p_{n-1})}{f(p_{n-1})-f(p_k)}$$
>
> *diyelim. $f(p_{n-1})$ ile $-f(p_k)$ aynı işaretli olduğundan*
>
> $$|\,f(p_{n-1})-f(p_k)\,|=|\,f(p_{n-1})\,|+|\,f(p_k)\,|$$
>
> *olur. Bu toplam $|\,f(p_{n-1})\,|$'den büyüktür ve paydanın işareti payınkiyle aynıdır; dolayısıyla $0<t<1$ bulunur. (2) bağıntısı*
>
> $$p_n=p_{n-1}-t\,(p_{n-1}-p_k)=(1-t)\,p_{n-1}+t\,p_k$$
>
> *biçiminde yazılabilir. Bu, p_{n-1} ile p_k'nin $0<t<1$ ağırlıklı bir ortalamasıdır; yani p_n iki noktanın arasındadır.*
> *Tümevarımla bütün yaklaşımlar p_0 ile p_1 uçlu aralıkta kalır, böylece f'nin sürekliliği her adımda kullanılabilir. $f(p_n)=0$ ise kök bulunmuştur. Değilse $f(p_n)$, $f(p_{n-1})$ ile $f(p_k)$'den birine zıt işaretlidir; bir sonraki adımın ikinci ucu bu noktadır. Gerçekten, $f(p_n)f(p_{n-1})<0$ ise $n-1$, $f(p_j)f(p_n)<0$ koşulunu sağlayan en büyük $j<n$'dir. Aksi hâlde k'nin seçimi gereği $k<j\le n-1$ olan her p_j için $f(p_j)$, $f(p_{n-1})$ ile, dolayısıyla $f(p_n)$ ile aynı işaretlidir; bu yüzden en büyük uygun indis yine k'dir. Böylece iddia bir sonraki adım için de geçerlidir.* ■

Kök hep kirişin iki ucu arasında kalır, ama ikiye bölmeden farklı olarak bu aralığın uzunluğu sıfıra gitmek zorunda değildir: aşağıdaki örneklerde uçlardan biri hiç değişmez. Bu yüzden durma kriteri olarak aralık uzunluğu değil, $|\,f(p_n)\,|$ ya da $|\,p_n-p_{n-1}\,|$ kullanılır.

Regula Falsi metodu dört adımda

1. $f(p_0)\cdot f(p_1)<0$ olacak biçimde p_0, p_1 seç; ilk adımda $p_k=p_0$ olur.
2. $\text{Pay}=f(p_{n-1})\cdot(p_{n-1}-p_k)$ ve $\text{Payda}=f(p_{n-1})-f(p_k)$ ile $p_n=p_{n-1}-\text{Pay}\,/\,\text{Payda}$ bul.
3. $f(p_n)$'yi hesapla ve durma kriterini dene; sağlanıyorsa $p\approx p_n$ al.
4. $f(p_n)\cdot f(p_{n-1})<0$ ise yeni ikinci uç p_{n-1} olur; değilse p_k korunur. n'yi bir artırıp 2. adıma dön.

Örnek 7.2 (cos x − x = 0 Denklemine Regula Falsi Metodu ile Yaklaşım). $\cos x-\dfrac{x}{\pi}=0$ denkleminin çözümüne Regula Falsi metodunu kullanarak yaklaşımda bulununuz. $p_0=0{,}5$, $p_1=\dfrac{\pi}{4}$ alıp $|\,f(p_n)\,|<10^{-8}$ durma kriteri ile işlemlerinizi yuvarlama yapmadan bir tabloda gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $f(x)=\cos x-x$ için
>
> $$f(p_0)=0{,}377582562>0,\qquad f(p_1)=-0{,}078291382<0$$
>
> olduğundan $f(p_0)\cdot f(p_1)<0$ olur ve kök $[0{,}5;\,\pi/4]$ aralığındadır. $n\ge 2$ için (2) bağıntısı
>
> $$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1}-\frac{\text{Pay}}{\text{Payda}},\\ \text{Pay} &= (\cos p_{n-1}-p_{n-1})(p_{n-1}-p_k),\\ \text{Payda} &= \cos p_{n-1}-p_{n-1}-\cos p_k+p_k \end{aligned}$$
>
> biçimini alır. Adımları izleyelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

- $n = 2$: kiriş p_1 ile p_0 arasındadır; bu adım Secant adımıyla aynıdır ve $p_2 = 0{,}736384139$, $f(p_2) = 0{,}004517719 > 0$ bulunur. $f(p_2) \cdot f(p_1) < 0$ olduğundan yeni ikinci uç p_1'dir.
- $n = 3$: kiriş p_2 ile p_1 arasındadır; yine Secant adımıyla aynıdır. $p_3 = 0{,}739058139$, $f(p_3) = 0{,}000045177 > 0$ olur. $f(p_3) \cdot f(p_2) > 0$ olduğundan ikinci uç p_1 olarak kalır.
- $n = 4$: kiriş p_3 ile p_1 arasındadır. $p_4 = 0{,}739084864$, $f(p_4) = 0{,}000000451 > 0$ olur; ikinci uç yine p_1'dir.
- $n = 5$: kiriş p_4 ile p_1 arasındadır. $p_5 = 0{,}739085131$ ve $\mid f(p_5) \mid \approx 0{,}45 \cdot 10^{-8} < 10^{-8}$ olur.

Tabloda her satırda kirişin iki ucu (p_{n-1} ve p_k), yeni yaklaşım p_n ve hesabın ara değerleri yer alır:

n	p_{n-1}	p_k	p_n	$f(p_n)$	Pay	Payda	Pay/Payda
0			0,5000000000	0,377582562			
1			0,7853981630	0,078291382			
2	0,7853981630	0,5000000000	0,7363841390	0,004517719	0,022344217	0,455873944	0,049014025
3	0,7363841390	0,7853981630	0,7390581390	0,000045177	0,000221432	0,082809101	0,002674000
4	0,7390581390	0,7853981630	0,7390848640	0,000000451	0,000002094	0,078336559	0,000026725
5	0,7390848640	0,7853981630	0,7390851310	0,000000004	0,000000021	0,078291833	0,000000267

$\mid f(p_5) \mid < 10^{-8}$ olduğundan

$$p \approx p_5 = 0{,}739085131$$

bulunur. ■

İlk iki adım Secant metoduyla aynıdır. p_2'den itibaren yaklaşımların hepsi kökün sol yanına düşer ($f(p_n) > 0$), bu yüzden $p_k = \dfrac{\pi}{4}$ ucu hiç değişmez. Uzak bir uca bağlı kalan kiriş köke daha yavaş yaklaşır: p_4'te Secant metodunun hatası yaklaşık $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ iken Regula Falsi'ninki yaklaşık $2{,}7 \cdot 10^{-7}$'dir. Aynı durum aşağıdaki örnekte daha belirgindir.

Örnek 7.3 (Üçün Küp Köküne Regula Falsi ile Yaklaşım). $x^3 - 3 = 0$ denkleminin köküne Regula Falsi metodu ile $[1, 2]$ aralığında yaklaşımda bulununuz. İşlemlerinizde yuvarlama yapmadan $\mid f(p_n) \mid < 0{,}001$ durma kriterini kullanınız.

Çözüm.
$f(x) = x^3 - 3$, $p_0 = 1$, $p_1 = 2$ alalım. $f(p_0) = -2 < 0$ ve $f(p_1) = 5 > 0$ olduğundan kök $[1, 2]$ aralığındadır.
Küp farkı çarpanlarına ayrılırsa

$$f(p_{n-1}) - f(p_k) = p_{n-1}^3 - p_k^3 = (p_{n-1} - p_k)(p_{n-1}^2 + p_{n-1}p_k + p_k^2)$$

olur ve (2) bağıntısında $p_{n-1} - p_k$ çarpanı sadeleşir:

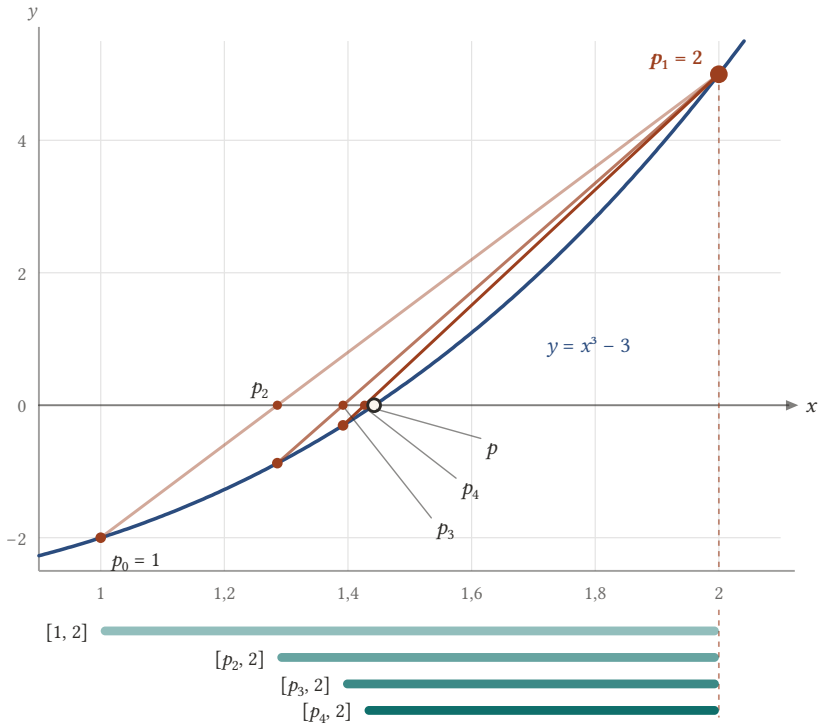
$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 - 3}{p_{n-1}^2 + p_{n-1}p_k + p_k^2}, \qquad n \geq 2.$$

Burada $\text{Pay} = p_{n-1}^3 - 3$ ve $\text{Payda} = p_{n-1}^2 + p_{n-1}p_k + p_k^2$ olur. İlk adımda $\text{Pay} = 5$, $\text{Payda} = 4 + 2 + 1 = 7$ ve

$$p_2 = 2 - \frac{5}{7} = 1{,}285714286, \qquad f(p_2) = -0{,}874635569 < 0$$

bulunur. $f(p_2) \cdot f(p_1) < 0$ olduğundan yeni ikinci uç $p_1 = 2$'dir. Sonraki her adımda da $f(p_n) < 0$ çıkar; yani $f(p_n) \cdot f(p_{n-1}) > 0$ olur ve ikinci uç hep 2 olarak kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.4: $y = x^3 - 3$ için Regula Falsi metodunun ilk üç kirişi. Bütün kirişler sağ uçtaki (2, 5) noktasından çıkar ve x eksenini sırasıyla p_2 = 1,285714286, p_3 = 1,392059553, p_4 = 1,426733629'da keser; kök p = 1,442249570'tir. Alttaki çubuklar kökü içeren aralıklardır: sol uç köke yaklaşırken sağ uç hep 2'de kalır.

Hesapların tamamı tabloda:

n	p_{n-1}	p_k	p_n	$f(p_n)$	Pay	Payda	Pay/Payda
0			1	−2			
1			2	5			
2	2	1	1,285714286	0,874635569	5	7	0,714285714
3	1,285714286	2	1,392059553	0,302425514	0,874635569	8,224489796	0,106345268
4	1,392059553	2	1,426733629	0,095785472	0,302425514	8,721948907	0,034674075
5	1,426733629	2	1,437509316	0,029483264	0,095785472	8,889036105	0,010775687
6	1,437509316	2	1,440806685	0,008994964	0,029483264	8,941451665	0,003297369
7	1,440806685	2	1,441810863	0,002736812	0,008994964	8,957537272	0,001004178
8	1,441810863	2	1,442116228	0,000832016	0,002736812	8,962440290	0,000305365

$|f(p_7)| = 0{,}002736812 > 0{,}001$ iken $|f(p_8)| = 0{,}000832016 < 0{,}001$ olduğundan

$$p \approx p_8 = 1{,}442116228$$

bulunur. Gerçek kök $\sqrt[3]{3} = 1{,}442249570$'tir. Sağ uç 2'de takılı kaldığı için hata her adımda yalnız yaklaşık 0,3 katına iner. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Dört Yöntemin Karşılaştırılması

$\cos x - x = 0$ denklemini şimdiye kadar dört yöntemle çözdük; sonuçları yan yana koyalım.

Örnek 7.4 (cos x − x = 0 İçin Yöntemlerin Karşılaştırılması). $\cos x - x = 0$ denkleminin çözümüne Sabit Nokta İterasyonu ($g(x) = \cos x$, $p_0 = \dfrac{\pi}{4}$), Newton-Raphson, Secant ve Regula Falsi metodlarıyla yapılan yaklaşımları bir tabloda karşılaştırınız.

Çözüm.
Sabit Nokta İterasyonu için $g(x) = \cos x$ alalım; $\cos x = x$ olması $f(x) = \cos x - x = 0$ olmasıyla aynıdır. g, $[0, 1]$ üzerinde azalandır ve değerleri $[\cos 1, 1] = [0{,}540302306;\, 1]$ aralığındadır; yani g, $[0, 1]$'i kendi içine götürür. Ayrıca her $x \in [0, 1]$ için

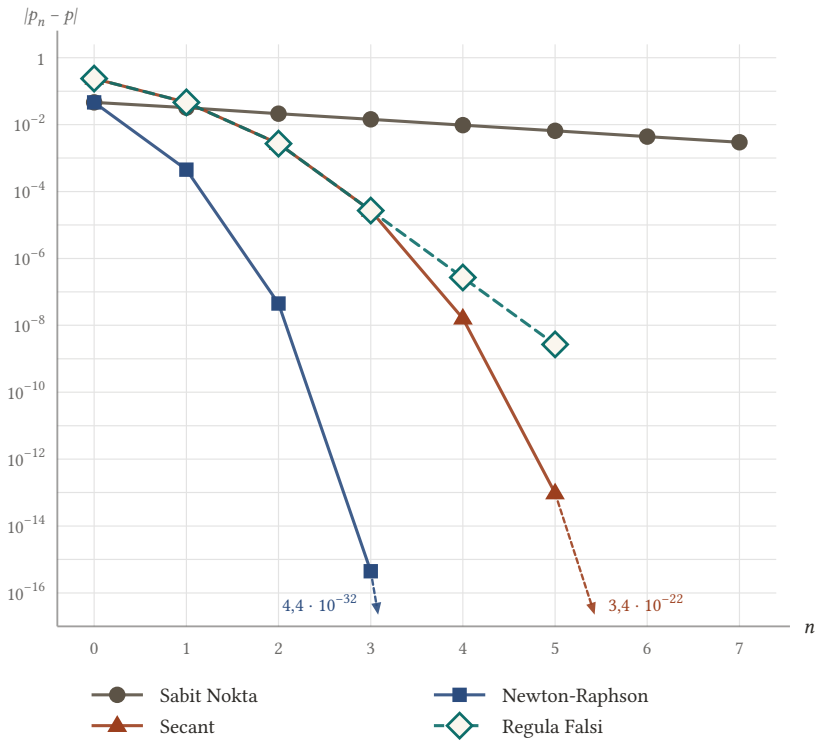
$$| \, g'(x) \, | = | \sin x \, | \leq \sin 1 = 0{,}841470985 < 1$$

olur. Sabit Nokta Teoremi (Teorem 5.2) gereği $p_0 = \dfrac{\pi}{4} \in [0, 1]$'den başlayan $p_n = \cos p_{n-1}$ dizisi köke yakınsar. İlk terimler $p_1 = \cos \dfrac{\pi}{4} = 0{,}707106781$, $p_2 = \cos p_1 = 0{,}760244597$, ... biçiminde hesaplanır.
Newton-Raphson sütunu Örnek 6.1, Secant sütunu Örnek 7.1 ve Regula Falsi sütunu Örnek 7.2 örneklerinden alınmıştır. Her sütun o yöntemin p_n yaklaşımlarıdır. Her yöntemin son satırında $p = 0{,}739085133\ldots$ kökünün basamaklarıyla çakışan basamaklar kalın yazılmıştır:

n	Sabit Nokta	Newton-Raphson	Secant	Regula Falsi
0	0,785398163	0,785398163	0,500000000	0,500000000
1	0,707106781	0,739536134	0,785398163	0,785398163
2	0,760244597	0,739085178	0,736384139	0,736384139
3	0,724667481	0,739085133	0,739058139	0,739058139
4	0,748719886	**0,739085133**	0,739085149	0,739084864
5	0,732560845		0,739085133	**0,739085131**
6	0,743464211		**0,739085133**	
7	**0,73**6128257			

Hataların n'ye göre düşüşü yöntemler arasındaki farkı açıkça gösterir. Sabit Nokta İterasyonunda hata her adımda yaklaşık 0,67 katına iner; yedi adım sonra bile yalnız iki basamak doğrudur. Newton-Raphson'da doğru basamak sayısı her adımda kabaca ikiye katlanır. Secant'ta da hızla artar ama Newton-Raphson'daki kadar hızlı değil. Regula Falsi ilk adımlarda Secant ile aynı gider, sonra sabit kalan uç yüzünden yavaşlar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.5: $\cos x - x = 0$ denkleminde dört yöntemin $|p_n - p|$ hataları, logaritmik dikey eksende (p = 0,7390851332). Sabit Nokta İterasyonunun hatası her adımda aynı oranda azalır ve noktalar bir doğru boyunca iner. Newton-Raphson ve Secant'ın eğrileri giderek dikleşir; aşağı oklar, eksenin altında kalan sonraki hataları gösterir. Secant ile Regula Falsi $n = 3$'e kadar çakışır, sonra Regula Falsi yavaşlar.

Kök bulma yöntemlerini seçerken iki şey tartılır: hız ve güvence. İkiye bölme ve Regula Falsi kökü bir aralıkta tutar, Newton-Raphson ve Secant tutmaz. Newton-Raphson en hızlısıdır ama türev ister. Secant türevsiz olarak ona yakın bir hız sağlar. ■

7.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorularda bölümdeki iki yöntemi, paydadaki fonksiyon değerleri farkını çarpanlarına ayırarak sadeleştirilmiş bağıntılarla uyguluyoruz.

Alıştırma 7.1 (İkinin Karekökünü Secant ile Yaklaşım). $x^2 - 2 = 0$ denkleminin çözümüne Secant metodu ile yaklaşımda bulununuz. $p_0 = 1$ ve $p_1 = 1{,}5$ alınız. İşlemlerinizde yuvarlama yapmadan $|\, p_n - p_{n-1} \,| < 10^{-5}$ durma kriterini kullanınız.

Çözüm.
$f(x) = x^2 - 2$, $p_0 = 1$, $p_1 = 1{,}5$ olsun. İki kare farkından

$$f(p_{n-1}) - f(p_{n-2}) = (p_{n-1} - p_{n-2})(p_{n-1} + p_{n-2})$$

olduğundan (1) bağıntısında $p_{n-1} - p_{n-2}$ sadeleşir:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^2 - 2}{p_{n-1} + p_{n-2}}, \qquad n \geq 2.$$

Pay $= p_{n-1}^2 - 2$ ve Payda $= p_{n-1} + p_{n-2}$ alalım. İlk adımda Pay $= 2{,}25 - 2 = 0{,}25$, Payda $= 2{,}5$ ve $p_2 = 1{,}5 - 0{,}1 = 1{,}4$ olur. İkinci adımda Pay $= 1{,}96 - 2 = -0{,}04$, Payda $= 2{,}9$ ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$p_3 = 1{,}4 + \frac{0{,}04}{2{,}9} = 1{,}413793103$$

bulunur. Sonraki adımlar tabloda:

n	p_n	Pay	Payda	Pay/Payda	$\mid p_n - p_{n-1} \mid$
0	1				
1	1,5				0,5
2	1,4	0,25	2,5	0,1	0,1
3	1,413793103	−0,04	2,9	−0,013793103	0,013793103
4	1,414215686	−0,001189061	2,813793103	−0,000422583	0,000422583
5	1,414213562	0,000006007	2,828008790	0,000002124	0,000002124

$\mid p_4 - p_3 \mid = 0{,}000422583 > 10^{-5}$ iken $\mid p_5 - p_4 \mid = 0{,}000002124 < 10^{-5}$ olduğundan

$$p \approx p_5 = 1{,}414213562$$

bulunur; bu, $\sqrt{2}$'nin dokuz ondalık basamağıyla aynıdır. ■

Alıştırma 7.2 (Beşin Dördüncü Dereceden Köküne Secant ile Yaklaşım). $x^4 - 5 = 0$ denkleminin çözümüne Secant metodu ile yaklaşımda bulununuz. $p_0 = 1$ ve $p_1 = 2$ başlangıç değerlerini alınız. İşlemlerinizde yuvarlama yapmadan $\mid p_n - p_{n-1} \mid < 10^{-4}$ durma kriterini kullanınız.

Çözüm.
$f(x) = x^4 - 5$, $p_0 = 1$, $p_1 = 2$ olsun. İki kare farkını iki kez kullanırsak

$$p_{n-1}^4 - p_{n-2}^4 = (p_{n-1} - p_{n-2})(p_{n-1} + p_{n-2})(p_{n-1}^2 + p_{n-2}^2)$$

olur ve (1) bağıntısı sadeleşir:

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^4 - 5}{(p_{n-1} + p_{n-2})(p_{n-1}^2 + p_{n-2}^2)}, \qquad n \geq 2.$$

Pay kesrin payı, Payda kesrin paydasıdır. İlk adımda $\text{Pay} = 16 - 5 = 11$, $\text{Payda} = 3 \cdot 5 = 15$ ve

$$p_2 = 2 - \frac{11}{15} = 1{,}266666667$$

olur. İkinci adımda

$$\text{Pay} = p_2^4 - 5 = -2{,}425758025,$$
$$\text{Payda} = (p_2 + p_1)(p_2^2 + p_1^2) = 18{,}307851852$$

bulunur. Bütün adımlar:

n	p_n	Pay	Payda	Pay/Payda	$\mid p_n - p_{n-1} \mid$
0	1				
1	2				1
2	1,266666667	11	15	0,733333333	0,733333333
3	1,399164900	−2,425758025	18,307851852	−0,132498233	0,132498233
4	1,522117796	−1,167557861	9,495976915	−0,122952896	0,122952896

 CC BY-NC-SA 4.0

n	p_n	Pay	Payda	Pay/Payda	$\mid p_n - p_{n-1} \mid$
5	1,492666490	0,367759560	12,487037493	0,029451306	0,029451306
6	1,495277716	−0,035778714	13,701880542	−0,002611227	0,002611227
7	1,495348973	−0,000950409	13,337910137	−0,000071256	0,000071256

p_2 ve p_3 kökün solunda kalırken p_4 kökün sağına, $[p_2, p_3]$ aralığının dışına düşer; Secant metodu kökü bir aralıkta tutmaz. $\mid p_6 - p_5 \mid = 0{,}002611227 > 10^{-4}$ iken $\mid p_7 - p_6 \mid = 0{,}000071256 < 10^{-4}$ olduğundan

$$p \approx p_7 = 1{,}495348973$$

bulunur. Gerçek değer $\sqrt[4]{5} = 1{,}495348781$'dir. ■

Alıştırma 7.3 (Onun Kareköküne Regula Falsi ile Yaklaşım). $x^2 - 10 = 0$ denkleminin çözümüne Regula Falsi metodu ile $[3, 4]$ aralığında yaklaşımda bulununuz. İşlemlerinizde yuvarlama yapmadan $\mid p_n - p_{n-1} \mid < 10^{-3}$ durma kriterini kullanınız.

Çözüm.
$f(x) = x^2 - 10$, $p_0 = 3$, $p_1 = 4$ alalım. $f(3) = -1 < 0$ ve $f(4) = 6 > 0$ olduğundan kök $[3, 4]$ aralığındadır. İki kare farkından

$$f(p_{n-1}) - f(p_k) = (p_{n-1} - p_k)(p_{n-1} + p_k)$$

olduğundan (2) bağıntısı

$$p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^2 - 10}{p_{n-1} + p_k}, \qquad n \geq 2$$

biçimine sadeleşir; Pay $= p_{n-1}^2 - 10$, Payda $= p_{n-1} + p_k$ olur.
İlk adımda $p_{n-1} = 4$, $p_k = 3$ ve

$$p_2 = 4 - \frac{6}{7} = \frac{22}{7} = 3{,}142857143, \qquad f(p_2) = -0{,}122448980 < 0$$

bulunur. $f(p_2) \cdot f(p_1) < 0$ olduğundan yeni ikinci uç $p_1 = 4$'tür. İkinci adımda

$$p_3 = \frac{22}{7} - \frac{-6/49}{50/7} = \frac{22}{7} + \frac{3}{175} = \frac{553}{175} = 3{,}16$$

olur ve $f(p_3) = -0{,}0144 < 0$ çıkar; ikinci uç yine 4'tür. Sonraki adımlarda da $f(p_n) < 0$ kalır:

n	p_{n-1}	p_k	p_n	$f(p_n)$	Pay	Payda	Pay/Payda	$\mid p_n - p_{n-1} \mid$
0			3	−1				
1			4	6				1
2	4	3	3,142857143	−0,122448980	6	7,857142857	0,763636364	0,857142857
3	3,142857143	4	3,16	−0,0144	−0,122448980	7,142857143	−0,017142857	0,017142857
4	3,16	4	3,162011173	0,001685341	−0,0144	7,16	−0,002011173	0,002011173
5	3,162011173	4	3,162246490	−0,000197137	0,001685341	7,162011173	0,000235317	0,000235317

$\mid p_4 - p_3 \mid = 0{,}002011173 > 10^{-3}$ iken $\mid p_5 - p_4 \mid = 0{,}000235317 < 10^{-3}$ olduğundan

$$p \approx p_5 = 3{,}162246490$$

> bulunur. Gerçek değer $\sqrt{10} = 3{,}162277660$'tır; $|\,p_n - p_{n-1}\,|$ küçük olsa da sağ uç 4'te sabit kaldığı için hata hâlâ yaklaşık $3 \cdot 10^{-5}$'tir. $\blacksquare$

Kök bulma yöntemlerini burada tamamlıyoruz. Sıradaki kısımda bir fonksiyonu, verilen noktalardan geçen bir polinomla temsil etmeyi öğreneceğiz: Lagrange İnterpolasyonu.

 CC BY-NC-SA 4.0

8. Lagrange İnterpolasyonu

Şimdiye kadar elimizdeki fonksiyonun formülünü biliyorduk. Uygulamada ise çoğu zaman yalnız bir tablo vardır: birkaç x_k noktası ve fonksiyonun bu noktalardaki değerleri. Tabloda olmayan bir noktadaki değeri tahmin etmek ya da karmaşık bir fonksiyonu türevi ve integrali kolay hesaplanan daha basit bir fonksiyonla değiştirmek için verilen noktalardan geçen bir polinom kurarız. Bu bölümde böyle bir polinomun her zaman var ve tek olduğunu görecek, onu Lagrange'ın formülüyle yazacak ve yaptığı hatayı ölçeceğiz. Lagrange interpolasyon formülü Lagrange'ın 1795 tarihli derslerinde geçer; Edward Waring aynı formülü 1779'da yayımlamıştı. Polinomların her sürekli fonksiyona istenildiği kadar yaklaşabildiğini söyleyen Weierstrass teoremi 1885 tarihlidir; aşağıda vereceğimiz Bernstein polinomlarıyla ispat 1912'dendir.

8.1 İnterpolasyon ve polinomsal yaklaşımlar

Önce "yaklaşım polinomu" ile neyi kastettiğimizi ve neden özellikle polinomları seçtiğimizi netleştirelim.

Tanım 8.1 (İnterpolasyon polinomu). Verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun, özellikleri bilinen daha basit bir $P(x)$ polinomuyla gösterilmesine ya da onun yerine kullanılmasına **interpolasyon** denir. Verilen farklı $x_0, x_1, ..., x_n$ noktalarında $P(x_k) = f(x_k)$ $(k = 0, 1, ..., n)$ koşulunu sağlayan P polinomuna f'nin bu noktalardaki **interpolasyon polinomu** denir. Bir aralıkta $f(x) - P(x)$ farkı küçük olan bir P polinomuna ise f'nin bir **yaklaşım polinomu** denir.

Yani interpolasyon polinomu f ile verilen noktalarda tam olarak çakışır; iyi bir interpolasyon polinomundan ayrıca aralık boyunca f'den az sapmasını, yani iyi bir yaklaşım polinomu olmasını da bekleriz.

Tanım 8.2 (Cebirsel polinom). n negatif olmayan bir tam sayı ve $a_0, a_1, ..., a_n$ reel sabitler olmak üzere

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

biçimindeki reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonlara **cebirsel polinom** denir.

Yani cebirsel polinom, x'in kuvvetlerinin sabit katsayılı sonlu bir toplamıdır.
Cebirsel polinomlar fonksiyonların en kullanışlı ve en iyi bilinen sınıfıdır. Birinci nedeni, türevlerinin ve belirsiz integrallerinin hem kolay hesaplanması hem de yine polinom olmasıdır. İkinci ve daha derin nedeni, sürekli fonksiyonlara düzgün olarak yaklaşabilmeleridir. Bunu söyleyen Weierstrass Yaklaşım Teoremini ispatlamak için önce bir özdeşliğe ihtiyacımız var.

Lemma 8.1 (Bernstein ağırlıklarının özdeşlikleri). *$n \geq 1$ bir tam sayı olsun ve $k = 0, 1, ..., n$ için*

$$b_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

diyelim. Bu durumda her x için

$$\text{(i)} \quad \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) = 1, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{k=0}^{n} k\, b_{n,k}(x) = nx,$$

$$\text{(iii)} \quad \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 b_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$$

eşitlikleri geçerlidir.

> ***İspat.***
> ***(i)*** *Binom teoreminden*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \big(\,x+(1-x)\big)^n = 1.$$

(ii) *$k \geq 1$ için $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ olduğundan ($k=0$ terimi sıfırdır)*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\, b_{n,k}(x) &= nx\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\ &= nx\sum_{j=0}^{n-1} b_{n-1,j}(x) = nx\end{aligned}$$

bulunur; son adımda $j=k-1$ dedik ve (i)'yi $n-1$ için kullandık.
(iii) *Önce $\sum k(k-1)\,b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2$ olduğunu görelim. $n=1$ ise iki taraf da sıfırdır. $n\geq 2$ ise $k\geq 2$ için $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ olduğundan, (ii)'deki gibi*

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2\sum_{j=0}^{n-2} b_{n-2,j}(x) = n(n-1)x^2.$$

Buradan ve (ii)'den $\sum k^2 b_{n,k}(x) = n(n-1)x^2 + nx$ çıkar. Kareyi açıp (i), (ii) ve bu eşitliği kullanırsak

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2 b_{n,k}(x) &= x^2\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x) - \frac{2x}{n}\sum_{k=0}^{n} k\, b_{n,k}(x)\\ &\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2 b_{n,k}(x)\\ &= x^2 - 2x^2 + \frac{n(n-1)x^2+nx}{n^2}\\ &= -x^2 + x^2 - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

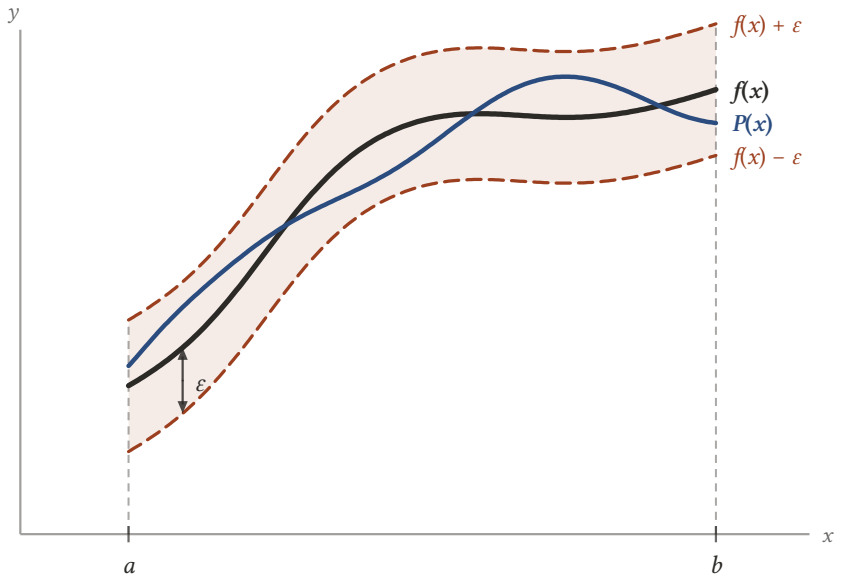
Yani $b_{n,k}(x)$ sayıları, $[0,1]$'deki her x için toplamı 1 olan negatif olmayan ağırlıklardır ve bu ağırlıklar k/n noktalarını x'in çevresinde toplar: x'ten uzak k/n'lerin toplam ağırlığı n büyüdükçe küçülür.

Teorem 8.1 (Weierstrass Yaklaşım Teoremi). *f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı ve sürekli olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısı için, her $x\in[a,b]$ noktasında*

$$|\, f(x) - P(x)\,| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $P(x)$ polinomu vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.1: f *grafiğinin çevresinde,* y = f(x) − ε *ile* y = f(x) + ε *kesikli eğrileri arasındaki şerit. Teorem,* [a, b] *aralığının tamamında bu şeridin içinde kalan bir* P *polinomu bulunduğunu söyler.*

İspat.
Adım 1: $[0,1]$ ***aralığına indirgeme.*** $g(t) = f\left(\, a + t(b-a) \,\right)$ *fonksiyonu* $[0,1]$*'de süreklidir. Her* $t \in [0,1]$ *için* $\mid g(t) - Q(t) \mid < \varepsilon$ *sağlayan bir* Q *polinomu bulursak*

$$P(x) = Q\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

de bir polinomdur ve $x \in [a,b]$ *için* $t = \frac{x-a}{b-a} \in [0,1]$ *olduğundan* $\mid f(x) - P(x) \mid = \mid g(t) - Q(t) \mid < \varepsilon$ *olur. Demek ki teoremi* $[0,1]$*'de sürekli* g *için ispatlamak yeter.*
Adım 2: Bernstein polinomu. *Her* $n \geq 1$ *için Bernstein ağırlıklarıyla (Lemma 8.1)*

$$\begin{aligned} B_n g(x) &= \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) b_{n,k}(x) \end{aligned}$$

polinomunu tanımlayalım. Bu, derecesi en fazla n *olan bir polinomdur. Yeterince büyük* n *için* $\mid g(x) - B_n g(x) \mid < \varepsilon$ *olduğunu göstereceğiz.*
Adım 3: İki sabit. $\mid g \mid$ *fonksiyonu* $[0,1]$ *kapalı aralığında sürekli olduğundan en büyük değerini alır (Teorem 1.5);* $M = \max_{t\in[0,1]} \mid g(t) \mid$ *diyelim. Ayrıca kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olan* g *orada düzgün süreklidir (bkz. Analiz 1): öyle bir* $\delta > 0$ *vardır ki* $t, s \in [0,1]$ *ve* $\mid t - s \mid < \delta$ *iken* $\mid g(t) - g(s) \mid < \frac{\varepsilon}{2}$ *olur.*
Adım 4: Hatayı ikiye ayırma. $x \in [0,1]$ *olsun. Lemma 8.1 (i) gereği* $g(x) = \sum_k g(x)\, b_{n,k}(x)$ *yazabiliriz;* $b_{n,k}(x) \geq 0$ *olduğundan*

$$\begin{aligned} \mid g(x) - B_n g(x) \mid &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left[g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right] b_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \left| g(x) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| b_{n,k}(x) \end{aligned}$$

olur. Sağdaki toplamı, $\left|x - \frac{k}{n}\right| < \delta$ *olan* k*'lar (*A *toplamı) ve* $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geq \delta$ *olan* k*'lar (*B *toplamı) diye ikiye ayıralım.*

 CC BY-NC-SA 4.0

A toplamındaki her terimde $\left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ olduğundan, ağırlıkların toplamı en fazla 1 olduğu için $A\le\frac{\varepsilon}{2}$ bulunur.
B toplamındaki her terimde $\left|g(x)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right|\le 2M$ ve $\frac{(x-k/n)^2}{\delta^2}\ge 1$'dir. Bu sınırları koyup toplamı negatif olmayan terimler ekleyerek bütün k'lara genişletirsek

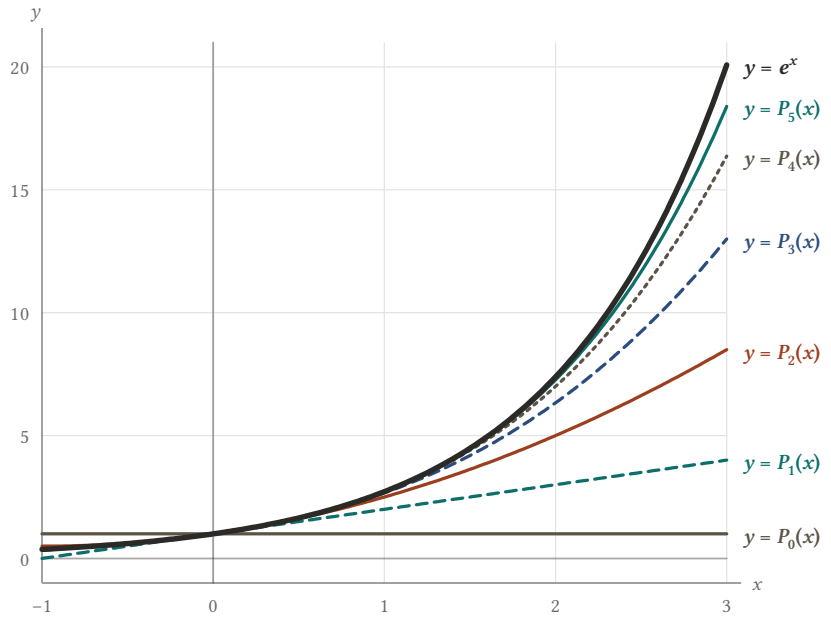
$$B\le\sum_{k=0}^{n}2M\,\frac{(x-k/n)^2}{\delta^2}\,b_{n,k}(x)=\frac{2M}{\delta^2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}$$
$$\le\frac{2M}{\delta^2}\cdot\frac{1}{4n}=\frac{M}{2n\delta^2}$$

olur. Burada lemmanın (iii) eşitliğini (Lemma 8.1) ve $[0,1]$'de $x(1-x)\le\frac{1}{4}$ eşitsizliğini kullandık.
Adım 5: Sonuç. *$n>\frac{M}{\varepsilon\delta^2}$ seçilirse $B\le\frac{M}{2n\delta^2}<\frac{\varepsilon}{2}$ olur. Bu n yalnız M, δ ve ε'a bağlıdır, x'e bağlı değildir. Böylece her $x\in[0,1]$ için*

$$|\,g(x)-B_ng(x)\,|\le A+B<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

bulunur. $Q=B_ng$ alıp Adım 1'i uygulamak ispatı bitirir. ■

Yani kapalı bir aralıkta sürekli her fonksiyon, aralığın tamamında aynı anda istenildiği kadar yakın bir polinomla değiştirilebilir. Teorem böyle bir polinomun varlığını garanti eder; pratikte hangi polinomun seçileceği ise bu bölümün ve sonrakinin konusudur.
Polinomla yaklaşım deyince akla ilk gelen, Ön Bilgiler ve Taylor Teoremi bölümünde kullandığımız Taylor polinomlarıdır (Teorem 1.9). Ancak Taylor polinomu, civarında çalıştığımız x_0 noktasında tam, bu noktanın civarında iyi, x_0'dan uzaklaştıkça ise kötü bir yaklaşım verir. Aşağıdaki örnek bunu sayılarla gösterir.



Şekil 8.2: e^x (kalın) ve $x_0=0$ civarındaki P_0, P_1, …, P_5 Taylor polinomları, $[-1,3]$ aralığında. 0 civarında bütün eğriler e^x ile neredeyse çakışır; $x=3$'te ise $P_5(3)=18{,}4$ bile $e^3\approx 20{,}086$ değerinden belirgin biçimde uzaktır.

Örnek 8.1 (e üzeri x'in Taylor polinomları). $f(x)=e^x$ fonksiyonunun $x_0=0$ civarındaki $P_0,P_1,\dots,P_4$ Taylor polinomlarını yazınız ve $x=0{,}1;\,0{,}5;\,1;\,2$ noktalarında yaptıkları hatayı karşılaştırınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

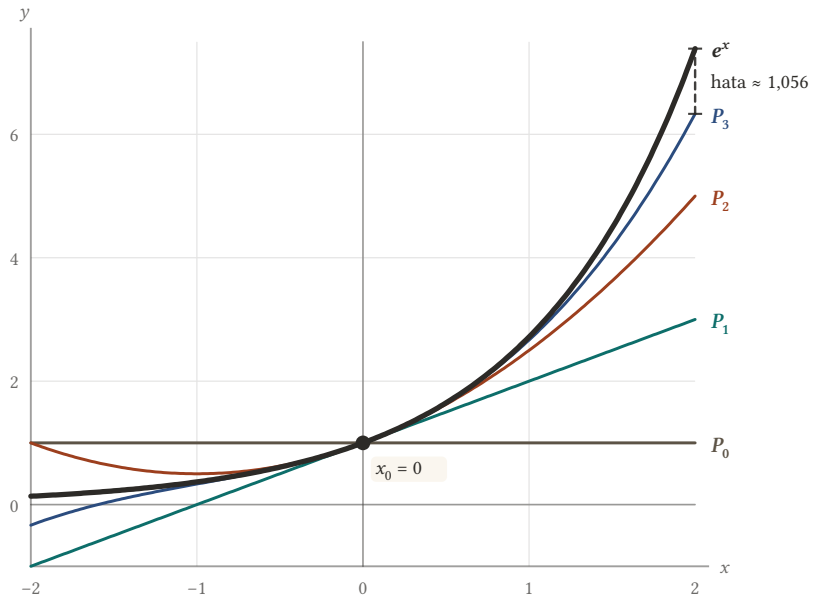
Çözüm.
Her k için $f^{(k)}(x) = e^x$ ve $f^{(k)}(0) = 1$ olduğundan Taylor polinomları şunlardır:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = 1 + x, \qquad P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$
$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6},$$
$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

$e^x - P_k(x)$ hatalarını yedi basamağa yuvarlayarak hesaplarsak şu tablo çıkar:

x	e^x	$e^x - P_1(x)$	$e^x - P_2(x)$	$e^x - P_3(x)$	$e^x - P_4(x)$
0,1	1,1051709	0,0051709	0,0001709	0,0000043	0,0000001
0,5	1,6487213	0,1487213	0,0237213	0,0028879	0,0002838
1	2,7182818	0,7182818	0,2182818	0,0516152	0,0099485
2	7,3890561	4,3890561	2,3890561	1,0557228	0,3890561

Her satırda mertebe arttıkça hata azalır, ama her sütunda x, $x_0 = 0$'dan uzaklaştıkça hata hızla büyür. $x = 0{,}1$'de P_2 bile dört anlamlı basamağa kadar doğruyken $x = 2$'de P_4'ün hatası 0,39'dur.



