Matematiksel İstatistik

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com
Bu çalışma Creative Commons BY-NC-SA 4.0 lisansıyla paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 4 Kasım 2026

İçindekiler

Giriş 6

1 Bernoulli, Binom ve Çok Terimli Dağılımlar 7
1.1 Bernoulli Dağılımı 7
1.2 Binom Dağılımı 8
1.3 Çok Terimli Dağılım 14

2 Hipergeometrik, Geometrik ve Negatif Binom Dağılımları 20
2.1 Hipergeometrik Dağılım 20
2.2 Geometrik Dağılım 25
2.3 Negatif Binom Dağılımı (Pascal Dağılımı) 29

3 Poisson ve Kesikli Düzgün Dağılımlar 34
3.1 Poisson dağılımı ve Poisson deneyi 34
3.2 Poisson dağılımının momentleri 37
3.3 Binom dağılımına Poisson yaklaşımı 40
3.4 Kesikli düzgün dağılım 42

4 Önemli Sürekli Dağılımlar 46
4.1 Sürekli Düzgün Dağılım 46
4.2 Gamma Fonksiyonu 47
4.3 Gamma Dağılımı 50
4.4 Üstel Dağılım 52
4.5 Beta Fonksiyonu ve Beta Dağılımı 55
4.6 Weibull Dağılımı 59
4.7 Cauchy Dağılımı 61
4.8 Log-Normal Dağılım 65

5 Normal Dağılım 67
5.1 Normal Eğri ve Özellikleri 67
5.2 Moment Üreten Fonksiyon 69
5.3 Doğrusal Dönüşümler ve Bağımsız Normallerin Birleşimleri 70
5.4 Standart Normal Dağılım ve Tablo Kullanımı 71
5.5 Olasılıktan Değere: Kantiller 75
5.6 Normal Dağılımla Hesaplar 77
5.7 Binom Dağılımına Normal Yaklaşım 79

6 İstatistiğe Giriş ve Betimsel Ölçüler 84
6.1 İstatistik Nedir? 84

 CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Temel Örnekleme Kavramları . . . 84
6.3 Örnekleme Yöntemleri . . . 86
6.4 Merkezi Eğilim Ölçüleri . . . 89
6.5 Dağılım Ölçüleri . . . 96
6.6 Konum Ölçüleri: Yüzdelikler ve Çeyreklikler . . . 100

7 Örneklem ve İstatistikler . . . 103
7.1 Örneklem ve Örneklem Uzayı . . . 103
7.2 İstatistik . . . 103
7.3 Örneklem Ortalamasının Beklenen Değeri ve Varyansı . . . 106
7.4 Bir Sonlu Kitlede Örnekleme Dağılımı . . . 109
7.5 Normal Kitleden Alınan Örneklem . . . 113
7.6 Markov ve Chebyshev Eşitsizlikleri . . . 115

8 Yakınsama ve Merkezi Limit Teoremi . . . 119
8.1 Olasılıkta Yakınsama . . . 119
8.2 Zayıf Büyük Sayılar Yasası . . . 120
8.3 Hemen Hemen Her Yerde Yakınsama . . . 123
8.4 Dağılımda Yakınsama . . . 123
8.5 Yakınsama Türleri Arasındaki İlişkiler . . . 125
8.6 Merkezi Limit Teoremi . . . 127
8.7 Merkezi Limit Teoremiyle Olasılık Hesabı . . . 131

9 Momentler Yöntemi . . . 139
9.1 Tahmin Teorisine Giriş . . . 139
9.2 Nokta Tahmini . . . 139
9.3 Momentler Yöntemi . . . 140
9.4 Bilinen Dağılımlarda Moment Tahmin Edicileri . . . 144
9.5 Yöntemin Bir Zayıflığı . . . 148

10 En Çok Olabilirlik Yöntemi . . . 150
10.1 Olabilirlik Fonksiyonu . . . 150
10.2 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi . . . 151
10.3 Tek Parametreli Örnekler . . . 153
10.4 Değişmezlik Özelliği . . . 155
10.5 Birden Çok Parametre . . . 156
10.6 Başka Dağılımlar . . . 161

11 Tahmin Edicilerin Özellikleri . . . 164
11.1 Yansızlık . . . 164
11.2 Hata kareler ortalaması . . . 173
11.3 Etkinlik . . . 179
11.4 Tutarlılık . . . 181

 CC BY-NC-SA 4.0

12 Örneklem Dağılımları . . . 184
12.1 Ki-kare Dağılımı . . . 184
12.2 Student t Dağılımı . . . 190
12.3 F Dağılımı . . . 194
12.4 Normal Örneklemde Örneklem Ortalaması ve Varyansı . . . 197

13 Ortalama için Aralık Tahmini . . . 203
13.1 Güven Aralığı ve Güven Düzeyi . . . 203
13.2 Varyans Bilindiğinde Kitle Ortalaması İçin Güven Aralığı . . . 205
13.3 Varyans Bilinmediğinde Kitle Ortalaması İçin Güven Aralığı . . . 209
13.4 Büyük Örneklemlerde Aralık . . . 211

14 Varyans ve İki Kitle için Aralık Tahmini . . . 213
14.1 Kitle Varyansı İçin Güven Aralığı . . . 213
14.2 İki Varyansın Oranı İçin Güven Aralığı . . . 216
14.3 İki Ortalamanın Farkı İçin Güven Aralığı . . . 219

15 Oran için Aralık Tahmini . . . 228
15.1 Binom Parametresi p için Aralık Tahmini . . . 228
15.2 İki Binom Parametresinin Farkı için Aralık Tahmini . . . 233
15.3 Aralık Tahmini Örnekleri . . . 235

16 Hipotez Testlerine Giriş . . . 245
16.1 Hipotezler . . . 245
16.2 Test İstatistiği ve Kritik Bölge . . . 246
16.3 İki Tür Hata ve Testin Gücü . . . 246
16.4 Normal Kitlenin Ortalaması İçin Z Testi . . . 248
16.5 Varyans Bilinmediğinde t Testi . . . 251
16.6 p Değeri . . . 252
16.7 Güven Aralığı ile İki Yönlü Test . . . 254

17 Alıştırmalar . . . 256

18 Tablolar . . . 260
18.1 Standart Normal Dağılım . . . 260
18.2 t Dağılımı . . . 262
18.3 Ki-kare Dağılımı . . . 263
18.4 F Dağılımı . . . 266

 CC BY-NC-SA 4.0

Giriş

Matematiksel istatistik, olasılık teorisinin araçlarıyla veriden çıkarım yapmanın kuramını kurar. Önce sık karşılaşılan dağılımları tanıyıp örneklemin davranışını inceleriz; sonra bilinmeyen parametreleri tahmin etmenin yollarını, bu tahminlerin ne kadar iyi olduğunu, güven aralıklarını ve hipotez testlerini görürüz. Rastgele değişken, beklenen değer, varyans ve moment üreten fonksiyon gibi ön bilgiler için Olasılık Teorisi'ne bakılabilir. Örneklerde kullanılan normal, t, χ^2 ve F tabloları kitabın sonundaki Tablolar sayfasındadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

1. Bernoulli, Binom ve Çok Terimli Dağılımlar

İstatistikte veriyi çoğu zaman bilinen bir dağılım ailesinden gelmiş sayarız: "kusurlu parça sayısı binomdur", "bekleme süresi üsteldir" gibi. Çıkarım yapmadan önce bu ailelerin olasılık fonksiyonlarını, beklenen değerlerini ve varyanslarını rahatça kullanabilmemiz gerekir. Bu kısımda en sık karşılaşılan kesikli ve sürekli dağılımları sırayla ele alacağız.
İlk bölümün konusu, sonuçları "başarı" ve "başarısızlık" diye ikiye ayrılan denemelerdir. Tek bir denemeyi Bernoulli dağılımı, n bağımsız denemedeki başarı sayısını binom dağılımı anlatır. Bu iki dağılımın temel özellikleri Olasılık Teorisi kitabında ispatlandı; burada onları kısaca hatırlatıp hesap örneklerine ağırlık vereceğiz. Bölümün yeni konusu, iki yerine k sonuçlu denemeleri sayan **çok terimli dağılımdır**.

1.1 Bernoulli Dağılımı

Sonucu yalnızca iki biçimde kaydedilen bir deneyle başlayalım: para yazı ya da tura gelir, parça sağlam ya da kusurludur, soru doğru ya da yanlış cevaplanır.
Böyle bir deneye **Bernoulli deneyi** denir (Olasılık Teorisi'ndeki tanım). Saydığımız sonuca **başarı** deyip B ile, ötekine **başarısızlık** deyip B^c ile gösterelim. Örnek uzay $\Omega = B \cup B^c$, olaylar ailesi $\mathcal{U} = \{\varnothing, \Omega, B, B^c\}$ olur. $0 < p < 1$ olmak üzere

$$P(B) = p, \qquad P(B^c) = 1 - p = q$$

yazarız; p başarı, q başarısızlık olasılığıdır ve $p + q = 1$'dir. "Başarı" sözcüğü bir değer yargısı taşımaz; kusurlu parçaları sayıyorsak kusurlu çıkması başarıdır.
Bernoulli deneyini sayıya çevirmenin doğal yolu, gelen başarıların sayısını kaydetmektir: $X(B) = 1$, $X(B^c) = 0$. Bu X'in değer kümesi $D_X = \{0, 1\}$, olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}, \qquad x = 0, 1$$

olur. Üsler yalnızca iki değeri tek satırda toplar: $x = 1$ için $f(1) = p$, $x = 0$ için $f(0) = 1 - p$ çıkar. Böyle bir X'e p parametreli **Bernoulli dağılımına** sahiptir denir ve $X \sim \text{Bernoulli}\ (p)$ yazılır (Olasılık Teorisi'ndeki tanım; orada $B(1, p)$ gösterimi kullanılır). p sayısına dağılımın **parametresi** denir: p bilinince dağılım tamamen bellidir.
Bernoulli dağılımının momentleri tek satırda hesaplanır (ispatı). X yalnızca 0 ve 1 değerlerini aldığından her $k \geq 1$ için $X^k = X$'tir; öyleyse

$$E(X^k) = \sum_{x=0}^{1} x^k P(X = x) = P(X = 1) = p.$$

Buradan varyans ve moment üreten fonksiyon gelir:

$$\text{Var}\ (X) = E(X^2) - \big(\ E(X)\big)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq,$$

$$M_X(t) = E\ \big(\ e^{tX}\ \big) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} f(x) = e^{t\cdot 0} q + e^{t\cdot 1} p = q + pe^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Sağlama olarak momentleri moment üreten fonksiyonun türevlerinden de okuyabiliriz (momentler teoremi): $M'_X(t) = M''_X(t) = pe^t$ olduğundan $M'_X(0) = p = E(X)$ ve $M''_X(0) = p = E(X^2)$ bulunur.
Moment üreten fonksiyonun asıl gücü dağılımı belirlemesidir: iki rastgele değişkenin moment üreten fonksiyonları varsa ve 0'ın bir komşuluğunda aynıysa, dağılımları da aynıdır (teklik teoremi). Yani moment üreten fonksiyonu bilinen bir değişkenin olasılık (ya da yoğunluk) fonksiyonu, bu fonksiyonu tanıdık bir kalıpla eşleştirerek bulunabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 1.1 (Moment Üreten Fonksiyondan Bernoulli Dağılımı). X rastgele değişkeninin moment üreten fonksiyonu

$$M_X(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

olsun. X'in olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm.
Verilen fonksiyonu Bernoulli dağılımının moment üreten fonksiyonu $q + pe^t$ ile karşılaştıralım. e^t'nin katsayısı $p = \frac{2}{3}$, sabit terim $q = \frac{1}{3}$'tür ve gerçekten $p + q = 1$'dir. Demek ki M_X, $\text{Bernoulli}\left(\frac{2}{3}\right)$ dağılımının moment üreten fonksiyonuyla her t için aynıdır. Teklik teoremi gereği

$$X \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{2}{3}\right), \qquad f(x) = P(X = x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

■

Örnek 1.2 (Moment Üreten Fonksiyondan Bir Olasılık). X rastgele değişkeninin moment üreten fonksiyonu $M_X(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^t$, $t \in \mathbb{R}$ ise $P(X = 1)$ olasılığını hesaplayınız.

Çözüm.
Örnek 1.1'de $X \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{2}{3}\right)$ bulduk; öyleyse

$$P(X = 1) = f(1) = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{2}{3}.$$

Aynı sonucu doğrudan da okuyabiliriz. Kesikli bir değişken için $M_X(t) = \sum_x e^{tx} P(X = x)$ olduğundan, e^{tx} teriminin katsayısı $P(X = x)$'tir. Burada e^t'nin katsayısı $\frac{2}{3}$, $e^{0\cdot t} = 1$'in katsayısı $\frac{1}{3}$'tür; yani $P(X = 1) = \frac{2}{3}$ ve $P(X = 0) = \frac{1}{3}$.
■

1.2 Binom Dağılımı

Aynı Bernoulli deneyini tekrar tekrar yaptığımızda ilgilendiğimiz büyüklük çoğu zaman toplam başarı sayısıdır.
Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli deneyinin aynı koşullar altında ve **bağımsız** olarak n kez tekrarlanmasına **binom deneyi** denir. İki örnek:

- Tura gelmesinin başarı sayıldığı bir para atışının 10 kez tekrarlanması.
- 6 kırmızı ve 4 siyah top bulunan bir kavanozdan **iadeli** olarak 3 top çekilmesi. Çekilen top geri konduğu için her çekilişte kırmızı gelme olasılığı $\frac{6}{10}$'da kalır ve çekilişler birbirini etkilemez. İadesiz çekilişte bu bozulur; o durumu sonraki bölümde hipergeometrik dağılım anlatacak.

Binom deneyinin örnek uzayı, uzunluğu n olan B–B^c dizilerinden oluşur:

$$\Omega = \left\{ \underbrace{B^c \cdots B^c}_{0 \text{ başarı}}, \underbrace{BB^c \cdots B^c}_{1 \text{ başarı}}, \ldots, \underbrace{B \cdots B}_{n \text{ başarı}} \right\}.$$

X, n denemedeki başarı sayısı olsun; değer kümesi $D_X = \{0, 1, \ldots, n\}$'dir. Denemeler bağımsız olduğundan belirli bir dizinin olasılığı, harflerin olasılıklarının çarpımıdır. Buna göre olasılıkları tek tek yazalım:

$$\begin{aligned}
P(X = 0) &= P(B^c B^c \cdots B^c) = q^n, \\
P(X = 1) &= P(BB^c \cdots B^c \text{ ya da } \ldots \text{ ya da } B^c \cdots B^c B) = n\,p\,q^{n-1}, \\
P(X = 2) &= P(BBB^c \cdots B^c \text{ ya da } \ldots \text{ ya da } B^c \cdots B^c BB) = \binom{n}{2} p^2 q^{n-2}, \\
&\vdots \\
P(X = n) &= P(BB \cdots B) = p^n.
\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$X = 1$ satırında tek başarının yeri n biçimde, $X = 2$ satırında iki başarının yerleri $\binom{n}{2}$ biçimde seçilir ve her dizi aynı olasılıklıdır. Genel olarak x başarının yerleri $\binom{n}{x}$ biçimde seçilir ve böyle her dizinin olasılığı $p^x q^{n-x}$'tir. Böylece X'in olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad x = 0, 1, ..., n$$

olur. Böyle bir X'e n ve p parametreli **binom dağılımına** sahiptir denir ve $X \sim \text{Binom } (n, p)$ yazılır (Olasılık Teorisi'ndeki tanım ve türetilişi). Olasılıkların toplamı binom teoreminden 1 çıkar:

$$\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p + q)^n = 1.$$

Dağılımın adı da buradan gelir: $f(0), f(1), ..., f(n)$ sayıları, $(q + p)^n$ açılımının terimleridir. $n = 1$ için binom dağılımı Bernoulli dağılımıdır.

1.2.1 Bernoulli Toplamı Olarak Binom

Binom değişkeninin en kullanışlı yazılışı, onu denemelerin toplamı olarak görmektir. i'inci deneme başarılıysa $Y_i = 1$, değilse $Y_i = 0$ diyelim. $Y_1, ..., Y_n$ bağımsızdır, her biri Bernoulli (p) dağılımlıdır ve başarı sayısı bunların toplamıdır (ispatı):

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim \text{Binom } (n, p).$$

Örneğin on para atışında $X = Y_1 + \cdots + Y_{10}$'dur; Y_i'ler sırayla $0, 1, 0, 1, 1, ...$ gibi değerler alır ve toplamları tura sayısını verir. Bu yazılış beklenen değeri ve varyansı neredeyse hesapsız verir. Beklenen değer her zaman toplanır; varyansın toplanması için bağımsızlık yeterlidir:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n) = p + p + \cdots + p = np, \\ \text{Var } (X) &= \text{Var } (Y_1) + \cdots + \text{Var } (Y_n) = pq + \cdots + pq = npq. \end{aligned}$$

Moment üreten fonksiyon için bağımsız değişkenlerin bir özelliğini kullanırız: X ile Y bağımsızsa $E\left[\, g(X)\, h(Y) \,\right] = E\left[\, g(X) \,\right] E\left[\, h(Y) \,\right]$'dir (ispatı). $g(y) = h(y) = e^{ty}$ alınıp bu özellik n çarpana uygulanırsa

$$M_X(t) = E\left(\, e^{t(Y_1 + \cdots + Y_n)} \,\right) = E\left(\, e^{tY_1} \,\right) \cdots E\left(\, e^{tY_n} \,\right) = \prod_{i=1}^{n} M_{Y_i}(t) = (q + pe^t)^n$$

bulunur. Özetle, $X \sim \text{Binom } (n, p)$ ise

$$E(X) = np, \qquad \text{Var } (X) = npq, \qquad M_X(t) = (q + pe^t)^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aynı sonuçlar tanımdaki toplamı doğrudan hesaplayarak da elde edilir (ispatı). $E(X)$ için $x\binom{n}{x} = n\binom{n-1}{x-1}$ özdeşliği toplamı $np\,(p + q)^{n-1} = np$'ye indirir. $E(X^2) = \sum x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ toplamı ise doğrudan kolay hesaplanmaz; onun yerine $X^2 = X(X - 1) + X$ yazılıp $E\left(\, X(X-1) \,\right) = n(n-1)p^2$ bulunur.
Moment üreten fonksiyon bir sonucu daha hemen verir. $X \sim \text{Binom } (n, p)$ ve $Y \sim \text{Binom } (m, p)$ **aynı** p ile bağımsızsa

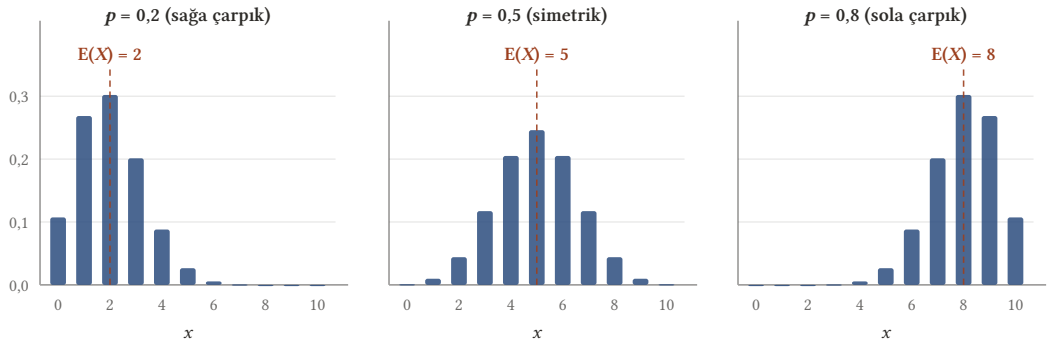
$$M_{X+Y}(t) = E\left(\, e^{tX} \,\right) E\left(\, e^{tY} \,\right) = (q + pe^t)^n (q + pe^t)^m = (q + pe^t)^{n+m}$$

olur; teklik teoremi gereği $X + Y \sim \text{Binom } (n + m, p)$'dir (ispatı). Bu doğaldır: önce n, sonra m bağımsız deneme yapmak, $n + m$ deneme yapmakla aynı şeydir.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Binom dağılımının biçimi

Olasılıklar beklenen değer np çevresinde toplanır. $p = \frac{1}{2}$ iken dağılım $\frac{n}{2}$'ye göre simetriktir, çünkü $\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x}$'tir. $p < \frac{1}{2}$ iken olasılıklar küçük değerlere yığılır ve sağda uzun bir kuyruk kalır; $p > \frac{1}{2}$ iken durum tersine döner. Başarılar ile başarısızlıkların rolünü değiştirmek bunu açıklar: $X \sim \text{Binom}\,(n, p)$ ise başarısızlık sayısı $n - X \sim \text{Binom}\,(n, q)$'dur.



Şekil 1.1: Binom(10, p) olasılık fonksiyonu p = 0,2, 0,5 ve 0,8 için. Olasılıklar beklenen değer np çevresinde toplanır. p = 0,5 iken çubuklar 5'e göre simetriktir; p = 0,2 ile p = 0,8 birbirinin aynadaki görüntüsüdür.

1.2.2 Binom Olasılıklarının Hesabı

Binom dağılımıyla her hesap aynı üç adımla başlar: X'in neyi saydığını söylemek, denemelerin bağımsız ve başarı olasılığının sabit olduğunu kontrol etmek, n ile p'yi belirlemek. Aşağıdaki örneklerde bu adımları hep açıkça yazacağız.

Örnek 1.3 (On Atışta Beş Tura). Hilesiz bir para 10 kez atılıyor. Tam 5 kez tura gelme olasılığı nedir?

Çözüm.
Önce tek bir sıralamaya bakalım: ilk beş atışın tura, son beş atışın yazı gelmesi. Atışlar bağımsız olduğundan bu sıralamanın olasılığı $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$'dur. Beş turanın yeri başka türlü de seçilebilir; 10 atıştan tura gelecek 5'ini seçmenin

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$$

yolu vardır ve her sıralama aynı olasılıklıdır. X tura sayısı ise $X \sim \text{Binom}\left(10, \frac{1}{2}\right)$ olur ve

$$P(X = 5) = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256} \approx 0{,}2461.$$

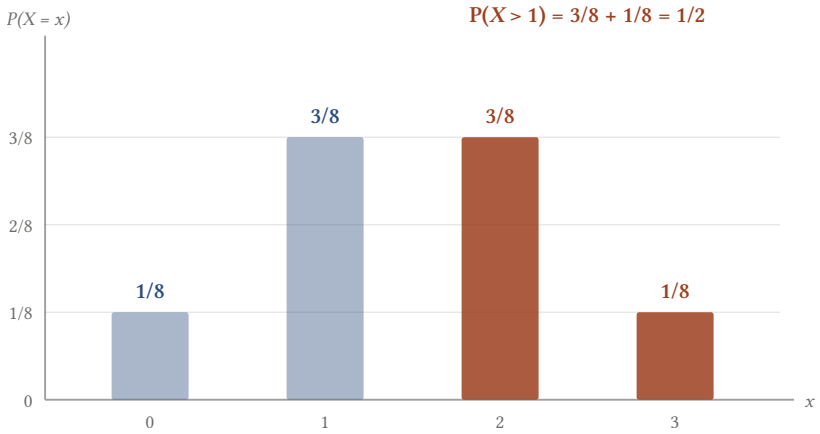
En olası sonuç olan "yarı yarıya" bile ancak dörtte bir olasılıkla gerçekleşir.
■

Örnek 1.4 (Üç Atışta Birden Fazla Tura). Düzgün bir para üç kez atılıyor. 1'den fazla tura gelmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm.
X gelen tura sayısı olsun. Atışlar bağımsız ve her atışta tura olasılığı $\frac{1}{2}$ olduğundan $X \sim \text{Binom}\left(3, \frac{1}{2}\right)$'dir. "1'den fazla" demek $X = 2$ ya da $X = 3$ demektir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P(X>1)=\sum_{x=2}^{3}\binom{3}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{1}{2}+\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$$
$$=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$



Şekil 1.2: Düzgün bir paranın üç atışında tura sayısı X, Binom(3, 1/2) dağılımlıdır. X > 1 olayına x = 2 ve x = 3 çubukları karşılık gelir; olasılığı bu iki çubuğun toplamıdır.

$p=\frac{1}{2}$ iken dağılım simetrik olduğundan $P(X\le 1)=P(X\ge 2)$ olmalıdır; ikisinin toplamı 1 olduğundan her biri $\frac{1}{2}$'dir. Bu, sonucun bir sağlamasıdır.
■

Örnek 1.5 (İadeli Çekilişte Beyaz Top Sayısı). Bir torbada eşit sayıda beyaz ve kırmızı top var. Çekilen top her seferinde torbaya geri atılarak 5 top çekiliyor. 3 tane beyaz top gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm.
X, 5 çekilişte gelen beyaz top sayısı olsun. Toplar geri atıldığı için her çekilişte beyaz gelme olasılığı $\frac{1}{2}$'de kalır ve çekilişler bağımsızdır; öyleyse $X\sim \text{Binom}\left(5,\frac{1}{2}\right)$ ve

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}=0{,}3125.$$

Torbadaki top sayısı sonucu etkilemez; önemli olan yalnızca beyazların oranıdır.
■

Sıradaki üç örnek aynı durumu farklı açılardan sorguluyor: 5 seçenekli, 20 soruluk bir testte bütün sorular rastgele işaretleniyor. X doğru cevap sayısı olsun. Her soruda doğru seçeneği tutturma olasılığı $\frac{1}{5}$'tir ve sorular birbirinden bağımsız işaretlenir; öyleyse $X\sim \text{Binom}\left(20,\frac{1}{5}\right)$'tir.

Örnek 1.6 (Rastgele İşaretlenen Testte En Az On Doğru). 5 seçenekli 20 soruluk bir testte sorular rastgele işaretleniyor. En az 10 doğru cevap olması olasılığı nedir?

Çözüm.
$X\sim \text{Binom}\left(20,\frac{1}{5}\right)$ doğru sayısıdır. İstenen olasılık on bir terimin toplamıdır:

$$P(X\ge 10)=\sum_{x=10}^{20}\binom{20}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{20-x}.$$

Terimler x büyüdükçe hızla küçülür. İlk birkaçı:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P(X=10) = 184756 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0{,}002031,$$

$$P(X=11) = 167960 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{11}\left(\frac{4}{5}\right)^{9} \approx 0{,}000462,$$

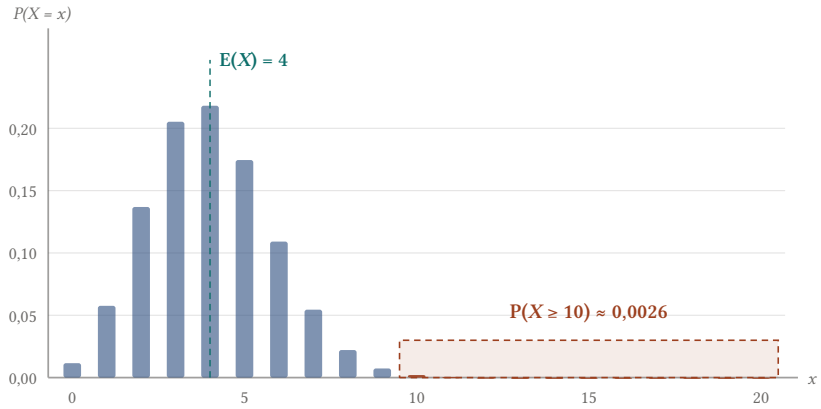
$$P(X=12) = 125970 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{12}\left(\frac{4}{5}\right)^{8} \approx 0{,}000087,$$

$$P(X=13) = 77520 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{13}\left(\frac{4}{5}\right)^{7} \approx 0{,}000013.$$

$x = 14$'ten sonraki terimlerin hepsinin toplamı $0{,}000002$'den küçüktür. Toplayınca

$$P(X \geq 10) \approx 0{,}0026$$

bulunur. Yani rastgele işaretlemeyle yarıyı tutturmak binde üç olasılığa bile ulaşmaz.



Şekil 1.3: Rastgele işaretlenen 20 soruluk testte doğru sayısı X, Binom(20, 1/5) dağılımlıdır. Olasılıkların neredeyse tamamı 0 ile 8 arasındadır; x ≥ 10 çubukları (kesikli çerçeve) çizimde ancak seçilebilecek kadar kısadır ve toplamları yaklaşık 0,0026'dır.

■

Örnek 1.7 (Rastgele İşaretlenen Testte Beklenen Doğru Sayısı). 5 seçenekli 20 soruluk bir testte sorular rastgele işaretleniyor. Doğru cevap sayısının beklenen değeri nedir?

Çözüm.
$X \sim \text{Binom}\left(20, \frac{1}{5}\right)$ olduğundan

$$E(X) = np = 20 \cdot \frac{1}{5} = 4.$$

Ortalamada 4 doğru beklenir. Beklenen değerin olası bir değer olması gerekmez, ama burada 4 aynı zamanda en olası değerdir: Örnek 1.6'daki şekilde en uzun çubuk $x = 4$'tedir.
■

Örnek 1.8 (Rastgele İşaretlenen Testte Beklenen Puan). 5 seçenekli 20 soruluk bir testte sorular rastgele işaretleniyor. Her doğru cevap 1 puan kazandırıyor, her 4 yanlış cevap ise 1 puan götürüyor. 20 soru için beklenen puan nedir?

Çözüm.

X doğru sayısı ise yanlış sayısı $20 - X$'tir. 4 yanlış 1 puan götürdüğüne göre her yanlış $\frac{1}{4}$ puan götürür. Toplam puanı S ile gösterirsek

$$S = 1 \cdot X - \frac{1}{4}(20 - X) = \frac{5}{4}X - 5$$

olur. Beklenen değer doğrusaldır ve Örnek 1.7'ye göre $E(X) = 4$'tür; öyleyse

$$E(S) = \frac{5}{4}E(X) - 5 = \frac{5}{4} \cdot 4 - 5 = 0.$$

Beklenen puan 0'dır. Yanlış cezası tam da bunun için seçilmiştir: rastgele işaretleme ortalamada ne kazandırır ne kaybettirir. Tek bir soruda da durum aynıdır: $\frac{1}{5} \cdot 1 - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0$.
■

Beklenen değer yalnızca doğrusal ifadelerde doğrudan taşınır. Doğrusal olmayan bir fonksiyonun beklenen değeri için olasılık fonksiyonuna geri döneriz: $E\left[\, g(X) \,\right] = \sum_x g(x) f(x)$.

Örnek 1.9 (Yazı ve Tura Sayıları Arasındaki Fark). Hilesiz bir para 5 kez atılıyor. Gelen yazıların sayısı ile gelen turaların sayısı arasındaki farkın mutlak değerinin beklenen değeri kaçtır?

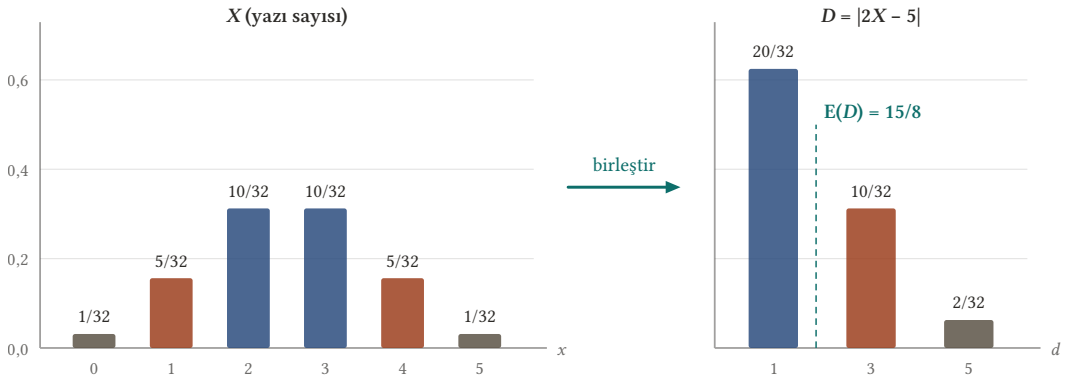
Çözüm.
X gelen yazı sayısı olsun; $X \sim \text{Binom}\left(5, \frac{1}{2}\right)$'dir. Tura sayısı $5 - X$ olduğundan istenen büyüklük

$$D = \left|\, X - (5 - X) \,\right| = \left|\, 2X - 5 \,\right|$$

olur. D, X'in doğrusal olmayan bir fonksiyonudur; beklenen değerini terim terim hesaplarız. $P(X = x) = \binom{5}{x}\frac{1}{32}$ ve $\binom{5}{x}$ katsayıları $1, 5, 10, 10, 5, 1$'dir. $x = 0, 1, \ldots, 5$ için $\left|\, 2x - 5 \,\right|$ değerleri $5, 3, 1, 1, 3, 5$ olur. Öyleyse

$$\begin{aligned} E(D) &= \sum_{x=0}^{5} \left|\, 2x - 5 \,\right| \binom{5}{x}\frac{1}{32} = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 1}{32} \\ &= \frac{60}{32} = \frac{15}{8} = 1{,}875. \end{aligned}$$

Aynı hesabı D'nin kendi dağılımıyla da yapabiliriz. $D = 1$ olayı $x = 2$ ya da $x = 3$'tür, olasılığı $\frac{20}{32}$; $D = 3$ olayı $x = 1$ ya da $x = 4$'tür, olasılığı $\frac{10}{32}$; $D = 5$ olayı $x = 0$ ya da $x = 5$'tir, olasılığı $\frac{2}{32}$. Buradan $E(D) = \frac{20+30+10}{32} = \frac{60}{32}$ yine çıkar.



Şekil 1.4: Hilesiz para beş kez atılıyor; X yazı sayısı, D = |2X − 5| yazı ile tura sayıları arasındaki farkın mutlak değeridir. Aynı renkteki iki çubuk D'nin aynı değerini verir (x ile 5 − x); bunlar birleşince sağdaki dağılım çıkar ve beklenen değer 15/8 olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dikkat: $E(2X-5) = 2\cdot\frac{5}{2} - 5 = 0$'dır, ama $E(D)$ sıfır değildir. Mutlak değer doğrusal olmadığından $E \mid 2X-5 \mid \neq \mid E(2X-5) \mid$'tir.
■

Örnek 1.10 (Kırmızı Top Sayısının Dağılımı). Bir kutuda 2 kırmızı, 4 beyaz, 3 siyah ve 1 yeşil top var. Kutudan iadeli olarak 3 top çekiliyor. X gelen kırmızı topların sayısı olsun. X'in olasılık fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm.
Yalnızca "kırmızı mı, değil mi" sorusuyla ilgilendiğimiz için her çekiliş bir Bernoulli deneyidir: kırmızı gelme olasılığı $p = \frac{2}{10}$, gelmeme olasılığı $q = \frac{8}{10}$. Çekilişler iadeli olduğundan bağımsızdır; $X \sim \text{Binom}\left(3, \frac{2}{10}\right)$ ve $D_X = \{0,1,2,3\}$'tür. K kırmızı, D kırmızı olmayan top olsun:

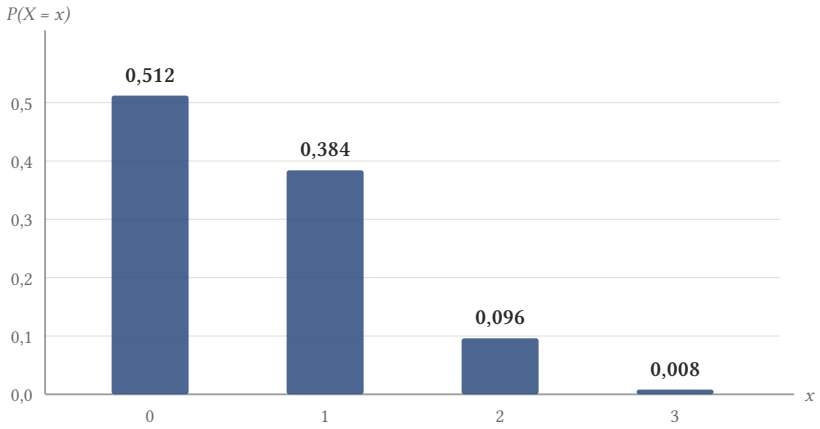
$$P(X=0) = \left(\frac{8}{10}\right)^3 = \frac{512}{1000} \qquad (DDD),$$

$$P(X=1) = 3\cdot\frac{2}{10}\cdot\left(\frac{8}{10}\right)^2 = \frac{384}{1000} (KDD \text{ ve sıralamaları}),$$

$$P(X=2) = 3\cdot\left(\frac{2}{10}\right)^2\cdot\frac{8}{10} = \frac{96}{1000} (KKD \text{ ve sıralamaları}),$$

$$P(X=3) = \left(\frac{2}{10}\right)^3 = \frac{8}{1000} \qquad (KKK).$$

Buradaki 3 çarpanları, $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$ sıralama sayısıdır. Sağlama: $512 + 384 + 96 + 8 = 1000$.



Şekil 1.5: Üç iadeli çekilişte kırmızı top sayısı X, Binom(3, 1/5) dağılımlıdır. Başarı olasılığı küçük olduğundan olasılıklar x = 0 tarafında yığılır ve her adımda hızla küçülür.

■

Bu örnekte beyaz, siyah ve yeşil topları tek bir "kırmızı olmayan" sınıfında birleştirdik. Bütün renkleri ayrı ayrı saymak istersek iki sonuçlu denemelerin ötesine geçmemiz gerekir.

1.3 Çok Terimli Dağılım

Binom dağılımı her denemeyi iki sonuca ayırır. Bir zar atışının altı, kutudaki topun dört renk sonucu olabilir. Her sonucun kaç kez geldiğini birlikte saymak, binom dağılımını k sonuca genelleştirir.

Tanım 1.1 (Çok Terimli Dağılım). Bir deneyin $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ile gösterilen k tane ayrık sonucu olsun ve tek bir denemede E_i sonucunun gelme olasılığı p_i olsun; burada her $p_i > 0$ ve $p_1 + p_2 + \cdots +$

 CC BY-NC-SA 4.0

$p_k = 1$'dir. Deney aynı koşullar altında n kez **bağımsız** olarak tekrarlansın ve X_i, E_i sonucunun bu n denemede kaç kez geldiğini göstersin ($i = 1, 2, ..., k$). $(X_1, X_2, ..., X_k)$ rastgele vektörüne **çok terimli (multinomial) dağılıma** sahiptir denir ve

$$(X_1, X_2, ..., X_k) \sim \text{Multinom } (n; p_1, p_2, ..., p_k)$$

yazılır.

Yani her denemenin sonucu k kutudan birine düşer ve X_i, i'inci kutuya düşen deneme sayısıdır. Her deneme bir kutuya düştüğünden $X_1 + X_2 + \cdots + X_k = n$'dir; dolayısıyla X_i'ler bağımsız değildir. $k = 2$ için E_1 başarı, E_2 başarısızlıktır, $X_2 = n - X_1$ olur ve dağılım binom dağılımına indirgenir.

Teorem 1.1 (Çok Terimli Olasılık Fonksiyonu). *$(X_1, ..., X_k)$ vektörü* Multinom $(n; p_1, ..., p_k)$ *dağılımlı olsun. $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ koşulunu sağlayan her $x_i \in \{0, 1, ..., n\}$ için*

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!\, x_2! \cdots x_k!}\, p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$$

olur; toplamı n etmeyen $(x_1, ..., x_k)$ için bu olasılık 0'dır.

> ***İspat.***
> *n denemenin sonucunu, her harfi $E_1, ..., E_k$'dan biri olan n harfli bir diziyle kaydedelim. $(X_1 = x_1, ..., X_k = x_k)$ olayı, içinde E_1'in tam x_1 kez, E_2'nin tam x_2 kez, ..., E_k'nın tam x_k kez geçtiği dizilerden oluşur.*
> ***Bir dizinin olasılığı.*** *Denemeler bağımsız olduğundan bir dizinin olasılığı, harflerinin olasılıklarının çarpımıdır. İçinde E_i harfi x_i kez geçen her dizi için bu çarpım, sıralama ne olursa olsun, $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$'dır.*
> ***Dizi sayısı.*** *Böyle dizilerin sayısı, x_1 tanesi E_1, x_2 tanesi E_2, ... olan n harfin farklı sıralanışlarının sayısıdır. Bu, tekrarlı permütasyon sayısıdır:*
>
> $$\frac{n!}{x_1!\, x_2! \cdots x_k!}.$$
>
> *Olay, bu kadar sayıda ayrık ve eşit olasılıklı diziden oluştuğu için olasılığı, dizi sayısı ile bir dizinin olasılığının çarpımıdır; bu da iddia edilen formüldür. Toplamı n etmeyen $(x_1, ..., x_k)$ için olay boştur.*
> *Formülün bir olasılık fonksiyonu olduğunu da görelim. Değerler negatif değildir. Toplamı n olan farklı $(x_1, ..., x_k)$ değerlerine karşılık gelen olaylar ayrıktır ve her dizi bunlardan tam birine düşer; bu olayların birleşimi bütün örnek uzaydır. Öyleyse olasılıklarının toplamı 1'dir.*
> ■

İspatın son adımı, yan ürün olarak **çok terimli açılımı** verir: $p_1 + \cdots + p_k = 1$ iken bütün olasılıkların toplamı

$$\sum_{x_1 + \cdots + x_k = n} \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!}\, p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k} = (p_1 + p_2 + \cdots + p_k)^n = 1$$

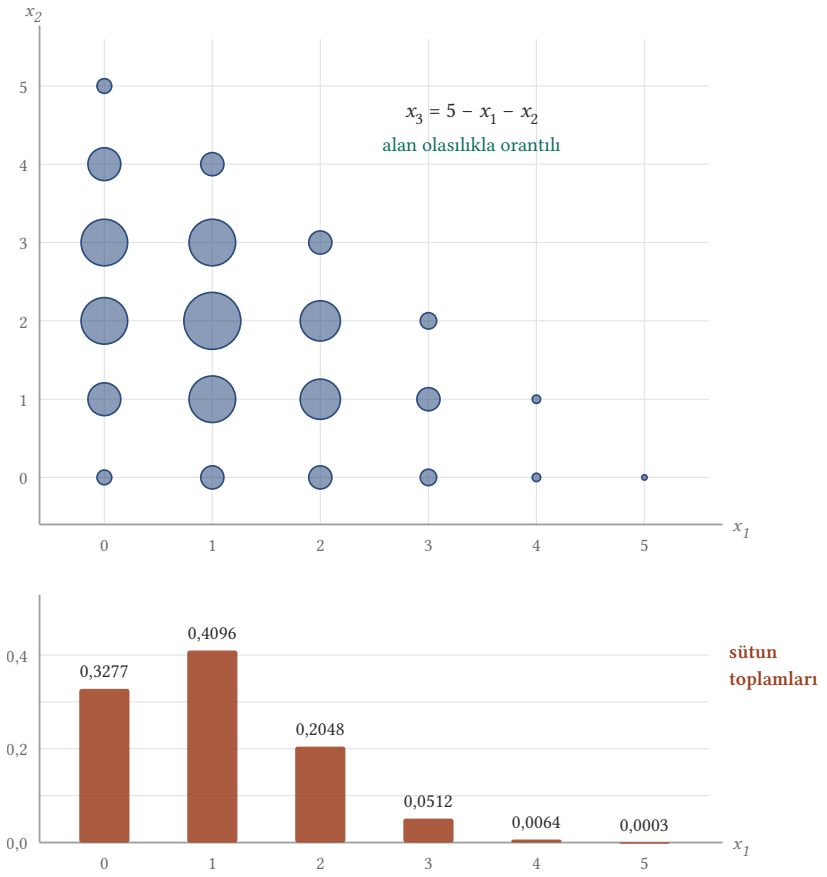
olur. $k = 2$ için bu, binom teoremindeki $\sum \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p + q)^n$ eşitliğidir; katsayılara da bu yüzden **çok terimli katsayılar** denir.
Çok terimli vektörün tek bir bileşenine baktığımızda yeniden binom dağılımına döneriz. Bu gözlem, beklenen değerleri ve varyansları hesapsız verir.

Teorem 1.2 (Çok Terimli Dağılımın Marjinalleri). *$(X_1, ..., X_k)$ vektörü* Multinom $(n; p_1, ..., p_k)$ *dağılımlı ise her $i = 1, 2, ..., k$ için $X_i \sim$ Binom (n, p_i)'dir. Özel olarak $q_i = 1 - p_i$ olmak üzere*

$$E(X_i) = np_i, \qquad \text{Var } (X_i) = np_iq_i$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.6: Beş iadeli çekilişte kırmızı ($p_1 = 1/5$), beyaz ($p_2 = 2/5$) ve öteki renkler ($p_3 = 2/5$) için çok terimli olasılıklar: (x_1, x_2) noktasındaki dairenin alanı $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ ile orantılıdır. Her sütun toplandığında alttaki çubuklar, yani Binom(5, 1/5) olasılıkları çıkar.

> ***İspat.***
> *i'yi sabitleyelim ve her denemede yalnızca "E_i geldi mi, gelmedi mi" sorusuna bakalım. E_i gelirse denemeye başarı, öteki $k-1$ sonuçtan biri gelirse başarısızlık diyelim. Tek bir denemede başarı olasılığı p_i, başarısızlık olasılığı ise öteki $k-1$ olasılığın toplamı, yani $1-p_i = q_i$'dir. Denemeler bağımsız ve aynı koşullarda yapıldığından bu, n denemelik bir binom deneyidir. X_i, bu deneydeki başarı sayısıdır; öyleyse $X_i \sim \text{Binom}\,(n, p_i)$'dir. Beklenen değer ve varyans, binom dağılımının $E(X) = np$ ve $\text{Var}\,(X) = npq$ formüllerinde p yerine p_i yazılarak bulunur.*
> ■

Bileşenler toplamı n olacak biçimde birbirine bağlı olduğundan aralarındaki ilişkiyi kovaryans ölçer (Olasılık Teorisi'ndeki tanım). İki kutu aynı n denemeyi paylaştığı için birinin çok dolması ötekinin az dolması demektir; kovaryansın negatif çıkmasını bekleriz.

Önerme 1.1 (Çok Terimli Dağılımda Kovaryans). *$(X_1, \ldots, X_k)$ vektörü $\text{Multinom}\,(n; p_1, \ldots, p_k)$ dağılımlı ve $i \neq j$ ise*

$$\text{Cov}\,(X_i, X_j) = -n\,p_i\,p_j$$

olur.

> ***İspat.***

E_i ile E_j sonuçlarını tek bir sonuçta birleştirelim. Bu iki sonuç ayrık olduğundan birleşik sonucun tek denemedeki olasılığı $p_i + p_j$'dir ve n denemede kaç kez geldiği $X_i + X_j$'dir. Teorem 1.2'in ispatındaki akıl yürütme aynen geçerlidir: $X_i + X_j \sim \text{Binom}\,(n, p_i + p_j)$. Öyleyse

$$\text{Var}\,(X_i + X_j) = n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j).$$

$k = 2$ ise $p_i + p_j = 1$ ve $X_i + X_j = n$ sabittir; aşağıdaki hesap bu durumda da geçerlidir, çünkü iki taraf da 0 olur.
Öte yandan iki değişkenin toplamının varyansı için (ispatı)

$$\text{Var}\,(X_i + X_j) = \text{Var}\,(X_i) + \text{Var}\,(X_j) + 2\,\text{Cov}\,(X_i, X_j)$$

eşitliği geçerlidir. Teorem 1.2'den $\text{Var}\,(X_i) = np_i(1-p_i)$ ve $\text{Var}\,(X_j) = np_j(1-p_j)$'yi yerine koyarsak

$$\begin{aligned} 2\,\text{Cov}\,(X_i, X_j) &= n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j) - np_i(1-p_i) - np_j(1-p_j) \\ &= n\left[\,(p_i + p_j) - (p_i + p_j)^2 - p_i + p_i^2 - p_j + p_j^2\,\right] \\ &= n\left[\,-(p_i^2 + 2p_ip_j + p_j^2) + p_i^2 + p_j^2\,\right] = -2n\,p_i\,p_j \end{aligned}$$

bulunur. İki tarafı 2'ye bölmek sonucu verir.
■

Şimdi çok terimli olasılık fonksiyonunu örneklerde kullanalım. Her örnekte önce sonuç sınıflarını ve olasılıklarını belirleyecek, olasılıkların toplamının 1, sayıların toplamının n olduğunu kontrol edeceğiz.

Örnek 1.11 (On İki Zar Atışında Sayıların Dağılımı). Bir tavla zarı 12 kez atılıyor. İki kez 1, üç kez 2, bir kez 3, iki kez 4, üç kez 5 ve bir kez 6 gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm.
Her atışın altı sonucu vardır ve hilesiz zarda her birinin olasılığı $\frac{1}{6}$'dır. X_i, 12 atışta i sayısının kaç kez geldiğini göstersin; $(X_1, \ldots, X_6)$ vektörü $\text{Multinom}\left(12; \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{6}\right)$ dağılımlıdır. İstenen sayılar $2, 3, 1, 2, 3, 1$ ve toplamları 12'dir. Teorem 1.1 gereği

$$P(X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 3, X_6 = 1) = \frac{12!}{2!\,3!\,1!\,2!\,3!\,1!}\left(\frac{1}{6}\right)^{12}.$$

Paydadaki faktöriyellerin çarpımı $2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1 = 144$'tür; $12! = 479001600$ olduğundan katsayı $\frac{479001600}{144} = 3326400$ olur. $6^{12} = 2176782336$ ile

$$P = \frac{3326400}{2176782336} = \frac{1925}{1259712} \approx 0{,}001528.$$

$\left(\frac{1}{6}\right)^{12}$ çarpanı, sayıların belirli bir sırayla (örneğin önce iki 1, sonra üç 2, …) gelmesinin olasılığıdır. Soru sırayı sormadığı için bu sayıların atışlar arasında yer değiştirebileceği her düzen sayılır; çok terimli katsayı tam olarak bu düzenlerin sayısıdır.
■

Örnek 1.12 (Numaralı Toplardan İadeli Çekiliş). Bir kutuda 4 top var: birinin üzerinde 1, ikisinin üzerinde 2, birinin üzerinde 3 yazıyor. Kutudan iadeli olarak 2 top çekiliyor. İki çekilişte de 1 gelmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Her çekilişin üç sonucu vardır: 1, 2 ya da 3 yazan top. Olasılıkları

$$p_1 = \frac{1}{4}, \qquad p_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad p_3 = \frac{1}{4}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve toplamları 1'dir. X_i, iki çekilişte i yazan topun kaç kez geldiğini göstersin; $(X_1, X_2, X_3) \sim \text{Multinom}\left(2; \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. "İki kez 1" demek $X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 0$ demektir:

$$P(X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 0) = \frac{2!}{2!\,0!\,0!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{1}{16}.$$

Sağlama: iki bağımsız çekilişin ikisinde de 1 gelme olasılığı doğrudan $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$'dır. Tek bir sonuç sınıfı dolduğunda çok terimli formül bu basit çarpıma indirgenir.
■

Örnek 1.13 (Dört Renkli Kutudan Beş Çekiliş). Bir kutuda 2 kırmızı, 4 beyaz, 3 siyah ve 1 yeşil top var. Kutudan yerine koyarak 5 top çekiliyor. 1 kırmızı, 2 beyaz, 1 siyah ve 1 yeşil gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm.
Kutuda 10 top olduğundan tek çekilişte renklerin olasılıkları

$$p_K = \frac{2}{10}, \qquad p_B = \frac{4}{10}, \qquad p_S = \frac{3}{10}, \qquad p_Y = \frac{1}{10}$$

ve toplamları 1'dir. Çekilişler iadeli olduğundan bağımsızdır; renk sayıları $\text{Multinom}\left(5; \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$ dağılımlıdır. İstenen sayılar $1, 2, 1, 1$ ve toplamları 5'tir:

$$P = \frac{5!}{1!\,2!\,1!\,1!}\left(\frac{2}{10}\right)^1\left(\frac{4}{10}\right)^2\left(\frac{3}{10}\right)^1\left(\frac{1}{10}\right)^1.$$

Katsayı $\frac{120}{2} = 60$, olasılıkların çarpımı $\frac{2\cdot 16\cdot 3\cdot 1}{10^5} = \frac{96}{100000}$'dir. Öyleyse

$$P = 60 \cdot \frac{96}{100000} = \frac{5760}{100000} = 0{,}0576.$$

■

Örnek 1.14 (Beyaz Top Sayısının Beklenen Değeri ve Varyansı). Bir kutuda 2 kırmızı, 4 beyaz, 3 siyah ve 1 yeşil top var. Kutudan yerine koyarak 5 top çekiliyor. Gelen beyaz topların sayısının beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

Çözüm.
Örnek 1.13'daki gibi renk sayıları $\text{Multinom}\left(5; \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$ dağılımlıdır. X_B beyaz top sayısı olsun. Teorem 1.2 gereği $X_B \sim \text{Binom}\left(5, \frac{4}{10}\right)$'dur; öyleyse

$$E(X_B) = 5 \cdot \frac{4}{10} = 2, \qquad \text{Var}\,(X_B) = 5 \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Öteki renklerin kaça bölündüğü bu hesabı etkilemez; beyaz için önemli olan yalnızca "beyaz ya da değil" ayrımıdır.
■

Örnek 1.15 (Kırmızı ve Beyaz Top Sayılarının Kovaryansı). Bir kutuda 2 kırmızı, 4 beyaz, 3 siyah ve 1 yeşil top var. Kutudan yerine koyarak 5 top çekiliyor. Gelen kırmızı top sayısı X_K ile beyaz top sayısı X_B'nin kovaryansını bulunuz.

Çözüm.
Renk sayıları $\text{Multinom}\left(5; \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$ dağılımlıdır. Önerme 1.1 gereği

$$\text{Cov}\,(X_K, X_B) = -5 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{4}{10} = -\frac{2}{5} = -0{,}4.$$

Kovaryans negatiftir: beş çekilişin çoğu kırmızı gelirse beyaza az çekiliş kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Bu bölümde her çekilişin kutunun durumunu değiştirmediği, yani denemelerin bağımsız olduğu durumlara baktık. Çekilen top geri konmazsa ya da ilk başarıya kadar kaç deneme gerektiğini sorarsak başka dağılımlar ortaya çıkar. Onlar Hipergeometrik, Geometrik ve Negatif Binom Dağılımları bölümünün konusu.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Hipergeometrik, Geometrik ve Negatif Binom Dağılımları

Binom dağılımında üç şey baştan sabittir: deneme sayısı önceden bellidir, denemeler bağımsızdır ve her denemede başarı olasılığı aynıdır. Bu bölümde bu varsayımları birer birer gevşetiyoruz. Önce çekilişlerin iadesiz yapıldığı durumu inceleyeceğiz; o zaman denemeler bağımsız olmaz ve başarı sayısı hipergeometrik dağılıma uyar. Sonra deneme sayısını serbest bırakıp başarıyı bekleyeceğiz: ilk başarıya kadar yapılan deneme sayısı geometrik, k-ıncı başarıya kadar yapılan deneme sayısı negatif binom dağılımına uyar.
Bu üç dağılım Olasılık Teorisi kitabında tanımlanmış ve temel özellikleri orada ispatlanmıştır (Geometrik, Negatif Binom ve Hipergeometrik Dağılımlar). Burada tanımları kısaca hatırlatıp istatistikte sık kullanılan sonuçlara ve bol örneğe ağırlık vereceğiz.

2.1 Hipergeometrik Dağılım

Bir torbadaki topların bir kısmı siyah, geri kalanı beyaz olsun ve torbadan birkaç top çekelim. Her çekilen top torbaya geri atılırsa (iadeli çekiliş) her çekilişte siyah gelme olasılığı aynı kalır ve siyah top sayısı binom dağılımına uyar. Çekilen top geri atılmazsa (iadesiz çekiliş) torbanın içeriği her çekilişte değişir. Bu ikinci durumun modeli hipergeometrik dağılımdır.
Genel kurulum şöyledir. N tane nesnenin a tanesi belli bir özelliğe sahiptir, geri kalan $N-a$ tanesi bu özelliğe sahip değildir. Bu nesnelerden iadesiz olarak art arda n kez birer nesne çekilir ya da aynı anda n nesne birden çekilir. X, çekilen n nesne arasında özelliğe sahip olanların sayısıdır. N'ye **kitle büyüklüğü**, n'ye **örneklem büyüklüğü** diyeceğiz.
İki çekiliş biçimi aynı dağılımı verir. İadesiz art arda çekilen n nesnenin sırasını unutursak elimizde N nesneden seçilmiş n elemanlı bir alt küme kalır ve bu alt kümelerin hepsi eşit olasılıklıdır; aynı anda çekilen n nesne de tam olarak böyle bir alt kümedir.
$X = x$ olasılığını sayarak bulalım. N nesneden n tanesi $\binom{N}{n}$ farklı biçimde seçilir ve bu seçimler eşit olasılıklıdır. $X = x$ olması için özellikli a nesneden x tanesi, özelliksiz $N-a$ nesneden de $n-x$ tanesi seçilmelidir. Çarpma kuralıyla bu $\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}$ biçimde yapılır. Öyleyse

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

Formülün anlamlı olması için $x \le a$ (elde olandan fazla özellikli nesne çekilemez) ve $n - x \le N - a$ (özelliksiz nesneler için de aynısı) gerekir; elbette $0 \le x \le n$ de olmalıdır. Bu koşullar birlikte

$$\max\{0, n-(N-a)\} \le x \le \min\{a, n\}$$

demektir. $v > u$ ya da $v < 0$ iken $\binom{u}{v} = 0$ uzlaşımıyla formül $x = 0, 1, \ldots, n$ için yazılabilir: kısıtları sağlamayan x değerlerinde pay kendiliğinden sıfır olur.
Bu olasılık fonksiyonuna sahip X rastgele değişkenine N, a, n parametreli **hipergeometrik dağılıma** sahiptir denir ve $X \sim \mathrm{HG}\,(N, a, n)$ yazılır. Olasılıkların toplamının 1 olduğu (Vandermonde özdeşliği) Olasılık Teorisi'ndeki tanım ve ardından gelen teoremde gösterilmiştir; orada özellikli nesne sayısı M ile gösterilir.

2.1.1 Beklenen Değer ve Varyans

Hipergeometrik dağılımın beklenen değeri ve varyansı binom dağılımınkilere çok benzer; aradaki tek fark, varyansa gelen bir çarpandır. $X \sim \mathrm{HG}\,(N, a, n)$ ise

$$E(X) = n\,\frac{a}{N}, \qquad \mathrm{Var}\,(X) = \frac{N-n}{N-1}\,n\,\frac{a}{N}\left(1 - \frac{a}{N}\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. İspat, X'i her çekilişin sonucunu kaydeden gösterge değişkenlerinin toplamı olarak yazar ve Olasılık Teorisi'ndeki momentler teoreminde bulunur.
Binom dağılımıyla karşılaştırmak için $p = \frac{a}{N}$ ve $q = 1 - \frac{a}{N}$ alalım. İadeli çekilişte her çekilişte özellikli nesne gelme olasılığı p'dir ve özellikli nesne sayısı Binom (n, p) dağılımına uyar.

	Binom	Hipergeometrik
çekiliş	iadeli	iadesiz
dağılım	Binom (n, p)	HG (N, a, n)
$E(X)$	np	np
Var (X)	npq	$\frac{N-n}{N-1}\, npq$

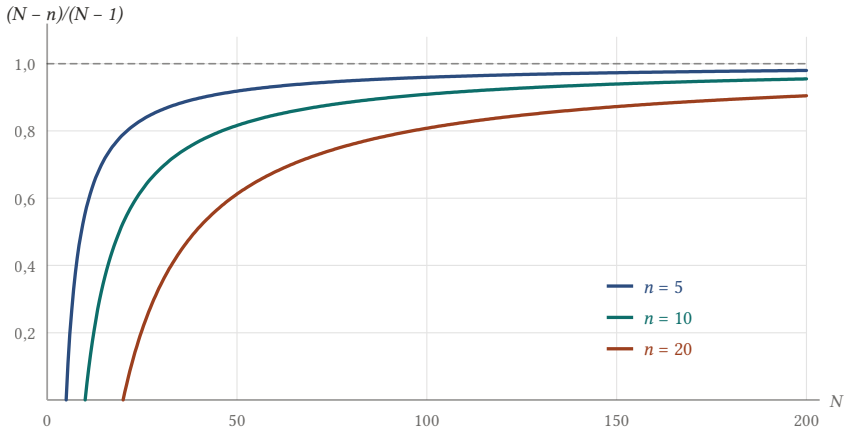
Beklenen değerler eşittir: iadesiz çekiliş, ortalamada kaç özellikli nesne geleceğini değiştirmez. Varyanslar ise eşit değildir; aradaki çarpanın bir adı vardır.

Tanım 2.1 (Düzeltme Faktörü). $N \geq 2$ birimlik bir kitleden n birimlik $(1 \leq n \leq N)$ iadesiz bir örneklem çekildiğinde

$$\frac{N-n}{N-1}$$

sayısına **düzeltme faktörü** (sonlu kitle düzeltmesi) denir.

Yani iadesiz çekilişte varyans, iadeli çekilişin varyansının düzeltme faktörü katıdır. $n \geq 2$ iken faktör 1'den küçüktür: iadesiz çekiliş yayılımı azaltır. İki uç durum bunu açıklar. $n = 1$ iken faktör 1'dir, çünkü tek çekilişte iadeli ile iadesiz arasında fark yoktur. $n = N$ iken faktör 0'dır, çünkü bütün kitle çekilince $X = a$ kesinleşir ve varyans kalmaz.



Şekil 2.1: Düzeltme faktörü $(N - n)/(N - 1)$, kitle büyüklüğü N'nin fonksiyonu olarak, üç farklı örneklem büyüklüğü n için. $N = n$ iken faktör 0'dır; n sabit kalıp N büyüdükçe 1'e yaklaşır. n ne kadar büyükse yaklaşma o kadar yavaştır.

Kitle büyüdükçe iki varyans birbirine yaklaşır. İki durum ayırt edilebilir.

1. $p = \frac{a}{N}$ sabit bir sayıya yakınsayacak biçimde $N \to \infty$ olsun ve çekilen nesne sayısı n sabit kalsın. Pay ve paydayı N'ye bölersek

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N-n}{N-1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1-\frac{n}{N}}{1-\frac{1}{N}} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

bulunur. Dolayısıyla hipergeometrik varyans binom varyansı npq'ya yakınsar.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Toplam nesne sayısı N çok büyük, çekilen nesne sayısı n ona göre küçükse $\frac{N-n}{N-1} \approx 1$'dir ve iki varyans yaklaşık olarak eşittir. Örneğin $N = 1000$ ve $n = 10$ için faktör $\frac{990}{999} \approx 0{,}991$'dir. Uygulamada örneklem kitlenin yüzde beşinden küçükse ($n \leq 0{,}05\,N$) fark göz ardı edilir.

2.1.2 Binom Dağılımına Yakınsama

Varyansların yaklaşması daha güçlü bir olgunun parçasıdır: olasılıkların kendileri de yaklaşır. Sonsuz büyük bir kitleden iadesiz seçim yapmakla iadeli (bağımsız) seçim yapmak arasında sonuç bakımından bir fark kalmaz, çünkü birkaç nesne çekmek kitlenin bileşimini neredeyse hiç değiştirmez ve her çekilişte özellikli nesne gelme olasılığı $\frac{a}{N}$'ye çok yakın kalır. Kesin ifadesi şudur: n ve x sabitken $\frac{a}{N} \to p$ olacak biçimde $N \to \infty$ ise

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\binom{a}{x}\binom{N-a}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

Yani $N \to \infty$ iken hipergeometrik dağılım binom dağılımına yakınsar. İspatı ve iki dağılımı yan yana gösteren şekil Olasılık Teorisi'ndeki yaklaşım teoreminde bulunur. Pratik sonucu şudur: büyük bir kitleden küçük bir örneklem çekildiğinde hesaplar hipergeometrik yerine daha basit olan binom dağılımıyla yapılabilir.

2.1.3 Genelleştirilmiş Hipergeometrik Dağılım

Şimdiye kadar kitleyi iki gruba ayırdık: özelliğe sahip olan $N_1 = a$ birim ve sahip olmayan $N_2 = N - a$ birim. Kitle ikiden fazla gruptan oluşuyorsa, örneğin torbada üç renk top varsa, aynı sayma yöntemi çok değişkenli bir dağılım verir.

Tanım 2.2 (Genelleştirilmiş Hipergeometrik Dağılım). N birimlik bir kitle k gruba ayrılmış olsun: i-inci grupta N_i birim vardır ve $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k$'dır. Kitleden iadesiz olarak n birim çekilsin ve X_i, çekilenler arasında i-inci gruptan olanların sayısı olsun. $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ ve her i için $0 \leq x_i \leq N_i$ olmak üzere

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_k = x_k) = \frac{\binom{N_1}{x_1}\binom{N_2}{x_2}\cdots\binom{N_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

olasılık fonksiyonuna sahip $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ rastgele vektörüne **genelleştirilmiş hipergeometrik dağılıma** sahiptir denir.

Yani N birimden n tanesi $\binom{N}{n}$ eşit olasılıklı biçimde seçilir ve bu seçimlerden istenen bileşimi verenler, her gruptan kaç birim alınacağı ayrı ayrı seçilerek $\binom{N_1}{x_1}\cdots\binom{N_k}{x_k}$ tanedir. $k = 2$ için $N_1 = a$, $N_2 = N - a$ ve $X_2 = n - X_1$ olur; formül hipergeometrik dağılımın olasılık fonksiyonuna döner. Çekilişler iadeli yapılsaydı aynı sayılar çok terimli dağılıma uyardı; genelleştirilmiş hipergeometrik dağılım onun iadesiz karşılığıdır.

Önerme 2.1 (Genelleştirilmiş Hipergeometrik Dağılımın Bileşenleri). *$(X_1, \ldots, X_k)$ genelleştirilmiş hipergeometrik dağılıma sahipse her i için $X_i \sim \mathrm{HG}\,(N, N_i, n)$'dir. Özellikle $E(X_i) = n\,\dfrac{N_i}{N}$'dir.*

> ***İspat.***
> *i sabit olsun. Kitleyi iki gruba ayıralım: i-inci gruptaki N_i birim "özelliğe sahip", geri kalan $N - N_i$ birim "özelliğe sahip değil" sayılsın. Çekiliş yine N birimden n birimin iadesiz çekilişidir ve X_i, çekilenler arasında özelliğe sahip olanların sayısıdır. Hipergeometrik dağılımın kurulumu tam olarak budur; dolayısıyla $X_i \sim \mathrm{HG}\,(N, N_i, n)$'dir. Beklenen değer formülünde a yerine N_i yazılırsa $E(X_i) = n\,\frac{N_i}{N}$ bulunur.* ■

2.1.4 Örnekler

Aşağıdaki üç örnek aynı kavanozu kullanır; ardından gelen örnek üç gruplu bir kitledir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.1 (Siyahların Beyazlardan Çok Gelmesi). 10 beyaz ve 5 siyah top bulunan bir kavanozdan iadesiz olarak 5 kez birer top çekiliyor (bu, aynı anda 5 top çekmekle aynıdır). Gelen siyah topların sayısının beyazlardan çok olması olasılığı nedir?

Çözüm.
X, çekilen 5 top arasındaki siyah topların sayısı olsun. Kitlede $N = 15$ top, bunların $a = 5$'i siyah ve örneklem büyüklüğü $n = 5$'tir; yani $X \sim \mathrm{HG}\ (15, 5, 5)$. Kısıtlar $\max\{0, 5-10\} = 0$ ve $\min\{5, 5\} = 5$ olduğundan X'in değerleri $0, 1, \ldots, 5$'tir ve

$$f(x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{10}{5-x}}{\binom{15}{5}}, \qquad \binom{15}{5} = 3003.$$

Payları tek tek hesaplayalım:

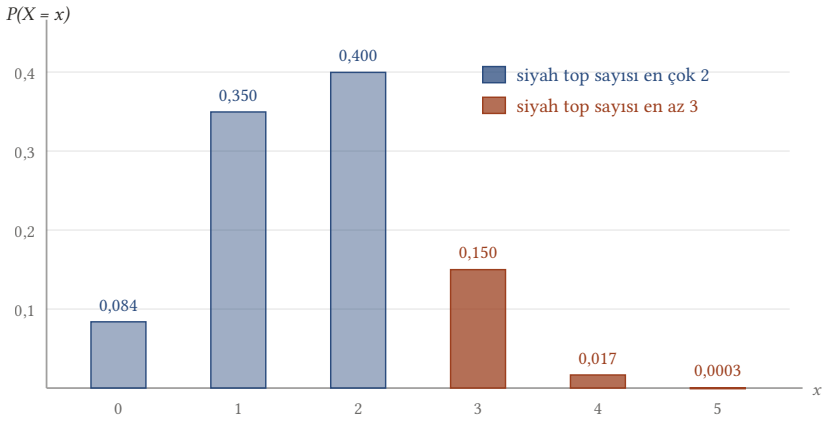
x	0	1	2	3	4	5
$\binom{5}{x}\binom{10}{5-x}$	$1 \cdot 252$	$5 \cdot 210$	$10 \cdot 120$	$10 \cdot 45$	$5 \cdot 10$	$1 \cdot 1$
pay	252	1050	1200	450	50	1

Payların toplamı

$$252 + 1050 + 1200 + 450 + 50 + 1 = 3003$$

olduğundan olasılıkların toplamı gerçekten 1'dir.
Beyaz topların sayısı $5 - X$'tir. Siyahların beyazlardan çok olması $X > 5 - X$, yani $X > 2{,}5$ demektir; X tam sayı olduğundan bu $X \geq 3$ olayıdır:

$$P(X \geq 3) = \frac{450 + 50 + 1}{3003} = \frac{501}{3003} = \frac{167}{1001} \approx 0{,}1668.$$



Şekil 2.2: 15 toptan (5 siyah, 10 beyaz) iadesiz çekilen 5 top arasındaki siyah top sayısı X'in olasılık fonksiyonu. Siyahların beyazlardan çok olduğu durumlar x = 3, 4, 5 çubuklarıdır; toplam alanları 167/1001 ≈ 0,167'dir.

■

Örnek 2.2 (Siyah Topların Beklenen Sayısı). 10 beyaz ve 5 siyah top bulunan bir kavanozdan iadesiz olarak 5 top çekiliyor. Gelen siyah topların beklenen sayısı nedir? Varyansı da bulup çekilişin iadeli yapılması durumuyla karşılaştırınız.

Çözüm.
X siyah top sayısı olsun; $X \sim \mathrm{HG}\ (15, 5, 5)$. Beklenen değer formülünden

 CC BY-NC-SA 4.0

$$E(X) = n\,\frac{a}{N} = 5 \cdot \frac{5}{15} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67.$$

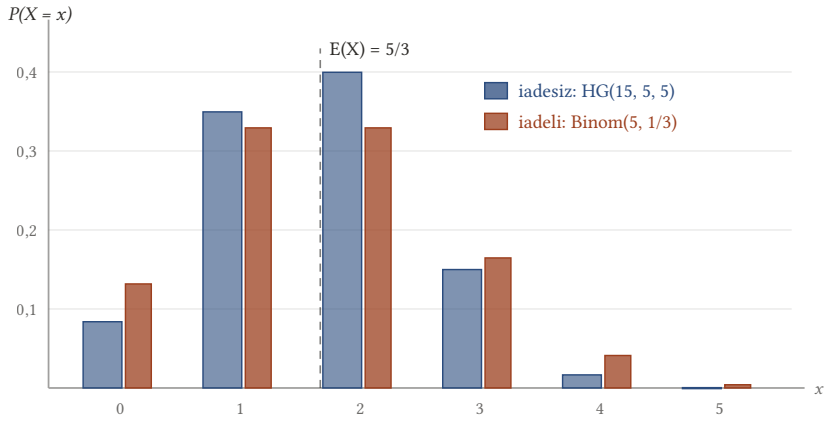
Sağlama için önceki örneğin tablosunu kullanalım:

$$E(X) = \frac{0\cdot 252 + 1\cdot 1050 + 2\cdot 1200 + 3\cdot 450 + 4\cdot 50 + 5\cdot 1}{3003} = \frac{5005}{3003} = \frac{5}{3}.$$

Varyans formülünde $\frac{a}{N} = \frac{1}{3}$ ve düzeltme faktörü $\frac{15-5}{15-1} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$'dir:

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{5}{7} \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \cdot \frac{10}{9} = \frac{50}{63} \approx 0{,}794.$$

Çekiliş iadeli olsaydı siyah top sayısı $\mathrm{Binom}\left(5, \frac{1}{3}\right)$ dağılımına uyardı. Beklenen değer yine $5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ olurdu, ama varyans $5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9} \approx 1{,}111$ çıkardı. Kitle küçük olduğundan $\left(\frac{n}{N} = \frac{1}{3}\right)$ düzeltme faktörü $\frac{5}{7}$ belirgin bir fark yaratır.



Şekil 2.3: Aynı torbadan iadesiz (hipergeometrik, geniş mavi) ve iadeli (binom, ince turuncu) çekilen 5 top arasındaki siyah top sayısının dağılımı. Beklenen değer ikisinde de 5/3'tür; iadesiz çekilişte olasılık ortaya daha çok toplanır ve varyans 10/9 yerine 50/63 olur.

■

Örnek 2.3 (Siyah ve Beyaz Toplarla Oynanan Oyunda Kazanç). 10 beyaz ve 5 siyah top bulunan bir kavanozdan iadesiz olarak 5 top çekiliyor. Her siyah top için 100 TL kaybediliyor, her beyaz top için 50 TL kazanılıyor. Kazancın olasılık fonksiyonunu oluşturunuz; kazancın beklenen değerini ve varyansını hesaplayınız.

Çözüm.
$X \sim \mathrm{HG}(15, 5, 5)$ siyah top sayısı olsun; beyaz top sayısı $5 - X$'tir. Kazanç K ile gösterilirse

$$K = -100X + 50(5 - X) = 250 - 150X.$$

X'in her değeri K'nin tek bir değerine karşılık geldiğinden $P(K = 250 - 150x) = P(X = x)$'tir. İlk örnekteki payları kullanarak (payda 3003)

x	0	1	2	3	4	5
$k = 250 - 150x$	250	100	-50	-200	-350	-500
$P(K = k)$	$\frac{252}{3003}$	$\frac{1050}{3003}$	$\frac{1200}{3003}$	$\frac{450}{3003}$	$\frac{50}{3003}$	$\frac{1}{3003}$

 CC BY-NC-SA 4.0

Örneğin

$$P(K=-50)=P(250-150X=-50)=P(X=2)=\frac{1200}{3003}=\frac{400}{1001}.$$

Beklenen değer ve varyans için doğrusal dönüşüm kuralını (Olasılık Teorisi) ve önceki örnekte bulunan $E(X)=\frac{5}{3}$, $\text{Var}\ (X)=\frac{50}{63}$ değerlerini kullanalım:

$$E(K)=250-150\,E(X)=250-150\cdot\frac{5}{3}=250-250=0,$$

$$\text{Var}\ (K)=(-150)^2\ \text{Var}\ (X)=22500\cdot\frac{50}{63}=\frac{125000}{7}\approx 17857{,}14.$$

Beklenen kazanç sıfırdır, yani oyun uzun vadede ne kazandırır ne kaybettirir. Standart sapma $\sqrt{125000/7}\approx 133{,}63$ TL'dir; tek bir oyunun sonucu sıfırdan epey uzağa düşebilir.
■

Örnek 2.4 (Üç Renkten Birer Top). Bir kutuda 2 siyah, 2 beyaz ve 3 kırmızı top vardır. Aynı anda 3 top çekildiğinde 1 siyah, 1 beyaz ve 1 kırmızı top gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm.
X_1 siyah, X_2 beyaz, X_3 kırmızı top sayısı olsun. Kitle $k=3$ gruptan oluşur: $N_1=2$, $N_2=2$, $N_3=3$, $N=7$ ve $n=3$. Genelleştirilmiş hipergeometrik dağılımdan

$$P(X_1=1,X_2=1,X_3=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{2\cdot 2\cdot 3}{35}=\frac{12}{35}\approx 0{,}343.$$

Aynı sonuca topları tek tek çekerek de ulaşabiliriz. Renklerin çıkış sırası $3!=6$ biçimde olabilir (siyah-beyaz-kırmızı, siyah-kırmızı-beyaz, ...). Örneğin siyah-beyaz-kırmızı sırasının olasılığı

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{210}=\frac{2}{35}$$

olur: ilk çekilişte 7 toptan 2'si siyah, ikincide kalan 6 toptan 2'si beyaz, üçüncüde kalan 5 toptan 3'ü kırmızıdır. Başka bir sırada paylar $2,2,3$ yine aynı sayılardır, yalnız yerleri değişir; paydalar hep $7,6,5$'tir. Dolayısıyla altı sıranın her birinin olasılığı $\frac{2}{35}$'tir ve

$$P(X_1=1,X_2=1,X_3=1)=6\cdot\frac{2}{35}=\frac{12}{35}.$$

■

2.2 Geometrik Dağılım

Şimdi iadeli, yani bağımsız denemelere dönüyoruz, ama deneme sayısını baştan sabitlemiyoruz. Başarı olasılığı p $(0<p<1)$ olan bir Bernoulli deneyi aynı koşullar altında ve bağımsız olarak **ilk başarı** elde edilinceye kadar tekrarlansın. X, ilk başarı elde edilinceye kadar yapılan denemelerin sayısı olsun. Başarıyı B, başarısızlığı B^c ile gösterirsek örnek uzay ve X'in değerleri şöyledir:

$$\Omega=\left\{B,B^cB,B^cB^cB,\ldots,\underbrace{B^cB^c\cdots B^c}_{x-1\ \text{tane}}B,\ldots\right\},\qquad X\in\{1,2,3,\ldots\}.$$

$X=x$ olayı, ilk $x-1$ denemenin başarısız ve x-inci denemenin başarılı olması demektir. $q=1-p$ olmak üzere denemelerin bağımsızlığından

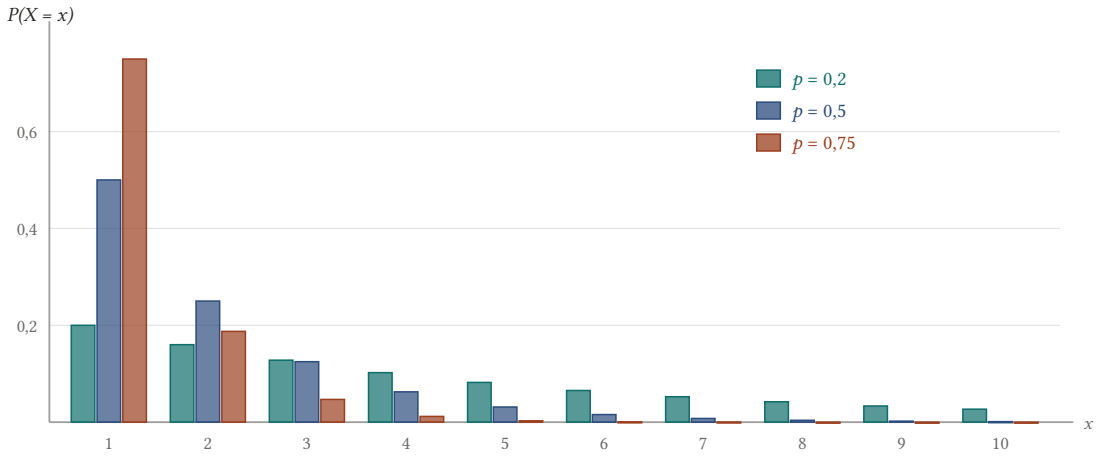
 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x) = P(X = x) = P(\underbrace{B^c B^c \cdots B^c}_{x-1 \text{ tane}} B)$$
$$= \underbrace{P(B^c) \cdots P(B^c)}_{x-1 \text{ tane}} P(B) = q^{x-1} p, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

bulunur. Olasılıkların toplamı 1'dir: sonlu geometrik toplam formülüyle

$$\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} p = \lim_{n \to \infty} p\,(1 + q + \cdots + q^{n-1}) = \lim_{n \to \infty} p\,\frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{p}{p} = 1,$$

çünkü $0 < q < 1$ olduğundan $q^n \to 0$'dır. Bu olasılık fonksiyonuna sahip X'e p parametreli **geometrik dağılıma** sahiptir denir ve $X \sim \text{Geo}\,(p)$ yazılır (Olasılık Teorisi'ndeki tanım). Olasılıklar $p, qp, q^2p, \ldots$ biçiminde ortak çarpanı q olan bir geometrik dizi oluşturur; ad buradan gelir.



Şekil 2.4: Geometrik dağılımın olasılık fonksiyonu $q^{x-1}p$, üç farklı başarı olasılığı için. Her durumda olasılıklar $x = 1$'den başlayıp her adımda $q = 1 - p$ oranında küçülür; p küçüldükçe dağılım sağa yayılır ve ilk başarı daha geç gelir.

2.2.1 Moment Üreten Fonksiyon, Beklenen Değer ve Varyans

Geometrik dağılımla ilgili hemen her hesap bir geometrik seriye iner; moment üreten fonksiyon (moment üreten fonksiyon) da öyle. $X \sim \text{Geo}\,(p)$ ise

$$M_X(t) = E\left(\, e^{tX} \,\right) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^{x-1} p = pe^t \sum_{x=1}^{\infty} \left(\, qe^t \right)^{x-1}.$$

Bu seri ancak $qe^t < 1$, yani $t < -\ln q$ iken yakınsar ve toplamı $\frac{1}{1 - qe^t}$'dir. Öyleyse

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}, \qquad t < -\ln q.$$

$-\ln q > 0$ olduğundan M_X sıfırın bir komşuluğunda tanımlıdır ve momentler türevlerden çıkar. Türevler $M_X'(t) = \dfrac{pe^t}{(1 - qe^t)^2}$ ve $M_X''(t) = \dfrac{pe^t(1 + qe^t)}{(1 - qe^t)^3}$ olduğundan, $1 - q = p$ kullanılarak

$$E(X) = M_X'(0) = \frac{1}{p}, \qquad E(X^2) = M_X''(0) = \frac{1 + q}{p^2},$$
$$\text{Var}\,(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1 + q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

bulunur. Türev hesaplarının ayrıntısı Olasılık Teorisi'ndeki momentler teoremindedir. $E(X) = \frac{1}{p}$ sezgiyle uyumludur: başarı olasılığı $\frac{1}{4}$ ise ilk başarı için ortalama 4 deneme beklenir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Aynı momentleri moment üreten fonksiyona başvurmadan, doğrudan tanımdaki seriden de bulabiliriz.

Örnek 2.5 (Geometrik Dağılımın Momentlerini Seriden Bulmak). $X \sim \text{Geo}\ (p)$ olsun. $E(X)$ ve $E(X^2)$ değerlerini doğrudan $E(X) = \sum_x x f(x)$ ve $E(X^2) = \sum_x x^2 f(x)$ toplamlarından hesaplayınız.

Çözüm.
$\mid q \mid < 1$ için geometrik seri $\sum_{x=0}^{\infty} q^x = \frac{1}{1-q}$'dir. Bir kuvvet serisi yakınsaklık aralığının içinde terim terim türevlenebilir. Bir kez türev alırsak ($x = 0$ teriminin türevi sıfırdır)

$$\sum_{x=1}^{\infty} x\, q^{x-1} = \frac{1}{(1-q)^2},$$

bir kez daha türev alırsak ($x = 1$ teriminin türevi de sıfırdır)

$$\sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\, q^{x-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Beklenen değer. Birinci seriyi p ile çarpar ve $1 - q = p$ kullanırsak

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, q^{x-1} p = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

İkinci moment. x^2 yerine önce $x(x-1)$ ile çalışmak işi kolaylaştırır. $x = 1$ terimi sıfır olduğundan toplam $x = 2$'den başlar ve $q^{x-1} = q \cdot q^{x-2}$ yazılabilir:

$$\begin{aligned} E\ (\ X(X-1)\ ) &= \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\, q^{x-1} p = pq \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\, q^{x-2} \\ &= pq \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}. \end{aligned}$$

$X^2 = X(X-1) + X$ olduğundan beklenen değerin doğrusallığıyla

$$E(X^2) = E\ (\ X(X-1)\ ) + E(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2} = \frac{1+q}{p^2},$$

son adımda $p + q = 1$ kullanıldı. Buradan $\text{Var}\ (X) = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$'dir; moment üreten fonksiyonla bulunan değerlerin aynısı.
■

2.2.2 Belleksizlik Özelliği

Bir hedefe ilk isabete kadar atış yapan biri ilk üç atışını ıskalamış olsun. Bundan sonra iki atış daha ıskalama olasılığı, hiç atış yapmamış birinin ilk iki atışını ıskalama olasılığıyla aynıdır: atışlar bağımsız olduğundan geçmiş ıskalar geleceği etkilemez. Örneğin $B^c B^c B^c B^c B^c B^c B$ dizisini üç ıskadan sonra izlemeye başlayan biri için süreç baştan başlar:

$$P(X > 5 \mid X > 3) = P(X > 2).$$

Genel olarak $X \sim \text{Geo}\ (p)$ ve $s > t$ pozitif tam sayılar ise

$$P(X > s \mid X > t) = P(X > s - t)$$

olur. Buna geometrik dağılımın **belleksizlik** özelliği denir. Doğrulamak için önce kuyruk olasılığını bulalım. Sonlu geometrik toplam formülüyle

$$\begin{aligned} P(X > s) &= 1 - P(X \le s) = 1 - \sum_{x=1}^{s} p\, q^{x-1} \\ &= 1 - p \sum_{y=0}^{s-1} q^y = 1 - p\, \frac{1-q^s}{1-q} = q^s. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu sonuç doğrudan da görülür: $X > s$ olayı "ilk s denemenin hepsi başarısız" olayıdır. $s > t$ olduğundan $(X > s) \subseteq (X > t)$'dir, yani $(X > s) \cap (X > t) = (X > s)$. Öyleyse

$$P(X > s \mid X > t) = \frac{P(X > s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s)}{P(X > t)} = \frac{q^s}{q^t} = q^{s-t} = P(X > s - t).$$

Değerlerini $\{1, 2, 3, \ldots\}$ kümesinde alan kesikli dağılımlar arasında bu özelliğe sahip olan yalnızca geometrik dağılımdır; bu tekliğin ispatı Olasılık Teorisi'ndeki hafızasızlık teoremindedir.

2.2.3 Örnekler

Aşağıdaki dört örnek aynı atıcıyla ilgilidir.

Örnek 2.6 (Hedefi Dördüncü Atıştan Önce Vurmak). Bir atıcının belli bir hedefi vurma olasılığı 0,75'tir ve atışlar birbirinden bağımsızdır. Atıcı, hedef bir isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır. Hedefi dördüncü atıştan önce vurması olasılığı nedir?

Çözüm.
X, hedef ilk isabeti alıncaya kadar yapılan atış sayısı olsun. $p = \frac{3}{4}$ ve $q = \frac{1}{4}$ olduğundan $X \sim \text{Geo}\left(\frac{3}{4}\right)$ ve

$$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}\frac{3}{4}, \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Dördüncü atıştan önce vurmak $X < 4$, yani $X \leq 3$ demektir:

$$P(X < 4) = f(1) + f(2) + f(3) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{3}{4}$$
$$= \frac{48}{64} + \frac{12}{64} + \frac{3}{64} = \frac{63}{64} \approx 0{,}984.$$

Sağlama: tümleyen olay ilk üç atışın ıskalanmasıdır ve

$$P(X < 4) = 1 - P(X > 3) = 1 - q^3 = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

■

Örnek 2.7 (En Az Üç Atış Yapmak). Bir atıcının belli bir hedefi vurma olasılığı 0,75'tir ve atışlar birbirinden bağımsızdır. Atıcı, hedef bir isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır. En az 3 atış yapması olasılığı nedir?

Çözüm.
$X \sim \text{Geo}\left(\frac{3}{4}\right)$ atış sayısı olsun. Tümleyen olaydan

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{16}$$
$$= \frac{16 - 12 - 3}{16} = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$

Sağlama: en az üç atış yapılması, ilk iki atışın ıskalanması demektir ve olasılığı $q^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$'dır.
■

Örnek 2.8 (Tek İsabetlik Oyunda Kazanç). Bir atıcının belli bir hedefi vurma olasılığı 0,75'tir ve atışlar birbirinden bağımsızdır. Atıcı, hedef bir isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır. Hedefin değeri 200 TL ve bir atışın maliyeti 100 TL olduğuna göre kazancın olasılık fonksiyonunu bulunuz ve kazancın beklenen değerini hesaplayınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$X \sim \text{G}\left(\frac{3}{4}\right)$ atış sayısı olsun. Atıcı sonunda hedefi mutlaka vurur ve 200 TL alır; X atış için $100X$ TL öder. Kazanç

$$K = 200 - 100X.$$

$X = 1, 2, 3, \ldots$ değerleri $K = 100, 0, -100, -200, \ldots$ değerlerine karşılık gelir ve $P(K = 200 - 100x) = P(X = x)$'tir:

x	1	2	3	4	$\cdots$
$k = 200 - 100x$	100	0	-100	-200	$\cdots$
$P(K = k)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{3}{4}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{3}{4}$	$\cdots$

Kapalı biçimde, $x = \frac{200-k}{100}$ olduğundan

$$P(K = k) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{100-k}{100}} \frac{3}{4}, \qquad k = 100, 0, -100, -200, \ldots$$

$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{4}{3}$ olduğundan

$$E(K) = 200 - 100\,E(X) = 200 - \frac{400}{3} = \frac{200}{3} \approx 66{,}67 \ \text{ TL}\ .$$

Oyun ortalamada atıcının lehinedir: çoğu zaman ilk atışta vurur ve 100 TL kazanır.
■

Örnek 2.9 (Atıcı Örneğinde Belleksizlik). Bir atıcının belli bir hedefi vurma olasılığı $0{,}75$'tir ve atışlar birbirinden bağımsızdır. Atıcı, hedef bir isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır. X atış sayısı olmak üzere $P(X > 3 \mid X > 1) = P(X > 2)$ eşitliğini hesapla doğrulayınız.

Çözüm.
$X \sim \text{G}\left(\frac{3}{4}\right)$. Gereken kuyruk olasılıklarını tümleyenden hesaplayalım:

$$P(X > 1) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$P(X > 2) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16}, \qquad P(X > 3) = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{16} - \frac{3}{64} = \frac{1}{64}.$$

$(X > 3) \subseteq (X > 1)$ olduğundan $(X > 3) \cap (X > 1) = (X > 3)$'tür ve

$$P(X > 3 \mid X > 1) = \frac{P(X > 3)}{P(X > 1)} = \frac{1/64}{1/4} = \frac{4}{64} = \frac{1}{16} = P(X > 2).$$

İlk atışını ıskalamış bir atıcının iki atış daha ıskalama olasılığı, en baştaki iki ıska olasılığıyla aynıdır.
■

2.3 Negatif Binom Dağılımı (Pascal Dağılımı)

Geometrik dağılım ilk başarıyı bekler. Şimdi daha fazlasını bekleyelim. Başarı olasılığı p olan bir Bernoulli denemesi, aynı koşullar altında ve bağımsız olarak ***k* başarı** elde edilinceye kadar yapılsın ($k \geq 1$ sabit bir tam sayı). X, k başarı elde edilinceye kadar yapılan denemelerin sayısı olsun. En az k deneme gerektiğinden X'in değer kümesi $D_X = \{k, k+1, k+2, \ldots\}$'dir.
Olasılık fonksiyonunu küçük değerlerden başlayarak kuralım.

- $X = k$ ise ilk k denemenin hepsi başarılıdır: $P(X = k) = P(BB\cdots B) = p^k$.

- $X = k+1$ ise son deneme başarılıdır ve ilk k denemede $k-1$ başarı ile 1 başarısızlık vardır, örneğin $B^cB\cdots BB$ ya da $BB\cdots B^cB$. Başarısızlığın yeri ilk k denemeden biri olarak $\binom{k}{k-1} = k$ biçimde seçilir ve her dizinin olasılığı $p^{k-1}q \cdot p$'dir:

$$P(X = k+1) = \binom{k}{k-1} p^{k-1} q\, p = \binom{k}{1} q\, p^k.$$

- Genel olarak $X = x$ ise x-inci (son) deneme başarılıdır ve ilk $x-1$ denemede tam $k-1$ başarı vardır. Bu başarıların yeri $\binom{x-1}{k-1}$ biçimde seçilir; her dizide k başarı ve $x-k$ başarısızlık bulunur. Bağımsızlıktan

$$P(X = x) = \binom{x-1}{k-1} p^{k-1} q^{(x-1)-(k-1)} \cdot p = \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} p^k.$$

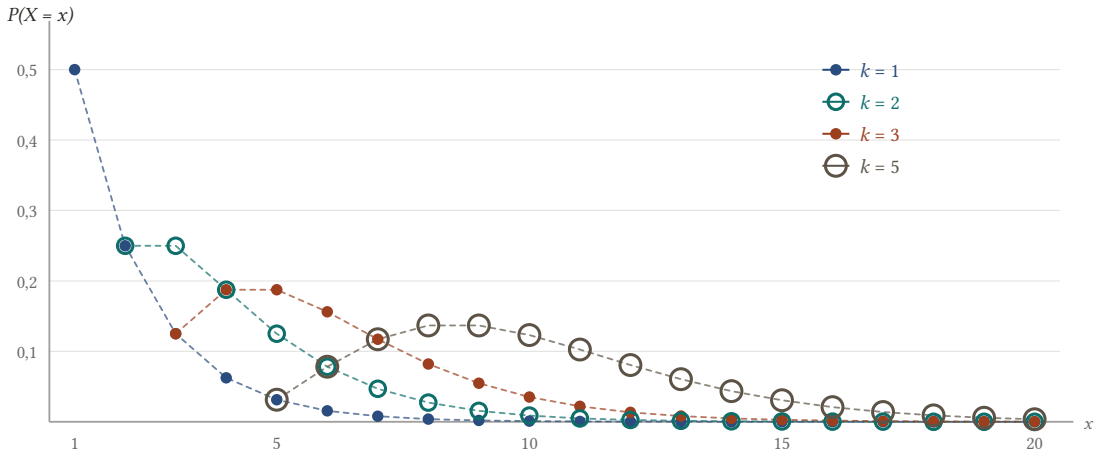
Böylece X'in olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \binom{x-1}{k-1} q^{x-k} p^k, \qquad x = k, k+1, k+2, \ldots$$

olur. Bu olasılık fonksiyonuna sahip X'e k ve p parametreli **negatif binom dağılımına** (Pascal dağılımına) sahiptir denir ve $X \sim \text{NB}\,(k,p)$ yazılır (Olasılık Teorisi'ndeki tanım; orada başarı sayısı r ile gösterilir). $k = 1$ için $\binom{x-1}{0} = 1$ olduğundan negatif binom dağılımı geometrik dağılıma indirgenir: $\text{NB}\,(1,p) = \text{Geo}\,(p)$.
Adın kaynağı olasılıkların toplamında görülür. Binom dağılımında olasılıklar $1 = (p+q)^n$ açılımının terimleridir. Negatif binom dağılımında ise üssü negatif olan açılım devreye girer:

$$p^{-k} = (1-q)^{-k} = \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x-1}{k-1} q^{x-k}.$$

Bu açılım geometrik serinin $k-1$ kez türevlenmesiyle elde edilir (Olasılık Teorisi'ndeki lemma). İki yanı p^k ile çarpmak $\sum_{x=k}^{\infty} f(x) = 1$ verir.



Şekil 2.5: Başarı olasılığı p = 0,5 iken k-ıncı başarıya kadar yapılan deneme sayısının (negatif binom) olasılık fonksiyonu. k = 1 geometrik dağılımdır. k arttıkça dağılım x = k'dan başlar, sağa kayar ve yayılır; beklenen değer k/p = 2k'dır.

2.3.1 Moment Üreten Fonksiyon, Beklenen Değer ve Varyans

Negatif binom dağılımının moment üreten fonksiyonu, geometrik dağılımınkinin k-ıncı kuvvetidir. $X \sim \text{NB}\,(k,p)$ ise

$$M_X(t) = E\left(\, e^{tX}\,\right) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k, \qquad \left|\, qe^t \,\right| = qe^t < 1 \Leftrightarrow t < -\ln q$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve buradan türev alarak

$$E(X) = M_X'(0) = \frac{k}{p}, \qquad E(X^2) = M_X''(0) = \frac{k(k+q)}{p^2}, \qquad \text{Var}\,(X) = \frac{kq}{p^2}$$

bulunur. Son eşitlik $\frac{k(k+q)}{p^2} - \frac{k^2}{p^2} = \frac{kq}{p^2}$ hesabıdır. İspatlar Olasılık Teorisi'ndeki momentler teoremindedir. $k = 1$ için bu formüller geometrik dağılımınkilere döner.

i Negatif binom, bağımsız geometriklerin toplamıdır

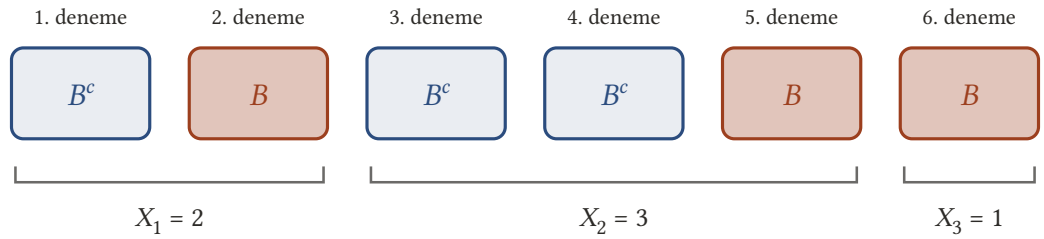
$k = 2$ olsun. X_1 birinci başarı elde edilinceye kadar yapılan deneme sayısı, X_2 ise birinci başarıdan sonra ikinci başarıya kadar (ikinci başarı dahil) yapılan deneme sayısı olsun. İki başarı için gereken toplam deneme sayısı $X = X_1 + X_2$'dir. Denemeler bağımsız olduğundan birinci başarıdan sonra süreç baştan başlar; bu yüzden X_1 ve X_2 bağımsızdır ve ikisi de Geo (p) dağılımlıdır.
Genel olarak $X_1, X_2, \ldots, X_k$ bağımsız ve her biri Geo (p) dağılımlı ise

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim \text{NB}\,(k, p)$$

olur. Bağımsız değişkenlerin çarpımının beklenen değeri beklenen değerlerin çarpımı olduğundan, $qe^t < 1$ için moment üreten fonksiyon

$$M_X(t) = E\left(\, e^{t(X_1+\cdots+X_k)}\,\right) = \prod_{i=1}^{k} M_{X_i}(t) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^k$$

olarak çıkar; moment üreten fonksiyonun tekliğiyle yapılan tam ispat Olasılık Teorisi'ndeki önermedir. Bu ayrıştırma $E(X) = k \cdot \frac{1}{p}$ ve $\text{Var}\,(X) = k \cdot \frac{q}{p^2}$ formüllerinin neden geometrik dağılımınkilerin k katı olduğunu da açıklar.



Şekil 2.6: Üçüncü başarının altıncı denemede geldiği bir dizi. Dizi başarılardan sonra kesilince üç bekleme süresine ayrılır: $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, $X_3 = 1$. Toplam deneme sayısı $X = X_1 + X_2 + X_3 = 6$'dır.

2.3.2 Örnekler

Önceki atıcı şimdi üç isabet bekliyor. Aşağıdaki dört örnek bu durumla ilgilidir.

Örnek 2.10 (Tam Dört Atış Yapmak). Bir atıcının belli bir hedefi vurma olasılığı 0,75'tir ve atışlar birbirinden bağımsızdır. Atıcı, hedef üç isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır. Tam 4 atış yapması olasılığı nedir?

Çözüm.
X, hedef üç isabet alıncaya kadar yapılan atış sayısı olsun. $k = 3$, $p = \frac{3}{4}$ ve $q = \frac{1}{4}$ olduğundan $X \sim \text{NB}\left(3, \frac{3}{4}\right)$ ve

$$f(x) = \binom{x-1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}, \qquad x = 3, 4, 5, \ldots$$

Formülden

$$P(X = 4) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{27}{64} \cdot \frac{1}{4} = \frac{81}{256} \approx 0{,}316.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonucu dizileri sayarak da görelim. Dördüncü atış üçüncü isabet olmalıdır; tek ıska ilk üç atıştan birindedir. Olası diziler B^cBBB, BB^cBB ve BBB^cB'dir ve her birinin olasılığı $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3$'tür. Toplam $3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{27}{64} = \frac{81}{256}$ olur.
■

Örnek 2.11 (En Çok Dört Atış Yapmak). Bir atıcının belli bir hedefi vurma olasılığı $0{,}75$'tir ve atışlar birbirinden bağımsızdır. Atıcı, hedef üç isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır. En çok 4 atış yapması olasılığı nedir?

Çözüm.
$X \sim \mathrm{NB}\left(3, \frac{3}{4}\right)$ atış sayısı olsun. X en az 3 olduğundan en çok 4 atış $X = 3$ ya da $X = 4$ demektir:

$$P(X = 3) = \binom{2}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}, \qquad P(X = 4) = \frac{81}{256}$$

(ikincisi önceki örnekte bulundu). Öyleyse

$$P(X \le 4) = \frac{27}{64} + \frac{81}{256} = \frac{108}{256} + \frac{81}{256} = \frac{189}{256} \approx 0{,}738.$$

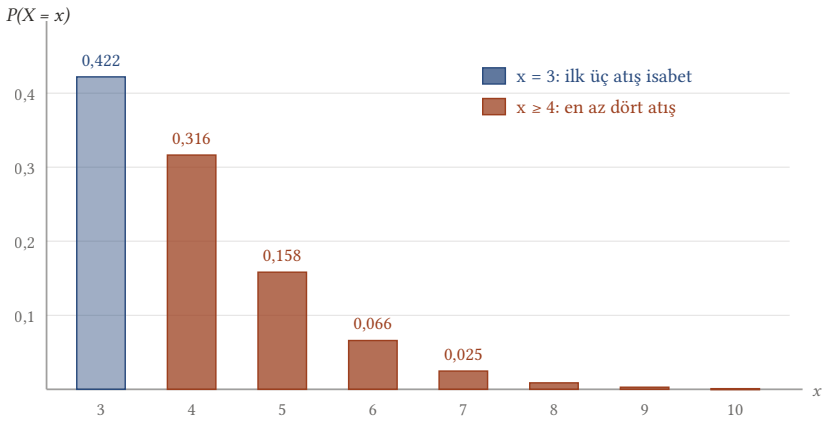
■

Örnek 2.12 (En Az Dört Atış Yapmak). Bir atıcının belli bir hedefi vurma olasılığı $0{,}75$'tir ve atışlar birbirinden bağımsızdır. Atıcı, hedef üç isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır. En az 4 atış yapması olasılığı nedir?

Çözüm.
$X \sim \mathrm{NB}\left(3, \frac{3}{4}\right)$ atış sayısı olsun. $X \ge 4$ olayı sonsuz çok değer içerir; tümleyeni ise yalnız $X = 3$'tür. Öyleyse

$$P(X \ge 4) = 1 - P(X = 3) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} \approx 0{,}578.$$

Yani en az dört atış gerekmesi, ilk üç atışın hepsinin isabet olmaması demektir.



Şekil 2.7: Üç isabete kadar yapılan atış sayısı X'in olasılık fonksiyonu (k = 3, p = 0,75). En az dört atış olayı turuncu çubukların hepsidir; olasılığını tek mavi çubuğu 1'den çıkararak buluruz: 1 − 27/64 = 37/64.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.13 (Üç İsabetlik Oyunda Kazanç). Bir atıcının belli bir hedefi vurma olasılığı $0{,}75$'tir ve atışlar birbirinden bağımsızdır. Atıcı, hedef üç isabet alıncaya kadar atış yapmaya kararlıdır. Her isabette hedefin değeri olan 200 TL kazanılıyor ve bir atışın maliyeti 100 TL'dir. Kazancın olasılık fonksiyonunu bulunuz; kazancın beklenen değerini ve varyansını hesaplayınız.

Çözüm.
$X \sim \mathrm{NB}\left(3, \frac{3}{4}\right)$ atış sayısı olsun. Oyun sonunda üç isabet vardır, yani $3 \cdot 200 = 600$ TL kazanılır; X atış için $100X$ TL ödenir. Kazanç

$$K = 3 \cdot 200 - 100X = 600 - 100X.$$

$X = 3, 4, 5, 6, \ldots$ değerleri $K = 300, 200, 100, 0, \ldots$ değerlerine karşılık gelir; $D_K = \{300, 200, 100, 0, -100, \ldots\}$ ve $P(K = 600 - 100x) = P(X = x)$'tir:

x	3	4	5	6	$\cdots$
k	300	200	100	0	$\cdots$
$P(K=k)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{4}$	$\binom{4}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$\binom{5}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^3$	$\cdots$
ondalık	0,4219	0,3164	0,1582	0,0659	$\cdots$

Kapalı biçimde, $x = \frac{600-k}{100}$ olduğundan

$$P(K=k) = \binom{\frac{600-k}{100} - 1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{300-k}{100}}, \qquad k = 300, 200, 100, \ldots$$

Negatif binom momentleri $E(X) = \frac{k}{p} = \frac{3}{3/4} = 4$ ve $\mathrm{Var}\,(X) = \frac{kg}{p^2} = \frac{3 \cdot \frac{1}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{4}{3}$'tür. Doğrusal dönüşüm kuralıyla

$$E(K) = 600 - 100\,E(X) = 600 - 400 = 200 \ \ \text{TL},$$

$$\mathrm{Var}\,(K) = (-100)^2\,\mathrm{Var}\,(X) = 10000 \cdot \frac{4}{3} = \frac{40000}{3} \approx 13333{,}33.$$

Kazancın standart sapması $\sqrt{40000/3} \approx 115{,}47$ TL'dir.
■

Bu bölümde iadesiz çekilişin ve başarıyı beklemenin modellerini gördük. Bir sonraki bölümde, belli bir zaman aralığında ya da bölgede meydana gelen olayların sayısını modelleyen dağılıma ve binom dağılımının bir başka limitine geçiyoruz: Poisson ve Kesikli Düzgün Dağılımlar.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. Poisson ve Kesikli Düzgün Dağılımlar

Hipergeometrik, Geometrik ve Negatif Binom Dağılımları bölümüne kadar gördüğümüz dağılımların hepsi, sayısı belli ya da sayılabilen denemelerden doğuyordu. Bu bölümde iki yeni kesikli dağılım var. Birincisi, Poisson dağılımı, deneme sayısının belli olmadığı durumları modeller: bir saatte gelen müşteriler, bir günde olan kazalar, bir bölgedeki hayvanlar. Burada "deneme" zamanın ya da alanın kendisidir. İkincisi, kesikli düzgün dağılım, bütün değerlerin aynı olasılıkla geldiği en yalın durumdur.