Şekil 8.3: e^x (kalın) ve $x_0 = 0$ civarındaki P_0, P_1, P_2, P_3 Taylor polinomları. Eğriler (0, 1) noktasında birbirine değer ve 0 civarında üst üste biner, uçlara doğru açılarak ayrılır. $x = 2$'de $e^2 \approx 7{,}389$ ile $P_3(2) \approx 6{,}333$ arasındaki fark yaklaşık 1,056'dır.

■

Yani iyi bir interpolasyon polinomu tek bir noktanın civarında değil, bütün aralık boyunca dengeli bir yaklaşım sağlamalıdır; Taylor polinomları bu konuda bekleneni veremez. Nümerik analizde Taylor polinomları daha çok nümerik teknikleri geliştirmek ve hata tahmini yapmak için kullanılır. Aralık boyunca yaklaşım için fonksiyonla birden çok noktada çakışan polinomlara yöneliriz.

 CC BY-NC-SA 4.0

8.2 Lagrange interpolasyon polinomları

Bir f fonksiyonuna polinomla yaklaşmanın iki faydası vardır: karmaşık bir fonksiyon yerine türevi ve integrali kolay hesaplanan bir fonksiyonla çalışmak ve değerleri bir tablo hâlinde verilmiş bir fonksiyonun tabloda olmayan değerlerini hesaplamak. İki noktadan geçen doğruyla başlayıp bunu $n+1$ noktaya genelleştireceğiz.

8.2.1 Lineer interpolasyon

x_0 ve x_1 farklı iki nokta, $f(x_0) = y_0$ ve $f(x_1) = y_1$ de f'nin bu noktalardaki değerleri olsun. Amacımız bu iki noktada f ile aynı değeri alan bir polinom bulmaktır. Şu lineer polinomu göz önüne alalım:

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\, y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\, y_1 \tag{1}$$

$x = x_0$ konursa birinci kesir 1, ikinci kesir 0 olur ve $P(x_0) = y_0$ bulunur; benzer şekilde $P(x_1) = y_1$'dir. Şu hâlde P, x_0 ve x_1 noktalarında f ile aynı değerleri alır.

Tanım 8.3 (Lineer Lagrange interpolasyon polinomu). (1)'deki $P(x)$ polinomuna (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen, derecesi en fazla bir olan **lineer Lagrange interpolasyon polinomu** denir.

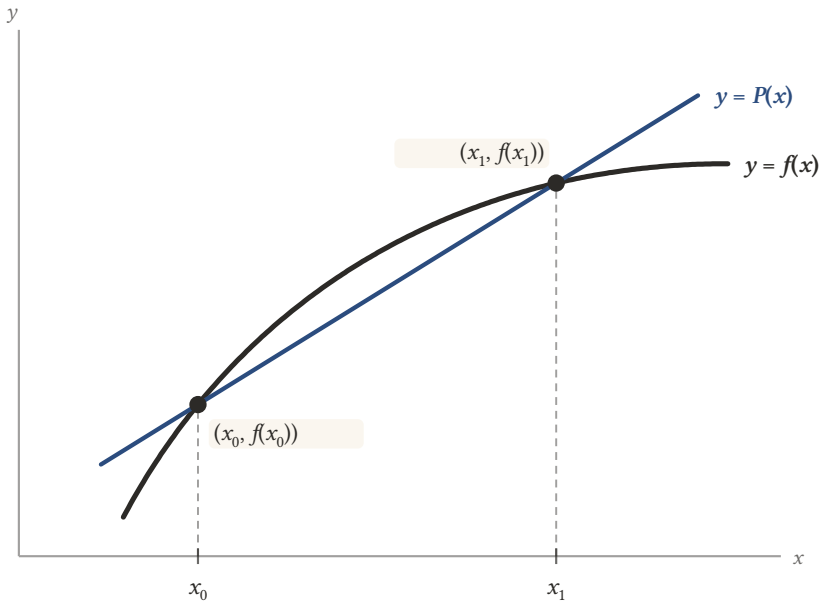
$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}, \qquad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

denirse bu polinom

$$P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x)$$

biçiminde yazılır ve $L_0(x_0) = 1$, $L_0(x_1) = 0$, $L_1(x_0) = 0$, $L_1(x_1) = 1$'dir.

Yani lineer Lagrange polinomu, iki noktadan geçen doğrunun özel bir yazılışıdır: L_0 ve L_1 düğümlerin birinde 1, ötekinde 0 olan "anahtar" fonksiyonlardır ve P, f değerlerinin bu anahtarlarla ağırlıklı toplamıdır. Böyle bir doğrunun tek olduğu, aşağıdaki teoremin (Teorem 8.2) $n = 1$ hâlidir.



Şekil 8.4: $y = f(x)$ eğrisi ve $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ noktalarından geçen $y = P(x)$ doğrusu. P, iki düğümde f ile aynı değeri alır; düğümlerin arasında ve dışında f'den ayrılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 8.2 (İki noktadan geçen doğru). Düzlemde $(2,4)$ ve $(5,1)$ noktalarından geçen lineer Lagrange interpolasyon polinomunu belirleyiniz.

Çözüm.
$x_0 = 2$, $y_0 = 4$, $x_1 = 5$, $y_1 = 1$ alalım. Katsayı polinomları

$$L_0(x) = \frac{x-5}{2-5} = -\frac{1}{3}(x-5), \qquad L_1(x) = \frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}(x-2)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} P(x) &= L_0(x)\,y_0 + L_1(x)\,y_1 = -\frac{1}{3}(x-5)\cdot 4 + \frac{1}{3}(x-2)\cdot 1 \\ &= \frac{-4x+20+x-2}{3} = \frac{-3x+18}{3} = -x+6 \end{aligned}$$

bulunur. Gerçekten de $P(2) = -2+6 = 4$ ve $P(5) = -5+6 = 1$'dir. ■

8.2.2 Genel durum

Şimdi $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$ gibi $n+1$ farklı noktadan geçen ve derecesi en fazla n olan bir polinom kuralım. Lineer durumdaki fikri izleyerek her $k = 0, 1, ..., n$ için $L_k(x_k) = 1$ ve $i \neq k$ için $L_k(x_i) = 0$ olan bir L_k fonksiyonu arıyoruz.
$i \neq k$ olan her x_i'de sıfır olması için L_k'nın payı

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$$

çarpımını içermelidir; bu çarpımda yalnız $(x-x_k)$ çarpanı eksiktir. $L_k(x_k) = 1$ olması için de payı, $x = x_k$'deki değerine, yani

$$(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)$$

sayısına bölmeliyiz. Noktalar farklı olduğundan bu sayı sıfır değildir.

Tanım 8.4 (Lagrange katsayı polinomları). $x_0, x_1, ..., x_n$ birbirinden farklı $n+1$ nokta olsun. $k = 0, 1, ..., n$ için

$$\begin{aligned} L_k(x) &= \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \end{aligned} \tag{2}$$

polinomlarına **Lagrange katsayı polinomları** denir.

Yani L_k, n tane lineer çarpanın bir sabite bölümüdür; tam olarak n. dereceden bir polinomdur, x_k'de 1 ve öteki bütün düğümlerde 0 değerini alır. $n = 1$ için (2), lineer durumdaki $L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}$ ve $L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$ polinomlarını verir.

Teorem 8.2 (Lagrange interpolasyon polinomu). *$x_0, x_1, ..., x_n$ birbirinden farklı $n+1$ nokta ve f bu noktalardaki değerleri bilinen bir fonksiyon olsun. Bu durumda derecesi en fazla n olan ve*

$$P(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0, 1, ..., n$$

eşitliklerinin hepsini sağlayan tek bir P polinomu vardır. Bu polinom, (2)'deki L_k'larla

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + ... + f(x_n)L_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x) \end{aligned} \tag{3}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

biçimindedir ve ***n. dereceden Lagrange interpolasyon polinomu*** *olarak adlandırılır.*

İspat.
Varlık. *Her L_k n. dereceden bir polinom olduğundan (3)'teki P, derecesi en fazla n olan bir polinomdur. Bir x_j düğümünde $L_j(x_j) = 1$ ve $k \neq j$ için $L_k(x_j) = 0$ olduğundan toplamdaki terimlerden yalnız $k = j$ terimi kalır:*

$$P(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x_j) = f(x_j) \cdot 1 = f(x_j), \qquad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Teklik. *Q, derecesi en fazla n olan ve her k için $Q(x_k) = f(x_k)$ sağlayan bir başka polinom olsun. $D = P - Q$ farkının derecesi en fazla n'dir ve $x_0, x_1, \ldots, x_n$ gibi $n+1$ farklı kökü vardır. Sıfırdan farklı, derecesi en fazla n olan bir polinomun en fazla n kökü olabileceğinden D sıfır polinomudur, yani $Q = P$'dir.* ■

Yani $n+1$ farklı noktadan geçen ve derecesi en fazla n olan polinom bir tanedir ve Lagrange formülü onu doğrudan yazar. Adında "n. dereceden" geçse de polinomun derecesi n'den küçük çıkabilir; aşağıdaki örnekte (Örnek 8.5) $n = 2$ için $P(x) = x$ bulunacak.

Lagrange interpolasyon polinomu üç adımda

1. Her $k = 0, 1, \ldots, n$ için $L_k(x)$'i (2) ile yazın: payında $(x - x_k)$ dışındaki bütün $(x - x_i)$ çarpanları, paydasında aynı çarpanların $x = x_k$'deki değerleri durur.
2. $P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k(x)$ toplamını kurun ve gerekiyorsa açıp sadeleştirin.
3. Denetleyin: her düğümde $P(x_k) = f(x_k)$ olmalıdır. Bir noktada yaklaşık değer isteniyorsa P'yi o noktada hesaplayın.

Örnek 8.3 (Ters fonksiyon için ikinci dereceden polinom). $x_0 = 2, x_1 = 2{,}75$ ve $x_2 = 4$ noktalarını kullanarak $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu için ikinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu yazınız.

Çözüm.
Adım 1. Paydalar

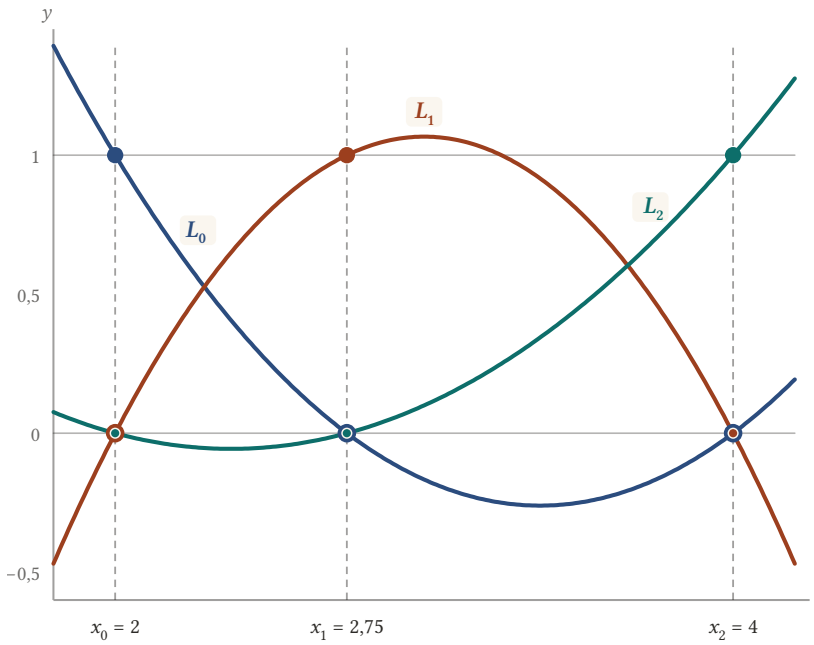
$$\begin{aligned}(2 - 2{,}75)(2 - 4) &= 1{,}5,\\ (2{,}75 - 2)(2{,}75 - 4) &= -0{,}9375 = -\frac{15}{16},\\ (4 - 2)(4 - 2{,}75) &= 2{,}5\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}L_0(x) &= \frac{(x - 2{,}75)(x - 4)}{(2 - 2{,}75)(2 - 4)} = \frac{2}{3}(x - 2{,}75)(x - 4),\\ L_1(x) &= \frac{(x - 2)(x - 4)}{(2{,}75 - 2)(2{,}75 - 4)} = -\frac{16}{15}(x - 2)(x - 4),\\ L_2(x) &= \frac{(x - 2)(x - 2{,}75)}{(4 - 2)(4 - 2{,}75)} = \frac{2}{5}(x - 2)(x - 2{,}75)\end{aligned}$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.5: $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}75$, $x_2 = 4$ düğümleri için L_0, L_1, L_2 Lagrange katsayı polinomları. Her L_k kendi düğümünde 1, öteki iki düğümde 0 değerini alır.

Adım 2. Fonksiyon değerleri $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(2{,}75) = \frac{1}{2{,}75} = \frac{4}{11}$ ve $f(4) = \frac{1}{4}$'tür. Buna göre

$$\begin{aligned} P(x) &= f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x-2{,}75)(x-4) + \frac{4}{11}\cdot\left(-\frac{16}{15}\right)(x-2)(x-4) \\ &\quad + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}(x-2)(x-2{,}75). \end{aligned}$$

Çarpımları açalım:

$$\begin{aligned} (x-2{,}75)(x-4) &= x^2 - 6{,}75x + 11, \\ (x-2)(x-4) &= x^2 - 6x + 8, \\ (x-2)(x-2{,}75) &= x^2 - 4{,}75x + 5{,}5. \end{aligned}$$

Böylece üç terim

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(x^2 - 6{,}75x + 11) &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{11}{3}, \\ -\frac{64}{165}(x^2 - 6x + 8) &= -\frac{64}{165}x^2 + \frac{128}{55}x - \frac{512}{165}, \\ \frac{1}{10}(x^2 - 4{,}75x + 5{,}5) &= \frac{1}{10}x^2 - \frac{19}{40}x + \frac{11}{20} \end{aligned}$$

olur. Katsayıları toplarsak

$$\begin{aligned} x^2 &: \frac{1}{3} - \frac{64}{165} + \frac{1}{10} = \frac{110 - 128 + 33}{330} = \frac{1}{22}, \\ x &: -\frac{9}{4} + \frac{128}{55} - \frac{19}{40} = \frac{-2970 + 3072 - 627}{1320} = -\frac{35}{88}, \\ 1 &: \frac{11}{3} - \frac{512}{165} + \frac{11}{20} = \frac{2420 - 2048 + 363}{660} = \frac{49}{44} \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve

$$P(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$$

bulunur.
Adım 3. Denetleyelim:

$$\begin{aligned} P(2) &= \frac{16 - 70 + 98}{88} = \frac{44}{88} = \frac{1}{2}, \\ P(2{,}75) &= \frac{30{,}25 - 96{,}25 + 98}{88} = \frac{32}{88} = \frac{4}{11}, \\ P(4) &= \frac{64 - 140 + 98}{88} = \frac{22}{88} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Üç düğümde de $P(x_k) = f(x_k)$ sağlanır. ■

Örnek 8.4 (Ters fonksiyonun 3 noktasındaki yaklaşık değeri). $x_0 = 2$, $x_1 = 2{,}75$, $x_2 = 4$ noktalarıyla $f(x) = \frac{1}{x}$ için bulunan $P(x) = \frac{1}{22}x^2 - \frac{35}{88}x + \frac{49}{44}$ polinomunu (Örnek 8.3) kullanarak $f(3) = \frac{1}{3}$ değerine bir yaklaşımda bulununuz.

Çözüm.
Polinomu $x = 3$'te hesaplayalım:

$$f(3) \approx P(3) = \frac{9}{22} - \frac{105}{88} + \frac{49}{44} = \frac{36 - 105 + 98}{88} = \frac{29}{88} \approx 0{,}32955.$$

Aynı sonuç, polinomu açmadan doğrudan (3)'ten de çıkar: $L_0(3) = \frac{2}{3}(0{,}25)(-1) = -\frac{1}{6}$, $L_1(3) = -\frac{16}{15}(1)(-1) = \frac{16}{15}$, $L_2(3) = \frac{2}{5}(1)(0{,}25) = \frac{1}{10}$ ve

$$P(3) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{4}{11}\cdot\frac{16}{15} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10} = \frac{-110 + 512 + 33}{1320} = \frac{29}{88}.$$

Gerçek değerle fark $\left|\frac{1}{3} - \frac{29}{88}\right| = \frac{1}{264} \approx 0{,}00379$'dur. ■

Örnek 8.5 (Sinüs için ikinci dereceden polinom). $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ noktalarında $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiğini kesen ikinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu yazınız.

Çözüm.
$f(-1) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $f(0) = \sin 0 = 0$ ve $f(1) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ olduğundan $(-1,-1)$, $(0,0)$ ve $(1,1)$ noktalarından geçen polinomu arıyoruz. Katsayı polinomları

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - x), \\ L_1(x) &= \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = \frac{x^2-1}{-1} = 1 - x^2, \\ L_2(x) &= \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{(x+1)x}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + x) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} P(x) &= (-1)\cdot\frac{1}{2}(x^2 - x) + 0\cdot(1 - x^2) + 1\cdot\frac{1}{2}(x^2 + x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x \end{aligned}$$

bulunur. Üç nokta aynı doğru üzerinde olduğundan, derecesi en fazla 2 olan tek interpolasyon polinomu bu doğrudur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Hata terimi

Lagrange polinomu düğümlerde f ile çakışır; düğümler arasında ise bir hata yapar. Aşağıdaki teorem bu hatayı, Taylor teoremindeki kalan terime çok benzeyen bir biçimde verir.

Teorem 8.3 (Lagrange interpolasyonunun hata terimi). *$x_0, x_1, ..., x_n$ noktaları $[a,b]$ aralığında birbirinden farklı $n+1$ nokta ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ olsun. $P(x)$, bu noktalardaki interpolasyon polinomu (Teorem 8.2) olmak üzere her $x \in [a,b]$ için*

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \tag{4}$$

eşitliğini sağlayan bir $\xi(x) \in (a,b)$ sayısı vardır.

İspat.
x bir düğümse. *Bir k için $x = x_k$ ise $f(x_k) = P(x_k)$ ve $(x - x_k) = 0$ olduğundan (4)'ün iki tarafı eşittir; $\xi(x_k)$ olarak (a,b)'deki herhangi bir sayı alınabilir.*
x bir düğüm değilse. *x'i sabitleyelim ve $t \in [a,b]$ için*

$$g(t) = f(t) - P(t) - [f(x) - P(x)] \prod_{i=0}^{n} \frac{t - x_i}{x - x_i}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Her i için $x \neq x_i$ olduğundan paydalar sıfırdan farklıdır. $f \in C^{n+1}[a,b]$, P bir polinom ve çarpım t'nin bir polinomu olduğundan $g \in C^{n+1}[a,b]$'dir.
$t = x_k$ konursa $f(x_k) - P(x_k) = 0$ ve çarpımdaki $(x_k - x_k)$ çarpanı sıfır olduğundan $g(x_k) = 0$ olur.
$t = x$ konursa çarpımın her çarpanı 1 olur ve

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] \cdot 1 = 0$$

bulunur. Böylece g, $x, x_0, x_1, ..., x_n$ gibi $[a,b]$'deki $n+2$ farklı noktada sıfırdır. Genelleştirilmiş Rolle Teoremine (Teorem 1.6) göre $g^{(n+1)}(\xi(x)) = 0$ olacak şekilde bir $\xi(x) \in (a,b)$ vardır.
g'nin $(n+1)$. türevini hesaplayalım. P'nin derecesi en fazla n olduğundan $P^{(n+1)} \equiv 0$'dır. Çarpım, $(n+1)$. dereceden bir polinomdur:

$$\prod_{i=0}^{n} \frac{t - x_i}{x - x_i} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}\, t^{n+1} + (\text{daha küçük dereceli terimler}).$$

t^{n+1}'in $(n+1)$. türevi $(n+1)!$, daha küçük dereceli terimlerinki sıfır olduğundan

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \prod_{i=0}^{n} \frac{t - x_i}{x - x_i} = \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

olur. Bunları $g^{(n+1)}(\xi(x)) = 0$ eşitliğinde yerine koyarsak

$$0 = f^{(n+1)}(\xi(x)) - 0 - [f(x) - P(x)] \frac{(n+1)!}{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

bulunur. Buradan $f(x)$ çekilirse

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

elde edilir; bu (4)'tür. ■

Yani Lagrange interpolasyon polinomunun hata terimi

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n), \qquad \xi(x) \in (a,b)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

biçimindedir. Taylor kalanında $(x-x_0)^{n+1}$ kuvveti, burada ise bütün düğümlere olan uzaklıkların çarpımı vardır; hata düğümlerde sıfırdır ve düğümlerden uzaklaştıkça büyüyebilir. $\xi(x)$ bilinmediğinden formül hatayı tam olarak vermez, ama hata için bir üst sınır bulmayı sağlar.

Sonuç 8.1 (Lagrange interpolasyonunda hata sınırı). *Hata teoremindeki (Teorem 8.3) koşullar altında her $t \in [a,b]$ için $| f^{(n+1)}(t) | \leq M$ ise her $x \in [a,b]$ için*

$$| f(x) - P(x) | \leq \frac{M}{(n+1)!} | (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) |$$

olur.

İspat.
(4)'te $| f^{(n+1)}(\xi(x)) | \leq M$ kullanılır, çünkü $\xi(x) \in (a,b)$'dir. ■

Hata sınırı üç adımda

1. $f^{(n+1)}$'i hesaplayın ve $[a,b]$'de $| f^{(n+1)}(t) | \leq M$ olacak bir M bulun.
2. $| (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) |$ çarpımının $[a,b]$'deki en büyük değerini bulun: türevle ya da düğümler eşit aralıklıysa $\frac{h^{n+1}n!}{4}$ sınırıyla (Alıştırma 8.5).
3. Sonuç 8.1 gereği hata en fazla $\frac{M}{(n+1)!}$ ile bu en büyük değerin çarpımıdır.

Örnek 8.6 (Sinüs yaklaşımının hata sınırı). $x_0=-1$, $x_1=0$, $x_2=1$ noktalarında $f(x)=\sin(\frac{\pi x}{2})$ fonksiyonunun grafiğini kesen, derecesi en fazla 2 olan Lagrange interpolasyon polinomuyla (Örnek 8.5) yapılan yaklaşımın $[-1,1]$'deki mutlak hatası için bir sınır belirleyiniz.

Çözüm.
Bu polinom $P_2(x)=x$ olarak bulunmuştu (Örnek 8.5). $n=2$ için (4)'ten, her $x \in [-1,1]$ için bir $\xi(x) \in (-1,1)$ vardır ve

$$| f(x) - P_2(x) | = \left| \frac{f'''(\xi(x))}{3!} (x+1)\,x\,(x-1) \right|$$

olur. Türevler

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos\Big(\frac{\pi x}{2}\Big), \qquad f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\sin\Big(\frac{\pi x}{2}\Big),$$
$$f'''(x) = -\frac{\pi^3}{8}\cos\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)$$

olduğundan ve $(x+1)x(x-1) = x^3 - x$ olduğundan

$$| f(x) - P_2(x) | = \frac{\pi^3}{48}\left|\cos\left(\frac{\pi\,\xi(x)}{2}\right)\right| | x^3 - x |$$
$$\leq \frac{\pi^3}{48} | x^3 - x | \leq \frac{\pi^3}{48} \max_{x\in[-1,1]} | x^3 - x |$$

bulunur; burada $|\cos| \leq 1$ kullanıldı.
Son maksimumu hesaplayalım. $g(x) = x^3 - x$ fonksiyonu $[-1,1]$'de süreklidir; $g'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ denkleminden $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ bulunur. Uç noktalarda $| g(-1) | = | g(1) | = 0$, kritik noktalarda

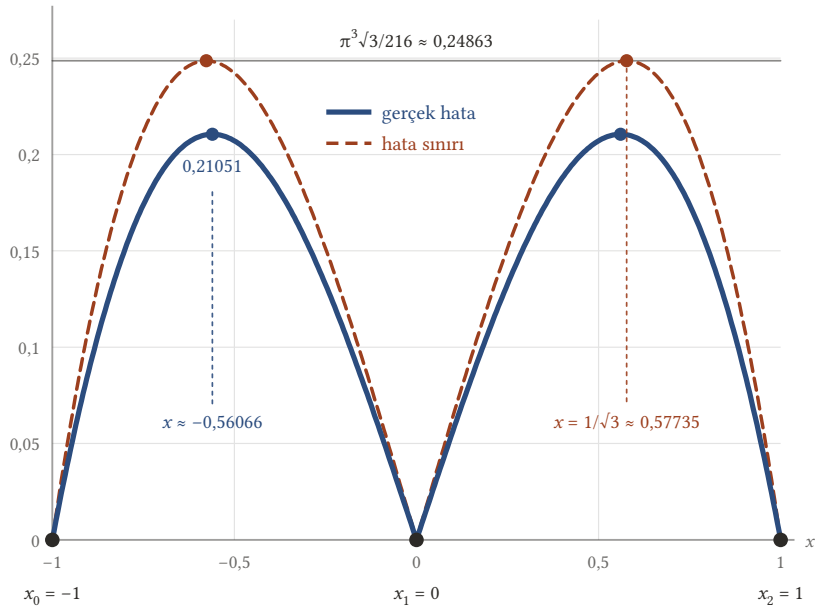
$$\left| g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right| = \left| \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

olduğundan $\max_{x\in[-1,1]} | x^3 - x | = \frac{2\sqrt{3}}{9}$'dur. Sonuç olarak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| f(x) - P_2(x) | \le \frac{\pi^3}{48} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi^3\sqrt{3}}{216} \approx 0{,}24863$$

gerçeklenir. Gerçek hatanın en büyük değeri, $x \approx \pm 0{,}56066$ noktalarında yaklaşık $0{,}21051$'dir; sınır bunun biraz üstündedir.



Şekil 8.6: Kalın eğri gerçek hata $|\sin(\pi x/2) - x|$, kesikli eğri teoremden gelen $(\pi^3/48)|x^3 - x|$ sınırıdır. Sınırın tepeleri $x = \pm 1/\sqrt{3}$ noktalarında $\pi^3\sqrt{3}/216 \approx 0{,}24863$, gerçek hatanın tepeleri $x \approx \pm 0{,}56066$ noktalarında $0{,}21051$'dir. Üç düğümde ikisi de sıfırdır ve sınır her yerde gerçek hatanın üstünde kalır.

■

8.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar Lagrange polinomunu kurmayı, Taylor polinomuyla karşılaştırmayı ve hata sınırlarını hesaplamayı pekiştirir.

Alıştırma 8.1 (Ters fonksiyon için Taylor ile karşılaştırma). Lagrange interpolasyon polinomu yerine $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ civarındaki 1., 2. ve 3. mertebeden Taylor polinomlarını kullanarak $f(3) = \frac{1}{3}$ değerine yaklaşımlarda bulununuz ve sonuçları Lagrange polinomuyla bulunan $P(3) = \frac{29}{88}$ değeriyle (Örnek 8.4) karşılaştırınız.

Çözüm.
Türevler. $f(x) = x^{-1}$ için $f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$, $f'''(x) = -6x^{-4}$; genel olarak $f^{(k)}(x) = (-1)^k k!\, x^{-(k+1)}$ ve $f^{(k)}(1) = (-1)^k k!$'dir. Taylor teoremine (Teorem 1.9) göre $x_0 = 1$ civarındaki Taylor polinomlarında $(x-1)^k$'nın katsayısı $\frac{f^{(k)}(1)}{k!} = (-1)^k$ olur:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 1 - (x-1), \\ P_2(x) &= 1 - (x-1) + (x-1)^2, \\ P_3(x) &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3. \end{aligned}$$

$x = 3$'teki değerler. $x - 1 = 2$ olduğundan

$$P_1(3) = 1 - 2 = -1, \qquad P_2(3) = -1 + 4 = 3, \qquad P_3(3) = 3 - 8 = -5$$

bulunur. Hatalar $\left|\frac{1}{3} - (-1)\right| = \frac{4}{3}$, $\left|\frac{1}{3} - 3\right| = \frac{8}{3}$ ve $\left|\frac{1}{3} - (-5)\right| = \frac{16}{3}$'tür.

Karşılaştırma. Taylor yaklaşımları gerçek değerden çok uzaktır, üstelik mertebe arttıkça hata her adımda iki katına çıkar. Genel olarak

$$P_n(3) = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k = \frac{1-(-2)^{n+1}}{3}$$

olduğundan hata $\left|\frac{1}{3} - P_n(3)\right| = \frac{2^{n+1}}{3}$'tür. Nedeni, $x=3$ noktasının $x_0=1$'den uzak olması ve $(x-1)^k = 2^k$ terimlerinin büyümesidir. Buna karşılık 2, 2,75 ve 4 düğümleri 3'ün çevresine yayılmış olduğundan Lagrange polinomu $\frac{29}{88} \approx 0{,}32955$ değerini, yalnız $\frac{1}{264} \approx 0{,}00379$ hatayla verir. ■

Alıştırma 8.2 (Tablodan üçüncü dereceden polinom). $f(x)$ fonksiyonu ile ilgili aşağıdaki tablo verilsin.

k	0	1	2	3
x_k	-1	2	3	4
$f(x_k)$	3	1	2	4

$f(x)$ fonksiyonu için üçüncü dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Katsayı polinomları.

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(-1-2)(-1-3)(-1-4)} = -\frac{1}{60}(x-2)(x-3)(x-4),\\
L_1(x) &= \frac{(x+1)(x-3)(x-4)}{(2+1)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{6}(x+1)(x-3)(x-4),\\
L_2(x) &= \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(3+1)(3-2)(3-4)} = -\frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-4),\\
L_3(x) &= \frac{(x+1)(x-2)(x-3)}{(4+1)(4-2)(4-3)} = \frac{1}{10}(x+1)(x-2)(x-3).
\end{aligned}$$

Adım 2: Toplam.

$$\begin{aligned}
P(x) = 3\cdot\left(-\frac{1}{60}\right)(x-2)(x-3)(x-4) + 1\cdot\frac{1}{6}(x+1)(x-3)(x-4)\\
+2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)(x+1)(x-2)(x-4) + 4\cdot\frac{1}{10}(x+1)(x-2)(x-3).
\end{aligned}$$

Çarpımlar

$$\begin{aligned}
(x-2)(x-3)(x-4) &= x^3 - 9x^2 + 26x - 24,\\
(x+1)(x-3)(x-4) &= x^3 - 6x^2 + 5x + 12,\\
(x+1)(x-2)(x-4) &= x^3 - 5x^2 + 2x + 8,\\
(x+1)(x-2)(x-3) &= x^3 - 4x^2 + x + 6
\end{aligned}$$

olduğundan dört terim

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{20}(x^3-9x^2+26x-24) &= -\frac{1}{20}x^3+\frac{9}{20}x^2-\frac{13}{10}x+\frac{6}{5},\\
\frac{1}{6}(x^3-6x^2+5x+12) &= \frac{1}{6}x^3-x^2+\frac{5}{6}x+2,\\
-\frac{1}{2}(x^3-5x^2+2x+8) &= -\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2-x-4,\\
\frac{2}{5}(x^3-4x^2+x+6) &= \frac{2}{5}x^3-\frac{8}{5}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{12}{5}
\end{aligned}
$$

olur. Katsayıları toplayalım:

$$
\begin{aligned}
x^3 &: -\frac{1}{20}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5} = \frac{-3+10-30+24}{60} = \frac{1}{60},\\
x^2 &: \frac{9}{20}-1+\frac{5}{2}-\frac{8}{5} = \frac{9-20+50-32}{20} = \frac{7}{20},\\
x &: -\frac{13}{10}+\frac{5}{6}-1+\frac{2}{5} = \frac{-39+25-30+12}{30} = -\frac{16}{15},\\
1 &: \frac{6}{5}+2-4+\frac{12}{5} = \frac{8}{5}.
\end{aligned}
$$

Böylece

$$P(x) = \frac{1}{60}x^3+\frac{7}{20}x^2-\frac{16}{15}x+\frac{8}{5}$$

bulunur.
Adım 3: Denetim.

$$
\begin{aligned}
P(-1) &= \frac{-1+21+64+96}{60} = 3, \qquad P(2) = \frac{8+84-128+96}{60} = 1,\\
P(3) &= \frac{27+189-192+96}{60} = 2, \qquad P(4) = \frac{64+336-256+96}{60} = 4;
\end{aligned}
$$

tablo değerleri sağlanır. ■

Alıştırma 8.3 (Üstel fonksiyon için birinci dereceden polinom). $f(x) = 3e^{x} - e^{2x}$ fonksiyonu ve $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}05$ noktaları verilsin. f için birinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu bulunuz ve $P_1(1{,}03)$ değerini $f(1{,}03)$ ile karşılaştırınız.

Çözüm.
Fonksiyon değerleri (dokuz basamak):

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 3e - e^{2} = 0{,}765789386,\\
f(1{,}05) &= 3e^{1{,}05} - e^{2{,}1} = 0{,}406783442.
\end{aligned}
$$

Polinom. (1) ile

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= f(1)\frac{x-1{,}05}{1-1{,}05} + f(1{,}05)\frac{x-1}{1{,}05-1}\\
&= -20f(1)(x-1{,}05) + 20f(1{,}05)(x-1)\\
&\approx 7{,}945908283 - 7{,}180118896\,x
\end{aligned}
$$

bulunur.
1,03'teki değer. $L_0(1{,}03) = \frac{-0{,}02}{-0{,}05} = 0{,}4$ ve $L_1(1{,}03) = \frac{0{,}03}{0{,}05} = 0{,}6$ olduğundan

$$P_1(1{,}03) = 0{,}4\cdot 0{,}765789386 + 0{,}6\cdot 0{,}406783442 = 0{,}550385820.$$

Gerçek değer

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(1{,}03) = 3e^{1{,}03} - e^{2{,}06} = 0{,}557227694$$

olduğundan mutlak hata

$$\mid f(1{,}03) - P_1(1{,}03) \mid = 0{,}006841874$$

olur.
Hata sınırıyla karşılaştırma. $f''(x) = 3e^x - 4e^{2x}$, yani $f''(x) = e^x(3 - 4e^x)$ ve $x \geq 1$ için $\mid f''(x) \mid = e^x(4e^x - 3)$ artandır; $[1;\,1{,}05]$'te en büyük değeri $M = \mid f''(1{,}05) \mid = 24{,}091726296$'dır. Sonuç 8.1 ile

$$\begin{aligned} \mid f(1{,}03) - P_1(1{,}03) \mid &\leq \frac{M}{2!} \mid (0{,}03)(-0{,}02) \mid \\ &= 12{,}045863148 \cdot 0{,}0006 = 0{,}007227518 \end{aligned}$$

bulunur; gerçek hata bu sınırın altındadır. ■

Alıştırma 8.4 (Üstel fonksiyon için ikinci dereceden polinom). $f(x) = 3e^x - e^{2x}$ fonksiyonu ve $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}05$, $x_2 = 1{,}07$ noktaları verilsin. f için ikinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu bulunuz ve $P_2(1{,}03)$ değerini $f(1{,}03)$ ile ve birinci dereceden yaklaşımla (Alıştırma 8.3) karşılaştırınız.

Çözüm.
Fonksiyon değerleri (dokuz basamak): $f(1) = 0{,}765789386$, $f(1{,}05) = 0{,}406783442$ ve

$$f(1{,}07) = 3e^{1{,}07} - e^{2{,}14} = 0{,}246700871.$$

Katsayı polinomları. Paydalar

$$\begin{aligned} (1 - 1{,}05)(1 - 1{,}07) &= 0{,}0035, \\ (1{,}05 - 1)(1{,}05 - 1{,}07) &= -0{,}001, \\ (1{,}07 - 1)(1{,}07 - 1{,}05) &= 0{,}0014 \end{aligned}$$

olduğundan

$$L_0(x) = \frac{(x - 1{,}05)(x - 1{,}07)}{0{,}0035}, \qquad L_1(x) = -\frac{(x - 1)(x - 1{,}07)}{0{,}001},$$
$$L_2(x) = \frac{(x - 1)(x - 1{,}05)}{0{,}0014}$$

ve

$$P_2(x) = f(1)L_0(x) + f(1{,}05)L_1(x) + f(1{,}07)L_2(x)$$

olur. Açılmış hâli

$$P_2(x) \approx -11{,}771566177\,x^2 + 16{,}951591765\,x - 4{,}414236202$$

dir. Katsayılar büyük ve işaretleri farklı olduğundan bu biçimde yuvarlama hataları birbirini götürmez, büyür; değeri Lagrange biçiminden hesaplamak daha güvenlidir.
1,03'teki değer.

$$L_0(1{,}03) = \frac{(-0{,}02)(-0{,}04)}{0{,}0035} = \frac{8}{35}, \qquad L_1(1{,}03) = -\frac{(0{,}03)(-0{,}04)}{0{,}001} = \frac{6}{5},$$
$$L_2(1{,}03) = \frac{(0{,}03)(-0{,}02)}{0{,}0014} = -\frac{3}{7}$$

olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P_2(1{,}03) = \frac{8}{35}\cdot 0{,}765789386 + \frac{6}{5}\cdot 0{,}406783442 - \frac{3}{7}\cdot 0{,}246700871$$
$$= 0{,}175037574 + 0{,}488140130 - 0{,}105728945 = 0{,}557448759$$

bulunur. $f(1{,}03) = 0{,}557227694$ ile mutlak hata

$$\mid f(1{,}03) - P_2(1{,}03) \mid = 0{,}000221065$$

olur.
Hata sınırı. $f'''(x) = 3e^x - 8e^{2x}$, yani $f'''(x) = e^x(3 - 8e^x)$ ve $x \geq 1$ için $\mid f'''(x) \mid = e^x(8e^x - 3)$ artandır; $[1;\, 1{,}07]$'de $M = \mid f'''(1{,}07) \mid = 59{,}249362531$'dir. Sonuç 8.1 ile

$$\mid f(1{,}03) - P_2(1{,}03) \mid \leq \frac{M}{3!} \mid (0{,}03)(-0{,}02)(-0{,}04) \mid$$
$$= 9{,}874893755 \cdot 0{,}000024 = 0{,}000236997$$

bulunur; gerçek hata yine sınırın altındadır.
Karşılaştırma. Birinci dereceden polinomun hatası $0{,}006841874$, ikinci dereceden polinomunki $0{,}000221065$'tir. Üçüncü bir düğüm eklemek hatayı yaklaşık 31 kat küçültmüştür. ■

Alıştırma 8.5 (Eşit aralıklı düğümlerde çarpım sınırı). $[a, b]$ aralığında eşit aralıklı $n+1$ tane ($n \geq 1$)

$$x_0 = a, \quad x_1 = x_0 + \frac{b-a}{n}, \quad \ldots, \quad x_n = x_{n-1} + \frac{b-a}{n} = b$$

noktası için $h = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere her $x \in [a, b]$ için

$$\left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| = \mid (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \mid \leq \frac{h^{n+1}\, n!}{4}$$

gerçeklendiğini gösteriniz.