3.1 Poisson dağılımı ve Poisson deneyi

Poisson dağılımını kardeş kitapta tanımladık (Olasılık Teorisi'ndeki tanım). Hatırlayalım: $\lambda > 0$ olmak üzere olasılık fonksiyonu

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

olan X rastgele değişkenine Poisson dağılımlıdır denir ve $X \sim \text{Poisson}\ (\lambda)$ yazılır. Buradaki λ, bir birim zamanda (ya da birim alanda, birim hacimde) ortaya çıkan ortalama sonuç sayısıdır. Bu yorumun doğru olduğunu aşağıda $E(X) = \lambda$ eşitliğiyle göreceğiz.
Poisson dağılımı, sürekli bir ortamda (zaman, alan, hacim) kesikli sonuçlar sayan deneylerde karşımıza çıkar. Örneğin:

- belli bir zaman aralığında bir mağazaya gelen müşteri sayısı,
- belli bir bölgede yaşayan yaban hayvanı sayısı.

Açıklamayı zaman üzerinden yapalım. Alan ya da hacim için aynı şeyler "uzunluk" yerine "alan" ya da "hacim" yazılarak söylenir.

Tanım 3.1 (Poisson deneyi). $(0, t]$ zaman aralığında gerçekleşen sonuçların (bir olayın gerçekleşmelerinin) sayısı X olsun. Sonuçları üreten deney şu üç özelliği taşıyorsa ona **Poisson deneyi** denir:
(a) Küçük bir Δt uzunluklu aralıkta tam bir başarı elde etme olasılığı Δt ile orantılıdır: yaklaşık $\lambda\,\Delta t$'dir. Burada $\lambda > 0$ sabittir.
(b) Küçük bir Δt uzunluklu aralıkta iki ya da daha çok başarı elde etme olasılığı yaklaşık olarak sıfırdır.
(c) Ayrık (ortak noktası olmayan) Δt uzunluklu aralıklarda elde edilen sonuçlar birbirinden bağımsız Bernoulli denemeleridir.

Yani çok kısa bir aralıkta ya hiç olay olmaz ya da tek bir olay olur. Bir olay olma olasılığı aralığın uzunluğuyla orantılıdır ve bir aralıkta olanlar başka bir aralıkta olanları etkilemez. Mağazaya gelen müşteriler için bu, "bir saniyede iki müşteri pek gelmez; müşteriler birbirinden habersiz gelir" demektir.
Bu üç özellik, X'in dağılımını tek başına belirler. Fikir basittir: aralığı çok sayıda küçük parçaya bölünce her parça bir Bernoulli denemesine döner ve X bir binom değişkeni olur. Parça sayısı sonsuza giderken binom olasılıkları Poisson olasılıklarına yaklaşır.

Teorem 3.1 (Poisson deneyinde başarı sayısının dağılımı). *$(0, t]$ aralığını uzunluğu $\Delta t = t/n$ olan n eşit parçaya bölelim ve Poisson deneyinin (Tanım 3.1) özelliklerinin her parçada tam olarak geçerli olduğunu kabul edelim. Yani her parçada en fazla bir başarı olsun, bir başarının olasılığı $p_n = \lambda\,\Delta t = \lambda t/n$ olsun ve parçalar bağımsız olsun. Bu durumda toplam başarı sayısı $X_n \sim \text{Binom}\ (n, \lambda t/n)$ olur ve her $x = 0, 1, 2, \ldots$ için*

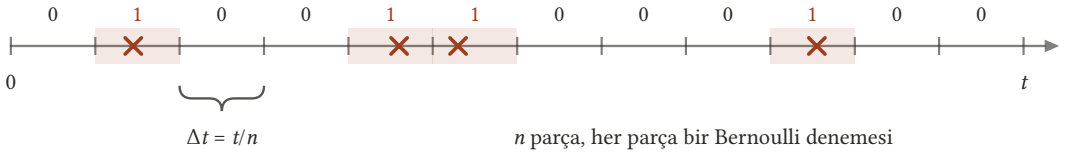
$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

eşitliği geçerlidir.

> ***İspat.***

 CC BY-NC-SA 4.0

Her parça, başarı olasılığı $p_n = \lambda t/n$ olan bir Bernoulli denemesidir ve parçalar bağımsızdır. n bağımsız Bernoulli denemesindeki başarı sayısı binom dağılımlı olduğundan $X_n \sim \text{Binom}\ (n, p_n)$ olur.



Şekil 3.1: (0, t] aralığı uzunluğu Δt = t/n olan n parçaya bölünür. Her parçada en fazla bir başarı olur (üstteki 1 ya da 0); parçalar bağımsızdır. Toplam başarı sayısı Binom(n, λt/n) dağılımına uyar.

Kısaltma için $\mu = \lambda t$ diyelim; böylece $p_n = \mu/n$ olur. x'i sabitleyip $n \geq x$ ve $n \geq \mu$ alalım; böylece $p_n \leq 1$ olur ve X_n tanımlıdır. Sonlu sayıda n'yi dışarıda bırakmak limiti etkilemez. $\binom{n}{x} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}$ olduğundan

$$P(X_n = x) = \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^x\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-x}$$
$$= \frac{\mu^x}{x!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x}\cdot\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n\cdot\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-x}$$

yazabiliriz. Son üç çarpanın limitini ayrı ayrı bulalım.
Birinci çarpan. *Paydaki x çarpanın her birini bir n'ye bölersek*

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{n^x} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-x+1}{n} = 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)$$

olur. Sabit sayıda (x tane) çarpanın her biri 1'e gittiğinden çarpım da 1'e gider.
İkinci çarpan. *$y_n = \left(1-\dfrac{\mu}{n}\right)^n$ diyelim; bu bir 1^∞ belirsizliğidir. Logaritma alırsak*

$$\ln y_n = n\ln\left(1-\frac{\mu}{n}\right) = \frac{\ln(1-\mu/n)}{1/n}$$

olur ve $n \to \infty$ iken bu bir $0/0$ belirsizliğidir. $u = 1/n$ yazıp $u \to 0^+$ limitini L'Hôpital kuralıyla hesaplayalım:

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{\ln(1-\mu u)}{u} = \lim_{u\to 0^+}\frac{-\mu/(1-\mu u)}{1} = -\mu.$$

Üstel fonksiyon sürekli olduğundan $y_n = e^{\ln y_n} \to e^{-\mu}$ bulunur.
Üçüncü çarpan. *$\mu/n \to 0$ olduğundan $\left(1-\dfrac{\mu}{n}\right)^{-x} \to 1^{-x} = 1$ olur.*
Limitlerin çarpımı çarpımın limiti olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = x) = \frac{\mu^x}{x!}\cdot 1\cdot e^{-\mu}\cdot 1 = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!}$$

elde edilir. Bu hesap, np_n çarpımı yalnızca bir sayıya yakınsadığında da küçük bir değişiklikle çalışır (Olasılık Teorisi'ndeki genel ispat).
■

Parçalar ne kadar küçük seçilirse (a)–(c) özellikleri o kadar iyi sağlanır. Bu limit, $(0, t]$ aralığındaki başarı sayısını Poisson (λt) dağılımıyla modellememizi gerekçelendirir; bundan sonra bunu kabul edeceğiz. Özel olarak birim uzunluklu bir aralıkta ($t = 1$) başarı sayısı Poisson (λ) dağılımlıdır.
Bu modelin bir sonucu şudur: bir aralıktaki başarı sayısının dağılımı yalnız aralığın **uzunluğuna** bağlıdır, aralığın nerede başladığına bağlı değildir. Çünkü ispatta yalnız uzunluk kullanıldı. Özellik (c) de ayrık

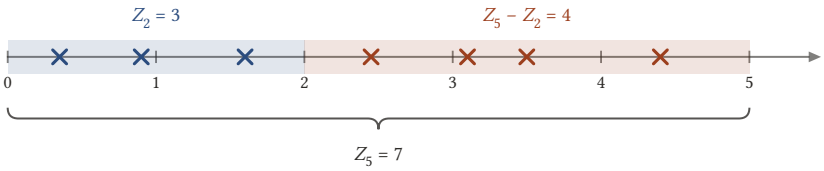
 CC BY-NC-SA 4.0

aralıklardaki sayıların bağımsız olduğunu söyler. Bu iki gözlem, farklı zamanlara ait olasılıkları hesaplamanın anahtarıdır.

Örnek 3.1 (Ayrık aralıklardaki olay sayıları). Bir Poisson deneyinde birim zamanda ortalama $\lambda = 1$ olay olsun. $(0, s]$ aralığındaki olay sayısını Z_s ile gösterelim. $P(Z_2 = 3,\, Z_5 = 7)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Z_2 ile Z_5 bağımsız değildir: $(0, 2]$ ve $(0, 5]$ aralıklarının ortak bir parçası vardır. Bu yüzden olasılığı $P(Z_2 = 3)\,P(Z_5 = 7)$ diye yazamayız. Olayı ayrık aralıklar cinsinden yeniden yazalım. İlk iki birimde 3 olay olmuşsa ve toplam 7 ise, $(2, 5]$ aralığında $7 - 3 = 4$ olay olmuş demektir:

$$\{Z_2 = 3,\, Z_5 = 7\} = \{Z_2 = 3,\, Z_5 - Z_2 = 4\}.$$



Şekil 3.2: (0, 2] aralığında 3, (2, 5] aralığında 4 olay: toplamda $Z_5 = 7$. Ayrık iki aralıktaki sayılar bağımsızdır, ama Z_2 ile Z_5 ortak bir parçayı paylaştıkları için bağımsız değildir.

Z_2, $(0, 2]$ aralığındaki; $Z_5 - Z_2$ ise $(2, 5]$ aralığındaki olayları sayar. Aralığı küçük parçalara böldüğümüzde Z_2 yalnız $(0, 2]$ içindeki parçaların, $Z_5 - Z_2$ ise yalnız $(2, 5]$ içindeki parçaların sonuçlarına bağlıdır. Özellik (c) gereği bu iki parça grubu birbirinden bağımsızdır; dolayısıyla iki sayı da bağımsızdır. Teorem 3.1 gereği $Z_2 \sim \text{Poisson}\,(2)$ olur. $(2, 5]$ aralığının uzunluğu 3 olduğundan $Z_5 - Z_2 \sim \text{Poisson}\,(3)$ olur. Buna göre

$$P(Z_2 = 3) = \frac{e^{-2}\,2^3}{3!} = \frac{4}{3}\,e^{-2}, \qquad P(Z_5 - Z_2 = 4) = \frac{e^{-3}\,3^4}{4!} = \frac{27}{8}\,e^{-3}$$

ve bağımsızlıktan

$$P(Z_2 = 3,\, Z_5 = 7) = \frac{4}{3}\,e^{-2} \cdot \frac{27}{8}\,e^{-3} = \frac{9}{2}\,e^{-5} \approx 0{,}0303.$$

Karşılaştırma için, yanlış olan $P(Z_2 = 3)\,P(Z_5 = 7)$ çarpımı yaklaşık $0{,}0188$ çıkar. Yani iki sayı arasındaki bağı yok saymak, olasılığı üçte birden fazla küçültür.
■

Örnek 3.2 (Yirmi dakikada en az bir müşteri). Bir mağazaya saatte ortalama 6 müşteri gelmektedir ve müşteri gelişleri bir Poisson deneyi oluşturmaktadır. 20 dakikalık bir sürede en az bir müşteri gelme olasılığı nedir?

Çözüm.
Zaman birimi saat olsun: $\lambda = 6$. Yirmi dakika $t = 1/3$ saattir. Teorem 3.1 gereği bu süredeki müşteri sayısı X için

$$X \sim \text{Poisson}\,(\lambda t), \qquad \lambda t = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

"En az bir" olayının tümleyeni "hiç yok" olayıdır ve $P(X = 0) = e^{-2}$ olur. Buna göre

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}8647.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

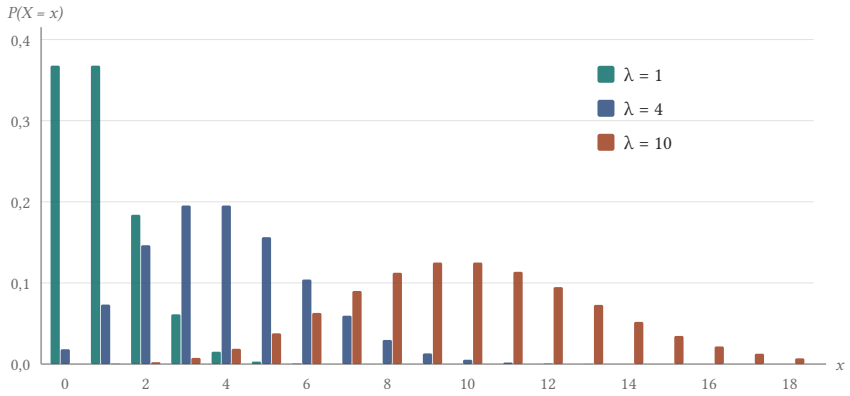
3.2 Poisson dağılımının momentleri

Poisson dağılımının bütün momentleri tek bir fonksiyondan, moment üreten fonksiyondan elde edilir. Bu fonksiyonun $t = 0$ noktasındaki türevleri momentleri verir (Olasılık Teorisi'ndeki teorem).

Teorem 3.2 (Poisson dağılımının momentleri). *$X \sim \text{Poisson}\ (\lambda)$ olsun.*
***(i)** Moment üreten fonksiyon her $t \in \mathbb{R}$ için $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$'dir.*
***(ii)** İlk üç moment şunlardır:*

$$E(X) = \lambda, \quad E(X^2) = \lambda^2 + \lambda, \quad E(X^3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

***(iii)** $\text{Var}\ (X) = \lambda$.*



Şekil 3.3: Poisson(λ) olasılık fonksiyonu λ = 1, 4 ve 10 için. Olasılıklar λ çevresinde toplanır; λ büyüdükçe dağılım sağa kayar, yayılır (standart sapma $\sqrt{\lambda}$) ve simetriye yaklaşır.

İspat.
***(i)** Tanım gereği $M_X(t) = E(e^{tX})$'tir. $e^{tx}\lambda^x = (\lambda e^t)^x$ yazarsak*

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

bulunur. Üçüncü eşitlikte $e^u = \sum_{x\geq 0} u^x/x!$ serisini $u = \lambda e^t$ için kullandık; bu seri her u için yakınsar.
***(ii)** Kısaca $M = M_X$ yazalım. Zincir kuralıyla $M'(t) = \lambda e^t M(t)$ olur. Bir kez daha türev alıp M' yerine bu ifadeyi koyarsak*

$$M''(t) = \lambda e^t M(t) + \lambda e^t M'(t) = (\lambda e^t + \lambda^2 e^{2t})M(t)$$

bulunur. Aynı yolla üçüncü türev

$$\begin{aligned} M'''(t) &= (\lambda e^t + 2\lambda^2 e^{2t})M(t) + (\lambda e^t + \lambda^2 e^{2t})\lambda e^t M(t) \\ &= (\lambda e^t + 3\lambda^2 e^{2t} + \lambda^3 e^{3t})M(t) \end{aligned}$$

olur. $t = 0$ noktasında $e^0 = 1$ ve $M(0) = e^{\lambda(1-1)} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} E(X) &= M'(0) = \lambda, \\ E(X^2) &= M''(0) = \lambda + \lambda^2, \\ E(X^3) &= M'''(0) = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3. \end{aligned}$$

***(iii)** Varyansın hesap formülüyle*

$$\text{Var}\ (X) = E(X^2) - \big(\,E(X)\big)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani Poisson dağılımında beklenen değer ile varyans aynı sayıdır. Birim zamandaki ortalama olay sayısı λ olduğundan, gözlenen sayımların ortalaması λ için doğal bir tahmindir. Bu fikri Momentler Yöntemi bölümünde sistemli hâle getireceğiz.

Üçüncü moment, **çarpımsal momentlerden** de kolayca çıkar. Kardeş kitapta $E\left[\, X(X-1)\cdots(X-k+1)\,\right] = \lambda^k$ olduğunu gördük (Olasılık Teorisi'ndeki teorem). $x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$ özdeşliği açılarak doğrulanabilir. Beklenen değerin doğrusallığıyla $E(X^3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$ yeniden bulunur.

Örnek 3.3 (İkinci momentin doğrudan hesabı). $X \sim \text{Poisson}\,(\lambda)$ olsun. Moment üreten fonksiyonu kullanmadan, doğrudan tanımdan $E(X^2)$'yi hesaplayınız.

Çözüm.
Faktöriyeli sadeleştirebilmek için $x^2 = x(x-1) + x$ yazalım:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} x\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

Birinci toplamda $x=0$ ve $x=1$ terimleri sıfırdır. $x \geq 2$ için $\dfrac{x(x-1)}{x!} = \dfrac{1}{(x-2)!}$ olur. $y = x-2$ yazarsak

$$\sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-2)!} = \lambda^2 \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda^2 \cdot 1 = \lambda^2$$

bulunur. Çünkü son toplam, Poisson olasılıklarının toplamıdır. İkinci toplamda $x=0$ terimi sıfırdır. $x \geq 1$ için $\dfrac{x}{x!} = \dfrac{1}{(x-1)!}$ olur ve $y = x-1$ yazarsak

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda$$

olur. Buna göre $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ bulunur. Bu sonuç Teorem 3.2 ile uyuşur.
■

Bu hesaptaki hileyi, yani x çarpanını $x!$ ile sadeleştirip toplama indisini bir kaydırmayı, genel bir özdeşlik olarak yazabiliriz. Özdeşlik, Poisson dağılımında birçok beklenen değeri tek satırda hesaplatır.

Teorem 3.3 (Poisson dağılımında kaydırma özdeşliği). *$X \sim \text{Poisson}\,(\lambda)$ olsun ve g, $\{0,1,2,\ldots\}$ üzerinde tanımlı, $E\,|\,g(X)\,| < \infty$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. O zaman*

$$E\left[\, X\,g(X-1)\,\right] = \lambda\,E\left[\, g(X)\,\right]$$

olur. ($X=0$ iken $Xg(X-1)$ çarpımı, $g(-1)$ tanımlı olmasa da 0 kabul edilir.)

İspat.
Tanım gereği

$$E\left[\, X\,g(X-1)\,\right] = \sum_{x=0}^{\infty} x\,g(x-1)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$$

$x=0$ terimi sıfırdır. $x \geq 1$ için $\dfrac{x}{x!} = \dfrac{1}{(x-1)!}$ olduğundan

$$E\left[\, X\,g(X-1)\,\right] = \sum_{x=1}^{\infty} g(x-1)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{(x-1)!}$$

yazılır. Şimdi $y = x-1$ diyelim. x değeri $1,2,\ldots$ iken y değeri $0,1,\ldots$ olur ve $\lambda^x = \lambda\cdot\lambda^y$ yazılır:

$$E\left[\, X\,g(X-1)\,\right] = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} g(y)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda\,E\left[\, g(X)\,\right].$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Aynı adımlar g yerine $\mid g \mid$ ile yapılınca sol taraftaki serinin mutlak toplamının $\lambda E \mid g(X) \mid < \infty$ olduğu görülür. Yani seriler mutlak yakınsaktır ve yapılan düzenlemeler geçerlidir.
■

Yani X ile çarpmak ve g'nin argümanını bir geri kaydırmak, λ ile çarpmakla aynı sonucu verir. Aşağıdaki örneklerde uygun bir g seçip özdeşliği uygulayacağız.

Örnek 3.4 (Özdeşlikle ilk iki moment). $X \sim \text{Poisson}\ (\lambda)$ olsun. Kaydırma özdeşliğini (Teorem 3.3) kullanarak $E(X^2)$'yi bulunuz.

Çözüm.
Önce $g(x) = 1$ alalım. Sol taraf $E(X \cdot 1) = E(X)$, sağ taraf $\lambda E(1) = \lambda$ olur; yani $E(X) = \lambda$.
Şimdi $g(x) = x$ alalım. O zaman $g(X-1) = X - 1$ olur ve özdeşlik

$$E\left[\ X(X-1)\ \right] = \lambda\, E(X) = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2$$

verir. $X^2 = X(X-1) + X$ olduğundan doğrusallıkla

$$E(X^2) = E\left[\ X(X-1)\ \right] + E(X) = \lambda^2 + \lambda$$

bulunur.
■

Örnek 3.5 (Özdeşlikle üçüncü moment). $X \sim \text{Poisson}\ (\lambda)$ olsun. Kaydırma özdeşliğini (Teorem 3.3) kullanarak $E(X^3)$'ü bulunuz.

Çözüm.
$X^3 = X \cdot X^2$ yazalım. $g(X-1) = X^2$ olması için $g(x) = (x+1)^2$ seçmeliyiz. Bu durumda özdeşlik

$$E(X^3) = E\left[\ X\, g(X-1)\ \right] = \lambda\, E\left[\ (X+1)^2\ \right]$$

verir. $(X+1)^2 = X^2 + 2X + 1$ olduğundan ve bir önceki örnekten $E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$ olduğundan

$$E(X^3) = \lambda(\lambda^2 + \lambda + 2\lambda + 1) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

bulunur. Bu sonuç Teorem 3.2 ile uyuşur.
■

Örnek 3.6 (Bir ters momentin hesabı). $X \sim \text{Poisson}\ (\lambda)$ olsun. $E\left[\dfrac{1}{X+1}\right]$'i bulunuz ve $\lambda = 2$ için sayısal değerini hesaplayınız.

Çözüm.
$g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ alalım; g sınırlı olduğundan $E \mid g(X) \mid < \infty$ olur. $X \geq 1$ iken $Xg(X-1) = X \cdot \dfrac{1}{X} = 1$ olur, $X = 0$ iken bu çarpım 0 olur. Yani $Xg(X-1)$, $\{X \geq 1\}$ olayının göstergesidir ve beklenen değeri bu olayın olasılığıdır:

$$E\left[\ X\, g(X-1)\ \right] = P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}.$$

Özdeşliğe göre bu sayı $\lambda\, E\left[\ g(X)\ \right]$'e eşittir. Buna göre

$$E\left[\frac{1}{X+1}\right] = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$$

bulunur. $\lambda = 2$ için değer $\dfrac{1 - e^{-2}}{2} \approx 0{,}4323$ olur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Binom dağılımına Poisson yaklaşımı

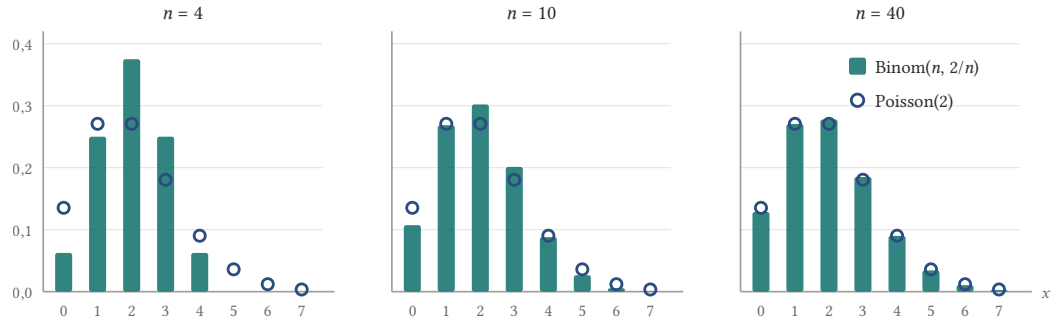
Poisson deneyiyle ilgili teoremin (Teorem 3.1) ispatında aslında daha genel bir şey gösterdik: n büyük, p küçük ve np ılımlı iken binom olasılıkları Poisson olasılıklarına yaklaşır. Bunu ayrıca kaydedelim (Olasılık Teorisi'ndeki teorem). $n \to \infty$ iken $p \to 0$ olsun ve $np = \lambda$ sabit kalsın, yani $p = \lambda/n$ olsun. O zaman her $x = 0, 1, 2, \ldots$ için

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

olur. Burada $q = 1 - p$'dir. Uygulamada bu şu demektir: n büyük ve p küçükse Binom (n, p) olasılıkları, $\lambda = np$ alınarak Poisson olasılıklarıyla yaklaşık olarak hesaplanabilir. Yaygın kaba kural, $n \geq 50$ ve $p \leq 0{,}05$ iken yaklaşımın yeterince iyi olduğudur.

i Yakınsamayı gözle görmek

Aşağıda $np = 2$ sabit tutulup n büyütülüyor. $n = 4$ için binom çubukları Poisson değerlerinden belirgin biçimde ayrılır. $n = 40$ için fark her değerde 0,01'in altındadır.



Şekil 3.4: np = 2 sabit tutulup n büyütüldüğünde Binom(n, 2/n) olasılıkları (çubuklar) Poisson(2) olasılıklarına (halkalar) yaklaşır; n = 40 için fark neredeyse görünmez.

Şimdi Poisson dağılımını ve bu yaklaşımı örneklerde kullanalım.

Örnek 3.7 (Bir günde hiç kaza olmaması). Bir kentte bir ayda ortalama 300 trafik kazası olmaktadır. Kazaların bir Poisson deneyi oluşturduğunu kabul edelim. Belli bir günde hiç kaza olmaması olasılığı nedir?

Çözüm.
Soru bir **gün** hakkındadır; bu yüzden önce ortalamayı güne çevirelim. Poisson deneyinde parametre aralığın uzunluğuyla orantılıdır (Teorem 3.1). Ayı 30 gün sayarsak günlük ortalama kaza sayısı

$$\lambda = \frac{300}{30} = 10$$

olur. Bir gündeki kaza sayısı X ise $X \sim \text{Poisson}\ (10)$ olur. $10^0 = 1$ ve $0! = 1$ olduğundan

$$P(X = 0) = \frac{e^{-10}\, 10^0}{0!} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$$

bulunur. Yani bu kentte kazasız bir gün son derece nadirdir.
■

Örnek 3.8 (Bir günde ikiden az kaza olması). Bir kentte bir ayda ortalama 300 trafik kazası olmaktadır. Kazaların bir Poisson deneyi oluşturduğunu kabul edelim. Belli bir günde ikiden az kaza olması olasılığı nedir?

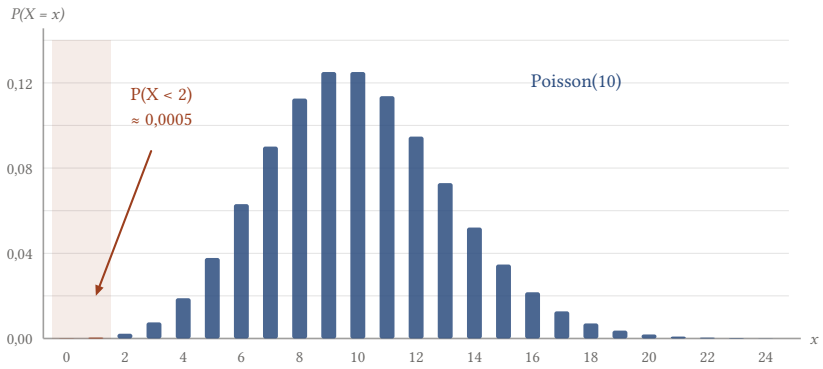
Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Poisson deneyinde parametre aralığın uzunluğuyla orantılı olduğundan (Teorem 3.1), ayı 30 gün sayarsak günlük ortalama $\lambda = 300/30 = 10$ olur. Bir gündeki kaza sayısı $X \sim \text{Poisson}\,(10)$ olur. "İkiden az" demek $X = 0$ ya da $X = 1$ demektir:

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= e^{-10} + \frac{e^{-10}\,10^1}{1!} = e^{-10}(1 + 10) = 11\,e^{-10}. \end{aligned}$$

Sayısal olarak $11\,e^{-10} \approx 0{,}000499$ bulunur.



Şekil 3.5: Bir gündeki kaza sayısı Poisson(10): olasılıklar 10 çevresinde toplanır. 0 ve 1 değerlerinin (taralı bant) çubukları görülemeyecek kadar kısadır.

Şekil sonucun neden bu kadar küçük olduğunu gösteriyor: olasılıklar 10 çevresinde toplanır, 0 ve 1 ise dağılımın en uç sol kuyruğundadır.
■

Örnek 3.9 (Kusurlu ürün sayısı). Belli bir ürünün kusurlu olma olasılığı 0,0001'dir. Üretilen 20000 ürün içinde kusurlu olanların sayısının 5'ten çok olması olasılığı nedir? Olasılığı hem binom dağılımıyla tam olarak hem de Poisson yaklaşımıyla hesaplayınız.

Çözüm.
20000 ürün içindeki kusurlu ürün sayısı X olsun. Bir ürünün kusurlu olup olmamasının ötekilerden bağımsız olduğunu kabul edersek

$$X \sim \text{Binom}\left(n = 20000, p = \frac{1}{10000}\right)$$

olur. "5'ten çok" olayının tümleyeni "en çok 5" olayıdır. Tümleyene geçmek, sonsuz sayıda değil yalnız altı terim toplamamızı sağlar.
Binom dağılımıyla.

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X \le 5) \\ &= 1 - \sum_{x=0}^{5} \binom{20000}{x} \left(\frac{1}{10000}\right)^x \left(\frac{9999}{10000}\right)^{20000-x} \\ &\approx 0{,}016558. \end{aligned}$$

Bu toplamın altı terimini elle hesaplamak zahmetlidir. Ama n çok büyük, p çok küçüktür; bu, Poisson yaklaşımının tam işe yaradığı durumdur.
Poisson yaklaşımıyla. $\lambda = np = 20000 \cdot \dfrac{1}{10000} = 2$ alalım. $x = 0, 1, \ldots, 5$ için $\dfrac{2^x}{x!}$ değerleri sırasıyla

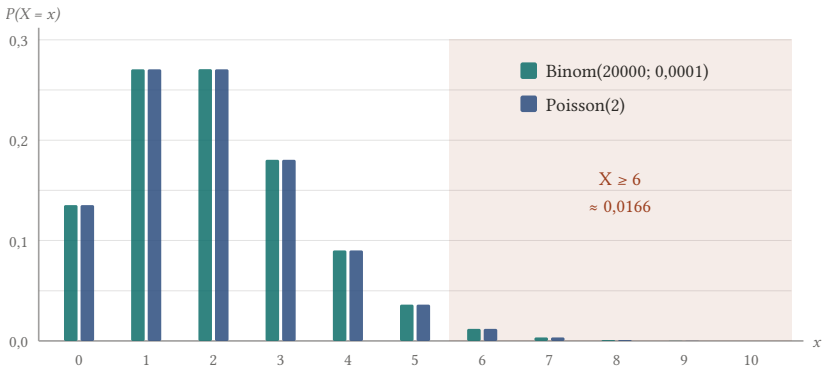
$$1, \quad 2, \quad 2, \quad \frac{4}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{15}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur ve toplamları $\frac{109}{15}$'tir. Buna göre

$$P(X > 5) \approx 1 - \sum_{x=0}^{5} \frac{e^{-2}\, 2^x}{x!} = 1 - \frac{109}{15}\, e^{-2} \approx 0{,}016564$$

bulunur. İki sonuç arasındaki fark yaklaşık $0{,}000005$'tir; yani göreli hata binde birin de altındadır.



Şekil 3.6: Kusurlu ürün sayısı: Binom(20000; 0,0001) ve Poisson(2) olasılıkları yan yana. Çubuklar gözle ayırt edilemez; taralı bölge istenen X ≥ 6 olayıdır.

■

3.4 Kesikli düzgün dağılım

Şimdi en yalın kesikli dağılıma geçelim: bütün değerlerin aynı olasılıkla geldiği dağılım. Kardeş kitapta bu dağılımı $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi üzerinde tanımladık (Olasılık Teorisi'ndeki tanım). Değerlerin ardışık tam sayılar olması gerekmez. Aynı fikir, herhangi n farklı sayıdan oluşan bir küme üzerinde de kurulur.

Tanım 3.2 (Sonlu bir küme üzerinde kesikli düzgün dağılım). $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ gerçel sayılar olsun. Olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{n}, \qquad x = x_1, x_2, \ldots, x_n$$

olan X rastgele değişkenine $\{x_1, \ldots, x_n\}$ kümesi üzerinde **kesikli düzgün dağılımlıdır** denir.

Yani X, n değerin her birini aynı olasılıkla, $1/n$ olasılıkla alır. Düzgün bir tavla zarının üstte gösterdiği sayı en bilinen örnektir. Bu durumda değerler $1, 2, \ldots, 6$ ve her birinin olasılığı $1/6$'dır.
Momentleri yazarken n değerin aritmetik ortalamasını $\bar{x}$ ile gösterelim:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Teorem 3.4 (Kesikli düzgün dağılımın momentleri). *X, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ üzerinde kesikli düzgün dağılımlı olsun. O zaman:*
(i) $E(X) = \bar{x}$ *ve* $E(X^2) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.
(ii) *Varyans birbirine eşit iki biçimde yazılır:*

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

(iii) *Moment üreten fonksiyon her $t \in \mathbb{R}$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$M_X(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} = \frac{1}{n}(e^{tx_1} + e^{tx_2} + \cdots + e^{tx_n})$$

olur.

İspat.
(i) *Beklenen değerin tanımıyla*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

bulunur. Aynı yolla $E(X^2) = \sum_i x_i^2 \cdot \frac{1}{n}$ *olur.*
(ii) *Varyansın hesap formülü ve (i) ile*

$$\text{Var }(X) = E(X^2) - \big(\ E(X)\big)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

olur. Öte yandan varyansın tanımından doğrudan

$$\text{Var }(X) = E\left[\ (X-\bar{x})^2\ \right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{n}$$

yazılır. İki ifadenin eşit olduğunu doğrudan da görebiliriz. Kareyi açıp $\sum_i x_i = n\bar{x}$ *eşitliğini kullanırsak*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\end{aligned}$$

bulunur.
(iii) *Tanım gereği*

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} f(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}$$

olur. Sonlu bir toplam olduğundan her t *için tanımlıdır.*
■

Yani kesikli düzgün dağılımın beklenen değeri, değerlerin sıradan aritmetik ortalamasıdır. Varyansı ise değerlerin bu ortalamadan sapmalarının karelerinin ortalamasıdır.

Örnek 3.10 (Eşit aralıklı olmayan değerler). X, $\{1, 2, 4, 8, 10\}$ kümesi üzerinde kesikli düzgün dağılımlı olsun. $E(X)$ ve Var (X)'i bulunuz; varyansı momentler teoremindeki (Teorem 3.4) iki formülle de hesaplayınız.

Çözüm.
Burada $n = 5$'tir. Beklenen değer değerlerin ortalamasıdır:

$$E(X) = \bar{x} = \frac{1+2+4+8+10}{5} = \frac{25}{5} = 5.$$

Birinci formül. Karelerin toplamı $1 + 4 + 16 + 64 + 100 = 185$ olduğundan

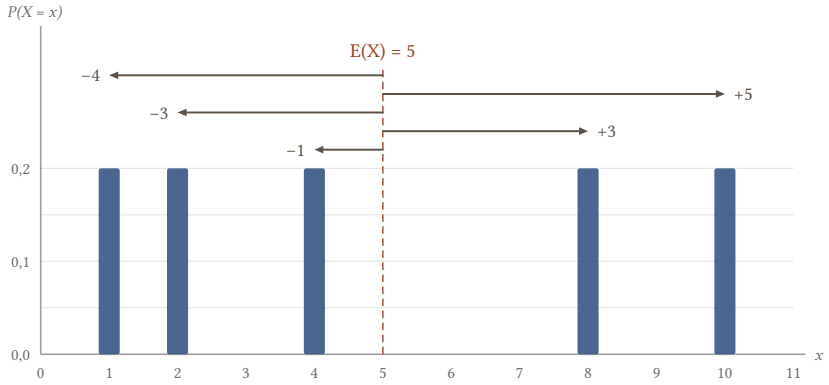
$$\text{Var }(X) = \frac{1}{5}(185 - 5\cdot 5^2) = \frac{185 - 125}{5} = \frac{60}{5} = 12.$$

İkinci formül. Sapmalar $x_i - 5$ sırasıyla $-4, -3, -1, 3, 5$'tir; toplamları sıfırdır. Kareleri $16, 9, 1, 9, 25$ ve bunların toplamı 60'tır. Buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\text{Var}\,(X) = \frac{60}{5} = 12$$

bulunur. İki formül aynı sonucu verir.



Şekil 3.7: {1, 2, 4, 8, 10} üzerinde kesikli düzgün dağılım. Beklenen değer 5, eşit ağırlıkların denge noktasıdır: oklar sapmaları gösterir ve −4 − 3 − 1 + 3 + 5 = 0. Varyans, sapma karelerinin ortalamasıdır.

■

Değerler $1, 2, \ldots, n$ olduğunda, yani kardeş kitaptaki özel durumda, olasılık fonksiyonu $f(x) = 1/n$ $(x = 1, 2, \ldots, n)$ olur. Momentler teoremine (Teorem 3.4) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ve $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ toplamlarını koyunca

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \text{Var}\,(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

bulunur (Olasılık Teorisi'ndeki önerme). Varyans şöyle sadeleşir:

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)\,(\,4n+2-3n-3\,)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}.$$

Örnek 3.11 (Tavla zarının beklenen değeri ve varyansı). Düzgün bir tavla zarı atılıyor ve üste gelen nokta sayısı X ile gösteriliyor. X'in beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

Çözüm.
Zar düzgün olduğundan altı yüzün her biri aynı olasılıkla gelir. Yani X kesikli düzgün dağılımlıdır ve olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{6}, \qquad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

olur. Bu, $n = 6$ için $\{1, \ldots, n\}$ üzerindeki düzgün dağılımdır. Formüllerden

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} = 3{,}5, \qquad \text{Var}\,(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{36-1}{12} = \frac{35}{12}$$

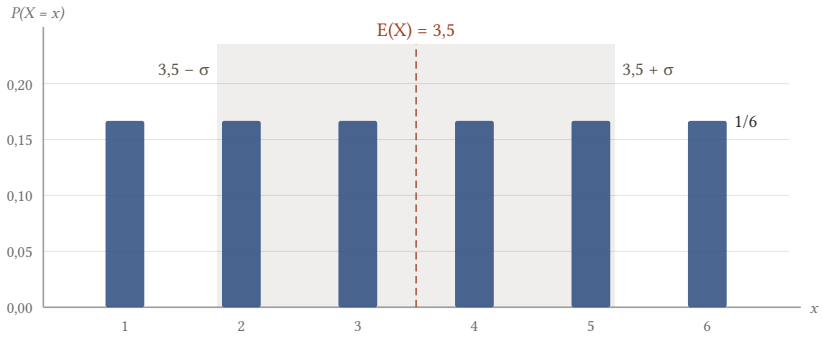
bulunur. Sağlama için varyansı doğrudan da hesaplayalım. Önce

$$E(X^2) = \frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$$

bulunur. Buradan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12} \approx 2{,}92.$$



Şekil 3.8: Zarın olasılık fonksiyonu: altı eşit çubuk. Beklenen değer 3,5 tam ortadadır; taralı bant bir standart sapma ($\sigma = \sqrt{35/12} \approx 1{,}71$) genişliğindedir.

$E(X) = 3{,}5$ değeri zarın hiçbir zaman gösteremeyeceği bir sayıdır. Beklenen değer tek bir atışın sonucu değil, uzun vadeli ortalamadır. Zarı defalarca atıp gelen sayıların ortalamasını alırsak bu ortalama, atış sayısı arttıkça 3,5'e yaklaşır. Bu gözlemin kesin hâli büyük sayılar yasasıdır (Yakınsama ve Merkezi Limit Teoremi).

■

Örnek 3.12 (Zarın moment üreten fonksiyonu). Düzgün bir tavla zarının üste gelen yüzü X olsun. $M_X(t)$'yi yazınız ve $M_X'(0)$ değerinin $E(X)$'e eşit olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.
Momentler teoreminin (Teorem 3.4) (iii) şıkkında $x_i = i$ ve $n = 6$ alırsak

$$M_X(t) = \frac{1}{6}(e^t + e^{2t} + e^{3t} + e^{4t} + e^{5t} + e^{6t}), \qquad t \in \mathbb{R}$$

bulunur. Terim terim türev alalım: e^{kt} teriminin türevi ke^{kt}'dir. Buna göre

$$M_X'(t) = \frac{1}{6}(e^t + 2e^{2t} + 3e^{3t} + 4e^{4t} + 5e^{5t} + 6e^{6t})$$

olur. $t = 0$ yazınca bütün üstel çarpanlar 1 olur:

$$M_X'(0) = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5 = E(X).$$

■

Bu bölümde iki kesikli dağılımı tamamladık. Poisson dağılımını kısa aralıklara bölünmüş bir zamanın binom limiti olarak türettik. Kesikli düzgün dağılımda ise momentlerin, değerlerin aritmetik ortalaması ve ortalama kare sapması olduğunu gördük. Kesikli bir değişkende $f(x) = P(X = x)$ bir olasılıktır. Sürekli bir değişkende ise $f(x)$ olasılık göstermez, yalnız alanlar olasılık verir. Örneğin $(0, 1/2)$ aralığında $f(x) = 2$ olan bir yoğunluk, 1'den büyük değer aldığı hâlde geçerli bir yoğunluktur. Sonraki bölüm Önemli Sürekli Dağılımlar bu dünyaya geçiyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

4. Önemli Sürekli Dağılımlar

Kesikli bir rastgele değişkenin değerleri çoğunlukla sayarak elde edilir: kusurlu ürün sayısı, gelen müşteri sayısı, başarıya kadar yapılan deneme sayısı. Gözlenen değer bir ölçümün sonucu olduğunda ise durum değişir. Bir ampulün ömrü, bir parçanın uzunluğu, bir hanenin geliri bir ölçü aletiyle okunur ve ilke olarak bir aralıktaki her değeri alabilir. Bu tür büyüklükleri sürekli dağılımlarla modelleriz.
Poisson ve kesikli düzgün dağılımlarla kesikli aileleri tamamladık. Bu bölümde uygulamada en sık karşılaşılan sürekli aileleri tanıyacağız: sürekli düzgün, gamma, üstel, beta, Weibull, Cauchy ve log-normal. Normal dağılım öyle merkezi bir yer tutar ki ona ayrı bir bölüm ayırdık. Her aile için aynı soruları soracağız: yoğunluk nedir, beklenen değer ve varyans nedir, moment üreten fonksiyon var mıdır, aile başka ailelere nasıl bağlanır? Gamma ve beta dağılımlarını kurmak için önce aynı adı taşıyan iki özel fonksiyona ihtiyacımız olacak.

4.1 Sürekli Düzgün Dağılım

En basit sürekli dağılımla başlayalım. $a < b$ olmak üzere yoğunluğu (a, b) aralığında sabit, dışında sıfır olan X rastgele değişkenine **sürekli düzgün dağılımlı** denir ve $X \sim U(a, b)$ yazılır. Yoğunluğun toplam alanı 1 olmak zorunda olduğundan bu sabit $\frac{1}{b-a}$'dır:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \le x \le b.$$

Bu dağılım Olasılık Teorisi'nde tanımlandı. Uç noktaları aralığa katıp katmamak hiçbir olasılığı değiştirmez, çünkü sürekli bir değişkende tek bir noktanın olasılığı sıfırdır. Aynı yerde ispatlanan sonuçlar şunlardır:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad E(X^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}, \qquad \text{Var}\,(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ve $t \neq 0$ için

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t\,(b-a)}, \qquad M_X(0) = 1.$$

Yani beklenen değer aralığın orta noktasıdır ve varyans yalnızca aralığın uzunluğuna bağlıdır. Aralık nerede durursa dursun, uzunluğu aynıysa yayılım da aynıdır. Bir alt aralığın olasılığı da yalnızca uzunluğuyla belirlenir: $a \le c < d \le b$ için $P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}$.

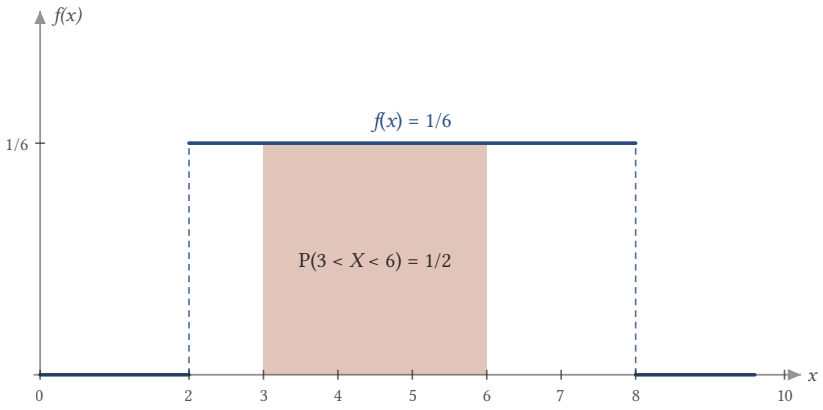
Örnek 4.1 (Bekleme Süresinin Bir Aralığa Düşmesi). Durağa gelen bir yolcunun otobüsü bekleme süresi X (dakika), $U(2, 8)$ dağılımlıdır. Yolcunun 3 ile 6 dakika arasında bekleme olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Yoğunluk $2 \le x \le 8$ için $f(x) = \frac{1}{8-2} = \frac{1}{6}$, diğer yerlerde 0'dır. İstenen olasılık yoğunluğun 3 ile 6 arasındaki integralidir:

$$P(3 < X < 6) = \int_3^6 \frac{1}{6}\,dx = \frac{6-3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Geometrik olarak bu, tabanı 3, yüksekliği $\frac{1}{6}$ olan dikdörtgenin alanıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.1: U(2, 8) yoğunluğu 2 ile 8 arasında 1/6 yüksekliğinde bir dikdörtgendir. 3 ile 6 arasındaki taralı dikdörtgenin alanı $3 \cdot 1/6 = 1/2$ olasılığını verir.

■

Örnek 4.2 (Bekleme Süresinin Ortalaması ve Varyansı). Bekleme süresi $X \sim U(2,8)$ olsun. $E(X)$, $E(X^2)$ ve Var (X) değerlerini bulunuz.

Çözüm.
$a = 2, b = 8$ alınırsa

$$E(X) = \frac{2+8}{2} = 5, \qquad E(X^2) = \frac{2^2 + 2 \cdot 8 + 8^2}{3} = \frac{84}{3} = 28.$$

Varyans hesap formülüyle

$$\text{Var } (X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = 28 - 25 = 3$$

bulunur. Bu, $\frac{(8-2)^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$ formülüyle de uyuşur. Standart sapma $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ dakikadır.
■

Örnek 4.3 (Ortalamadan Bir Standart Sapma Uzaklık). Bekleme süresi $X \sim U(2,8)$ olsun. X'in ortalamasına bir standart sapmadan daha yakın olma olasılığını, yani $P\left(\mid X - \mu \mid < \sigma \right)$ değerini bulunuz.

Çözüm.
Önceki örnekte $\mu = 5$ ve $\sigma = \sqrt{3}$ bulduk. $\mid X - 5 \mid < \sqrt{3}$ olayı $5 - \sqrt{3} < X < 5 + \sqrt{3}$ demektir. Bu aralık $[2, 8]$'in içindedir, çünkü $\sqrt{3} < 3$. Uzunluğu $2\sqrt{3}$ olduğundan

$$P\left(\mid X - 5 \mid < \sqrt{3} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774.$$

Düzgün dağılımda değerlerin yaklaşık %58'i ortalamanın bir standart sapma yakınındadır. Bu oran a ve b'ye bağlı değildir, çünkü aralık uzunluğu $2\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{3}}$ her zaman toplam uzunluğun $\frac{1}{\sqrt{3}}$ katıdır.
■

4.2 Gamma Fonksiyonu

Gamma dağılımının yoğunluğunda faktöriyelin reel sayılara genişletilmiş bir hâli görünür. Bu genişletme bir integralle yapılır.

Tanım 4.1 (Gamma Fonksiyonu). $p > 0$ için

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx$$

ile tanımlanan fonksiyona **gamma fonksiyonu** denir.

Yani $\Gamma(p)$, $x^{p-1}e^{-x}$ fonksiyonunun pozitif yarı eksen üzerindeki alanıdır. Önce bu alanın sonlu olduğunu görelim. İntegrali 1 noktasında ikiye ayıralım. $0 < x \le 1$ için $e^{-x} \le 1$ olduğundan

$$\int_0^1 x^{p-1} e^{-x}\, dx \le \int_0^1 x^{p-1}\, dx = \frac{1}{p} < \infty;$$

burada $p > 0$ koşulu kullanıldı. $x \ge 1$ için $x^{p-1}e^{-x/2}$ fonksiyonu sürekli ve $x \to \infty$ iken 0'a gider; dolayısıyla bir K sabitiyle sınırlıdır. Buradan $x^{p-1}e^{-x} \le Ke^{-x/2}$ olur ve $\int_1^\infty Ke^{-x/2}\, dx = 2Ke^{-1/2}$ sonlu olduğundan ikinci parça da yakınsar.

Teorem 4.1 (Gamma Fonksiyonunun Özellikleri). *(a) Her $p > 0$ için $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$.*
(b) $\Gamma(1) = 0! = 1$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\Gamma(n) = (n-1)!$.
(c) Her $p > 0$ için

$$\Gamma(p) = 2\int_0^\infty v^{2p-1} e^{-v^2}\, dv.$$

(d) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
(e) Her $p > 0$ ve $\lambda > 0$ için

$$\int_0^\infty x^{p-1} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\Gamma(p)}{\lambda^p}.$$

İspat.
(a) *Kısmi integrasyonda $u = x^p$ ve $dv = e^{-x}\,dx$ alalım; $du = p\,x^{p-1}\,dx$ ve $v = -e^{-x}$ olur:*

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\, dx = \Big[-x^p e^{-x}\Big]_0^\infty + p\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx.$$

Sınır terimi sıfırdır: $x \to \infty$ iken üstel azalma her kuvveti yener ve $x^p e^{-x} \to 0$; $x = 0$'da ise $p > 0$ olduğundan $x^p = 0$'dır. Geriye $p\,\Gamma(p)$ kalır.
(b) *Tanımdan*

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^\infty = 1.$$

(a) şıkkını art arda uygularsak $n \ge 2$ için

$$\begin{aligned}\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots \\ &= (n-1)(n-2)\cdots 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)!\end{aligned}$$

bulunur; $n = 1$ için eşitlik $\Gamma(1) = 1 = 0!$ demektir.
(c) *Tanımdaki integralde $x = v^2$ ($v > 0$) dönüşümünü yapalım. $dx = 2v\,dv$ ve $x^{p-1} = v^{2p-2}$ olur; x, 0'dan ∞'a giderken v de 0'dan ∞'a gider:*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty v^{2p-2} e^{-v^2}\, 2v\, dv = 2\int_0^\infty v^{2p-1} e^{-v^2}\, dv.$$

(d) *(c) şıkkında $p = \frac{1}{2}$ alınırsa $v^{2p-1} = v^0 = 1$ olur ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-v^2}\, dv$ bulunur. Olasılık Teorisi'nde Gauss integrali hesaplandı:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz = \sqrt{2\pi}.$$

Burada $z = \sqrt{2}\,v$ yazalım; $dz = \sqrt{2}\,dv$ olur ve $\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,dv = \sqrt{2\pi}$, yani $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2}\,dv = \sqrt{\pi}$ elde edilir. e^{-v^2} çift fonksiyon olduğundan $2\int_0^{\infty} e^{-v^2}\,dv$ de $\sqrt{\pi}$'ye eşittir. Böylece $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
(e) *$t = \lambda x$ dönüşümüyle $x = \frac{t}{\lambda}$, $dx = \frac{dt}{\lambda}$ olur ve sınırlar değişmez:*

$$\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{\lambda^{p-1}}\,e^{-t}\,\frac{dt}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^p}\int_0^{\infty} t^{p-1}e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(p)}{\lambda^p}.$$

■

(a) özelliği $p > 1$ için $\Gamma(p) = (p-1)\,\Gamma(p-1)$ biçiminde de yazılır. (b) özelliği gamma fonksiyonunun faktöriyeli genişlettiğini söyler: $\Gamma(n) = (n-1)!$ eşitliği tam sayılarda geçerlidir, $\Gamma(p)$ ise her pozitif reel p için tanımlıdır. (e) özelliği ise pratikte en çok kullanılandır: $x^{p-1}e^{-\lambda x}$ biçimindeki her integral, hiç integral almadan gamma fonksiyonuyla yazılır.

Örnek 4.4 (Gamma Fonksiyonunun Değerleri). $\Gamma(5)$, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ ve $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ değerlerini hesaplayınız.

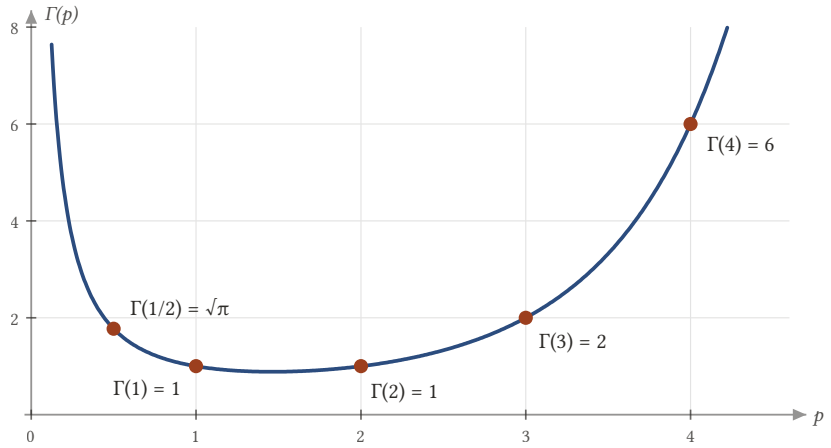
Çözüm.
5 bir tam sayı olduğundan Teorem 4.1 (b) ile $\Gamma(5) = 4! = 24$.
Yarım tam sayılarda (a) özelliğini $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$'ye varana kadar uygularız:

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \approx 1{,}3293.$$

Bir adım daha:

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \approx 3{,}3234.$$

Aşağıdaki grafikte gamma fonksiyonunun tam sayılarda faktöriyel değerlerinden geçtiği görülüyor.