Çözüm.
Düğümler $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) biçimindedir. $x \in [a, b]$ verilsin; x, bir $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ için $[x_j, x_{j+1}]$ alt aralığındadır. Çarpımı üç gruba ayırıp her grubu ayrı ayrı sınırlayacağız.
***x*'e en yakın iki çarpan.** $x = x_j + s$ ($0 \leq s \leq h$) yazarsak

$$\mid (x - x_j)(x - x_{j+1}) \mid = s(h - s) \leq \frac{h^2}{4}$$

olur, çünkü $s(h-s) = \frac{h^2}{4} - \left(s - \frac{h}{2}\right)^2$'dir.
Soldaki düğümler. $i < j$ için $x \geq x_j > x_i$ ve $x \leq x_{j+1}$ olduğundan

$$\mid x - x_i \mid = x - x_i \leq x_{j+1} - x_i = (j + 1 - i)h$$

dir. $i = 0, 1, \ldots, j-1$ için bu sınırlar $(j+1)h, jh, \ldots, 2h$ olduğundan

$$\prod_{i=0}^{j-1} \mid x - x_i \mid \leq (j+1)!\, h^j$$

bulunur ($j = 0$ ise çarpım boştur ve 1'e eşittir).
Sağdaki düğümler. $i > j + 1$ için $x \leq x_{j+1} < x_i$ ve $x \geq x_j$ olduğundan

$$\mid x - x_i \mid = x_i - x \leq x_i - x_j = (i - j)h$$

dir. $i = j+2, \ldots, n$ için bu sınırlar $2h, 3h, \ldots, (n-j)h$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\prod_{i=j+2}^{n} \mid x - x_i \mid \leq (n-j)!\, h^{n-j-1}$$

bulunur ($j = n-1$ ise çarpım boştur ve 1'e eşittir).
Birleştirme. Üç sınırı çarparsak h'nin kuvveti $2 + j + (n-j-1) = n+1$ olur ve

$$\left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \leq \frac{h^{n+1}}{4} (j+1)!\,(n-j)!$$

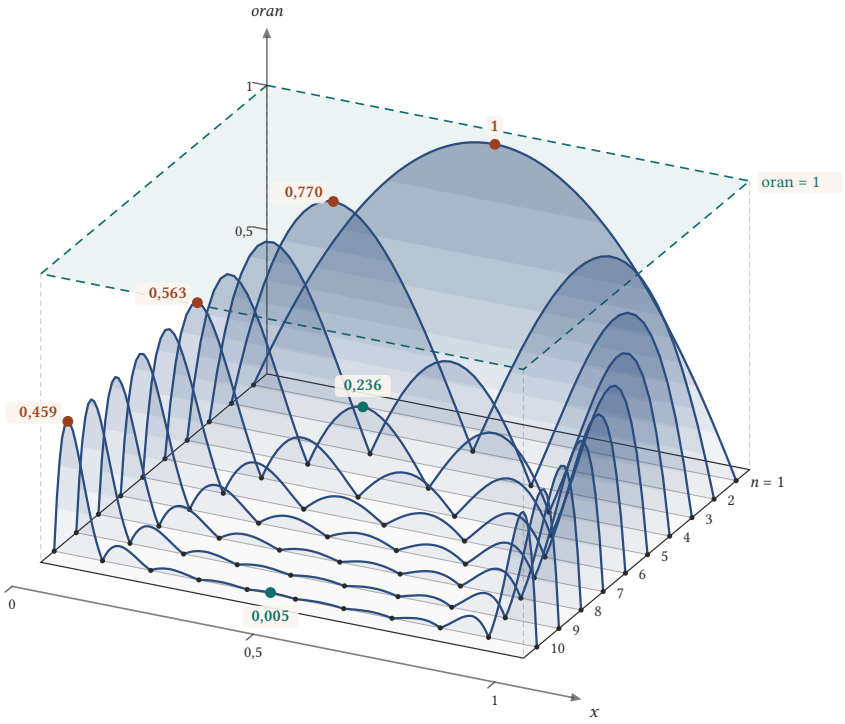
elde edilir. Son olarak $0 \leq j \leq n-1$ için $(j+1)!\,(n-j)! \leq n!$ olduğunu gösterelim. $(j+1) + (n-j) = n+1$ olduğundan

$$\frac{(n+1)!}{(j+1)!\,(n-j)!} = \binom{n+1}{j+1} \geq n+1$$

dir. Gerçekten, ardışık iki katsayının oranı $\binom{n+1}{m+1} \,/\, \binom{n+1}{m} = \frac{n+1-m}{m+1}$ olduğundan $\binom{n+1}{m}$ katsayıları ortaya kadar artar, sonra simetrik olarak azalır; $m = 1, \ldots, n$ arasındaki en küçük değerleri uçlardaki $\binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{n} = n+1$'dir ve $1 \leq j+1 \leq n$'dir. Buradan $(j+1)!\,(n-j)! \leq \frac{(n+1)!}{n+1} = n!$ çıkar ve

$$\mid (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \mid \leq \frac{h^{n+1}\, n!}{4}$$

ispatlanmış olur.
Sınırın en kaba olduğu yer aralığın ortasıdır: $(j+1)!\,(n-j)!$ çarpanı uç alt aralıklarda ($j = 0$ ya da $j = n-1$) tam $n!$'e eşittir, ortadaki alt aralıklarda ise $n!$'den çok küçüktür. Yani çarpım, dolayısıyla hata sınırı, aralığın uçlarına yakın yerlerde büyüktür.



Şekil 8.7: [0, 1] aralığında $h = 1/n$ adımlı $n+1$ eşit aralıklı düğüm için $|(x-x_0)\ldots(x-x_n)|$ çarpımının $h^{n+1}n!/4$ sınırına oranı, $n = 1, 2, \ldots, 10$. Her şerit bir n değerine aittir; dolgu, oran büyüdükçe koyulaşır. Bütün şeritler oran = 1 düzleminin altında kalır. Uç alt aralıklardaki tepeler ($n = 1, 2, 5, 10$ için 1; 0,770; 0,563; 0,459) yüksektir; orta alt aralıktaki tepe $n = 4$'te 0,236, $n = 10$'da 0,005'tir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 8.6 (Logaritma için dokuzuncu dereceden polinomun hatası). $f(x) = \ln x$ fonksiyonu $[1, 2]$ aralığındaki 10 eşit aralıklı noktayla dokuzuncu dereceden Lagrange interpolasyon polinomu ile yaklaşık olarak temsil edildiğinde yapılan yaklaşım hatası için bir üst sınır belirleyiniz.

Çözüm.
Kurulum. 10 düğüm $n+1 = 10$, yani $n = 9$ demektir. Düğümler $x_i = 1 + \frac{i}{9}$ $(i = 0, 1, \ldots, 9)$ ve $h = \frac{2-1}{9} = \frac{1}{9}$'dur. Teorem 8.3 gereği $f(x) = P_9(x) + R_9(x)$ ve

$$R_9(x) = \frac{f^{(10)}(\xi(x))}{10!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_9), \qquad \xi(x) \in (1, 2)$$

olur.
Türev. $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4}$, ...; genel olarak $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}$ ve

$$f^{(10)}(x) = -\frac{9!}{x^{10}}$$

dur. $[1, 2]$'de $\mid f^{(10)}(t) \mid = \frac{9!}{t^{10}} \leq 9!$ olur; en büyük değer $t = 1$'dedir.
Sınır. Hata sınırını (Sonuç 8.1) ve eşit aralıklı düğümler için $\left|\prod_{i=0}^{9}(x - x_i)\right| \leq \frac{h^{10}\,9!}{4}$ eşitsizliğini (Alıştırma 8.5) kullanırsak

$$\begin{aligned} \mid f(x) - P_9(x) \mid = \mid R_9(x) \mid &\leq \frac{9!}{10!} \cdot \left|\prod_{i=0}^{9}(x - x_i)\right| = \frac{1}{10}\left|\prod_{i=0}^{9}(x - x_i)\right| \\ &\leq \frac{1}{10} \cdot \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^{10} 9!}{4} = \frac{9!}{10 \cdot 4 \cdot 9^{10}} = \frac{112}{43046721} \\ &\approx 0{,}0000026 \end{aligned}$$

bulunur. Yani dokuzuncu dereceden Lagrange polinomu $\ln x$'e $[1, 2]$'nin her noktasında en fazla yaklaşık $2{,}6 \cdot 10^{-6}$ hatayla yaklaşır. ■

Lagrange formülü interpolasyon polinomunu doğrudan yazar, ama bir düğüm eklendiğinde bütün L_k'ların baştan hesaplanması gerekir. Önceki hesapları koruyarak düğüm eklemeyi sağlayan yazılış bir sonraki bölümün konusudur: Bölünmüş Farklar ve Newton Formülleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

9. Bölünmüş Farklar ve Newton Formülleri

Lagrange biçiminde yazılmış bir interpolasyon polinomuna yeni bir nokta eklemek istediğimizde bütün $L_k(x)$ katsayı polinomları değişir ve hesap baştan yapılır. Oysa interpolasyon polinomu tektir (Teorem 8.2); değişen yalnız onu yazma biçimimizdir. Bu bölümde aynı polinomu, yeni bir nokta eklendiğinde yalnız bir terim ekleyerek güncellenen bir biçimde yazacağız. Katsayılar, bölünmüş farklar denen ve basit bir tabloyla hesaplanan sayılardır.
Newton bölünmüş farkları Principia'da (1687) ve Methodus Differentialis'te (1711) kullandı. James Stirling, bölümün sonunda göreceğimiz merkezi fark formülünü 1730 tarihli Methodus Differentialis'inde verdi.

9.1 Newton Biçimi ve Bölünmüş Farklar

Önce polinomu yazacağımız biçimi seçiyor, sonra katsayılarını ilk birkaç adımda doğrudan hesaplayarak genel kuralı buluyoruz.
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ farklı noktalarında f ile aynı değerleri alan, derecesi en çok n olan Lagrange interpolasyon polinomu $P_n(x)$ olsun. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ uygun sabitler olmak üzere bu polinomu

$$\begin{aligned} P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots \\ + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

biçiminde yazmak istiyoruz. Buna polinomun **Newton biçimi** denir. (1)'de $x = x_0$ yazılırsa x_0'ı içeren bütün çarpımlar sıfır olur ve $a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$ bulunur. $x = x_1$ yazılırsa yalnız ilk iki terim kalır:

$$f(x_1) = P_n(x_1) = f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

$x = x_2$ yazılırsa

$$f(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

olur. $a_0 = f(x_0)$ yazıp $f(x_1)$ ekleyip çıkararak düzenlersek

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_0) - a_1(x_2 - x_0) &= \big(\, f(x_2) - f(x_1) \,\big) + a_1(x_1 - x_0) - a_1(x_2 - x_0) \\ &= (x_2 - x_1)\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - a_1 \right) \end{aligned}$$

elde edilir; buradan

$$a_2 = \frac{1}{x_2 - x_0}\left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right)$$

bulunur. a_1 bir fark bölümüdür; a_2 ise iki ardışık fark bölümünün farkının yine bir uzunluğa bölümüdür. Bu yapıya bir ad verelim.

Tanım 9.1 (Bölünmüş Farklar). $x_0, x_1, \ldots, x_n$ farklı noktalar ve f bu noktalarda tanımlı bir fonksiyon olsun.
f'nin x_i noktasına göre **sıfırıncı bölünmüş farkı** $f[x_i] = f(x_i)$'dir.
x_i ve x_{i+1} noktalarına göre **birinci bölünmüş farkı**

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i},$$

x_i, x_{i+1}, x_{i+2} noktalarına göre **ikinci bölünmüş farkı**

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

olarak tanımlanır. Bu biçimde devam edilir: $k-1$. bölünmüş farklar bulunduktan sonra $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}$ noktalarına göre ***k*. bölünmüş fark**

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] - f[x_i, ..., x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

olur. Özel olarak f'nin n. bölünmüş farkı

$$f[x_0, x_1, ..., x_n] = \frac{f[x_1, ..., x_n] - f[x_0, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

sayısıdır.

Yani k. bölünmüş fark, aynı uzunlukta iki komşu $(k-1)$. farkın (biri ilk noktayı, öbürü son noktayı içermez) farkının, uçtaki iki noktanın farkına bölümüdür. Kural yalnız noktaların listesine bakar, indislerin artan olmasını istemez: farklı noktaların herhangi bir $z_0, z_1, ..., z_k$ listesi için $f[z_0, ..., z_k]$ aynı formülle, payda $z_k - z_0$ alınarak hesaplanır. Örneğin $f[x_1, x_0] = \frac{f[x_0]-f[x_1]}{x_0-x_1}$'dır. Yukarıdaki hesap $a_0 = f[x_0]$, $a_1 = f[x_0, x_1]$ ve $a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$ olduğunu gösteriyor.
Bu gözlemin her k için doğru olduğunu göstermek için önce bölünmüş farkı interpolasyon polinomunun baş katsayısıyla ilişkilendirelim.

Lemma 9.1 (Bölünmüş Fark ve Baş Katsayı). *$x_0, x_1, ..., x_k$ farklı noktalar ve Q, bu noktalarda f ile aynı değerleri alan, derecesi en çok k olan polinom olsun. Q'daki x^k'nin katsayısı $f[x_0, x_1, ..., x_k]$'dır.*

> ***İspat.***
> *Q tek türlü belirlidir (Teorem 8.2). İddiayı k üzerinden tümevarımla, her farklı nokta listesi için gösteriyoruz.*
> *$k = 0$ ise $Q(x) = f(x_0)$ sabit polinomdur ve x^0'ın katsayısı $f(x_0) = f[x_0]$'dır.*
> *İddia k farklı noktadan oluşan her liste için doğru olsun. Q_0, f'yi $x_0, ..., x_{k-1}$'de; Q_1 ise $x_1, ..., x_k$'de interpole eden ve derecesi en çok $k-1$ olan polinomlar olsun. Tümevarım hipotezine göre Q_0'daki x^{k-1}'in katsayısı $f[x_0, ..., x_{k-1}]$, Q_1'deki x^{k-1}'in katsayısı $f[x_1, ..., x_k]$'dır.*
>
> $$R(x) = \frac{(x - x_0)\, Q_1(x) - (x - x_k)\, Q_0(x)}{x_k - x_0}$$
>
> *polinomunun derecesi en çok k'dır. R'nin f'yi bütün $x_0, ..., x_k$ noktalarında interpole ettiğini görelim:*
>
> - *$x = x_0$'da ilk terim sıfırdır ve $\frac{-(x_0 - x_k)}{x_k - x_0} = 1$ olduğundan $R(x_0) = Q_0(x_0) = f(x_0)$.*
> - *$x = x_k$'da ikinci terim sıfırdır: $R(x_k) = Q_1(x_k) = f(x_k)$.*
> - *$0 < i < k$ ise $Q_0(x_i) = Q_1(x_i) = f(x_i)$ olduğundan*
>
> $$R(x_i) = f(x_i)\, \frac{(x_i - x_0) - (x_i - x_k)}{x_k - x_0} = f(x_i).$$
>
> *Tekliğe göre $R = Q$'dur. R'deki x^k'nin katsayısı, $(x - x_0)Q_1(x)$ ve $(x - x_k)Q_0(x)$ çarpımlarındaki x^k katsayılarından, yani Q_1 ile Q_0'ın x^{k-1} katsayılarından gelir:*
>
> $$\frac{f[x_1, ..., x_k] - f[x_0, ..., x_{k-1}]}{x_k - x_0} = f[x_0, ..., x_k].$$
>
> *Böylece iddia k için de doğrudur.* ■

Teorem 9.1 (Newton Bölünmüş Fark Formülü). *$x_0, x_1, ..., x_n$ farklı noktalarında f'yi interpole eden polinom*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, ..., x_k]\,(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1}) \\ &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \cdots \\ &\quad + f[x_0,x_1,...,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Yani (1)'deki katsayılar $k = 0, 1, ..., n$ için $a_k = f[x_0, x_1, ..., x_k]$'dır.

> ***İspat.***
> *$k = 0, 1, ..., n$ için P_k, f'yi $x_0, ..., x_k$'de interpole eden ve derecesi en çok k olan polinom olsun. $P_0(x) = f(x_0) = f[x_0]$'dır.*
> *$k \geq 1$ için $P_k - P_{k-1}$ farkının derecesi en çok k'dır ve bu fark $x_0, ..., x_{k-1}$ noktalarının her birinde sıfırdır, çünkü iki polinom da bu noktalarda f'ye eşittir. Derecesi en çok k olan ve k farklı kökü bulunan bir polinom, bu köklere ait çarpanların çarpımına bölünür ve bölüm sabittir. Dolayısıyla bir c_k sabiti için*
>
> $$P_k(x) - P_{k-1}(x) = c_k\,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})$$
>
> *olur. Sağ tarafta x^k'nin katsayısı c_k'dır; solda ise P_{k-1}'de x^k terimi olmadığından bu katsayı P_k'daki x^k'nin katsayısıdır. Lemma 9.1 gereği $c_k = f[x_0, ..., x_k]$'dır. Bu eşitlikler $k = 1, ..., n$ için taraf tarafa toplanırsa sol taraf $P_n(x) - P_0(x)$ olur ve formül elde edilir.*
> *(1)'deki katsayılar tek türlüdür: $x = x_0, x_1, ..., x_n$ sırayla yazıldığında her adımda yalnız bir yeni katsayı ortaya çıkar ve o katsayı bir önceki adımlardakiler cinsinden tek türlü bulunur. Bu yüzden $a_k = f[x_0, ..., x_k]$'dır.* ■

Yani bir x_{n+1} noktası eklendiğinde eski terimler aynen kalır, yalnız

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, ..., x_{n+1}](x-x_0)\cdots(x-x_n)$$

terimi eklenir. Newton biçimi Lagrange polinomunun yalnız başka bir yazılışı olduğundan hata terimi de aynıdır (Teorem 8.3).

Sonuç 9.1 (Bölünmüş Fark Noktaların Sırasına Bağlı Değildir). *$f[x_0, x_1, ..., x_k]$ değeri $x_0, x_1, ..., x_k$ noktalarının sırasına bağlı değildir. Örneğin $f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_0, x_1]$'dir.*

> ***İspat.***
> *Lemma 9.1 her farklı nokta listesi için geçerlidir. Dolayısıyla $f[x_0, ..., x_k]$, f'yi $\{x_0, ..., x_k\}$ kümesinin noktalarında interpole eden ve derecesi en çok k olan polinomdaki x^k'nin katsayısıdır. Bu polinom tektir (Teorem 8.2) ve yalnız noktaların kümesine bağlıdır; noktaları hangi sırayla yazdığımız onu değiştirmez.* ■

Yani Teorem 9.1 noktaların artan sırada dizilmesini istemez; noktalar hangi sırayla numaralanırsa numaralansın formül aynı polinomu verir. Bu serbestliği geri fark ve Stirling formüllerinde kullanacağız.

9.2 Bölünmüş Farklar Tablosu

Newton formülünün katsayıları, her sütunun bir öncekinden hesaplandığı basamaklı bir tablodan okunur. Altı nokta ($n = 5$) için tablo aşağıdadır. Her fark, hesaplandığı iki girdinin arasındaki satırda durur; Newton formülünde kullanılan katsayılar tablonun üst kenarındaki $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, $f[x_0, x_1, x_2]$, ... girdileridir.

x	$f(x)$	1. Böl. Fark	2. Böl. Fark	3. Böl. Fark	4. Böl. Fark	5. Böl. Fark
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		

 CC BY-NC-SA 4.0

x	$f(x)$	1. Böl. Fark	2. Böl. Fark	3. Böl. Fark	4. Böl. Fark	5. Böl. Fark
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1,x_2,x_3]$		$f[x_0,...,x_4]$	
		$f[x_2,x_3]$		$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$		$f[x_0,...,x_5]$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2,x_3,x_4]$		$f[x_1,...,x_5]$	
		$f[x_3,x_4]$		$f[x_2,x_3,x_4,x_5]$		
x_4	$f[x_4]$		$f[x_3,x_4,x_5]$			
		$f[x_4,x_5]$				
x_5	$f[x_5]$					

Sütunların girdileri şu formüllerle hesaplanır:

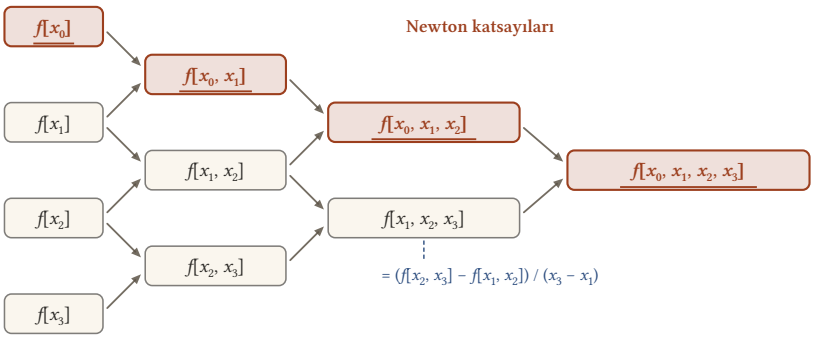
$$
\begin{aligned}
f[x_i] &= f(x_i), && i=0,...,5,\\
f[x_i,x_{i+1}] &= \frac{f[x_{i+1}]-f[x_i]}{x_{i+1}-x_i}, && i=0,...,4,\\
f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}] &= \frac{f[x_{i+1},x_{i+2}]-f[x_i,x_{i+1}]}{x_{i+2}-x_i}, && i=0,...,3,\\
f[x_i,...,x_{i+3}] &= \frac{f[x_{i+1},...,x_{i+3}]-f[x_i,...,x_{i+2}]}{x_{i+3}-x_i}, && i=0,1,2,\\
f[x_i,...,x_{i+4}] &= \frac{f[x_{i+1},...,x_{i+4}]-f[x_i,...,x_{i+3}]}{x_{i+4}-x_i}, && i=0,1,\\
f[x_0,...,x_5] &= \frac{f[x_1,...,x_5]-f[x_0,...,x_4]}{x_5-x_0}. &&
\end{aligned}
$$

Yani her girdi, sol tarafında hemen üstünde ve hemen altında duran iki girdiden hesaplanır: alttaki eksi üstteki, bölü bu girdinin kapsadığı ilk ve son noktanın farkı. Yeni bir x_6 noktası eklenirse tablonun altına bir satır ve her sütuna bir girdi eklenir; eski girdilerin hiçbiri değişmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Newton bölünmüş fark formülü dört adımda

1. Noktaları $x_0, x_1, \ldots, x_n$ diye numaralayın; x_k ve $f[x_k]$ sütunlarını yazın.
2. Her sütunu bir öncekinden hesaplayın: bir girdi, soldaki üst ve alt komşusunun farkının (alttaki eksi üstteki), kapsadığı uç noktaların farkına bölümüdür.
3. Üst kenardaki $f[x_0], f[x_0, x_1], \ldots, f[x_0, \ldots, x_n]$ girdilerinin altını çizin; bunlar Newton katsayılarıdır.
4. Newton biçimini, $P_n(x) = f[x_0] + \cdots$ polinomunu yazın; istenen noktada değerini hesaplayın ya da polinomu açın.



Şekil 9.1: Dört noktalı bölünmüş fark tablosunun hesap şeması. Her kutu, solundaki üst ve alt komşusundan hesaplanır: alttaki eksi üstteki, bölü kapsanan ilk ve son noktanın farkı. Örneğin $f[x_1, x_2, x_3] = (f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]) / (x_3 - x_1)$. Üst kenardaki altı çizili kutular Newton katsayılarıdır.

Örnek 9.1 (Dört Noktadan Geçen Kübik Polinom). Düzlemde $(0;2)$, $(1;3)$, $(2;12)$ ve $(5;147)$ noktaları verilsin. Newton bölünmüş fark formülünü kullanarak bu noktalardan geçen $P_3(x)$ interpolasyon polinomunu Newton biçiminde yazınız ve $P_3(3)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm.
$x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 5$ alalım. Birinci bölünmüş farklar

$$f[x_0, x_1] = \frac{3-2}{1-0} = 1, \quad f[x_1, x_2] = \frac{12-3}{2-1} = 9, \quad f[x_2, x_3] = \frac{147-12}{5-2} = 45,$$

ikinci bölünmüş farklar

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{9-1}{2-0} = 4, \qquad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{45-9}{5-1} = 9,$$

üçüncü bölünmüş fark

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{9-4}{5-0} = 1$$

olur. Tablo:

k	x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-3}, \ldots, x_k]$
0	0	$\underline{2}$			
			$\underline{1}$		
1	1	3		$\underline{4}$	
			9		$\underline{1}$
2	2	12		9	

 CC BY-NC-SA 4.0

k	x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-3},\ldots,x_k]$
			45		
3	5	147			

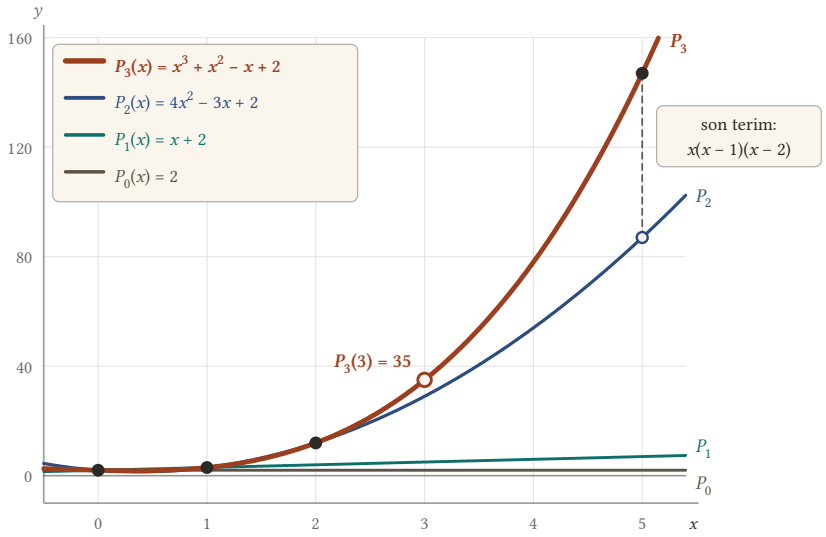
Altı çizili katsayılarla Newton biçimi

$$\begin{aligned} P_3(x) &= f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\ &\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= 2 + 1\cdot x + 4x(x-1) + 1\cdot x(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

olur. Açarsak $4x(x-1) = 4x^2 - 4x$ ve $x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$ olduğundan

$$P_3(x) = x^3 + x^2 - x + 2$$

bulunur. Buradan $P_3(3) = 27 + 9 - 3 + 2 = 35$'tir.
Newton biçiminin terim terim büyüdüğünü kısmi toplamlarda görürüz: $P_0(x) = 2$ yalnız ilk noktadan, $P_1(x) = x + 2$ ilk iki noktadan, $P_2(x) = 4x^2 - 3x + 2$ ilk üç noktadan geçer; $P_2(5) = 87$ olduğundan dördüncü nokta ancak son terimle yakalanır.



Şekil 9.2: Newton biçiminin kısmi toplamları. P_0 yalnız (0; 2) noktasından, P_1 ilk iki noktadan, P_2 ilk üç noktadan geçer. $P_2(5) = 87$ olduğundan (5; 147) noktasına ancak son terim $x(x-1)(x-2)$ eklenince ulaşılır. İçi boş daire $P_3(3) = 35$ değeridir.

■

9.3 Eşit Aralıklı Noktalar: Newton İleri Fark Formülü

Noktalar eşit aralıklı olduğunda Newton formülündeki çarpımlar tek bir değişkenle yazılır ve bölünmüş farklar sıradan farklara dönüşür.
$i = 0, 1, \ldots, n-1$ için $h = x_{i+1} - x_i$ olsun. Bu durumda $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_i = x_0 + i\cdot h$'dir. $x = x_0 + s\cdot h$ yazarsak

$$x - x_i = x_0 + s\cdot h - x_0 - i\cdot h = (s-i)\cdot h \tag{2}$$

olur. Böylece Newton formülündeki çarpım

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) = s(s-1)\cdots\big(\ s-(k-1)\ \big)\cdot h^k$$

biçimini alır. Bu çarpımı binom katsayısıyla kısaltacağız.

Tanım 9.2 (Binom Katsayısı). s bir reel sayı ve $k \geq 1$ bir tam sayı olmak üzere

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots\big(\ s-(k-1)\ \big)}{k!}$$

sayısına **binom katsayısı** denir.

Yani s doğal sayıyken bilinen kombinasyon sayısı, aynı formülle her reel s için tanımlanır. Örneğin $\binom{1/3}{2} = \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2} = -\frac{1}{9}$'dur.

Teorem 9.2 (Newton İleri Bölünmüş Fark Formülü). *$x_0, x_1, ..., x_n$ noktaları h aralıklı ve $x = x_0 + s\cdot h$ ise*

$$P_n(x) = P_n(x_0 + s\cdot h) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n}\binom{s}{k}\cdot k!\cdot h^k \cdot f[x_0, x_1, ..., x_k]$$

olur.

> ***İspat.***
>
> *(2) gereği Teorem 9.1 formülündeki terimler*
>
> $$\begin{aligned} P_n(x_0+s\cdot h) = f[x_0] &+ f[x_0,x_1]\cdot s\cdot h + f[x_0,x_1,x_2]\cdot s(s-1)\cdot h^2 \\ &+ f[x_0,x_1,x_2,x_3]\cdot s(s-1)(s-2)\cdot h^3 + \cdots \\ &+ f[x_0,x_1,...,x_n]\cdot s(s-1)\cdots\big(\ s-(n-1)\ \big)\cdot h^n \end{aligned}$$
>
> *biçimini alır. Tanım 9.2 gereği $s(s-1)\cdots\big(\ s-(k-1)\ \big) = k!\binom{s}{k}$ olduğundan formül elde edilir.* ■

Bölünmüş farklar eşit aralıklı noktalarda bölme yapmadan, ardışık farklarla da hesaplanabilir.

Tanım 9.3 (İleri Fark). $x_0, x_1, ..., x_n$ noktaları h aralıklı olsun. f'nin x_i'deki **ileri farkı**

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

sayısıdır. Daha yüksek mertebeden ileri farklar indirgemeli olarak

$$\Delta^k f(x_i) = \Delta\left(\ \Delta^{k-1} f(x_i)\ \right) = \Delta^{k-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{k-1} f(x_i)$$

ile tanımlanır. Örneğin $\Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)$'dır.

Yani ileri fark tablosu, bölünmüş fark tablosunun bölme yapılmadan kurulmuş hâlidir: her girdi, soldaki alt komşusundan üst komşusunun çıkarılmasıyla bulunur. $\Delta^k f(x_i)$, tabloda x_i'den başlayıp sağa aşağı inen köşegen üzerindeki k. girdidir.

Önerme 9.1 (Bölünmüş Fark ve İleri Fark). *$x_0, x_1, ..., x_n$ noktaları h aralıklı ise $i + k \leq n$ olan her $i \geq 0$, $k \geq 1$ için*

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+k}] = \frac{1}{k!\,h^k}\,\Delta^k f(x_i)$$

olur. Özel olarak $f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{1}{k!\,h^k}\Delta^k f(x_0)$'dır.

> ***İspat.***
> *k üzerinden tümevarım yapalım. $k = 1$ için*
>
> $$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{h}\,\Delta f(x_i)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Eşitlik $k-1$ için her başlangıç indisinde doğru olsun. $x_{i+k}-x_i = kh$ olduğundan

$$\begin{aligned} f[x_i,\ldots,x_{i+k}] &= \frac{f[x_{i+1},\ldots,x_{i+k}]-f[x_i,\ldots,x_{i+k-1}]}{kh} \\ &= \frac{1}{kh}\left(\frac{\Delta^{k-1}f(x_{i+1})}{(k-1)!\,h^{k-1}} - \frac{\Delta^{k-1}f(x_i)}{(k-1)!\,h^{k-1}}\right) \\ &= \frac{\Delta^{k-1}f(x_{i+1})-\Delta^{k-1}f(x_i)}{k!\,h^k} = \frac{1}{k!\,h^k}\Delta^k f(x_i) \end{aligned}$$

bulunur. Örneğin $k=2$, $i=0$ için bu hesap

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{1}{2h}\left(\frac{1}{h}\Delta f(x_1) - \frac{1}{h}\Delta f(x_0)\right) = \frac{1}{2h^2}\Delta^2 f(x_0)$$

biçimini alır. ■

Sonuç 9.2 (Newton İleri Fark Formülü). *$x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları h aralıklı ve $x = x_0 + s\cdot h$ ise*

$$P_n(x) = P_n(x_0+s\cdot h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n}\binom{s}{k}\Delta^k f(x_0)$$

olur.

İspat.
Teorem 9.2 formülünde Önerme 9.1 gereği $k!\cdot h^k\cdot f[x_0,\ldots,x_k] = \Delta^k f(x_0)$'dır; ayrıca $f[x_0]=f(x_0)$'dır.
■

Yani eşit aralıklı noktalarda katsayılar, ileri fark tablosunun üst kenarındaki $\Delta^k f(x_0)$ sayılarıdır ve x'in yeri yalnız $s=\frac{x-x_0}{h}$ sayısıyla girer. Tablonun başına yakın bir x için s küçüktür ve terimler hızla küçülür.

9.4 Newton Geri Fark Formülü

Yaklaşım yapılacak nokta tablonun sonuna yakınsa, Newton formülünü noktaları sondan başa doğru dizerek yazmak daha uygundur.
Noktaları $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0$ sırasıyla alırsak Teorem 9.1 ve Sonuç 9.1 gereği

$$\begin{aligned} P_n(x) = f[x_n] + f[x_n,x_{n-1}](x-x_n) + f[x_n,x_{n-1},x_{n-2}](x-x_n)(x-x_{n-1}) \\ +\cdots + f[x_n,x_{n-1},\ldots,x_0](x-x_n)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_1) \end{aligned}$$

olur. Katsayılar bu kez tablonun alt kenarındaki girdilerdir.

Tanım 9.4 (Geri Fark). $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları h aralıklı olsun. f'nin x_i'deki ($i\geq 1$) **geri farkı**

$$\nabla f(x_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

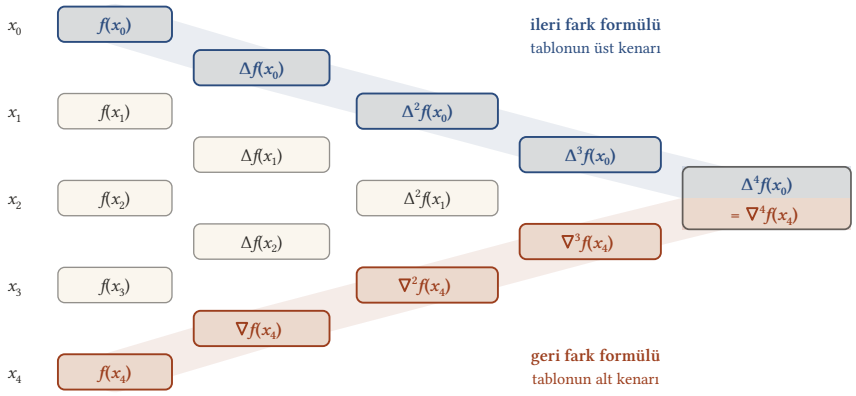
sayısıdır. Daha yüksek mertebeden geri farklar indirgemeli olarak ($i\geq k$)

$$\nabla^k f(x_i) = \nabla\left(\nabla^{k-1}f(x_i)\right) = \nabla^{k-1}f(x_i) - \nabla^{k-1}f(x_{i-1})$$

ile tanımlanır.

Yani geri farklar ileri farklarla aynı sayılardır, yalnız başka bir uca göre adlandırılır: $\nabla f(x_{i+1}) = \Delta f(x_i)$ ve tümevarımla $\nabla^k f(x_{i+k}) = \Delta^k f(x_i)$'dır. $\nabla^k f(x_n)$, tabloda x_n'den başlayıp sağa yukarı çıkan köşegen üzerindeki k. girdidir. Bu yüzden ileri ve geri farklar tek bir tabloda gösterilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.3: Beş eşit aralıklı nokta için tek bir fark tablosu. İleri fark formülü üst kenardaki $f(x_0)$, $\Delta f(x_0)$, ..., $\Delta^4 f(x_0)$ sayılarını; geri fark formülü alt kenardaki $f(x_4)$, $\nabla f(x_4)$, ..., $\nabla^4 f(x_4)$ sayılarını kullanır. Alt kenardaki her girdi bir ileri farktır, örneğin $\nabla^2 f(x_4) = \Delta^2 f(x_2)$; son sütundaki tek girdi iki kenarda ortaktır.

Önerme 9.2 (Bölünmüş Fark ve Geri Fark). *$x_0, x_1, ..., x_n$ noktaları h aralıklı ise $k \le i \le n$ olan her i ve $k \ge 1$ için*

$$f[x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-k}] = \frac{1}{k!\, h^k} \nabla^k f(x_i)$$

olur. Özel olarak $f[x_n, x_{n-1}] = \frac{1}{h}\nabla f(x_n)$, $f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] = \frac{1}{2h^2}\nabla^2 f(x_n)$, ..., $f[x_n, ..., x_{n-k}] = \frac{1}{k!\, h^k}\nabla^k f(x_n)$'dır.

> ***İspat.***
> *Sonuç 9.1 gereği sol taraf $f[x_{i-k}, ..., x_i]$'ye eşittir. k üzerinden tümevarım yapalım. $k = 1$ için*
>
> $$f[x_{i-1}, x_i] = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{1}{h}\nabla f(x_i)$$
>
> *dır. Eşitlik $k-1$ için her uç indiste doğru olsun. $x_i - x_{i-k} = kh$ olduğundan*
>
> $$\begin{aligned} f[x_{i-k}, ..., x_i] &= \frac{f[x_{i-k+1}, ..., x_i] - f[x_{i-k}, ..., x_{i-1}]}{kh} \\ &= \frac{\nabla^{k-1} f(x_i) - \nabla^{k-1} f(x_{i-1})}{kh \cdot (k-1)!\, h^{k-1}} = \frac{1}{k!\, h^k} \nabla^k f(x_i) \end{aligned}$$
>
> *bulunur.* ■

Teorem 9.3 (Newton Geri Fark Formülü). *$x_0, x_1, ..., x_n$ noktaları h aralıklı ve $x = x_n + s \cdot h$ ise*

$$P_n(x) = P_n(x_n + s \cdot h) = f(x_n) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f(x_n)$$

olur.

> ***İspat.***
> *$x_i = x_n - (n-i)h$ olduğundan*
>
> $$x - x_i = x_n + s \cdot h - x_n + (n-i)h = (s + n - i) \cdot h$$
>
> *olur. Buna göre geri sıralı Newton formülündeki çarpım*
>
> $$(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_{n-k+1}) = s(s+1) \cdots \big(\, s + (k-1) \,\big) \cdot h^k$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dır. Önerme 9.2 gereği katsayı $f[x_n, \ldots, x_{n-k}] = \frac{1}{k!\,h^k}\nabla^k f(x_n)$ *olduğundan* k*. terim*

$$\frac{s(s+1)\cdots\big(\,s+(k-1)\,\big)}{k!}\,\nabla^k f(x_n)$$

olur. Öte yandan Tanım 9.2 ile her çarpanından -1 *çıkarılırsa*

$$\begin{aligned}\binom{-s}{k} &= \frac{(-s)(-s-1)(-s-2)\cdots\big(\,-s-(k-1)\,\big)}{k!}\\ &= \frac{(-1)^k\,s(s+1)(s+2)\cdots\big(\,s+(k-1)\,\big)}{k!}\end{aligned}$$

bulunur. $(-1)^k(-1)^k = 1$ *olduğundan*

$$(-1)^k\binom{-s}{k} = \frac{s(s+1)\cdots\big(\,s+(k-1)\,\big)}{k!}$$

dır ve k*. terim* $(-1)^k\binom{-s}{k}\nabla^k f(x_n)$ *olarak yazılır.* $f[x_n] = f(x_n)$ *olduğundan formül elde edilir.* ■

Yani geri fark formülünde x tablonun sonundaki x_n'den ölçülür; $x < x_n$ için s negatiftir. Katsayılar açık yazıldığında

$$\begin{aligned}P_n(x_n + sh) = f(x_n) + s\,\nabla f(x_n) + \frac{s(s+1)}{2!}\,\nabla^2 f(x_n)\\ + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\,\nabla^3 f(x_n) + \cdots\end{aligned}$$

olur.

Eşit aralıklı veride yaklaşım üç adımda

1. İleri fark tablosunu kurun (Δ başlıkları üstte, aynı girdilerin ∇ adları altta).
2. x tablonun başına yakınsa $x = x_0 + s\cdot h$ ile ileri fark formülünü, sonuna yakınsa $x = x_n + s\cdot h$ ile geri fark formülünü seçin; ileri formülün katsayıları üst kenarda, geri formülünkiler alt kenardadır.
3. $\binom{s}{k}$ ya da $(-1)^k\binom{-s}{k}$ katsayılarını hesaplayın, terimleri bulun ve toplayın.

Örnek 9.2 (İleri ve Geri Fark Tablosu). Bir f fonksiyonunun eşit aralıklı noktalardaki değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. f için ileri-geri fark tablosunu oluşturunuz (virgülden sonra 7. basamak).

k	x_k	$f(x_k)$
0	1,0	0,7651977
1	1,3	0,6200860
2	1,6	0,4554022
3	1,9	0,2818186
4	2,2	0,1103623

Çözüm.
Noktalar $h = 0{,}3$ aralıklıdır. Her sütunda alttaki komşudan üstteki çıkarılır. Birinci farklar

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0) &= 0{,}6200860 - 0{,}7651977 = -0{,}1451117,\\ \Delta f(x_1) &= 0{,}4554022 - 0{,}6200860 = -0{,}1646838,\\ \Delta f(x_2) &= 0{,}2818186 - 0{,}4554022 = -0{,}1735836,\\ \Delta f(x_3) &= 0{,}1103623 - 0{,}2818186 = -0{,}1714563,\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ikinci farklar

$$\Delta^2 f(x_0) = -0{,}1646838 - (-0{,}1451117) = -0{,}0195721,$$
$$\Delta^2 f(x_1) = -0{,}1735836 - (-0{,}1646838) = -0{,}0088998,$$
$$\Delta^2 f(x_2) = -0{,}1714563 - (-0{,}1735836) = 0{,}0021273,$$

üçüncü ve dördüncü farklar

$$\Delta^3 f(x_0) = -0{,}0088998 - (-0{,}0195721) = 0{,}0106723,$$
$$\Delta^3 f(x_1) = 0{,}0021273 - (-0{,}0088998) = 0{,}0110271,$$
$$\Delta^4 f(x_0) = 0{,}0110271 - 0{,}0106723 = 0{,}0003548$$

olur. İleri farkların başlığı üstte, aynı girdilerin geri fark adları en alt satırdadır. İleri fark formülünde kullanılan girdiler üst kenarda, geri fark formülünde kullanılanlar alt kenarda altı çizilidir; $\Delta^4 f(x_0) = \nabla^4 f(x_4)$ ikisinde de kullanılır.

k	x_k	$f(x_k)$	$\Delta f(x_k)$	$\Delta^2 f(x_k)$	$\Delta^3 f(x_k)$	$\Delta^4 f(x_k)$
0	1,0	$\underline{0{,}7651977}$				
			$\underline{-0{,}1451117}$			
1	1,3	0,6200860		$\underline{-0{,}0195721}$		
			$-0{,}1646838$		$\underline{0{,}0106723}$	
2	1,6	0,4554022		$-0{,}0088998$		$\underline{0{,}0003548}$
			$-0{,}1735836$		$\underline{0{,}0110271}$	
3	1,9	0,2818186		$\underline{0{,}0021273}$		
			$\underline{-0{,}1714563}$			
4	2,2	$\underline{0{,}1103623}$				
k	x_k	$f(x_k)$	$\nabla f(x_k)$	$\nabla^2 f(x_k)$	$\nabla^3 f(x_k)$	$\nabla^4 f(x_k)$

■

Örnek 9.3 (İleri Fark Formülüyle f(1,1)). Örnek 9.2 verileriyle ($x_0 = 1{,}0, h = 0{,}3, n = 4$) Newton ileri fark formülünü kullanarak $f(1{,}1)$ için dördüncü dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşımda bulununuz (virgülden sonra 7. basamak).