Şekil 4.2: Gamma fonksiyonunun grafiği. Tam sayılarda faktöriyel değerlerinden geçer: Γ(n) = (n − 1)!. Γ(1/2) = √π ≈ 1,77 olur; p ⟶ 0 iken Γ(p) sınırsız büyür.

■

Örnek 4.5 (Gamma Fonksiyonuyla İntegral Hesabı). $\int_0^{\infty} x^3e^{-2x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
İntegrand $x^{p-1}e^{-\lambda x}$ biçimindedir: $p-1=3$, yani $p=4$ ve $\lambda=2$. Teorem 4.1 (e) ile

$$\int_0^\infty x^3 e^{-2x}\,dx = \frac{\Gamma(4)}{2^4} = \frac{3!}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Aynı sonuç üç kez kısmi integrasyonla da bulunur, ama gamma fonksiyonu bu işi tek satıra indirir. ■

4.3 Gamma Dağılımı

Gamma fonksiyonunun integrandı negatif olmayan ve alanı $\Gamma(p)$ olan bir fonksiyondur. Onu $\Gamma(p)$'ye bölersek bir yoğunluk elde ederiz. Bir ölçek parametresi de ekleyince bekleme sürelerini, toplam hizmet sürelerini ve pozitif değerli pek çok büyüklüğü modelleyen esnek bir aile ortaya çıkar.

Tanım 4.2 (Gamma Dağılımı). $r>0$ ve $\alpha>0$ olsun. Olasılık yoğunluk fonksiyonu

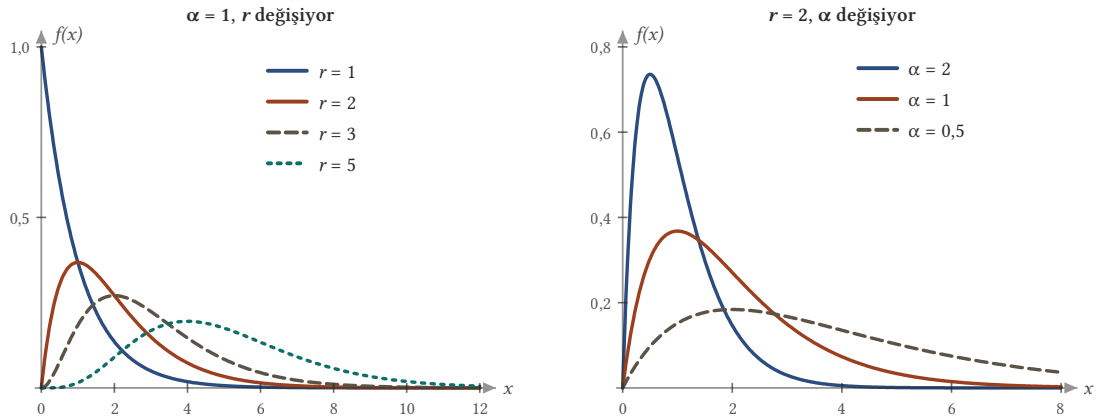
$$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha}{\Gamma(r)}\,(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

olan X rastgele değişkenine r ve α parametreli **gamma dağılımına** sahiptir denir ve $X\sim\text{Gamma}\,(r,\alpha)$ yazılır.

Yani gamma dağılımlı bir değişken yalnız pozitif değerler alır. r eğrinin **biçimini**, α ise **ölçeğini** belirler. f gerçekten bir yoğunluktur: negatif değildir ve Teorem 4.1 (e) ile ($p=r$, $\lambda=\alpha$)

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\,x^{r-1}e^{-\alpha x}\,dx = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\cdot\frac{\Gamma(r)}{\alpha^r}=1.$$

Aşağıdaki şekil parametrelerin rolünü gösteriyor. $r\le 1$ iken yoğunluk sıfırdan itibaren azalır; $r>1$ iken sıfırdan başlar, bir tepe yapar ve sönümlenir. α büyüdükçe kütle sıfıra yaklaşır.



Şekil 4.3: Gamma(r, α) yoğunlukları. Solda α = 1 iken r büyüdükçe tepe sağa kayar ve eğri yayvanlaşır; r = 1 üstel yoğunluktur. Sağda r = 2 iken α büyüdükçe yoğunluk sıfıra doğru sıkışır: α bir ölçek (oran) parametresidir.

Gamma dağılımının bütün momentleri tek bir formülden gelir. Formül yalnız tam sayı mertebeler için değil, her reel $s>-r$ için geçerlidir; bu genellik aşağıda Weibull dağılımında işimize yarayacak.

Teorem 4.2 (Gamma Dağılımının Momentleri). *$X\sim\text{Gamma}\,(r,\alpha)$ olsun. Her reel $s>-r$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$E(X^s) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\,\alpha^s}.$$

Özel olarak

$$E(X) = \frac{r}{\alpha}, \qquad \text{Var}\,(X) = \frac{r}{\alpha^2}.$$

İspat.
Beklenen değerin tanımından

$$E(X^s) = \int_0^\infty x^s\,\frac{\alpha}{\Gamma(r)}\,(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}\,dx.$$

$t = \alpha x$ *dönüşümünü yapalım:* $x = \frac{t}{\alpha}$, $dx = \frac{dt}{\alpha}$ *ve* $\alpha x = t$ *olur. Böylece*

$$\begin{aligned} E(X^s) &= \int_0^\infty \frac{t^s}{\alpha^s}\,\frac{\alpha}{\Gamma(r)}\,t^{r-1}e^{-t}\,\frac{dt}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha^s\,\Gamma(r)}\int_0^\infty t^{r+s-1}e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\,\alpha^s}. \end{aligned}$$

Son integral, $r+s>0$ *olduğundan gamma fonksiyonunun tanımındaki integraldir ve sonludur.*
$s = 1$ *alınırsa ve* $\Gamma(r+1) = r\,\Gamma(r)$ *kullanılırsa*

$$E(X) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)\,\alpha} = \frac{r\,\Gamma(r)}{\Gamma(r)\,\alpha} = \frac{r}{\alpha}.$$

$s = 2$ *için* $\Gamma(r+2) = (r+1)\,r\,\Gamma(r)$ *olduğundan* $E(X^2) = \frac{r(r+1)}{\alpha^2}$ *bulunur. Varyans hesap formülüyle*

$$\text{Var}\,(X) = \frac{r(r+1)}{\alpha^2} - \frac{r^2}{\alpha^2} = \frac{r^2+r-r^2}{\alpha^2} = \frac{r}{\alpha^2}.$$

■

Teorem 4.3 (Gamma Dağılımının Moment Üreten Fonksiyonu). $X \sim \text{Gamma}\,(r,\alpha)$ *ise* X*'in moment üreten fonksiyonu* $t<\alpha$ *için vardır ve*

$$M_X(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^r, \qquad \alpha - t > 0.$$

İspat.
Tanımdan

$$M_X(t) = E\left(\,e^{tX}\,\right) = \int_0^\infty e^{tx}\,\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\,x^{r-1}e^{-\alpha x}\,dx = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\int_0^\infty x^{r-1}e^{-(\alpha-t)x}\,dx.$$

$\alpha - t > 0$ *ise Teorem 4.1 (e) şıkkı* $p = r$ *ve* $\lambda = \alpha - t$ *ile uygulanır:*

$$M_X(t) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\cdot\frac{\Gamma(r)}{(\alpha-t)^r} = \left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^r.$$

$t \geq \alpha$ *ise* $x>0$ *için* $e^{-(\alpha-t)x} \geq 1$ *olur; integrand* x^{r-1}*'den küçük olmaz ve* $\int_1^\infty x^{r-1}\,dx$ *ıraksak olduğundan integral de ıraksar. Demek ki* $E(e^{tX})$ *tam olarak* $t<\alpha$ *için sonludur. Bu aralık* 0*'ın bir komşuluğunu içerdiğinden moment üreten fonksiyon vardır.*
■

Moment üreten fonksiyondan momentler de okunabilir: $M_X'(t) = r\,\alpha^r(\alpha-t)^{-r-1}$ olduğundan $M_X'(0) = \frac{r}{\alpha}$ bulunur. Bu, Teorem 4.2 ile uyuşur. Moment üreten fonksiyon dağılımı tek türlü belirlediği

 CC BY-NC-SA 4.0

için (Olasılık Teorisi'ndeki teklik teoremi), $\left(\frac{\alpha}{\alpha-t}\right)^r$ biçiminde bir moment üreten fonksiyon gören her değişkenin gamma dağılımlı olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 4.6 (Moment Üreten Fonksiyondan Gamma Dağılımını Tanımak). X'in moment üreten fonksiyonu $t < \frac{1}{3}$ için $M_X(t) = (1-3t)^{-4}$ olsun. X'in dağılımını, beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

Çözüm.
Payı ve paydayı 3'e bölelim:

$$\frac{1}{1-3t} = \frac{1/3}{1/3-t}, \qquad M_X(t) = \left(\frac{1/3}{1/3-t}\right)^4.$$

Bu, Teorem 4.3'deki biçimdir; $r=4$ ve $\alpha = \frac{1}{3}$. Teklik teoremi gereği $X \sim \text{Gamma}\left(4, \frac{1}{3}\right)$'tür. Teorem 4.2 ile

$$E(X) = \frac{r}{\alpha} = \frac{4}{1/3} = 12, \qquad \text{Var}\,(X) = \frac{r}{\alpha^2} = \frac{4}{1/9} = 36.$$

Doğrudan türevle sağlama: $M_X'(t) = 12(1-3t)^{-5}$ ve $M_X''(t) = 180(1-3t)^{-6}$ olduğundan $E(X) = 12$, $E(X^2) = 180$ ve $\text{Var}\,(X) = 180 - 144 = 36$.
■

4.4 Üstel Dağılım

Gamma dağılımında $r = 1$ alalım. $\Gamma(1) = 1$ ve $(\alpha x)^0 = 1$ olduğundan yoğunluk sadeleşir:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu, **üstel dağılımdır** ve $X \sim \text{Üstel}\,(\alpha)$ yazılır; yani $\text{Üstel}\,(\alpha) = \text{Gamma}\,(1, \alpha)$. Dağılım Olasılık Teorisi'nde tanımlandı; orada oran parametresi λ ile gösterilmişti, burada gamma ailesiyle uyum için α yazıyoruz. Gamma dağılımı için bulduklarımızda $r = 1$ koymak yeter:

$$M_X(t) = \frac{\alpha}{\alpha - t} (\alpha - t > 0), \qquad E(X) = \frac{1}{\alpha}, \qquad \text{Var}\,(X) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

Yani ortalama bekleme süresi $\frac{1}{\alpha}$'dır; α büyüdükçe bekleme kısalır. Dağılım fonksiyonu $x > 0$ için $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, kuyruğu ise $P(X > x) = e^{-\alpha x}$'tir.
Üstel dağılım, geometrik dağılım gibi **belleksizlik** (hafızasızlık) özelliğine sahiptir: $s > t$ için

$$P(X > s \mid X > t) = P(X > s - t).$$

Gerçekten $s > t$ olduğundan $(X > s) \subseteq (X > t)$'dir ve koşullu olasılığın tanımıyla

$$\begin{aligned} P(X > s \mid X > t) &= \frac{P(X > s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s)}{P(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\alpha s}}{e^{-\alpha t}} = e^{-\alpha(s-t)} = P(X > s - t). \end{aligned}$$

Yani t süre boyunca bozulmamış bir parça, kalan ömrü bakımından yepyeni bir parçadan farksızdır; geçmiş, gelecek hakkında bilgi taşımaz. Bu özelliğe sahip tek sürekli dağılımın üstel dağılım olduğu Olasılık Teorisi'nde ispatlandı.

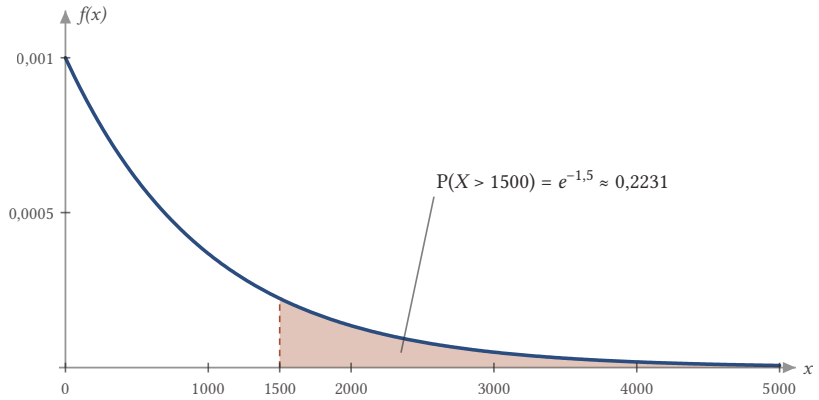
Örnek 4.7 (Ampulün Ömrü). Bir ampulün ömrü X (saat) üstel dağılımlıdır ve ortalama ömür 1000 saattir. Ampulün 1500 saatten uzun yanma olasılığını bulunuz.

Çözüm.
$E(X) = \frac{1}{\alpha} = 1000$ olduğundan $\alpha = 0{,}001$'dir. Kuyruk formülüyle

$$P(X > 1500) = e^{-0{,}001 \cdot 1500} = e^{-1{,}5} \approx 0{,}2231.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Ampullerin yaklaşık %22'si 1500 saati aşar.



Şekil 4.4: Ortalama ömrü 1000 saat olan ampulün ömür yoğunluğu (α = 0,001). 1500 saatin sağında kalan taralı alan, ampulün 1500 saatten uzun yanma olasılığıdır.

■

Örnek 4.8 (Bin Saat Yanmış Ampul). Bir ampulün ömrü X (saat), ortalaması 1000 saat olan üstel dağılıma sahiptir. 1000 saattir yanan bir ampulün toplamda 2500 saati doldurma olasılığını bulunuz.

Çözüm.
İstenen $P(X > 2500 \mid X > 1000)$ olasılığıdır. Belleksizlik özelliği $s = 2500$, $t = 1000$ ile

$$P(X > 2500 \mid X > 1000) = P(X > 1500) = e^{-1,5} \approx 0,2231$$

verir. Doğrudan hesap da aynı sonucu verir:

$$\frac{P(X > 2500)}{P(X > 1000)} = \frac{e^{-2,5}}{e^{-1}} = e^{-1,5}.$$

1000 saat yanmış ampulün 1500 saat daha yanma olasılığı, yeni bir ampulün 1500 saat yanma olasılığıyla aynıdır. Üstel model, ampulün "yaşlanmadığını" varsayar.
■

4.4.1 Bağımsız Üstel ve Gamma Değişkenlerinin Toplamı

Gamma dağılımının en önemli yorumu toplamlardan gelir. Bir tamircinin art arda iki arızayı gidermesi için geçen toplam süreyi ya da bir santrale üçüncü çağrının gelmesine kadar geçen süreyi düşünelim. Bunlar bağımsız üstel sürelerin toplamıdır. Moment üreten fonksiyon bu toplamların dağılımını kolayca verir.

Teorem 4.4 (Bağımsız Gamma Değişkenlerinin Toplamı). *$X_1, \ldots, X_n$ bağımsız ve $X_i \sim$ Gamma (r_i, α) olsun; ölçek parametresi α hepsinde aynıdır. O zaman*

$$Y = X_1 + \cdots + X_n \sim \text{Gamma } (r_1 + \cdots + r_n, \alpha).$$

Özel olarak $X_1, \ldots, X_n$ bağımsız ve her biri Üstel (α) *ise $Y \sim$ Gamma (n, α)'dır.*

İspat.
$t < \alpha$ olsun. $X_1, \ldots, X_n$ bağımsız olduğundan $e^{tX_1}, \ldots, e^{tX_n}$ de bağımsızdır ve bağımsız değişkenlerin çarpımının beklenen değeri beklenen değerlerin çarpımıdır (n çarpana tümevarımla geçilir). Buna göre

$$M_Y(t) = E\left(e^{tX_1} \cdots e^{tX_n}\right) = E\left(e^{tX_1}\right) \cdots E\left(e^{tX_n}\right) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 4.3 her çarpanı verir:

$$M_Y(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r_1} \cdots \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r_n} = \left(\frac{\alpha}{\alpha - t}\right)^{r_1 + \cdots + r_n}.$$

Bu, Gamma $(r_1 + \cdots + r_n, \alpha)$ *dağılımının moment üreten fonksiyonudur ve* 0*'ın* $(-\alpha, \alpha)$ *komşuluğunda sonludur. Teklik teoremi gereği* Y *bu dağılıma sahiptir. Üstel durum,* Üstel $(\alpha) =$ Gamma $(1, \alpha)$ *olduğundan her* $r_i = 1$ *alınarak elde edilir:* $r_1 + \cdots + r_n = n$*.*
■

Yani tam sayı r için Gamma (r, α), oranı α olan bir olaylar dizisinde r. olayın gerçekleşmesine kadar geçen süredir. Ortalamanın $\frac{r}{\alpha}$ çıkması da bu yoruma uyar: her biri ortalama $\frac{1}{\alpha}$ süren r bekleyiş art arda eklenir.

Örnek 4.9 (İki Arızanın Toplam Onarım Süresi). Bir tamircinin bir arızayı gidermesi için geçen süre (saat) ortalaması 2 saat olan üstel dağılıma sahiptir. Tamirci birbirinden bağımsız iki arızayı art arda gideriyor. Toplam sürenin 4 saati aşma olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Her onarım süresi Üstel (α) dağılımlıdır ve $\frac{1}{\alpha} = 2$ olduğundan $\alpha = \frac{1}{2}$'dir. Teorem 4.4 gereği toplam süre $T \sim$ Gamma $\left(2, \frac{1}{2}\right)$'dir. $\Gamma(2) = 1$ olduğundan yoğunluk $x > 0$ için

$$f(x) = \frac{1/2}{\Gamma(2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2-1} e^{-x/2} = \frac{x}{4}\, e^{-x/2}.$$

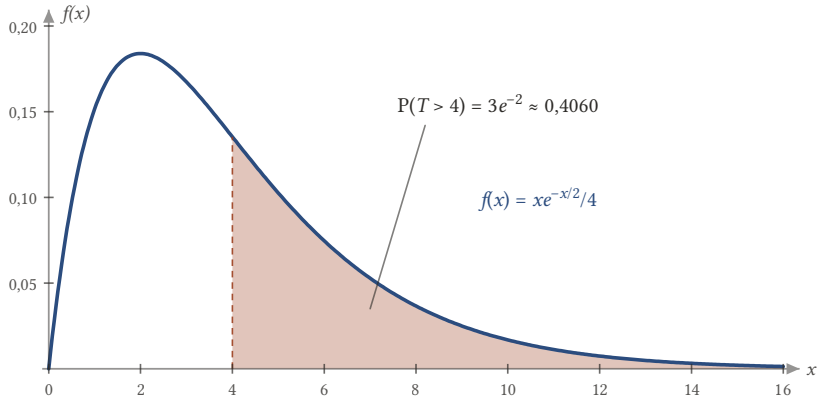
Kısmi integrasyonla ($u = x$, $dv = e^{-x/2}\,dx$, $v = -2e^{-x/2}$)

$$\int x\, e^{-x/2}\, dx = -2x\, e^{-x/2} + 2 \int e^{-x/2}\, dx = -2x\, e^{-x/2} - 4e^{-x/2}.$$

$x \to \infty$ iken bu ifade 0'a gider. Öyleyse

$$\begin{aligned} P(T > 4) &= \frac{1}{4} \Big[-2x\, e^{-x/2} - 4e^{-x/2} \Big]_4^{\infty} \\ &= \frac{1}{4} \left(0 + 8e^{-2} + 4e^{-2} \right) = 3e^{-2} \approx 0{,}4060. \end{aligned}$$

Karşılaştırma için tek bir onarımın 4 saati aşma olasılığı $e^{-4/2} = e^{-2} \approx 0{,}1353$'tür. Toplam sürenin ortalaması $E(T) = \frac{2}{1/2} = 4$ saat, varyansı Var $(T) = \frac{2}{1/4} = 8$'dir.



Şekil 4.5: İki arızanın toplam onarım süresi Gamma(2, 1/2) dağılımlıdır. 4 saatin sağındaki taralı alan, toplam sürenin 4 saati aşma olasılığıdır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Gamma ailesinin bir başka önemli üyesi, istatistikte sürekli karşımıza çıkacak olan ki-kare dağılımıdır. Onu Örneklem Dağılımları bölümünde tanıyacağız.

4.5 Beta Fonksiyonu ve Beta Dağılımı

Gamma dağılımı pozitif yarı eksende yaşar. Değerleri $(0,1)$ aralığına sıkışmış büyüklükler için, örneğin bir oran, bir yüzde ya da bir olasılık için, benzer esneklikte bir aileye ihtiyaç vardır. Bu aile beta fonksiyonundan doğar.

Tanım 4.3 (Beta Fonksiyonu). $u > 0$ ve $v > 0$ için

$$B(u,v) = \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx$$

ile tanımlanan fonksiyona **beta fonksiyonu** denir.

Yani $B(u,v)$, $(0,1)$ üzerinde $x^{u-1}(1-x)^{v-1}$ fonksiyonunun altındaki alandır. u ya da v 1'den küçükse integrand uç noktalarda sınırsızdır, ama integral yine de sonludur. $0 < x \le \frac{1}{2}$ için $(1-x)^{v-1}$ çarpanı 1 ile 2^{1-v} arasında kalır, dolayısıyla sınırlıdır; $\int_0^{1/2} x^{u-1}\,dx$ ise $u > 0$ olduğundan sonludur. $\frac{1}{2} \le x < 1$ yarısında roller değişir. x yerine $1-x$ yazarak $B(u,v) = B(v,u)$ simetrisi de hemen görülür.
Beta fonksiyonunu doğrudan hesaplamak zordur. Neyse ki gamma fonksiyonuna bağlanır.

Teorem 4.5 (Beta ve Gamma Fonksiyonlarının İlişkisi). *Her $u > 0$ ve $v > 0$ için*

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\,\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}.$$

İspat.
Tanımdan iki gamma integralini çarpalım. İntegrandlar negatif olmadığından çarpım tek bir iki katlı integral olarak yazılabilir:

$$\Gamma(u)\,\Gamma(v) = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty x^{u-1}y^{v-1}e^{-(x+y)}\,dx\,dy.$$

$(0,\infty)^2$ bölgesinde $x = sw$, $y = s(1-w)$ değişken değiştirmesini yapalım; burada $s = x+y > 0$ ve $w = \frac{x}{x+y} \in (0,1)$'dir. Bu dönüşüm $(0,\infty)\times(0,1)$ şeridini $(0,\infty)^2$ çeyreğine birebir götürür. Jacobian

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,w)} = \det\begin{bmatrix} w & s \\ 1-w & -s \end{bmatrix} = -sw - s(1-w) = -s$$

olduğundan $dx\,dy = s\,ds\,dw$ olur. Ayrıca $x+y = s$ ve

$$x^{u-1}y^{v-1} = s^{u+v-2}\,w^{u-1}(1-w)^{v-1}$$

olduğundan integral iki ayrı integralin çarpımına ayrılır:

$$\begin{aligned}\Gamma(u)\,\Gamma(v) &= \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty s^{u+v-1}e^{-s}\,w^{u-1}(1-w)^{v-1}\,dw\,ds \\ &= \int_0^\infty s^{u+v-1}e^{-s}\,ds \cdot \int_0^1 w^{u-1}(1-w)^{v-1}\,dw \\ &= \Gamma(u+v)\,B(u,v).\end{aligned}$$

$\Gamma(u+v) > 0$ olduğundan iki yanı ona bölmek istenen eşitliği verir.
■

Örneğin

 CC BY-NC-SA 4.0

$$B(2,3) = \frac{\Gamma(2)\,\Gamma(3)}{\Gamma(5)} = \frac{1!\cdot 2!}{4!} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

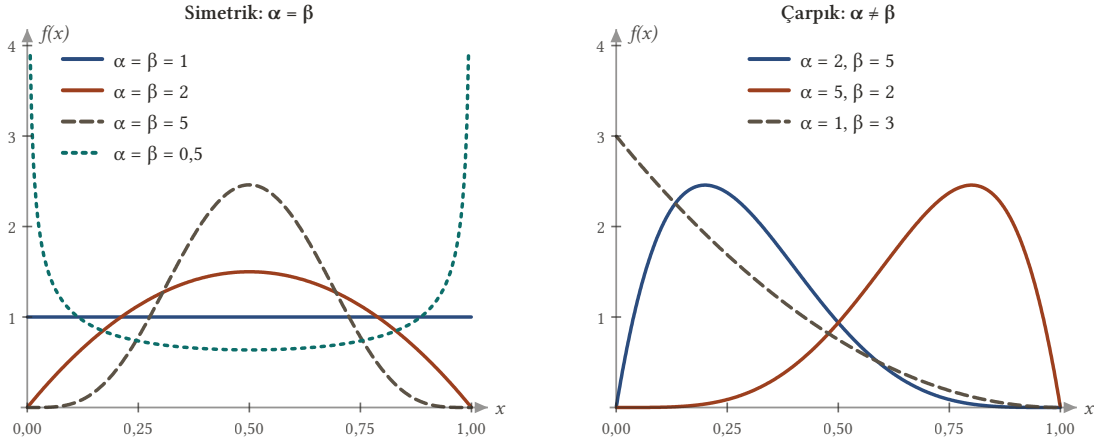
Doğrudan hesap da aynı sonucu verir: $\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Tanım 4.4 (Beta Dağılımı). $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olsun. Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olan X rastgele değişkenine α ve β parametreli **beta dağılımına** sahiptir denir ve $X \sim \text{Beta}\,(\alpha, \beta)$ yazılır.

Yani beta dağılımlı bir değişken $(0,1)$ aralığında değer alır. f'nin integralinin 1 olması doğrudan beta fonksiyonunun tanımından gelir. $\alpha = \beta = 1$ için yoğunluk sabit 1 olur, yani Beta $(1,1) = U(0,1)$'dir. Parametreler değiştikçe beta ailesi $(0,1)$ üzerinde neredeyse her biçimi alabilir: simetrik tümsek, U biçimi, sola ya da sağa yığılmış eğriler.



Şekil 4.6: Beta(α, β) yoğunlukları (0, 1) aralığında yaşar. α = β iken eğri 1/2'ye göre simetriktir: α = β = 1 düzgün dağılımdır; ortak değer 1'den küçükken eğri U biçimini alır. α, β'dan büyükken kütle sağa, küçükken sola yığılır.

Teorem 4.6 (Beta Dağılımının Momentleri). *$X \sim \text{Beta}\,(\alpha, \beta)$ olsun. Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için*

$$E(X^n) = \frac{B(\alpha+n,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)\,\Gamma(\alpha)}.$$

Özel olarak

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad \text{Var}\,(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

İspat.
Tanımdan

$$E(X^n) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{B(\alpha+n,\beta)}{B(\alpha,\beta)},$$

çünkü son integral $u = \alpha + n, v = \beta$ için beta fonksiyonudur. Teorem 4.5 her iki beta değerine uygulanırsa $\Gamma(\beta)$ sadeleşir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{B(\alpha+n,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+n)\,\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)\,\Gamma(\alpha)}.$$

$n=1$ için $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$ ve $\Gamma(\alpha+\beta+1)=(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta)$ olduğundan $E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. $n=2$ için aynı özellik iki kez uygulanır:

$$E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}.$$

Varyans hesap formülüyle, ortak payda $(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)$ alınarak

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \\ &= \frac{\alpha\,\big[\,(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha(\alpha+\beta+1)\,\big]}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)};\end{aligned}$$

Son adımda köşeli parantezin içi sadeleşti:

$$\alpha^2+\alpha\beta+\alpha+\beta-\alpha^2-\alpha\beta-\alpha=\beta.$$

■

Yani beklenen değer α'nın toplam $\alpha+\beta$ içindeki payıdır. α ile β aynı oranda büyütülürse ortalama değişmez ama varyans küçülür: dağılım ortalamanın çevresinde toplanır.

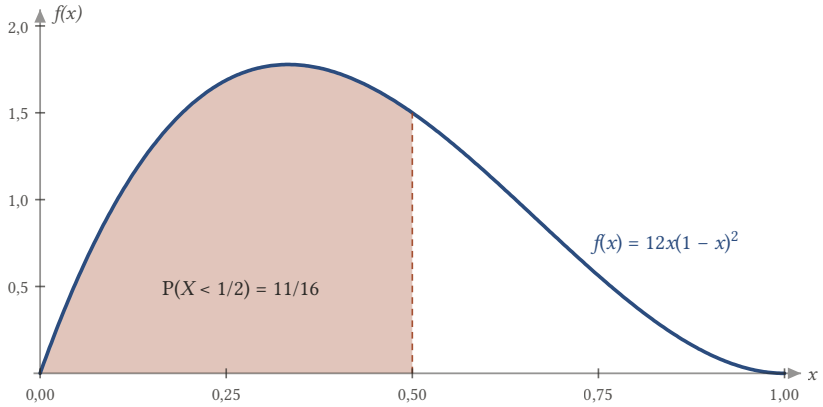
Örnek 4.10 (Meşgul Olma Oranının Yarıyı Aşmaması). Bir makinenin bir gün içinde meşgul olduğu zaman oranı X, Beta $(2,3)$ dağılımına sahiptir. Makinenin günün yarısından azında meşgul olma olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Yukarıda $B(2,3)=\frac{1}{12}$ bulduk; dolayısıyla $0<x<1$ için yoğunluk

$$f(x) = 12\,x(1-x)^2 = 12\,\left(\,x-2x^2+x^3\,\right)$$

olur. İstenen olasılık

$$\begin{aligned}P\!\left(X<\frac{1}{2}\right) &= 12\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^{1/2} = 12\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\frac{1}{64}\right) \\ &= 12\cdot\frac{24-16+3}{192} = \frac{12\cdot 11}{192} = \frac{11}{16}.\end{aligned}$$



Şekil 4.7: Beta(2, 3) yoğunluğu 1/3 noktasında tepe yapar. Taralı alan, makinenin günün yarısından azında meşgul olma olasılığıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 4.11 (Meşgul Olma Oranının Ortalaması ve Varyansı). Bir makinenin bir gün içinde meşgul olduğu zaman oranı $X \sim \text{Beta}\ (2,3)$ olsun. $E(X)$ ve $\text{Var}\ (X)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Teorem 4.6 ile $\alpha = 2$, $\beta = 3$ için

$$E(X) = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}, \qquad \text{Var}\ (X) = \frac{2 \cdot 3}{5^2 \cdot 6} = \frac{6}{150} = \frac{1}{25}.$$

Makine ortalamada günün %40'ında meşguldür ve standart sapma $\frac{1}{5} = 0{,}2$'dir. Sağlama olarak $E(X^2) = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$ ve $\frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}$.
■

Beta ile gamma dağılımları arasında fonksiyonlarınkine benzer bir bağ vardır. Aynı ölçekli iki bağımsız gamma değişkeninden birinin toplamdaki payı beta dağılımlıdır.

Teorem 4.7 (Gamma Değişkenlerinin Oranı Beta Dağılımlıdır). *$X \sim \text{Gamma}\ (r,\alpha)$ ve $Y \sim \text{Gamma}\ (k,\alpha)$ bağımsız olsun. O zaman*

$$U = \frac{X}{X+Y} \sim \text{Beta}\ (r,k).$$

Üstelik U, $V = X+Y \sim \text{Gamma}\ (r+k,\alpha)$ değişkeninden bağımsızdır.

İspat.
X ve Y bağımsız olduğundan ortak yoğunlukları marjinallerin çarpımıdır. $D = (0,\infty)^2$ açık kümesinde

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\, x^{r-1} e^{-\alpha x} \cdot \frac{\alpha^k}{\Gamma(k)}\, y^{k-1} e^{-\alpha y}$$

olur, dışında sıfırdır. $u = \frac{x}{x+y}$, $v = x+y$ dönüşümü D'yi $E = (0,1)\times(0,\infty)$ kümesine birebir götürür. Tersi $x = uv$, $y = v(1-u)$'dur ve Jacobian'ı

$$J = \det \begin{bmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{bmatrix} = v(1-u) + uv = v$$

olup E üzerinde sıfırdan farklıdır. Jacobian dönüşüm teoremi gereği $(u,v) \in E$ için

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= f_{X,Y}\left(\, uv, v(1-u)\,\right) |\, J\,| \\ &= \frac{\alpha^{r+k}}{\Gamma(r)\,\Gamma(k)}\, (uv)^{r-1} \left(\, v(1-u)\right)^{k-1} e^{-\alpha uv - \alpha v(1-u)}\, v \\ &= \frac{\alpha^{r+k}}{\Gamma(r)\,\Gamma(k)}\, u^{r-1}(1-u)^{k-1}\, v^{r+k-1} e^{-\alpha v}. \end{aligned}$$

Teorem 4.5 ile $\Gamma(r)\,\Gamma(k) = B(r,k)\,\Gamma(r+k)$ yazarsak ortak yoğunluk iki çarpana ayrılır:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{u^{r-1}(1-u)^{k-1}}{B(r,k)} \cdot \frac{\alpha^{r+k}\, v^{r+k-1} e^{-\alpha v}}{\Gamma(r+k)}.$$

Birinci çarpan $\text{Beta}\ (r,k)$ yoğunluğu, ikincisi $\text{Gamma}\ (r+k,\alpha)$ yoğunluğudur ve her birinin integrali 1'dir. v üzerinden integral alınırsa U'nun marjinal yoğunluğu birinci çarpan, u üzerinden integral alınırsa V'nin marjinal yoğunluğu ikinci çarpan çıkar. Ortak yoğunluk marjinallerin çarpımı olduğundan U ile V bağımsızdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örneğin X ve Y bağımsız Üstel (α) ise $\frac{X}{X+Y} \sim$ Beta $(1,1) = U(0,1)$'dir: iki bağımsız üstel bekleyişin toplamı içinde birincinin payı düzgün dağılır ve α'ya hiç bağlı değildir.

4.6 Weibull Dağılımı

Ömür ve güvenilirlik çalışmalarında en sık kullanılan üç dağılım üstel, gamma ve Weibull dağılımlarıdır. Üstel dağılımın tek parametresi yalnız ölçeği belirler ve dağılım yaşlanmayı hiç tanımaz. Weibull dağılımı, üstel değişkeni bir kuvvetle dönüştürerek bu kısıtı kaldırır.

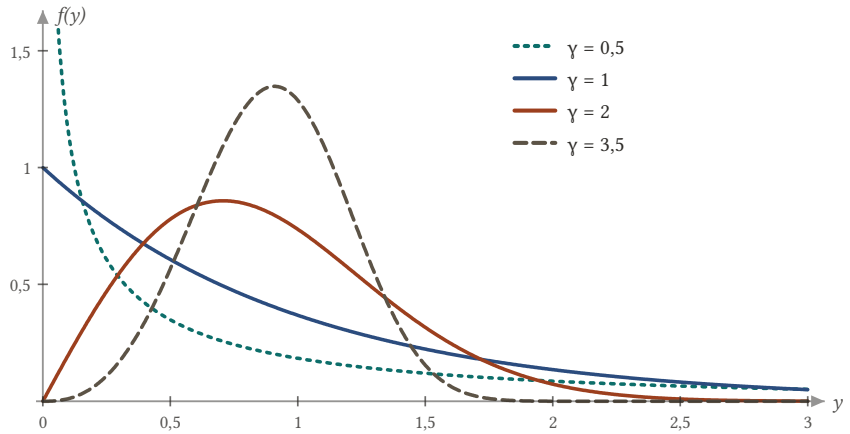
Tanım 4.5 (Weibull Dağılımı). $X \sim$ Üstel (α) ve $\gamma > 0$ olsun. $Y = X^{1/\gamma}$ ile tanımlanan Y rastgele değişkenine α ve γ parametreli **Weibull dağılımına** sahiptir denir ve $Y \sim$ Weibull (α, γ) yazılır.

Yani Weibull değişkeni, üstel bir değişkenin γ. kökünü almakla elde edilir. $\gamma = 1$ için $Y = X$ olur ve üstel dağılım geri gelir.

Teorem 4.8 (Weibull Dağılımının Yoğunluğu). *$Y \sim$ Weibull (α, γ) ise $y > 0$ için*

$$F_Y(y) = 1 - e^{-\alpha y^\gamma}, \qquad f(y) = \gamma\,\alpha\, y^{\gamma-1} e^{-\alpha y^\gamma},$$

$y \le 0$ için $F_Y(y) = 0$ ve $f(y) = 0$'dır.
Aşağıdaki şekil γ'nın rolünü gösteriyor: γ yoğunluğun biçimini, α ise ölçeğini belirler.



Şekil 4.8: α = 1 için Weibull yoğunlukları. γ = 1 üstel dağılımdır; γ 1'den küçükken yoğunluk sıfırda sınırsızdır, γ 1'den büyükken sıfırdan başlayıp bir tepe yapar ve γ büyüdükçe tepe 1 civarında sivrilir.

İspat.
$X > 0$ olasılığı 1 olduğundan $Y = X^{1/\gamma} > 0$'dır; $y \le 0$ için $F_Y(y) = 0$. $y > 0$ olsun. $t \mapsto t^\gamma$ fonksiyonu pozitif sayılarda kesin artan olduğundan $X^{1/\gamma} \le y$ ile $X \le y^\gamma$ aynı olaydır. Öyleyse

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\left(X^{1/\gamma} \le y \right) = P\left(X \le y^\gamma \right) \\ &= \int_0^{y^\gamma} \alpha e^{-\alpha x}\, dx = \Big[-e^{-\alpha x} \Big]_0^{y^\gamma} = 1 - e^{-\alpha y^\gamma}. \end{aligned}$$

Bu fonksiyon $y > 0$ için türevlenebilirdir; zincir kuralıyla yoğunluk

$$f(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = e^{-\alpha y^\gamma} \cdot \alpha\gamma\, y^{\gamma-1} = \gamma\,\alpha\, y^{\gamma-1} e^{-\alpha y^\gamma}$$

olur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yoğunluğun kuyruğa oranı $\frac{f(y)}{P(Y>y)} = \gamma\,\alpha\,y^{\gamma-1}$'dir. Bu oran, y anına kadar sağlam kalmış bir parçanın hemen ardından bozulma eğilimini ölçer. $\gamma < 1$ ise oran zamanla azalır: parça dayandıkça daha güvenilir hâle gelir, ilk dönem arızaları böyledir. $\gamma = 1$ ise oran sabittir; bu, üstel dağılımın belleksizliğidir. $\gamma > 1$ ise oran artar; parça yaşlandıkça yıpranır. Weibull dağılımının güvenilirlik analizinde bu kadar yaygın olmasının nedeni bu esnekliktir.
Weibull dağılımının momentleri, üstel dağılımın reel mertebeli momentlerinden hemen gelir.

Sonuç 4.1 (Weibull Dağılımının Momentleri). *$Y \sim \text{Weibull}\,(\alpha,\gamma)$ ise her $s > 0$ için*

$$E(Y^s) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{\gamma}\right)}{\alpha^{s/\gamma}}.$$

Özel olarak

$$E(Y) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{\alpha^{1/\gamma}}, \qquad \text{Var}\,(Y) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\gamma}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^2}{\alpha^{2/\gamma}}.$$

İspat.
$Y^s = \left(X^{1/\gamma}\right)^s = X^{s/\gamma}$ ve $X \sim$ Üstel $(\alpha) = \text{Gamma}\,(1,\alpha)$'dır. Teorem 4.2 $r = 1$ ve $s/\gamma > 0 > -1$ mertebesiyle uygulanırsa, $\Gamma(1) = 1$ olduğundan

$$E(Y^s) = E\left(X^{s/\gamma}\right) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{\gamma}\right)}{\Gamma(1)\,\alpha^{s/\gamma}} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{s}{\gamma}\right)}{\alpha^{s/\gamma}}.$$

$s = 1$ beklenen değeri verir. $s = 2$ ile $E(Y^2)$ bulunur ve varyans $E(Y^2) - \left(E(Y)\right)^2$ farkıdır.
■

Örnek 4.12 (Bir Parçanın On Yılı Aşması). Bir makine parçasının ömrü Y (yıl), $\alpha = \frac{1}{100}$ ve $\gamma = 2$ parametreli Weibull dağılımına sahiptir. Parçanın 10 yıldan uzun dayanma olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Teorem 4.8 ile $P(Y > y) = 1 - F_Y(y) = e^{-\alpha y^\gamma}$'dır. $y = 10$ için $\alpha y^\gamma = \frac{10^2}{100} = 1$ olduğundan

$$P(Y > 10) = e^{-1} \approx 0{,}3679.$$

■

Örnek 4.13 (Parça Ömrünün Ortalaması ve Varyansı). Bir makine parçasının ömrü $Y \sim \text{Weibull}\left(\frac{1}{100}, 2\right)$ olsun. $E(Y)$ ve $\text{Var}\,(Y)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.
$\alpha^{1/\gamma} = \left(\frac{1}{100}\right)^{1/2} = \frac{1}{10}$ ve $\alpha^{2/\gamma} = \frac{1}{100}$'dür. $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ve $\Gamma(2) = 1$ olduğundan Sonuç 4.1 ile

$$E(Y) = 10 \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 10 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 5\sqrt{\pi} \approx 8{,}862 \ \text{ yıl}\,.$$

Varyans:

$$\text{Var}\,(Y) = 100\left[\Gamma(2) - \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = 100\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 100 - 25\pi \approx 21{,}46.$$

Standart sapma yaklaşık $\sqrt{21{,}46} \approx 4{,}63$ yıldır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

4.7 Cauchy Dağılımı

Şimdiye kadarki bütün dağılımların bütün momentleri vardı. Cauchy dağılımı çan biçimli, simetrik ve zararsız görünen bir yoğunluğa sahiptir, ama beklenen değeri bile yoktur. Bu yüzden istatistikte önemli bir karşı örnek olarak sık sık karşımıza çıkacak.

Tanım 4.6 (Cauchy Dağılımı). $c > 0$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ olsun. Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{c}{\pi} \cdot \frac{1}{c^2 + (x-\theta)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

olan X rastgele değişkenine **Cauchy dağılımına** sahiptir denir ve $X \sim \text{Cauchy}\ (c, \theta)$ yazılır. $\text{Cauchy}\ (1, 0)$ dağılımına **standart Cauchy dağılımı** denir.

Yani yoğunluk θ'ya göre simetriktir ve tepesi $x = \theta$'dadır; c ise eğrinin genişliğini belirler. $w = \frac{u-\theta}{c}$ dönüşümüyle dağılım fonksiyonu bulunur:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{c}{\pi} \cdot \frac{du}{c^2 + (u-\theta)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{(x-\theta)/c} \frac{dw}{1+w^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x-\theta}{c}. \end{aligned}$$

$x \to \infty$ iken $F(x) \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ olduğundan f bir yoğunluktur. Buradan iki gözlem çıkar. Birincisi, $F(\theta) = \frac{1}{2}$ ve $F(\theta \pm c) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}$ olduğundan θ medyandır ve kütlenin tam yarısı $(\theta - c, \theta + c)$ aralığındadır. İkincisi, $Z = \frac{X-\theta}{c}$ standart Cauchy dağılımlıdır, çünkü $c > 0$ için

$$P(Z \le z) = P(X \le \theta + cz) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan z.$$

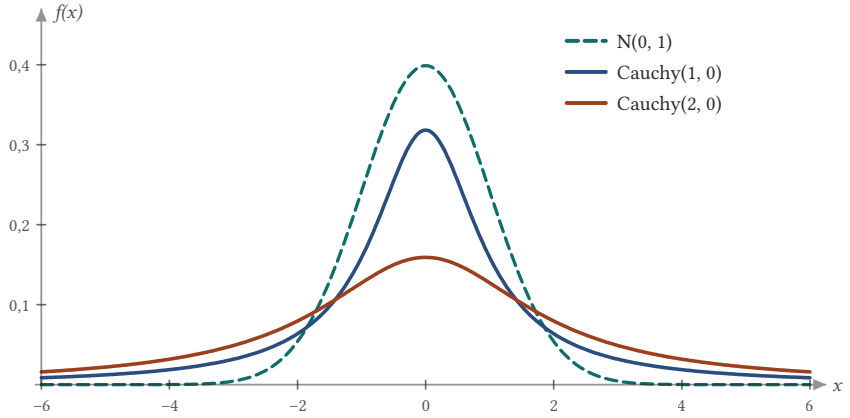
Tersine $Z \sim \text{Cauchy}\ (1, 0)$ ise $X = \theta + cZ \sim \text{Cauchy}\ (c, \theta)$ olur. Standart Cauchy dağılımı, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında düzgün dağılımlı bir açının tanjantı olarak da elde edilir.

Örnek 4.14 (Cauchy Dağılımında Bir Aralığın Olasılığı). $X \sim \text{Cauchy}\ (2, 1)$ olsun, yani $c = 2$ ve $\theta = 1$. $P(-1 < X < 3)$ olasılığını bulunuz.

> **Çözüm.**
> Dağılım fonksiyonu $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x-1}{2}$'dir. $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ve $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ olduğundan
>
> $$P(-1 < X < 3) = F(3) - F(-1) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan 1 - \arctan(-1) \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$
>
> Bu, $(\theta - c, \theta + c) = (-1, 3)$ aralığının kütlenin yarısını taşıdığı gözleminin bir örneğidir.
> ■

Teorem 4.9 (Cauchy Dağılımının Momentleri). *$X \sim \text{Cauchy}\ (c, \theta)$ olsun. $0 < a < 1$ için $E\left(\mid X \mid^a \right) < \infty$'dur; $a \ge 1$ için ise $E\left(\mid X \mid^a \right) = \infty$'dur. Yani Cauchy dağılımının 1'den küçük mertebeli momentleri vardır, ama 1 ve daha büyük mertebeli momentleri yoktur. Özel olarak $E(X)$ ve $\text{Var}\ (X)$ yoktur.*
Aşağıdaki şekil nedenini gösteriyor: Cauchy yoğunluğunun kuyrukları normal yoğunluğunkinden çok daha kalındır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.9: Cauchy yoğunlukları çan biçimlidir ama kuyrukları normal yoğunluğunkinden çok daha kalındır: x büyürken normal yoğunluk üstel hızla, Cauchy yoğunluğu ise yalnızca 1/x² gibi söner. Momentlerin var olmaması bu kalın kuyruklardan gelir.

İspat.
Adım 1: standart Cauchy. $Z \sim \text{Cauchy}\ (1,0)$ *olsun. Yoğunluk çift olduğundan*

$$E\left(\mid Z \mid^{a}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mid x \mid^{a}}{1+x^{2}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{x^{a}}{1+x^{2}}\,dx.$$

$a \geq 1$ *olsun.* $x \geq 1$ *için* $x^{a} \geq x$ *ve* $1+x^{2} \leq 2x^{2}$ *olduğundan* $\frac{x^{a}}{1+x^{2}} \geq \frac{1}{2x}$ *olur.* $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{2x} = \infty$ *olduğundan integral ıraksar:* $E(\mid Z \mid^{a}) = \infty$.
$0 < a < 1$ *olsun.* $z = \frac{1}{1+x^{2}}$ *dönüşümünü yapalım.* x, 0*'dan* ∞*'a giderken* z, 1*'den* 0*'a azalır ve* $x = \left(\frac{1-z}{z}\right)^{1/2}$ *olur.* $1+x^{2} = \frac{1}{z}$ *eşitliğinin türevi* $2x\,dx = -\frac{dz}{z^{2}}$ *verir. Böylece*

$$\frac{x^{a}}{1+x^{2}}\,dx = x^{a}\,z\cdot\left(-\frac{dz}{2x\,z^{2}}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{x^{a-1}}{z}\,dz$$
$$= -\frac{1}{2}\,z^{\frac{1-a}{2}-1}(1-z)^{\frac{1+a}{2}-1}\,dz.$$

Son adımda $x^{a-1} = (1-z)^{\frac{a-1}{2}}\,z^{\frac{1-a}{2}}$ *yazıldı. Sınırları çevirip eksi işaretini kaldırırsak*

$$E\left(\mid Z \mid^{a}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} z^{\frac{1-a}{2}-1}(1-z)^{\frac{1+a}{2}-1}\,dz = \frac{1}{\pi}B\left(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2}\right)$$

bulunur. $0 < a < 1$ *için iki parametre de pozitiftir, dolayısıyla beta fonksiyonu sonludur. Örneğin* $a = \frac{1}{2}$ *için* $E\left(\mid Z \mid^{1/2}\right) = \frac{1}{\pi}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) \approx 1{,}414$.
Adım 2: genel durum. $X = \theta + cZ$ *yazalım;* Z *standart Cauchy dağılımlıdır.* $0 < a < 1$ *ise negatif olmayan* p, q *için* $(p+q)^{a} \leq p^{a} + q^{a}$ *eşitsizliği geçerlidir. (*$q > 0$ *iken iki yanı* q^{a}*'ya bölüp* $t = p/q$ *yazarsak* $h(t) = 1 + t^{a} - (1+t)^{a}$ *fonksiyonu için* $h(0) = 0$ *ve* $h'(t) = a\left(t^{a-1} - (1+t)^{a-1}\right) \geq 0$ *olur, çünkü* $a - 1 < 0$*.) Buna göre*

$$\mid X \mid^{a} \leq \left(\mid \theta \mid + c \mid Z \mid\right)^{a} \leq \mid \theta \mid^{a} + c^{a} \mid Z \mid^{a}$$

ve Adım 1 ile $E(\mid X \mid^{a}) \leq \mid \theta \mid^{a} + c^{a}E(\mid Z \mid^{a}) < \infty$.
$a \geq 1$ *olsun ve* $E(\mid X \mid^{a}) < \infty$ *olduğunu varsayalım.* $\mid x \mid \geq 1$ *iken* $\mid x \mid \leq \mid x \mid^{a}$, $\mid x \mid < 1$ *iken* $\mid x \mid < 1$ *olduğundan* $\mid X \mid \leq 1 + \mid X \mid^{a}$ *ve* $E(\mid X \mid) < \infty$ *olur. Bu durumda* $\mid Z \mid \leq \frac{\mid X \mid + \mid \theta \mid}{c}$ *eşitsizliğinden* $E(\mid Z \mid) < \infty$ *çıkar. Bu, Adım 1'deki* $E(\mid Z \mid) = \infty$ *sonucuyla çelişir. Demek ki* $E(\mid X \mid^{a}) = \infty$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç 4.2 (Cauchy Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu). *$X \sim \text{Cauchy}\ (c, \theta)$ ise X'in moment üreten fonksiyonu yoktur. Buna karşılık karakteristik fonksiyonu vardır ve*

$$\varphi_X(t) = E\left(\ e^{itX}\ \right) = e^{i\theta t - c\,|\,t\,|}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

> ***İspat.***
> *Moment üreten fonksiyonu 0'ın bir komşuluğunda var olan bir değişkenin her mertebeden momenti vardır. Teorem 4.9 gereği $E(|\ X\ |) = \infty$ olduğundan X'in moment üreten fonksiyonu olamaz.*
> *Standart Cauchy dağılımlı Z için $\varphi_Z(t) = e^{-\,|\,t\,|}$ olduğu Olasılık Teorisi'nde, moment üreten fonksiyonun teklik teoreminin hemen ardından gösterildi. $X = \theta + cZ$ olduğundan karakteristik fonksiyonun doğrusal dönüşüm özelliği ile*
>
> $$\varphi_X(t) = e^{i\theta t}\,\varphi_Z(ct) = e^{i\theta t}\,e^{-c\,|\,t\,|} = e^{i\theta t - c\,|\,t\,|}.$$
>
> ■

Yani Cauchy dağılımını incelemek için moment üreten fonksiyon işe yaramaz; onun yerine her zaman var olan karakteristik fonksiyon kullanılır. $\theta = 0$ için karakteristik fonksiyon $e^{-c\,|\,t\,|}$ biçimini alır ve gerçel değerlidir; bu, simetrik dağılımların genel bir özelliğidir.

Teorem 4.10 (Bağımsız Cauchy Değişkenlerinin Toplamı). *$X \sim \text{Cauchy}\ (c_1, \theta_1)$ ve $Y \sim \text{Cauchy}\ (c_2, \theta_2)$ bağımsız ise*

$$X + Y \sim \text{Cauchy}\ (c_1 + c_2, \theta_1 + \theta_2).$$

Özel olarak $X, Y \sim \text{Cauchy}\ (1, 0)$ bağımsız ise $X + Y \sim \text{Cauchy}\ (2, 0)$'dır.

> ***İspat.***
> *Önce bağımsız değişkenlerde toplamın karakteristik fonksiyonunun çarpım olduğunu görelim. $e^{it(X+Y)} = e^{itX}e^{itY}$ çarpımını gerçel ve sanal kısımlarına ayıralım:*
>
> $$\begin{aligned} e^{it(X+Y)} = &\left[\cos(tX)\cos(tY) - \sin(tX)\sin(tY)\ \right] \\ &+i\left[\sin(tX)\cos(tY) + \cos(tX)\sin(tY)\ \right]. \end{aligned}$$
>
> *Her terim, X'in sınırlı bir fonksiyonu ile Y'nin sınırlı bir fonksiyonunun çarpımıdır. X ile Y bağımsız olduğundan bağımsız değişkenlerde çarpımın beklenen değeri beklenen değerlerin çarpımıdır. Her terimde bunu uygulayıp terimleri yeniden toplarsak*
>
> $$\varphi_{X+Y}(t) = \Big(\ E\cos(tX) + iE\sin(tX)\ \Big)\Big(\ E\cos(tY) + iE\sin(tY)\ \Big) = \varphi_X(t)\,\varphi_Y(t)$$
>
> *bulunur. Sonuç 4.2 ile*
>
> $$\varphi_{X+Y}(t) = e^{i\theta_1 t - c_1\,|\,t\,|}\,e^{i\theta_2 t - c_2\,|\,t\,|} = e^{i(\theta_1+\theta_2)t - (c_1+c_2)\,|\,t\,|}.$$
>
> *Bu, $\text{Cauchy}\ (c_1 + c_2, \theta_1 + \theta_2)$ dağılımının karakteristik fonksiyonudur. Karakteristik fonksiyonun teklik teoremi gereği $X + Y$ bu dağılıma sahiptir. Özel durum $c_1 = c_2 = 1$, $\theta_1 = \theta_2 = 0$ seçimidir.*
> ■

Bu teoremin şaşırtıcı bir sonucu var. $X_1, \ldots, X_n$ bağımsız ve her biri standart Cauchy dağılımlı olsun. Teorem tümevarımla uygulanırsa $S_n = X_1 + \cdots + X_n \sim \text{Cauchy}\ (n, 0)$ olur. Ortalamanın dağılım fonksiyonu ise

$$\left(P\frac{S_n}{n} \le x\right) = P(S_n \le nx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{nx}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x$$

olur. Yani n gözlemin ortalaması, tek bir gözlemle **aynı** dağılıma sahiptir. Ortalama almak Cauchy verisinde yayılımı hiç azaltmaz. Bunun nedeni beklenen değerin olmamasıdır. Yakınsama ve merkezi limit teoremi bölümünde büyük sayılar yasasının neden sonlu bir beklenen değer istediğini görürken bu örneğe döneceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 4.15 (Standart Cauchy Değişkeninin Tersi). $X \sim \text{Cauchy}\ (1,0)$ olsun. $\frac{1}{X} \sim \text{Cauchy}\ (1,0)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$P(X=0)=0$ olduğundan $Y=\frac{1}{X}$ olasılığı 1 olan bir olayda tanımlıdır. $g(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu $(-\infty,0)$ ve $(0,\infty)$ aralıklarının her birinde kesin azalandır ve her aralığı kendisine birebir götürür. İki aralıkta da tersi $g^{-1}(y)=\frac{1}{y}$'dir ve

$$\left|\frac{d}{dy}\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{y^2}.$$

Dönüşüm teoremi gereği her $y \neq 0$ için, y hangi aralıktaysa yalnız o aralığın katkısıyla

$$f_Y(y) = f_X\!\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}\cdot\frac{1}{y^2} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{y^2+1}.$$

Bu, standart Cauchy yoğunluğudur; tek nokta olan $y=0$'daki değer dağılımı etkilemez. Demek ki $\frac{1}{X} \sim \text{Cauchy}\ (1,0)$.
■

Örnek 4.16 (İki Bağımsız Normal Değişkenin Oranı). $X \sim N(0,\sigma^2)$ ve $Y \sim N(0,\sigma^2)$ bağımsız olsun. $Z=\frac{X}{Y} \sim \text{Cauchy}\ (1,0)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Bağımsızlık nedeniyle ortak yoğunluk marjinallerin çarpımıdır:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\!\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

$P(Y=0)=0$ olduğundan $D=\{(x,y): y\neq 0\}$ açık kümesinin olasılığı 1'dir. Yardımcı değişken olarak $V=Y$'yi alalım: $z=\frac{x}{y}$, $v=y$ dönüşümü D'yi $E=\{(z,v): v\neq 0\}$ kümesine birebir götürür. Tersi $x=zv$, $y=v$'dir ve Jacobian'ı

$$J = \det\begin{bmatrix} v & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = v \neq 0$$

olur. Jacobian dönüşüm teoremi gereği

$$f_{Z,V}(z,v) = \frac{|\,v\,|}{2\pi\sigma^2}\exp\!\left(-\frac{v^2(1+z^2)}{2\sigma^2}\right), \qquad (z,v)\in E.$$

Z'nin marjinal yoğunluğu için v üzerinden integral alalım. İntegrand v'de çift olduğundan

$$f_Z(z) = 2\int_0^\infty \frac{v}{2\pi\sigma^2}\exp\!\left(-\frac{v^2(1+z^2)}{2\sigma^2}\right)dv.$$

$k=\frac{1+z^2}{2\sigma^2}$ dersek

$$\int_0^\infty v\,e^{-kv^2}\,dv = \Big[-\frac{e^{-kv^2}}{2k}\Big]_0^\infty = \frac{1}{2k} = \frac{\sigma^2}{1+z^2}$$

olur. Böylece

$$f_Z(z) = \frac{1}{\pi\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{1+z^2} = \frac{1}{\pi(1+z^2)}, \qquad z\in\mathbb{R}.$$

Bu, standart Cauchy yoğunluğudur. σ sonuçtan düşer, çünkü X ile Y'yi aynı sabitle ölçeklemek oranı değiştirmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

4.8 Log-Normal Dağılım

Gelirler, hisse fiyatları, parçacık boyutları gibi pek çok pozitif büyüklük sağa çarpıktır: çoğu değer küçüktür, ama çok büyük değerler de ara sıra görülür. Bu büyüklüklerin logaritması ise çoğu zaman simetrik, normale yakın bir dağılım gösterir. Log-normal dağılım bu gözlemi modeller. Bu bölümde ln doğal logaritmadır.

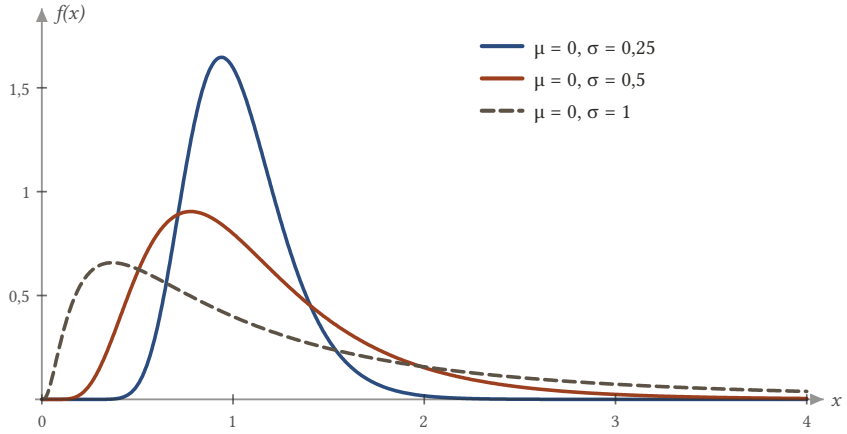
Tanım 4.7 (Log-Normal Dağılım). $\mu \in \mathbb{R}$ ve $\sigma > 0$ olsun. Pozitif değerli bir X rastgele değişkeni için $Y = \ln X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise X'e μ ve σ^2 parametreli **log-normal dağılıma** sahiptir denir ve $X \sim \text{LogNormal}\ (\mu, \sigma^2)$ yazılır.

Yani X'in logaritması normal dağılımlıdır; eşdeğer olarak $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ için $X = e^Y$'dir. Buradaki μ ve σ^2, X'in değil $\ln X$'in beklenen değeri ve varyansıdır. Normal dağılımın özellikleri Olasılık Teorisi'nde kuruldu ve bir sonraki bölümde ayrıntısıyla ele alınacak.

Teorem 4.11 (Log-Normal Dağılımın Yoğunluğu). *$X \sim \text{LogNormal}\ (\mu, \sigma^2)$ ise X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad x > 0$$

ve $x \leq 0$ için $f(x) = 0$'dır.



Şekil 4.10: $\mu = 0$ için log-normal yoğunluklar. Hepsi pozitif eksende yaşar ve sağa çarpıktır; σ büyüdükçe tepe sola kayar, sağ kuyruk uzar.

İspat.
$X = g(Y) = e^Y$ yazalım. g fonksiyonu $\mathbb{R}$'yi $(0, \infty)$'a birebir ve kesin artan biçimde götürür. Tersi $g^{-1}(x) = \ln x$ sürekli türevlenebilirdir ve $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$'tir. Dönüşüm teoremi gereği $x > 0$ için

$$f(x) = f_Y(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \frac{1}{x}.$$

X yalnız pozitif değerler aldığından $x \leq 0$ için yoğunluk sıfırdır.
■

Teorem 4.12 (Log-Normal Dağılımın Momentleri). *$X \sim \text{LogNormal}\ (\mu, \sigma^2)$ ise her reel s için*

$$E(X^s) = e^{s\mu+\frac{1}{2}s^2\sigma^2}.$$

Özel olarak

$$E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}, \qquad \text{Var}\,(X) = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} = e^{2\mu+\sigma^2}\left(\,e^{\sigma^2}-1\,\right).$$

İspat.
$Y = \ln X \sim N(\mu,\sigma^2)$ olsun. Normal dağılımın moment üreten fonksiyonu her $t\in\mathbb{R}$ için $M_Y(t) = E\left(\,e^{tY}\,\right) = e^{t\mu+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$'dir. $X^s = \left(\,e^Y\right)^s = e^{sY}$ olduğundan

$$E(X^s) = E\left(\,e^{sY}\,\right) = M_Y(s) = e^{s\mu+\frac{1}{2}s^2\sigma^2}.$$

$s=1$ için $E(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$, $s=2$ için $E(X^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}$ bulunur. Varyans hesap formülüyle

$$\text{Var}\,(X) = E(X^2) - \left(\,E(X)\right)^2 = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)} = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}.$$

Ortak çarpan $e^{2\mu+\sigma^2}$ parantezine alınınca ikinci biçim çıkar.
■

Yani log-normal değişkenin ortalaması e^μ değil, ondan büyük olan $e^{\mu+\sigma^2/2}$'dir. Öte yandan $P(X \le e^\mu) = P(Y\le\mu) = \frac{1}{2}$ olduğundan e^μ medyandır. Ortalamanın medyandan büyük olması sağa çarpıklığın işaretidir: az sayıdaki çok büyük değer ortalamayı yukarı çeker.

Örnek 4.17 (Standart Log-Normal Değişkenin Ortalaması ve Varyansı). $X \sim \text{LogNormal}\,(0,1)$ olsun. $E(X)$, $\text{Var}\,(X)$ ve X'in medyanını bulunuz.

Çözüm.
$\mu=0$ ve $\sigma^2=1$ için Teorem 4.12

$$E(X) = e^{1/2} = \sqrt{e} \approx 1{,}6487, \qquad \text{Var}\,(X) = e^2 - e^1 = e(e-1) \approx 4{,}6708$$

verir. Medyan $e^0 = 1$'dir. Ortalama medyanın yaklaşık 1,65 katıdır.
■

Örnek 4.18 (Log-Normal Olasılığın Normal Tablodan Hesabı). Bir bölgedeki hanelerin aylık geliri X (on bin TL) log-normal dağılımlıdır; $\ln X$'in beklenen değeri $\mu=1$, varyansı $\sigma^2 = 0{,}25$'tir. Rastgele seçilen bir hanenin gelirinin 4'ü (yani 40 000 TL'yi) aşmama olasılığını bulunuz.

Çözüm.
$Y = \ln X \sim N(1, 0{,}25)$ ve $\sigma = 0{,}5$'tir. ln kesin artan olduğundan $X \le 4$ ile $Y \le \ln 4$ aynı olaydır. $\ln 4 \approx 1{,}3863$ ve standartlaştırmayla

$$P(X\le 4) = P(Y \le \ln 4) = \left(PZ \le \frac{1{,}3863 - 1}{0{,}5}\right) = P(Z \le 0{,}77)$$

bulunur; burada $Z\sim N(0,1)$ ve z değeri iki ondalığa yuvarlandı. Standart normal tablosundan $P(0 \le Z \le 0{,}77) = 0{,}2794$ okunur. Simetri nedeniyle $P(Z\le 0) = 0{,}5$ olduğundan

$$P(X \le 4) = 0{,}5 + 0{,}2794 = 0{,}7794.$$

Hanelerin yaklaşık %78'inin geliri 40 000 TL'yi aşmaz.
■

Bu bölümde tanıdığımız aileler birbirine sıkıca bağlıdır: üstel dağılım gammanın özel hâlidir, bağımsız üstellerin toplamı gamma, iki gammanın oranı beta dağılımlıdır. Weibull üstelin bir kuvveti, log-normal ise normalin üstelidir. Cauchy dağılımı bir normal oranı olarak ortaya çıkar ve momentlerin her zaman var olmadığını hatırlatır. Sırada bütün bu ailelerin merkezinde duran dağılım var: Normal Dağılım.

 CC BY-NC-SA 4.0

5. Normal Dağılım

Ölçüm hataları, boy ve ağırlık gibi biyolojik büyüklükler, sınav notları, üretim hattından çıkan parçaların boyutları... Birbirinden çok farklı bu verilerin histogramları şaşırtıcı biçimde aynı şekle benzer: ortada tepe yapan, iki yana doğru simetrik biçimde azalan bir çan. Bu çanın matematiksel adı normal dağılımdır. Normal dağılım istatistiğin merkezindedir, çünkü örneklem ortalamaları ve toplamlar, kitlenin dağılımı ne olursa olsun, büyük örneklemlerde yaklaşık olarak normal dağılır. Bu bölümde normal eğrinin özelliklerini, normal rastgele değişkenlerle hesap yapmayı ve binom olasılıklarını normal dağılımla yaklaşık hesaplamayı öğreneceğiz.

5.1 Normal Eğri ve Özellikleri

Normal dağılım olasılık teorisinden tanıdık bir dağılımdır; önce tanımını hatırlayıp eğrisinin biçimini inceleyelim.
$\mu \in \mathbb{R}$ ve $\sigma > 0$ olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

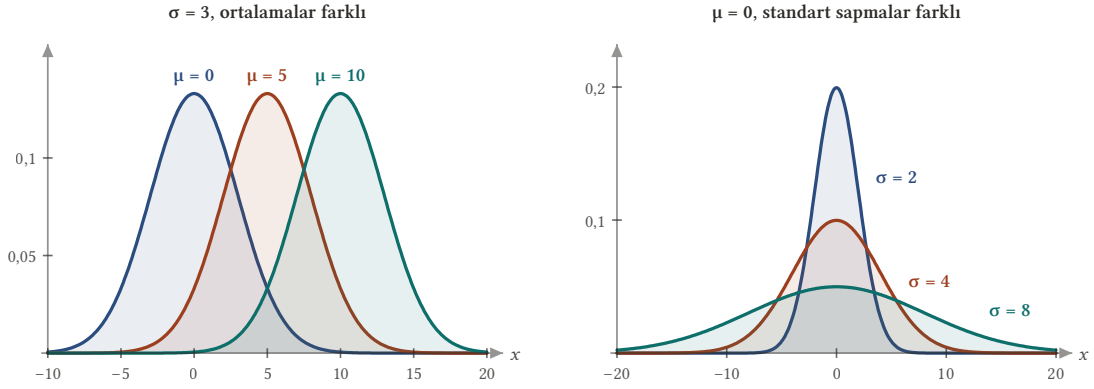
olan X rastgele değişkenine **normal dağılımlı** denir ve $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ yazılır (Olasılık Teorisi'ndeki tanım). Birinci parametre μ dağılımın ortalaması (beklenen değeri), ikinci parametre σ^2 ise varyansıdır; σ standart sapmadır. Gösterimde ikinci yere standart sapmanın değil **varyansın** yazıldığına dikkat edin: $X \sim N(3, 4)$ ise $\sigma = 2$'dir. Normal eğriye çan eğrisi ya da Gauss eğrisi de denir.
Normal eğrinin biçimini beş özellik belirler.

Önerme 5.1 (Normal Eğrinin Temel Özellikleri). *$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ve f, X'in yoğunluğu olsun.*
1. Eğri ortalama etrafında simetriktir: her h için $f(\mu + h) = f(\mu - h)$.
2. Eğri en büyük değerini $x = \mu$'de alır ve bu değer $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$'dir.
3. $y = 0$ doğrusu (yani x ekseni) eğrinin yatay asimptotudur.
4. Eğri ile x ekseni arasında kalan alan 1'dir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1.$$

5. Eğrinin konumunu μ, yayılımını σ belirler: μ değişince eğri yatay olarak kayar; σ büyüdükçe tepe alçalır ve eğri iki yana yayılır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.1: Solda standart sapması 3 olan, ortalamaları 0, 5 ve 10 olan üç normal eğri: μ değişince eğrinin biçimi aynı kalır, yalnız yatay olarak kayar. Sağda ortalaması 0, standart sapmaları 2, 4 ve 8 olan üç normal eğri: σ büyüdükçe eğri basıklaşır ve yayılır, altındaki alan yine 1 kalır.

İspat.

Kısalık için üsteki ifadeyi $u(x) = -\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}$ *ile gösterelim;* $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{u(x)}$.

1. Simetri. $u(\mu+h) = -\dfrac{h^2}{2\sigma^2}$ *ve* $u(\mu-h) = -\dfrac{(-h)^2}{2\sigma^2} = -\dfrac{h^2}{2\sigma^2}$ *olduğundan üsler eşittir, dolayısıyla* $f(\mu+h) = f(\mu-h)$.

2. Maksimum. *Her* x *için* $(x-\mu)^2 \geq 0$ *olduğundan* $u(x) \leq 0$*'dır ve eşitlik yalnız* $x = \mu$*'de sağlanır. Üstel fonksiyon artan olduğundan* $e^{u(x)} \leq e^0 = 1$*, yani*

$$f(x) \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = f(\mu),$$

ve eşitlik yalnız $x = \mu$ *için geçerlidir.*

3. Asimptot. $x \to \pm\infty$ *iken* $(x-\mu)^2 \to \infty$*, dolayısıyla* $u(x) \to -\infty$ *ve* $e^{u(x)} \to 0$ *olur. Demek ki* $f(x) \to 0$*. Öte yandan* $f(x) > 0$ *olduğundan eğri* x *eksenine hiçbir zaman değmez;* $y = 0$ *bir yatay asimptottur.*

4. Toplam alan. $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ *değişken değiştirmesini yapalım;* $dx = \sigma\, dz$ *olur ve* x*,* $-\infty$*'dan* ∞*'a giderken* z *de öyle gider:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz.$$

Son integralin değeri $\sqrt{2\pi}$*'dir; bu, integrali karesini alıp kutupsal koordinatlara geçerek hesaplayan klasik yolla Olasılık Teorisi'nde ispatlandı. Dolayısıyla alan* $\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$*'dir.*

Aynı değer gamma fonksiyonundan da okunabilir. Simetri nedeniyle bütün doğru üzerindeki integral, yarı doğru üzerindekinin iki katıdır:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz = 2\int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz.$$

Sağdaki integralde $w = z^2/2$ *alırsak* $z = \sqrt{2w}$ *ve* $dz = \dfrac{dw}{\sqrt{2w}}$ *olur:*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-z^2/2}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{0}^{\infty} w^{-1/2} e^{-w}\, dw = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

İki katı $\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\pi}$*'dir. Yani normal yoğunluğun toplam alanının* 1 *olması,* $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ *eşitliğiyle aynı şeydir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

5. Parametrelerin etkisi. μ *yalnız* $x-\mu$ *farkı içinde geçtiğinden* $N(\mu,\sigma^2)$ *eğrisi,* $N(0,\sigma^2)$ *eğrisinin* μ *birim sağa kaydırılmışıdır; biçim değişmez. Tepenin yüksekliği* $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, σ *ile ters orantılıdır. Toplam alan her zaman* 1 *kaldığına göre, tepe alçalırken kütle iki yana yayılmak zorundadır. Eğrinin büküm noktaları da* $x=\mu\pm\sigma$*'dadır; yani* σ *eğrinin "omuzlarının" ortalamaya uzaklığını ölçer.*
■

Beşinci özellik modellemede önemlidir: varyansı küçük bir dağılımın değerleri ortalamanın çevresinde toplanır, varyansı büyük olanınki geniş bir aralığa dağılır. Bir üretim sürecinde hedef ölçüyü tutturmak ortalamayı ayarlamak, ölçülerin tutarlı olması ise varyansı küçültmek demektir.

5.2 Moment Üreten Fonksiyon

Normal dağılımın moment üreten fonksiyonu çok basit bir biçimdedir ve bu bölümdeki birçok sonucun kısa yoldan ispatını sağlar.
$X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ise

$$M_X(t)=E\left(\,e^{tX}\,\right)=e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}},\qquad t\in\mathbb{R},$$

ve buradan $E(X)=\mu$, Var $(X)=\sigma^2$ bulunur. Hesap, integrandın üssünü kareye tamamlayarak yapılır ve Olasılık Teorisi'nde ayrıntısıyla verilmiştir. Standart normal için $\mu=0$, $\sigma=1$ alınır ve $M_Z(t)=e^{t^2/2}$ olur.
Üsteki ifade t'nin ikinci dereceden bir polinomudur: t'nin katsayısı ortalamayı, t^2'nin katsayısı varyansın yarısını verir. Moment üreten fonksiyon dağılımı tek türlü belirlediği için (teklik teoremi), bu biçimde bir moment üreten fonksiyona sahip her rastgele değişken normal dağılımlıdır ve parametreleri doğrudan okunur.

Örnek 5.1 (Moment Üreten Fonksiyondan Dağılımı Okumak). X rastgele değişkeninin moment üreten fonksiyonu $M_X(t)=e^{3t+2t^2}$, $t\in\mathbb{R}$ ise X'in dağılımı nedir?

Çözüm.
Verilen ifadeyi $e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$ ile karşılaştıralım. t'nin katsayısından $\mu=3$ bulunur. t^2'nin katsayısı $\dfrac{\sigma^2}{2}=2$ olduğundan $\sigma^2=4$'tür. Teklik teoremi gereği

$$X\sim N(3,4).$$

■

Örnek 5.2 (Varyansı On İki Olan Normal). X rastgele değişkeninin moment üreten fonksiyonu $M_X(t)=e^{3t+6t^2}$, $t\in\mathbb{R}$ ise X'in dağılımı nedir?

Çözüm.
t'nin katsayısı $\mu=3$'tür. t^2'nin katsayısı $\dfrac{\sigma^2}{2}=6$ olduğundan $\sigma^2=12$'dir. Buna göre $X\sim N(3,12)$.
■

Örnek 5.3 (Ortalaması Negatif Olan Normal). X rastgele değişkeninin moment üreten fonksiyonu $M_X(t)=e^{-2t+4t^2}$, $t\in\mathbb{R}$ ise X'in dağılımı nedir?

Çözüm.
t'nin katsayısı $\mu=-2$'dir. t^2'nin katsayısı $\dfrac{\sigma^2}{2}=4$ olduğundan $\sigma^2=8$'dir. Buna göre $X\sim N(-2,8)$.
■

Ortalama ve varyans bir normal dağılımı tümüyle belirler. Ama bu, ortalaması ve varyansı aynı olan iki rastgele değişkenin aynı dağılıma sahip olduğu anlamına gelmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 5.4 (Aynı Ortalama ve Varyans, Farklı Dağılım). $X \sim N(3,3)$ ve Y, $\lambda = 3$ parametreli Poisson dağılımına sahip olsun. $E(X) = E(Y)$ ve Var (X) = Var (Y) olduğunu gösterip X ile Y'nin aynı dağılıma sahip olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.
Normal dağılımda parametreler ortalama ve varyanstır: $E(X) = 3$, Var $(X) = 3$. Poisson dağılımında ortalama da varyans da λ'ya eşittir: $E(Y) = 3$, Var $(Y) = 3$. Yani ilk iki moment aynıdır.
Moment üreten fonksiyonları karşılaştıralım:

$$M_X(t) = e^{3t+\frac{3}{2}t^2}, \qquad M_Y(t) = e^{3(e^t-1)}.$$

Bu iki fonksiyon farklıdır; örneğin $t = 1$'de

$$M_X(1) = e^{4,5} \approx 90{,}0, \qquad M_Y(1) = e^{3(e-1)} \approx e^{5,15} \approx 173{,}3.$$

Aynı dağılıma sahip iki rastgele değişkenin moment üreten fonksiyonları her noktada eşit olurdu; öyleyse X ile Y'nin dağılımları farklıdır. Bunu doğrudan da görebiliriz: Y yalnız $0, 1, 2, \ldots$ değerlerini alır ve $P(Y = 0) = e^{-3} > 0$'dır; X ise sürekli olduğundan her tek noktayı sıfır olasılıkla alır.
Sonuç: ortalama ve varyans bir dağılımı genelde belirlemez. Normal dağılımda belirlemesinin nedeni, normal ailesinin yalnız bu iki parametreye bağlı olmasıdır.
■

5.3 Doğrusal Dönüşümler ve Bağımsız Normallerin Birleşimleri

Normal dağılımın en kullanışlı yanı, doğrusal işlemler altında normal kalmasıdır: normal bir değişkeni ölçekleyip kaydırmak ya da bağımsız normalleri toplamak yine normal bir değişken verir.
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $c \neq 0$ ve d gerçel sayılar ise $Y = cX + d$ için moment üreten fonksiyon

$$M_Y(t) = E\left(\, e^{t(cX+d)} \,\right) = e^{dt}\, M_X(ct) = e^{(c\mu+d)t+\frac{c^2\sigma^2t^2}{2}}$$

olur; bu, $N(c\mu + d, c^2\sigma^2)$ dağılımının moment üreten fonksiyonudur. Demek ki $Y \sim N(c\mu + d, c^2\sigma^2)$ (Olasılık Teorisi'ndeki önerme). Benzer biçimde, $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $(i = 1, \ldots, n)$ bağımsız ise toplamları $N\left(\sum \mu_i, \sum \sigma_i^2\,\right)$ dağılımlıdır (bağımsız normallerin toplamı). Bu iki sonucu tek bir ifadede birleştirelim.

Sonuç 5.1 (Bağımsız Normallerin Doğrusal Birleşimi). *$X_1, \ldots, X_n$ bağımsız, her i için $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ olsun ve $a_1, \ldots, a_n$ hepsi birden sıfır olmayan gerçel sayılar olsun. O zaman*

$$a_1X_1 + \cdots + a_nX_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\right).$$

Özel olarak, X_1 ile X_2 bağımsız ve $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ise

$$D = X_1 - X_2 \sim N\left(\,\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\,\right).$$

İspat.
$L = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ diyelim. X_i'ler bağımsız olduğundan $e^{ta_1X_1}, \ldots, e^{ta_nX_n}$ de bağımsızdır ve bağımsız değişkenlerin çarpımının beklenen değeri, beklenen değerlerin çarpımıdır:

$$M_L(t) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{ta_iX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} E\left(\, e^{(a_it)X_i} \,\right) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_it).$$

Her çarpana normalin moment üreten fonksiyonunu yazalım:

$$M_{X_i}(a_it) = e^{\mu_ia_it+\frac{\sigma_i^2a_i^2t^2}{2}}.$$

Üstel fonksiyonların çarpımında üsler toplanır:

$$M_L(t) = \exp\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i\Big)\,t + \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2\Big)\,\frac{t^2}{2}\Big).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

a_i'lerden en az biri sıfırdan farklı ve her $\sigma_i^2 > 0$ olduğundan $\sum a_i^2\sigma_i^2 > 0$'dır. Dolayısıyla M_L, ortalaması $\sum a_i\mu_i$ ve varyansı $\sum a_i^2\sigma_i^2$ olan normal dağılımın moment üreten fonksiyonudur; teklik teoremi gereği L bu dağılıma sahiptir.
Fark için $n = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ alınır: ortalama $\mu_1 - \mu_2$, varyans $1^2\sigma_1^2 + (-1)^2\sigma_2^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ olur.
■

Yani ortalamalar katsayılarla birlikte toplanır, ama varyanslar katsayıların **kareleriyle** toplanır; çünkü $\text{Var}\,(aX) = a^2\,\text{Var}\,(X)$'tir. Bu yüzden iki bağımsız değişkenin farkında bile varyanslar toplanır, asla çıkarılmaz. Çıkarılsaydı, örneğin varyansı küçük bir değişkenden varyansı büyük olanı çıkardığımızda negatif bir varyans bulurduk; bu imkânsızdır. Sezgisel olarak: iki belirsiz büyüklüğün farkı, her birinden daha belirsizdir.

Örnek 5.5 (Üç Normalin Toplamı ve Farkı). $X \sim N(3,5)$, $Y \sim N(2,4)$ ve $U \sim N(1,3)$ bağımsız olsun. $X + Y - U$ rastgele değişkeninin dağılımını bulunuz.

Çözüm.
Sonuç 5.1'i $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$ ile uygulayalım. Ortalama

$$E(X + Y - U) = 3 + 2 - 1 = 4,$$

varyans

$$\text{Var}\,(X + Y - U) = 1^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 4 + (-1)^2 \cdot 3 = 12.$$

Buna göre $X + Y - U \sim N(4, 12)$.
İşaretler yalnız ortalamayı etkiler, varyansı etkilemez. Örneğin $X - Y + U$ için ortalama $3 - 2 + 1 = 2$, varyans yine $5 + 4 + 3 = 12$'dir: $X - Y + U \sim N(2, 12)$.
■

Örnek 5.6 (Katsayılı Doğrusal Birleşim). $X \sim N(3,5)$, $Y \sim N(2,4)$ ve $U \sim N(1,3)$ bağımsız olsun. $3X - 2Y + 5U$ rastgele değişkeninin dağılımını bulunuz.

Çözüm.
Katsayılar $a_1 = 3$, $a_2 = -2$, $a_3 = 5$'tir. Ortalama

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 9 - 4 + 5 = 10,$$

varyans ise katsayıların kareleriyle

$$3^2 \cdot 5 + (-2)^2 \cdot 4 + 5^2 \cdot 3 = 45 + 16 + 75 = 136.$$

Buna göre $3X - 2Y + 5U \sim N(10, 136)$.
Aynı yolla $-X + 2Y - 3U$ için ortalama $-3 + 4 - 3 = -2$, varyans $5 + 4 \cdot 4 + 9 \cdot 3 = 48$ bulunur: $-X + 2Y - 3U \sim N(-2, 48)$.
■

5.4 Standart Normal Dağılım ve Tablo Kullanımı

Normal dağılımla olasılık hesaplamak, yoğunluğun bir aralık üzerindeki integralini almak demektir. Bu integral elemanter fonksiyonlarla yazılamaz; bu yüzden hesap tek bir özel normal dağılıma indirilir ve onun değerleri tablodan okunur.
Ortalaması 0, varyansı 1 olan $N(0,1)$ dağılımına **standart normal dağılım** denir (Olasılık Teorisi'ndeki tanım); standart normal değişken genellikle Z ile gösterilir ve yoğunluğu

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-z^2/2}, \qquad z \in \mathbb{R}$$

olur. Her normal değişken standart normale dönüştürülebilir: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise

 CC BY-NC-SA 4.0

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

(standartlaştırma teoremi). Bu, yukarıdaki $Y = cX + d$ dönüşümünde $c = \frac{1}{\sigma}$ ve $d = -\frac{\mu}{\sigma}$ alınmasıdır: ortalama $\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = 0$, varyans $\frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$ olur. Ortalama ve varyansı doğrudan da kontrol edebiliriz. μ ve σ sabit olduğundan beklenen değerin dışına çıkarlar:

$$E(Z) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0, \qquad \operatorname{Var}(Z) = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

Burada paydanın sabit olması önemlidir: payda da rastgele olsaydı, genelde $E(X/Y) \neq E(X)/E(Y)$ olurdu.
Standartlaştırma bir olasılık hesabını şöyle dönüştürür: $\sigma > 0$ olduğundan $a < X < b$ eşitsizliği, her tarafından μ çıkarıp σ'ya bölünce yönünü korur ve

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} < Z < \frac{b - \mu}{\sigma} \right)$$

olur. Sağdaki olasılık standart normal eğrisinin altındaki bir alandır. Bu alan Taylor serisi ya da Simpson yöntemi gibi sayısal yollarla da hesaplanabilir; ama bir kez hesaplanıp tabloya dökülmüş değerleri kullanmak çok daha pratiktir. Kitabın sonundaki standart normal tablosu, $z \geq 0$ için 0 ile z arasındaki alanı, yani $P(0 \leq Z \leq z)$ olasılığını dört ondalıkla verir. Z sürekli olduğundan eşitsizliklerin $<$ ya da $\leq$ olması sonucu değiştirmez.

Standart normal tablosunu kullanmak üç adımda

1. **Standartlaştır.** Olayı X cinsinden yazın; sınırlardan μ çıkarıp σ'ya bölün ve bulunan z değerlerini iki ondalığa yuvarlayın.
2. **Alanları 0'dan başlat.** Eğri 0'a göre simetriktir ve iki yarısının her birinin alanı 0,5'tir. Bu yüzden her olasılık 0'dan başlayan alanlarla yazılabilir. $z > 0$ ve $a, b \geq 0$ için (üçüncü satırda $a < b$):

$$\begin{aligned} P(Z > z) &= 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq z), \\ P(-z \leq Z \leq 0) &= P(0 \leq Z \leq z), \\ P(a \leq Z \leq b) &= P(0 \leq Z \leq b) - P(0 \leq Z \leq a), \\ P(-a \leq Z \leq b) &= P(0 \leq Z \leq a) + P(0 \leq Z \leq b). \end{aligned}$$

3. **Tablodan oku.** z'nin tam kısmı ile ilk ondalığı satırı, ikinci ondalığı sütunu belirler; kesişimdeki sayı $P(0 \leq Z \leq z)$'dir.
Her adımda eğriyi kabaca çizip istenen alanı taramak, işaret hatalarını önlemenin en iyi yoludur.

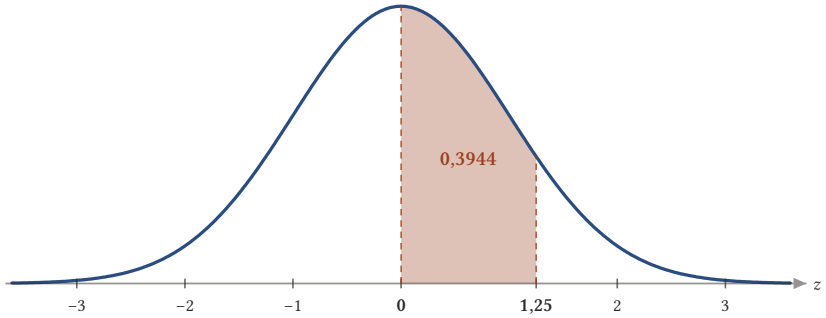
Örnek 5.7 (Tablodan Alan Okumak). $Z \sim N(0,1)$ için $P(0 \leq Z \leq 1{,}25)$ olasılığını standart normal tablosundan bulunuz.

Çözüm.
$z = 1{,}25$'in tam kısmı ile ilk ondalığı 1,2, ikinci ondalığı 0,05'tir. Tabloda 1,2 satırı ile 0,05 sütununun kesişimi okunur:

$$P(0 \leq Z \leq 1{,}25) = 0{,}3944.$$

Bu, standart normal eğrisinin altında 0 ile 1,25 arasında kalan alandır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.2: Standart normal eğrisinin altında 0 ile 1,25 arasında kalan alan: tablonun 1,2 satırı ile 0,05 sütununun kesiştiği değer, P(0 ≤ Z ≤ 1,25) = 0,3944.

■

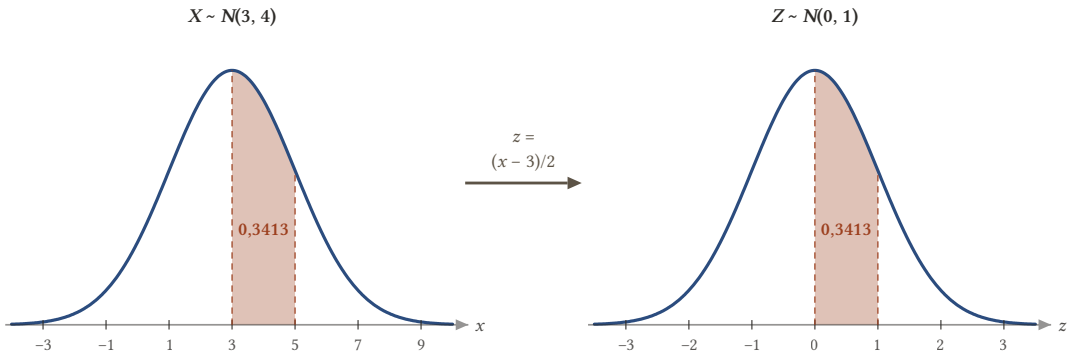
Örnek 5.8 (Standartlaştırarak Olasılık Hesabı). $X \sim N(3,4)$ ise $P(3<X<5)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Parametreler $\mu = 3$ ve $\sigma^2 = 4$'tür; standart sapma $\sigma = 2$'dir. Her taraftan 3 çıkarıp 2'ye bölelim:

$$P(3<X<5) = P\left(\frac{3-3}{2} < \frac{X-3}{2} < \frac{5-3}{2}\right) = P(0<Z<1).$$

Standart normal tablosunun 1,0 satırı ile 0,00 sütunundan

$$P(3<X<5) = P(0<Z<1) = 0{,}3413.$$



Şekil 5.3: Standartlaştırma alanı korur: N(3, 4) eğrisinin altında 3 ile 5 arasında kalan alan, z = (x − 3)/2 dönüşümüyle standart normal eğrisinin altında 0 ile 1 arasında kalan alana dönüşür; ikisi de 0,3413'tür.

■

Sıradaki üç örnek aynı veriyi kullanır: üniversiteye giden erkek öğrencilerin ağırlıkları (kg) 68,5 ortalamalı ve 2,3 standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. X rastgele seçilen bir öğrencinin ağırlığı olsun; $X \sim N(68{,}5;\, 2{,}3^2)$. Gerekli standartlaştırmalar:

$$\frac{72-68{,}5}{2{,}3} \approx 1{,}52, \qquad \frac{70-68{,}5}{2{,}3} \approx 0{,}65, \qquad \frac{65-68{,}5}{2{,}3} \approx -1{,}52.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 5.9 (Ağırlığın 72 Kilogramı Aşması). Öğrenci ağırlıkları $X \sim N(68{,}5;\, 2{,}3^2)$ ise $P(X > 72)$ olasılığını bulunuz.

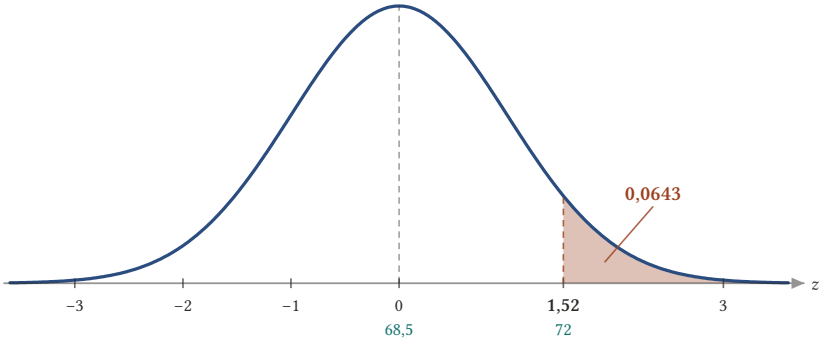
Çözüm.
Standartlaştıralım:

$$P(X > 72) = P\left(Z > \frac{72 - 68{,}5}{2{,}3} \right) = P(Z > 1{,}52).$$

Sağ yarının alanı 0,5'tir; bundan 0 ile 1,52 arasındaki alanı çıkarırız. Tablodan $P(0 \le Z \le 1{,}52) = 0{,}4357$ olduğundan

$$P(X > 72) = 0{,}5 - 0{,}4357 = 0{,}0643.$$

Öğrencilerin yaklaşık %6'sı 72 kilogramdan ağırdır.



Şekil 5.4: Ağırlıklar N(68,5; 2,3²) dağılımlı. X > 72 olayı Z > 1,52 olayına karşılık gelir; sağ kuyruğun alanı 0,5 − 0,4357 = 0,0643'tür. Eksenin altındaki ikinci satırdaki sayılar X'in karşılık gelen değerleridir.

■

Örnek 5.10 (Ağırlığın 70 ile 72 Kilogram Arasında Olması). Öğrenci ağırlıkları $X \sim N(68{,}5;\, 2{,}3^2)$ ise $P(70 < X < 72)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Standartlaştıralım:

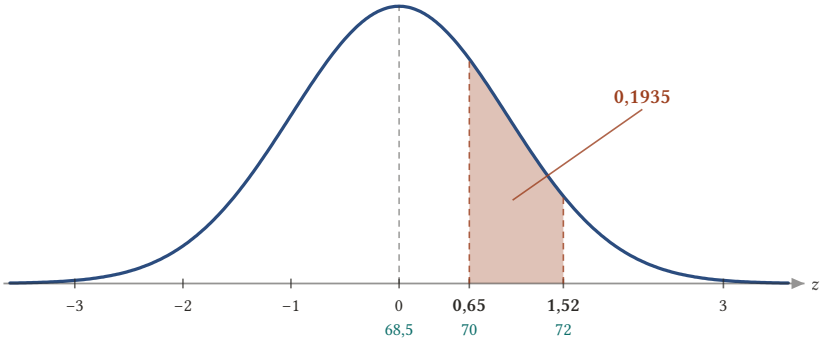
$$P(70 < X < 72) = P\left(\frac{70 - 68{,}5}{2{,}3} < Z < \frac{72 - 68{,}5}{2{,}3} \right) = P(0{,}65 < Z < 1{,}52).$$

İki sınır da 0'ın sağında olduğundan büyük alandan küçük alanı çıkarırız. Tablodan $P(0 \le Z \le 1{,}52) = 0{,}4357$ ve $P(0 \le Z \le 0{,}65) = 0{,}2422$:

$$P(70 < X < 72) = 0{,}4357 - 0{,}2422 = 0{,}1935.$$

Öğrencilerin yaklaşık %19'unun ağırlığı 70 ile 72 kilogram arasındadır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.5: 70 < X < 72 olayı 0,65 < Z < 1,52 olayına karşılık gelir; taralı alan 0,4357 − 0,2422 = 0,1935'tir.

■

Örnek 5.11 (Ağırlığın 65 ile 70 Kilogram Arasında Olması). Öğrenci ağırlıkları $X \sim N(68{,}5;\, 2{,}3^2)$ ise $P(65 < X < 70)$ olasılığını bulunuz.

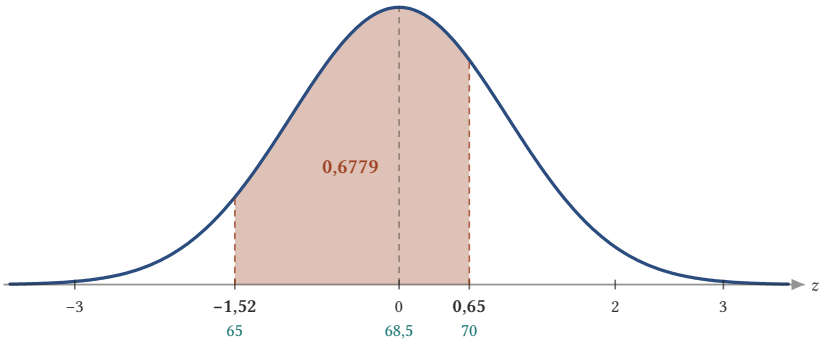
Çözüm.
Standartlaştıralım:

$$P(65 < X < 70) = P\left(\frac{65 - 68{,}5}{2{,}3} < Z < \frac{70 - 68{,}5}{2{,}3} \right) = P(-1{,}52 < Z < 0{,}65).$$

Bu kez aralık 0'ı içerir; alanı 0'da ikiye bölüp iki parçayı toplarız. Simetriden sol parçanın alanı $P(0 < Z < 1{,}52)$'ye eşit olduğundan

$$P(65 < X < 70) = 0{,}4357 + 0{,}2422 = 0{,}6779.$$

Öğrencilerin yaklaşık %68'inin ağırlığı 65 ile 70 kilogram arasındadır.



Şekil 5.6: 65 < X < 70 olayı −1,52 < Z < 0,65 olayına karşılık gelir; aralık 0'ı içerdiği için iki tablo alanı toplanır: 0,4357 + 0,2422 = 0,6779.

■

5.5 Olasılıktan Değere: Kantiller

Şimdiye kadar bir aralık verip olasılığını bulduk. Uygulamada çoğu zaman soru terstir: "Öğrencilerin en başarılı %5'ine girmek için kaç puan gerekir?" Bu tür sorular, belli bir olasılığı solunda bırakan noktayı bulmayı gerektirir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 5.1 (Standart Normal Dağılımın Kantili). $Z \sim N(0,1)$ ve $0 < p < 1$ olsun.

$$P(Z \leq z_p) = p$$

eşitliğini sağlayan z_p sayısına standart normal dağılımın ***p* kantili** denir.

Yani z_p, standart normal eğrisinin altında solunda p kadar alan bırakan noktadır. Dağılım fonksiyonu sürekli ve kesin artan olduğundan her p için böyle tek bir nokta vardır. Eğri 0'a göre simetrik olduğundan $z_{1-p} = -z_p$'dir; örneğin $z_{0,05} = -z_{0,95}$. Kantil kitap boyunca hep bu biçimde, sol kuyruk alanıyla gösterilecektir.
$p > 0,5$ ise $P(0 \leq Z \leq z_p) = p - 0,5$ olur; bu yüzden z_p, standart normal tablosunun içinde $p - 0,5$ aranarak bulunur. İki önemli örnek:

- $z_{0,95}$ için tabloda 0,45 aranır. $P(0 \leq Z \leq 1,64) = 0,4495$ ve $P(0 \leq Z \leq 1,65) = 0,4505$ olduğundan 0,45 tam ortadadır ve $z_{0,95} = 1,645$ alınır.
- $z_{0,975}$ için tabloda 0,4750 aranır ve tam olarak 1,96 satır ve sütununda bulunur: $z_{0,975} = 1,96$.

Genel bir normal için $X = \mu + \sigma Z$ yazılabildiğinden, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$'nin solunda p alan bırakan nokta $\mu + \sigma z_p$'dir.

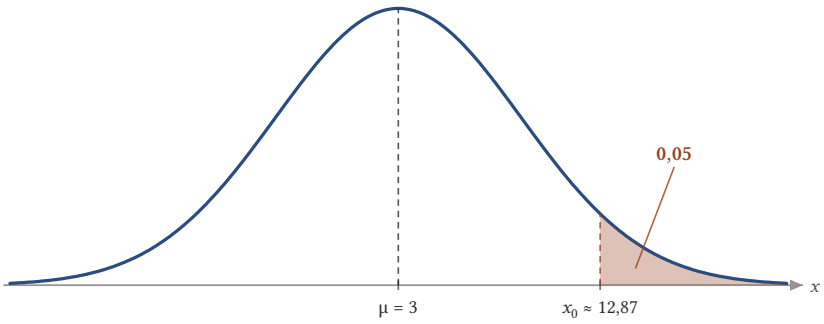
Örnek 5.12 (Sağ Kuyruğu Yüzde Beş Olan Nokta). $X \sim N(3, 36)$ olsun. $P(X > x_0) = 0,05$ olduğuna göre x_0 sayısını bulunuz.

Çözüm.
$\mu = 3$ ve $\sigma = 6$'dır. Standartlaştıralım:

$$P(X > x_0) = P\left(Z > \frac{x_0 - 3}{6}\right) = 0,05.$$

Sağında 0,05 alan kalan noktanın solunda 0,95 alan kalır; yani $\frac{x_0-3}{6}$ sayısı $z_{0,95} = 1,645$'tir:

$$\frac{x_0 - 3}{6} = 1,645 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 3 + 6 \cdot 1,645 = 12,87.$$



Şekil 5.7: X ~ N(3, 36) için sağ kuyruğun alanı 0,05 olacak biçimde seçilen nokta: $x_0 = 3 + 6 \cdot 1,645 \approx 12,87$.

■

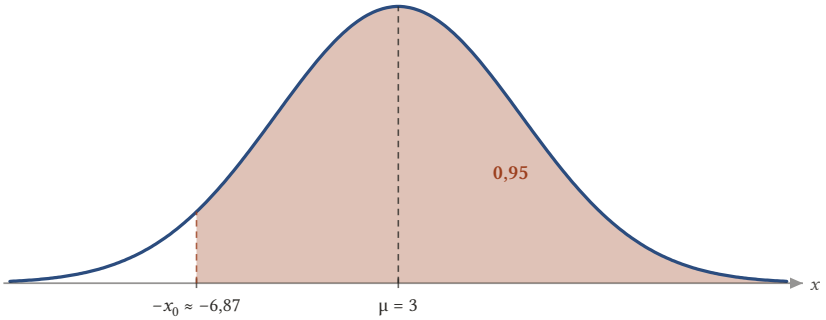
Örnek 5.13 (Sağında Yüzde Doksan Beş Kalan Nokta). $X \sim N(3, 36)$ olsun. $P(X > -x_0) = 0,95$ olduğuna göre x_0 sayısını bulunuz.

Çözüm.
Standartlaştıralım:

$$P(X > -x_0) = P\left(Z > \frac{-x_0 - 3}{6}\right) = 0,95.$$

Sağında 0,95 alan kalan noktanın solunda 0,05 alan kalır; bu nokta $z_{0,05} = -z_{0,95} = -1{,}645$'tir. Sağ tarafta bu kadar büyük bir alan kalması için noktanın 0'ın solunda olması gerektiği şekilden de görülür. Buna göre

$$\frac{-x_0 - 3}{6} = -1{,}645 \quad \Rightarrow \quad -x_0 - 3 = -9{,}87 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 6{,}87.$$



Şekil 5.8: X ~ N(3, 36) için P(X > −x₀) = 0,95 koşulu: −x₀ noktasının sağındaki alan 0,95, solundaki alan 0,05'tir; buradan x₀ ≈ 6,87 bulunur.

■

Örnek 5.14 (En Yüksek Harf Notu için Gereken Puan). Bir istatistik sınavında notlar 70 ortalamalı ve 10 standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. Öğrencilerin %5'i "AA" almıştır. "AA" alabilmek için gereken en düşük not nedir?

Çözüm.
X bir öğrencinin notu olsun: $X \sim N(70, 100)$. "AA" için gereken en düşük not a ise, notların %5'i a'nın üstündedir: $P(X > a) = 0{,}05$. Standartlaştıralım:

$$P(X > a) = P\left(Z > \frac{a - 70}{10}\right) = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \frac{a - 70}{10} = z_{0,95} = 1{,}645.$$

Buradan $a = 70 + 10 \cdot 1{,}645 = 86{,}45$ bulunur. "AA" alabilmek için yaklaşık 86,5 puan gerekir.
■

5.6 Normal Dağılımla Hesaplar

Aşağıdaki örneklerde öğrendiğimiz araçları birlikte kullanıyoruz: standartlaştırma, tablo okuma ve bağımsız normallerin birleşimleri.
Önce bir kitle problemi. Bir olayın olasılığı p ise, n kişilik bir toplulukta bu olayın gerçekleştiği kişi sayısı Binom (n, p) dağılımlıdır ve beklenen değeri np'dir (binomun beklenen değeri). "Kaç kişi?" sorusuna bu beklenen sayı ile yanıt veririz.

Örnek 5.15 (Boyu 175 Santimetreden Uzun Öğrenciler). 500 öğrencinin boy uzunlukları (cm) $N(167, 81)$ dağılımına sahiptir. Boyu 175 cm'den uzun olan öğrenci sayısını bulunuz.

Çözüm.
X rastgele seçilen bir öğrencinin boyu olsun; $\mu = 167$, $\sigma = 9$. Standartlaştıralım; $\frac{175-167}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}89$:

$$P(X > 175) = P(Z > 0{,}89) = 0{,}5 - 0{,}3133 = 0{,}1867.$$

Beklenen öğrenci sayısı $500 \cdot 0{,}1867 = 93{,}35$'tir; yaklaşık 93 öğrencinin boyu 175 cm'den uzundur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 5.16 (Boyu En Çok 160 Santimetre Olan Öğrenciler). 500 öğrencinin boy uzunlukları (cm) $N(167, 81)$ dağılımına sahiptir. Boyu 160 cm'ye eşit ya da daha kısa olan öğrenci sayısını bulunuz.

Çözüm.
$\mu = 167$, $\sigma = 9$ ve $\frac{160-167}{9} = -\frac{7}{9} \approx -0{,}78$'dir:

$$P(X \le 160) = P(Z \le -0{,}78).$$

Simetriden sol kuyruk, sağdaki eşi $P(Z \ge 0{,}78)$'e eşittir:

$$P(Z \le -0{,}78) = 0{,}5 - 0{,}2823 = 0{,}2177.$$

Beklenen sayı $500 \cdot 0{,}2177 = 108{,}85$'tir; yaklaşık 109 öğrencinin boyu 160 cm ya da daha kısadır. ■

Örnek 5.17 (Boyu 162 ile 170 Santimetre Arasında Olan Öğrenciler). 500 öğrencinin boy uzunlukları (cm) $N(167, 81)$ dağılımına sahiptir. Boyu 162 ile 170 cm arasında (uçlar dâhil) olan öğrenci sayısını bulunuz.