Çözüm.
$x = 1{,}1$ tablonun başında olduğundan ileri fark formülü kullanılır. $1{,}1 = 1{,}0 + s \cdot 0{,}3$ eşitliğinden $s = \frac{1}{3}$ bulunur. Sonuç 9.2 ile

$$P_4(1{,}1) = f(x_0) + s\,\Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\,\Delta^2 f(x_0) + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\,\Delta^3 f(x_0) + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!}\,\Delta^4 f(x_0)$$

dır. $s = \frac{1}{3}$ için katsayılar

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{s(s-1)}{2!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{9},$$
$$\frac{s(s-1)(s-2)}{3!} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{81},$$
$$\frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!} = \frac{5}{81}\cdot\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{10}{243}$$

olur. Tablonun üst kenarındaki farklarla terimler

$$\begin{aligned} P_4(1{,}1) &= 0{,}7651977 + \frac{1}{3}(-0{,}1451117) - \frac{1}{9}(-0{,}0195721) \\ &\quad + \frac{5}{81}(0{,}0106723) - \frac{10}{243}(0{,}0003548) \\ &= 0{,}7651977 - 0{,}0483706 + 0{,}0021747 \\ &\quad + 0{,}0006588 - 0{,}0000146 \\ &= 0{,}7196460 \end{aligned}$$

bulunur. Yani $f(1{,}1) \approx 0{,}7196460$'tır. ■

Örnek 9.4 (Geri Fark Formülüyle f(2)). Örnek 9.2 verileriyle ($x_4 = 2{,}2$, $h = 0{,}3$, $n = 4$) Newton geri fark formülünü kullanarak $f(2)$ için dördüncü dereceden bir polinom yardımıyla yaklaşımda bulununuz (virgülden sonra 7. basamak).

Çözüm.
$x = 2$ tablonun sonunda olduğundan geri fark formülü kullanılır. $2 = 2{,}2 + s\cdot 0{,}3$ eşitliğinden $s = -\frac{2}{3}$ bulunur. Teorem 9.3 ile

$$\begin{aligned} P_4(2) &= f(x_4) + (-1)\binom{-s}{1}\nabla f(x_4) + \binom{-s}{2}\nabla^2 f(x_4) \\ &\quad + (-1)\binom{-s}{3}\nabla^3 f(x_4) + \binom{-s}{4}\nabla^4 f(x_4) \\ &= f(x_4) + s\,\nabla f(x_4) + \frac{s(s+1)}{2!}\,\nabla^2 f(x_4) \\ &\quad + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!}\,\nabla^3 f(x_4) \\ &\quad + \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!}\,\nabla^4 f(x_4) \end{aligned}$$

dır. $s = -\frac{2}{3}$ için katsayılar

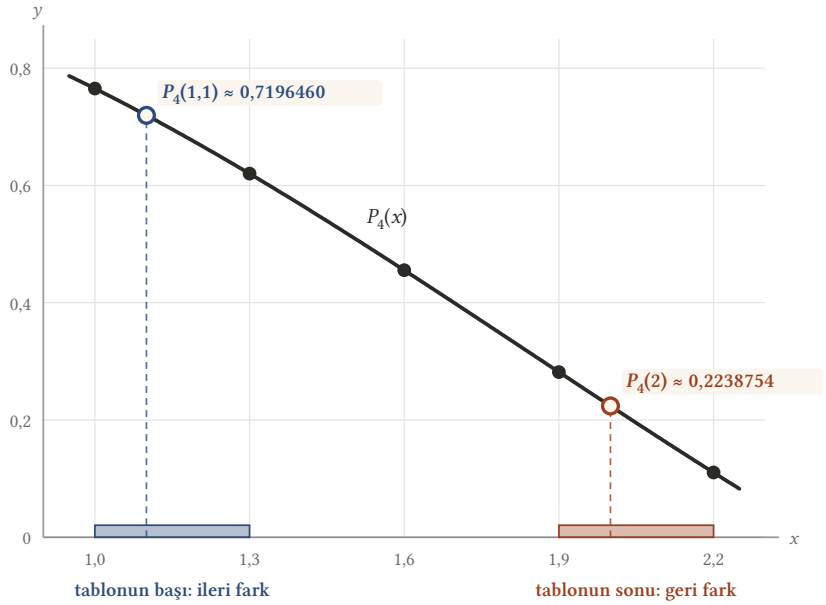
$$\frac{s(s+1)}{2!} = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{9},$$
$$\frac{s(s+1)(s+2)}{3!} = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{4}{81},$$
$$\frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!} = -\frac{4}{81}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{3} = -\frac{7}{243}$$

olur. Tablonun alt kenarındaki farklarla ($\nabla f(x_4) = -0{,}1714563$, $\nabla^2 f(x_4) = 0{,}0021273$, $\nabla^3 f(x_4) = 0{,}0110271$, $\nabla^4 f(x_4) = 0{,}0003548$) terimler

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} P_4(2) &= 0{,}1103623 - \frac{2}{3}(-0{,}1714563) - \frac{1}{9}(0{,}0021273) \\ &\quad -\frac{4}{81}(0{,}0110271) - \frac{7}{243}(0{,}0003548) \\ &= 0{,}1103623 + 0{,}1143042 - 0{,}0002364 \\ &\quad -0{,}0005445 - 0{,}0000102 \\ &= 0{,}2238754 \end{aligned}$$

bulunur. Yani $f(2) \approx 0{,}2238754$'tür.
İki yaklaşım da beş noktadan geçen aynı P_4 polinomunun değerleridir; ileri ve geri formüller yalnız katsayıları tablonun farklı kenarından okur.



Şekil 9.4: (1,0; 0,7651977), ..., (2,2; 0,1103623) beş noktasından geçen tek bir P_4 polinomu. $x = 1{,}1$ tablonun başında olduğundan ileri fark formülüyle, $x = 2$ tablonun sonunda olduğundan geri fark formülüyle hesaplanır; iki değer de aynı eğrinin üzerindedir.

■

9.5 Stirling Merkezi Fark Formülü

İleri ve geri fark formülleri, yaklaşım yapılacak nokta tablonun ortalarında olduğunda kullanışlı değildir: s büyür ve katsayılar tablonun bir kenarından, x'ten uzak noktalardan gelir. Bu durumda kullanılabilecek bölünmüş fark formüllerinden biri Stirling formülü olarak bilinen merkezi fark formülüdür.
Önce yaklaşım yapılacak noktaya yakın bir tablo noktasını x_0 olarak seçeriz. Tabloda x_0'ın altındaki noktaları $x_1, x_2, \ldots$, üstündekileri $x_{-1}, x_{-2}, \ldots$ diye yeniden indisleriz. Noktalar h aralıklıdır: $x_i = x_0 + i \cdot h$. Beş nokta için bölünmüş fark tablosu şöyledir:

x_k	$f[x_k]$	1. Böl. Fark	2. Böl. Fark	3. Böl. Fark	4. Böl. Fark
x_{-2}	$f[x_{-2}]$				
		$f[x_{-2}, x_{-1}]$			
x_{-1}	$f[x_{-1}]$		$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0]$		
		$\underline{f[x_{-1}, x_0]}$		$\underline{f[x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1]}$	

 CC BY-NC-SA 4.0

x_k	$f[x_k]$	1. Böl. Fark	2. Böl. Fark	3. Böl. Fark	4. Böl. Fark
x_0	$\underline{f[x_0]}$		$\underline{f[x_{-1},x_0,x_1]}$		$\underline{f[x_{-2},...,x_2]}$
		$\underline{f[x_0,x_1]}$		$\underline{f[x_{-1},x_0,x_1,x_2]}$	
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0,x_1,x_2]$		
		$f[x_1,x_2]$			
x_2	$f[x_2]$				

Stirling formülü, altı çizili girdileri, yani x_0 satırının üzerinde ve hemen çevresinde duran farkları kullanır.

Teorem 9.4 (Stirling Merkezi Fark Formülü). *Noktalar h aralıklı, $x_i = x_0 + i \cdot h$ ve $x = x_0 + s \cdot h$ olsun. $n = 2m+1$ tek sayı ise Stirling formülü*

$$\begin{aligned} P_n(x) = P_{2m+1}(x) = f(x_0) &+ \frac{s\cdot h}{2}\left(f[x_{-1},x_0] + f[x_0,x_1] \right) \\ &+ s^2h^2 f[x_{-1},x_0,x_1] \\ &+ \frac{s(s^2-1)h^3}{2}\left(f[x_{-2},x_{-1},x_0,x_1] + f[x_{-1},x_0,x_1,x_2] \right) \\ &+ s^2(s^2-1)h^4 f[x_{-2},...,x_2] \\ &+ \frac{s(s^2-1)(s^2-4)h^5}{2}\left(f[x_{-3},...,x_2] + f[x_{-2},...,x_3] \right) + \cdots \\ &+ s^2(s^2-1)(s^2-4)\cdots\left(s^2-(m-1)^2 \right) h^{2m} f[x_{-m},...,x_m] \\ &+ \frac{s(s^2-1)(s^2-4)\cdots(s^2-m^2)h^{2m+1}}{2} \\ &\quad \cdot \left(f[x_{-m-1},...,x_m] + f[x_{-m},...,x_{m+1}] \right) \end{aligned}$$

ile verilir. Bu durumda P_{2m+1}, f'yi $x_{-m},...,x_{m+1}$ ve $x_{-m-1},...,x_m$ noktalarında interpole eden iki polinomun ortalamasıdır; f ile çakışması yalnız $x_{-m},...,x_m$ düğümlerinde garantidir. $n = 2m$ çift sayı ise bu formülün son satırı (son iki satıra yayılan son terim) silinir ve elde edilen P_{2m}, f'yi $x_{-m},...,x_m$ noktalarında interpole eden polinomdur.

İspat.
(2)'deki gibi $x - x_i = (s-i)\cdot h$'dir. Teorem 9.1 formülünü düğümlerin iki farklı sıralamasıyla yazalım (Sonuç 9.1):

$$\text{(I)}\ \ x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, ... \qquad \text{(II)}\ \ x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, x_2, ...$$

Newton formülünde r. terimin katsayısı ilk $r+1$ düğümün bölünmüş farkı, çarpımı ise ilk r düğüm üzerindendir. İki sıralamada da ilk $2j+1$ düğüm $x_{-j},...,x_j$'dir. İlk $2j$ düğüm (I)'de $x_{-j+1},...,x_j$, (II)'de $x_{-j},...,x_{j-1}$'dir.
Çift indisli ($r = 2j$, $j \geq 1$) terimin katsayısı iki sıralamada da $f[x_{-j},...,x_j]$'dir. $(s-i)(s+i) = s^2 - i^2$ olduğundan çarpımlar

$$\begin{aligned} \text{(I)}: \ & s(s^2-1)\cdots\left(s^2-(j-1)^2 \right)(s-j)\, h^{2j}, \\ \text{(II)}: \ & s(s^2-1)\cdots\left(s^2-(j-1)^2 \right)(s+j)\, h^{2j} \end{aligned}$$

olur; $\frac{(s-j)+(s+j)}{2} = s$ olduğundan ortalamaları $s^2(s^2-1)\cdots\left(s^2-(j-1)^2 \right) h^{2j}$'dir.
Tek indisli ($r = 2j+1$, $j \geq 0$) terimde çarpım iki sıralamada da ilk $2j+1$ düğüm üzerindendir:

$$\prod_{i=-j}^{j}(s-i)\, h = s(s^2-1)\cdots(s^2-j^2)\, h^{2j+1}.$$

Katsayı ise (I)'de $f[x_{-j},...,x_{j+1}]$, (II)'de $f[x_{-j-1},...,x_j]$'dir; ortalamaları bu iki farkın yarı toplamıdır.
$n = 2m$ olsun. İki sıralamayı $x_{-m},...,x_m$ düğümlerinde durdurursak iki ifade de bu $2m+1$ noktada f'yi interpole eden, derecesi en çok $2m$ olan polinomdur; bu polinom tek olduğundan (Teorem 8.2) ikisi

 CC BY-NC-SA 4.0

de P_{2m}'ye eşittir. O hâlde P_{2m} iki ifadenin ortalamasıdır; ortalamayı terim terim alırsak, yukarıdaki hesaplarla formülün son terim hariç hâli çıkar.
$n = 2m+1$ ise (I)'e x_{m+1}, (II)'ye x_{-m-1} düğümü eklenir. İki ifade, P_{2m}'ye $r = 2m+1$ indisli terimlerini ekler; ortalamaları P_{2m}'ye formülün son terimini ekler. ■

Yani $n = 2m$ iken Stirling formülü $x_{-m}, \dots, x_m$ noktalarındaki interpolasyon polinomunun, katsayıları x_0 çevresindeki farklardan okunan bir yazılışıdır. $n = 2m+1$ iken son terim x_{-m-1} ve x_{m+1} noktalarını da kullanır; elde edilen polinom $x_{-m}, \dots, x_{m+1}$ ve $x_{-m-1}, \dots, x_m$ noktalarındaki iki interpolasyon polinomunun ortalamasıdır. x, x_0'a yakınken s küçüktür ve s^2 çarpanları terimleri hızla küçültür.

Örnek 9.5 (Stirling Formülüyle f(1,5)). Bazı değerleri aşağıda verilen f fonksiyonu için $x_0 = 1{,}6$ olmak üzere $f(1{,}5)$ değerine Stirling formülünü kullanarak bir yaklaşımda bulununuz (virgülden sonra 7. basamak).

x	1,0	1,3	1,6	1,9	2,2
$f(x)$	0,7651977	0,6200860	0,4554022	0,2818186	0,1103623

Çözüm.
$x_0 = 1{,}6$ seçildiğinden $x_{-2} = 1{,}0$, $x_{-1} = 1{,}3$, $x_1 = 1{,}9$, $x_2 = 2{,}2$ ve $h = 0{,}3$'tür. Birinci bölünmüş farklar

$$f[x_{-2}, x_{-1}] = \frac{0{,}6200860 - 0{,}7651977}{0{,}3} = -0{,}4837057,$$
$$f[x_{-1}, x_0] = \frac{0{,}4554022 - 0{,}6200860}{0{,}3} = -0{,}5489460,$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{0{,}2818186 - 0{,}4554022}{0{,}3} = -0{,}5786120,$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{0{,}1103623 - 0{,}2818186}{0{,}3} = -0{,}5715210,$$

ikinci bölünmüş farklar (payda 0,6)

$$f[x_{-2}, x_{-1}, x_0] = \frac{-0{,}5489460 + 0{,}4837057}{0{,}6} = -0{,}1087338,$$
$$f[x_{-1}, x_0, x_1] = \frac{-0{,}5786120 + 0{,}5489460}{0{,}6} = -0{,}0494433,$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-0{,}5715210 + 0{,}5786120}{0{,}6} = 0{,}0118183,$$

üçüncü (payda 0,9) ve dördüncü (payda 1,2) bölünmüş farklar

$$f[x_{-2}, \dots, x_1] = \frac{-0{,}0494433 + 0{,}1087338}{0{,}9} = 0{,}0658783,$$
$$f[x_{-1}, \dots, x_2] = \frac{0{,}0118183 + 0{,}0494433}{0{,}9} = 0{,}0680684,$$
$$f[x_{-2}, \dots, x_2] = \frac{0{,}0680684 - 0{,}0658783}{1{,}2} = 0{,}0018251$$

olur. Stirling formülünde kullanılan girdilerin altı çizilidir:

k	x_k	$f[x_k]$	1. Böl. Fark	2. Böl. Fark	3. Böl. Fark	4. Böl. Fark
-2	1,0	0,7651977				
			$-0{,}4837057$			

 CC BY-NC-SA 4.0

k	x_k	$f[x_k]$	1. Böl. Fark	2. Böl. Fark	3. Böl. Fark	4. Böl. Fark
-1	1,3	0,6200860		$-0{,}1087338$		
			$-0{,}5489460$		$0{,}0658783$	
0	1,6	$0{,}4554022$		$-0{,}0494433$		$0{,}0018251$
			$-0{,}5786120$		$0{,}0680684$	
1	1,9	0,2818186		0,0118183		
			$-0{,}5715210$			
2	2,2	0,1103623				

$1{,}5 = 1{,}6 + s \cdot 0{,}3$ eşitliğinden $s = -\frac{1}{3}$ bulunur. Beş nokta olduğundan $n = 2m = 4$, $m = 2$'dir ve son satırı silinmiş formül kullanılır:

$$\begin{aligned} P_4(x) = f(x_0) &+ \frac{sh}{2}\,\big(\, f[x_{-1},x_0] + f[x_0,x_1] \,\big) + s^2h^2 f[x_{-1},x_0,x_1] \\ &+ \frac{s(s^2-1)h^3}{2}\,\big(\, f[x_{-2},\ldots,x_1] + f[x_{-1},\ldots,x_2] \,\big) \\ &+ s^2(s^2-1)h^4 f[x_{-2},\ldots,x_2]. \end{aligned}$$

$s = -\frac{1}{3}$, $h = 0{,}3$ için $s^2 - 1 = -\frac{8}{9}$ olduğundan katsayılar

$$sh = -0{,}1, \qquad s^2h^2 = 0{,}01,$$
$$s(s^2-1)h^3 = \frac{8}{27}\cdot 0{,}027 = 0{,}008, \quad s^2(s^2-1)h^4 = -\frac{8}{81}\cdot 0{,}0081 = -0{,}0008$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} f(1{,}5) \approx P_4(1{,}5) &= 0{,}4554022 + \frac{-0{,}1}{2}(-0{,}5489460 - 0{,}5786120) \\ &\quad + 0{,}01 \cdot (-0{,}0494433) \\ &\quad + \frac{0{,}008}{2}(0{,}0658783 + 0{,}0680684) \\ &\quad - 0{,}0008 \cdot 0{,}0018251 \\ &= 0{,}4554022 + 0{,}0563779 - 0{,}0004944 \\ &\quad + 0{,}0005358 - 0{,}0000015 \\ &= 0{,}5118200 \end{aligned}$$

bulunur. Bu veriler Örnek 9.2 verileridir ve sonuç oradaki P_4 polinomunun 1,5'teki değeridir. Tutarlılık kontrolü olarak Önerme 9.1 ile

$$4! \cdot h^4 \cdot f[x_{-2},\ldots,x_2] = 24 \cdot 0{,}0081 \cdot 0{,}0018251 \approx 0{,}0003548$$

olur; bu, oradaki $\Delta^4 f(1{,}0)$ değeridir. ■

9.6 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorularda bölünmüş fark tablosu ve Newton formülleri kullanılır.

Alıştırma 9.1 (ln 4 İçin Bölünmüş Fark Polinomu). $\ln 3 = 1{,}0986123$, $\ln 5 = 1{,}6094379$ ve $\ln 6 = 1{,}7917595$ değerlerini kullanarak $\ln 4$ değerini yaklaşık olarak bulmak için bölünmüş farklar tablosu yardımıyla Newton bölünmüş fark formülünden bir interpolasyon polinomu bulunuz (virgülden sonra 7. basamağa yuvarlayınız).

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$x_0 = 3$, $x_1 = 5$, $x_2 = 6$ ve $f(x) = \ln x$ alalım. Bölünmüş farklar

$$f[x_0, x_1] = \frac{1{,}6094379 - 1{,}0986123}{5 - 3} = 0{,}2554128,$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{1{,}7917595 - 1{,}6094379}{6 - 5} = 0{,}1823216,$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{0{,}1823216 - 0{,}2554128}{6 - 3} = -0{,}0243637$$

olur. Tablo:

k	x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1}, x_k]$	$f[x_{k-2}, x_{k-1}, x_k]$
0	3	1,0986123		
			0,2554128	
1	5	1,6094379		$-0{,}0243637$
			0,1823216	
2	6	1,7917595		

Newton bölünmüş fark formülüyle

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 1{,}0986123 + 0{,}2554128(x - 3) - 0{,}0243637(x - 3)(x - 5) \end{aligned}$$

bulunur. $(x - 3)(x - 5) = x^2 - 8x + 15$ olduğundan açılmış hâli

$$\begin{aligned} P_2(x) &= -0{,}0243637x^2 + (0{,}2554128 + 0{,}1949096)x \\ &\quad + (1{,}0986123 - 0{,}7662384 - 0{,}3654555) \\ &= -0{,}0243637x^2 + 0{,}4503224x - 0{,}0330816 \end{aligned}$$

olur. $x = 4$ için Newton biçiminden $x - 3 = 1$, $x - 5 = -1$ olduğundan

$$\ln 4 \approx P_2(4) = 1{,}0986123 + 0{,}2554128 + 0{,}0243637 = 1{,}3783888$$

bulunur. Gerçek değer $\ln 4 = 1{,}3862944$ olduğundan hata yaklaşık $0{,}0079$'dur. ■

Alıştırma 9.2 (Newton Biçimine Yeni Nokta Eklemek). Örnek 9.1 örneğindeki $(0; 2)$, $(1; 3)$, $(2; 12)$, $(5; 147)$ noktalarına $(4; 54)$ noktası ekleniyor. Bölünmüş fark tablosunu yalnız yeni girdileri hesaplayarak genişletiniz ve beş noktadan geçen $P_4(x)$ polinomunu bulunuz.

Çözüm.
Eski noktalar $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ olarak kalır, yeni nokta $x_4 = 4$'tür. Noktaların artan sırada olması gerekmez (Sonuç 9.1). Tablonun altına bir satır eklenir ve her sütuna bir yeni girdi gelir:

$$f[x_3, x_4] = \frac{54 - 147}{4 - 5} = 93,$$
$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{93 - 45}{4 - 2} = 24,$$
$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{24 - 9}{4 - 1} = 5,$$
$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{5 - 1}{4 - 0} = 1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

k	x_k	$f[x_k]$	1. Böl. Fark	2. Böl. Fark	3. Böl. Fark	4. Böl. Fark
0	0	$\underline{2}$				
			$\underline{1}$			
1	1	3		$\underline{4}$		
			9		$\underline{1}$	
2	2	12		9		$\underline{1}$
			45		5	
3	5	147		24		
			93			
4	4	54				

Üst kenardaki eski katsayılar değişmemiştir; yalnız $f[x_0,\dots,x_4]=1$ eklenmiştir. Örnek 9.1 örneğindeki $P_3(x)=x^3+x^2-x+2$ ile

$$P_4(x)=P_3(x)+1\cdot x(x-1)(x-2)(x-5)$$

olur.

$$x(x-1)(x-2)(x-5)=x^4-8x^3+17x^2-10x$$

olduğundan

$$P_4(x)=x^4-7x^3+18x^2-11x+2$$

bulunur. Kontrol olarak

$$P_4(4)=256-448+288-44+2=54$$

olur; eski dört noktada eklenen terim sıfır olduğundan P_4 onlardan da geçer. ■

Alıştırma 9.3 (Küp Fonksiyonunun İleri Farkları). $f(x)=x^3$ fonksiyonu için $x_k=k$ ($k=0,1,2,3,4$, $h=1$) noktalarında ileri fark tablosunu kurunuz. Üçüncü farkların sabit, dördüncü farkın sıfır olduğunu gösteriniz ve Newton ileri fark formülünün $f(x)=x^3$'ü geri verdiğini doğrulayınız.

Çözüm.
Değerler $0,1,8,27,64$'tür. Ardışık farklar alınırsa

$$\begin{aligned}
&\Delta f: 1-0=1,\ 8-1=7,\ 27-8=19,\ 64-27=37,\\
&\Delta^2 f: 7-1=6,\ 19-7=12,\ 37-19=18,\\
&\Delta^3 f: 12-6=6,\ 18-12=6,\\
&\Delta^4 f: 6-6=0
\end{aligned}$$

olur:

k	x_k	$f(x_k)$	$\Delta f(x_k)$	$\Delta^2 f(x_k)$	$\Delta^3 f(x_k)$	$\Delta^4 f(x_k)$
0	0	$\underline{0}$				
			$\underline{1}$			
1	1	1		$\underline{6}$		
			7		$\underline{6}$	

 CC BY-NC-SA 4.0

k	x_k	$f(x_k)$	$\Delta f(x_k)$	$\Delta^2 f(x_k)$	$\Delta^3 f(x_k)$	$\Delta^4 f(x_k)$
2	2	8		12		$\underline{0}$
			19		6	
3	3	27		18		
			37			
4	4	64				

Üçüncü farkların sabit olması Önerme 9.1 ile açıklanır: $\Delta^3 f(x_i) = 3! \cdot h^3 \cdot f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$'tür. Lemma 9.1 gereği $f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$, f'yi dört noktada interpole eden kübik polinomun baş katsayısıdır; bu polinom x^3'ün kendisidir ve baş katsayısı 1'dir. Dolayısıyla $\Delta^3 f(x_i) = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6$'dır. Sabit bir sütunun farkı sıfır olduğundan $\Delta^4 f(x_0) = 0$'dır.
$x_0 = 0$, $h = 1$ için $x = s$'dir. Sonuç 9.2 ile

$$\begin{aligned} P_4(s) &= 0 + \binom{s}{1} \cdot 1 + \binom{s}{2} \cdot 6 + \binom{s}{3} \cdot 6 + \binom{s}{4} \cdot 0 \\ &= s + 3s(s-1) + s(s-1)(s-2) \\ &= s + 3s^2 - 3s + s^3 - 3s^2 + 2s = s^3 \end{aligned}$$

bulunur. Yani formül $f(x) = x^3$'ü tam olarak geri verir. ■

Bu bölümde interpolasyon polinomunu, katsayıları bir fark tablosundan okunan ve yeni noktalarla kolayca genişleyen bir biçimde yazdık. Aynı polinomlar, bir fonksiyonun yalnız tablo değerleri bilindiğinde türevine yaklaşmak için de kullanılır; sonraki bölümün konusu budur: Nümerik Türev.

 CC BY-NC-SA 4.0

10. Nümerik Türev

Bir fonksiyonun yalnız birkaç noktadaki değerleri biliniyorsa (bir ölçüm tablosu ya da pahalı bir hesabın çıktısı) türev kuralla alınamaz. Bu bölümde f'nin $x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktalarındaki değerlerinden bir türev değerine yaklaşan formüller kuracağız. Fikir şudur: f yerine interpolasyon polinomunun türevi alınır, Lagrange hata teriminden de yapılan kesme hatası okunur.
Türevin tanımı

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(sağdaki limit varsa) küçük bir h için fark bölümünün $f'(x_0)$'a yakın olduğunu söyler. Önce bu yaklaşımı iki noktayla elde edip hatasını ölçeceğiz, sonra nokta sayısını $n+1$'e çıkaracağız.

10.1 İki nokta ile türev yaklaşımı

En basit formül, iki noktadan geçen doğrunun, yani birinci dereceden Lagrange polinomunun türevinden gelir.
$f \in C^2[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$ ve $h \neq 0$ sayısı $x_1 = x_0 + h \in [a,b]$ olacak kadar küçük olsun. f'yi x_0 ve x_1 noktalarındaki Lagrange interpolasyon polinomu ve hata terimiyle yazalım (Teorem 8.3):

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \frac{f''(\xi(x))}{2!} (x - x_0)(x - x_1).$$

$h = x_1 - x_0$ olduğundan bu eşitlik

$$f(x) = \frac{x - x_0 - h}{-h} f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} f(x_0 + h) + \frac{f''(\xi(x))}{2} (x - x_0)(x - x_0 - h)$$

biçimini alır. Her iki tarafın x'e göre türevi alınırsa

$$f'(x) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{2(x - x_0) - h}{2} f''(\xi(x)) + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2} \cdot \frac{d}{dx} \left(f''(\xi(x)) \right)$$

bulunur. $\xi(x)$'i içeren terimler ihmal edilirse $f'(x) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ yaklaşımı çıkar. Ancak bu yaklaşımın kesme hatasını genel bir x için kestiremeyiz, çünkü $\frac{d}{dx}\left(f''(\xi(x)) \right)$ hakkında hiçbir bilgimiz yoktur. $x = x_0$ alınırsa bu terimin katsayısı $\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2}$ sıfır olur, ikinci terimde de $2(x - x_0) - h = -h$ kalır. Böylece hata terimi açıkça yazılabilen aşağıdaki formüle ulaşırız.

Önerme 10.1 (İleri ve geri fark formülü). *$f \in C^2[a,b]$, $x_0 \in (a,b)$, $h \neq 0$ ve $x_0 + h \in [a,b]$ olsun. x_0 ile $x_0 + h$ arasında öyle bir ξ sayısı vardır ki*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi) \tag{1}$$

olur. Ayrıca bir $M > 0$ için x_0 ile $x_0 + h$ arasındaki her x için $| f''(x) | \leq M$ ise

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \leq \frac{M | h |}{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

eşitsizliği sağlanır. $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *yaklaşımına* $h > 0$ *ise* ***ileri fark formülü****,* $h < 0$ *ise* ***geri fark formülü*** *denir.*

İspat.
Yukarıdaki türetme, $\frac{d}{dx}\left(f''(\xi(x)) \right)$ *türevinin var olduğunu sessizce kabul eder. Taylor Teoremi bu varsayım olmadan aynı sonucu verir.* f*'nin* x_0 *civarındaki birinci dereceden Taylor polinomunu kalan terimiyle* $x = x_0 + h$ *noktasında yazalım (Teorem 1.9):* x_0 *ile* $x_0 + h$ *arasında bir* ξ *için*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\, h + \frac{f''(\xi)}{2}\, h^2$$

dir. $f(x_0)$*'ı sola geçirip* $h \neq 0$ *ile bölersek*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{h}{2}\, f''(\xi)$$

ve buradan (1) elde edilir. ξ *sayısı* x_0 *ile* $x_0 + h$ *arasında olduğundan* $\mid f''(\xi) \mid \leq M$ *dir; dolayısıyla*

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| = \frac{\mid h \mid}{2} \mid f''(\xi) \mid \leq \frac{M \mid h \mid}{2}$$

bulunur. ■

Yani fark bölümü, $(x_0, f(x_0))$ ve $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ noktalarından geçen kirişin eğimidir ve bu eğim, teğetin eğimi olan $f'(x_0)$'dan en çok $M \mid h \mid /2$ kadar sapar. Hata h ile orantılı küçülür: $f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} + O(h)$ (Tanım 3.5). İleri fark x_0'ın sağındaki, geri fark solundaki değeri kullanır.

Türev yaklaşımı ve hata sınırı üç adımda

1. Noktaları ve h'yi belirle; türevin istendiği noktanın konumuna göre formülü seç (iki nokta, üç-nokta uç nokta, üç-nokta orta nokta ya da ikinci türev için orta nokta).
2. Fonksiyon değerlerini formülde yerine yaz ve sonucu istenen basamağa yuvarla.
3. Hata terimindeki türevi hesapla, mutlak değerinin ξ'nin bulunabileceği aralıktaki en büyük değeri M'yi bul ve sınırı yaz. Gerçek değer biliniyorsa gerçek mutlak hatayı bu sınırla karşılaştır.

Örnek 10.1 (ln x için ileri fark). $f(x) = \ln x$ olmak üzere $h = 0{,}1$ alarak ileri fark formülü yardımıyla $f'(1{,}8)$ türev değerine bir yaklaşımda bulunun ve oluşan mutlak hata için bir sınır belirleyin. (Virgülden sonra 7 basamağa yuvarlayın.)

Çözüm.
Yaklaşım. $x_0 = 1{,}8$ ve $h = 0{,}1$ için ileri fark formülü

$$f'(1{,}8) \approx \frac{f(1{,}9) - f(1{,}8)}{0{,}1} = \frac{\ln 1{,}9 - \ln 1{,}8}{0{,}1} = 0{,}5406722$$

verir.
Hata sınırı. $f'(x) = \frac{1}{x}$ ve $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ dir. (1)'deki ξ sayısı 1,8 ile 1,9 arasındadır ve $\frac{1}{x^2}$ bu aralıkta azalan olduğundan

$$\mid f''(\xi) \mid = \frac{1}{\xi^2} \leq \frac{1}{(1{,}8)^2} = 0{,}3086420 = M$$

alınabilir. İleri ve geri fark formülüne (Önerme 10.1) göre

$$\left| f'(1{,}8) - \frac{f(1{,}9) - f(1{,}8)}{0{,}1} \right| \leq \frac{M \mid h \mid}{2} = \frac{0{,}3086420 \cdot 0{,}1}{2} = 0{,}0154321$$

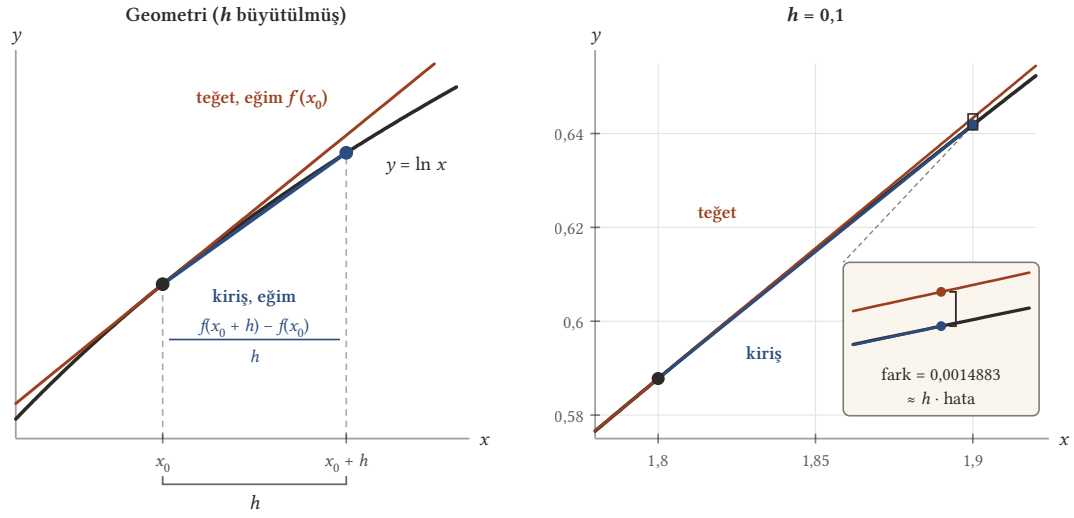
bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Karşılaştırma. Gerçek değer $f'(1{,}8) = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}5555556$ olduğundan gerçek mutlak hata

$$\left| \, 0{,}5555556 - 0{,}5406722 \, \right| = 0{,}0148834$$

dür ve gerçekten $0{,}0154321$ sınırının altındadır. Kirişin eğimi teğetinkinden küçüktür, çünkü $\ln x$ konkavdır.



Şekil 10.1: $f(x) = \ln x$ için $x_0 = 1{,}8$ noktasındaki teğet ve ileri fark kirişi. Solda $h = 0{,}5$ alınarak abartılmış geometri: konkav eğrinin kirişi teğetten daha az eğimlidir ($0{,}490245 < 0{,}555556$). Sağda gerçek adım $h = 0{,}1$: kirişin eğimi $0{,}5406722$, teğetin eğimi $0{,}5555556$. Büyütülen kutuda $x = 1{,}9$'da teğetin değeri $0{,}643343$ ile $\ln 1{,}9 = 0{,}641854$ arasındaki $0{,}0014883$'lük fark görülür; bu, h ile mutlak hatanın çarpımıdır.

■

10.2 (n + 1)-nokta formülü

Aynı fikri $n+1$ farklı noktaya genelleştirelim; iki nokta formülü bunun $n = 1$ hâlidir.
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ farklı noktalar, $L_k(x)$ bu noktalara ait k. Lagrange katsayı polinomu olsun. Lagrange hata teoremine (Teorem 8.3) göre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x) + \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi(x))$$

dir. Bu eşitlikte x'e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} f'(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k'(x) \\ + \frac{d}{dx}\left[\frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!}\right] f^{(n+1)}(\xi(x)) \\ + \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_n)}{(n+1)!} \cdot \frac{d}{dx}\left(f^{(n+1)}(\xi(x)) \right) \end{aligned}$$

bulunur. $x = x_j$ noktasında son terimin katsayısı sıfırdır. Çarpımın türevinde de çarpım kuralıyla oluşan $n+1$ terimden yalnız $(x - x_j)$ çarpanının türevlendiği terim x_j'de sıfırdan farklı kalır ve $\prod_{k \neq j}(x_j - x_k)$ değerini verir. Bu gözlem aşağıdaki formülü verir.

Önerme 10.2 ((n + 1)-nokta formülü). *$n \geq 1$, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ farklı noktalar ve I bu noktaları içeren en küçük kapalı aralık olsun. $f \in C^{n+1}(I)$ ise her $j = 0, 1, \ldots, n$ için I içinde öyle bir ξ_j vardır ki*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k'(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_j)}{(n+1)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} (x_j - x_k)$$

olur. Bu formüle $f'(x_j)$ türevi için ***$(n+1)$-nokta formülü*** *denir.*

İspat.
Yukarıdaki türetme $\frac{d}{dx}\left(f^{(n+1)}(\xi(x)) \right)$ türevinin varlığını kabul ediyordu; bu varsayıma gerek yoktur. Hata fonksiyonunu

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x)$$

diye tanımlayalım ve $\omega_j(x) = \prod_{k\neq j}(x - x_k)$ diyelim. g türevlenebilirdir, $g(x_j) = 0$ dır ve noktalar farklı olduğundan $\omega_j(x_j) \neq 0$ dır. Ayrıca

$$g'(x_j) = f'(x_j) - \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k'(x_j)$$

olduğundan $g'(x_j) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_j)}{(n+1)!}\,\omega_j(x_j)$ olacak bir $\xi_j \in I$ bulmak yeter.
$x \in I$ noktası düğümlerden farklı olsun. Lagrange hata teoremine (Teorem 8.3) göre I içinde bir $\xi(x)$ için

$$g(x) = (x - x_j)\,\omega_j(x)\,\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

dir, yani

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} = \frac{g(x) - g(x_j)}{x - x_j} \cdot \frac{1}{\omega_j(x)}.$$

Düğüm sayısı sonlu olduğundan x, I içinde düğümlere uğramadan x_j'ye yaklaştırılabilir. Bu durumda sağ taraf $\lambda = \frac{g'(x_j)}{\omega_j(x_j)}$ sayısına yakınsar.
$f^{(n+1)}$ fonksiyonu I kapalı aralığında süreklidir; Ekstrem Değer Teoremine (Teorem 1.5) göre burada en küçük değeri m'yi ve en büyük değeri M'yi alır. Sol taraf her x için $\frac{m}{(n+1)!}$ ile $\frac{M}{(n+1)!}$ arasında olduğundan limiti de öyledir: $m \le (n+1)!\,\lambda \le M$. Ara Değer Teoremine (Teorem 1.7) göre I içinde $f^{(n+1)}(\xi_j) = (n+1)!\,\lambda$ olan bir ξ_j vardır. Böylece

$$g'(x_j) = \lambda\,\omega_j(x_j) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_j)}{(n+1)!} \prod_{k\neq j}(x_j - x_k)$$

elde edilir. ■

Yani türevi, interpolasyon polinomunun türevinin düğümdeki değeriyle yaklaşırız; hata, Lagrange hata teriminin x_j'deki türevidir. Genellikle nokta sayısı arttıkça yaklaşım iyileşir. Uygulamada en çok üç-nokta ve beş-nokta formülleri kullanılır.

10.3 Üç-nokta formülleri

$n = 2$ alıp formülleri açıkça yazalım; önce katsayı polinomlarının türevleri gerekir.
x_0, x_1, x_2 noktaları için $L_k(x)$ ve (çarpım kuralıyla) $L_k'(x)$ şöyledir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, L_0'(x) = \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, L_1'(x) = \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}, L_2'(x) = \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.
\end{aligned}
$$

Bunlar $(n+1)$-nokta formülünde (Önerme 10.2) $n=2$ için yerine yazılırsa $j=0,1,2$ için

$$
\begin{aligned}
f'(x_j) = f(x_0)&\,\frac{2x_j-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\\
+f(x_1)&\,\frac{2x_j-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\\
+f(x_2)&\,\frac{2x_j-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\\
+\frac{1}{6}&\,f'''(\xi_j)\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{2}(x_j-x_k)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

elde edilir. Noktalar eşit aralıklı olunca katsayılar çok sadeleşir.