Çözüm.
$\mu = 167$, $\sigma = 9$. Sınırlar $\frac{162-167}{9} = -\frac{5}{9} \approx -0{,}56$ ve $\frac{170-167}{9} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33$'tür. Aralık 0'ı içerdiğinden iki alan toplanır:

$$P(162 \le X \le 170) = P(-0{,}56 \le Z \le 0{,}33) = 0{,}2123 + 0{,}1293 = 0{,}3416.$$

Beklenen sayı $500 \cdot 0{,}3416 = 170{,}8$'dir; yaklaşık 171 öğrencinin boyu 162 ile 170 cm arasındadır. ■

Sıradaki üç örnekte X ve Y bağımsız, sırasıyla 10 ve 15 ortalamalı, 3 ve 4 standart sapmalı normal değişkenlerdir: $X \sim N(10, 9)$, $Y \sim N(15, 16)$. Sonuç 5.1 gereği

$$X + Y \sim N(25, 25), \qquad X - Y \sim N(-5, 25), \qquad Y - X \sim N(5, 25);$$

üçünün de standart sapması $\sqrt{25} = 5$'tir.

Örnek 5.18 (Toplamın Ortalamayı Aşması). $X \sim N(10, 9)$ ile $Y \sim N(15, 16)$ bağımsız ise $P(X + Y > 25)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
$X + Y \sim N(25, 25)$ olduğundan

$$P(X + Y > 25) = P\left(Z > \frac{25 - 25}{5}\right) = P(Z > 0) = 0{,}5.$$

Bu, simetriden beklenen sonuçtur: normal bir değişkenin ortalamasını aşma olasılığı $0{,}5$'tir. ■

Örnek 5.19 (Toplamın Bir Aralıkta Olması). $X \sim N(10, 9)$ ile $Y \sim N(15, 16)$ bağımsız ise $P(10 < X + Y < 30)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
$X + Y \sim N(25, 25)$; standartlaştıralım:

$$P(10 < X + Y < 30) = P\left(\frac{10 - 25}{5} < Z < \frac{30 - 25}{5}\right) = P(-3 < Z < 1).$$

Aralık 0'ı içerir; tablodan $P(0 \le Z \le 3) = 0{,}4987$ ve $P(0 \le Z \le 1) = 0{,}3413$:

$$P(10 < X + Y < 30) = 0{,}4987 + 0{,}3413 = 0{,}8400.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 5.20 (Farkın Olasılığı). $X \sim N(10, 9)$ ile $Y \sim N(15, 16)$ bağımsız ise $P(X - Y \leq -5)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Sonuç 5.1 gereği fark için ortalamalar çıkarılır, varyanslar toplanır:

$$X - Y \sim N(10 - 15, 9 + 16) = N(-5, 25).$$

Standartlaştırma her zaman olduğu gibi "değişken eksi kendi beklenen değeri, bölü kendi standart sapması" biçimindedir:

$$P(X - Y \leq -5) = P\left(\frac{X - Y - (-5)}{5} \leq \frac{-5 - (-5)}{5} \right) = P(Z \leq 0) = 0{,}5.$$

■

5.7 Binom Dağılımına Normal Yaklaşım

Binom olasılıkları n büyüdükçe elle hesaplanamaz hâle gelir: 500 denemede "275'ten fazla başarı" olasılığı, iki yüz yirmi beş ayrı terimin toplamıdır. Neyse ki n büyüdükçe binom dağılımının çubuk grafiği bir çan eğrisine benzer ve olasılıklar normal dağılımla yaklaşık hesaplanabilir.
$X \sim \text{Binom } (n, p)$ ve $q = 1 - p$ olsun. Hatırlatalım (Olasılık Teorisi'ndeki tanım):

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n; \qquad E(X) = np, \quad \text{Var } (X) = npq.$$

Binomu yaklaşık olarak temsil edecek normal dağılım, aynı ortalama ve varyansa sahip olan $N(np, npq)$ dağılımıdır.

Teorem 5.1 (De Moivre-Laplace Teoremi). *$0 < p < 1$ sabit, $q = 1 - p$ ve her n için $X_n \sim \text{Binom } (n, p)$ olsun. $Z \sim N(0, 1)$ ise her $a < b$ için*

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) = P(a \leq Z \leq b).$$

Yani n büyükken X_n, $N(np, npq)$ dağılımlı bir değişken gibi davranır. X_n, başarı olasılığı p olan n bağımsız Bernoulli değişkeninin toplamı olduğundan bu teorem merkezi limit teoreminin özel bir hâlidir; ispatını Yakınsama ve Merkezi Limit Teoremi bölümünde genel teoremle birlikte vereceğiz.
Yaklaşımın ne kadar iyi olduğu n'ye ve p'ye bağlıdır. $p = \frac{1}{2}$ iken binom dağılımı simetriktir ve çan eğrisine çok çabuk benzer. p, 0'a ya da 1'e yaklaştıkça dağılım çarpıklaşır ve iyi bir yaklaşım için daha büyük n gerekir. Uygulamada yaygın kural şudur: $np \geq 5$ ve $nq \geq 5$ ise normal yaklaşım kullanılabilir. n büyük ama p çok küçükse, yani np küçük kalıyorsa, Poisson yaklaşımı daha uygundur.

5.7.1 Süreklilik Düzeltmesi

Binom değişkeni yalnız tam sayı değerleri alır ve her tam sayıya pozitif bir olasılık verir. Normal değişken ise süreklidir ve tek bir noktaya sıfır olasılık verir. Bu iki dünyayı birleştirmenin yolu, her $P(X = x)$ olasılığını genişliği 1 olan bir dikdörtgenin alanı olarak düşünmektir: $x - \frac{1}{2}$ ile $x + \frac{1}{2}$ arasında duran ve yüksekliği $P(X = x)$ olan dikdörtgen. Binom olasılıkları noktalardaki yüksekliklerdir; normal yaklaşımda ise olasılıklar alanlarla ölçülür.

Tanım 5.2 (Süreklilik Düzeltmesi). $X \sim \text{Binom } (n, p)$ ve $Y \sim N(np, npq)$ olsun. Binom olasılığını normal yaklaşımla hesaplarken her x tam sayısını $\left[\, x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} \,\right]$ aralığıyla değiştirmeye **süreklilik düzeltmesi** denir. Örneğin

$$P(X = x) \approx P\left(\, x - 0{,}5 \leq Y \leq x + 0{,}5 \, \right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani istenen tam sayıların dikdörtgenlerinin kapladığı aralığın tamamı alınır. a'dan b'ye kadar (uçlar dâhil) olan tam sayıların dikdörtgenleri $a-0{,}5$ ile $b+0{,}5$ arasını kaplar. Katı eşitsizlikte uçtaki tam sayı olaya dâhil değildir; örneğin $X > x$ olayı $X \geq x+1$ demektir ve bu değerlerin dikdörtgenleri $x+0{,}5$'ten başlar. Bütün durumlar:

Binom olasılığı	Süreklilik düzeltmeli normal yaklaşım
$P(X = x)$	$P(x-0{,}5 \leq Y \leq x+0{,}5)$
$P(X \leq x)$	$P(Y \leq x+0{,}5)$
$P(X < x)$	$P(Y \leq x-0{,}5)$
$P(X \geq x)$	$P(Y \geq x-0{,}5)$
$P(X > x)$	$P(Y \geq x+0{,}5)$
$P(a \leq X \leq b)$	$P(a-0{,}5 \leq Y \leq b+0{,}5)$
$P(a < X \leq b)$	$P(a+0{,}5 \leq Y \leq b+0{,}5)$
$P(a \leq X < b)$	$P(a-0{,}5 \leq Y \leq b-0{,}5)$
$P(a < X < b)$	$P(a+0{,}5 \leq Y \leq b-0{,}5)$

Tabloyu ezberlemeye gerek yoktur: hangi tam sayıların olaya dâhil olduğunu yazıp dikdörtgenlerinin kapladığı aralığı almak yeter. Y sürekli olduğundan sağ sütunda $<$ ile $\leq$ arasında fark yoktur. Düzeltmenin etkisi $\frac{0{,}5}{\sqrt{npq}}$ kadardır; n küçük ya da orta büyüklükteyken (kabaca $n < 50$) sonucu belirgin biçimde iyileştirir, n çok büyükken etkisi azalır. $np \geq 5$ ve $nq \geq 5$ koşulu sağlandığında düzeltme yaklaşımı hemen her zaman iyileştirir; çarpık dağılımların uç kuyruklarında ise bir garanti vermez.

Örnek 5.21 (On İki Atışta Tura Sayısı). Bir para 12 kez atılıyor. Tura sayısının dağılımını yazıp 4 ile 6 arasında (uçlar dâhil) tura gelme olasılığını tam olarak hesaplayınız.

Çözüm.
X gelen tura sayısı olsun. Atışlar bağımsız ve her atışta tura olasılığı $\frac{1}{2}$ olduğundan $X \sim \text{Binom}\left(12, \frac{1}{2}\right)$:

$$f(x) = \binom{12}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-x} = \binom{12}{x}\frac{1}{4096}, \qquad x = 0, 1, \ldots, 12.$$

$\binom{12}{4} = 495$, $\binom{12}{5} = 792$ ve $\binom{12}{6} = 924$ olduğundan

$$P(4 \leq X \leq 6) = f(4) + f(5) + f(6) = \frac{495 + 792 + 924}{4096} = \frac{2211}{4096} \approx 0{,}5398.$$

■

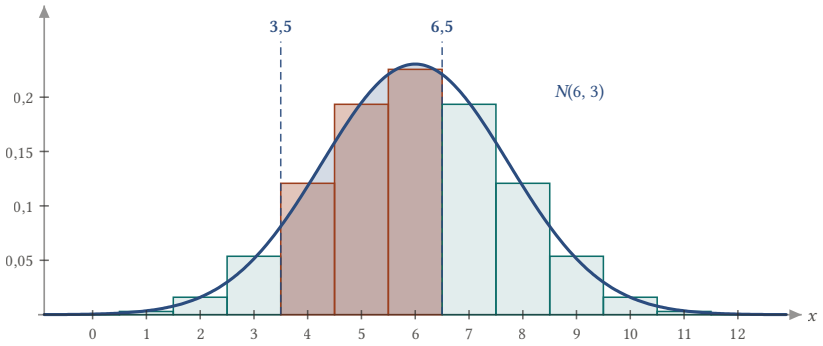
Örnek 5.22 (On İki Atışta Normal Yaklaşım). Bir para 12 kez atılıyor. 4 ile 6 arasında (uçlar dâhil) tura gelme olasılığını binom dağılımına normal yaklaşım yaparak bulunuz.

Çözüm.
$X \sim \text{Binom}\left(12, \frac{1}{2}\right)$ için

$$\mu = np = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6, \qquad \sigma^2 = npq = 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 3, \qquad \sigma = \sqrt{3} \approx 1{,}732.$$

$Y \sim N(6, 3)$ alalım. Aşağıdaki şekilde her binom olasılığı genişliği 1 olan bir dikdörtgen olarak çizilmiş, üstlerine $N(6,3)$ eğrisi geçirilmiştir. 4, 5 ve 6'nın dikdörtgenleri 3,5 ile 6,5 arasını kaplar; bu dikdörtgenlerin toplam alanı, eğrinin altında aynı aralıkta kalan alana yakındır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.9: Binom(12; 1/2) olasılıkları, her biri x − 1/2 ile x + 1/2 arasında duran genişliği 1 olan dikdörtgenler olarak çizildi; eğri N(6, 3) yoğunluğudur. 4, 5 ve 6'nın dikdörtgenleri (turuncu) 3,5 ile 6,5 arasını kaplar; bu yüzden normal yaklaşımda eğrinin altında 3,5 ile 6,5 arasında kalan alan (mavi) kullanılır.

Süreklilik düzeltmesiyle:

$$\begin{aligned} P(4 \le X \le 6) &\approx P(3{,}5 \le Y \le 6{,}5) \\ &= P\left(\frac{3{,}5-6}{\sqrt{3}} \le Z \le \frac{6{,}5-6}{\sqrt{3}} \right) \\ &= P(-1{,}44 \le Z \le 0{,}29). \end{aligned}$$

Aralık 0'ı içerir; tablodan $P(0 \le Z \le 1{,}44) = 0{,}4251$ ve $P(0 \le Z \le 0{,}29) = 0{,}1141$:

$$P(4 \le X \le 6) \approx 0{,}4251 + 0{,}1141 = 0{,}5392.$$

Bu değer, önceki örnekte bulunan kesin olasılık $0{,}5398$'e çok yakındır. Süreklilik düzeltmesini unutup $P(4 \le Y \le 6)$ hesaplasaydık $P(-1{,}15 \le Z \le 0) = 0{,}3749$ bulurduk; uçlardaki iki yarım dikdörtgeni kaybetmek büyük bir hata yaratır.

■

Sıradaki iki örnekte bir üniversitenin öğrencilerinin %50'si kızdır ve rastgele 30 öğrenci seçilir. Öğrenci sayısı çok büyük olduğundan seçimler bağımsız sayılabilir; seçilenler arasındaki kız sayısı $X \sim \text{Binom}\left(30, \frac{1}{2}\right)$ olur. $np = nq = 15 \ge 5$ olduğundan normal yaklaşım uygundur:

$$\mu = 15, \qquad \sigma^2 = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5, \qquad \sigma \approx 2{,}739.$$

Örnek 5.23 (En Az On Dokuz Kız Öğrenci). Öğrencilerin %50'si kız olan bir üniversiteden rastgele 30 öğrenci seçiliyor. En az 19'unun kız olma olasılığını normal yaklaşımla bulunuz.

Çözüm.
$X \sim \text{Binom}\left(30, \frac{1}{2}\right)$ ve $Y \sim N(15; 7{,}5)$. Tam hesap $\sum_{x=19}^{30} \binom{30}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{30}$ toplamını gerektirir. $X \ge 19$ olayına dâhil olan dikdörtgenler 18,5'ten başlar:

$$P(X \ge 19) \approx P(Y \ge 18{,}5) = P\left(Z \ge \frac{18{,}5-15}{2{,}739} \right) = P(Z \ge 1{,}28).$$

Tablodan $P(0 \le Z \le 1{,}28) = 0{,}3997$ olduğundan

$$P(X \ge 19) \approx 0{,}5 - 0{,}3997 = 0{,}1003.$$

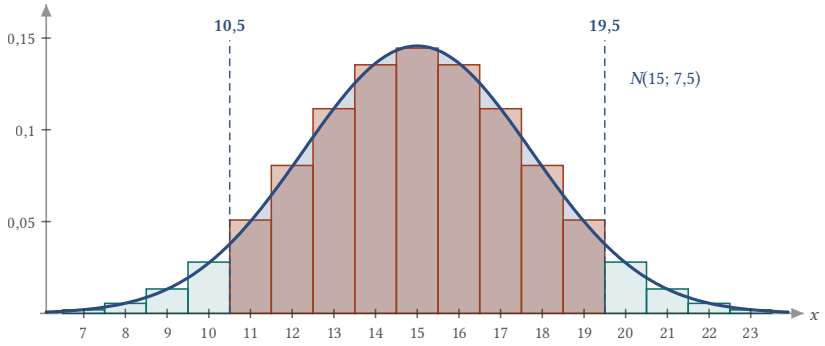
Binom dağılımıyla doğrudan hesaplanan değer $0{,}1002$'dir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 5.24 (Kız Öğrenci Sayısının On Bir ile On Dokuz Arasında Olması). Öğrencilerin %50′si kız olan bir üniversiteden rastgele 30 öğrenci seçiliyor. Kız öğrenci sayısının 11 ile 19 arasında (uçlar dâhil) olma olasılığını normal yaklaşımla bulunuz.

Çözüm.
$X \sim \text{Binom}\left(30, \frac{1}{2}\right)$ ve $Y \sim N(15; 7{,}5)$. $11, 12, \ldots, 19$ değerlerinin dikdörtgenleri 10,5 ile 19,5 arasını kaplar:



Şekil 5.10: Binom(30; 1/2) olasılıkları ve N(15; 7,5) eğrisi. 11'den 19'a kadar (uçlar dâhil) olan dikdörtgenler 10,5 ile 19,5 arasını kaplar; yaklaşık olasılık eğrinin bu aralıktaki alanıdır.

$$\begin{aligned} P(11 \le X \le 19) &\approx P(10{,}5 \le Y \le 19{,}5) \\ &= P\left(\frac{10{,}5 - 15}{2{,}739} \le Z \le \frac{19{,}5 - 15}{2{,}739}\right) \\ &= P(-1{,}64 \le Z \le 1{,}64). \end{aligned}$$

Aralık 0'a göre simetrik olduğundan

$$P(11 \le X \le 19) \approx 2 \cdot 0{,}4495 = 0{,}8990.$$

Binom dağılımıyla doğrudan hesaplanan değer 0,9013'tür.
■

Örnek 5.25 (Kadın Alıcıların Sayısı). Yeni bir arabanın tasarımı, satılan arabaların %60′ının kadınlar tarafından alınacağı varsayımıyla yapılmıştır. Rastgele seçilen 500 alıcıdan 275'ten fazlasının kadın olma olasılığı nedir?

Çözüm.
X seçilen alıcılar arasındaki kadın sayısı olsun: $X \sim \text{Binom}\,(500; 0{,}6)$. Parametreler

$$\mu = 500 \cdot 0{,}6 = 300, \qquad \sigma^2 = 500 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 120, \qquad \sigma \approx 10{,}954.$$

$np = 300$ ve $nq = 200$ çok büyük olduğundan normal yaklaşım çok iyidir; $Y \sim N(300, 120)$ alalım. $X > 275$ olayı $X \ge 276$ demektir ve bu değerlerin dikdörtgenleri 275,5'ten başlar:

$$P(X > 275) \approx P(Y \ge 275{,}5) = P\left(Z \ge \frac{275{,}5 - 300}{10{,}954}\right) = P(Z \ge -2{,}24).$$

Bu alan, sağ yarı ile $-2{,}24$ ile 0 arasındaki alanın toplamıdır:

$$P(X > 275) \approx 0{,}5 + 0{,}4875 = 0{,}9875.$$

Binom dağılımıyla doğrudan hesaplanan değer 0,9870'tir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Son iki örnek, kuralın sınırında kalan bir durumu gösterir. Bir işletme yeni kurduğu bir bölüme başka birimlerden eleman aktaracaktır. 20 gönüllü aday vardır; her adayın bu bölüme geçme olasılığı 0,8'dir ve kararlar birbirinden bağımsız verilir. Bölüme geçen aday sayısı $X \sim \text{Binom}\,(20;\,0{,}8)$ olur.

Örnek 5.26 (Bölüme Geçen Aday Sayısı: Kesin Hesap). Her biri birbirinden bağımsız olarak 0,8 olasılıkla yeni bölüme geçen 20 gönüllü aday vardır. 16 ile 18 arasında (uçlar dâhil) adayın bölüme geçme olasılığını binom dağılımıyla bulunuz.

Çözüm.
$X \sim \text{Binom}\,(20;\,0{,}8)$ olduğundan

$$P(16 \le X \le 18) = \sum_{x=16}^{18} \binom{20}{x} (0{,}8)^{x} (0{,}2)^{20-x}.$$

Terimleri tek tek hesaplayalım:

$$P(X=16) = \binom{20}{16}(0{,}8)^{16}(0{,}2)^{4} = 4845\,(0{,}8)^{16}(0{,}2)^{4} \approx 0{,}2182,$$
$$P(X=17) = \binom{20}{17}(0{,}8)^{17}(0{,}2)^{3} = 1140\,(0{,}8)^{17}(0{,}2)^{3} \approx 0{,}2054,$$
$$P(X=18) = \binom{20}{18}(0{,}8)^{18}(0{,}2)^{2} = 190\,(0{,}8)^{18}(0{,}2)^{2} \approx 0{,}1369.$$

Toplam:

$$P(16 \le X \le 18) \approx 0{,}2182 + 0{,}2054 + 0{,}1369 = 0{,}5605.$$

■

Örnek 5.27 (Bölüme Geçen Aday Sayısı: Normal Yaklaşım). Her biri birbirinden bağımsız olarak 0,8 olasılıkla yeni bölüme geçen 20 gönüllü aday vardır. 16 ile 18 arasında (uçlar dâhil) adayın bölüme geçme olasılığını süreklilik düzeltmeli normal yaklaşımla bulunuz ve kesin değerle karşılaştırınız.

Çözüm.
$X \sim \text{Binom}\,(20;\,0{,}8)$ için

$$\mu = 20 \cdot 0{,}8 = 16, \qquad \sigma^2 = 20 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 3{,}2, \qquad \sigma \approx 1{,}789.$$

$Y \sim N(16;\,3{,}2)$ alalım. $16, 17, 18$ değerlerinin dikdörtgenleri $15{,}5$ ile $18{,}5$ arasını kaplar:

$$\begin{aligned} P(16 \le X \le 18) &\approx P(15{,}5 \le Y \le 18{,}5) \\ &= P\left(\frac{15{,}5 - 16}{1{,}789} \le Z \le \frac{18{,}5 - 16}{1{,}789} \right) \\ &= P(-0{,}28 \le Z \le 1{,}40). \end{aligned}$$

Tablodan $P(0 \le Z \le 0{,}28) = 0{,}1103$ ve $P(0 \le Z \le 1{,}40) = 0{,}4192$:

$$P(16 \le X \le 18) \approx 0{,}1103 + 0{,}4192 = 0{,}5295.$$

Kesin değer $0{,}5605$ olduğundan yaklaşımın hatası yaklaşık $0{,}03$'tür; önceki örneklerdekinden çok daha büyüktür. Nedeni, $nq = 20 \cdot 0{,}2 = 4 < 5$ olması: $p = 0{,}8$ için binom dağılımı sola çarpıktır ve $n = 20$ simetrik çan eğrisine yaklaşmak için yeterince büyük değildir. Böyle durumlarda kesin binom hesabı tercih edilmelidir.

■

Normal dağılımı, standartlaştırmayı ve binoma normal yaklaşımı gördük. Normal dağılımın asıl önemi bir sonraki kısımda ortaya çıkacak: örneklem ortalamalarının dağılımı, büyük örneklemlerde yaklaşık olarak normaldir. Bu yolculuğa İstatistiğe Giriş bölümünde, istatistiğin temel kavramlarıyla başlıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

6. İstatistiğe Giriş ve Betimsel Ölçüler

Şimdiye kadar dağılımı bilinen rastgele değişkenlerle çalıştık: $X \sim \text{Binom}\,(n,p)$ ise $P(X=3)$ nedir, $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ ise $P(X>10)$ nedir? Gerçek hayatta soru çoğu zaman tersinden gelir. Elimizde birkaç yüz gözlem vardır ve bu gözlemleri üreten dağılım hakkında bir şey söylemek isteriz: ortalama nedir, yayılım ne kadardır, bir iddia verilerle uyuşuyor mu? İstatistiğin işi budur.
Bu bölümde istatistiğin temel kavramlarını kuracağız: kitle, parametre, örneklem ve örneklemin nasıl seçileceği. Ardından bir veri kümesini birkaç sayıyla özetlemeyi öğreneceğiz: verinin merkezini gösteren ortalamalar ve verinin ne kadar yayıldığını gösteren dağılım ölçüleri.

6.1 İstatistik Nedir?

İstatistik, rastgelelik içeren olaylar, süreçler ve sistemler için model kurmaya, bu modellerin gözlemlerle uyuşup uyuşmadığını sınamaya ve modellerden sonuç çıkarmaya yarayan bilgi ve yöntemleri sağlayan bilim dalıdır. Genel olarak iki amaçla kullanılır.

Tanım 6.1 (Betimsel istatistik). Eldeki verilerin toplanması, düzenlenmesi, tablo ve grafiklerle sunulması ve ortalama, varyans gibi özet ölçülerle anlatılmasıyla uğraşan istatistiğe **betimsel (tanımlayıcı) istatistik** denir.

Yani betimsel istatistik yalnızca elimizdeki veriyi anlatır; o verinin dışına genelleme yapmaz.

Tanım 6.2 (Çıkarımsal istatistik). Bir büyük topluluğun yalnızca bir kısmından elde edilen verileri kullanarak topluluğun tamamı hakkında olasılık temelli genellemeler (tahminler, kararlar) yapan istatistiğe **çıkarımsal (tümevarımsal) istatistik** denir.

Yani çıkarımsal istatistik parçadan bütüne gider. Parçadan bütüne gidildiği için vardığı sonuçlar kesin değildir; bu belirsizliğin ne kadar olduğunu olasılıkla ölçer. Kitabın geri kalanı büyük ölçüde çıkarımsal istatistiğin araçlarıyla ilgilidir.

Örnek 6.1 (Betimsel mi, çıkarımsal mı?). Aşağıdaki iki çalışmadan hangisi betimsel, hangisi çıkarımsal istatistiktir?
(i) Bir fabrikanın geçen ayki günlük üretim miktarları bir grafikte gösteriliyor ve aylık ortalama üretimin günde 412 parça olduğu yazılıyor.
(ii) Bir ülkede rastgele seçilen 1500 seçmenin %42'si bir adayı desteklediğini söylüyor ve bundan ülkedeki bütün seçmenlerin yaklaşık %42'sinin bu adayı desteklediği sonucu çıkarılıyor.

> **Çözüm.**
> (i) Geçen ayın bütün günleri elimizdedir ve yapılan iş bu günlerin verisini düzenleyip özetlemektir. Hiçbir genelleme yapılmıyor; bu betimsel istatistiktir.
> (ii) Veri yalnızca 1500 seçmenden gelir, ama sonuç milyonlarca seçmen hakkındadır. Parçadan bütüne gidildiği için bu çıkarımsal istatistiktir. Sonucun ne kadar güvenilir olduğunu, yani gerçek oranın %42'ye ne kadar yakın olduğunu ileride oran için aralık tahmini ile ölçeceğiz.
> ■

6.2 Temel Örnekleme Kavramları

Çıkarımsal istatistiğin dilini birkaç temel kavram kurar. Önce hakkında bilgi edinmek istediğimiz topluluğu adlandıralım.

Tanım 6.3 (Kitle). Üzerinde araştırma yapılacak birimlerin oluşturduğu kümeye **kitle** (anakütle, popülasyon) denir. Birimler insanlar, nesneler, olaylar ya da kayıtlar olabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani kitle, sorumuzun ilgilendiği "herkes"tir: bir üniversitenin bütün öğrencileri, bir fabrikanın ürettiği bütün ampuller, bir hastanenin bütün hasta kayıtları.

Tanım 6.4 (Sonlu ve sonsuz kitle). Birim sayısı sonlu olan kitleye **sonlu kitle**, aksi hâlde **sonsuz kitle** denir.

Yani bir üniversitenin öğrencileri sonlu bir kitledir. Bir üretim hattının üreteceği bütün ampuller ya da bir paranın yapılabilecek bütün atışları ise sonsuz kitle olarak düşünülür, çünkü süreç ilke olarak sınırsızca sürdürülebilir.

Tanım 6.5 (Karakteristik). Bir kitlenin her birimi üzerinde ölçülebilen değişkene kitlenin bir **karakteristiği** denir.

Yani karakteristik, birimlere sorduğumuz sorudur: "boyun kaç santimetre?", "ampul kaç saat yandı?". Aynı kitlenin birçok karakteristiği olabilir.

Tanım 6.6 (Parametre). Bir kitleyi tanımlayan sayısal ölçüye **parametre** denir.

Yani parametre, kitlenin tamamı için hesaplanan bir sayıdır: ortalama boy, ampullerin ortalama ömrü, kusurlu ampullerin oranı. Parametreyi bulmak için kitledeki bütün birimleri gözlememiz gerekir; bu çoğu zaman imkânsız ya da çok pahalı olduğundan parametrenin değeri genellikle **bilinmez**. İstatistiğin temel sorusu, bilinmeyen parametre hakkında kitlenin küçük bir kısmına bakarak ne söyleyebileceğimizdir.

Örnek 6.2 (Öğrencilerin boy uzunlukları). Bir araştırmada bir üniversitedeki öğrencilerin boy uzunlukları inceleniyor. Kitle, karakteristik ve parametre nedir?

> **Çözüm.**
> **Kitle** o üniversitedeki bütün öğrencilerdir; birim tek bir öğrencidir. Bu sonlu bir kitledir.
> **Karakteristik** her öğrencinin boy uzunluğudur.
> **Parametre** olarak kitlenin ortalama boy uzunluğu alınabilir. Tek seçenek bu değildir: boyların varyansı ya da boyu 180 cm'den uzun öğrencilerin oranı da birer parametredir. Hangisinin kullanılacağı araştırmanın sorusuna bağlıdır.
> ■

Örnek 6.3 (Ampullerin ömrü). Bir fabrika, ürettiği ampullerin ne kadar dayandığını merak ediyor. Kitle, karakteristik ve parametreyi belirleyiniz. Parametre neden kitlenin tamamı gözlenerek bulunamaz?

> **Çözüm.**
> Kitle, üretim hattının ürettiği ve üreteceği bütün ampullerdir. Süreç durmadıkça yeni ampuller eklendiği için bu kitle sonsuz kabul edilir. Karakteristik bir ampulün yanma süresi (saat), parametre de ampullerin ortalama ömrüdür.
> Bir ampulün ömrünü ölçmek için onu yanıp bitene kadar yakmak gerekir. Bütün ampulleri denersek satacak ampul kalmaz; üstelik kitle sonsuz olduğundan hepsini denemek zaten mümkün değildir. Bu yüzden birkaç ampul denenir ve ortalama ömür onlardan tahmin edilir.
> ■

Kitlenin tamamına ulaşamadığımızda bir kısmıyla yetiniriz.

Tanım 6.7 (Örneklem). Kitlenin belli bir özelliğini incelemek için kitleden belirli kurallara göre seçilen birimler topluluğuna **örneklem** denir. Örneklemdeki birim sayısına **örneklem hacmi** (büyüklüğü) denir ve genellikle n ile gösterilir.

Yani örneklem, kitle birimlerinin gözlenen bir alt kümesidir. Örneklem üzerinden hesaplanan sayılara (örneğin örneklem ortalamasına) **istatistik** denir; parametre kitleyi, istatistik örneklemi anlatır. Bu kavramın olasılık diliyle kesin tanımını Örneklem ve İstatistikler bölümünde vereceğiz.

Tanım 6.8 (Örnekleme). Bir kitleden örneklem seçme sürecine **örnekleme** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani örnekleme, "hangi birimleri gözleyeceğiz?" sorusunun cevabını veren yöntemdir. Örneklemden kitleye doğru bir genelleme yapabilmek için örneklemin kitleyi iyi temsil etmesi gerekir; bunun ne kadar sağlanacağı büyük ölçüde örnekleme yöntemine bağlıdır.

6.3 Örnekleme Yöntemleri

Örnekleme yöntemleri, birimlerin seçiminde olasılığın rol oynayıp oynamamasına göre iki gruba ayrılır:

Olasılığa bağlı örnekleme	Olasılığa bağlı olmayan örnekleme
Basit rastgele örnekleme	Keyfi örnekleme
Tabakalı örnekleme	Kota örneklemesi
Sistematik örnekleme	Dilim örneklemesi
Küme örneklemesi	

Tanım 6.9 (Olasılığa bağlı örnekleme). Kitledeki her birimin örnekleme girme olasılığının önceden bilindiği ve sıfırdan büyük olduğu, seçimin bir rastgele mekanizmayla (kura, rastgele sayılar) yapıldığı örneklemeye **olasılığa bağlı örnekleme** denir.

Tanım 6.10 (Olasılığa bağlı olmayan örnekleme). Birimlerin rastgele bir mekanizmayla değil, araştırmacının tercihine ya da kolaylığa göre seçildiği örneklemeye **olasılığa bağlı olmayan örnekleme** denir.

Yani ilk grupta seçimi şans yapar ve her birimin şansı hesaplanabilir; ikinci grupta seçimi bir insan yapar. Bu fark önemlidir: bu kitapta göreceğimiz tahmin ve test yöntemlerinin hepsi, örneklemin olasılığa bağlı bir yöntemle, çoğunlukla basit rastgele örneklemeyle seçildiğini varsayar. Olasılığa bağlı olmayan yöntemlerde seçim hatasının büyüklüğü olasılıkla ölçülemez.

6.3.1 Olasılığa Bağlı Yöntemler

Olasılığa bağlı yöntemlerin en temeli, bütün birimlere eşit davranan basit rastgele örneklemedir.

Tanım 6.11 (Basit rastgele örnekleme). N birimlik bir kitleden n birim, iadesiz olarak ve n birimlik her alt kümenin seçilme olasılığı aynı olacak biçimde seçiliyorsa buna **basit rastgele örnekleme** denir.

Yani $\binom{N}{n}$ tane olası örneklemin her biri $1/\binom{N}{n}$ olasılıkla seçilir. Uygulamada birimler 1'den N'ye numaralanır ve kura ya da bilgisayarın ürettiği rastgele sayılarla n numara çekilir.

Önerme 6.1 (Basit rastgele örneklemede seçilme olasılığı). *N birimlik bir kitleden basit rastgele örnekleme ile n birim seçilirse her birimin örnekleme girme olasılığı $\frac{n}{N}$'dir.*

> ***İspat.***
> *Belirli bir birimi, diyelim ki 1 numaralı birimi ele alalım. Bu birimi içeren örneklemleri sayalım: 1 numara zaten seçilmiş olduğundan geriye kalan $N-1$ birimden $n-1$ tanesini seçmek gerekir. Bunun $\binom{N-1}{n-1}$ yolu vardır.*
> *Bütün örneklemler eşit olasılıklı olduğundan istenen olasılık, uygun örneklemlerin sayısının bütün örneklemlerin sayısına oranıdır:*
>
> $$\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{(N-1)!}{(n-1)!\,(N-n)!}}{\frac{N!}{n!\,(N-n)!}} = \frac{(N-1)!n!}{(n-1)!N!} = \frac{n}{N}.$$
>
> *Son adımda $n! = n\,(n-1)!$ ve $N! = N\,(N-1)!$ eşitliklerini kullandık. Hesap hangi birimle başladığımıza bağlı olmadığından sonuç her birim için aynıdır.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 6.4 (Beş birimden iki birim). Birimleri a, b, c, d, e olan bir kitleden basit rastgele örnekleme ile 2 birim seçiliyor. Olası bütün örneklemleri yazınız ve a biriminin seçilme olasılığını bulunuz.

Çözüm.
İki elemanlı alt kümeler şunlardır:

$$\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{a,e\},\{b,c\},$$
$$\{b,d\},\{b,e\},\{c,d\},\{c,e\},\{d,e\}.$$

Bunlar $\binom{5}{2} = 10$ tanedir ve her biri $\dfrac{1}{10}$ olasılıkla seçilir. a'yı içerenler ilk satırdaki 4 tanesidir, dolayısıyla

$$P(a \text{ seçilir}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Bu sonuç, Önerme 6.1 ile bulunan $\dfrac{n}{N} = \dfrac{2}{5}$ değeriyle aynıdır.
■

Basit rastgele örneklemenin iki zayıf yanı vardır: bütün kitlenin numaralı bir listesi gerekir ve şans eseri kitlenin bazı kesimleri örnekleme hiç girmeyebilir. Aşağıdaki üç yöntem bu sorunlara çözüm getirir.

Tanım 6.12 (Tabakalı örnekleme). Kitle önce birbiriyle örtüşmeyen ve kendi içinde benzer birimlerden oluşan alt gruplara (**tabakalara**) ayrılır; sonra her tabakadan ayrı ayrı basit rastgele örnekleme ile birim seçilir. Bu yönteme **tabakalı örnekleme** denir.

Yani tabakalı örneklemede her tabakanın örneklemde temsil edilmesi garanti altına alınır. Çoğu zaman her tabakadan, tabakanın kitledeki payıyla orantılı sayıda birim seçilir (**orantılı dağıtım**): N_h birimlik bir tabakadan $n \cdot N_h/N$ birim alınır.

Tanım 6.13 (Sistematik örnekleme). N birimlik numaralı bir listeden n birim seçilecek olsun ve $k = N/n$ bir tam sayı olsun. İlk k birim arasından biri rastgele seçilir; bu birimin numarası r ise örneklem

$$r,\ r+k,\ r+2k,\ \ldots,\ r+(n-1)k$$

numaralı birimlerden oluşur. Bu yönteme **sistematik örnekleme**, k sayısına da **örnekleme aralığı** denir.

Yani yalnız ilk birim rastgele seçilir, gerisi her k birimde bir alınarak kendiliğinden belirlenir. Uygulaması çok kolaydır: bir üretim hattından her 20. ürünü almak ya da bir listede her 50. kişiyi aramak gibi. Tek tehlike, listede k ile aynı adımda tekrarlanan bir düzen varsa örneklemin bu düzene takılmasıdır.

Tanım 6.14 (Küme örneklemesi). Kitle, her biri kitleye benzeyen küçük gruplara (**kümelere**) ayrılır; kümelerden bir kısmı basit rastgele örnekleme ile seçilir ve seçilen kümelerdeki bütün birimler örnekleme alınır. Bu yönteme **küme örneklemesi** denir.

Yani tabakalı örneklemede her gruptan birkaç birim alınırken, küme örneklemesinde birkaç grubun tamamı alınır. Kümeler çoğunlukla coğrafi ya da idari birimlerdir: sınıflar, mahalleler, köyler. Kitlenin tam listesi yoksa ama kümelerin listesi varsa bu yöntem çok kullanışlıdır.

Örnek 6.5 (Aynı kitleden dört örneklem). 96 birimlik bir kitleden 12 birimlik bir örneklem seçilecektir. Birimler 1'den 96'ya numaralanmıştır. Seçimin basit rastgele, tabakalı, sistematik ve küme örneklemesiyle nasıl yapılacağını açıklayınız. Tabakalı örneklemede kitle 48, 24 ve 24 birimlik üç tabakaya, küme örneklemesinde 6 birimlik 16 kümeye ayrılmış olsun.

Çözüm.
Basit rastgele. $1, 2, \ldots, 96$ numaralarından 12 tanesi, $\binom{96}{12}$ olası seçimden her biri eşit olasılıklı olacak biçimde çekilir. Her birimin seçilme olasılığı $12/96 = 1/8$'dir.
Tabakalı. Orantılı dağıtımla tabakalardan

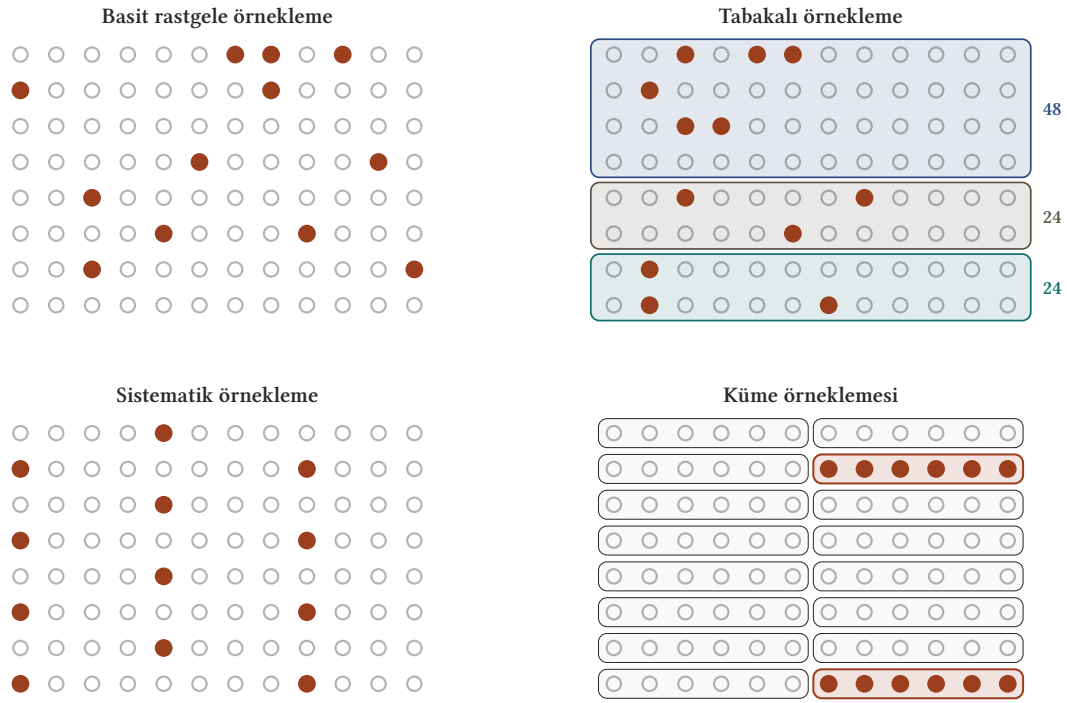
 CC BY-NC-SA 4.0

$$12 \cdot \frac{48}{96} = 6, \qquad 12 \cdot \frac{24}{96} = 3, \qquad 12 \cdot \frac{24}{96} = 3$$

birim seçilir; her tabakanın içinde seçim basit rastgeledir.
Sistematik. Örnekleme aralığı $k = 96/12 = 8$'dir. 1 ile 8 arasından rastgele bir sayı çekilir; diyelim ki $r = 5$ geldi. Örneklem

$$5, 13, 21, \ldots, 93$$

numaralı birimlerdir. Son birim $5 + 11 \cdot 8 = 93$'tür.
Küme. 16 kümeden 2 tanesi basit rastgele örnekleme ile seçilir ve bu iki kümedeki $2 \cdot 6 = 12$ birimin tamamı örnekleme alınır.
Dört seçimin birer örneği aşağıdaki şekildedir.



Şekil 6.1: 96 birimlik aynı kitleden dört olasılığa bağlı yöntemle seçilen 12 birim (dolu noktalar). Basit rastgele: her 12 birimlik alt küme eşit olasılıklı. Tabakalı: 48, 24 ve 24 birimlik tabakalardan orantılı olarak 6, 3 ve 3 birim. Sistematik: 5. birimden başlayıp her 8. birim. Küme: 6 birimlik 16 kümeden rastgele seçilen 2 kümenin bütün birimleri.

■

6.3.2 Olasılığa Bağlı Olmayan Yöntemler

Bu yöntemler hızlı ve ucuzdur, ama örneklemin kitleyi temsil edip etmediğini olasılıkla ölçemeyiz. Genellikle ön araştırmalarda ya da rastgele seçimin mümkün olmadığı durumlarda kullanılırlar.

Tanım 6.15 (Keyfi örnekleme). Birimlerin, araştırmacının en kolay ulaşabildikleri oldukları için seçildiği örneklemeye **keyfi örnekleme** denir.

Yani sokakta ilk karşılaşılan 50 kişiye anket yapmak keyfi örneklemedir. O sokaktan o saatte geçenler kitlenin tamamına benzemeyebilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 6.16 (Kota örneklemesi). Kitle cinsiyet, yaş grubu gibi özelliklere göre alt gruplara ayrılır ve her alt gruptan kaç birim alınacağı (**kota**) önceden belirlenir; kotayı dolduracak birimleri ise görüşmeci kendisi seçer. Bu yönteme **kota örneklemesi** denir.

Yani kota örneklemesi dışarıdan tabakalı örneklemeye benzer, ama gruplar içindeki seçim rastgele değildir. Bu yüzden olasılığa bağlı bir yöntem sayılmaz.

Tanım 6.17 (Dilim örneklemesi). Araştırmacının, kitle hakkındaki bilgisine ve yargısına dayanarak kitleyi en iyi temsil ettiğini düşündüğü birimleri seçtiği örneklemeye **dilim örneklemesi** denir.

Yani seçimde araştırmacının uzmanlığı belirleyicidir; örneğin bir ilin fiyat düzeyini ölçmek için "tipik" olduğu düşünülen birkaç market seçilir. Araştırmacının yargısı iyi olduğu ölçüde sonuç da iyidir, ama yanılma payı hesaplanamaz.

6.4 Merkezi Eğilim Ölçüleri

Bir veri kümesini grafikle göstermek çoğu zaman yeterli değildir; genel durumu birkaç sayıyla anlatabilmek isteriz. **Merkezi eğilim ölçüleri** verilerin hangi değer çevresinde toplandığını gösterir. Veriyi tek sayıyla özetlemelerinin yanı sıra farklı veri kümelerini karşılaştırmayı ve genelleme yapmayı da kolaylaştırırlar.
Bu ölçüler iki gruba ayrılır. **Analitik ortalamalar** (aritmetik, ağırlıklı, geometrik ve harmonik ortalama) hesapta bütün gözlem değerlerini kullanır. **Analitik olmayan ortalamalar** (medyan ve mod) ise bütün değerleri kullanmaz; sıralamaya ya da sıklığa bakar.
Bu kısım boyunca $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bir veri kümesinin gözlem değerlerini gösterecek.

6.4.1 Aritmetik Ortalama

En çok kullanılan ortalama, bütün değerleri toplayıp değer sayısına bölmektir.

Tanım 6.18 (Aritmetik ortalama). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gözlem değerlerinin **aritmetik ortalaması**

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

sayısıdır.

Yani aritmetik ortalama, toplamı n kişiye eşit paylaştırınca her birine düşen paydır: $n\bar{x} = \sum x_i$. Fizikte bir çubuğa yerleştirilmiş eşit ağırlıkların denge noktası da $\bar{x}$'tir. Bu denge yorumunu aşağıdaki özellik kesinleştirir.

Önerme 6.2 (Ortalamadan sapmaların toplamı). *Her veri kümesinde gözlemlerin aritmetik ortalamadan sapmalarının toplamı sıfırdır:*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0.$$

> ***İspat.***
> *Toplamı terim terim ayıralım. $\bar{x}$ her terimde aynı sabit olduğundan n kez toplanınca $n\bar{x}$ verir:*
>
> $$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\bar{x}.$$
>
> *Tanım gereği $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$, yani $n\bar{x} = \sum x_i$ olduğundan sağ taraf 0'dır.*
> ■

Yani ortalamanın üstünde kalan gözlemlerin toplam fazlası, altında kalanların toplam eksiğine tam olarak eşittir. Örneğin $2, 3, 7$ için $\bar{x} = 4$ ve sapmalar $-2, -1, 3$'tür; toplamları 0'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Aritmetik ortalamanın önemli bir zayıflığı, uç değerlerden kolayca etkilenmesidir. Verilerden birkaçı ötekilerden çok büyük ya da çok küçükse ortalama verinin merkezini iyi temsil etmeyebilir. Bunu medyanı tanımladıktan sonra bir örnekte göreceğiz (Örnek 6.12).

6.4.2 Ağırlıklı Ortalama

Bazen gözlem değerleri aynı önemde değildir. Bir dersin kredisi yüksekse o dersin notu genel ortalamada daha çok söz sahibi olmalıdır.

Tanım 6.19 (Ağırlıklı ortalama). $x_1, \ldots, x_n$ gözlem değerlerine sırasıyla $w_1, \ldots, w_n \geq 0$ ağırlıkları (katsayıları) verilsin ve ağırlıkların toplamı pozitif olsun. **Ağırlıklı aritmetik ortalama**

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

sayısıdır.

Yani her değer ağırlığı kadar kez sayılmış gibi davranılır. Bütün ağırlıklar eşitse ($w_i = w$) pay ve paydadaki w sadeleşir ve aritmetik ortalama geri gelir.

Örnek 6.6 (Kredili not ortalaması). Bir öğrenci kredileri 5, 3 ve 2 olan üç dersten sırasıyla 3,0, 4,0 ve 2,0 notlarını almıştır. Öğrencinin kredilerle ağırlıklandırılmış not ortalaması nedir?

> **Çözüm.**
> Ağırlıklar kredilerdir: $w_1 = 5$, $w_2 = 3$, $w_3 = 2$. Tanımdaki formülle
>
> $$\bar{x}_w = \frac{5 \cdot 3{,}0 + 3 \cdot 4{,}0 + 2 \cdot 2{,}0}{5 + 3 + 2} = \frac{15 + 12 + 4}{10} = \frac{31}{10} = 3{,}1.$$
>
> Ağırlıksız aritmetik ortalama $(3{,}0 + 4{,}0 + 2{,}0)/3 = 3{,}0$ olurdu. Ağırlıklı ortalama daha büyük çıktı, çünkü en yüksek not (4,0) ikinci büyük krediye, en düşük not (2,0) ise en küçük krediye sahip.
> ■

6.4.3 Geometrik Ortalama

Bir büyüklük her dönem bir önceki değerinin belli bir katına çıkıyorsa, yani değişim toplamsal değil çarpımsalsa, ortalama değişim hızını aritmetik ortalama yanlış verir. Böyle durumlarda geometrik ortalama kullanılır.

Tanım 6.20 (Geometrik ortalama). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif sayılarının **geometrik ortalaması**, çarpımlarının n. kökü olan

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

sayısıdır.

Yani G, bütün çarpanların yerine konduğunda aynı çarpımı veren tek sayıdır: $G^n = x_1 x_2 \cdots x_n$. Değer ardışık dönemlerde $x_1, \ldots, x_n$ katına çıkıyorsa toplam artış $x_1 x_2 \cdots x_n$ katıdır ve her dönem G katına çıksaydı da aynı sonuca varılırdı. Bu yüzden G **ortalama büyüme çarpanıdır**; ortalama büyüme oranı $G - 1$'dir.

Örnek 6.7 (Değeri artan bir eşya). 90 000 TL'ye alınan bir eşyanın değeri, satın alındıktan sonraki ilk yıl %50, ikinci yıl %20 ve üçüncü yıl %90 artmıştır. Yıllık ortalama artış yüzde kaçtır?

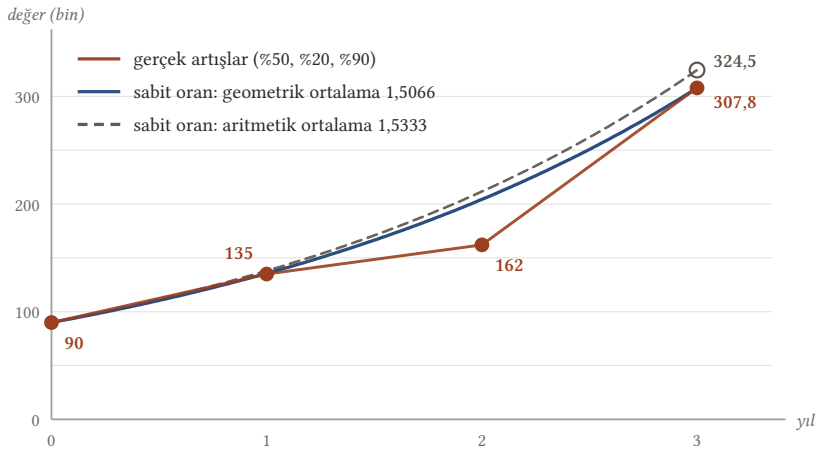
> **Çözüm.**
> Yüzde artışları büyüme çarpanlarına çevirelim: %50 artış değeri 1,5 katına, %20 artış 1,2 katına, %90 artış 1,9 katına çıkarır. Değer yıllara göre
>
> $$90\,000 \cdot 1{,}5 = 135\,000, \qquad 135\,000 \cdot 1{,}2 = 162\,000,$$
> $$162\,000 \cdot 1{,}9 = 307\,800$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Üç yılda değer $1{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}9 = 3{,}42$ katına çıkmıştır. Ortalama yıllık çarpan bu üç çarpanın geometrik ortalamasıdır:

$$G = \sqrt[3]{1{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}9} = \sqrt[3]{3{,}42} \approx 1{,}5066.$$

Yani eşyanın değeri yılda ortalama yaklaşık $\%50{,}66$ artmıştır. Sağlama: $90\,000 \cdot 1{,}5066^3 \approx 307\,800$ TL, gerçek değerle aynıdır.
Aritmetik ortalama kullansaydık çarpan $(1{,}5 + 1{,}2 + 1{,}9)/3 \approx 1{,}5333$ çıkardı ve $90\,000 \cdot 1{,}5333^3 \approx 324\,453$ TL gibi gerçekte hiç ulaşılmamış bir değer bulurduk.



Şekil 6.2: 90 bin liralık eşyanın üç yıllık değeri. Gerçek yol (kırık çizgi) ile her yıl 1,5066 katına çıkan sabit artış aynı noktada, 307,8 binde biter. Oranların aritmetik ortalaması 1,5333 ise değeri 324,5 bine çıkararak olduğundan büyük gösterir.

■

Örnek 6.8 (Şeker fiyatının ortalama artışı). 2010 yılında 1 kg toz şeker 2,25 TL iken 2018 yılında 5,15 TL olmuştur. Fiyat her yıl aynı oranda artmış sayılırsa yıllık ortalama artış oranı nedir?

Çözüm.
Yıllık artış oranı r ise fiyat her yıl $(1 + r)$ katına çıkar. Başlangıç fiyatı P_0 olmak üzere n yıl sonraki fiyat

$$P_n = P_0(1 + r)^n$$

olur. 2010'dan 2018'e $n = 8$ yıl geçmiştir:

$$2010 \to 2{,}25, \quad 2011 \to 2{,}25\,(1 + r), \quad \ldots, \quad 2018 \to 2{,}25\,(1 + r)^8.$$

$5{,}15 = 2{,}25\,(1 + r)^8$ denkleminden

$$1 + r = \sqrt[8]{\frac{5{,}15}{2{,}25}} \approx \sqrt[8]{2{,}2889} \approx 1{,}1091$$

bulunur. Burada $1 + r$, sekiz yıllık çarpanların geometrik ortalamasıdır, çünkü bu çarpanların çarpımı $5{,}15/2{,}25$'tir. Buna göre $r \approx 0{,}1091$, yani fiyat yılda ortalama yaklaşık $\%10{,}9$ artmıştır.
Toplam artışı ($\%128{,}9$) yıl sayısına bölmek yanlış olurdu: yılda $\%16{,}1$ gibi fazla büyük bir oran verir, çünkü her yılın artışı bir önceki yılın artmış fiyatı üzerine eklenir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

6.4.4 Harmonik Ortalama

Hız (km/saat), birim fiyat (TL/kg), verimlilik (parça/saat) gibi **oran** biçimindeki büyüklüklerin ortalaması alınırken, payı sabit tutulan durumlarda doğru ortalama harmonik ortalamadır.

Tanım 6.21 (Harmonik ortalama). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif sayılarının **harmonik ortalaması**, terslerinin aritmetik ortalamasının tersi olan

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

sayısıdır.

Yani önce her değerin tersi alınır, terslerin aritmetik ortalaması bulunur ve sonuç yeniden ters çevrilir. Bir yolun eşit uzunluktaki parçalarında farklı hızlarla gidiliyorsa ortalama hız bu hızların harmonik ortalamasıdır, çünkü her parçada harcanan zaman hızın tersiyle orantılıdır.

Örnek 6.9 (Gidiş-dönüş hızı). İki şehir arasındaki yol gidişte saatte 75 km, dönüşte saatte 50 km hızla alınmıştır. Bütün yolculuk boyunca ortalama hız nedir?

Çözüm.
Gidiş ve dönüş aynı uzunlukta olduğundan ortalama hız iki hızın harmonik ortalamasıdır:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{75} + \frac{1}{50}} = \frac{2}{\frac{2+3}{150}} = \frac{2 \cdot 150}{5} = 60 \ \text{ km/saat} .$$

Sonucu doğrudan "ortalama hız = toplam yol / toplam zaman" tanımıyla sağlayalım. Yol 150 km olsun (sonuç yolun uzunluğuna bağlı değildir). Gidiş $150/75 = 2$ saat, dönüş $150/50 = 3$ saat sürer. Toplam 300 km yol 5 saatte alınmıştır:

$$\frac{300}{5} = 60 \ \text{ km/saat} .$$

Aynı sonuç, hızların harcanan sürelerle ağırlıklandırılmış ortalaması olarak da okunabilir:

$$\frac{2 \cdot 75 + 3 \cdot 50}{2 + 3} = \frac{300}{5} = 60.$$

Daha yavaş gidilen dönüşte daha çok zaman geçtiği için ortalama 50'ye daha yakındır. Hızların aritmetik ortalaması $(75 + 50)/2 = 62{,}5$ ise yanlıştır, çünkü iki yarıda eşit süre geçmiş gibi davranır. ■

6.4.5 Ortalamalar Arasındaki Sıralama

Son iki örnekte aynı sayıların farklı ortalamalarını karşılaştırdık: 75 ile 50'nin aritmetik ortalaması 62,5, harmonik ortalaması 60'tır. Aradaki sıralama bir rastlantı değildir.

Teorem 6.1 (Harmonik, geometrik ve aritmetik ortalama eşitsizliği). *$x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitif sayıların harmonik, geometrik ve aritmetik ortalamaları sırasıyla H, G ve $\bar{x}$ ise*

$$H \le G \le \bar{x}$$

olur. Eşitlikler ancak $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ iken sağlanır; sayılar hepsi eşit değilse $H < G < \bar{x}$'tir.

İspat.
$G \le \bar{x}$. *Bu aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğidir.* $\ln$ *fonksiyonunun konkavlığından elde edilişi ve eşitliğin ancak bütün x_i'ler eşitken sağlandığı bkz. Analiz 2.*
$H \le G$. *Aynı eşitsizliği $y_i = \dfrac{1}{x_i} > 0$ sayılarına uygulayalım:*

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \le \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sol taraf $\sqrt[n]{\dfrac{1}{x_1x_2\cdots x_n}} = \dfrac{1}{G}$*, sağ taraf ise* $\dfrac{1}{n}\sum \dfrac{1}{x_i} = \dfrac{1}{H}$*'dir. Böylece* $\dfrac{1}{G} \le \dfrac{1}{H}$ *bulunur. İki taraf da pozitif olduğundan tersleri alınca eşitsizlik yön değiştirir:* $H \le G$*.*
Eşitlik. *İkinci adımda eşitlik ancak bütün* y_i*'ler, yani bütün* x_i*'ler eşitken olur; birinci adım için de durum aynıdır. Sayılar hepsi eşitse üç ortalama da bu ortak değere eşittir. Hepsi eşit değilse iki eşitsizlik de kesindir.*
■

Örnek 6.10 (İki sayının üç ortalaması). $a = 8$ ve $b = 2$ sayılarının aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamalarını bulunuz ve aralarındaki sıralamayı (Teorem 6.1) bir yarım çember üzerinde gösteriniz.

Çözüm.
Tanımlardan

$$\bar{x} = \frac{8+2}{2} = 5, \qquad G = \sqrt{8\cdot 2} = 4, \qquad H = \frac{2}{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{5}}{8} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

bulunur ve gerçekten $3{,}2 < 4 < 5$'tir.
Şimdi geometrik resmi kuralım. Uzunluğu $a + b = 10$ olan bir $[AB]$ çapı üzerine yarım çember çizelim; merkez O, $|\,AP\,| = a$ ve $|\,PB\,| = b$ olacak biçimde P noktası çapın üzerinde olsun. P'den çapa dik çıkılan doğru çemberi C'de kessin.

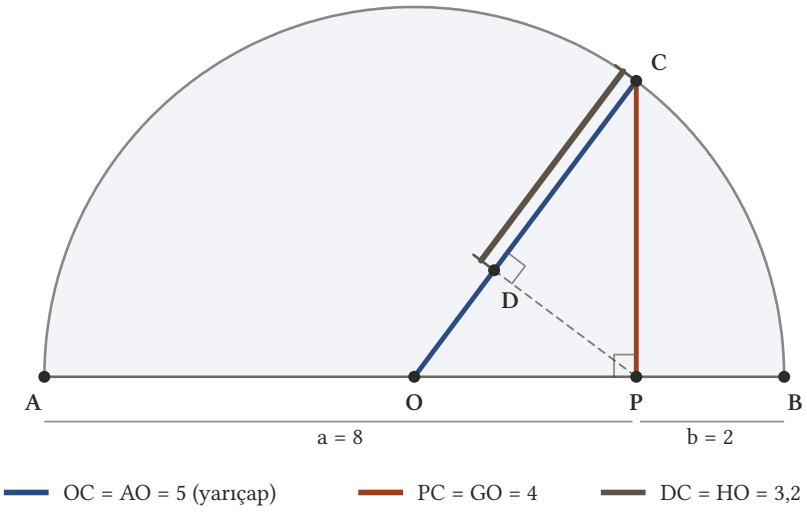
- $|\,OC\,|$ yarıçaptır: $|\,OC\,| = \dfrac{a+b}{2} = 5$, yani aritmetik ortalama.
- ACB üçgeni, çapı gören çevre açı dik olduğundan C'de diktir ve $[CP]$ bu üçgenin hipotenüse ait yüksekliğidir. Dik üçgende yükseklik bağıntısıyla $|\,PC\,|^2 = |\,AP\,|\cdot|\,PB\,| = ab$, yani $|\,PC\,| = \sqrt{ab} = 4$, geometrik ortalama.
- P'den $[OC]$'ye inilen dikmenin ayağı D olsun. OPC üçgeni P'de diktir ve $[PD]$ onun hipotenüse ait yüksekliğidir. Öklid bağıntısıyla $|\,DC\,|\cdot|\,OC\,| = |\,PC\,|^2$, dolayısıyla

  $$|\,DC\,| = \frac{ab}{(a+b)/2} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{16}{5} = 3{,}2.$$

  Öte yandan $\dfrac{2}{1/a+1/b} = \dfrac{2ab}{a+b}$ olduğundan $|\,DC\,|$ harmonik ortalamadır.

Dik üçgende hipotenüs her dik kenardan uzundur. PDC üçgeninde hipotenüs $[PC]$ olduğundan $|\,DC\,| \le |\,PC\,|$, OPC üçgeninde hipotenüs $[OC]$ olduğundan $|\,PC\,| \le |\,OC\,|$ olur. Böylece $H \le G \le \bar{x}$ sıralaması şekilden okunur. P merkeze yaklaştıkça (a ile b eşitlendikçe) üç uzunluk da yarıçapa yaklaşır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.3: Çapı a + b = 10 olan yarım çember. Yarıçap OC aritmetik ortalamadır (5). P'deki dikme PC, dik üçgendeki yükseklik bağıntısından √(ab) = 4 uzunluğundadır. P'den OC'ye inilen dikmenin ayağı D için DC = PC²/OC = 16/5 = 3,2 harmonik ortalamadır (OC üzerindeki parça, görünsün diye yanına çizildi). Dik üçgende hipotenüs dik kenardan uzun olduğundan DC ≤ PC ≤ OC.

■

6.4.6 Medyan

Analitik olmayan ortalamalar bütün değerleri hesaba katmaz. Bunların ilki verileri sıraya dizip tam ortadakine bakar. Bunun için gözlem değerlerini küçükten büyüğe sıralayıp

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le \cdots \le x_{(n)}$$

yazalım; $x_{(k)}$, sıralanmış verideki k. değerdir. Örneğin $5, 2, 9$ için $x_{(1)} = 2$, $x_{(2)} = 5$, $x_{(3)} = 9$'dur.

Tanım 6.22 (Medyan). Büyüklüğüne göre sıralanmış gözlemlerin tam ortasındaki değere **medyan** (ortanca, orta değer) denir:

$$M = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & n \text{ tek ise,} \\ \frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & n \text{ çift ise .} \end{cases}$$

Yani n tekse tam ortada tek bir gözlem vardır ve medyan odur; n çiftse ortada iki gözlem vardır ve medyan bu ikisinin aritmetik ortalamasıdır. Her iki durumda da gözlemlerin en az yarısı M'den küçük ya da ona eşit, en az yarısı M'den büyük ya da ona eşittir.

Örnek 6.11 (Tek sayıda gözlemin medyanı). Yedi ölçümün sonuçları 12, 5, 9, 14, 7, 10, 8'dir. Medyanı bulunuz.

Çözüm.
Önce sıralayalım:

$$5, 7, 8, 9, 10, 12, 14.$$

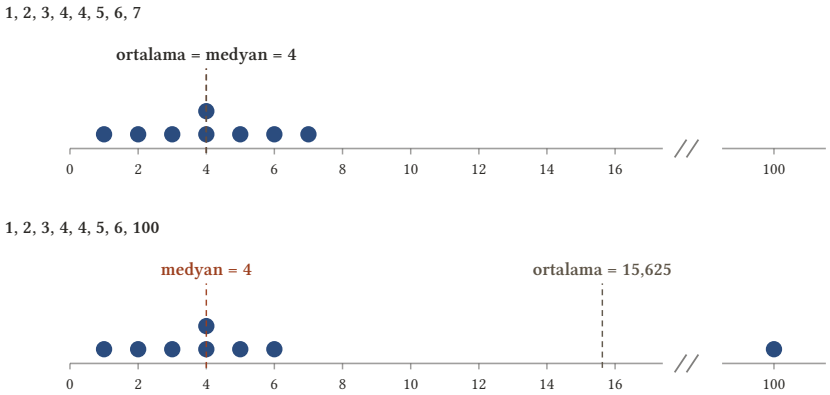
$n = 7$ tek olduğundan medyan $\frac{7+1}{2} = 4$. sıradaki değerdir: $M = x_{(4)} = 9$. Solunda ve sağında üçer gözlem vardır.
■

Örnek 6.12 (Uç değerin ortalamaya ve medyana etkisi). $1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7$ verisinin en büyük değeri 7 yerine yanlışlıkla 100 yazılmıştır. Bu hata aritmetik ortalamayı ve medyanı nasıl değiştirir?

Çözüm.
Doğru veride $n = 8$ ve toplam 32'dir, dolayısıyla $\bar{x} = 32/8 = 4$'tür. n çift olduğundan medyan 4. ve 5. değerlerin ortalamasıdır: $M = (4 + 4)/2 = 4$.
Hatalı veri $1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 100$ olur. Toplam 125'e çıkar ve

$$\bar{x} = \frac{125}{8} = 15{,}625$$

bulunur. Sıralı veride 4. ve 5. değerler değişmediği için medyan yine $M = (4 + 4)/2 = 4$'tür.
Tek bir değerin değişmesi ortalamayı yaklaşık dört katına çıkardı, medyanı ise hiç etkilemedi. Ortalama, tanımı gereği her değeri hesaba kattığı için uç değere çekilir; hatta hatalı veride sekiz gözlemden yedisi ortalamanın altında kalır. Medyan yalnız sıralamaya baktığından uç değerlere karşı **dayanıklıdır**. Gelir, konut fiyatı gibi birkaç çok büyük değer içeren verilerde merkezi göstermek için bu yüzden çoğunlukla medyan tercih edilir.



Şekil 6.4: Üstte sekiz gözlemin ortalaması ve medyanı 4'tür. Altta en büyük gözlem 7 yerine 100 olunca medyan yine 4 kalır, ortalama ise 15,625'e fırlar: aritmetik ortalama tek bir uç değere çok duyarlıdır. Eksendeki kırık, 17 ile 98 arasının atlandığını gösterir.

■

6.4.7 Mod

İkinci analitik olmayan ortalama, veride en çok tekrarlanan değere bakar.

Tanım 6.23 (Mod). Bir veri kümesinde en sık gözlenen değere **mod** (tepe değer) denir.

Yani mod, frekansı en büyük olan değerdir. En büyük frekansa birden çok değer sahipse bunların hepsi moddur; mod tek olmak zorunda değildir. Her değer yalnızca bir kez gözlenmişse hiçbir değer ötekilerden sık değildir ve veri kümesinin **modu yoktur**. Mod sayısal olmayan veriler için de anlamlıdır: bir kan grubu listesinin modu en sık görülen kan grubudur.

Örnek 6.13 (Ayakkabı numaralarının modu). On beş öğrencinin ayakkabı numaraları şöyledir:

$$36, 37, 37, 38, 38, 38, 39, 39, 40, 40, 40, 41, 42, 42, 43.$$

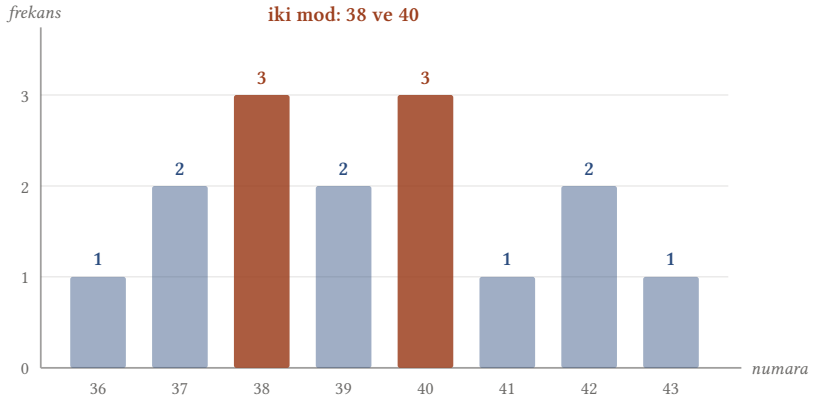
Bu verinin modu nedir?

Çözüm.
Her numaranın kaç kez geçtiğini sayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

Numara	36	37	38	39	40	41	42	43
Frekans	1	2	3	2	3	1	2	1

Frekansların toplamı 15'tir. En büyük frekans 3'tür ve iki numarada görülür. Veri kümesinin iki modu vardır: 38 ve 40. Bir ayakkabı mağazası için bu bilgi ortalamadan daha kullanışlıdır: en çok bu iki numaradan stok tutmak gerekir.



Şekil 6.5: On beş öğrencinin ayakkabı numaralarının frekansları. En yüksek frekans 3'tür ve iki değerde görülür; veri kümesinin 38 ve 40 olmak üzere iki modu vardır.

■

6.5 Dağılım Ölçüleri

Merkezi eğilim ölçüleri birimlerin aldığı değerler hakkında genel bir bilgi verir, ama birimlerin birbirinden ne ölçüde farklı olduğunu söylemez. Ortalamaları aynı olan iki veri kümesi çok farklı görünebilir. Değerlerin ne kadar yayıldığını ölçmek için **dağılım ölçüleri** kullanılır: açıklık, varyans ve standart sapma, ortalama mutlak sapma, değişim katsayısı ve çeyrekliklere dayanan ölçüler.
En basit yayılım ölçüsüyle başlayalım.

Tanım 6.24 (Açıklık). Bir veri kümesinin en büyük ve en küçük değerleri arasındaki farka **açıklık** (değişim aralığı) denir: $R = x_{(n)} - x_{(1)}$.

Yani açıklık, verinin kapladığı aralığın uzunluğudur. Hesabı kolaydır ama yalnız iki değere bakar; tek bir uç değer açıklığı çok büyütebilir.

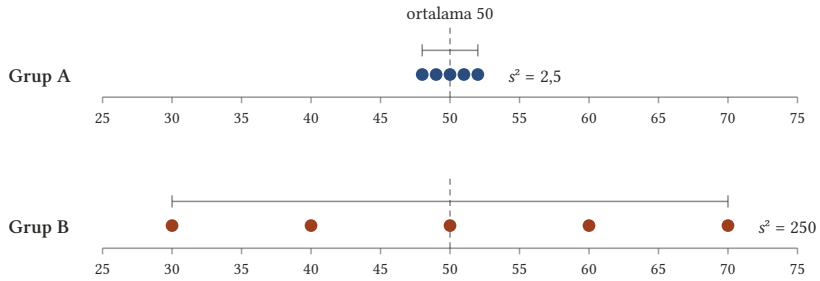
Örnek 6.14 (Aynı ortalama, farklı yayılım). A grubunun gözlemleri $48, 49, 50, 51, 52$, B grubunun-kiler $30, 40, 50, 60, 70$'tir. İki grubun ortalamalarını ve açıklıklarını karşılaştırınız.

Çözüm.
Ortalamalar

$$\bar{x}_A = \frac{48+49+50+51+52}{5} = \frac{250}{5} = 50,$$
$$\bar{x}_B = \frac{30+40+50+60+70}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

olup eşittir. Açıklıklar ise $R_A = 52 - 48 = 4$ ve $R_B = 70 - 30 = 40$'tır. Ortalamaya bakan biri iki grubu aynı sanır; oysa B'nin gözlemleri A'nınkilerden on kat geniş bir aralığa yayılmıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.6: İki grubun ortalaması da 50'dir, ama A'nın gözlemleri 48 ile 52 arasında sıkışmışken B'ninkiler 30 ile 70 arasına yayılır. Ortalama bu farkı göremez; örneklem varyansı A için 2,5, B için 250'dir.

■

6.5.1 Varyans ve Standart Sapma

Yayılımı bütün gözlemleri kullanarak ölçmenin doğal yolu, gözlemlerin ortalamadan sapmalarına bakmaktır. Sapmaların kendisini toplamak işe yaramaz, çünkü Önerme 6.2 gereği toplamları hep sıfırdır. Sapmaların karelerini toplarsak artı ve eksi sapmalar birbirini götürmez. Burada kitlenin tamamına mı yoksa bir örnekleme mi baktığımız fark eder.

Tanım 6.25 (Kitle ortalaması ve kitle varyansı). Hacmi N olan sonlu bir kitlenin değerleri $x_1, x_2, \ldots, x_N$ olsun. **Kitle ortalaması** μ ve **kitle varyansı** σ^2

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$$

ile tanımlanır. $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ sayısına **kitle standart sapması** denir.

Yani kitle varyansı, sapma karelerinin ortalamasıdır. Kitleden bir birim eşit olasılıkla ($1/N$ olasılıkla) rastgele seçilir ve değeri X ile gösterilirse, X kesikli bir rastgele değişkendir ve μ ile σ^2 tam olarak onun beklenen değeri ve varyansıdır: $E(X) = \mu$, $\mathrm{Var}\,(X) = \sigma^2$. Kitle parametreleriyle rastgele değişkenlerin momentleri arasındaki köprü budur.

Tanım 6.26 (Örneklem ortalaması ve örneklem varyansı). Bir kitleden seçilen n hacimli bir örneklemin gözlem değerleri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ olsun. **Örneklem ortalaması** $\bar{x}$ ve **örneklem varyansı** s^2

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

ile tanımlanır. $s = \sqrt{s^2}$ sayısına **örneklem standart sapması** denir.

Yani μ kitleye, $\bar{x}$ örnekleme ait aritmetik ortalamadır; σ^2 ile s^2 arasındaki ilişki de böyledir. Örneklem varyansında paydada n yerine $n-1$ bulunur. Bunun nedeni, gözlemler bağımsız ve aynı dağılımlıyken (kitle sonsuz sayıldığında ya da seçim iadeli yapıldığında) s^2'nin bilinmeyen σ^2'yi ortalamada doğru tahmin etmesidir; n ile bölmek σ^2'yi sistematik olarak küçük tahmin eder. Bu sonucu Tahmin Edicilerin Özellikleri bölümünde yansızlık kavramıyla birlikte ispatlayacağız. Standart sapma, verilerle aynı birimde olduğu için (varyans ise birimin karesiyle ölçüldüğü için) yorumu daha kolaydır.
Varyansı elle hesaplarken sapmaları tek tek bulmak yorucu olabilir. Aşağıdaki özdeşlik hesabı kısaltır.

Önerme 6.3 (Sapma kareleri toplamı için kısa yol). *Her veri kümesi için*

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2$$

olur. Aynı özdeşlik $\bar{x}$ yerine μ, n yerine N yazılarak kitle için de geçerlidir.

İspat.
Kareyi açalım: $(x_i-\bar{x})^2 = x_i^2 - 2\bar{x}\,x_i + \bar{x}^{\,2}$. Bunu $i=1,\dots,n$ için toplarsak, $\bar{x}$ sabit olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i + n\,\bar{x}^{\,2}$$

olur. $\sum x_i = n\bar{x}$ olduğundan ortadaki terim $-2\bar{x}\cdot n\bar{x} = -2n\,\bar{x}^{\,2}$'dir ve

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2n\,\bar{x}^{\,2} + n\,\bar{x}^{\,2} = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - n\,\bar{x}^{\,2}$$

bulunur.
■

Örnek 6.15 (Küçük bir kitlenin varyansı). Dört daireli bir apartmanın dairelerinin aylık su tüketimleri (m³) $2, 4, 6, 8$'dir. Apartmanın bütün daireleri kitleyi oluşturmaktadır. Kitle ortalamasını, kitle varyansını ve kitle standart sapmasını bulunuz.

Çözüm.
Kitle hacmi $N=4$'tür. Ortalama

$$\mu = \frac{2+4+6+8}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

ve sapmalar $-3, -1, 1, 3$'tür. Sapma kareleri $9, 1, 1, 9$ olup toplamları 20'dir. Kitle varyansında N'ye böleriz:

$$\sigma^2 = \frac{20}{4} = 5, \qquad \sigma = \sqrt{5} \approx 2{,}236 \text{ m}^3.$$

Aynı dört değer bir kitleden seçilmiş bir örneklem olsaydı $n-1=3$'e bölerdik ve $s^2 = 20/3 \approx 6{,}667$ bulurduk. Hangi formülün kullanılacağı, değerlerin kitlenin tamamı mı yoksa bir örneklem mi olduğuna bağlıdır.
■

Örnek 6.16 (B grubunun örneklem varyansı). B grubunun $30, 40, 50, 60, 70$ gözlemleri (Örnek 6.14) bir örneklem olsun. Örneklem varyansını ve standart sapmasını tanımdan hesaplayınız.

Çözüm.
$\bar{x}_B = 50$ bulunmuştu. Sapmalar ve kareleri şöyledir:

x_i	30	40	50	60	70
$x_i-\bar{x}$	-20	-10	0	10	20
$(x_i-\bar{x})^2$	400	100	0	100	400

Sapmaların toplamı 0'dır (Önerme 6.2). Sapma karelerinin toplamı 1000'dir ve $n-1=4$'e bölünür:

$$s_B^2 = \frac{1000}{4} = 250, \qquad s_B = \sqrt{250} \approx 15{,}81.$$

■

Örnek 6.17 (A grubunun örneklem varyansı). A grubunun $48, 49, 50, 51, 52$ gözlemleri (Örnek 6.14) bir örneklem olsun. Örneklem varyansını kısa yolla (Önerme 6.3) hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$\bar{x}_A = 50$ bulunmuştu. Karelerin toplamı

$$48^2 + 49^2 + 50^2 + 51^2 + 52^2 = 2304 + 2401 + 2500 + 2601 + 2704 = 12\,510$$

ve $n\,\bar{x}^{\,2} = 5 \cdot 50^2 = 12\,500$'dür. Kısa yolla sapma kareleri toplamı $12\,510 - 12\,500 = 10$ bulunur. Buradan

$$s_A^2 = \frac{10}{4} = 2{,}5, \qquad s_A = \sqrt{2{,}5} \approx 1{,}58.$$

B grubunun varyansı (250) A'nınkinin 100 katı, standart sapması 10 katıdır. Bu, gözlemlerin ortalamadan uzaklığının B'de on kat büyük olmasıyla uyumludur.
■

6.5.2 Ortalama Mutlak Sapma

Sapmaların birbirini götürmesini engellemenin ikinci yolu, kare yerine mutlak değer almaktır.

Tanım 6.27 (Ortalama mutlak sapma). $x_1, \ldots, x_n$ gözlemlerinin aritmetik ortalamadan sapmalarının mutlak değerlerinin ortalamasına **ortalama mutlak sapma** denir:

$$\mathrm{OMS} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left| \, x_i - \bar{x} \, \right| .$$

Yani ortalama mutlak sapma, bir gözlemin ortalamadan tipik olarak ne kadar uzakta olduğunu verinin kendi biriminde doğrudan söyler. Varyans büyük sapmaları karesiyle cezalandırır, ortalama mutlak sapma ise her sapmayı büyüklüğü kadar sayar.

Örnek 6.18 (İki grubun ortalama mutlak sapması). A $(48, 49, 50, 51, 52)$ ve B $(30, 40, 50, 60, 70)$ gruplarının (Örnek 6.14) ortalama mutlak sapmalarını bulunuz.

Çözüm.
İki grupta da $\bar{x} = 50$'dir. A grubunda sapmaların mutlak değerleri $2, 1, 0, 1, 2$'dir:

$$\mathrm{OMS}_A = \frac{2 + 1 + 0 + 1 + 2}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

B grubunda sapmaların mutlak değerleri $20, 10, 0, 10, 20$'dir:

$$\mathrm{OMS}_B = \frac{20 + 10 + 0 + 10 + 20}{5} = \frac{60}{5} = 12.$$

A grubunda bir gözlem ortalamadan ortalama 1,2 birim, B grubunda 12 birim uzaktadır.
■

6.5.3 Değişim Katsayısı

Standart sapma verinin birimiyle ölçülür. Bu yüzden ortalamaları çok farklı olan ya da farklı birimlerle ölçülen iki veri kümesinin yayılımını standart sapmayla karşılaştırmak yanıltıcı olabilir: ortalaması 10 olan bir veride 2 birimlik sapma büyüktür, ortalaması 1000 olan bir veride küçüktür.

Tanım 6.28 (Değişim katsayısı). Ortalaması pozitif olan bir veri kümesinin standart sapmasının ortalamasına oranına **değişim katsayısı** denir:

$$\mathrm{DK} = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad \text{(örneklem)}, \qquad \mathrm{DK} = \frac{\sigma}{\mu} \cdot 100\% \quad \text{(kitle)}.$$

Yani değişim katsayısı yayılımı ortalamaya göre, yüzde olarak ölçer ve birimden bağımsızdır. Değişim katsayısı küçük olan veri kümesi daha **homojendir** (birimleri birbirine daha çok benzer).

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 6.19 (Hangi grup daha homojen?). A ve B kitlelerinin varyansları eşittir: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = 3$. A'nın ortalaması $\mu_A = 10$, B'ninki $\mu_B = 50$'dir. Hangi kitle daha homojendir?

Çözüm.
Standart sapmalar eşittir: $\sigma_A = \sigma_B = \sqrt{3} \approx 1{,}732$. Yalnız buna bakarak iki kitlenin eşit homojen olduğunu söylemek yanlış olur. Değişim katsayıları

$$\mathrm{DK}_A = \frac{\sqrt{3}}{10} \cdot 100\% \approx \%17{,}32, \qquad \mathrm{DK}_B = \frac{\sqrt{3}}{50} \cdot 100\% \approx \%3{,}46$$

bulunur. B'de ortalamaya göre yayılım beş kat küçüktür; B kitlesi daha homojendir.
■

6.6 Konum Ölçüleri: Yüzdelikler ve Çeyreklikler

Medyan veriyi iki eşit parçaya bölüyordu. Aynı fikri başka oranlara genelleştirerek bir değerin veri kümesi içindeki göreli konumunu anlatan ölçüler elde ederiz: "bu değerin altında verilerin yüzde kaçı var?"

Tanım 6.29 (Yüzdelik). $0 < P < 100$ olsun. Sıralanmış veride gözlemlerin yaklaşık $\%P$'sinin kendisinden küçük, $\%(100-P)$'sinin kendisinden büyük olduğu değere $\boldsymbol{P}$**. yüzdelik** denir ve Y_P ile gösterilir. n gözlemli bir veride Y_P'nin sıralı veri içindeki **konumu**

$$L_P = (n+1)\frac{P}{100}$$

ile belirlenir:

- L_P bir tam sayıysa $Y_P = x_{(L_P)}$'dir.
- $L_P = k + d$ ise (k tam sayı, $0 < d < 1$) Y_P, $x_{(k)}$ ile $x_{(k+1)}$ arasında doğrusal olarak bulunur: $Y_P = x_{(k)} + d\left(\, x_{(k+1)} - x_{(k)} \,\right)$.
- $L_P < 1$ ise $Y_P = x_{(1)}$, $L_P > n$ ise $Y_P = x_{(n)}$ alınır.

Yani konum formülü, Y_P'nin sıralı veride kaçıncı sırada durduğunu söyler; sıra numarası tam çıkmazsa iki komşu gözlemin arasına orantılı olarak yerleşiriz. Yüzdelikler için bundan biraz farklı konum kuralları da kullanılır; büyük veride farklar önemsizdir.

Tanım 6.30 (Çeyreklikler). Sıralanmış veriyi dört eşit parçaya bölen üç değere **çeyreklikler** (çeyrek değerler, dörtte birlikler) denir:

- **Birinci çeyreklik** $Q_1 = Y_{25}$: verilerin $\%25$'ini solunda (altında), $\%75$'ini sağında (üstünde) bırakan değerdir.
- **İkinci çeyreklik** $Q_2 = Y_{50}$: medyandır.
- **Üçüncü çeyreklik** $Q_3 = Y_{75}$: verilerin $\%75$'ini solunda, $\%25$'ini sağında bırakan değerdir.

Yani çeyreklikler sıralı veriyi, her birinde gözlemlerin yaklaşık dörtte biri bulunan dört parçaya ayırır. Konumları $L_{25} = \frac{n+1}{4}$, $L_{50} = \frac{n+1}{2}$ ve $L_{75} = \frac{3(n+1)}{4}$'tür. Q_2 gerçekten medyanla aynıdır: n tekse $L_{50} = \frac{n+1}{2}$ bir tam sayıdır; n çiftse $L_{50} = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$ olduğundan Q_2 iki ortadaki gözlemin tam ortasına, yani aritmetik ortalamalarına düşer.

Tanım 6.31 (Çeyrekler arası açıklık ve çeyrek ayrılış). $\mathrm{ÇAA} = Q_3 - Q_1$ farkına **çeyrekler arası açıklık**, bunun yarısı olan $\mathrm{ÇA} = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ sayısına **çeyrek ayrılış** (çeyrek sapma) denir.

Yani çeyrekler arası açıklık, gözlemlerin ortadaki yarısının kapladığı aralığın uzunluğudur. En küçük ve en büyük değerlere bakmadığı için açıklığın aksine uç değerlerden etkilenmez; medyanın yanında kullanılan dayanıklı bir yayılım ölçüsüdür.

Örnek 6.20 (On gözlemin çeyreklikleri). Bir kafede on gün boyunca satılan tatlı sayıları sıralı olarak şöyledir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$12,\ 15,\ 17,\ 20,\ 22,\ 25,\ 28,\ 30,\ 34,\ 41.$$

Q_1, Q_2 ve Q_3 çeyreklikliklerini bulunuz.

Çözüm.
$n = 10$ olduğundan $n + 1 = 11$'dir.
Q_1. Konum $L_{25} = 11 \cdot 0{,}25 = 2{,}75$'tir. Yani Q_1, 2. ve 3. gözlemler arasında, 2.'den itibaren aradaki farkın $0{,}75$'i kadar ötededir:

$$Q_1 = x_{(2)} + 0{,}75\left(\, x_{(3)} - x_{(2)} \,\right) = 15 + 0{,}75 \cdot 2 = 16{,}5.$$

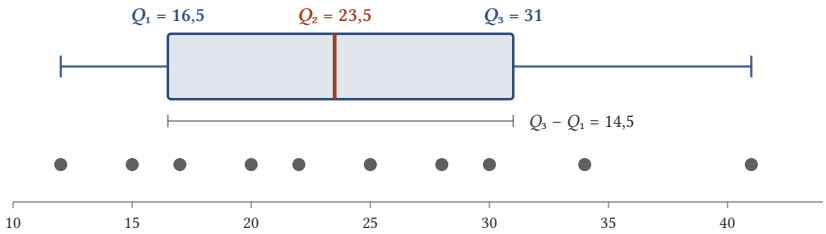
Q_2. Konum $L_{50} = 11 \cdot 0{,}5 = 5{,}5$'tir:

$$Q_2 = x_{(5)} + 0{,}5\left(\, x_{(6)} - x_{(5)} \,\right) = 22 + 0{,}5 \cdot 3 = 23{,}5.$$

Bu, medyan tanımının verdiği $(22 + 25)/2 = 23{,}5$ ile aynıdır.
Q_3. Konum $L_{75} = 11 \cdot 0{,}75 = 8{,}25$'tir:

$$Q_3 = x_{(8)} + 0{,}25\left(\, x_{(9)} - x_{(8)} \,\right) = 30 + 0{,}25 \cdot 4 = 31.$$

Aşağıdaki **kutu grafiği** bu sonuçları özetler: kutu Q_1'den Q_3'e uzanır, içindeki çizgi medyandır, kutunun iki yanındaki çizgiler (bıyıklar) en küçük ve en büyük gözleme kadar gider.



Şekil 6.7: On gözlem (alttaki noktalar) ve çeyreklikleri. Kutu Q1 = 16,5 ile Q3 = 31 arasındadır ve gözlemlerin ortadaki yarısını taşır; içindeki çizgi medyandır (Q2 = 23,5). Bıyıklar en küçük (12) ve en büyük (41) gözleme uzanır. Kutunun genişliği çeyrekler arası açıklıktır.

■

Örnek 6.21 (Çeyrekler arası açıklık). Tatlı satışlarının (Örnek 6.20) çeyrekler arası açıklığını ve çeyrek ayrılışını bulunuz. Son gün 41 yerine 90 tatlı satılsaydı bu ölçüler ve açıklık nasıl değişirdi?

Çözüm.
$Q_1 = 16{,}5$ ve $Q_3 = 31$ bulunmuştu. Buna göre

$$\text{ÇAA} = 31 - 16{,}5 = 14{,}5, \qquad \text{ÇA} = \frac{14{,}5}{2} = 7{,}25.$$

Günlerin ortadaki yarısının satışları 14,5 tatlılık bir aralığa sığar.
En büyük gözlem 41 yerine 90 olsa Q_1 ve Q_3'ün hesabında kullanılan $x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(8)}, x_{(9)}$ değişmez; ÇAA ve ÇA aynı kalır. Açıklık ise $41 - 12 = 29$'dan $90 - 12 = 78$'e çıkar. Tek bir uç değer açıklığı iki katından fazla büyütür ama çeyrekler arası açıklığı etkilemez.
■

Örnek 6.22 (Doksanıncı yüzdelik). Tatlı satışlarının (Örnek 6.20) 90. yüzdeliğini bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Konum $L_{90} = 11 \cdot \dfrac{90}{100} = 9{,}9$'dur. Yani Y_{90}, 9. ve 10. gözlemler arasında, 9.'dan itibaren farkın $0{,}9$'u kadar ötededir:

$$Y_{90} = x_{(9)} + 0{,}9\left(x_{(10)} - x_{(9)} \right) = 34 + 0{,}9 \cdot 7 = 40{,}3.$$

Günlerin yaklaşık %90'ında 40,3'ten az tatlı satılmıştır.
■

Bu bölümde veriyi kitle–örneklem ayrımıyla düşünmeyi ve birkaç sayıyla özetlemeyi öğrendik. Şimdiye kadar $\bar{x}$ ve s^2 bizim için elimizdeki verinin sabit sayılarıydı. Oysa başka bir örneklem seçseydik başka değerler bulurduk; yani örneklem ortalaması da örneklemden örnekleme değişen bir rastgele değişkendir. Bir sonraki bölüm Örneklem ve İstatistikler, örneklemi rastgele değişkenlerle modelleyerek bu değişkenliği olasılık diliyle incelemeye başlıyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

7. Örneklem ve İstatistikler

İstatistikte asıl merak ettiğimiz şey kitlenin kendisidir: bir ülkedeki bütün yetişkinlerin ortalama boyu, bir fabrikanın ürettiği bütün ampullerin ömrü. Kitlenin tamamını ölçmek çoğu zaman olanaksızdır; bu yüzden kitleden birkaç birim seçer, onları ölçer ve bu ölçümlerden kitle hakkında sonuç çıkarırız. İstatistiğe Giriş bölümünde kitle, örneklem ve parametre kavramlarını sözel olarak tanıdık. Bu bölümde aynı kavramlara olasılık diliyle kesin bir biçim veriyor, ardından en önemli istatistik olan örneklem ortalamasının davranışını inceliyoruz.

7.1 Örneklem ve Örneklem Uzayı

Kitlede incelediğimiz özellik (boy, ömür, puan) rastgele seçilen bir birim için bir rastgele değişkendir. Örneklemi, bu değişkenin birbirini etkilemeyen kopyaları olarak düşüneceğiz.

Tanım 7.1 (Örneklem). Kitledeki tek bir özelliğin ölçümüne karşılık gelen rastgele değişken X olsun. Her biri X ile aynı dağılıma sahip ve birbirinden bağımsız $X_1, X_2, ..., X_n$ rastgele değişkenlerine ya da $(X_1, X_2, ..., X_n)$ rastgele vektörüne ***n* birimlik (rastgele) örneklem** denir. n sayısına **örneklem hacmi** (örneklem büyüklüğü) denir.

Yani X_i, i-inci seçilecek birimde yapılacak ölçümdür. Ölçüm henüz yapılmadığı için değeri belli değildir; bu yüzden bir rastgele değişkendir. "Aynı dağılım" her ölçümün aynı kitleden geldiğini, "bağımsızlık" ise bir ölçümün sonucunun diğerlerini etkilemediğini söyler. X'in dağılımına **kitle dağılımı** diyeceğiz. Bağımsızlığın (Olasılık Teorisi'ndeki tanım) sonlu bir kitleden iadesiz çekilişte bozulduğunu aşağıda göreceğiz; o durumda da seçilen birimlerin değerlerine, alışılageldiği gibi, örneklem demeye devam edeceğiz.

Tanım 7.2 (Gözlem Değerleri). Ölçüm yapıldıktan sonra $X_1, X_2, ..., X_n$ örnekleminin aldığı $x_1, x_2, ..., x_n$ sayılarına **gözlem değerleri** ya da kısaca **örnek** denir.

Yani büyük harf (X_i) ölçümden önceki belirsiz niceliği, küçük harf (x_i) ölçümden sonra elimize geçen sayıyı gösterir. Aynı kitleden ikinci kez örneklem alırsak X_i'ler aynı kalır ama gözlem değerleri büyük olasılıkla değişir.

Tanım 7.3 (Örneklem Uzayı). Elde edilebilecek bütün $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ gözlem noktalarının kümesine **örneklem uzayı** denir ve $\Xi \subset \mathbb{R}^n$ ile gösterilir.

Yani örneklem uzayı, $(X_1, ..., X_n)$ vektörünün alabileceği bütün değerlerin kümesidir; her gözlem bu kümenin bir noktasıdır.

Örnek 7.1 (Üç Zar Atışından Oluşan Örneklem). Hilesiz bir zar üç kez atılsın ve X_i, i-inci atışta gelen sayı olsun. Atışlar birbirini etkilemediği ve her atışta $1, ..., 6$ sayılarının her biri $\frac{1}{6}$ olasılıkla geldiği için (X_1, X_2, X_3), kitle dağılımı $\{1, ..., 6\}$ üzerinde kesikli düzgün dağılım olan 3 birimlik bir örneklemdir. Örneklem uzayı

$$\Xi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3 \subset \mathbb{R}^3$$

kümesidir ve $6^3 = 216$ noktadan oluşur. Atışlar sırasıyla 2, 5, 5 gelirse gözlem değerleri $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 5$ olur; bu, Ξ'nin $(2, 5, 5)$ noktasıdır.

7.2 İstatistik

Örneklemden kitle hakkında bilgi çıkarmak için gözlemleri bir formülde birleştiririz: toplarız, ortalamasını alırız, en büyüğünü seçeriz. Bu formüllerin tek şartı, gözlemler geldiğinde gerçekten hesaplanabilmeleridir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 7.4 (İstatistik). $X_1, X_2, ..., X_n$ örnekleminin bilinmeyen parametre içermeyen herhangi bir $T = T(X_1, X_2, ..., X_n)$ fonksiyonuna **örneklem istatistiği** ya da kısaca **istatistik** denir.

Yani istatistik, gözlem değerleri elimize geçer geçmez sayısal değeri hesaplanabilen bir formüldür. Örneğin $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $\max\{X_1, ..., X_n\}$ ve yalnızca X_1 birer istatistiktir. Kitle ortalaması μ bilinmiyorsa $\bar{X} - \mu$ bir istatistik değildir, çünkü gözlemler gelse bile μ bilinmeden değeri hesaplanamaz. Bir örneklemle sonsuz çoklukta istatistik tanımlanabilir.
Bir istatistik örneklemin fonksiyonu olduğundan kendisi de bir rastgele değişkendir: örneklem değiştikçe değeri değişir. Bu değişimi dağılımıyla betimleriz.

Tanım 7.5 (Örnekleme Dağılımı). Bir T istatistiğinin olasılık dağılımına T'nin **örnekleme dağılımı** denir.

Yani örnekleme dağılımı, aynı kitleden aynı hacimde örneklemler tekrar tekrar alındığında T'nin hangi değerleri hangi olasılıklarla aldığını söyler. Bölümün ilerleyen kısmında bir sonlu kitlede bu dağılımı bütün örneklemleri sayarak kuracağız.
Bazı istatistikler o kadar sık kullanılır ki özel adları vardır.

Tanım 7.6 (Örneklem Ortalaması). $X_1, X_2, ..., X_n$ örnekleminin **örneklem ortalaması**

$$\bar{X} = \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

istatistiğidir.

Tanım 7.7 (Örneklem Varyansı). $X_1, X_2, ..., X_n$ örnekleminin ($n \geq 2$) **örneklem varyansı**

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

istatistiğidir.

Tanım 7.8 (Örneklem Momenti). $k = 1, 2, 3, ...$ için $X_1, X_2, ..., X_n$ örnekleminin ***k*-inci örneklem momenti**

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$$

istatistiğidir.

Yani $\bar{X}$ gözlemlerin merkezini, S^2 gözlemlerin bu merkez çevresindeki yayılımını ölçer; M_k ise gözlemlerin k-inci kuvvetlerinin ortalamasıdır. İstatistiğe Giriş bölümünde bir veri kümesi için hesapladığımız aritmetik ortalama ve örneklem varyansı, bu istatistiklerin gözlem değerlerindeki değerleridir. S^2'de n yerine $n-1$ ile bölmenin nedenini aşağıdaki bir örnekte somut olarak göreceğiz; genel açıklama Tahmin Edicilerin Özellikleri bölümündedir.
Birinci örneklem momenti örneklem ortalamasıdır: $M_1 = \bar{X}$. İkinci moment ise ortalamanın karesi değildir. M_2 önce kareleri alıp sonra ortalar, $\bar{X}^2$ önce ortalayıp sonra karesini alır:

$$M_2 = \frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}, \qquad \bar{X}^2 = \left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)^2.$$

İkisi arasındaki fark tam olarak yayılımı verir.

Önerme 7.1 (Örneklem Varyansının Hesap Formülü). *$n \geq 2$ için*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve dolayısıyla

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\left(M_2 - \bar{X}^2\right)$$

olur.

> ***İspat.***
> *Kareyi açıp toplamı terimlere dağıtalım:*
>
> $$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i + n\bar{X}^2.$$
>
> *$\bar{X}$ toplama indisine bağlı olmadığı için toplamın dışına çıktı. Tanım gereği $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}$ olduğundan ortadaki terim $-2n\bar{X}^2$'dir ve*
>
> $$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2$$
>
> *bulunur. $\sum X_i^2 = nM_2$ yazıp $n-1$'e bölersek ikinci eşitlik çıkar:*
>
> $$S^2 = \frac{nM_2 - n\bar{X}^2}{n-1} = \frac{n}{n-1}\left(M_2 - \bar{X}^2\right).$$
>
> ■

Sol taraf negatif olmayan terimlerin toplamı olduğundan $M_2 \geq \bar{X}^2$'dir; eşitlik ancak bütün gözlemler aynıyken sağlanır.

Örnek 7.2 (Bir Örnekte Ortalama, Varyans ve İkinci Moment). Dört birimlik bir örneklemin gözlem değerleri $3, 5, 6, 10$ olsun. Örneklem ortalamasının, örneklem varyansının ve ikinci örneklem momentinin bu gözlemlerdeki değerlerini hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> Ortalama:
>
> $$\bar{x} = \frac{3+5+6+10}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$
>
> Ortalamadan sapmalar $3-6=-3$, $5-6=-1$, $6-6=0$ ve $10-6=4$'tür. Karelerinin toplamı $9+1+0+16=26$ olduğundan
>
> $$s^2 = \frac{26}{4-1} = \frac{26}{3} \approx 8{,}67.$$
>
> İkinci moment karelerin ortalamasıdır:
>
> $$m_2 = \frac{9+25+36+100}{4} = \frac{170}{4} = 42{,}5.$$
>
> $m_2 = 42{,}5$ ile $\bar{x}^2 = 36$ birbirinden farklıdır. Önerme 7.1 ile sağlama yapalım:
>
> $$\frac{n}{n-1}\left(m_2 - \bar{x}^2\right) = \frac{4}{3}(42{,}5 - 36) = \frac{4}{3}\cdot 6{,}5 = \frac{26}{3}.$$
>
> Bu, doğrudan bulduğumuz s^2 değeriyle aynıdır.
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Örneklem Ortalamasının Beklenen Değeri ve Varyansı

Örneklem ortalaması kitle ortalaması μ'yü tahmin etmek için kullanılan en doğal istatistiktir. Bu tahminin ne kadar güvenilir olduğunu anlamak için $\bar{X}$'in merkezine ve yayılımına bakacağız. Bir Y rastgele değişkeni için $\mu_Y = E(Y)$ ve $\sigma_Y^2 = \text{Var}\,(Y)$ kısaltmalarını kullanacağız; örneğin $\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X})$ ve $\sigma_{\bar{X}}^2 = \text{Var}\,(\bar{X})$.

Teorem 7.1 (Bağımsız Gözlemlerde Örneklem Ortalaması). *$X_1, X_2, ..., X_n$, her $i = 1, ..., n$ için $E(X_i) = \mu$ ve $\text{Var}\,(X_i) = \sigma^2$ olan bağımsız rastgele değişkenler olsun. Bu durum, örneğin sonsuz bir kitleden alınan bir örneklemde geçerlidir. O zaman*

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu, \qquad \sigma_{\bar{X}}^2 = \text{Var}\,(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

olur.

> ***İspat.***
> ***Beklenen değer.*** *Beklenen değer lineer olduğundan (Olasılık Teorisi'ndeki teorem) sabit $\frac{1}{n}$ dışarı çıkar ve toplamın beklenen değeri beklenen değerlerin toplamı olur:*
>
> $$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu.$$
>
> ***Varyans.*** *Bir sabitle çarpılan rastgele değişkenin varyansı, sabitin karesiyle çarpılır: $\text{Var}\,(aY) = a^2\,\text{Var}\,(Y)$ (Olasılık Teorisi'ndeki teorem). Bağımsız rastgele değişkenlerin toplamının varyansı da varyansların toplamıdır, çünkü bağımsız değişkenler arasındaki kovaryanslar sıfırdır (Olasılık Teorisi'ndeki sonuç). Bu iki kuralla*
>
> $$\text{Var}\,(\bar{X}) = \frac{1}{n^2}\,\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\text{Var}\,(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$
>
> *bulunur.*
> ■

Yani örneklem ortalaması ortalamada kitle ortalamasını tutturur ve yayılımı örneklem hacmiyle ters orantılı olarak azalır: gözlem sayısını dört katına çıkarmak $\bar{X}$'in varyansını dörtte birine, standart sapmasını yarıya indirir.
Teoremin varsayımları boşuna değildir. Beklenen değeri olmayan bir kitlede, örneğin Önemli Sürekli Dağılımlar bölümündeki Cauchy dağılımında, μ ve σ^2 tanımlı değildir; standart Cauchy kitlesinde $\bar{X}$ her n için tek bir gözlemle aynı dağılıma sahiptir ve n büyüdükçe hiç daralmaz. Bağımsızlık kalktığında varyans formülünün nasıl değiştiğini ise aşağıda iadesiz çekilişte göreceğiz. Ayrıca teorem yalnızca $\bar{X}$'in beklenen değerini ve varyansını verir, dağılımının biçimini söylemez. Biçim, kitle normalse aşağıda tam olarak, genel kitlelerde ise Yakınsama ve Merkezi Limit Teoremi bölümünde büyük n için yaklaşık olarak belirlenecek.

7.3.1 Sonlu Kitleler

Şimdi kitlenin N birimden oluştuğunu ve birimlerin ölçülen değerlerinin $c_1, c_2, ..., c_N$ olduğunu varsayalım. İstatistiğe Giriş bölümündeki gibi kitle ortalaması ve kitle varyansı

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} c_j, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(c_j - \mu\right)^2$$

sayılarıdır. Kitleden rastgele seçilen tek bir birimin değeri X ise her birim $\frac{1}{N}$ olasılıkla seçildiği için $E(X) = \mu$ ve $\text{Var}\,(X) = \sigma^2$ olur; değerler farklıysa X, $\{c_1, ..., c_N\}$ üzerinde kesikli düzgün dağılımlıdır. n birimi iki farklı yolla seçebiliriz: seçilen birimi her çekilişten sonra kitleye geri koyarak (**iadeli**) ya da geri koymadan (**iadesiz**).

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 7.2 (İadeli Çekilişte Örneklem Ortalaması). *N birimlik sonlu bir kitleden iadeli olarak n birimlik bir örneklem seçilirse*

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu, \qquad \sigma^2_{\bar{X}} = \text{Var}\ (\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

olur.

> ***İspat.***
> *İadeli çekilişte her çekilişten önce kitle ilk hâline döner. Bu yüzden her çekilişte her birim $\frac{1}{N}$ olasılıkla seçilir ve bir çekilişin sonucu diğerlerini etkilemez. Dolayısıyla $X_1, ..., X_n$ bağımsızdır ve her biri tek birimlik seçimle aynı dağılıma sahiptir: $E(X_i) = \mu$, $\text{Var}\ (X_i) = \sigma^2$. Teorem 7.1 doğrudan uygulanır.*
> ■

İadesiz çekilişte ise durum değişir: ilk çekilişte büyük bir değer gelirse o birim kitleden çıkar ve sonraki çekilişlerde büyük değer gelme olasılığı azalır. Gözlemler artık bağımsız değildir ve aralarındaki negatif ilişki varyansı küçültür.

Teorem 7.3 (İadesiz Çekilişte Örneklem Ortalaması). *$N \geq 2$ birimlik sonlu bir kitleden iadesiz olarak $n \leq N$ birim seçilsin ve X_i, i-inci seçilen birimin değeri olsun ($X_1, ..., X_n$ bu durumda bağımsız değildir). O zaman*

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = \mu, \qquad \sigma^2_{\bar{X}} = \text{Var}\ (\bar{X}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

olur.