Önerme 10.3 (Üç-nokta formülleri). *$h\neq 0$ ve f, x_0, x_0+h, x_0+2h noktalarını içeren en küçük kapalı aralıkta C^3 sınıfından olsun. x_0 ile x_0+2h arasında öyle ξ_0, ξ_1, ξ_2 sayıları vardır ki*

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) = \frac{1}{2h}&\left[-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)\right]\\
&+\frac{h^2}{3}f'''(\xi_0),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
f'(x_0+h) = \frac{1}{2h}\left[-f(x_0)+f(x_0+2h)\right]-\frac{h^2}{6}f'''(\xi_1),
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0+2h) = \frac{1}{2h}&\left[f(x_0)-4f(x_0+h)+3f(x_0+2h)\right]\\
&+\frac{h^2}{3}f'''(\xi_2)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

*olur. (3) ve (5) türevi aralığın x_0 ve x_0+2h uç noktalarında verdiği için bunlara **üç-nokta uç nokta formülleri**, (4) türevi x_0+h orta noktasında verdiği için **üç-nokta orta nokta formülü** denir.*

İspat.
(2)'de $x_1=x_0+h$ ve $x_2=x_0+2h$ yazalım. Bu durumda

$$x_1-x_0=h, \qquad x_2-x_0=2h, \qquad x_2-x_1=h$$

olur. ξ_j, $(n+1)$-nokta formülündeki (Önerme 10.2) sayıdır; aralık $[x_0, x_0+2h]$ (ya da $h<0$ ise $[x_0+2h, x_0]$) olduğundan x_0 ile x_0+2h arasındadır.
$j=0$, yani $x_j=x_0$. *Katsayılar*

$$
\begin{aligned}
L_0'(x_0) &= \frac{2x_0-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{-3h}{(-h)(-2h)} = -\frac{3}{2h},\\
L_1'(x_0) &= \frac{2x_0-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{-2h}{h\cdot(-h)} = \frac{4}{2h},\\
L_2'(x_0) &= \frac{2x_0-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{-h}{2h\cdot h} = -\frac{1}{2h}
\end{aligned}
$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve hata terimindeki $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ *çarpımı* $(-h)(-2h) = 2h^2$ *dir.* $\frac{1}{6} \cdot 2h^2 = \frac{h^2}{3}$ *olduğundan (3) elde edilir.*
j = 1, yani $x_j = x_0 + h$. $2x_1 - x_1 - x_2 = -h$, $2x_1 - x_0 - x_2 = 0$ *ve* $2x_1 - x_0 - x_1 = h$ *olduğundan*

$$L_0'(x_1) = \frac{-h}{2h^2} = -\frac{1}{2h}, \qquad L_1'(x_1) = 0, \qquad L_2'(x_1) = \frac{h}{2h^2} = \frac{1}{2h}$$

dir. $(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$ *çarpımı* $h \cdot (-h) = -h^2$ *ve* $\frac{1}{6}(-h^2) = -\frac{h^2}{6}$ *olduğundan (4) elde edilir.*
j = 2, yani $x_j = x_0 + 2h$. $2x_2 - x_1 - x_2 = h$, $2x_2 - x_0 - x_2 = 2h$ *ve* $2x_2 - x_0 - x_1 = 3h$ *olduğundan*

$$L_0'(x_2) = \frac{h}{(-h)(-2h)} = \frac{1}{2h}, \qquad L_1'(x_2) = \frac{2h}{h \cdot (-h)} = -\frac{4}{2h},$$
$$L_2'(x_2) = \frac{3h}{2h \cdot h} = \frac{3}{2h}$$

dir. Çarpım $(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = 2h \cdot h = 2h^2$ *olduğundan hata terimi yine* $\frac{h^2}{3} f'''(\xi_2)$ *olur ve (5) elde edilir.* ■

Yani üç değer bilindiğinde türevin iki uçta ve ortada nasıl yaklaşılacağını bu üç formül söyler; üçünün de hatası h^2 ile orantılıdır.
Formülleri türevin istendiği x_0 noktası cinsinden yazmak daha kullanışlıdır.

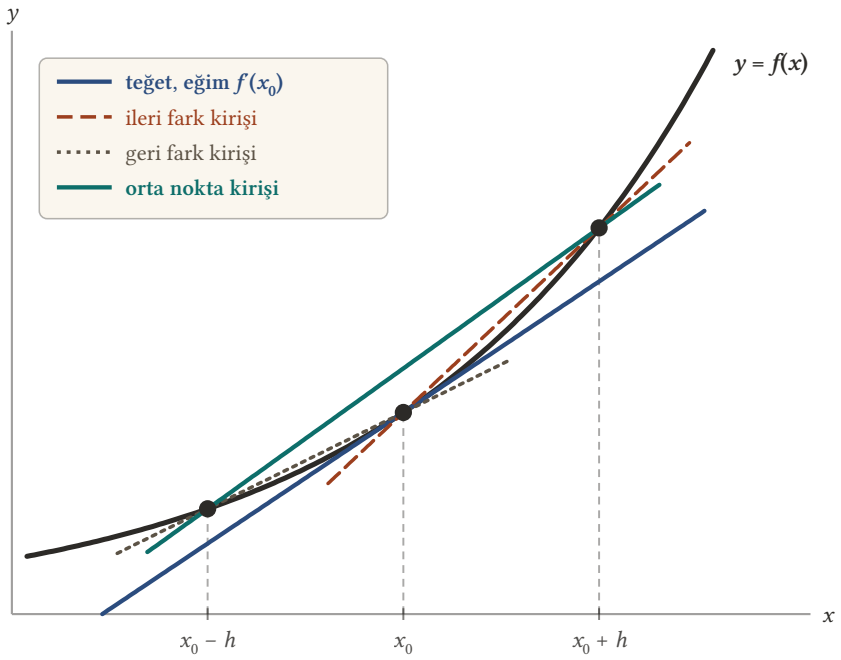
Sonuç 10.1 (Türevin alındığı noktaya göre üç-nokta formülleri). $h \neq 0$ *olsun ve* f *kullanılan noktaları içeren kapalı aralıkta* C^3 *sınıfından olsun.*
Üç-nokta orta nokta formülü. $x_0 - h$ *ile* $x_0 + h$ *arasındaki bir* ξ *için*

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[\, f(x_0 + h) - f(x_0 - h) \,\right] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi). \tag{6}$$

Üç-nokta uç nokta formülü. $x_0 - 2h$ *ile* x_0 *arasındaki bir* ξ *için*

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \frac{1}{2h}\left[\, f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0) \,\right] \\ + \frac{h^2}{3} f'''(\xi). \end{aligned} \tag{7}$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.2: x_0 noktasındaki teğet ve üç kiriş. İleri fark kirişi x_0 ile $x_0 + h$'yi, geri fark kirişi $x_0 - h$ ile x_0'ı, orta nokta kirişi $x_0 - h$ ile $x_0 + h$'yi birleştirir. Tek yanlı kirişlerden biri teğetten dik, öteki yatık kalır; orta nokta kirişi ise teğete neredeyse paraleldir.

> ***İspat.***
> *(4) formülü x_0 yerine $x_0 - h$ yazılarak kullanılırsa ($x_0 + h \mapsto x_0$ yer değiştirmesi) üç nokta $x_0 - h$, x_0, $x_0 + h$ olur ve (6) elde edilir; ξ bu kez $x_0 - h$ ile $x_0 + h$ arasındadır. (5) formülü x_0 yerine $x_0 - 2h$ yazılarak kullanılırsa ($x_0 + 2h \mapsto x_0$) üç nokta $x_0 - 2h$, $x_0 - h$, x_0 olur ve (7) elde edilir; ξ bu kez $x_0 - 2h$ ile x_0 arasındadır.* ■

(3) formülünde h yerine $-h$ yazılırsa

$$f'(x_0) = \frac{1}{-2h}\left[-3f(x_0) + 4f(x_0 - h) - f(x_0 - 2h)\right] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi)$$

yani tam olarak (7) elde edilir. Bu nedenle üç-nokta uç nokta formülü olarak (3)'ün bilinmesi yeterlidir: $h > 0$ alınırsa sağdaki, $h < 0$ alınırsa soldaki değerler kullanılır.
Her formülde ξ'yi içeren terim hata terimidir. Türeve verilen aralığın uç noktalarında yaklaşılacaksa (bir taraftaki değerler yoksa) uygun üç-nokta uç nokta formülü, ara noktalarda ise üç-nokta orta nokta formülü kullanılır. Orta nokta formülü daha iyi sonuç verir: hata sabiti $\frac{h^2}{6}$, uç nokta formülündeki $\frac{h^2}{3}$'ün yarısıdır ve yalnız iki fonksiyon değeri gerekir.

Örnek 10.2 (Tablodan üç-nokta orta nokta formülüyle türev). $f(x) = xe^x$ fonksiyonunun bazı değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x	$f(x)$
1,8	10,889365
1,9	12,703199
2,0	14,778112

 CC BY-NC-SA 4.0

x	$f(x)$
2,1	17,148957
2,2	19,855030

$h = 0{,}1$ için üç-nokta orta nokta formülünü kullanarak $f'(2)$ değerine bir yaklaşımda bulunun ve gerçek değer yardımıyla bu yaklaşımdaki mutlak hatayı belirleyin.

Çözüm.
Yaklaşım. $x_0 = 2{,}0$ ve $h = 0{,}1$ için $x_0 - h = 1{,}9$ ve $x_0 + h = 2{,}1$ dir. (6) formülünden

$$f'(2) \approx \frac{1}{2(0{,}1)}\left[\, 17{,}148957 - 12{,}703199 \,\right] = \frac{4{,}445758}{0{,}2} = 22{,}228790$$

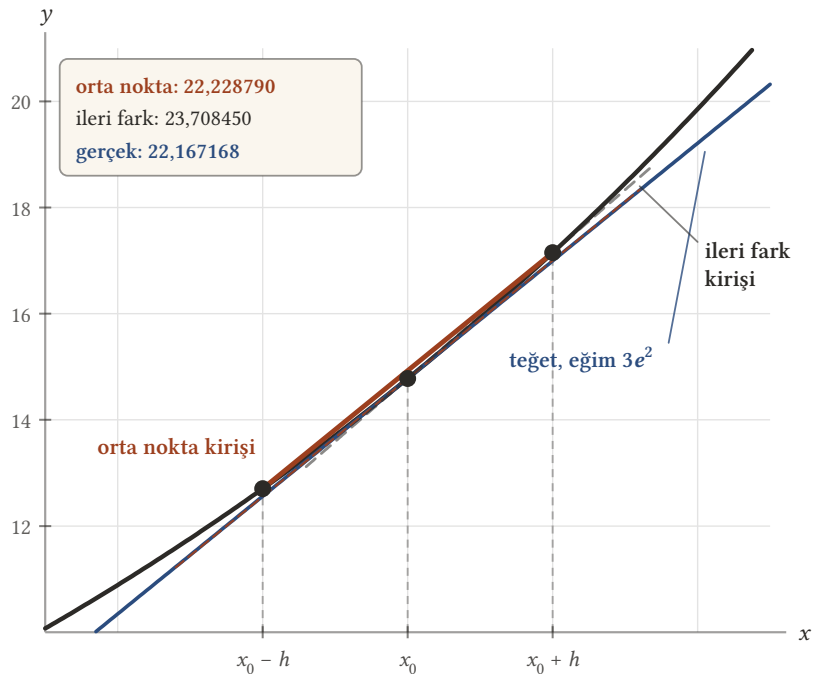
bulunur.
Gerçek hata. $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$ olduğundan gerçekte $f'(2) = 3e^2 = 22{,}167168$ dir ve yaklaşımın gerçek mutlak hatası

$$\left|\, 22{,}167168 - 22{,}228790 \,\right| = 0{,}061622$$

dir.
Hata terimiyle karşılaştırma. (6)'daki hata terimi $-\frac{h^2}{6} f'''(\xi)$, $1{,}9 < \xi < 2{,}1$ dir. $f'''(x) = e^x(x+3)$ fonksiyonu artan olduğundan $\left|\, f'''(\xi) \,\right| \le e^{2{,}1} \cdot 5{,}1 = 41{,}647467$ ve

$$\left|\frac{h^2}{6} f'''(\xi)\right| \le \frac{0{,}01}{6} \cdot 41{,}647467 = 0{,}069412$$

dir; gerçek hata bu sınırın altındadır.
Formülün kullandığı kiriş, $(1{,}9;\ 12{,}703199)$ ile $(2{,}1;\ 17{,}148957)$ noktalarını birleştirir ve $x_0 = 2$'deki teğete neredeyse paraleldir. Bu kirişte $f(2)$ hiç kullanılmaz.



Şekil 10.3: $f(x) = x\,e^x$ grafiği ve $x_0 = 2$, $h = 0{,}1$ için tablo noktaları. Orta nokta kirişi (1,9; 12,703199) ile (2,1; 17,148957) noktalarını birleştirir; kesikli ince çizgi bu kirişin (2; 14,778112)'den geçen paralelidir ve teğetle neredeyse çakışır. Gri kesikli ileri fark kirişi belirgin biçimde daha diktir. Eğimler kutuda verilmiştir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 10.3 (Tablodan üç-nokta uç nokta formülüyle türev). Önceki örnekteki (Örnek 10.2) $f(x) = xe^x$ tablosunu kullanarak $h = 0{,}1$ için üç-nokta uç nokta formülüyle $f'(2)$ değerine bir yaklaşımda bulunun, mutlak hatayı belirleyin ve orta nokta formülünün hatasıyla karşılaştırın.

Çözüm.
Yaklaşım. $x_0 = 2{,}0$, $h = 0{,}1$ için $x_0 + h = 2{,}1$ ve $x_0 + 2h = 2{,}2$ dir. (3) formülünden

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{1}{0{,}2}\left[-3(14{,}778112) + 4(17{,}148957) - 19{,}855030\right] \\ &= \frac{-44{,}334336 + 68{,}595828 - 19{,}855030}{0{,}2} = \frac{4{,}406462}{0{,}2} = 22{,}032310 \end{aligned}$$

bulunur.
Gerçek hata. $f'(2) = 3e^2 = 22{,}167168$ olduğundan

$$\left| 22{,}167168 - 22{,}032310 \right| = 0{,}134858$$

dir.
Hata sınırı. ξ sayısı 2,0 ile 2,2 arasındadır ve $f'''(x) = e^x(x+3)$ artandır; $|f'''(\xi)| \le e^{2{,}2} \cdot 5{,}2 = 46{,}930070$ ve

$$\left|\frac{h^2}{3} f'''(\xi)\right| \le \frac{0{,}01}{3} \cdot 46{,}930070 = 0{,}156434$$

olur. Gerçek hata sınırın altındadır.
Karşılaştırma. Uç nokta formülünün hatası (0,134858), orta nokta formülününkinin (0,061622) iki katından biraz fazladır. Bu, hata sabitlerinin oranı $\frac{h^2}{3} : \frac{h^2}{6} = 2$ ile uyumludur; aradaki küçük fark, ξ sayılarının farklı yerlerde olmasından gelir. ■

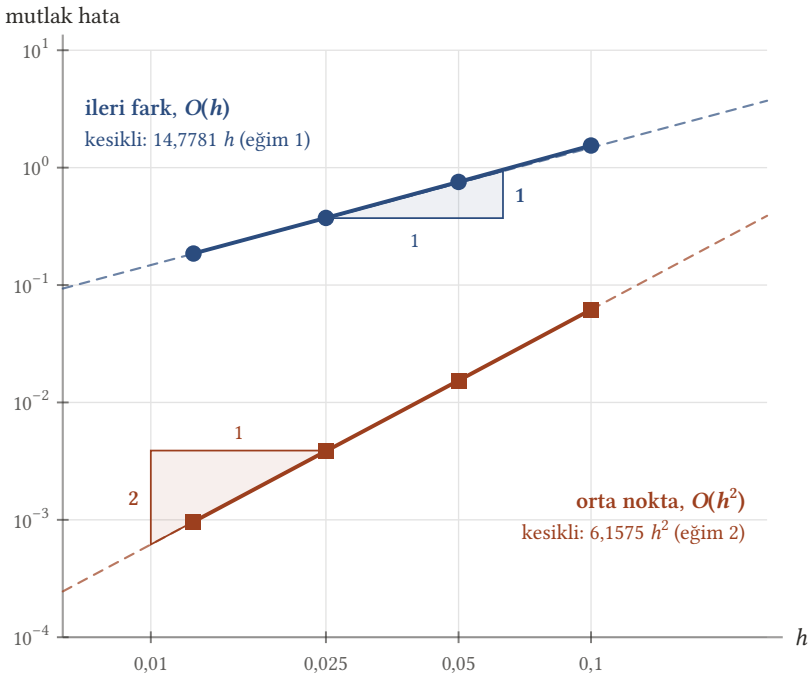
Örnek 10.4 (Hatanın h ile küçülmesi). $f(x) = xe^x$ için $f'(2)$ türevine $h = 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}025$ alarak ileri fark formülü (1) ve üç-nokta orta nokta formülü (6) ile yaklaşın. Hataların h ile nasıl küçüldüğünü inceleyin. (Fonksiyon değerlerini f'nin kendisinden hesaplayın, sonuçları virgülden sonra 7 basamağa yuvarlayın.)

Çözüm.
Hesap. Gerçek değer $f'(2) = 3e^2 = 22{,}1671683$ tür. Her h için ileri fark $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ ve orta nokta $\frac{f(2+h)-f(2-h)}{2h}$ hesaplanırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

h	İleri fark	Mutlak hata	Orta nokta	Mutlak hata
0,1	23,7084462	1,5412779	22,2287869	0,0616186
0,05	22,9217014	0,7545331	22,1825649	0,0153966
0,025	22,5404986	0,3733303	22,1710169	0,0038486

$h = 0{,}1$ satırındaki orta nokta değeri, tablodan bulunan 22,228790 (Örnek 10.2) ile son basamakta ayrılır; orada tablodaki altı basamaklı değerler kullanılmıştı.
Yorum. h yarıya indikçe ileri fark hatası yaklaşık yarıya iner ($1{,}54 \to 0{,}75 \to 0{,}37$), orta nokta hatası ise yaklaşık dörtte birine iner ($0{,}0616 \to 0{,}0154 \to 0{,}0038$). Bu, hata terimlerinin $\frac{h}{2}f''(\xi)$ ve $\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$ olmasının sonucudur: ileri fark $O(h)$, orta nokta $O(h^2)$ hatalıdır (Tanım 3.5). h küçüldükçe ξ sayısı 2'ye yaklaştığından hatalar sırasıyla $\frac{h}{2}f''(2) = 14{,}7781 \cdot h$ ve $\frac{h^2}{6}f'''(2) = 6{,}1575 \cdot h^2$ değerlerine yaklaşır; örneğin $h = 0{,}025$ için bunlar 0,3694528 ve 0,0038485 tir. Log–log ölçekte iki hata eğimi 1 ve 2 olan doğrular üzerinde dizilir.

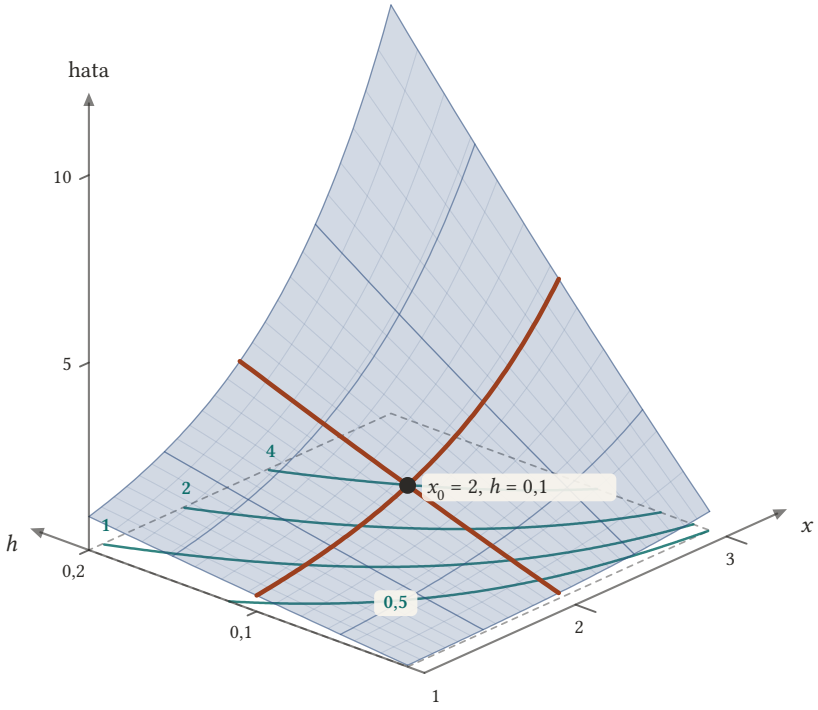
 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.4: $f(x) = x\,e^{x}$ için $f'(2)$ yaklaşımlarının mutlak hataları, log–log ölçekte. Daireler ileri fark, kareler orta nokta formülüdür; $h = 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}025;\ 0{,}0125$. Kesikli doğrular 14,7781 h ve 6,1575 h^2 referanslarıdır. İleri fark hataları eğimi 1, orta nokta hataları eğimi 2 olan doğru üzerinde dizilir.

Hata yalnız h'ye değil, türevin alındığı noktaya da bağlıdır: küçük h için ileri fark hatası yaklaşık $\frac{h}{2}\,|\,f''(x)\,| = \frac{h}{2}e^{x}(x+2)$ dir. f'' büyüdükçe aynı h daha büyük hata verir; aşağıdaki yüzey bunu (x, h) düzleminde gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.5: İleri fark hatası $E(x,h) = [f(x+h) - f(x)]/h - f'(x)$, $f(x) = x\,e^x$, $1 \le x \le 3$, $0{,}01 \le h \le 0{,}2$. Yüzey h yönünde neredeyse doğrusal, x yönünde üstel büyür: en küçük değer yaklaşık 0,041 ($x=1$, $h=0{,}01$), en büyük değer yaklaşık 10,9 ($x=3$, $h=0{,}2$). Vurgulu eğriler $h=0{,}1$ ve $x=2$ kesitleridir; kesişimlerinde hata 1,5412779'dur. Tabandaki eğriler yaklaşık eşit hata eğrileridir (0,5; 1; 2; 4).

■

10.4 İkinci türev için orta nokta formülü

İkinci türeve de yalnız fonksiyon değerleriyle yaklaşılabilir; bu kez formülü doğrudan Taylor Teoreminden türetiriz.

Önerme 10.4 (İkinci Türev İçin Orta Nokta Formülü). *$h > 0$ ve $f \in C^4[x_0 - h, x_0 + h]$ olsun. $x_0 - h$ ile $x_0 + h$ arasında öyle bir ξ sayısı vardır ki*

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\, f(x_0 - h) - 2f(x_0) + f(x_0 + h) \,\right] - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \tag{8}$$

olur. Hata terimi $-\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$ dir.

İspat.
f'nin x_0 civarındaki üçüncü dereceden Taylor polinomunu kalan terimiyle yazalım (Teorem 1.9):

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi(x))}{4!}(x - x_0)^4,$$

burada $\xi(x)$ sayısı x_0 ile x arasındadır. x yerine sırasıyla $x_0 + h$ ve $x_0 - h$ yazalım. $x_0 - h < \xi_{-1} < x_0 < \xi_1 < x_0 + h$ olmak üzere

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2}\,h^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}\,h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{24}\,h^4,$$
$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2}\,h^2 - \frac{f'''(x_0)}{6}\,h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_{-1})}{24}\,h^4$$

elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanınca tek kuvvetli terimler sadeleşir:

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0) + f''(x_0)\,h^2 + \frac{h^4}{24}\left[\, f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1}) \,\right].$$

$f''(x_0)$ çekilirse

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[\, f(x_0-h) - 2f(x_0) + f(x_0+h) \,\right] - \frac{h^2}{24}\left[\, f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1}) \,\right]$$

bulunur. $\frac{1}{2}\left[\, f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1}) \,\right]$ sayısı $f^{(4)}(\xi_{-1})$ ile $f^{(4)}(\xi_1)$ arasındadır ve $f^{(4)}$, $[\xi_{-1}, \xi_1]$ aralığında süreklidir. Ara Değer Teoremine (Teorem 1.7) göre ξ_{-1} ile ξ_1 arasında (uçlar dahil) öyle bir ξ vardır ki

$$f^{(4)}(\xi) = \frac{f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_{-1})}{2}$$

olur; bu ξ de x_0-h ile x_0+h arasındadır. Böylece son terim $-\frac{h^2}{24}\cdot 2f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$ olur ve (8) elde edilir. ■

Yani ikinci türev, x_0'ın iki yanındaki değerlerin ortalamasının $f(x_0)$'dan sapmasıyla ölçülür ve hata $O(h^2)$ dir. $f^{(4)} \equiv 0$ olan, yani derecesi en çok 3 olan polinomlar için formül tam sonuç verir.

Örnek 10.5 (Tablodan ikinci türev). $f(x) = xe^x$ fonksiyonu için aşağıdaki tablo verilsin.

x	$f(x)$
1,9	12,703199
2,0	14,778112
2,1	17,148957

İkinci türev için orta nokta formülünü kullanarak $f''(2)$ için bir yaklaşımda bulunun ve bu yaklaşımda oluşan mutlak hatayı belirleyin. (Virgülden sonra 6 basamağa yuvarlayın.)

Çözüm.
Yaklaşım. $2{,}0 - 1{,}9 = 0{,}1$ ve $2{,}1 - 2{,}0 = 0{,}1$ olduğundan noktalar eşit aralıklıdır: $h = 0{,}1$, $x_0 = 2$, $x_0 - h = 1{,}9$, $x_0 + h = 2{,}1$. (8) formülünden

$$f''(2) \approx \frac{1}{(0{,}1)^2}\left[\, f(1{,}9) - 2f(2) + f(2{,}1) \,\right] = \frac{12{,}703199 - 29{,}556224 + 17{,}148957}{0{,}01} = \frac{0{,}295932}{0{,}01} = 29{,}593200$$

bulunur.
Gerçek hata. $f'(x) = e^x(x+1)$ ve $f''(x) = e^x(x+1) + e^x$, yani $f''(x) = e^x(x+2)$ olduğundan $f''(2) = 4e^2 = 29{,}556224$ tür. Mutlak hata

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mid 29{,}593200 - 29{,}556224 \mid = 0{,}036976$$

dır.
Hata terimiyle karşılaştırma. $f^{(4)}(x) = e^x(x+4)$ artandır; $1{,}9 < \xi < 2{,}1$ için $\mid f^{(4)}(\xi) \mid \le e^{2{,}1} \cdot 6{,}1 = 49{,}813636$ ve

$$\left|\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{0{,}01}{12} \cdot 49{,}813636 = 0{,}041511$$

olur. Gerçek hata bu sınırın altındadır. ■

10.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda bölümün formülleri, istenen basamağa yuvarlanarak uygulanır.

Alıştırma 10.1 (ln x için geri fark). $f(x) = \ln x$ olmak üzere $h = -0{,}1$ alarak geri fark formülüyle $f'(1{,}8)$ türev değerine bir yaklaşımda bulunun, mutlak hata için bir sınır belirleyin ve gerçek mutlak hatayla karşılaştırın. (Virgülden sonra 7 basamağa yuvarlayın.)

Çözüm.
Yaklaşım. $x_0 = 1{,}8$ ve $h = -0{,}1$ için $x_0 + h = 1{,}7$ dir ve geri fark formülü

$$f'(1{,}8) \approx \frac{f(1{,}7) - f(1{,}8)}{-0{,}1} = \frac{\ln 1{,}7 - \ln 1{,}8}{-0{,}1} = 0{,}5715841$$

verir.
Hata sınırı. $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ ve ξ sayısı $1{,}7$ ile $1{,}8$ arasındadır. $\frac{1}{x^2}$ azalan olduğundan

$$\mid f''(\xi) \mid \le \frac{1}{(1{,}7)^2} = 0{,}3460208 = M$$

ve ileri ve geri fark formülüne (Önerme 10.1) göre hata en çok

$$\frac{M \mid h \mid}{2} = \frac{0{,}3460208 \cdot 0{,}1}{2} = 0{,}0173010$$

dur.
Karşılaştırma. $f'(1{,}8) = 0{,}5555556$ olduğundan gerçek mutlak hata

$$\mid 0{,}5715841 - 0{,}5555556 \mid = 0{,}0160285$$

tir; sınırın altındadır. İleri farkın hatası ($0{,}0148834$, Örnek 10.1) daha küçüktür, çünkü $\mid f''(x) \mid = 1/x^2$ sağda daha küçüktür. ■

Alıştırma 10.2 (Soldaki değerlerle uç nokta formülü). Örnek 10.2 içindeki $f(x) = xe^x$ tablosunu kullanarak $h = -0{,}1$ için üç-nokta uç nokta formülüyle $f'(2)$ değerine bir yaklaşımda bulunun, mutlak hatayı ve hata terimi için bir sınırı belirleyin.

Çözüm.
Yaklaşım. (3) formülünde $x_0 = 2{,}0$, $h = -0{,}1$ alınırsa $x_0 + h = 1{,}9$, $x_0 + 2h = 1{,}8$ ve $2h = -0{,}2$ olur:

$$\begin{aligned} f'(2) &\approx \frac{1}{-0{,}2}\left[-3(14{,}778112) + 4(12{,}703199) - 10{,}889365\right] \\ &= \frac{-44{,}334336 + 50{,}812796 - 10{,}889365}{-0{,}2} = \frac{-4{,}410905}{-0{,}2} = 22{,}054525. \end{aligned}$$

Bu, (7) formülüdür: yalnız $x_0 = 2$'nin solundaki değerler kullanıldı.
Gerçek hata. $f'(2) = 3e^2 = 22{,}167168$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mid 22{,}167168 - 22{,}054525 \mid = 0{,}112643$$

tür.
Hata sınırı. ξ sayısı 1,8 ile 2,0 arasındadır ve $f'''(x) = e^x(x+3)$ artandır: $\mid f'''(\xi) \mid \le e^2 \cdot 5 = 36{,}945280$. Böylece

$$\left|\frac{h^2}{3} f'''(\xi)\right| \le \frac{0{,}01}{3} \cdot 36{,}945280 = 0{,}123151$$

olur ve gerçek hata bu sınırın altındadır. f''' solda daha küçük olduğundan bu hata, sağdaki değerlerle bulunan hatadan (0,134858, Örnek 10.3) küçüktür. ■

Alıştırma 10.3 (x sin x için ikinci türev). $f(x) = x\sin x$ ve $h = 0{,}1$ olmak üzere $f''(1)$ değeri için ikinci türev için orta nokta formülüyle bir yaklaşımda bulunun. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hata için bir üst sınır belirleyin ve sınırı gerçek mutlak hatayla karşılaştırın. (Virgülden sonra 9 basamağa yuvarlayın.)

Çözüm.
Yaklaşım. $x_0 = 1$, $h = 0{,}1$ için $x_0 - h = 0{,}9$ ve $x_0 + h = 1{,}1$ dir. Fonksiyon değerleri

$$\begin{aligned} f(0{,}9) &= 0{,}9\sin 0{,}9 = 0{,}704994219,\\ 2f(1) &= 2\sin 1 = 1{,}682941970,\\ f(1{,}1) &= 1{,}1\sin 1{,}1 = 0{,}980328096 \end{aligned}$$

olduğundan (8) formülü

$$\begin{aligned} f''(1) &\approx \frac{1}{(0{,}1)^2}\left[\, f(0{,}9) - 2f(1) + f(1{,}1)\,\right]\\ &= \frac{0{,}704994219 - 1{,}682941970 + 0{,}980328096}{0{,}01}\\ &= \frac{0{,}002380345}{0{,}01} = 0{,}238034500 \end{aligned}$$

verir.
Türevler. Çarpım kuralıyla

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin x + x\cos x, \qquad f''(x) = 2\cos x - x\sin x,\\ f'''(x) &= -3\sin x - x\cos x,\; f^{(4)}(x) = -4\cos x + x\sin x \end{aligned}$$

dir.
Hata sınırı. $[0{,}9;\,1{,}1]$ aralığında $\sin x$ artan ve pozitif, $\cos x$ azalan ve pozitiftir. Dolayısıyla $-4\cos x$ ve $x\sin x$ artandır, yani $f^{(4)}$ artandır. $f^{(4)}(1{,}1) = -0{,}834056390 < 0$ olduğundan $f^{(4)}$ aralık boyunca negatiftir ve $\mid f^{(4)} \mid$ en büyük değerini 0,9'da alır:

$$\max_{0{,}9\le\xi\le 1{,}1} \mid f^{(4)}(\xi) \mid = \mid -4\cos 0{,}9 + 0{,}9\sin 0{,}9 \mid = 1{,}781445654.$$

Hata terimi için

$$\left|-\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{(0{,}1)^2}{12} \cdot 1{,}781445654 = 0{,}001484538$$

bulunur.
Karşılaştırma. Gerçek değer $f''(1) = 2\cos 1 - \sin 1$, yani $f''(1) = 0{,}239133627$ dir ve gerçek mutlak hata

$$\mid 0{,}239133627 - 0{,}238034500 \mid = 0{,}001099127$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; $0{,}001484538$ sınırının altındadır. Paydadaki $h^2 = 0{,}01$, fonksiyon değerlerindeki yuvarlama hatalarını 100 katına çıkarır: dokuz basamaklı değerlerle bulunan yaklaşımın son iki basamağı güvenilir değildir (yuvarlamasız hesap $0{,}238034512$ verir). ■

Alıştırma 10.4 (Kübik polinomda tam sonuç). $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$ ve $h = 0{,}5$ için ikinci türev için orta nokta formülünün tam sonuç verdiğini gösterin ve nedenini hata teriminden açıklayın.

Çözüm.
Hesap. $x_0 - h = 0{,}5$ ve $x_0 + h = 1{,}5$ için $f(0{,}5) = 0{,}125$, $f(1) = 1$, $f(1{,}5) = 3{,}375$ tir. (8) formülünden

$$f''(1) \approx \frac{0{,}125 - 2 + 3{,}375}{(0{,}5)^2} = \frac{1{,}5}{0{,}25} = 6$$

bulunur. Gerçekte $f''(x) = 6x$ olduğundan $f''(1) = 6$ dır; yaklaşım tamdır.
Neden. $f^{(4)}(x) = 0$ olduğundan (8)'deki hata terimi $-\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) = 0$ dır. Bu yüzden derecesi en çok 3 olan her polinom için formül, h ne olursa olsun tam sonuç verir. ■

Türev formüllerini interpolasyon polinomunu türevleyerek bulduk. Aynı polinomun integralini almak da belirli integraller için yaklaşım formüllerini verir: Nümerik İntegrasyon.

 CC BY-NC-SA 4.0

11. Nümerik İntegrasyon

Belirli bir integrali ilkel fonksiyonla hesaplamak her zaman mümkün değildir: e^{-x^2} gibi pek çok fonksiyonun ilkeli elemanter fonksiyonlarla yazılamaz, bazen de f yalnız birkaç noktadaki değerleriyle bilinir. Böyle durumlarda integrale bir yaklaşım bulmak için nümerik integrasyon teknikleri kullanılır. Fikir Nümerik Türev bölümündekiyle aynıdır: f yerine onu birkaç noktada interpole eden Lagrange polinomunu koyarız. Polinomun integrali kolayca hesaplanır, hata ise Lagrange hata teriminden gelir.
Bu yolla elde edilen en bilinen formül Simpson Kuralıdır. Thomas Simpson'ın 1743 tarihli kitabında geçer; Kepler benzer bir kuralı 1615'te fıçıların hacmini hesaplamak için kullanmıştı. Eşit aralıklı noktalarla kurulan genel formüller ise Roger Cotes'un ölümünden sonra 1722'de basılan Harmonia Mensurarum'da yer alır.

11.1 Lagrange Polinomunun İntegrali

Bütün formüllerin çıkış noktası, interpolasyon polinomunu hata terimiyle birlikte integrallemektir.
$x_0, x_1, \ldots, x_n$ noktaları $[a,b]$ aralığından seçilmiş, birbirinden farklı noktalar ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ olsun. f'nin bu noktalardaki Lagrange interpolasyon polinomu (Teorem 8.2)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x)$$

idi ve Lagrange hata terimine (Teorem 8.3) göre her $x \in [a,b]$ için (a,b)'de öyle bir $\xi(x)$ sayısı vardır ki

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, L_k(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

olur. Her iki tarafın $[a,b]$ aralığında belirli integralini alalım. Toplamın integrali terim terim alınır ve $f(x_k)$ sayıları integralin dışına çıkar:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{k=0}^{n} a_k\, f(x_k) + E, \qquad a_k = \int_a^b L_k(x)\,dx, \\ E &= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)\, f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Tanım 11.1 (Lagrange polinomuna dayalı integral formülü). $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ birbirinden farklı noktalar ve $k = 0, 1, \ldots, n$ için $a_k = \int_a^b L_k(x)\,dx$ olsun.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_k\, f(x_k)$$

yaklaşımına $x_0, \ldots, x_n$ noktalarına dayalı **integral formülü** denir. x_k noktalarına formülün **düğümleri**, a_k sayılarına **ağırlıkları**, (1)'deki E sayısına da formülün **hata terimi** denir.

Yani integral, f'nin düğümlerdeki değerlerinin ağırlıklı toplamıyla yaklaşılır. Ağırlıklar yalnız düğümlere bağlıdır, f'ye bağlı değildir; bir kez hesaplanır ve her fonksiyon için kullanılır. f derecesi en çok n olan bir polinomsa $f^{(n+1)} = 0$ olduğundan $E = 0$ olur ve formül integrali tam verir.

11.2 Yamuk Kuralı

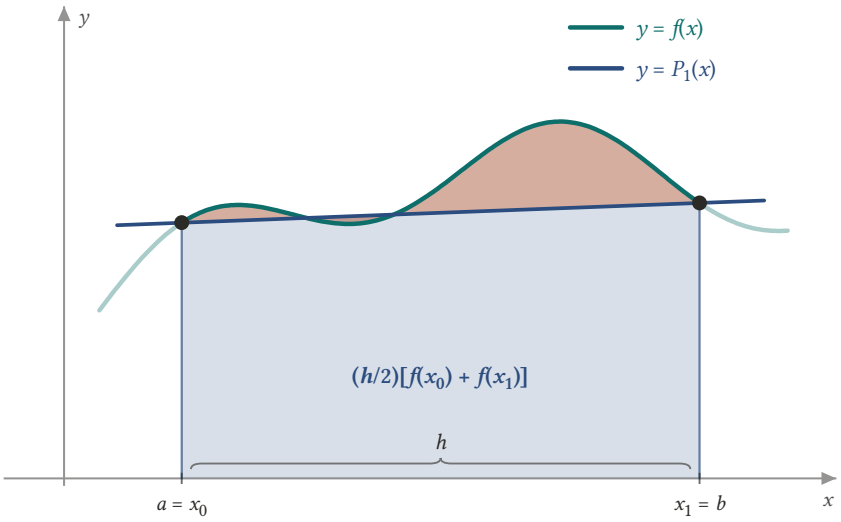
En basit durum $n = 1$'dir: f'yi aralığın uç noktalarından geçen doğruyla değiştiririz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 11.1 (Yamuk Kuralı). *$f \in C^2[x_0, x_1]$ ve $h = x_1 - x_0$ olsun. Öyle bir $\xi \in (x_0, x_1)$ sayısı vardır ki*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[\, f(x_0) + f(x_1) \,\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

olur.



Şekil 11.1: Yamuk Kuralı f'yi uç noktalardan geçen $y = P_1(x)$ doğrusuyla değiştirir. Taralı yamuğun alanı formülün ana kısmıdır; eğri ile doğru arasında kalan bölgeler hatayı gösterir.

İspat.

(1) eşitliğini $x_0 = a$, $x_1 = b$ düğümleriyle, yani $n = 1$ için yazalım:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \left[f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right] dx + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))\,(x - x_0)(x - x_1)\,dx.$$

Ağırlıklar. *Birinci integralde ilkeller $\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)}$ ve $\frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)}$'dir:*

$$a_0 = \frac{(x - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)}\Big|_{x_0}^{x_1} = -\frac{(x_0 - x_1)^2}{2(x_0 - x_1)} = \frac{x_1 - x_0}{2} = \frac{h}{2},$$
$$a_1 = \frac{(x - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)}\Big|_{x_0}^{x_1} = \frac{(x_1 - x_0)^2}{2(x_1 - x_0)} = \frac{h}{2}.$$

Böylece birinci integral $\frac{h}{2}\left[\, f(x_0) + f(x_1) \,\right]$'e eşittir.
Hata terimi. *$x \in [x_0, x_1]$ iken $x - x_0 \geq 0$ ve $x - x_1 \leq 0$ olduğundan $(x - x_0)(x - x_1)$ çarpımı bu aralıkta işaret değiştirmez. $x \neq x_0, x_1$ için $f''(\xi(x))$, $\frac{2(f(x)-P_1(x))}{(x-x_0)(x-x_1)}$ oranına eşittir ve bu oran $[x_0, x_1]$'de sürekli bir fonksiyona genişler. Dolayısıyla integraller için ağırlıklı ortalama değer teoremi (Teorem 1.8) uygulanır: öyle bir $\xi \in (x_0, x_1)$ vardır ki*

$$\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))\,(x - x_0)(x - x_1)\,dx = f''(\xi)\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)\,dx$$

olur. Sağdaki integralde $x = x_0 + th$ yazalım. $x - x_0 = th$, $x - x_1 = (t - 1)h$ ve $dx = h\,dt$ olur; t de 0'dan 1'e gider:

$$\int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)\,dx = h^3 \int_0^1 t(t-1)\,dt = h^3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{h^3}{6}.$$

Hata terimi $\frac{1}{2}f''(\xi)\left(-\frac{h^3}{6}\right) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi)$ *olur. İki parçayı toplayınca*

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,[\,f(x_0)+f(x_1)\,] - \frac{h^3}{12}\,f''(\xi), \qquad \xi \in (x_0, x_1)$$

elde edilir.
■

Yani Yamuk Kuralı, f'nin altındaki alanı $(x_0, f(x_0))$ ile $(x_1, f(x_1))$ noktalarını birleştiren kirişin altındaki yamuğun alanıyla değiştirir: yamuğun paralel kenarları $f(x_0)$ ile $f(x_1)$, yüksekliği h'dir. Hata f'' ile orantılıdır. f doğrusalsa hata sıfırdır; $[x_0, x_1]$'de $f'' > 0$ ise hata terimi negatiftir, yani yamuğun alanı integralden büyüktür.

Örnek 11.1 (Yamuk Kuralıyla π'ye yaklaşım). Yamuk Kuralını kullanarak $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ integrali için bir yaklaşımda bulunalım. Bu yaklaşımda oluşan mutlak hata için bir üst sınır belirleyip gerçek mutlak hatayı bulalım. Virgülden sonra 9. basamağa yuvarlama yapalım.

Çözüm.
$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$, $a = x_0 = 0$, $b = x_1 = 1$ ve $h = b - a = 1$'dir. Yamuk Kuralına göre

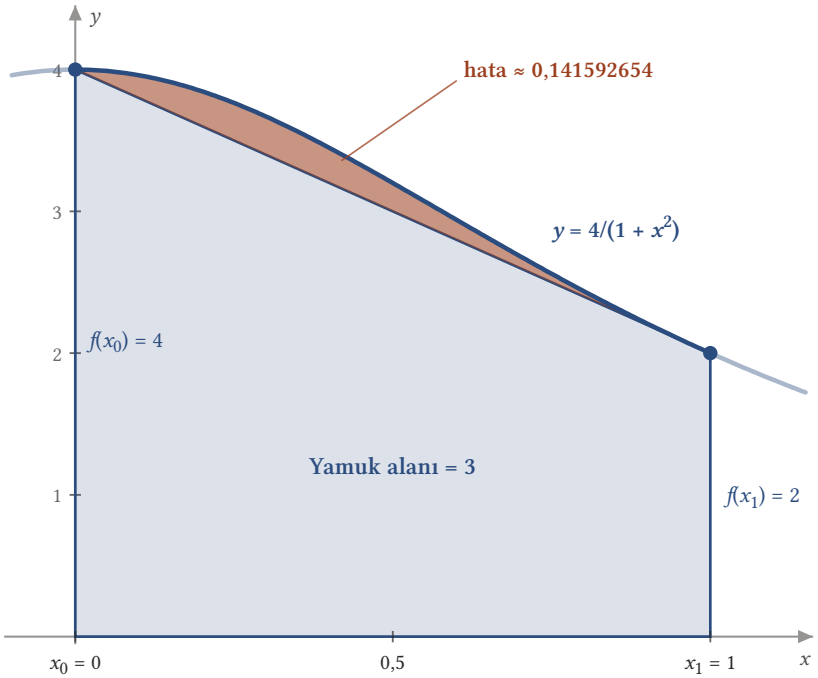
$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \frac{h}{2}\,[\,f(x_0)+f(x_1)\,] - \frac{h^3}{12}f''(\xi), \qquad 0 < \xi < 1$$

olduğundan

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx \approx \frac{1}{2}\left[\frac{4}{1+0^2}+\frac{4}{1+1^2}\right] = \frac{1}{2}(4+2) = 3$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.2: $f(x) = 4/(1 + x^2)$ eğrisi ve Yamuk Kuralının kullandığı yamuk. Yamuğun alanı 3'tür. Eğri (0, 4) ile (1, 2) noktalarını birleştiren kirişin üstünde kaldığından yamuk integrali eksik ölçer; turuncu ince bölgenin alanı gerçek hata olan $\pi - 3 \approx 0{,}141592654$'tür.

Hata için üst sınır. Türevler

$$f'(x) = -\frac{8x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(x) = \frac{8(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

olduğundan

$$\left| -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \right| = \frac{1}{12} \left| \frac{8(3\xi^2-1)}{(1+\xi^2)^3} \right| \le \frac{1}{12} \max_{0 \le x \le 1} \left| \frac{8(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} \right|$$

olur. Bu maksimumu bulmak için f'''nin türevine bakalım:

$$f'''(x) = \frac{96x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = 0 \Longrightarrow x = 0, 1, -1.$$

$-1 \notin [0,1]$'dir; ayrıca $(0,1)$'de $f''' > 0$ olduğundan f'' bu aralıkta artandır. Dolayısıyla $|\, f'' \,|$'nin en büyük değeri uç noktalardaki

$$|\, f''(0) \,| = \left| \frac{8(0-1)}{(1+0)^3} \right| = 8, \qquad |\, f''(1) \,| = \left| \frac{8(3-1)}{(1+1)^3} \right| = 2$$

değerlerinden büyük olanı, yani 8'dir. Buna göre

$$\left| \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx - 3 \right| \le \frac{8}{12} = 0{,}666666667$$

gerçeklenir.

Gerçek hata. Gerçek değer

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = 4\arctan(1) = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi = 3{,}141592654$$

olduğundan gerçek mutlak hata $\mid 3{,}141592654 - 3 \mid = 0{,}141592654$'tür. Bu değer, bulduğumuz $0{,}666666667$ sınırının altındadır.

■

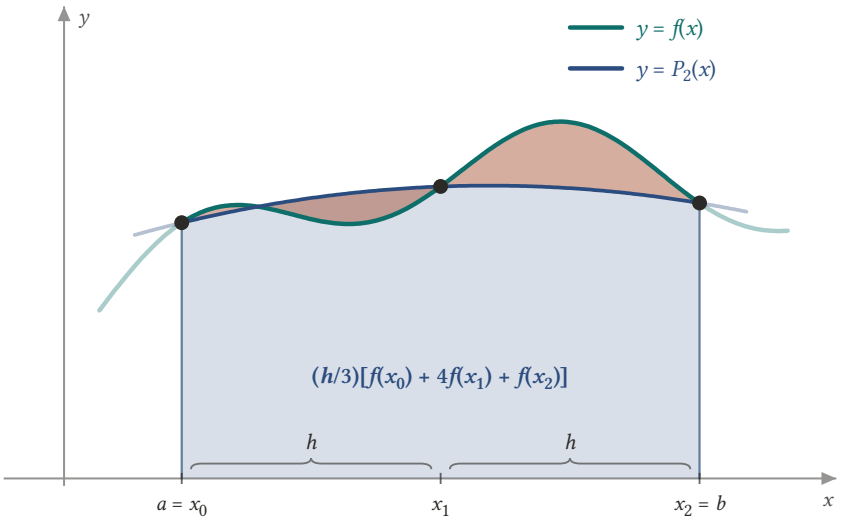
11.3 Simpson Kuralı

Yamuk Kuralında f'yi bir doğruyla değiştirmiştik. Şimdi $n = 2$ alıp f'yi üç noktadan geçen parabolle değiştiriyoruz: $x_0 = a$, $x_2 = b$, $h = \frac{x_2 - x_0}{2} = \frac{b-a}{2}$ ve aralığın tam ortası $x_1 = x_0 + h$'dir.

Önerme 11.2 (Simpson Kuralı). *$f \in C^4[x_0, x_2]$, $h = \frac{x_2-x_0}{2}$ ve $x_1 = x_0 + h$ olsun. Öyle bir $\xi \in (x_0, x_2)$ sayısı vardır ki*

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[\, f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\,\right] - \frac{h^5}{90}\,f^{(4)}(\xi)$$

olur.



Şekil 11.3: Simpson Kuralı f'yi üç düğümden geçen y = P₂(x) parabolüyle değiştirir. Taralı alan formülün ana kısmıdır; eğri ile parabol arasında kalan bölgeler hatayı gösterir.

İspat.

Ağırlıklar. *(1)'deki $a_k = \int_{x_0}^{x_2} L_k(x)\,dx$ integrallerinde $x = x_0 + th$ yazalım. $x - x_i = (t-i)h$, $x_k - x_i = (k-i)h$, $dx = h\,dt$ olur ve t, 0'dan 2'ye gider:*

$$a_0 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,dx = h\int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{2}\,dt = h\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{h}{3},$$

$$a_1 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,dx = h\int_0^2 \frac{t(t-2)}{-1}\,dt = h\cdot\frac{4}{3} = \frac{4h}{3},$$

$$a_2 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,dx = h\int_0^2 \frac{t(t-1)}{2}\,dt = h\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{h}{3}.$$

Burada

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^2 (t^2-3t+2)\,dt = \frac{8}{3}-6+4 = \frac{2}{3},$$
$$\int_0^2 (t^2-2t)\,dt = \frac{8}{3}-4 = -\frac{4}{3},$$
$$\int_0^2 (t^2-t)\,dt = \frac{8}{3}-2 = \frac{2}{3}$$

integralleri kullanıldı. Böylece formülün ana kısmı $\frac{h}{3}\,[\,f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\,]$*'dir.*
Hata terimi. *(1)'deki hata teriminde* $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ *çarpımı* x_1*'de işaret değiştirir; bu yüzden ağırlıklı ortalama değer teoremini doğrudan kullanamayız. Bunun yerine* $0\le s\le h$ *için*

$$G(s) = \int_{x_1-s}^{x_1+s} f(x)\,dx - \frac{s}{3}\,[\,f(x_1-s)+4f(x_1)+f(x_1+s)\,]$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $G(h)$ *tam olarak aradığımız hatadır, çünkü* $x_1-h=x_0$ *ve* $x_1+h=x_2$*'dir. Analizin temel teoremiyle türev alırsak*

$$G'(s) = \frac{2}{3}\,[\,f(x_1+s)+f(x_1-s)\,] - \frac{4}{3}f(x_1) - \frac{s}{3}\,[\,f'(x_1+s)-f'(x_1-s)\,],$$
$$G''(s) = \frac{1}{3}\,[\,f'(x_1+s)-f'(x_1-s)\,] - \frac{s}{3}\,[\,f''(x_1+s)+f''(x_1-s)\,],$$
$$G'''(s) = -\frac{s}{3}\,[\,f'''(x_1+s)-f'''(x_1-s)\,]$$

bulunur ve $G(0)=G'(0)=G''(0)=0$*'dır.* $s>0$ *için ortalama değer teoremini (Teorem 1.4)* f'''*'ye* $[x_1-s,x_1+s]$*'de uygularsak bu aralıkta bir* η *için*

$$f'''(x_1+s)-f'''(x_1-s) = 2s\,f^{(4)}(\eta), \qquad G'''(s) = -\frac{2s^2}{3}\,f^{(4)}(\eta)$$

olur. $f^{(4)}$ *sürekli olduğundan* $[x_0,x_2]$*'de en küçük değeri* m*'yi ve en büyük değeri* M*'yi alır (Teorem 1.5). Dolayısıyla*

$$-\frac{2M}{3}\,s^2 \le G'''(s) \le -\frac{2m}{3}\,s^2.$$

Bu eşitsizliği 0*'dan* s*'ye üç kez integralleyelim;* $G''(0)=G'(0)=G(0)=0$ *olduğundan sırasıyla*

$$-\frac{2M}{9}\,s^3 \le G''(s) \le -\frac{2m}{9}\,s^3,$$
$$-\frac{M}{18}\,s^4 \le G'(s) \le -\frac{m}{18}\,s^4,$$
$$-\frac{M}{90}\,s^5 \le G(s) \le -\frac{m}{90}\,s^5$$

elde edilir. $s=h$ *alıp* $C=-\frac{90\,G(h)}{h^5}$ *dersek* $m\le C\le M$ *olur.*

- $m<C<M$ *ise ara değer teoremine (Teorem 1.7) göre* $f^{(4)}$*'ün en küçük ve en büyük değerini aldığı iki noktanın arasında, dolayısıyla* (x_0,x_2)*'de,* $f^{(4)}(\xi)=C$ *olan bir* ξ *vardır.*
- $C=M$ *olsun.* $\varphi(s)=G(s)+\frac{M}{90}s^5$ *dersek* $\varphi'''\ge 0$ *ve* $\varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=0$ *olduğundan* φ'', φ' *ve* φ *negatif olmayan, azalmayan fonksiyonlardır.* $\varphi(h)=0$ *olduğundan* $[0,h]$ *üzerinde* $\varphi\equiv 0$*, dolayısıyla* $\varphi'''\equiv 0$ *olur; yani yukarıdaki eşitsizliklerin hepsi eşitliğe döner. Özellikle* $s=h$*'de* $f'''(x_2)-f'''(x_0)=2Mh$*, yani* $\int_{x_0}^{x_2}\big(\,M-f^{(4)}(x)\,\big)\,dx=0$ *olur. Sürekli ve negatif olmayan* $M-f^{(4)}$ *fonksiyonu özdeş olarak sıfırdır, bu yüzden* $\xi=x_1$ *alınabilir.* $C=m$ *durumu aynı biçimde gösterilir.*

Her durumda $G(h)=-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$ *olur. Ana kısımla birleştirince*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[\, f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \,\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in (x_0, x_2)$$

elde edilir.
■

Yani Simpson Kuralı, f'nin altındaki alanı $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ noktalarından geçen parabolün altındaki alanla değiştirir. Hata terimi $f^{(4)}$ içerdiğinden kural, ikinci dereceden interpolasyonla kurulduğu hâlde derecesi en çok 3 olan her polinom için integrali tam verir. Yamuk Kuralı ise ancak birinci dereceye kadar tamdır.
Aynı formüle Taylor açılımıyla da ulaşılabilir. f'yi x_1 civarında üçüncü dereceden Taylor polinomu ve kalan terimiyle (Teorem 1.9) yazıp $[x_0, x_2]$'de integrallersek tek dereceli terimler simetriden dolayı sıfır olur. Kalan terim $\frac{1}{24} f^{(4)}(\xi(x))\,(x - x_1)^4$ biçimindedir. $x \neq x_1$ için $f^{(4)}(\xi(x)) = \frac{24\,(f(x) - P_3(x))}{(x - x_1)^4}$ olduğundan bu oran x'in sürekli fonksiyonudur ve x_1'de $f^{(4)}(x_1)$ değeriyle sürekli genişler. Kalan terime $(x - x_1)^4 \geq 0$ ağırlığıyla Teorem 1.8 uygulanınca

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(x_1) + \frac{h^5}{60} f^{(4)}(\xi_1)$$

bulunur. $f''(x_1)$ yerine İkinci Türev İçin Orta Nokta Formülündeki (Önerme 10.4) ifade konursa

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[\, f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \,\right] + \frac{h^5}{60} f^{(4)}(\xi_1) - \frac{h^5}{36} f^{(4)}(\xi_2)$$

elde edilir. Bu yol ana kısmı ve hatanın h^5 mertebesini hızla verir; $\frac{1}{60} - \frac{1}{36} = -\frac{1}{90}$ olduğundan sabit de doğrudur. Ancak ξ_1 ile ξ_2 farklı olabileceği için hatanın tek bir ξ ile $-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$ biçiminde yazılabileceğini yukarıdaki ispat garanti eder.

Örnek 11.2 (Simpson Kuralıyla π'ye yaklaşım). Simpson Kuralını kullanarak $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ integrali için bir yaklaşımda bulunalım. Mutlak hata için bir üst sınır belirleyip gerçek mutlak hatayı bulalım. Virgülden sonra 9. basamağa yuvarlama yapalım.

Çözüm.
$f(x) = \frac{4}{1+x^2}$, $x_0 = 0$, $x_2 = 1$, $h = \frac{1-0}{2} = 0{,}5$ ve $x_1 = 0{,}5$'tir. Fonksiyon değerleri

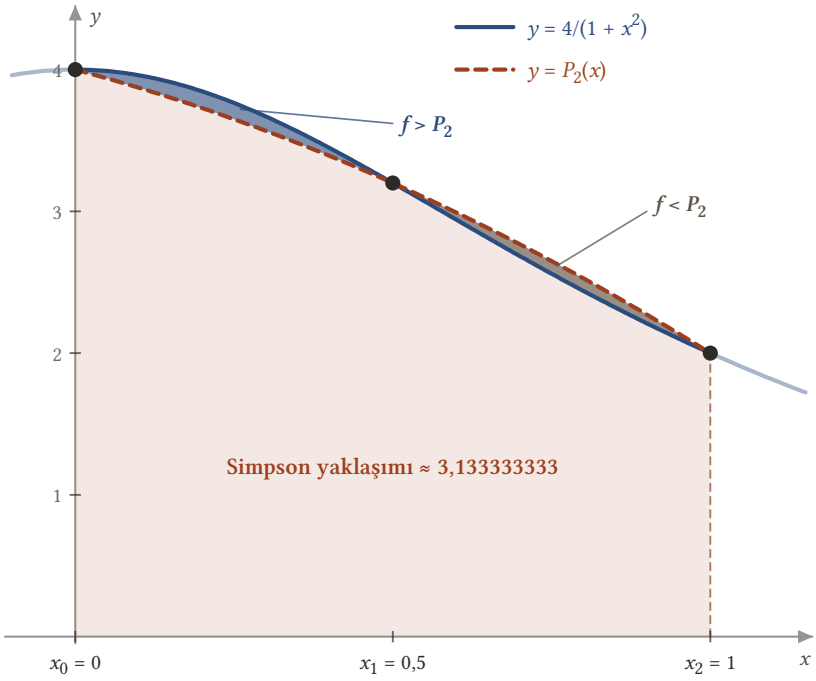
$$f(0) = 4, \qquad f(0{,}5) = \frac{4}{1{,}25} = 3{,}2, \qquad f(1) = 2$$

olduğundan

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx \approx \frac{0{,}5}{3}\left[\, 4 + 4 \cdot 3{,}2 + 2 \,\right] = \frac{18{,}8}{6} = 3{,}133333333$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.4: $f(x) = 4/(1 + x^2)$ eğrisi ve (0, 4), (0,5; 3,2), (1, 2) düğümlerinden geçen $P_2(x) = 4 - 1{,}2x - 0{,}8x^2$ parabolü (kesikli). Parabolün altındaki alan Simpson yaklaşımıdır. (0; 0,5) aralığında f parabolün üstünde, (0,5; 1) aralığında altındadır; iki ince bölgenin işaretli toplamı gerçek hata olan $\pi - 3{,}133333333 \approx 0{,}008259$'dur.

Hata için üst sınır. Hata terimi $-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$ olduğundan $f^{(4)}$'e ihtiyacımız var:

$$f^{(4)}(x) = \frac{96(5x^4 - 10x^2 + 1)}{(1 + x^2)^5}, \qquad f^{(5)}(x) = -\frac{960x(x^2 - 3)(3x^2 - 1)}{(1 + x^2)^6}.$$

$f^{(5)}$'in $[0, 1]$'deki sıfırları $x = 0$ ve $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$'tür. Uç noktalarla birlikte

$$f^{(4)}(0) = 96, \qquad f^{(4)}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{81}{2}, \qquad f^{(4)}(1) = -12$$

olduğundan $\max_{0 \le x \le 1} | f^{(4)}(x) | = 96$'dır. Buna göre

$$\left| -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \right| \le \frac{(0{,}5)^5}{90} \cdot 96 = \frac{1}{30} = 0{,}033333333.$$

Gerçek hata. Gerçek değer $\pi = 3{,}141592654$ olduğundan gerçek mutlak hata

$$| \, 3{,}141592654 - 3{,}133333333 \, | = 0{,}008259321$$

olur. Yamuk Kuralının hatası 0,141592654'tü (Örnek 11.1); yalnız bir fonksiyon değeri daha hesaplayarak hatayı yaklaşık 17 kat küçülttük.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

11.4 Newton-Cotes Formülleri

Yamuk ve Simpson kuralları, Newton-Cotes formülleri olarak bilinen nümerik integrasyon tekniklerinin özel hâlleridir. Bu formüllerde düğümler eşit aralıklıdır ve iki şekli vardır: aralığın uç noktalarını kullanan kapalı formüller ve kullanmayan açık formüller.

11.4.1 Kapalı Newton-Cotes Formülleri

Yamuk ve Simpson kurallarında uç noktalar düğümdü. Aynı fikri $n+1$ eşit aralıklı noktaya genelleştirelim.

Tanım 11.2 (Kapalı Newton-Cotes formülü). $n \geq 1$, $h = \frac{b-a}{n}$ ve $k = 0, 1, \ldots, n$ için $x_k = x_0 + kh$ olsun; böylece $x_0 = a$ ve $x_n = b$'dir.

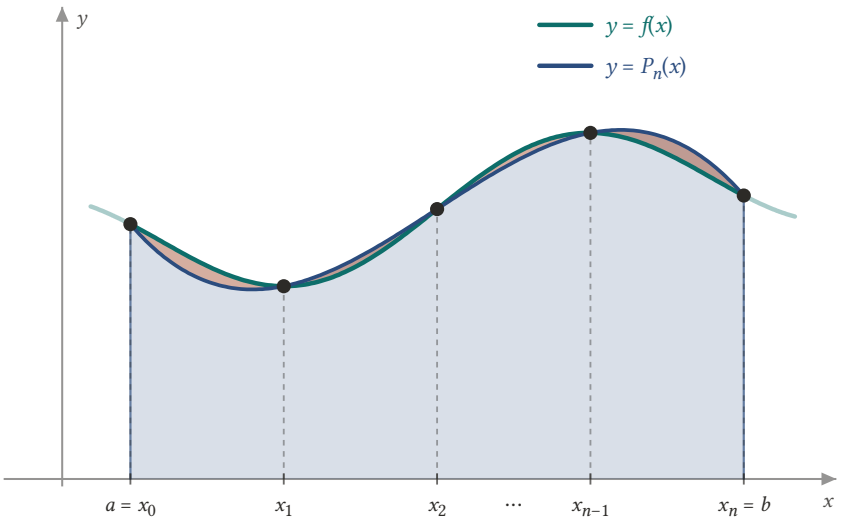
$$a_k = \int_{x_0}^{x_n} L_k(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\,dx$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_k\, f(x_k)$$

yaklaşımına **$(n+1)$-nokta Kapalı Newton-Cotes formülü** denir.

Yani kapalı formül, $[a, b]$'yi n eşit parçaya bölen $n+1$ noktanın hepsini, uç noktalar dahil, düğüm olarak kullanan integral formülüdür. $n = 1$ Yamuk Kuralını, $n = 2$ Simpson Kuralını verir.



Şekil 11.5: Kapalı formülde $[a, b]$ aralığını n eşit parçaya bölen $n+1$ noktanın hepsi, uç noktalar dahil, düğümdür. f'nin yerine bu noktalardan geçen $y = P_n(x)$ polinomunun integrali alınır; taralı alan formülün değeridir.

Ağırlıkları hesaplamak için, Simpson Kuralının ispatındaki gibi $x = x_0 + th$ yazalım. $x - x_i = (t-i)h$, $x_k - x_i = (k-i)h$ ve $dx = h\,dt$ olur, t de 0'dan n'ye gider:

$$a_k = h \int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{t-i}{k-i}\,dt. \tag{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Demek ki a_k, h ile yalnız n'ye ve k'ye bağlı bir sayının çarpımıdır. $t \mapsto n-t$ dönüşümü L_k'yi L_{n-k}'ye götürdüğünden $a_k = a_{n-k}$'dır. Ayrıca $f \equiv 1$ için formül tam olduğundan ağırlıkların toplamı $b-a = nh$'dir.
Kapalı Newton-Cotes formülleriyle hesaplanan integrallerin hata terimleri hakkındaki bilgiyi aşağıdaki teorem verir.

Teorem 11.1 (Kapalı Newton-Cotes formüllerinin hata terimi). *$x_0 = a$, $x_n = b$ ve $h = \frac{b-a}{n}$ olmak üzere $(n+1)$-nokta Kapalı Newton-Cotes formülünü ele alalım.*

1. *n çift tam sayı ve $f \in C^{n+2}[a,b]$ ise*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k\, f(x_k) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,dt$$

   olacak şekilde bir $\xi \in (a,b)$ sayısı vardır.
2. *n tek tam sayı ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ ise*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k\, f(x_k) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,dt$$

   olacak şekilde bir $\xi \in (a,b)$ sayısı vardır.

Teorem, n çift olduğunda hata teriminde bir mertebe kazanıldığını söyler: hata $f^{(n+1)}$ yerine $f^{(n+2)}$ içerir, dolayısıyla formül derecesi en çok $n+1$ olan polinomlar için de tamdır. Simpson Kuralında gördüğümüz durum buydu. Teoremin genel ispatı uzun bir hesap gerektirdiğinden burada vermiyoruz; $n=1$ ve $n=2$ durumlarını Yamuk ve Simpson kurallarında ayrıca ispatladık. Yaklaşık integral hesaplarında çok kullanılan üç formülü şimdi bu teoremden çıkaralım.

Sonuç 11.1 (Yamuk, Simpson ve Simpson 3/8 kuralları). *$h = \frac{b-a}{n}$ ve $x_k = x_0 + kh$ olsun. Yamuk Kuralında $f \in C^2[x_0,x_1]$, Simpson Kuralında $f \in C^4[x_0,x_2]$, Simpson 3/8 Kuralında $f \in C^4[x_0,x_3]$ ise:*

- $n=1$, ***Yamuk Kuralı:***

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,\left[\, f(x_0) + f(x_1)\,\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi), \qquad x_0 < \xi < x_1.$$

- $n=2$, ***Simpson Kuralı:***

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\,\left[\, f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\,\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \qquad x_0 < \xi < x_2.$$

- $n=3$, ***Simpson 3/8 Kuralı:***

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\,\left[\, f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\,\right] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi), \qquad x_0 < \xi < x_3.$$

> ***İspat.***
> *Her n için ağırlıkları (2) ile, hata terimini Teorem 11.1 ile hesaplıyoruz.*
> ***$n=1$.*** *(2)'den*
>
> $$a_0 = h\int_0^1 \frac{t-1}{0-1}\,dt = h\int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{h}{2}, \qquad a_1 = h\int_0^1 \frac{t-0}{1-0}\,dt = \frac{h}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

n tek olduğundan teoremin 2. kısmı kullanılır:

$$\int_0^1 t(t-1)\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}, \qquad \frac{h^3 f''(\xi)}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi).$$

$n = 2$. *Ağırlıkları Simpson Kuralının ispatında aynı $x = x_0 + th$ dönüşümüyle bulmuştuk:$a_0 = a_2 = \frac{h}{3}$, $a_1 = \frac{4h}{3}$. n çift olduğundan teoremin 1. kısmı kullanılır:*

$$\int_0^2 t^2(t-1)(t-2)\,dt = \int_0^2 (t^4 - 3t^3 + 2t^2)\,dt = \frac{32}{5} - 12 + \frac{16}{3} = -\frac{4}{15},$$

$$\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \left(-\frac{4}{15}\right) = -\frac{4h^5}{360} f^{(4)}(\xi) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi).$$

$n = 3$. *(2)'den*

$$\begin{aligned} a_0 &= h \int_0^3 \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(-1)(-2)(-3)}\,dt = -\frac{h}{6} \int_0^3 (t^3 - 6t^2 + 11t - 6)\,dt \\ &= -\frac{h}{6}\left(\frac{81}{4} - 54 + \frac{99}{2} - 18\right) = -\frac{h}{6} \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{3h}{8}, \\ a_1 &= h \int_0^3 \frac{t(t-2)(t-3)}{(1)(-1)(-2)}\,dt = \frac{h}{2} \int_0^3 (t^3 - 5t^2 + 6t)\,dt \\ &= \frac{h}{2}\left(\frac{81}{4} - 45 + 27\right) = \frac{h}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9h}{8} \end{aligned}$$

ve simetriden $a_2 = a_1 = \frac{9h}{8}$, $a_3 = a_0 = \frac{3h}{8}$'dir. Ağırlıkların toplamı $\frac{3h+9h+9h+3h}{8} = 3h$'dir, beklendiği gibi. Bu ağırlıklar Simpson 3/8 Kuralının ana kısmını verir. n tek olduğundan teoremin 2. kısmı kullanılır:

$$\begin{aligned} \int_0^3 t(t-1)(t-2)(t-3)\,dt &= \int_0^3 (t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t)\,dt \\ &= \frac{243}{5} - \frac{243}{2} + 99 - 27 = -\frac{9}{10}, \end{aligned}$$

$$\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \left(-\frac{9}{10}\right) = -\frac{9h^5}{240} f^{(4)}(\xi) = -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi).$$

■

Yani Simpson 3/8 Kuralı dört noktadan geçen kübik polinomun integralidir; hatası Simpson Kuralındaki gibi $h^5 f^{(4)}$ mertebesindedir. Aynı $[a, b]$ aralığında Simpson Kuralı $h = \frac{b-a}{2}$, Simpson 3/8 Kuralı $h = \frac{b-a}{3}$ kullanır. Hata sabitlerinin oranı

$$\frac{\frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5}{\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5} = \frac{270}{80} \cdot \frac{32}{243} = \frac{4}{9}$$

olduğundan, $f^{(4)}$ aralıkta fazla değişmiyorsa Simpson 3/8 Kuralının hatası Simpson Kuralınınkinin yaklaşık $\frac{4}{9}$'u kadardır.

Örnek 11.3 (Kapalı Newton-Cotes formülleriyle sinüs integrali). Kapalı Newton-Cotes formüllerini $n = 1, 2, 3$ için kullanarak $\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx$ integrali için yaklaşımlarda bulunalım ve bunları gerçek değerle karşılaştıralım. Virgülden sonra 9. basamağa yuvarlama yapalım.

Çözüm.
$f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$'tür.
$n = 1$ (Yamuk Kuralı). $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $h = \frac{\pi}{4}$:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx \approx \frac{h}{2}\,[\,f(x_0)+f(x_1)\,] = \frac{\pi}{8}\Big[\sin 0+\sin\frac{\pi}{4}\Big] = 0{,}277680184.$$

$n=2$ (Simpson Kuralı). $x_0=0$, $x_2=\frac{\pi}{4}$, $h=\frac{\pi/4}{2}=\frac{\pi}{8}$, $x_1=\frac{\pi}{8}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx &\approx \frac{h}{3}\,[\,f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\,]\\ &= \frac{\pi}{24}\Big[\sin 0+4\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{4}\Big] = 0{,}292932638.\end{aligned}$$

$n=3$ (Simpson 3/8 Kuralı). $x_0=0$, $x_3=\frac{\pi}{4}$, $h=\frac{\pi/4}{3}=\frac{\pi}{12}$, $x_1=\frac{\pi}{12}$, $x_2=2\cdot\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx &\approx \frac{3h}{8}\,[\,f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\,]\\ &= \frac{\pi}{32}\Big[\sin 0+3\sin\frac{\pi}{12}+3\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\Big]\\ &= 0{,}292910703.\end{aligned}$$

Karşılaştırma. Gerçek değer

$$\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx = \cos 0-\cos\frac{\pi}{4} = 1-\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}292893219$$

olduğundan mutlak hatalar şöyledir:

$$\begin{aligned} n=1:&\quad |\,0{,}292893219-0{,}277680184\,| = 0{,}015213035,\\ n=2:&\quad |\,0{,}292893219-0{,}292932638\,| = 0{,}000039419,\\ n=3:&\quad |\,0{,}292893219-0{,}292910703\,| = 0{,}000017484.\end{aligned}$$

En iyi yaklaşımı Simpson 3/8 Kuralı ile elde ettik. Simpson 3/8 Kuralının hatasının Simpson Kuralınınkine oranı $\frac{0{,}000017484}{0{,}000039419}\approx 0{,}44$'tür; bu, yukarıda bulduğumuz $\frac{4}{9}\approx 0{,}44$ oranıyla uyumludur.
■

11.4.2 Açık Newton-Cotes Formülleri

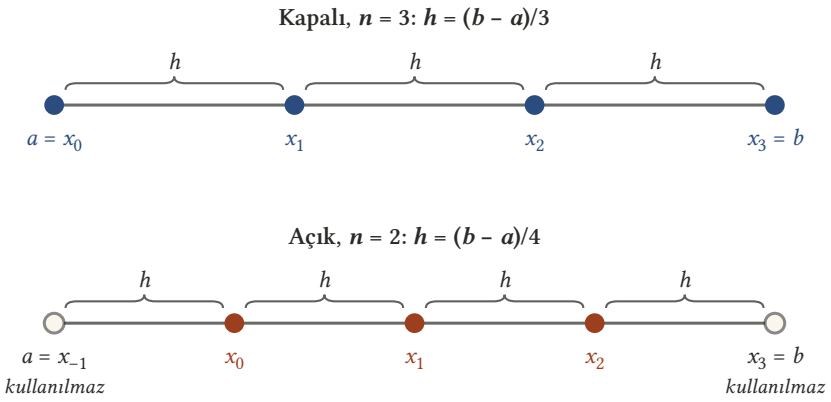
Kapalı formüller f'yi aralığın uç noktalarında da hesaplar. f uç noktada tanımsızsa ya da orada hesaplanması zorsa, düğümleri yalnız aralığın içinden seçmek gerekir.

Tanım 11.3 (Açık Newton-Cotes formülü). $n\ge 0$, $h=\frac{b-a}{n+2}$, $x_0=a+h$ ve $k=0,1,\ldots,n$ için $x_k=x_0+kh$ olsun; böylece $x_n=b-h$'dir. Ayrıca $x_{-1}=a$ ve $x_{n+1}=b$ yazalım. $a_k=\int_a^b L_k(x)\,dx$ olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} a_k\,f(x_k)$$

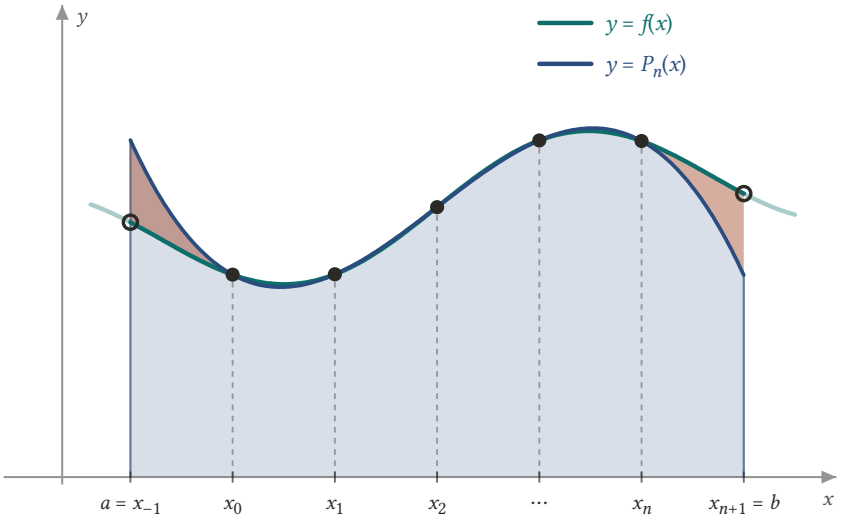
yaklaşımına **$(n+1)$-noktalı Açık Newton-Cotes formülü** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.6: Kapalı formülde ($n = 3$) $[a, b]$ üç eşit parçaya bölünür ve uç noktalar dahil dört nokta düğümdür. Açık formülde ($n = 2$) aralık dört eşit parçaya bölünür; uç noktalar $x_{-1} = a$ ve $x_3 = b$ kullanılmaz, düğümler yalnız üç iç noktadır.

Yani $[a, b]$ aralığı $n + 2$ eşit parçaya bölünür ve uç noktalar dışarıda bırakılarak kalan $n + 1$ iç nokta düğüm olur. L_k polinomları yine yalnız $x_0, \ldots, x_n$ düğümleriyle kurulur, ama integral bütün $[a, b]$ üzerinden alınır.



Şekil 11.7: Açık formülde $[a, b]$ aralığı $n + 2$ eşit parçaya bölünür ve yalnız $x_0, \ldots, x_n$ iç noktaları düğümdür; f uç noktalarda hesaplanmaz (boş daireler). P_n yine de bütün $[a, b]$ üzerinden integrallenir.

Ağırlıklar yine $x = x_0 + th$ ile hesaplanır. Bu kez $x = a = x_{-1}$ noktası $t = -1$'e, $x = b = x_{n+1}$ noktası $t = n + 1$'e karşılık gelir:

$$a_k = h \int_{-1}^{n+1} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{t - i}{k - i}\, dt. \tag{3}$$

Açık Newton-Cotes formülleriyle hesaplanan integrallerin hata terimleri hakkındaki bilgiyi aşağıdaki teorem verir.

Teorem 11.2 (Açık Newton-Cotes formüllerinin hata terimi). *$k = 0, 1, \ldots, n$ için $h = \frac{b-a}{n+2}$, $x_0 = a + h$, $x_n = b - h$, $x_k = x_0 + kh$, $x_{-1} = a$ ve $x_{n+1} = b$ olmak üzere $(n + 1)$-noktalı Açık Newton-Cotes formülünü ele alalım.*

 CC BY-NC-SA 4.0

1. *n çift tam sayı ve $f \in C^{n+2}[a,b]$ ise*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k\, f(x_k) + \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_{-1}^{n+1} t^2(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,dt$$

   olacak şekilde bir $\xi \in (a,b)$ sayısı vardır.
2. *n tek tam sayı ve $f \in C^{n+1}[a,b]$ ise*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} a_k\, f(x_k) + \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_{-1}^{n+1} t(t-1)(t-2)\cdots(t-n)\,dt$$

   olacak şekilde bir $\xi \in (a,b)$ sayısı vardır.

Burada $n=0$ için $t^2(t-1)\cdots(t-n)$ çarpımı yalnız t^2'dir. Bu teoremin de genel ispatını vermiyoruz. Çok kullanılan üç açık formülü ondan çıkaralım.

Sonuç 11.2 (Orta Nokta Kuralı ve iki açık formül). *$h = \frac{b-a}{n+2}$, $x_k = x_0 + kh$, $x_{-1} = a$ ve $x_{n+1} = b$ olsun. $n=0$ ve $n=1$ için $f \in C^2[a,b]$, $n=2$ için $f \in C^4[a,b]$ ise:*

- $n=0$, ***Orta Nokta Kuralı:***

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h\, f(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi), \qquad x_{-1} < \xi < x_1.$$

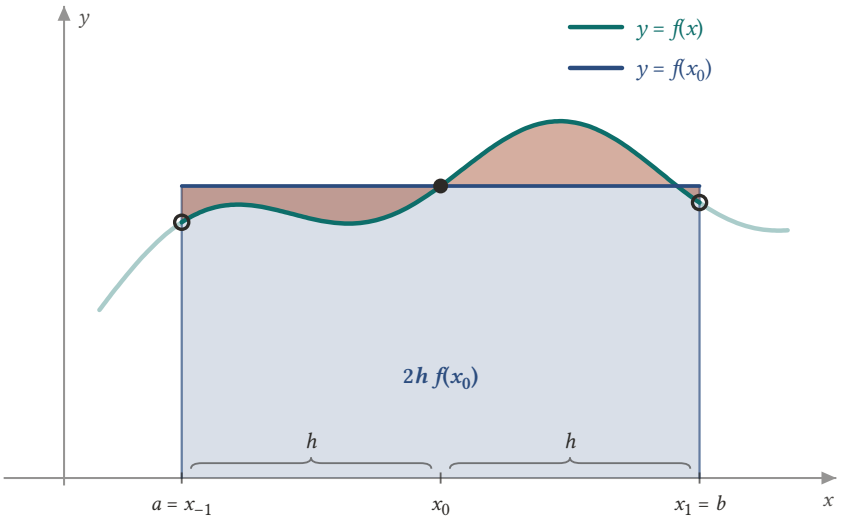
- $n=1$*:*

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}\,\left[\, f(x_0) + f(x_1)\,\right] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi), \qquad x_{-1} < \xi < x_2.$$

- $n=2$*:*

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}\,\left[\, 2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)\,\right] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi), \qquad x_{-1} < \xi < x_3.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.8: Orta Nokta Kuralı f'yi orta noktadaki değerine eşit sabitle değiştirir: taralı dikdörtgenin tabanı 2h, yüksekliği f(x₀)'dır. Eğri ile dikdörtgenin üst kenarı arasında kalan bölgeler hatayı gösterir.

İspat.
Her n için ağırlıkları (3) ile, hata terimini Teorem 11.2 ile hesaplıyoruz.
$n = 0$. *Tek düğüm olduğundan $L_0(x) = 1$ ve $a_0 = h\int_{-1}^{1} dt = 2h$'dir. n çift olduğundan teoremin 1. kısmı kullanılır:*

$$\int_{-1}^{1} t^2\,dt = \frac{2}{3}, \qquad \frac{h^3 f''(\xi)}{2!}\cdot\frac{2}{3} = \frac{h^3}{3}f''(\xi).$$

$n = 1$. *(3)'ten*

$$a_0 = h\int_{-1}^{2}\frac{t-1}{0-1}\,dt = h\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{2} = h\left(0 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3h}{2},$$

$$a_1 = h\int_{-1}^{2}\frac{t-0}{1-0}\,dt = h\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{2} = h\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3h}{2}.$$

n tek olduğundan teoremin 2. kısmı kullanılır:

$$\int_{-1}^{2} t(t-1)\,dt = \frac{8+1}{3} - \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{h^3 f''(\xi)}{2!}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3h^3}{4}f''(\xi).$$

$n = 2$. $\int_{-1}^{3} t^2\,dt = \frac{28}{3}$, $\int_{-1}^{3} t\,dt = 4$ *ve* $\int_{-1}^{3} dt = 4$ *olduğundan (3)'ten*

$$a_0 = h\int_{-1}^{3}\frac{(t-1)(t-2)}{2}\,dt = \frac{h}{2}\left(\frac{28}{3} - 12 + 8\right) = \frac{8h}{3},$$

$$a_1 = h\int_{-1}^{3}\frac{t(t-2)}{-1}\,dt = -h\left(\frac{28}{3} - 8\right) = -\frac{4h}{3},$$

$$a_2 = h\int_{-1}^{3}\frac{t(t-1)}{2}\,dt = \frac{h}{2}\left(\frac{28}{3} - 4\right) = \frac{8h}{3}$$

bulunur; ana kısım $\frac{4h}{3}\left[\,2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)\,\right]$'dir. n çift olduğundan teoremin 1. kısmı kullanılır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} t^2(t-1)(t-2)\,dt &= \int_{-1}^{3} (t^4 - 3t^3 + 2t^2)\,dt \\ &= \frac{244}{5} - 60 + \frac{56}{3} = \frac{112}{15},\end{aligned}$$

$$\frac{h^5 f^{(4)}(\xi)}{4!} \cdot \frac{112}{15} = \frac{112h^5}{360} f^{(4)}(\xi) = \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi).$$

■

Yani açık formüllerin hata terimleri kapalı formüllerinkinin tersi işaretlidir. Orta Nokta Kuralı, $[a,b]$'nin orta noktasındaki değeri aralığın uzunluğuyla çarpar. Aynı $[a,b]$ aralığında Yamuk Kuralı $h = b-a$, Orta Nokta Kuralı $h = \frac{b-a}{2}$ kullandığından hata terimleri $-\frac{(b-a)^3}{12} f''$ ve $\frac{(b-a)^3}{24} f''$ olur. Demek ki tek düğümlü Orta Nokta Kuralının hatası kabaca Yamuk Kuralınınkinin yarısı kadardır ve ters işaretlidir. $n = 2$ formülünde ise bir ağırlık negatiftir.

Örnek 11.4 (Uç noktalarda tanımsız bir integrand). $n = 2$ olmak üzere Açık Newton-Cotes formülünü kullanarak $\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ integrali için bir yaklaşımda bulunalım.

Çözüm.
$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$ fonksiyonu $x = \pm 1$'de tanımsızdır, bu yüzden kapalı formüller kullanılamaz; açık formül uç noktalardaki değerlere ihtiyaç duymaz.
$x_{-1} = a = -1$, $x_{n+1} = x_3 = b = 1$ ve

$$h = \frac{b-a}{n+2} = \frac{1-(-1)}{4} = 0{,}5$$

olduğundan düğümler

$$\begin{aligned}x_0 &= -1 + 0{,}5 = -0{,}5, \\ x_1 &= -1 + 2(0{,}5) = 0, \\ x_2 &= -1 + 3(0{,}5) = 0{,}5\end{aligned}$$

olur. f çift fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}f(-0{,}5) = f(0{,}5) &= \frac{\cos(0{,}5)}{\sqrt{1-0{,}25}} = \frac{0{,}877582562}{0{,}866025404} = 1{,}013345057, \\ f(0) &= 1\end{aligned}$$

bulunur. $n = 2$ açık formülünden (Sonuç 11.2)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &\approx \frac{4h}{3}\left[\, 2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2) \,\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[\, 2{,}026690113 - 1 + 2{,}026690113 \,\right] \\ &= \frac{2}{3} \cdot 3{,}053380226 = 2{,}035586817\end{aligned}$$

elde edilir.
Bu yaklaşımın hatası hakkında Teorem 11.2 bir şey söylemez: f, ± 1'e yaklaşırken sınırsız büyür, dolayısıyla $C^4[-1,1]$'de değildir. Gerçekten $x = \sin\theta$ dönüşümüyle integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\sin\theta)\,d\theta \approx 2{,}403939431$$

olur ve mutlak hata yaklaşık $0{,}368352614$'tür. Açık formül böyle bir integrale uygulanabilir, ama hata teriminin varsayımları sağlanmadığında yaklaşımın iyi olacağı garanti değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

11.5 Alıştırmalar

İlk beş alıştırmada $\int_0^2 f(x)\,dx$ integraline Yamuk ve Simpson kurallarıyla yaklaşıp sonuçları gerçek değerle karşılaştırıyoruz; virgülden sonra 3. basamağa yuvarlıyoruz. Son iki alıştırmada π integraline açık ve kapalı birer formül daha uyguluyoruz.

Alıştırma 11.1 (Yamuk ve Simpson kuralları: x^2). $f(x) = x^2$ için $\int_0^2 f(x)\,dx$ integraline Yamuk ve Simpson kurallarını kullanarak yaklaşımda bulununuz ve yaklaşımları gerçek değerle karşılaştırınız. Virgülden sonra 3. basamağa yuvarlayınız.

Çözüm.
$[0,2]$ aralığında Yamuk Kuralı için $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $h = 2$ ve

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\,\big[\, f(0) + f(2) \,\big] = f(0) + f(2);$$

Simpson Kuralı için $x_0 = 0$, $x_2 = 2$, $h = 1$, $x_1 = 1$ ve

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\,\big[\, f(0) + 4f(1) + f(2) \,\big]$$

olur. $f(x) = x^2$ için:

$$\begin{aligned} \text{Yamuk:} \quad & 0^2 + 2^2 = 4{,}000, \\ \text{Simpson:} \quad & \frac{1}{3}\,\big[\, 0^2 + 4\cdot 1^2 + 2^2 \,\big] = \frac{8}{3} = 2{,}667, \\ \text{Gerçek değer:} \quad & \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} = 2{,}667. \end{aligned}$$

Simpson Kuralı integrali tam verdi. Bunun nedeni hata teriminin $f^{(4)}$ içermesi ve $f(x) = x^2$'nin dördüncü türevinin sıfır olmasıdır. Yamuk Kuralının hatası da hata teriminden tam olarak okunur, çünkü $f'' = 2$ sabittir: $-\frac{h^3}{12} f''(\xi) = -\frac{8}{12}\cdot 2 = -\frac{4}{3}$ ve $4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.
■

Alıştırma 11.2 (Yamuk ve Simpson kuralları: x^4). $f(x) = x^4$ için $\int_0^2 f(x)\,dx$ integraline Yamuk ve Simpson kurallarını kullanarak yaklaşımda bulununuz ve yaklaşımları gerçek değerle karşılaştırınız. Virgülden sonra 3. basamağa yuvarlayınız.

Çözüm.
$[0,2]$'de Yamuk Kuralı $f(0) + f(2)$ $(h = 2)$, Simpson Kuralı $\frac{1}{3}\,\big[\, f(0) + 4f(1) + f(2) \,\big]$ $(h = 1)$ biçimindedir. $f(x) = x^4$ için:

$$\begin{aligned} \text{Yamuk:} \quad & 0^4 + 2^4 = 16{,}000, \\ \text{Simpson:} \quad & \frac{1}{3}\,\big[\, 0^4 + 4\cdot 1^4 + 2^4 \,\big] = \frac{20}{3} = 6{,}667, \\ \text{Gerçek değer:} \quad & \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32}{5} = 6{,}400. \end{aligned}$$

Bu kez Simpson Kuralı tam değildir, çünkü $f^{(4)} = 24 \neq 0$'dır. $f^{(4)}$ sabit olduğundan hata terimi gerçek hatayı tam verir: $-\frac{h^5}{90}\cdot 24 = -\frac{24}{90} = -0{,}267$ ve gerçekten $6{,}667 - 0{,}267 = 6{,}400$'dür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 11.3 (Yamuk ve Simpson kuralları: 1/(1 + x)). $f(x) = \frac{1}{1+x}$ için $\int_0^2 f(x)\,dx$ integraline Yamuk ve Simpson kurallarını kullanarak yaklaşımda bulununuz ve yaklaşımları gerçek değerle karşılaştırınız. Virgülden sonra 3. basamağa yuvarlayınız.

Çözüm.
$[0,2]$'de Yamuk Kuralı $f(0)+f(2)$ $(h=2)$, Simpson Kuralı $\frac{1}{3}\left[\, f(0)+4f(1)+f(2)\,\right]$ $(h=1)$ biçimindedir. $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(2)=\frac{1}{3}$ olduğundan:

$$\begin{aligned} \text{Yamuk:}\quad & 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=1{,}333,\\ \text{Simpson:}\quad & \frac{1}{3}\left[1+4\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]=\frac{10}{9}=1{,}111,\\ \text{Gerçek değer:}\quad & \ln(1+x)\Big|_0^2=\ln 3=1{,}099. \end{aligned}$$

Yamuk Kuralının hatası yaklaşık $0{,}235$, Simpson Kuralınınki yaklaşık $0{,}012$'dir.
■

Alıştırma 11.4 (Yamuk ve Simpson kuralları: sin x). $f(x)=\sin x$ için $\int_0^2 f(x)\,dx$ integraline Yamuk ve Simpson kurallarını kullanarak yaklaşımda bulununuz ve yaklaşımları gerçek değerle karşılaştırınız. Virgülden sonra 3. basamağa yuvarlayınız.

Çözüm.
$[0,2]$'de Yamuk Kuralı $f(0)+f(2)$ $(h=2)$, Simpson Kuralı $\frac{1}{3}\left[\, f(0)+4f(1)+f(2)\,\right]$ $(h=1)$ biçimindedir. $\sin 1 = 0{,}841470985$ ve $\sin 2 = 0{,}909297427$ olduğundan:

$$\begin{aligned} \text{Yamuk:}\quad & \sin 0+\sin 2=0{,}909,\\ \text{Simpson:}\quad & \frac{1}{3}\left[\,0+3{,}365883939+0{,}909297427\,\right]=1{,}425,\\ \text{Gerçek değer:}\quad & -\cos x\Big|_0^2=1-\cos 2=1{,}416. \end{aligned}$$

$[0,2]$'de $f''(x)=-\sin x\le 0$ olduğundan Yamuk Kuralının hata terimi $-\frac{h^3}{12}f''(\xi)$ pozitiftir: yamuk, eğrinin altında kalır ve integrali eksik verir.
■

Alıştırma 11.5 (Yamuk ve Simpson kuralları: e^x). $f(x)=e^x$ için $\int_0^2 f(x)\,dx$ integraline Yamuk ve Simpson kurallarını kullanarak yaklaşımda bulununuz ve yaklaşımları gerçek değerle karşılaştırınız. Virgülden sonra 3. basamağa yuvarlayınız.

Çözüm.
$[0,2]$'de Yamuk Kuralı $f(0)+f(2)$ $(h=2)$, Simpson Kuralı $\frac{1}{3}\left[\, f(0)+4f(1)+f(2)\,\right]$ $(h=1)$ biçimindedir. $e=2{,}718281828$ ve $e^2=7{,}389056099$ olduğundan:

$$\begin{aligned} \text{Yamuk:}\quad & e^0+e^2=8{,}389,\\ \text{Simpson:}\quad & \frac{1}{3}\left[\,1+10{,}873127314+7{,}389056099\,\right]=6{,}421,\\ \text{Gerçek değer:}\quad & e^x\Big|_0^2=e^2-1=6{,}389. \end{aligned}$$

$f''=e^x>0$ olduğundan Yamuk Kuralı integrali fazla verir; Simpson Kuralı da $f^{(4)}=e^x>0$ olduğundan fazla verir.
■

Beş alıştırmanın sonuçlarını bir tabloda toplayalım:

$f(x)$	x^2	x^4	$\frac{1}{x+1}$	$\sin x$	e^x
Gerçek Değer	2,667	6,400	1,099	1,416	6,389

 CC BY-NC-SA 4.0

$f(x)$	x^2	x^4	$\frac{1}{x+1}$	$\sin x$	e^x
Yamuk Kuralı	4,000	16,000	1,333	0,909	8,389
Simpson Kuralı	2,667	6,667	1,111	1,425	6,421

Her fonksiyonda Simpson Kuralı Yamuk Kuralından çok daha iyi bir yaklaşım verir; x^2 için hatası sıfırdır.

Alıştırma 11.6 (Orta Nokta Kuralıyla π'ye yaklaşım). Orta Nokta Kuralını kullanarak $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ integrali için bir yaklaşımda bulununuz. Mutlak hata için bir üst sınır belirleyip gerçek mutlak hatayı bulunuz ve sonucu Yamuk Kuralıyla karşılaştırınız. Virgülden sonra 9. basamağa yuvarlayınız.

Çözüm.
Orta Nokta Kuralı $n=0$ açık formülüdür: $h=\frac{b-a}{n+2}=\frac{1-0}{2}=0{,}5$, $x_{-1}=0$, $x_0=0{,}5$, $x_1=1$. Buna göre

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx \approx 2h\,f(x_0) = 1\cdot\frac{4}{1+0{,}25} = 3{,}2$$

bulunur.
Hata için üst sınır. Hata terimi $\frac{h^3}{3}f''(\xi)$'dir. $[0,1]$'de $\mid f''(x)\mid \le 8$ olduğunu Yamuk Kuralı örneğinde (Örnek 11.1) gördük. Dolayısıyla

$$\left|\frac{h^3}{3}f''(\xi)\right| \le \frac{(0{,}5)^3}{3}\cdot 8 = \frac{1}{3} = 0{,}333333333.$$

Gerçek hata. Gerçek mutlak hata

$$\mid 3{,}141592654 - 3{,}2 \mid = 0{,}058407346$$

olup sınırın altındadır. Yamuk Kuralının hatası $0{,}141592654$'tü; Orta Nokta Kuralı tek bir fonksiyon değeriyle daha küçük bir hata verdi ve integrali Yamuk Kuralının tersine fazla tahmin etti.
■

Alıştırma 11.7 (Simpson 3/8 Kuralıyla π'ye yaklaşım). Simpson 3/8 Kuralını kullanarak $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$ integrali için bir yaklaşımda bulununuz. Mutlak hata için bir üst sınır belirleyip gerçek mutlak hatayı bulunuz ve sonucu Simpson Kuralıyla karşılaştırınız. Virgülden sonra 9. basamağa yuvarlayınız.

Çözüm.
$n=3$ kapalı formülü için $h=\frac{1-0}{3}=\frac{1}{3}$ ve düğümler $x_0=0$, $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{2}{3}$, $x_3=1$'dir. Fonksiyon değerleri

$$f(0)=4,\quad f\!\left(\tfrac{1}{3}\right)=\frac{4}{10/9}=3{,}6,\quad f\!\left(\tfrac{2}{3}\right)=\frac{4}{13/9}=2{,}769230769,\quad f(1)=2$$

olduğundan, $\frac{3h}{8}=\frac{1}{8}$ ile

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx &\approx \frac{1}{8}\left[\,4+3\cdot 3{,}6+3\cdot 2{,}769230769+2\,\right]\\ &= \frac{25{,}107692308}{8} = 3{,}138461538\end{aligned}$$

bulunur.
Hata için üst sınır. Hata terimi $-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$'dir. $[0,1]$'de $\mid f^{(4)}(x)\mid \le 96$ olduğunu Simpson Kuralı örneğinde (Örnek 11.2) gördük. Dolayısıyla

$$\left|-\frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{3}{80}\cdot\frac{1}{243}\cdot 96 = \frac{2}{135} = 0{,}014814815.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Gerçek hata. Gerçek mutlak hata

$$| \, 3{,}141592654 - 3{,}138461538 \, | = 0{,}003131116$$

olur. Simpson Kuralının hatası 0,008259321'di (Örnek 11.2); Simpson 3/8 Kuralı bir fonksiyon değeri daha kullanarak hatayı yaklaşık 2,6 kat küçülttü.
■

Bu bölümde integrali, interpolasyon polinomunun integraliyle yaklaştık ve hatayı Lagrange hata teriminden elde ettik. Son bölümde ise verilere tam olarak uyan bir polinom yerine, veriye en iyi uyan basit bir eğri arayacağız: En Küçük Kareler Yöntemi.

 CC BY-NC-SA 4.0

12. En Küçük Kareler Yöntemi

Lagrange interpolasyonu bölümünde verilen noktaların hepsinden tam olarak geçen bir polinom kurduk. Veriler ölçümden geliyorsa bu her zaman istediğimiz şey değildir: ölçümler hatalıdır, nokta sayısı büyüktür ve bütün noktalardan geçen yüksek dereceli polinom verinin gidişini değil gürültüsünü izler. Bu durumda noktaların hepsinden geçmeyen ama hepsine "en yakın" duran basit bir fonksiyon, çoğunlukla bir doğru, aramak daha anlamlıdır.
"En yakın" sözünü ölçülebilir kılmanın en yaygın yolu, sapmaların karelerinin toplamını en küçük yapmaktır. En küçük kareler yöntemini Legendre 1805'te yayımladı; Gauss da yöntemi 1809'da yayımladı ve 1801'de cüce gezegen Ceres'in yörüngesini bu yöntemle hesaplamıştı.

12.1 Eğri Uydurma Problemi

Önce problemin kendisini adlandıralım.

Tanım 12.1 (Eğri uydurma). Bir fonksiyonun nokta nokta verilen değerlerinden, bu değerlere en uygun düşen başka bir fonksiyonun belirlenmesi ya da uygulamada kullanılan karmaşık fonksiyonların yerine geçebilecek ve nümerik hesapları kolaylaştıracak yeni fonksiyonların araştırılması problemine **eğri uydurma** denir.

Yani elimizde $(x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ gibi noktalar var ve bu noktaların gidişini iyi temsil eden, hesabı kolay bir fonksiyon arıyoruz. İnterpolasyondan farkı, uydurulan fonksiyonun noktalardan geçmek zorunda olmamasıdır.

12.2 En Küçük Kareler Yöntemi

Uydurulan eğrinin "en uygun" olduğunu söylemek için gerçek değerlerin eğriden ne kadar saptığını tek bir sayıyla ölçmemiz gerekir.

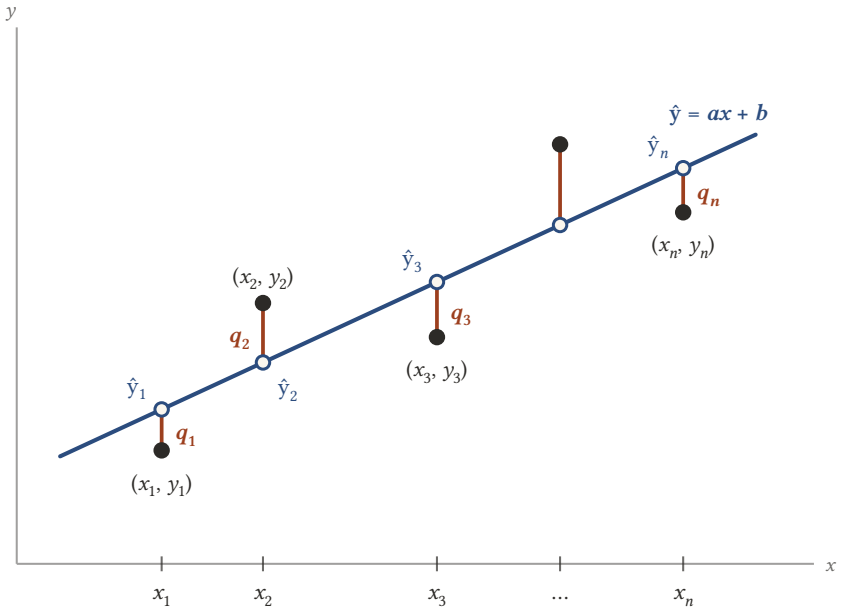
Tanım 12.2 (En küçük kareler yöntemi). $x_1, ..., x_n$ noktalarında gerçek değerler y_i, uydurulan doğru (ya da eğri) üzerindeki regresyon (tahmini) değerler $\hat{y}_i$ ve bunların farkları $q_i = y_i - \hat{y}_i$ olsun. Uydurulacak fonksiyonu

$$E = \sum_{i=1}^{n} q_i^2 \tag{1}$$

toplamını minimum yapacak biçimde seçme yöntemine **en küçük kareler yöntemi** denir. Bu yöntemle bulunan $\hat{y} = ax + b$ doğrusuna **regresyon doğrusu** denir.

Yani her noktanın uydurulan eğriden dikey uzaklığını alıp karesini topluyoruz ve bu toplamı en küçük yapan eğriyi seçiyoruz. Farkların kendileri toplansaydı pozitif ve negatif sapmalar birbirini götürürdü; kareler hem işareti ortadan kaldırır hem de E'yi türevlenebilir bir fonksiyon yapar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.1: Veri noktaları (x_i, y_i) (dolu daireler), $\hat{y} = ax + b$ doğrusu ve doğru üzerindeki $\hat{y}_i = ax_i + b$ tahmini değerleri (içi boş daireler). Dikey parçalar $q_i = y_i - \hat{y}_i$ farklarıdır; en küçük kareler yöntemi bu parçaların uzunluklarının karelerinin toplamı E'yi en küçük yapan doğruyu seçer.

12.3 Normal Denklemler

Uydurulacak fonksiyonun bir doğru olduğu en temel durumu ele alalım.
$(x_1, \hat{y}_1), \ldots, (x_n, \hat{y}_n)$ noktalarından geçen doğru $\hat{y} = ax + b$ biçiminde yazılır; yani $\hat{y}_i = ax_i + b$'dir. Bunu (1)'de yerine koyarsak E, bilinmeyen a ve b katsayılarının bir fonksiyonu olur:

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} q_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2. \tag{2}$$

E'nin minimum olduğu noktada iki kısmi türev de sıfır olmalıdır. Sırayla a'ya ve b'ye göre türev alıp sıfıra eşitleyelim:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} -2x_i \, (y_i - ax_i - b) = 0,$$
$$\frac{\partial E}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} -2 \, (y_i - ax_i - b) = 0.$$

İki denklemi -2'ye bölüp toplamları terim terim açalım. Birincisinden

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

ikincisinden, b sabiti n kez toplandığı için $\sum_{i=1}^{n} b = b \cdot n$ olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i - b \cdot n = 0$$

elde edilir. Bilinen toplamları sol tarafa toplarsak şu sistem çıkar.

Tanım 12.3 (Normal denklemler). $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ verisi için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\ \sum_{i=1}^{n} y_i &= a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + b \cdot n\end{aligned} \tag{3}$$

denklemlerine $\hat{y} = ax + b$ regresyon doğrusunun **Normal Denklemleri** denir.

Yani normal denklemler a ve b'ye göre iki bilinmeyenli, iki denklemli lineer bir sistemdir. Katsayıları veriden hesaplanan dört toplamdır: $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i^2$ ve $\sum x_i y_i$. Sistem çözülünce a ve b, dolayısıyla regresyon doğrusu bulunur.
$q_i = y_i - ax_i - b$ yazarsak kısmi türevlerin sıfır olması $\sum q_i = 0$ ve $\sum x_i q_i = 0$ demektir. Yani regresyon doğrusunda artıkların toplamı sıfırdır: noktaların doğrunun üstünde kalan kısmı ile altında kalan kısmı dengelenir.
Normal denklemlerin matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

şeklindedir. Katsayı matrisi terslenebilirse iki tarafı soldan onun tersiyle çarparak

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \end{bmatrix} \tag{5}$$

eşitliğini yazarız. Bu matrisin ne zaman terslenebilir olduğunu ve bulunan (a, b)'nin E'yi gerçekten minimum yaptığını şimdi gösterelim. Kısmi türevlerin sıfır olması tek başına minimumu garanti etmez; ama E, a ve b'nin ikinci dereceden bir fonksiyonu olduğu için burada durum çok temizdir.

Önerme 12.1 (Normal denklemlerin çözümü minimumdur). *x_i'lerin hepsi aynı değilse*

1. *$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0$ olur; dolayısıyla (4)'teki katsayı matrisi terslenebilir ve normal denklemlerin tek bir (a, b) çözümü vardır;*
2. *bu (a, b), (2)'deki E'yi minimum yapar: $(h, k) \neq (0, 0)$ için $E(a + h, b + k) > E(a, b)$ olur.*

Ayrıca E'nin Hessian matrisi

$$H = \begin{bmatrix} 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2n \end{bmatrix}$$

sabittir ve pozitif tanımlıdır.

> ***İspat.***
> ***1.*** *$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ olsun. Kareyi açıp $\sum x_i = n\bar{x}$ eşitliğini kullanırsak*
>
> $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\end{aligned}$$
>
> *bulunur; yani*
>
> $$n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 = n\sum(x_i - \bar{x})^2.$$
>
> *Sağdaki toplam ancak her i için $x_i = \bar{x}$ iken sıfırdır. x_i'lerin hepsi aynı olmadığından $n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 > 0$ olur. Bu sayı (4)'teki katsayı matrisinin determinantıdır. Determinant sıfırdan farklı olduğu için matris terslenebilir ve sistemin tek çözümü (5) ile verilir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

2. (a, b) *normal denklemlerin çözümü ve* $q_i = y_i - ax_i - b$ *olsun. Normal denklemler, kısmi türevlerin* -2*'ye bölünmüş hâli olduğundan*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i q_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} q_i = 0$$

demektir. Rastgele (h, k) *için*

$$y_i - (a+h)x_i - (b+k) = q_i - (hx_i + k)$$

olur. Kareyi açıp terim terim toplarsak

$$\begin{aligned} E(a+h, b+k) &= \sum_{i=1}^{n} \big(q_i - (hx_i + k)\big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} q_i^2 - 2h\sum_{i=1}^{n} x_i q_i - 2k\sum_{i=1}^{n} q_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (hx_i + k)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Ortadaki iki toplam sıfır olduğundan

$$E(a+h, b+k) = E(a, b) + \sum_{i=1}^{n} (hx_i + k)^2$$

elde edilir. Son toplam negatif değildir. Sıfır olması için her i *için* $hx_i + k = 0$ *olmalıdır.* $h \neq 0$ *olsaydı her* i *için* $x_i = -k/h$ *olurdu, yani* x_i*'lerin hepsi aynı olurdu; bu varsayıma aykırıdır. O hâlde* $h = 0$*, buradan da* $k = 0$ *olur. Yani* $(h, k) \neq (0, 0)$ *için* $E(a+h, b+k) > E(a, b)$*'dir.*
Son olarak toplamı açarsak

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (hx_i + k)^2 &= h^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2hk \sum_{i=1}^{n} x_i + nk^2 \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur; burada H*,* (2)*'deki* E*'nin ikinci kısmi türevlerinden oluşan matristir:* $\frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2\sum x_i^2$*,* $\frac{\partial^2 E}{\partial a\, \partial b} = 2\sum x_i$*,* $\frac{\partial^2 E}{\partial b^2} = 2n$*. Bu türevler* a *ve* b*'ye bağlı olmadığından* H *sabittir. Az önce bu ifadenin* $(h, k) \neq (0, 0)$ *için pozitif olduğunu gösterdik; bu,* H*'nin pozitif tanımlı olması demektir.*
■

Yani x_i'lerin hepsi aynı değilse normal denklemlerin tek bir çözümü vardır ve bu çözüm E'nin tek minimum noktasıdır; başka bir doğru seçmek hata kareleri toplamını yalnız büyütür. x_i'lerin hepsi aynı bir c sayısına eşitse noktalar $x = c$ dikey doğrusu üzerindedir. Bu durumda $ac + b$ değeri y_i'lerin ortalamasına eşit olan her doğru aynı E'yi verir; tek bir regresyon doğrusu seçilemez.

12.4 Doğru Uydurma Örnekleri

Yöntemi önce yerine koyarak, sonra matris gösterimiyle uygulayalım. Hesapların hepsi aynı tablo üzerinde yürür.

Regresyon doğrusu dört adımda

1. **Tabloyu kur.** i, x_i, y_i, x_i^2, $x_i y_i$ sütunlu tabloyu doldur, son satıra sütun toplamlarını yaz.
2. **Normal denklemleri yaz.** Toplamları (3)'teki iki denkleme koy.
3. **Sistemi çöz.** Bir denklemden b'yi çekip ötekine koy ya da (5)'teki ters matrisi kullan.
4. **Doğruyu yaz.** Bulunan a ve b ile $\hat{y} = ax + b$ regresyon doğrusunu yaz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 12.1 (Dört noktaya doğru uydurma). Aşağıda verilen x ve y değişkenleri için en küçük kareler yöntemini kullanarak $y = ax + b$ şeklinde bir fonksiyon bulunuz.

x_i	-1	$-0{,}1$	$0{,}2$	1
y_i	1	$1{,}099$	$0{,}808$	1

Çözüm.
$n = 4$'tür. Önce tabloyu kuralım:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-1	1	1	-1
2	$-0{,}1$	1,099	0,01	$-0{,}1099$
3	0,2	0,808	0,04	0,1616
4	1	1	1	1
Toplam	0,1	3,907	2,05	0,0517

Bu toplamlarla $y = ax + b$ regresyon doğrusunun normal denklemleri

$$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = a\left(\sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) + b\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right) \Longrightarrow 0{,}0517 = 2{,}05a + 0{,}1b,$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i = a\left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right) + 4b \Longrightarrow 3{,}907 = 0{,}1a + 4b$$

olur. Birinci denklemde b'nin katsayısı $0{,}1$ olduğundan b'yi oradan çekmek kolaydır. Birinci denklemi $0{,}1$'e bölersek

$$0{,}517 = 20{,}5a + b \Longrightarrow b = 0{,}517 - 20{,}5a$$

bulunur. Bunu ikinci denklemde yerine koyalım:

$$\begin{aligned} 3{,}907 &= 0{,}1a + 4\,(0{,}517 - 20{,}5a) \\ &= 0{,}1a + 2{,}068 - 82a = -81{,}9a + 2{,}068. \end{aligned}$$

Buradan $81{,}9a = 2{,}068 - 3{,}907 = -1{,}839$ ve

$$a = \frac{-1{,}839}{81{,}9} = -\frac{613}{27300} = -0{,}022454212$$

elde edilir. b için ilk bağıntıya dönüp a'nın yuvarlanmamış değerini kullanırsak

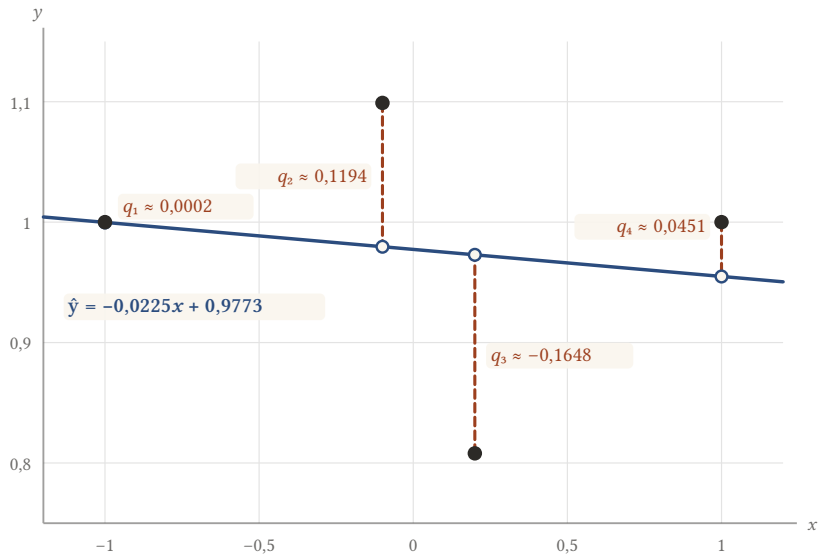
$$\begin{aligned} b &= 0{,}517 - 20{,}5 \cdot \left(-\frac{613}{27300}\right) \\ &= 0{,}517 + 0{,}460311355 = 0{,}977311355 \end{aligned}$$

olur. Aranan fonksiyon

$$y = -0{,}022454212\,x + 0{,}977311355$$

bulunur. Doğru neredeyse yataydır: veriler 1 civarında küçük salınımlar yapar. $x = 0{,}2$'deki nokta doğrunun belirgin biçimde altında, öteki üçü üstünde kalır; $x = -1$'deki nokta ise neredeyse doğrunun üzerindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.2: Dört veri noktası (dolu daireler) ve regresyon doğrusu $\hat{y} = -0{,}0225x + 0{,}9773$. Doğru üzerindeki içi boş daireler $\hat{y}_i$ tahmini değerleridir. Kesikli parçalar $q_i = y_i - \hat{y}_i$ artıklarıdır: her nokta ile doğru arasındaki dikey uzaklık. E, bu dört parçanın uzunluklarının karelerinin toplamıdır: $E \approx 0{,}0435$.

■

İkinci örnekte sistemi doğrudan (5)'teki ters matrisle çözeceğiz. Bunun için 2×2 bir matrisin tersini hatırlayalım: $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ise

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \cdot \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

olur; paydadaki $\alpha\delta - \beta\gamma$ sayısı matrisin determinantıdır.
Yani köşegendeki iki eleman yer değiştirir, öteki ikisinin işareti değişir ve matris determinanta bölünür.

Örnek 12.2 (Matris gösterimiyle doğru uydurma). Aşağıdaki tabloda verilen değerleri kullanarak en küçük kareler yöntemi ile $f(x) = ax + b$ fonksiyonunu matris gösterimini kullanarak elde ediniz.

x_i	-2	0	1	2	4
y_i	-3	1	3	5	9

Çözüm.
$n = 5$'tir. Tabloyu kuralım:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	-2	-3	4	6
2	0	1	0	0
3	1	3	1	3
4	2	5	4	10
5	4	9	16	36
Toplam	5	15	25	55

 CC BY-NC-SA 4.0

$f(x) = ax + b$ regresyon doğrusunun normal denklemleri (5) biçiminde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 55 \\ 15 \end{bmatrix}$$

olur. Katsayı matrisinin determinantı

$$\begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 25 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 125 - 25 = 100 \neq 0$$

olduğundan matris terslenebilir. Ters matris formülüyle

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 55 \\ 15 \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 5 \cdot 55 - 5 \cdot 15 \\ -5 \cdot 55 + 25 \cdot 15 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 275 - 75 \\ -275 + 375 \end{bmatrix} = \frac{1}{100} \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Yani $a = 2$, $b = 1$ ve

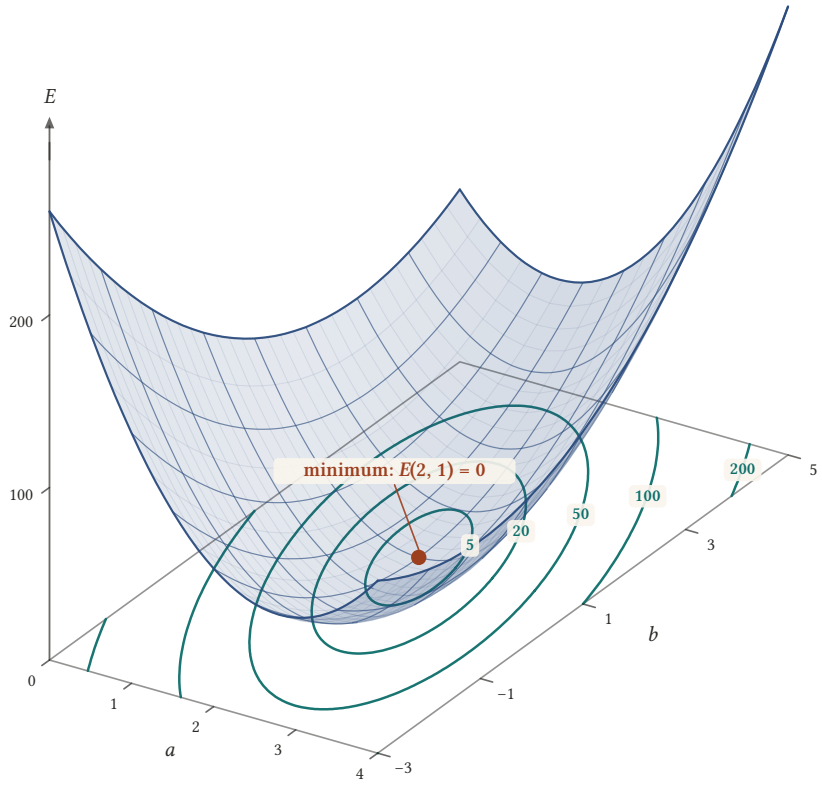
$$f(x) = 2x + 1$$

elde edilir. Bu veride beş noktanın beşi de $y = 2x + 1$ doğrusu üzerindedir; örneğin $x = 4$ için $2 \cdot 4 + 1 = 9$'dur. Bu yüzden bütün artıklar sıfırdır ve E'nin minimum değeri 0'dır.
E'yi a ve b'nin fonksiyonu olarak açıkça yazmak, Önerme 12.1'un söylediğini gözle görmeyi sağlar. (2)'deki kareleri açıp toplamları yerine koyarsak ($\sum y_i^2 = 125$)

$$E(a,b) = a^2 \sum x_i^2 + 2ab \sum x_i + nb^2$$
$$-2a \sum x_i y_i - 2b \sum y_i + \sum y_i^2$$
$$= 25a^2 + 10ab + 5b^2 - 110a - 30b + 125$$

olur. Bu, yukarı açılan bir paraboloittir; seviye eğrileri $(2,1)$ merkezli iç içe elipslerdir ve tek minimum noktası $E(2,1) = 0$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.3: $E(a, b) = 25a^2 + 10ab + 5b^2 - 110a - 30b + 125$ yüzeyinin $0 \le a \le 4$, $-3 \le b \le 5$ üzerindeki parçası. Köşelerde E 100 ile 260 arasındadır. Tabandaki eğik elipsler $E = 5$; 20; 50; 100; 200 seviye eğrileridir ve hepsi (2, 1) noktasını çevreler. Yüzeyin tek bir çukuru vardır; normal denklemlerin çözümü olan (2, 1) bu çukurun dibidir ve orada $E = 0$ olur. Yüzeyin arkasında kalan çizgiler soluk çizilmiştir.

■

12.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorularda tabloyu kurup normal denklemleri yazacak, sistemi b'yi çekip yerine koyarak çözeceğiz. Sonuçlar yuvarlama yapılmadan hesaplanıp virgülden sonra dokuz basamakla gösterilmiştir.

Alıştırma 12.1 (Not verisine doğru uydurma). Bir sınıftaki öğrenciler arasından rastgele seçilmiş 10 öğrencinin Matematik ve Fizik derslerinden aldıkları notlar aşağıda verilmiştir.

Matematik	75	80	93	65	87	71	98	68	84	77
Fizik	82	78	86	72	91	80	95	72	89	74

Matematik notlarını bağımsız değişken (x), Fizik notlarını bağımlı değişken (y) kabul ederek tablodaki veriler için en uygun doğruyu bulunuz.

Çözüm.
$n = 10$'dur. Tabloyu kuralım:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	75	82	5625	6150

 CC BY-NC-SA 4.0

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
2	80	78	6400	6240
3	93	86	8649	7998
4	65	72	4225	4680
5	87	91	7569	7917
6	71	80	5041	5680
7	98	95	9604	9310
8	68	72	4624	4896
9	84	89	7056	7476
10	77	74	5929	5698
Toplam	798	819	64722	66045

Normal denklemler

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + b\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \Longrightarrow 66045 = 64722a + 798b,$$
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + b \cdot n \Longrightarrow 819 = 798a + 10b$$

olur. İkinci denklemi 10'a bölersek $b = 81{,}9 - 79{,}8a$ bulunur. Bunu birinci denklemde yerine koyalım:

$$\begin{aligned} 66045 &= 64722a + 798\,(81{,}9 - 79{,}8a) \\ &= 64722a + 65356{,}2 - 63680{,}4a \\ &= 1041{,}6a + 65356{,}2. \end{aligned}$$

Buradan $1041{,}6a = 66045 - 65356{,}2$, yani $1041{,}6a = 688{,}8$ ve

$$a = \frac{688{,}8}{1041{,}6} = \frac{41}{62} = 0{,}661290323$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} b &= 81{,}9 - 79{,}8 \cdot \frac{41}{62} = \frac{903}{31} \\ &= 29{,}129032258 \end{aligned}$$

ve aranan doğru

$$y = 0{,}661290323\,x + 29{,}129032258$$

bulunur. Eğim pozitiftir: Matematik notu bir puan arttıkça Fizik notunun yaklaşık 0,66 puan artması beklenir.
■

Alıştırma 12.2 (Matematik notundan Fizik notu tahmini). Alıştırma 12.1'daki 10 öğrencinin not verisi için Matematik notları x, Fizik notları y alınarak bulunan regresyon doğrusunu kullanınız. Matematik dersinden 60 alan bir öğrencinin Fizik dersinden kaç alması beklenir?

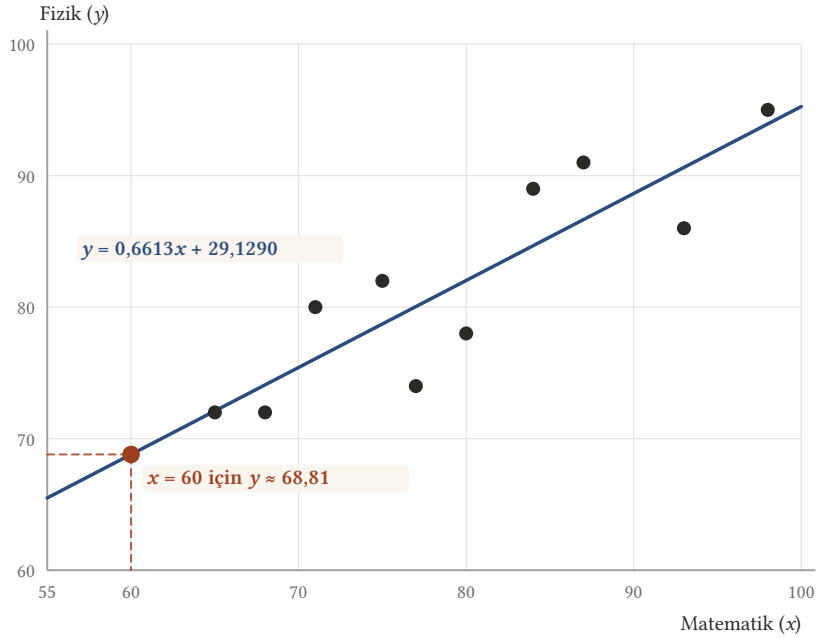
Çözüm.
Alıştırma 12.1'da bulunan regresyon doğrusu şudur:

$$y = 0{,}661290323\,x + 29{,}129032258$$

Katsayıların tam değerleri $a = \frac{41}{62}$ ve $b = \frac{903}{31}$'dir. Bağımsız değişken x olduğundan $x = 60$ değerini doğrudan yerine koyarız:

$$\begin{aligned} y &= \frac{41}{62} \cdot 60 + \frac{903}{31} = \frac{1230}{31} + \frac{903}{31} \\ &= 39{,}677419355 + 29{,}129032258 \\ &= \frac{2133}{31} = 68{,}806451613 \approx 69. \end{aligned}$$

Yani Matematik dersinden 60 alan bir öğrencinin Fizik dersinden yaklaşık 69 alması beklenir.



Şekil 12.4: On öğrencinin (Matematik, Fizik) notları ve regresyon doğrusu $y = 0{,}6613x + 29{,}1290$. Matematik notu 60 olan öğrencinin Fizik notu tahmini doğru üzerindeki noktadan okunur: $y \approx 68{,}81$, yani yaklaşık 69.

■

Alıştırma 12.3 (Fizik notundan Matematik notu tahmini). Alıştırma 12.1'daki 10 öğrencinin not verisi için Matematik notları x, Fizik notları y alınarak bulunan regresyon doğrusunu kullanınız. Fizik dersinden 90 alan bir öğrencinin Matematik dersinden kaç alması beklenir?

Çözüm.
Alıştırma 12.1'da bulunan regresyon doğrusu şudur:

$$y = 0{,}661290323\,x + 29{,}129032258$$

Katsayıların tam değerleri $a = \frac{41}{62}$ ve $b = \frac{903}{31}$'dir. Bu kez $y = 90$ verilmiştir; doğrunun denklemini x için çözeriz:

$$90 = \frac{41}{62}\,x + \frac{903}{31}$$

denkleminden

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x = \frac{90 - \frac{903}{31}}{\frac{41}{62}} = \frac{1887}{31} \cdot \frac{62}{41} = \frac{3774}{41}$$
$$= 92{,}048780488 \approx 92$$

bulunur. Yani Fizik dersinden 90 alan bir öğrencinin Matematik dersinden yaklaşık 92 alması beklenir. Burada y'yi x'ten tahmin etmek için kurulan doğruyu ters çevirerek kullandık; bu, x'in y'ye göre regresyonuyla aynı şey değildir, çünkü x bağımlı değişken alınıp normal denklemler x ile y'nin yerleri değiştirilerek kurulsaydı başka bir doğru çıkardı ve $y = 90$ için $x \approx 89{,}12$ bulunurdu.
■

Alıştırma 12.4 (On noktaya doğru uydurma). Aşağıdaki tabloya bir doğru uydurmak için en küçük kareler yöntemini kullanınız.

x_i	1	3	5	7	10	12	13	16	18	20
y_i	4	5	6	5	8	7	6	9	12	11

Çözüm.
$n = 10$'dur. Tabloyu kuralım:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	4	1	4
2	3	5	9	15
3	5	6	25	30
4	7	5	49	35
5	10	8	100	80
6	12	7	144	84
7	13	6	169	78
8	16	9	256	144
9	18	12	324	216
10	20	11	400	220
Toplam	105	73	1477	906

Normal denklemler

$$906 = 1477a + 105b \quad \text{ve} \quad 73 = 105a + 10b$$

olur. İkinci denklemi 10'a bölersek $b = 7{,}3 - 10{,}5a$ bulunur. Bunu birinci denklemde yerine koyalım:

$$\begin{aligned} 906 &= 1477a + 105\,(7{,}3 - 10{,}5a) \\ &= 1477a + 766{,}5 - 1102{,}5a \\ &= 374{,}5a + 766{,}5. \end{aligned}$$

Buradan $374{,}5a = 906 - 766{,}5 = 139{,}5$ ve

$$a = \frac{139{,}5}{374{,}5} = \frac{279}{749} = 0{,}372496662$$

olur. Buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$b = 7{,}3 - 10{,}5 \cdot \frac{279}{749} = 7{,}3 - 3{,}911214953 \\ = 3{,}388785047$$

ve aranan doğru

$$y = 0{,}372496662\,x + 3{,}388785047$$

bulunur.
■

Böylece kitabın yolu tamamlanıyor: hataların nereden geldiğini ve nasıl büyüdüğünü anlayarak başladık, bu bilgiyle kök bulma yöntemlerinin ne kadar hızlı yakınsadığını ölçtük. İnterpolasyonla bir fonksiyonu tablo değerlerinden yeniden kurmayı öğrendik ve aynı polinomları türev ve integral hesaplamakta kullandık. En küçük kareler yöntemi ise noktalardan geçmek yerine onlara en yakın kalan bir eğri seçerek bu araçları gürültülü ölçümlere taşıdı.

 CC BY-NC-SA 4.0

13. Uygulamalı Özet

Bu sayfa kitabın yöntemlerini ispatsız, soru çözmeye dönük bir kopya kâğıdı olarak toplar. Uygulamada en sık karşılaşılan sorular şunlardır: bir denklemin köküne ikiye bölme, sabit nokta, Newton-Raphson, Secant ya da Regula Falsi ile yaklaşmak ve gereken adım sayısını bulmak; verilen noktalardan Lagrange ya da Newton biçiminde interpolasyon polinomu kurup hata sınırı vermek; bir türevi ya da integrali bir tablodan yaklaşık hesaplamak; verilere en küçük kareler doğrusu uydurmak. Bunların yanında Taylor polinomuyla yaklaşık değer ve hata sınırı, k-basamak aritmetikle hesap ve yakınsama hızı soran kısa sorular da sık gelir. Sayfa her soru tipi için adım adım bir algoritma, gerekli formül tablolarını, sık yapılan hataları ve kısa ama tam çözümlü örnekleri verir. Her kural, ayrıntısının ve gerekçesinin bulunduğu tanıma ya da teoreme bağlanır.

13.1 Soru Tipine Göre Yöntem

Bir soruyu okuyunca ilk iş, sorunun hangi kalıba girdiğini ve hangi aracın en kısa yol olduğunu belirlemektir. Aşağıdaki tablo soru kalıplarını yöntemlerle eşleştirir.

Soruda istenen	Kullanılacak araç	Bu sayfada
Taylor polinomuyla yaklaşık değer, hata sınırı, kaç terim gerektiği	$R_n(x)$ kalan terimini en büyük türevle sınırla	Bölüm 13.2
Mutlak ya da bağıl hata, p^*'ın bulunabileceği aralık	Tanımdan eşitsizlik	Bölüm 13.3
k-basamak kesme ya da yuvarlama aritmetiğiyle hesap	Her ara sonucu KN formuna çevir	Bölüm 13.3
Bir dizinin ya da fonksiyonun yakınsama hızı	$\mid y_n - y_0 \mid \leq K \mid x_n \mid$ sınırını bul	Bölüm 13.4
Kökü içeren bir aralık bul	Ara değer teoremi: işaret değişimi	Bölüm 13.5
İkiye bölmeyle yaklaşım, gereken adım sayısı	$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$	Bölüm 13.6
Uygun g seçip sabit nokta iterasyonu, adım sayısı	$g([a,b]) \subseteq [a,b], \mid g' \mid \leq k < 1$	Bölüm 13.7
Newton-Raphson ile köke yaklaşım	$p_n = p_{n-1} - f(p_{n-1})/f'(p_{n-1})$	Bölüm 13.8
Secant ya da Regula Falsi ile köke yaklaşım	Kirişin x eksenini kestiği nokta	Bölüm 13.9
Verilen noktalardan interpolasyon polinomu, yaklaşık değer	Lagrange katsayı polinomları	Bölüm 13.10
İnterpolasyonun hata sınırı	$\frac{M}{(n+1)!} \mid (x-x_0)\cdots(x-x_n) \mid$	Bölüm 13.10
Bölünmüş fark tablosu, Newton biçimi, ileri ya da geri fark formülü	Basamaklı fark tablosu	Bölüm 13.11
Tablodan birinci ya da ikinci türev	İki, üç-nokta ve ikinci türev formülleri	Bölüm 13.12

 CC BY-NC-SA 4.0

Soruda istenen	Kullanılacak araç	Bu sayfada
Yamuk, Simpson, Newton-Cotes ile integral ve hata sınırı	Formül tablosu ve hata terimleri	Bölüm 13.13
Verilere doğru uydurma	Normal denklemler ya da matris biçimi	Bölüm 13.14

13.2 Taylor Polinomu ve Hata Sınırı

Taylor Teoremine (Teorem 1.9) göre $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ve

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$$

dir; $\xi(x)$, x_0 ile x arasında bilinmeyen bir sayıdır. Hata sınırı sorularının hepsi bu bilinmeyen ξ'yi en kötü değeriyle değiştirmekten ibarettir.

Dört adımda Taylor ile yaklaşık değer ve hata sınırı

1. **Türevleri çıkar.** $f, f', \ldots, f^{(n+1)}$'i yaz ve x_0'daki değerleri hesapla.
2. **Polinomu kur.** $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ ve istenen noktada $P_n(x)$'i bul.
3. **Türevi sınırla.** x_0 ile x arasındaki her t için $|\,f^{(n+1)}(t)\,| \le M$ olacak en küçük kolay M'yi bul.
4. **Sınırı yaz.**

$$|\,f(x) - P_n(x)\,| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|\,x-x_0\,|^{n+1}\,.$$

"Kaç terim gerekir?" sorusunda 4. adımdaki sınır n'ye bağlı yazılır ve sınır istenen hassaslıktan küçük olana kadar $n = 1, 2, \ldots$ denenir.

Sık yapılan hatalar

- M, ξ'nin bulunabileceği aralığın tamamı üzerinde alınır; yalnız x_0'da ya da yalnız x'te alınmaz.
- n. mertebeden polinomun hatası $(n+1)$. türevle yazılır.
- Trigonometrik fonksiyonlarda açılar radyandır.

Örnek 13.1 (Üstel Fonksiyon İçin Yaklaşık Değer ve Hata Sınırı). $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ civarındaki ikinci mertebeden Taylor polinomuyla $e^{-0,1}$ için bir yaklaşım bulunuz ve bir hata sınırı veriniz.

Çözüm.
$f(x) = e^{-x}$, $f'(x) = -e^{-x}$, $f''(x) = e^{-x}$, $f'''(x) = -e^{-x}$ olduğundan $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$, $f''(0) = 1$ ve

$$P_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}, \qquad P_2(0{,}1) = 1 - 0{,}1 + 0{,}005 = 0{,}905.$$

ξ, 0 ile 0,1 arasındadır ve bu aralıkta $|\,f'''(t)\,| = e^{-t} \le e^{0} = 1$ olduğundan $M = 1$ alınır:

$$|\,e^{-0,1} - P_2(0{,}1)\,| \le \frac{1}{3!}\,(0{,}1)^3 = \frac{0{,}001}{6} \approx 0{,}000167.$$

Gerçek değer $e^{-0,1} = 0{,}9048374\ldots$ olduğundan gerçek hata $0{,}0001626$'dır; sınırın altında kalır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Hatalar ve k-Basamak Aritmetik

Mutlak hata $\mid p - p^* \mid$, bağıl hata $\left|\frac{p-p^*}{p}\right|$'dir (Tanım 2.4). Bağıl hata, hatayı sayının büyüklüğüne göre ölçer; bu yüzden büyük sayılarda daha anlamlıdır.

p^* aralığı. "Bağıl hatası en çok ε olan p^*'lar hangi aralıktadır?" sorusunda $p > 0$ için

$$\mid p - p^* \mid \leq \varepsilon\, p \Leftrightarrow p(1-\varepsilon) \leq p^* \leq p(1+\varepsilon)$$

yazılır. Örneğin $p = 150$ ve $\varepsilon = 10^{-3}$ için $149{,}85 \leq p^* \leq 150{,}15$ olur. Mutlak hata için aralık $p - \varepsilon \leq p^* \leq p + \varepsilon$'dur.

Kesme ve yuvarlama. $y = 0{,}d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} \ldots \cdot 10^n$ için (Tanım 2.8):

İşlem	Kural	Bağıl hata sınırı
k-basamak kesme	d_{k+1} ve sonrasını at	10^{-k+1}
k-basamak yuvarlama	$5 \cdot 10^{n-(k+1)}$ ekle, sonra kes	$0{,}5 \cdot 10^{-k+1}$

Üç adımda k-basamak aritmetiğiyle hesap

1. Her sayıyı önce KN formuna çevir: $0{,}d_1 \ldots d_k \cdot 10^n$, $d_1 \neq 0$.
2. Her işlemin sonucunu hemen yeniden KN formuna çevir; sonucu sona saklama.
3. Mutlak ve bağıl hatayı gerçek değerle hesapla.

Sık yapılan hatalar

- Normalize biçimde ilk basamak sıfır olamaz: $0{,}0314 \cdot 10^2$ değil, $0{,}314 \cdot 10^1$.
- Yakın iki sayının farkında anlamlı basamak kaybolur; mümkünse ifade yeniden düzenlenir (örneğin eşleniğiyle çarpılır).

Örnek 13.2 (Bir Kesrin Dört Basamaklı Formları). $y = \frac{22}{7}$ sayısının dört basamak kesme ve dört basamak yuvarlama ile kayan nokta formlarını bulunuz ve bağıl hatalarını hesaplayınız.

Çözüm.
$y = 0{,}3142857\ldots \cdot 10^1$ olduğundan $n = 1$, $k = 4$'tür.

- **Kesme:** $KN(y) = 0{,}3142 \cdot 10^1$. Bağıl hata $\dfrac{0{,}000857\ldots}{3{,}142857\ldots} \approx 2{,}73 \cdot 10^{-4}$.
- **Yuvarlama:** $y + 5 \cdot 10^{1-5} = 3{,}143357\ldots$ kesilirse $KN(y) = 0{,}3143 \cdot 10^1$. Bağıl hata $\dfrac{0{,}000143\ldots}{3{,}142857\ldots} \approx 4{,}55 \cdot 10^{-5}$.

İki sonuç da tablodaki sınırların (10^{-3} ve $0{,}5 \cdot 10^{-3}$) altındadır.
■

13.4 Yakınsama Hızı

$y_n \to y_0$ yakınsaması, yeterince büyük n için $\mid y_n - y_0 \mid \leq K \mid x_n \mid$ ise $O(x_n)$ hızındadır (Tanım 3.4). Fonksiyonlarda da $h \to 0$ iken $\mid f(h) - L \mid \leq K \mid g(h) \mid$ ise $f(h) = L + O(g(h))$ yazılır (Tanım 3.5). Pratikte $x_n = \frac{1}{n^p}$ ve $g(h) = h^p$ biçiminde, sınırı sağlayan en büyük p aranır.

Üç adımda yakınsama hızı

1. Limiti bul: y_0 ya da L.
2. Farkı sadeleştir: $\mid y_n - y_0 \mid$ için pay ve paydanın baş terimlerine bak; fonksiyonlarda Taylor açılımını kullan.
3. Sınırı yaz: farkı $K \cdot \frac{1}{n^p}$ ya da $K \cdot \mid h \mid^p$ ile sınırla ve p'yi olabildiğince büyük seç.

Örnek 13.3 (Bir Dizinin Yakınsama Hızı). $y_n = n \sin \frac{1}{n}$ dizisinin yakınsama hızını belirleyiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$0 < t \le 1$ için Taylor Teoreminden $t - \frac{t^3}{6} \le \sin t \le t$ olur. $t = \frac{1}{n}$ alıp t'ye bölersek

$$1 - \frac{1}{6n^2} \le n \sin \frac{1}{n} \le 1, \qquad \text{yani} \qquad \left| n \sin \frac{1}{n} - 1 \right| \le \frac{1}{6n^2}.$$

Dolayısıyla $y_n \to 1$ ve $n \sin \frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{n^2}\right)$'dir. Örneğin $n = 10$ için fark $0{,}0016658$, sınır $0{,}0016667$'dir.
■

Örnek 13.4 (Bir Fonksiyonun Yakınsama Hızı). $f(h) = \dfrac{1 - \cos h}{h}$ fonksiyonunun $h \to 0$ iken yakınsama hızını belirleyiniz.

Çözüm.
Taylor Teoreminden $0 \le 1 - \cos h \le \frac{h^2}{2}$ olduğundan $h \neq 0$ için

$$| \, f(h) - 0 \, | = \frac{1 - \cos h}{| \, h \, |} \le \frac{| \, h \, |}{2}$$

olur. O hâlde $f(h) \to 0$ ve $f(h) = 0 + O(h)$'dir.
■

13.5 Kök Bulma: Aralık ve Yöntem Seçimi

Her kök sorusu, kökü içeren bir aralıkla başlar. $f \in C[a,b]$ ve $f(a) \cdot f(b) < 0$ ise Ara Değer Teoremi (Teorem 1.7) gereği (a,b)'de bir kök vardır. Kök aralığı aranırken f birkaç tam sayıda hesaplanır ve işaret değiştirdiği ardışık noktalar alınır; f' aralıkta işaret değiştirmiyorsa kök tektir.
Aşağıdaki tablo dört yöntemi yan yana koyar. Bu sayfada dördü de aynı denklemle, $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ ile gösterilir. $f(2) = -1 < 0$ ve $f(3) = 16 > 0$ olduğundan $[2,3]$'te bir kök vardır; kök $p = 2{,}0945514815\ldots$'tir.

Yöntem	Gerekenler	Adım	Yakınsama
İkiye bölme	$f(a) \cdot f(b) < 0$	$p_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$	Her zaman, yavaş
Sabit nokta	$x = g(x)$, $\lvert \, g' \, \rvert \le k < 1$	$p_n = g(p_{n-1})$	k küçükse hızlı
Newton-Raphson	f', iyi bir p_0	$p_n = p_{n-1} - \dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$	p_0 yakınsa çok hızlı
Secant	p_0, p_1	Son iki noktadan kiriş	Hızlı, garanti yok
Regula Falsi	$f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$	İşaret değiştiren uçtan kiriş	Her zaman, Secant'tan yavaş

Durma kriterleri (Tanım 4.4): $| \, p_N - p_{N-1} \, | < \varepsilon$, $\frac{| \, p_N - p_{N-1} \, |}{| \, p_N \, |} < \varepsilon$ ya da $| \, f(p_N) \, | < \varepsilon$. Soruda hangisi istenmişse o kullanılır; belirtilmemişse ilki.

13.6 İkiye Bölme Metodu

Her adımda aralık yarıya iner ve kök hep işaret değiştiren yarıdadır (Tanım 4.3). Hata sınırı (Teorem 4.1)

$$| \, p_n - p \, | \le \frac{b - a}{2^n}$$

dir. **Adım sayısı:** 10^{-m} hassaslık için $\frac{b-a}{2^n} < 10^{-m}$, yani $2^n > (b-a) \cdot 10^m$ sağlayan en küçük n alınır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İkiye bölme dört adımda

1. $f(a)\cdot f(b)<0$ olduğunu göster; $a_1=a$, $b_1=b$ al.
2. $p_n=\frac{a_n+b_n}{2}$ ve $f(p_n)$'yi hesapla.
3. $f(p_n)$, $f(a_n)$ ile aynı işaretliyse $a_{n+1}=p_n$; değilse $b_{n+1}=p_n$ al.
4. Durma kriterini sına; sağlanmıyorsa 2. adıma dön. Değerleri tabloda topla.

Örnek 13.5 (İkiye Bölme ile Bir Kübiğin Kökü). $x^3-2x-5=0$ denkleminin $[2,3]$ aralığındaki köküne ikiye bölme metoduyla dört adım yaklaşınız. 10^{-4} hassaslık için en az kaç adım gerekir?

Çözüm.
$f(2)=-1<0$, $f(3)=16>0$ olduğundan kök $(2,3)$'tedir.

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$
1	2	3	2,5	$5{,}625>0$
2	2	2,5	2,25	$1{,}890625>0$
3	2	2,25	2,125	$0{,}345703>0$
4	2	2,125	2,0625	$-0{,}351318<0$

Dört adımdan sonra kök $(2{,}0625;\,2{,}125)$ aralığındadır ve $p_4=2{,}0625$'in hatası en çok $\frac{1}{2^4}=0{,}0625$'tir. Adım sayısı için $\frac{3-2}{2^n}<10^{-4}$, yani $2^n>10\,000$ gerekir. $2^{13}=8192$, $2^{14}=16\,384$ olduğundan en az $n=14$ adım gerekir.
■

13.7 Sabit Nokta İterasyonu

$f(x)=0$ denklemi $x=g(x)$ biçimine getirilir ve $p_n=g(p_{n-1})$ ile iterasyon yapılır (Tanım 5.2). Aynı denklem için birçok g yazılabilir; işe yarayanı Sabit Nokta Teoreminin (Teorem 5.2) koşullarını sağlayandır:

1. $g\in C[a,b]$ ve her $x\in[a,b]$ için $g(x)\in[a,b]$,
2. her $x\in(a,b)$ için $\mid g'(x)\mid\le k<1$.

Bu durumda her $p_0\in[a,b]$ için iterasyon tek sabit noktaya yakınsar ve (Sonuç 5.1)

$$\mid p_n-p\mid\le k^n\max\{p_0-a,\,b-p_0\},\qquad \mid p_n-p\mid\le\frac{k^n}{1-k}\mid p_1-p_0\mid.$$

Dört adımda sabit nokta iterasyonu

1. **g'yi seç.** Denklemi $x=g(x)$ biçiminde yaz; birkaç aday varsa $\mid g'\mid$'si küçük olanı al.
2. **Koşulları denetle.** g monotonsa $g([a,b])$ uç değerlerinden bulunur; $\max\mid g'\mid$'yi hesapla, bu k'dır.
3. **Adım sayısını bul.** Hata sınırını ε'dan küçük yapan en küçük n'yi seç.
4. **İterasyonu yap.** $p_n=g(p_{n-1})$ değerlerini tabloda topla.

Sık yapılan hatalar

- Yalnız $\mid g'\mid<1$'i denetlemek yetmez; g'nin aralığı kendi içine götürdüğü de gösterilmelidir.
- $\mid g'(p)\mid>1$ olan bir g ile iterasyon, p_0 köke çok yakın olsa bile uzaklaşır.

Örnek 13.6 (Sabit Nokta İterasyonu ile Bir Kübiğin Kökü). $x^3+x-1=0$ denklemini $x=g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ biçiminde yazınız. g'nin $[0{,}5;\,1]$ aralığında Sabit Nokta Teoreminin koşullarını sağladığını gösteriniz ve $p_0=0{,}5$ ile 10^{-3} hassaslık için yeterli adım sayısını bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Denklem

$$x^3 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x(1+x^2) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+x^2}$$

biçiminde yazılabilir.
Aralık koşulu. g, $[0{,}5;\,1]$ üzerinde azalandır; $g(0{,}5) = 0{,}8$ ve $g(1) = 0{,}5$ olduğundan $g([0{,}5;\,1]) = [0{,}5;\,0{,}8] \subseteq [0{,}5;\,1]$.
Türev koşulu. $g'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$'dir. $\mid g' \mid$ en büyük değerini $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$'te alır:

$$\mid g'(x) \mid \le \frac{2/\sqrt{3}}{(4/3)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0{,}6495 < 0{,}65 = k.$$

Adım sayısı. $p_1 = g(0{,}5) = 0{,}8$ olduğundan

$$\frac{k^n}{1-k} \mid p_1 - p_0 \mid = \frac{0{,}65^n}{0{,}35} \cdot 0{,}3 < 10^{-3} \Leftrightarrow 0{,}65^n < 0{,}00116.$$

Logaritma alınırsa $n > \frac{\ln 0{,}00116}{\ln 0{,}65} \approx 15{,}68$, yani $n = 16$ adım yeterlidir.
İlk iterasyonlar $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}609756$, $p_3 = 0{,}728968$, $p_4 = 0{,}653000$ olup köke ($p = 0{,}6823278\ldots$) iki yandan salınarak yaklaşır; bunun nedeni $g' < 0$ olmasıdır.
■

13.8 Newton-Raphson Metodu

Eğrinin $(p_{n-1}, f(p_{n-1}))$ noktasındaki teğeti x eksenini p_n'de keser (Tanım 6.1):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \qquad n \ge 1.$$

$f(p) = 0$, $f'(p) \neq 0$ ve p_0 köke yeterince yakınsa yakınsama garantidir (Teorem 6.1) ve doğru basamak sayısı her adımda kabaca ikiye katlanır.

> ⚠ Sık yapılan hatalar
>
> - $f'(p_{n-1}) = 0$ ya da çok küçükse adım tanımsızdır ya da çok uzağa sıçrar; başka bir p_0 seçilir.
> - Kökten uzak bir p_0 ile dizi başka bir köke gidebilir ya da salınabilir; önce bir kök aralığı bulmak iyi bir alışkanlıktır.

Örnek 13.7 (Newton-Raphson ile Bir Kübiğin Kökü). $x^3 - 2x - 5 = 0$ denkleminin köküne $p_0 = 2$ alarak Newton-Raphson metoduyla üç adım yaklaşınız.

Çözüm.
$f(x) = x^3 - 2x - 5$, $f'(x) = 3x^2 - 2$ olduğundan $p_n = p_{n-1} - \dfrac{p_{n-1}^3 - 2p_{n-1} - 5}{3p_{n-1}^2 - 2}$,dir.

n	p_{n-1}	$f(p_{n-1})$	$f'(p_{n-1})$	p_n
1	2	-1	10	2,1
2	2,1	0,061	11,23	2,0945681
3	2,0945681	0,0001857	11,1616	2,0945515

Üç adımda yedi basamak doğrudur: $p_3 = 2{,}0945515$ ve $\mid f(p_3) \mid \approx 1{,}7 \cdot 10^{-9}$. Aynı hassaslık için ikiye bölmeyle yirmiden fazla adım gerekirdi.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

13.9 Secant ve Regula Falsi

İki yöntem de türev yerine kirişin eğimini kullanır. Secant metodunda kiriş son iki noktadan geçer (Tanım 7.1):

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})\,(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}.$$

Regula Falsi'de aynı formülde p_{n-2} yerine, f değeri $f(p_{n-1})$ ile ters işaretli olan en son nokta p_k yazılır (Tanım 7.2). Böylece kök hep son iki uç arasında kalır (Önerme 7.1), ama bir uç takılı kaldığı için yakınsama Secant'tan yavaştır.

Regula Falsi dört adımda

1. $f(p_0)\cdot f(p_1) < 0$ olduğunu göster.
2. Son nokta p_{n-1} ile, f değeri ona ters işaretli en son nokta p_k arasındaki kirişten p_n'yi hesapla.
3. $f(p_n)$'yi hesapla ve işaretini not et; bir sonraki adımın karşı ucu buna göre seçilir.
4. Durma kriterini sına; sağlanmıyorsa 2. adıma dön.

Örnek 13.8 (Secant ve Regula Falsi ile Bir Kübiğin Kökü). $x^3 - 2x - 5 = 0$ denkleminin köküne $p_0 = 2$ ve $p_1 = 3$ ile Secant ve Regula Falsi metotlarıyla p_4'e kadar yaklaşınız.

Çözüm.
$f(2) = -1$, $f(3) = 16$'dır. İki yöntem de p_2'yi aynı kirişten bulur:

$$p_2 = 3 - \frac{16\cdot(3-2)}{16-(-1)} = 3 - \frac{16}{17} = 2{,}0588235, \qquad f(p_2) = -0{,}390800.$$

$f(p_2) < 0$ olduğundan p_2 ile ters işaretli son nokta $p_1 = 3$'tür; bu yüzden p_3 de iki yöntemde aynıdır: $p_3 = 2{,}0812637$, $f(p_3) = -0{,}147204$. Ayrım bundan sonra başlar.

- **Secant** son iki noktayı (p_2, p_3) kullanır: $p_4 = 2{,}0948241$, $\mid p_4 - p \mid \approx 2{,}7\cdot 10^{-4}$.
- **Regula Falsi** $f(p_3) < 0$ olduğundan yine $p_1 = 3$'ü kullanır: $p_4 = 2{,}0896392$, $\mid p_4 - p \mid \approx 4{,}9\cdot 10^{-3}$.

Secant bir sonraki adımda $p_5 = 2{,}0945494$ ile beş basamağa ulaşırken Regula Falsi soldan, tek taraflı ve yavaş ilerler ($p_5 = 2{,}0927396$).
■

13.10 Lagrange İnterpolasyonu ve Hata Sınırı

$n+1$ farklı noktadan geçen, derecesi en çok n olan tek polinom (Teorem 8.2)

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,L_k(x), \qquad L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

dir. Her L_k kendi düğümünde 1, ötekilerde 0'dır. Hata sınırı (Sonuç 8.1):

$$\mid f(x) - P(x) \mid \le \frac{M}{(n+1)!}\,\bigl|\,(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\,\bigr|, \qquad \mid f^{(n+1)} \mid \le M.$$

Dört adımda interpolasyon ve hata sınırı

1. $L_k(x)$'leri istenen noktada sayı olarak hesapla; kontrol için $\sum_k L_k(x) = 1$ olmalı.
2. $P(x) = \sum_k f(x_k)L_k(x)$'i bul.
3. $f^{(n+1)}$'i çıkar ve düğümlerle x'i içeren aralıkta M ile sınırla.
4. Hata sınırını yaz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 13.9 (Karekök İçin İkinci Dereceden İnterpolasyon). $f(x)=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $x_0=4$, $x_1=9$, $x_2=16$ düğümlerindeki ikinci dereceden Lagrange polinomuyla $\sqrt{10}$ için bir yaklaşım bulunuz ve bir hata sınırı veriniz.

Çözüm.
$x=10$ için katsayı polinomları

$$L_0(10)=\frac{(10-9)(10-16)}{(4-9)(4-16)}=-\frac{1}{10},$$
$$L_1(10)=\frac{(10-4)(10-16)}{(9-4)(9-16)}=\frac{36}{35},$$
$$L_2(10)=\frac{(10-4)(10-9)}{(16-4)(16-9)}=\frac{1}{14}$$

olur; toplamları 1'dir. Buradan

$$P(10)=2\cdot\left(-\frac{1}{10}\right)+3\cdot\frac{36}{35}+4\cdot\frac{1}{14}=\frac{111}{35}\approx 3{,}171429.$$

$f'''(x)=\frac{3}{8}\,x^{-5/2}$ azalan olduğundan $[4,16]$'da $M=f'''(4)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{32}=\frac{3}{256}$'dır:

$$|\,\sqrt{10}-P(10)\,|\le\frac{3/256}{3!}\,|\,(10-4)(10-9)(10-16)\,|=\frac{3}{256}\cdot\frac{36}{6}\approx 0{,}0703.$$

Gerçek değer $\sqrt{10}=3{,}162278$ olduğundan gerçek hata $0{,}00915$'tir.
■

13.11 Bölünmüş Farklar ve Newton Formülleri

Bölünmüş farklar (Tanım 9.1) basamaklı bir tabloda hesaplanır: her sütundaki sayı, solundaki iki komşunun farkının, köşegenin uçlarındaki düğümlerin farkına bölümüdür. Newton biçimi (Teorem 9.1) tablonun **üst kenarındaki** sayıları kullanır:

$$P_n(x)=f[x_0]+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots$$

Düğümler h aralıklıysa $f[x_0,\dots,x_k]=\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\,h^k}$ olur (Önerme 9.1) ve $x=x_0+sh$ ile

Formül	Kullanılan farklar	Ne zaman
İleri fark (Sonuç 9.2): $f(x_0)+\sum_k \binom{s}{k}\Delta^k f(x_0)$	Tablonun üst kenarı	x tablonun başına yakın
Geri fark (Teorem 9.3): $f(x_n)+\sum_k (-1)^k\binom{-s}{k}\nabla^k f(x_n)$, $x=x_n+sh$	Tablonun alt kenarı	x tablonun sonuna yakın

Newton biçimi dört adımda

1. Düğümleri ve değerleri ilk iki sütuna, aralarına birer boş satır bırakarak yaz.
2. Her sütunu bir öncekinden hesapla: k. fark için payda $x_{i+k}-x_i$'dir.
3. Üst kenardaki katsayıların altını çiz.
4. $P_n(x)$'i yaz; yeni bir nokta eklenirse tabloya bir satır eklemek yeterlidir.

Örnek 13.10 (Bölünmüş Fark Tablosundan Kübik Polinom). $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,9)$ noktalarından geçen polinomu Newton bölünmüş fark formülüyle bulunuz ve ileri fark formülüyle $P(0{,}5)$'i hesaplayınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

k	x_k	$f[x_k]$	$f[x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-2},x_{k-1},x_k]$	$f[x_{k-3},\dots,x_k]$
0	-1	$\underline{0}$			
			$\underline{1}$		
1	0	1		$\underline{0}$	
			1		$\underline{1}$
2	1	2		3	
			7		
3	2	9			

Altı çizili katsayılarla

$$P_3(x) = 0 + 1\cdot(x+1) + 0\cdot(x+1)x + 1\cdot(x+1)x(x-1) = x^3 + 1.$$

Düğümler $h = 1$ aralıklıdır; ileri farklar $\Delta f(x_0) = 1$, $\Delta^2 f(x_0) = 0$, $\Delta^3 f(x_0) = 6$'dır $(= 3!\cdot 1^3 \cdot 1)$. $x = 0{,}5 = -1 + s\cdot 1$ için $s = 1{,}5$ ve

$$P(0{,}5) = 0 + 1{,}5\cdot 1 + \binom{1{,}5}{2}\cdot 0 + \binom{1{,}5}{3}\cdot 6 = 1{,}5 + \frac{1{,}5\cdot 0{,}5\cdot(-0{,}5)}{6}\cdot 6 = 1{,}125$$

olur; gerçekten $0{,}5^3 + 1 = 1{,}125$'tir.
■

13.12 Nümerik Türev

Türev formülleri, f'nin birkaç noktadaki değerlerinden türevi yaklaşık verir. Hata terimindeki türev, kullanılan noktaları içeren aralıkta M ile sınırlanır.

Formül	Yaklaşım	Hata terimi
$f'(x_0)$: ileri $(h>0)$, geri $(h<0)$ fark	$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$-\dfrac{h}{2}f''(\xi)$
$f'(x_0)$: üç-nokta orta nokta	$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$	$-\dfrac{h^2}{6}f'''(\xi)$
$f'(x_0)$: üç-nokta uç nokta, $x_k = x_0+kh$	$\dfrac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h}$	$\dfrac{h^2}{3}f'''(\xi)$
$f''(x_0)$: orta nokta	$\dfrac{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2}$	$-\dfrac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$

Ayrıntılar: Önerme 10.1, Sonuç 10.1, Önerme 10.3 ve Önerme 10.4. Tablonun sonundaki türev için uç nokta formülü $h<0$ ile, yani soldaki değerlerle kullanılır.

⚠ Sık yapılan hatalar

- Orta nokta formülünde payda $2h$'dir, h değil.
- h'yi çok küçültmek hesapta yuvarlama hatasını büyütür; hata terimi yalnız kesme hatasını ölçer.

Örnek 13.11 (Kosinüsün Türevi İçin Üç Formül). $f(x) = \cos x$ ve $h = 0{,}1$ için ileri fark ve üç-nokta orta nokta formülleriyle $f'(1)$'e, ikinci türev formülüyle $f''(1)$'e yaklaşınız ve hata sınırlarını veriniz.

Çözüm.
$\cos 0{,}9 = 0{,}6216100$, $\cos 1 = 0{,}5403023$, $\cos 1{,}1 = 0{,}4535961$'dir.

- **İleri fark:**

$$f'(1) \approx \frac{0{,}4535961 - 0{,}5403023}{0{,}1} = -0{,}867062.$$

$[1;\,1{,}1]$'de $|\,f''\,| = |\cos| \le \cos 1$ olduğundan hata en çok $\frac{0{,}1}{2}\cdot 0{,}5403 = 0{,}0270$'tir.

- **Orta nokta:**

$$f'(1) \approx \frac{0{,}4535961 - 0{,}6216100}{0{,}2} = -0{,}840069.$$

$[0{,}9;\,1{,}1]$'de $|\,f'''\,| = |\sin| \le \sin 1{,}1 = 0{,}8912$ olduğundan hata en çok $\frac{0{,}01}{6}\cdot 0{,}8912 = 0{,}00149$'dur.

- **İkinci türev:**

$$f''(1) \approx \frac{0{,}6216100 - 2\cdot 0{,}5403023 + 0{,}4535961}{0{,}01} = -0{,}539852.$$

$|\,f^{(4)}\,| = |\cos| \le \cos 0{,}9$ olduğundan hata en çok $\frac{0{,}01}{12}\cdot 0{,}6216 = 0{,}00052$'dir.

Gerçek değerler $f'(1) = -\sin 1 = -0{,}841471$ ve $f''(1) = -\cos 1 = -0{,}540302$'dir; gerçek hatalar sırasıyla $0{,}0256$, $0{,}0014$ ve $0{,}00045$ olup sınırların altındadır.

■

13.13 Nümerik İntegral

Kapalı Newton-Cotes formülleri aralığın uçlarını kullanır, açık formüller kullanmaz (Sonuç 11.1, Sonuç 11.2). Kapalı formüllerde $h = \frac{b-a}{n}$, açık formüllerde $h = \frac{b-a}{n+2}$'dir.

Kural	Formül	Hata terimi	Tam olduğu derece
Yamuk ($n=1$)	$\frac{h}{2}\left[\, f(x_0) + f(x_1) \,\right]$	$-\frac{h^3}{12} f''(\xi)$	1
Simpson ($n=2$)	$\frac{h}{3}\left[\, f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) \,\right]$	$-\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$	3
Simpson 3/8 ($n=3$)	$\frac{3h}{8}\left[\, f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3) \,\right]$	$-\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$	3
Orta nokta (açık, $n=0$)	$2h\, f(x_0)$	$\frac{h^3}{3} f''(\xi)$	1
Açık, $n=1$	$\frac{3h}{2}\left[\, f(x_0) + f(x_1) \,\right]$	$\frac{3h^3}{4} f''(\xi)$	1
Açık, $n=2$	$\frac{4h}{3}\left[\, 2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2) \,\right]$	$\frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)$	3

Tam olduğu derece: hata terimindeki türev bu dereceye kadar olan polinomlarda sıfırdır, yani formül onlarda gerçek değeri verir.

Dört adımda integral ve hata sınırı

1. Kuralı seç ve h'yi bul: kapalıda $\frac{b-a}{n}$, açıkta $\frac{b-a}{n+2}$.
2. Düğümleri yaz: kapalıda $x_0 = a, \ldots, x_n = b$; açıkta $x_0 = a + h, \ldots, x_n = b - h$.
3. Formülü uygula.
4. Hata terimindeki türevi $[a,b]$ üzerinde M ile sınırla ve $|\,E\,| \le (\text{katsayı})\cdot M$ yaz.

Örnek 13.12 (Bir Kök Fonksiyonunun İntegraline Dört Kuralla Yaklaşım). $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ integraline Yamuk, Simpson, Simpson 3/8 ve Orta Nokta kurallarıyla yaklaşınız. Yamuk ve Simpson kuralları için hata sınırı veriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Gerçek değer $\frac{2}{3}\left(\,2\sqrt{2}-1\,\right)=1{,}2189514$'tür.
Gereken değerler $f(0)=1$, $f(\frac{1}{3})=1{,}1547005$, $f(\frac{1}{2})=1{,}2247449$, $f(\frac{2}{3})=1{,}2909944$ ve $f(1)=1{,}4142136$'dır. Yamukta $h=1$, Simpson'da ve orta noktada $h=\frac{1}{2}$, Simpson 3/8'de $h=\frac{1}{3}$'tür:

$$\begin{aligned}
\text{Yamuk:}\quad & \frac{1}{2}\left[\,1+1{,}4142136\,\right]=1{,}2071068,\\
\text{Simpson:}\quad & \frac{1}{6}\left[\,1+4\cdot 1{,}2247449+1{,}4142136\,\right]=1{,}2188655,\\
\text{Simpson 3/8:}\quad & \frac{1}{8}\left[\,1+3\cdot 1{,}1547005+3\cdot 1{,}2909944\right.\\
& \qquad \left.+1{,}4142136\,\right]=1{,}2189123,\\
\text{Orta nokta:}\quad & 1\cdot f\!\left(\frac{1}{2}\right)=1{,}2247449.
\end{aligned}$$

Kural	Yaklaşım	Gerçek hata
Yamuk	1,2071068	0,0118446
Simpson	1,2188655	0,0000859
Simpson 3/8	1,2189123	0,0000391
Orta nokta	1,2247449	0,0057935

Hata sınırları. $f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$ ve $f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}(1+x)^{-7/2}$'dir; mutlak değerleri $[0,1]$'de $x=0$'da en büyüktür:

$$|\,E_{\text{Yamuk}}\,|\le\frac{1^3}{12}\cdot\frac{1}{4}=0{,}0208,\qquad |\,E_{\text{Simpson}}\,|\le\frac{(1/2)^5}{90}\cdot\frac{15}{16}\approx 0{,}000326.$$

Gerçek hatalar bu sınırların altındadır. Orta nokta kuralı tek bir fonksiyon değeriyle yamuk kuralından daha iyi sonuç verir; Simpson kuralı ise yalnız üç değerle hatayı 10^{-4}'ün altına indirir.
■

13.14 En Küçük Kareler Doğrusu

$(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ verisine uydurulan $\hat{y}=ax+b$ doğrusu, $E=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)^2$ toplamını minimum yapar (Tanım 12.2). a ve b normal denklemlerden (Tanım 12.3) bulunur; matris biçimi

$$\begin{bmatrix}\sum x_i^2 & \sum x_i\\ \sum x_i & n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum x_iy_i\\ \sum y_i\end{bmatrix}$$

ve çözümü

$$a=\frac{n\sum x_iy_i-\sum x_i\sum y_i}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2},\qquad b=\frac{\sum y_i-a\sum x_i}{n}$$

dir.

Regresyon doğrusu dört adımda

1. x_i, y_i, x_i^2, x_iy_i sütunlu bir tablo kur ve sütun toplamlarını al.
2. Normal denklemleri ya da matris biçimini yaz.
3. a ve b'yi çöz.
4. İstenirse $\hat{y}_i$'leri, artıkları $q_i=y_i-\hat{y}_i$ ve $E=\sum q_i^2$'yi hesapla; kontrol için $\sum q_i=0$ olmalıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 13.13 (Beş Noktaya Doğru Uydurma). $(1,2),(2,3),(3,5),(4,4),(5,6)$ noktalarına en küçük kareler yöntemiyle bir doğru uydurunuz ve E'yi hesaplayınız.

Çözüm.

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	2	1	2
2	3	4	6
3	5	9	15
4	4	16	16
5	6	25	30
$\Sigma=15$	$\Sigma=20$	$\Sigma=55$	$\Sigma=69$

Normal denklemler $55a+15b=69$ ve $15a+5b=20$'dir. Buradan

$$a=\frac{5\cdot 69-15\cdot 20}{5\cdot 55-15^2}=\frac{45}{50}=0{,}9, \qquad b=\frac{20-0{,}9\cdot 15}{5}=1{,}3$$

ve regresyon doğrusu $\hat{y}=0{,}9x+1{,}3$'tür. Tahmini değerler $2{,}2;\,3{,}1;\,4;\,4{,}9;\,5{,}8$, artıklar $-0{,}2;\,-0{,}1;\,1;\,-0{,}9;\,0{,}2$ olup toplamları 0'dır ve

$$E=0{,}04+0{,}01+1+0{,}81+0{,}04=1{,}9.$$

$\blacksquare$

 CC BY-NC-SA 4.0