> ***İspat.***
> *Birimleri $1, 2, ..., N$ ile numaralayalım ve i-inci çekilişte seçilen birimin numarasına U_i diyelim; böylece $X_i = c_{U_i}$ olur. İadesiz rastgele çekilişte, birbirinden farklı birimlerden oluşan her sıralı $(u_1, ..., u_n)$ dizisi aynı olasılıkla ortaya çıkar. Bu dizilerin sayısı $N(N-1)\cdots(N-n+1)$'dir. ($\bar{X}$ sıraya bağlı olmadığından, sırasız $\binom{N}{n}$ örneklemin eşit olasılıklı olması da aynı sonucu verir.)*
> ***Adım 1: Her X_i kitle dağılımına sahiptir.*** *i-inci yere belirli bir a birimini koyarsak kalan $n-1$ yer, kalan $N-1$ birimden $(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)$ farklı biçimde doldurulur. Bu sayıyı toplam dizi sayısına bölersek*
>
> $$P(U_i = a) = \frac{(N-1)\cdots(N-n+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} = \frac{1}{N}$$
>
> *bulunur. Demek ki i-inci çekilişte, önceki çekilişlerin sonucunu bilmiyorsak, her birim eşit olasılıklıdır. Dolayısıyla her i için $E(X_i) = \mu$ ve $\text{Var}\ (X_i) = \sigma^2$'dir.*
> ***Adım 2: İki gözlemin kovaryansı.*** *$n \geq 2$ ve $i \neq j$ olsun. i-inci ve j-inci yerlere farklı a ve b birimleri konursa kalan yerler $(N-2)\cdots(N-n+1)$ biçimde doldurulur, dolayısıyla*
>
> $$P(U_i = a, U_j = b) = \frac{1}{N(N-1)} \qquad (a \neq b)$$
>
> *ve $a = b$ için bu olasılık sıfırdır. $d_a = c_a - \mu$ yazalım. Kitle ortalamasının tanımı gereği $\sum_a d_a = 0$ ve kitle varyansının tanımı gereği $\sum_a d_a^2 = N\sigma^2$'dir. Buna göre*
>
> $$\text{Cov}\ (X_i, X_j) = E\ [\ (X_i - \mu)(X_j - \mu)\ ] = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{a \neq b} d_a d_b$$
>
> *olur. $a \neq b$ olan çarpımların toplamı, bütün çarpımların toplamından köşegen terimlerinin çıkarılmasıyla elde edilir:*
>
> $$\sum_{a \neq b} d_a d_b = \Big(\sum_a d_a\Big)^2 - \sum_a d_a^2 = 0 - N\sigma^2.$$
>
> *Böylece $\text{Cov}\ (X_i, X_j) = -\dfrac{\sigma^2}{N-1}$ bulunur.*

Adım 3: Beklenen değer ve varyans. *Beklenen değerin lineerliği bağımsızlık gerektirmez; Adım 1 ile* $E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$ *olur. Toplamın varyansı, varyansların toplamı ile bütün* $i \neq j$ *sıralı çiftlerinin kovaryanslarının toplamıdır (Olasılık Teorisi'ndeki formül ve hemen altındaki not).* n *tane varyans ve* $n(n-1)$ *tane sıralı çift olduğundan*

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= n\sigma^2 + n(n-1)\left(-\frac{\sigma^2}{N-1}\right) \\ &= n\sigma^2\left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right) = n\sigma^2 \cdot \frac{N-n}{N-1}\end{aligned}$$

olur. $n = 1$ *iken kovaryans terimi yoktur ve aynı sonuç kalır. Son olarak* n^2*'ye bölersek*

$$\operatorname{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 \cdot \frac{N-n}{N-1} = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

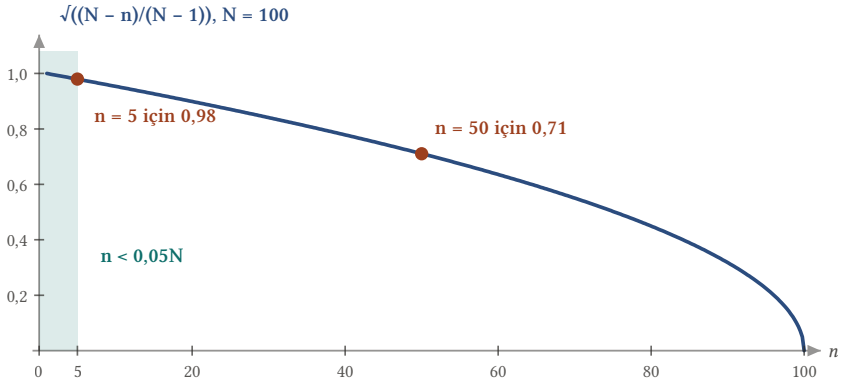
elde edilir.
■

İki teorem arasındaki tek fark varyanstaki çarpandır.

Tanım 7.9 (Sonlu Kitle Düzeltme Çarpanı). N birimlik bir kitleden iadesiz n birimlik örneklem seçildiğinde

$$\frac{N-n}{N-1}$$

sayısına **sonlu kitle düzeltme çarpanı** denir.



Şekil 7.1: N = 100 birimlik bir kitlede standart hatayı düzelten √((N − n)/(N − 1)) çarpanı. Örneklem kitlenin %5'inden küçükken (taralı şerit) çarpan 1'e çok yakındır; n büyüdükçe küçülür ve n = N olduğunda sıfır olur.

Yani iadesiz çekilişte $\bar{X}$'in varyansı, iadeli çekilişteki $\frac{\sigma^2}{n}$ değerinin bu çarpanla küçültülmüş hâlidir. $n \geq 1$ için çarpan en çok 1'dir; $n = N$ olduğunda sıfır olur, çünkü o zaman bütün kitle seçilmiştir ve $\bar{X} = \mu$ kesin olarak bilinir. N sabit bir n için sonsuza giderken çarpan 1'e yakınsar. Bu yüzden kitle sonsuzsa ya da örneklem kitlenin %5'inden küçükse ($n < 0{,}05N$) çarpan kullanılmaz; bu durumda çarpanın karekökü $\sqrt{0{,}95} \approx 0{,}975$'ten büyüktür ve standart hatayı en fazla yaklaşık %2,5 değiştirir.

Tanım 7.10 (Standart Hata). Örneklem ortalamasının varyansının karekökü, yani $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\operatorname{Var}(\bar{X})}$ sayısına, örneklem ortalamasının **standart hatası** denir. Daha genel olarak bir T istatistiğinin standart hatası $\sigma_T = \sqrt{\operatorname{Var}(T)}$ sayısıdır.

Yani standart hata, istatistiğin kendi standart sapmasıdır ve tahminin tipik olarak ne kadar şaştığını, kitlenin kendi biriminde ölçer. Bağımsız gözlemlerde ve iadeli çekilişte $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, iadesiz çekilişte $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$'dir.

Örnek 7.3 (Düzeltme Çarpanının Gerektiği Bir Durum). $N = 1000$ öğrencinin sınav puanlarının standart sapması $\sigma = 15$'tir. Bu öğrencilerden iadesiz olarak $n = 100$ öğrenci seçiliyor. Örneklem ortalamasının standart hatasını hesaplayınız.

Çözüm.
Örneklem kitlenin $\frac{100}{1000} = 0{,}10$'u, yani %10'udur. Bu oran $0{,}05$'ten büyük olduğundan düzeltme çarpanı kullanılmalıdır. Teorem 7.3 ile

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{15}{\sqrt{100}}\sqrt{\frac{900}{999}} = 1{,}5 \cdot 0{,}9492 \approx 1{,}4237.$$

Çarpan kullanılmasaydı $1{,}5$ bulunurdu; bu yaklaşık %5 fazladır.
■

Örnek 7.4 (Düzeltme Çarpanının İhmal Edilebildiği Bir Durum). $N = 1000$ öğrencinin sınav puanlarının standart sapması $\sigma = 15$'tir. Bu öğrencilerden iadesiz olarak $n = 40$ öğrenci seçiliyor. Örneklem ortalamasının standart hatasını hesaplayınız ve düzeltme çarpanının ihmal edilip edilemeyeceğini inceleyiniz.

Çözüm.
Örneklem kitlenin $\frac{40}{1000} = 0{,}04$'üdür; bu oran $0{,}05$'ten küçük olduğundan çarpan ihmal edilebilir:

$$\sigma_{\bar{X}} \approx \frac{15}{\sqrt{40}} \approx 2{,}3717.$$

Çarpanla birlikte tam değer

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{15}{\sqrt{40}}\sqrt{\frac{960}{999}} \approx 2{,}3717 \cdot 0{,}9803 \approx 2{,}3250$$

olur. İki değer arasındaki fark yaklaşık %2'dir; bu yüzden çarpanı ihmal etmek pratikte bir şey kaybettirmez.
■

7.4 Bir Sonlu Kitlede Örnekleme Dağılımı

Teoremleri somut bir kitlede, bütün olası örneklemleri tek tek yazarak doğrulayalım. Aşağıdaki örneklerin hepsi aynı küçük kitleyi kullanır.

Örnek 7.5 (Örneklem Ortalamasının Örnekleme Dağılımı). 2, 4, 10, 12 ve 18 sayılarından oluşan bir kitleden iadesiz olarak $n = 3$ birimlik rastgele örneklemler çekiliyor. Örneklem ortalaması $\bar{X}$'in örnekleme dağılımını oluşturunuz.

Çözüm.
Kitle $N = 5$ birimlidir. İadesiz çekilişte 3 birimlik örneklemlerin sayısı

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

olup her biri $\frac{1}{10}$ olasılıkla seçilir. Bütün örneklemleri ve ortalamalarını yazalım:

Örneklem	$\bar{x}$	Örneklem	$\bar{x}$
$2, 4, 10$	$16/3$	$2, 12, 18$	$32/3$

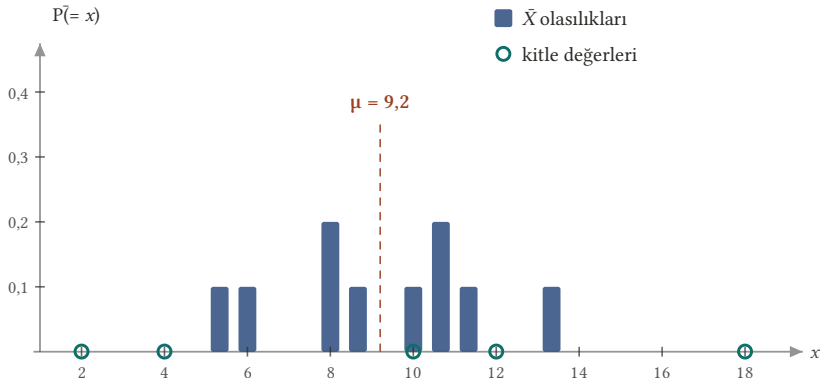
 CC BY-NC-SA 4.0

Örneklem	$\bar{x}$	Örneklem	$\bar{x}$
$2, 4, 12$	$18/3$	$4, 10, 12$	$26/3$
$2, 4, 18$	$24/3$	$4, 10, 18$	$32/3$
$2, 10, 12$	$24/3$	$4, 12, 18$	$34/3$
$2, 10, 18$	$30/3$	$10, 12, 18$	$40/3$

Karşılaştırmayı kolaylaştırmak için bütün ortalamaları paydası 3 olacak biçimde yazdık. $24/3$ ve $32/3$ değerleri ikişer örneklemde, diğerleri birer örneklemde ortaya çıkar. Buna göre $\bar{X}$'in olasılık fonksiyonu şöyledir:

x	$16/3$	$18/3$	$24/3$	$26/3$	$30/3$	$32/3$	$34/3$	$40/3$
$P(\bar{X} = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Olasılıkların toplamı $\frac{10}{10} = 1$'dir.



Şekil 7.2: Kitle değerleri 2, 4, 10, 12 ve 18 (halkalar) 2 ile 18 arasına yayılmışken, iadesiz çekilen 3 birimlik örneklemlerin ortalamaları (çubuklar) 16/3 ile 40/3 arasında kalır ve kitle ortalaması μ = 9,2 çevresinde toplanır.

■

Örnek 7.6 (Örneklem Ortalamasının Beklenen Değeri). $2, 4, 10, 12, 18$ kitlesinden iadesiz çekilen $n = 3$ birimlik örneklemlerin ortalaması $\bar{X}$ olsun. $E(\bar{X})$'i örnekleme dağılımından hesaplayıp kitle ortalamasıyla karşılaştırınız.

Çözüm.
Kitle ortalaması

$$\mu = \frac{1}{5}(2 + 4 + 10 + 12 + 18) = \frac{46}{5} = 9{,}2$$

olur. Örnekleme dağılımındaki (Örnek 7.5) her değeri olasılığıyla çarpıp toplayalım. Bütün terimlerin paydası $3 \cdot 10 = 30$'dur:

$$E(\bar{X}) = \frac{16 + 18 + 2 \cdot 24 + 26 + 30 + 2 \cdot 32 + 34 + 40}{30} = \frac{276}{30} = 9{,}2.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bulduğumuz değer kitle ortalamasına eşittir; böylece $E(\bar{X}) = \mu$ eşitliği (Teorem 7.3) bu kitlede doğrulanmış olur.
■

Örnek 7.7 (Örneklem Ortalamasının Varyansı). 2, 4, 10, 12, 18 kitlesinden iadesiz çekilen $n = 3$ birimlik örneklemlerin ortalaması $\bar{X}$ olsun. Var $(\bar{X})$'i iki yoldan hesaplayınız.

Çözüm.
Önce kitle varyansını bulalım. $\mu = 9{,}2$'den sapmaların kareleri $(2-9{,}2)^2 = 51{,}84$, $(4-9{,}2)^2 = 27{,}04$, $(10-9{,}2)^2 = 0{,}64$, $(12-9{,}2)^2 = 7{,}84$ ve $(18-9{,}2)^2 = 77{,}44$'tür. Toplamları 164,8 olduğundan

$$\sigma^2 = \frac{164{,}8}{5} = 32{,}96$$

bulunur.
Birinci yol: teoremle. Çekiliş iadesiz olduğundan Teorem 7.3 kullanılır:

$$\text{Var}\,(\bar{X}) = \frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{\sigma^2}{n} = \frac{5-3}{5-1}\cdot\frac{32{,}96}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{32{,}96}{3} = \frac{412}{75} \approx 5{,}4933.$$

İkinci yol: dağılımdan. Var $(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - [E(\bar{X})]^2$ formülünü (Olasılık Teorisi'ndeki hesap formülü) kullanalım. $\bar{X}^2$'nin değerleri, dağılımdaki değerlerin kareleridir ve paydaları $9 \cdot 10 = 90$ olur:

$$\begin{aligned} E(\bar{X}^2) &= \frac{16^2 + 18^2 + 2\cdot 24^2 + 26^2 + 30^2 + 2\cdot 32^2 + 34^2 + 40^2}{90} \\ &= \frac{256 + 324 + 1152 + 676 + 900 + 2048 + 1156 + 1600}{90} = \frac{8112}{90}. \end{aligned}$$

Beklenen değer $E(\bar{X}) = 9{,}2 = \frac{46}{5}$ olduğundan (Örnek 7.6)

$$\text{Var}\,(\bar{X}) = \frac{8112}{90} - \left(\frac{46}{5}\right)^2 = \frac{1352}{15} - \frac{2116}{25} = \frac{6760 - 6348}{75} = \frac{412}{75} \approx 5{,}4933.$$

İki yol aynı sonucu verir.
■

Örneklem ortalamasının varyansı (5,49), kitle varyansından (32,96) çok küçüktür: ortalama alma, uç değerlerin etkisini yumuşatır. Örneklem büyüdükçe bu etki artar. Aynı kitlede Teorem 7.3 ile $n = 1, 2, 3, 4, 5$ için

$$\text{Var}\,(\bar{X}) = 32{,}96; \quad 12{,}36; \quad 5{,}4933; \quad 2{,}06; \quad 0$$

bulunur. $n = 5$ iken bütün kitle seçilir, $\bar{X}$ her zaman 9,2'dir ve varyansı sıfırdır.
Örneklem ortalaması, kitlenin merkezini tahmin etmek için akla gelen tek istatistik değildir. Aynı örneklemlerle medyanın davranışına bakalım.

Örnek 7.8 (Örneklem Medyanının Beklenen Değeri ve Varyansı). 2, 4, 10, 12, 18 kitlesinden iadesiz olarak $n = 3$ birimlik örneklemler çekiliyor. Örneklemin ortanca değerine, yani örneklem medyanına Y diyelim. Y'nin örnekleme dağılımını bulunuz; $E(Y)$ ve Var (Y)'yi hesaplayınız.

Çözüm.
Üç sayının medyanı, sıralandığında ortada kalan sayıdır. On örneklemin medyanları şöyledir:

Örneklem	y	Örneklem	y
2, 4, 10	4	2, 12, 18	12
2, 4, 12	4	4, 10, 12	10

 CC BY-NC-SA 4.0

Örneklem	y	Örneklem	y
$2, 4, 18$	4	$4, 10, 18$	10
$2, 10, 12$	10	$4, 12, 18$	12
$2, 10, 18$	10	$10, 12, 18$	12

4 üç örneklemde, 10 dört örneklemde, 12 üç örneklemde ortaya çıkar:

y	4	10	12
$P(Y = y)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$

Beklenen değer:

$$E(Y) = 4 \cdot \frac{3}{10} + 10 \cdot \frac{4}{10} + 12 \cdot \frac{3}{10} = \frac{12 + 40 + 36}{10} = \frac{88}{10} = 8{,}8.$$

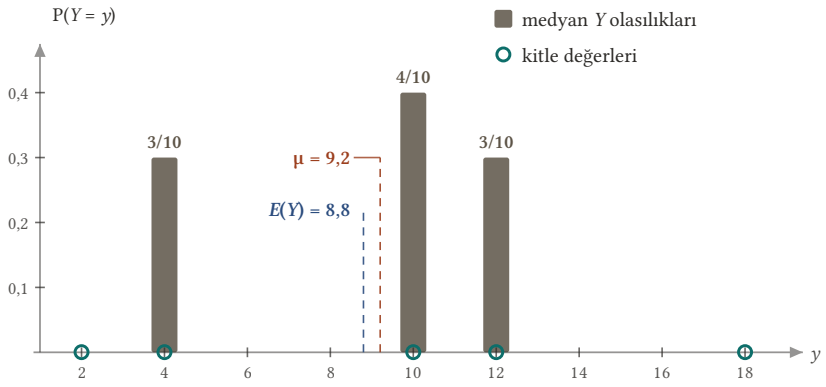
Varyans için önce ikinci momenti bulalım:

$$E(Y^2) = 16 \cdot \frac{3}{10} + 100 \cdot \frac{4}{10} + 144 \cdot \frac{3}{10} = \frac{48 + 400 + 432}{10} = 88.$$

Buradan

$$\text{Var}\,(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 88 - 8{,}8^2 = 88 - 77{,}44 = 10{,}56$$

bulunur.



Şekil 7.3: Aynı örneklemlerin medyanı Y yalnız 4, 10 ve 12 değerlerini alır. Beklenen değeri E(Y) = 8,8, kitle ortalaması 9,2'den farklıdır; olasılıklar da örneklem ortalamasınınkinden daha geniş bir aralığa yayılmıştır.

İki sonuç dikkat çekicidir. Birincisi, $E(Y) = 8{,}8$ ne kitle ortalaması 9,2'ye ne de kitlenin medyanı 10'a eşittir; örneklem medyanı bu kitlede ortalamada hedefi tutturmaz. İkincisi, $\text{Var}\,(Y) = 10{,}56$, örneklem ortalamasının varyansı $5{,}49$'un yaklaşık iki katıdır; örneklem ortalaması örneklemden örnekleme daha az değişir.

■

Son olarak, iadeli çekilişi ve örneklem varyansını en küçük bir kitlede inceleyelim.

Örnek 7.9 (İadeli Çekilişte Varyansın Doğrulanması). 5 ve 7 sayılarından oluşan iki birimlik bir kitleden iadeli olarak $n = 2$ birimlik örneklemler çekiliyor. $\text{Var}\,(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ olduğunu bütün örneklemleri yazarak doğrulayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Kitle ortalaması $\mu = \frac{5+7}{2} = 6$, kitle varyansı

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\left[(5-6)^2 + (7-6)^2\right] = \frac{1+1}{2} = 1$$

olur. İadeli çekilişte her çekilişte iki birim de $\frac{1}{2}$ olasılıkla gelir ve çekilişler bağımsızdır. Dört sıralı örneklem $(5,5)$, $(5,7)$, $(7,5)$, $(7,7)$'nin her biri $\frac{1}{4}$ olasılıklıdır. Ortalamaları sırasıyla 5, 6, 6, 7'dir. Dolayısıyla

$$E(\bar{X}) = \frac{5+6+6+7}{4} = 6 = \mu$$

ve

$$\text{Var}\ (\bar{X}) = \frac{(5-6)^2 + 0^2 + 0^2 + (7-6)^2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

bulunur. Bu değer $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{1}{2}$'ye eşittir.
■

Örnek 7.10 (Örneklem Varyansının Beklenen Değeri). 5 ve 7 sayılarından oluşan iki birimlik bir kitleden iadeli olarak $n = 2$ birimlik örneklemler çekiliyor. Örneklem varyansı S^2'nin beklenen değerinin kitle varyansına eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Kitle varyansı $\sigma^2 = 1$'dir (Örnek 7.9); dört sıralı örneklemin her biri $\frac{1}{4}$ olasılıklıdır. $n = 2$ için $S^2 = \frac{1}{2-1}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \bar{X})^2$'dir.

- $(5,5)$ ve $(7,7)$ örneklemlerinde iki gözlem ortalamaya eşittir, sapmalar sıfırdır ve $S^2 = 0$ olur.
- $(5,7)$ ve $(7,5)$ örneklemlerinde $\bar{x} = 6$, sapmalar ∓ 1'dir ve $S^2 = \frac{1+1}{1} = 2$ olur.

Buna göre

$$E(S^2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 = \sigma^2.$$

$n-1$ yerine n ile bölseydik değerler 0 ve 1 olur, beklenen değer $\frac{1}{2}$ çıkardı; bu, kitle varyansını sistematik olarak küçük tahmin etmek demektir. S^2'nin tanımındaki $n-1$ tam olarak bu kaymayı düzeltir. Eşitlik gözlemlerin bağımsızlığına dayanır. Aynı kitleden iadesiz 2 birim çekilseydi tek örneklem $\{5,7\}$ olurdu, S^2 her zaman 2 olur ve $E(S^2) = 2 \neq \sigma^2$ çıkardı.
■

7.5 Normal Kitleden Alınan Örneklem

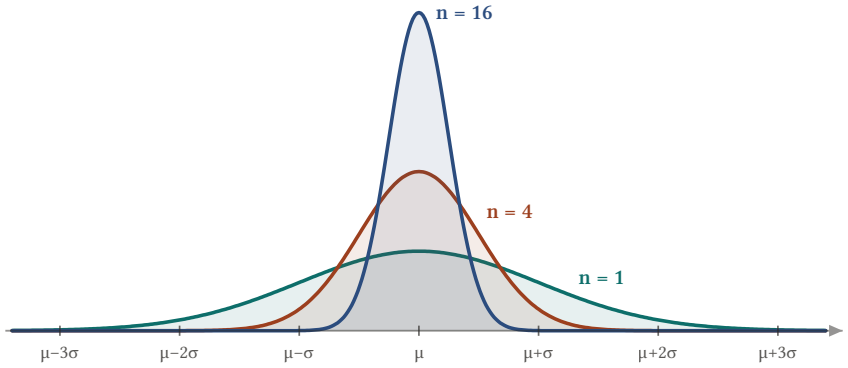
Teorem 7.1, $\bar{X}$'in beklenen değerini ve varyansını verir ama dağılımının biçimini vermez. Kitle normal dağılımlıysa biçim de tam olarak belirlenir. Normal dağılımın tanımı için Olasılık Teorisi'ndeki tanıma, moment üreten fonksiyonu için oradaki teoreme bakılabilir.

Teorem 7.4 (Normal Kitlede Örneklem Ortalamasının Dağılımı). *$\mu \in \mathbb{R}$ ve $\sigma^2 \in (0,\infty)$ olmak üzere $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $N(\mu,\sigma^2)$ dağılımlı bir kitleden alınan bir örneklem olsun. O zaman*

$$\bar{X} \sim \left(N\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.4: N(μ, σ²) kitlesinden alınan örneklemin ortalaması N(μ, σ²/n) dağılımlıdır. n = 1, 4 ve 16 için standart sapma σ, σ/2 ve σ/4 olur: eğri μ'de kalır ama n büyüdükçe daralır ve yükselir.

İspat.
Moment üreten fonksiyonlarla gösterelim. Her X_i'nin moment üreten fonksiyonu

$$M_{X_i}(t) = E\left(\, e^{tX_i}\,\right) = \exp\!\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

olur. $\bar{X}$'in moment üreten fonksiyonunda üsteki toplamı çarpıma ayıralım:

$$M_{\bar{X}}(t) = E\left(\, e^{t\bar{X}}\,\right) = E\!\left(e^{\frac{t}{n}X_1} \cdots e^{\frac{t}{n}X_n}\right).$$

$X_1, \ldots, X_n$ bağımsız olduğundan $e^{\frac{t}{n}X_1}, \ldots, e^{\frac{t}{n}X_n}$ de bağımsızdır ve çarpımın beklenen değeri beklenen değerlerin çarpımıdır (Olasılık Teorisi'ndeki teorem). Her çarpan M_{X_i}'nin $\frac{t}{n}$ noktasındaki değeridir:

$$M_{\bar{X}}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\!\left(\frac{t}{n}\right) = \left[\exp\!\left(\frac{\mu t}{n} + \frac{\sigma^2 t^2}{2n^2}\right)\right]^n = \exp\!\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{t^2}{2}\right).$$

Bu, $\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ dağılımının moment üreten fonksiyonudur. Moment üreten fonksiyon dağılımı tek türlü belirlediği için (Olasılık Teorisi'ndeki teklik teoremi) $\bar{X} \sim \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$'dir. Aynı sonuç, bağımsız normal değişkenlerin toplamının normal olduğunu söyleyen Olasılık Teorisi'ndeki teoremin özel bir durumudur.
■

Yani normal bir kitlede örneklem ortalaması da normaldir, merkezi kitleninkiyle aynıdır, standart sapması ise $\sqrt{n}$ kat küçüktür. Bu sayede $\bar{X}$ ile ilgili olasılıklar standartlaştırma ve standart normal tablosu ile hesaplanır: $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

Örnek 7.11 (Normal Kitlede Ortalamanın Bir Aralığa Düşmesi). Bir kitlede ölçülen özellik $N(50, 36)$ dağılımlıdır. Bu kitleden $n = 9$ birimlik bir örneklem alınıyor. $P(48 \le \bar{X} \le 53)$ olasılığını hesaplayınız ve tek bir gözlemin aynı aralığa düşme olasılığıyla karşılaştırınız.

Çözüm.
Teorem 7.4 gereği $\bar{X} \sim \left(50, \frac{36}{9}\right) = N(50, 4)$, yani standart hata $\sigma_{\bar{X}} = 2$'dir. Aralığın uçlarını standartlaştıralım:

$$\frac{48 - 50}{2} = -1, \qquad \frac{53 - 50}{2} = 1{,}5.$$

Standart normal eğri 0'a göre simetrik olduğundan $P(-1 \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le 1)$'dir. Standart normal tablosundan $P(0 \le Z \le 1) = 0{,}3413$ ve $P(0 \le Z \le 1{,}5) = 0{,}4332$ okunur:

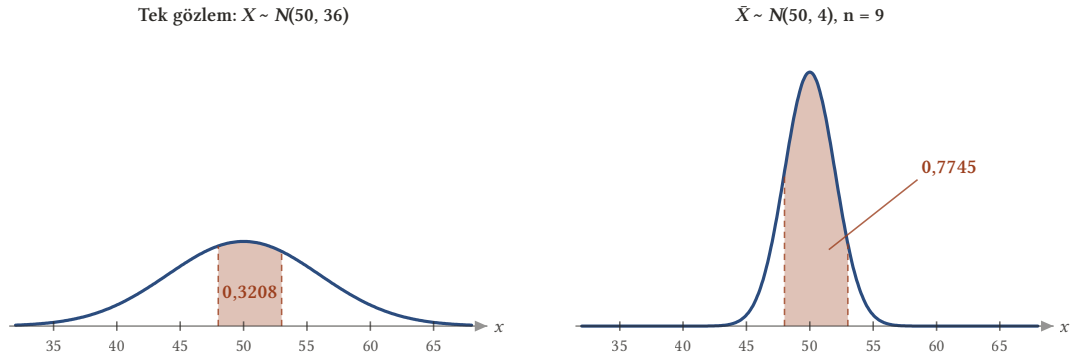
 CC BY-NC-SA 4.0

$$P(48 \le \bar{X} \le 53) = P(-1 \le Z \le 1{,}5) = 0{,}3413 + 0{,}4332 = 0{,}7745.$$

Tek bir gözlem için standart sapma 6'dır ve uçlar $\frac{48-50}{6} \approx -0{,}33$ ile $\frac{53-50}{6} = 0{,}5$'e dönüşür. Tablodan $P(0 \le Z \le 0{,}33) = 0{,}1293$ ve $P(0 \le Z \le 0{,}5) = 0{,}1915$ okunur:

$$P(48 \le X \le 53) \approx 0{,}1293 + 0{,}1915 = 0{,}3208.$$

Dokuz gözlemin ortalaması, tek bir gözleme göre bu aralığa iki kattan fazla olasılıkla düşer.



Şekil 7.5: Aynı aralık, iki farklı dağılım: 48 ile 53 arasına tek bir gözlemin düşme olasılığı yaklaşık 0,3208 iken, 9 gözlemin ortalamasının düşme olasılığı 0,7745'tir. Ortalamanın dağılımı μ = 50 çevresinde üç kat daha dardır (standart sapma 6 yerine 2).

■

Kitle normal değilse $\bar{X}$'in dağılımı genellikle tam olarak normal değildir. Yine de örneklem hacmi büyüdükçe dağılımı $\left(N\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$'ye yaklaşır; bu, bir sonraki bölümde ele alacağımız merkezi limit teoremidir.

7.6 Markov ve Chebyshev Eşitsizlikleri

Kitlenin dağılımını bilmiyorsak $\bar{X}$ ile ilgili olasılıkları tam olarak hesaplayamayız. Yine de yalnızca varyansı kullanarak bu olasılıklara kaba ama her durumda geçerli sınırlar koyabiliriz. Bunun için Olasılık Teorisi'nde ispatlanan iki eşitsizliği hatırlayalım.

Markov eşitsizliği (Olasılık Teorisi'ndeki teorem): Y negatif değer almayan ve beklenen değeri olan bir rastgele değişkense her $c > 0$ için

$$P(Y \ge c) \le \frac{E(Y)}{c}$$

olur. İspatın özü şudur: $E(Y) = \sum_y y f(y)$ toplamından $y < c$ olan negatif olmayan terimleri atıp kalan terimlerde y yerine daha küçük olan c'yi yazarsak $E(Y) \ge c\,P(Y \ge c)$ bulunur; sürekli durumda toplam yerine integral kullanılır. Sınır yalnızca $c > E(Y)$ olduğunda bilgi verir; $c \le E(Y)$ için sağ taraf en az 1'dir ve her olasılık zaten 1'den küçük ya da eşittir.

Chebyshev eşitsizliği (Olasılık Teorisi'ndeki teorem): X varyansı var olan ($\sigma_X^2 < \infty$) bir rastgele değişkense her $c > 0$ için

$$P\left(\,|\,X - E(X)\,| \ge c\,\right) \le \frac{\mathrm{Var}\,(X)}{c^2}$$

olur. Bu, Markov eşitsizliğinin $Y = (X - E(X))^2$ değişkenine ve c^2 eşiğine uygulanmasıdır: $|\,X - E(X)\,| \ge c$ olayı $Y \ge c^2$ olayıyla aynıdır ve $E(Y) = \mathrm{Var}\,(X)$'tir. $\sigma_X > 0$ iken $c = k\sigma_X$ $(k > 0)$ alınırsa dışarıda kalma olasılığı için bir üst sınır, tümleyen olaya geçilirse içeride kalma olasılığı için bir alt sınır elde edilir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P\left(\mid X - E(X) \mid \geq k\sigma_X\right) \leq \frac{1}{k^2}, \qquad P\left(\mid X - E(X) \mid < k\sigma_X\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

$0 < k \leq 1$ için bu sınırlar bilgi vermez: üst sınır en az 1, alt sınır en çok 0'dır.

Örnek 7.12 (Markov Eşitsizliğiyle Bir Üst Sınır). Bir çağrı merkezine bir saatte gelen çağrı sayısı Y'nin beklenen değeri 20'dir; dağılımı hakkında başka bilgi yoktur. Bir saatte en az 50 çağrı gelme olasılığı için bir üst sınır bulunuz.

> **Çözüm.**
> Çağrı sayısı negatif olamaz, bu yüzden Markov eşitsizliği $c = 50$ ile uygulanabilir:
>
> $$P(Y \geq 50) \leq \frac{E(Y)}{50} = \frac{20}{50} = 0{,}4.$$
>
> Yani dağılım ne olursa olsun, bir saatte 50 ya da daha fazla çağrı gelme olasılığı en çok 0,4'tür. Aynı yöntem $c = 15$ için $\frac{20}{15} > 1$ verir; bu sınır bir şey söylemez, çünkü $15 < E(Y)$'dir.
> ■

Örnek 7.13 (Varyans Bilinince Sınırın İyileşmesi). Bir çağrı merkezine bir saatte gelen çağrı sayısı Y'nin beklenen değeri 20, varyansı 20'dir. Bir saatte en az 50 çağrı gelme olasılığı için Chebyshev eşitsizliğiyle bir üst sınır bulunuz.

> **Çözüm.**
> $Y \geq 50$ ise $Y - 20 \geq 30$'dur, dolayısıyla $\mid Y - 20 \mid \geq 30$ olur. Yani $(Y \geq 50)$ olayı $\left(\mid Y - 20 \mid \geq 30\right)$ olayının içindedir ve olasılığı ondan büyük olamaz. Chebyshev eşitsizliği $c = 30$ ile
>
> $$P(Y \geq 50) \leq P\left(\mid Y - 20 \mid \geq 30\right) \leq \frac{20}{30^2} = \frac{20}{900} = \frac{1}{45} \approx 0{,}0222$$
>
> verir. Varyans bilgisi, yalnız beklenen değeri kullanan Markov sınırı 0,4'ü yaklaşık on sekiz kat iyileştirmiştir.
> ■

Chebyshev eşitsizliğini örneklem ortalamasına uyguladığımızda, $\bar{X}$'in varyansı n ile küçüldüğü için çok daha güçlü bir sonuç elde ederiz.

Teorem 7.5 (Örneklem Ortalaması için Chebyshev Eşitsizliği). *$X_1, X_2, \ldots, X_n$, beklenen değeri μ ve varyansı $0 < \sigma^2 < \infty$ olan bir kitleden alınan bir örneklem olsun. Her $\varepsilon > 0$ için*

$$P\left(\mid \bar{X} - \mu \mid \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

olur. Ayrıca her $k > 0$ için

$$P\left(\mid \bar{X} - \mu \mid < k\sigma_{\bar{X}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}, \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

olur.

> ***İspat.***
> *Teorem 7.1 gereği $E(\bar{X}) = \mu$ ve $\operatorname{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$'dir. Chebyshev eşitsizliğini $\bar{X}$ değişkenine $c = \varepsilon$ ile uygularsak*
>
> $$P\left(\mid \bar{X} - \mu \mid \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\operatorname{Var}(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$
>
> *bulunur. $c = k\sigma_{\bar{X}}$ alıp tümleyen olaya geçersek*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P\left(\mid \bar{X}-\mu \mid < k\sigma_{\bar{X}}\right) = 1 - P\left(\mid \bar{X}-\mu \mid \geq k\sigma_{\bar{X}}\right) \geq 1 - \frac{\sigma_{\bar{X}}^2}{k^2\sigma_{\bar{X}}^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$$

elde edilir.
■

Yani örneklem ortalamasının kitle ortalamasından ε kadar sapma olasılığı, sabit bir ε için n büyüdükçe $\frac{1}{n}$ hızıyla sıfıra iner. Sonlu bir kitleden iadesiz çekilişte $\operatorname{Var}(\bar{X})$ daha da küçük olduğundan aynı sınırlar orada da geçerlidir.

Örnek 7.14 (Paket Ağırlıklarında Chebyshev Sınırı). Bir makinenin doldurduğu paketlerin ağırlıklarının standart sapması $\sigma = 10$ gramdır; ağırlıkların dağılımı bilinmiyor. 100 paketlik bir örneklemin ortalama ağırlığının kitle ortalamasından 2 gramdan az sapma olasılığı için bir alt sınır bulunuz.

Çözüm.
Standart hata $\sigma_{\bar{X}} = \frac{10}{\sqrt{100}} = 1$ gramdır. $2 \text{ gram} = 2\sigma_{\bar{X}}$ olduğundan Teorem 7.5 $k = 2$ ile uygulanır:

$$P\left(\mid \bar{X}-\mu \mid < 2\right) \geq 1 - \frac{1}{2^2} = 0{,}75.$$

Yani örneklem ortalaması en az $0{,}75$ olasılıkla kitle ortalamasının 2 gram yakınındadır.
■

Örnek 7.15 (Normal Kitlede Aynı Olasılığın Tam Değeri). Bir makinenin doldurduğu paketlerin ağırlıkları $\sigma = 10$ gram standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. 100 paketlik bir örneklemin ortalama ağırlığının kitle ortalamasından 2 gramdan az sapma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm.
Teorem 7.4 gereği $\bar{X} \sim N(\mu, 1)$'dir, yani $Z = \bar{X} - \mu$ standart normaldir. Simetri ve standart normal tablosu ile

$$P\left(\mid \bar{X}-\mu \mid < 2\right) = P(-2 < Z < 2) = 2\,P(0 \leq Z < 2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544$$

bulunur. Gerçek olasılık, Chebyshev eşitsizliğinin verdiği $0{,}75$ alt sınırından (Örnek 7.14) oldukça büyüktür. Chebyshev sınırı her dağılım için geçerli olmanın bedelini bu kabalıkla öder.
■

Örnek 7.16 (Chebyshev ile Örneklem Hacmi). Bir kitlenin standart sapması σ biliniyor, dağılımı bilinmiyor. Örneklem ortalamasının kitle ortalamasına $0{,}5\sigma$'dan daha yakın olma olasılığının en az $0{,}95$ olmasını güvenceye almak için örneklem hacmi en az kaç olmalıdır?

Çözüm.
Teorem 7.5 $\varepsilon = 0{,}5\sigma$ ile

$$P\left(\mid \bar{X}-\mu \mid \geq 0{,}5\sigma\right) \leq \frac{\sigma^2}{n \cdot 0{,}25\,\sigma^2} = \frac{4}{n}$$

verir, dolayısıyla $P\left(\mid \bar{X}-\mu \mid < 0{,}5\sigma\right) \geq 1 - \frac{4}{n}$'dir. Bu alt sınırın en az $0{,}95$ olması için

$$1 - \frac{4}{n} \geq 0{,}95 \Leftrightarrow \frac{4}{n} \leq 0{,}05 \Leftrightarrow n \geq 80$$

gerekir. Yani $n = 80$ birimlik bir örneklem, dağılım ne olursa olsun istenen güvenceyi verir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 7.17 (Normal Kitlede Örneklem Hacmi). Bir kitle $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlıdır. Örneklem ortalamasının kitle ortalamasına $0{,}5\sigma$'dan daha yakın olma olasılığının en az $0{,}95$ olması için örneklem hacmi en az kaç olmalıdır?

Çözüm.

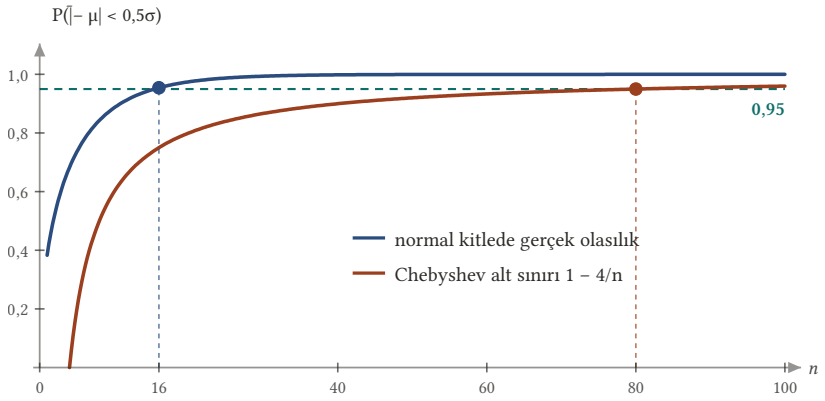
Teorem 7.4 gereği $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ standart normaldir. $\mid \bar{X} - \mu \mid < 0{,}5\sigma$ eşitsizliğini $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$'ye bölersek $\mid Z \mid < 0{,}5\sqrt{n}$ olur. Simetri ile

$$P\left(\mid \bar{X} - \mu \mid < 0{,}5\sigma \right) = 2\,P\left(0 \le Z < 0{,}5\sqrt{n} \right).$$

Bunun en az $0{,}95$ olması için $P\left(0 \le Z < 0{,}5\sqrt{n} \right) \ge 0{,}475$ gerekir. Standart normal tablosunda $0{,}4750$ alanı $z = 1{,}96$'ya karşılık gelir ve alan z ile birlikte artar. Dolayısıyla

$$0{,}5\sqrt{n} \ge 1{,}96 \Leftrightarrow \sqrt{n} \ge 3{,}92 \Leftrightarrow n \ge 15{,}3664$$

olmalıdır; en küçük tam sayı $n = 16$'dır. Kitlenin normal olduğunu bilmek, gereken örneklem hacmini 80'den 16'ya indirir.



Şekil 7.6: Örneklem ortalamasının μ'ye 0,5σ'dan daha yakın olma olasılığı. Chebyshev alt sınırı (turuncu) her dağılım için geçerlidir ve 0,95'e ancak n = 80'de ulaşır; kitle normalse gerçek olasılık (mavi) 0,95'i n = 16'da geçer.

■

Bu bölümde örneklem ortalamasının kitle ortalaması çevresinde toplandığını ve yayılımının $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ hızıyla küçüldüğünü gördük. n sonsuza giderken bu toplanmanın ne anlama geldiğini ve $\bar{X}$'in dağılımının neden normale yaklaştığını Yakınsama ve Merkezi Limit Teoremi bölümünde inceleyeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

8. Yakınsama ve Merkezi Limit Teoremi

Örneklem ve İstatistikler bölümünde örneklem ortalamasının beklenen değerinin kitle ortalamasına, varyansının da σ^2/n'ye eşit olduğunu gördük. Örneklem büyüdükçe bu varyans sıfıra iner. Bu bölümde bunun iki önemli sonucunu inceliyoruz. Birincisi, örneklem ortalaması kitle ortalamasına yaklaşır: **büyük sayılar yasası**. İkincisi, kitlenin dağılımı ne olursa olsun örneklem ortalamasının dağılımı normal dağılıma benzemeye başlar: **merkezi limit teoremi**.
Bu iki sonucu kesin biçimde söyleyebilmek için önce "bir rastgele değişken dizisi yakınsar" sözünün ne anlama geldiğini belirlememiz gerekiyor. Sayı dizilerinde tek bir yakınsama kavramı vardır; rastgele değişken dizilerinde ise birkaç farklı kavram vardır. Bölüm boyunca $X_1, X_2, \ldots$ rastgele değişkenleri için

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

ilk n değişkenin ortalamasıdır.

8.1 Olasılıkta Yakınsama

Bir rastgele değişken, deneyin sonucuna bağlı bir fonksiyondur. İki rastgele değişkenin birbirine "yakın" olmasını en doğal biçimde şöyle okuyabiliriz: aralarındaki farkın büyük olma olasılığı küçüktür.

Tanım 8.1 (Olasılıkta Yakınsama). $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ bir olasılık uzayı, (X_n) bu uzayda tanımlı rastgele değişkenlerin bir dizisi ve X aynı uzayda bir rastgele değişken olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\{w : \mid X_n(w) - X(w) \mid \geq \varepsilon\} \right) = 0$$

oluyorsa (X_n) dizisi X rastgele değişkenine **olasılıkta** (olasılık ölçüsünde) **yakınsar** denir ve

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} X$$

yazılır. Koşul kısaca $\lim_{n\to\infty} P(\mid X_n - X \mid \geq \varepsilon) = 0$ diye yazılır. Tümleyen olaya geçilirse aynı koşul $\lim_{n\to\infty} P(\mid X_n - X \mid < \varepsilon) = 1$ biçimini alır.

Yani n büyüdükçe X_n'in X'ten ε ya da daha fazla uzaklaşma olasılığı sıfıra iner, ε ne kadar küçük seçilirse seçilsin. Bu yakınsama olasılıklar için söylenmiştir, tek tek sonuçlar için değil. Her n için X_n'in X'ten uzak düştüğü bazı sonuçlar bulunabilir. Önemli olan, bu sonuçların olasılığının küçülmesidir. Limit çoğu zaman bir sabittir. X her sonuçta c değerini alıyorsa $X_n \overset{P}{\to} c$ yazarız.

Örnek 8.1 (Olasılıkta Sıfıra Giden Ama Beklenen Değeri Bir Kalan Dizi). Her $n \geq 1$ için X_n rastgele değişkeninin olasılık fonksiyonu

$$P(X_n = n) = \frac{1}{n}, \qquad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$$

olsun. (X_n) dizisinin olasılıkta 0'a yakınsadığını, buna karşın $E(X_n)$ dizisinin 0'a gitmediğini gösterin.

> **Çözüm.**
> $\varepsilon > 0$ verilsin. X_n yalnız 0 ve n değerlerini alır. $n \geq \varepsilon$ olduğunda $\mid X_n \mid \geq \varepsilon$ olayı tam olarak $X_n = n$ olayıdır. Bu yüzden $n \geq \varepsilon$ için
>
> $$P(\mid X_n - 0 \mid \geq \varepsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n}$$
>
> olur. $n < \varepsilon$ olan sonlu sayıdaki terim limiti etkilemez ve $\frac{1}{n} \to 0$ olduğundan $X_n \overset{P}{\to} 0$ bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Öte yandan her n için

$$E(X_n) = n \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

olur. Yani X_n büyük olasılıkla 0'dır. Ama küçük bir olasılıkla aldığı çok büyük n değeri beklenen değeri 1'de tutar. Demek ki olasılıkta yakınsama, beklenen değerlerin yakınsamasını gerektirmez.
■

Örnek 8.2 (Düzgün Örneklemin En Küçük Değeri). $U_1, U_2, \ldots$ bağımsız ve her biri $U(0,1)$ dağılımlı olsun (sürekli düzgün dağılım). $M_n = \min\{U_1, \ldots, U_n\}$ için $M_n \xrightarrow{P} 0$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
$M_n \geq 0$ olduğundan $\mid M_n - 0 \mid = M_n$'dir. $\varepsilon \geq 1$ ise $P(M_n \geq \varepsilon) = 0$ olur ve gösterilecek bir şey kalmaz.
$0 < \varepsilon < 1$ olsun. En küçük değerin ε'dan küçük olmaması, U_i'lerin hiçbirinin ε'dan küçük olmaması demektir:

$$\{M_n \geq \varepsilon\} = \{U_1 \geq \varepsilon\} \cap \cdots \cap \{U_n \geq \varepsilon\}.$$

U_i'ler bağımsız ve $P(U_i \geq \varepsilon) = 1 - \varepsilon$ olduğundan

$$P(M_n \geq \varepsilon) = P(U_1 \geq \varepsilon) \cdots P(U_n \geq \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n$$

bulunur. $0 < 1 - \varepsilon < 1$ olduğundan $(1-\varepsilon)^n \to 0$'dır. Böylece $M_n \xrightarrow{P} 0$.
Sayısal bir fikir vermek için $\varepsilon = 0{,}01$ ve $n = 500$ alalım:

$$P(M_{500} \geq 0{,}01) = 0{,}99^{500} \approx 0{,}0066.$$

Yani 500 gözlemin hepsinin 0,01'in üstünde kalması neredeyse imkânsızdır.
■

8.2 Zayıf Büyük Sayılar Yasası

Olasılıkta yakınsamanın istatistikteki en önemli örneği, örneklem ortalamasının kitle ortalamasına yakınsamasıdır. $X_1, \ldots, X_n$ bağımsız, her biri μ ortalamalı ve σ^2 varyanslı ise beklenen değerin doğrusallığından ve bağımsız değişkenlerde varyansın toplanmasından

$$E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu,$$

$$\text{Var}\,(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \text{Var}\,(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

olduğunu biliyoruz. $\bar{X}_n$'in merkezi yerinde durur, yayılımı ise sıfıra iner. Aşağıdaki teorem bu gözlemi olasılıkta yakınsama diliyle söyler.

Teorem 8.1 (Zayıf Büyük Sayılar Yasası). *$X_1, X_2, \ldots$ bağımsız, aynı μ ortalamasına ve aynı $\sigma^2 < \infty$ varyansına sahip rastgele değişkenler olsun. O zaman*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu$$

olur.

İspat.
$\varepsilon > 0$ verilsin. Chebyshev eşitsizliği (Olasılık Teorisi'ndeki ispatı) varyansı sonlu her Y ve her $c > 0$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P\left(\mid Y - E(Y) \mid \geq c\right) \leq \frac{\operatorname{Var}(Y)}{c^2}$$

der. Bunu $Y = \bar{X}_n$ *ve* $c = \varepsilon$ *ile uygulayalım.* $E(\bar{X}_n) = \mu$ *ve* $\operatorname{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$ *olduğundan*

$$0 \leq P\left(\mid \bar{X}_n - \mu \mid \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

bulunur. σ^2 *ve* ε *sabit olduğundan sağ taraf* $n \to \infty$ *iken* 0*'a gider. Ortadaki olasılık iki sıfıra giden dizi arasında sıkıştığından o da* 0*'a gider. Bu,* $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ *demektir.*
■

Yani örneklem hacmi büyüdükçe örneklem ortalaması, istediğimiz kadar yüksek bir olasılıkla, kitle ortalamasına istediğimiz kadar yakın olur. İspat bize bir de sayısal bir sınır verdi:

$$P\left(\mid \bar{X}_n - \mu \mid \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Bu sınır yasayı somut hesaplara çevirmemizi sağlar. Aşağıdaki örneklerde onu kullanacağız.

Örnek 8.3 (Zar Atışlarının Ortalaması). Düzgün bir tavla zarı arka arkaya atılıyor. X_i, i'inci atışta gelen sayı olsun; atışlar bağımsızdır. $\bar{X}_n$ hangi sayıya olasılıkta yakınsar?

Çözüm.
Her X_i, $\{1, 2, \ldots, 6\}$ üzerinde kesikli düzgün dağılımlıdır. Momentleri şöyle hesaplanır:

$$\mu = E(X_i) = \frac{1 + 2 + \cdots + 6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5,$$
$$E(X_i^2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6},$$
$$\sigma^2 = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{182 - 147}{12} = \frac{35}{12}.$$

Atışlar bağımsız, aynı dağılımlı ve varyans sonludur. Teorem 8.1 gereği

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu = 3{,}5$$

olur. Yani zar atıldıkça gelen sayıların ortalaması 3,5'e yaklaşır. Hiçbir atışta 3,5 gelmediği hâlde ortalama bu sayıya yerleşir.
■

En yalın özel durum, iki sonuçlu bir deneyin tekrarıdır. Yasa bu durumda olasılığın göreli sıklık yorumunu verir.

Sonuç 8.1 (Bernoulli Büyük Sayılar Yasası). *Başarı olasılığı* p *olan bağımsız denemeler yapılsın.* X_i*,* i*'inci denemede başarı olursa* 1*, olmazsa* 0 *olsun. Yani* $X_i \sim \text{Bernoulli}\ (p)$*'dir (Olasılık Teorisi'ndeki tanım).* n *denemedeki başarı sayısı* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ *ise*

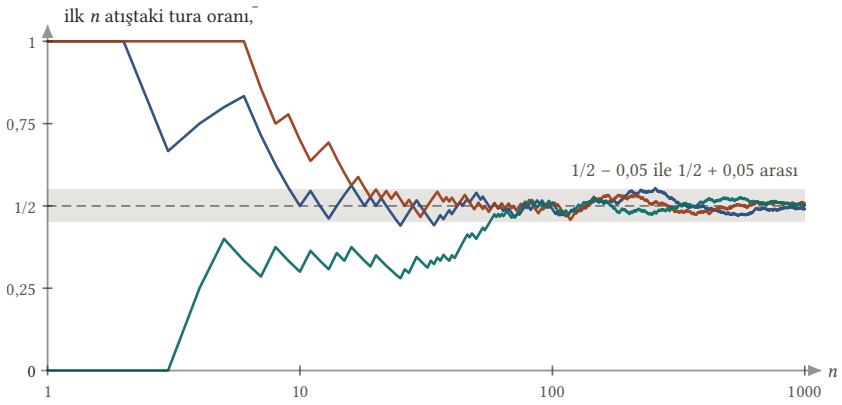
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$$

olur. Özel olarak düzgün bir para arka arkaya atıldığında ilk n *atıştaki tura oranı için*

$$\bar{X}_n = \frac{n \text{ atışta gelen tura sayısı}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{2}$$

yani her $\varepsilon > 0$ *için* $\lim_{n\to\infty} P\left(\mid \bar{X}_n - \tfrac{1}{2} \mid < \varepsilon\right) = 1$*'dir. Aşağıdaki şekil bu yakınsamayı üç ayrı deneyde gösteriyor.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.1: Düzgün bir paranın 1000 kez atıldığı üç ayrı deneyde, ilk n atıştaki tura oranı (yatay eksen logaritmik). İlk atışlarda oran 0 ile 1 arasında sert dalgalanır; n büyüdükçe üç yol da 1/2'nin çevresindeki 0,45 ile 0,55 arasındaki banda girer ve orada kalır.

İspat.
Bernoulli dağılımında $E(X_i) = p$ ve $\mathrm{Var}\,(X_i) = p(1-p)$'dir (ispatı). $p(1-p) \le \frac{1}{4}$ olduğundan varyans sonludur. X_i'ler bağımsız ve aynı dağılımlıdır, $\frac{S_n}{n} = \bar{X}_n$'dir. Teorem 8.1'yi $\mu = p$ ile uygularsak $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p$ bulunur. Düzgün para için $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$, yani $p = \frac{1}{2}$'dir.
■

Yani "düzgün bir para atıldıkça tura oranı $1/2$'ye yakınsar." Bir olayın olasılığı, deney çok kez tekrarlandığında o olayın gerçekleşme oranının yaklaştığı sayıdır. Zayıf büyük sayılar yasasının bu özel hâli **Bernoulli büyük sayılar yasası** olarak bilinir.

Örnek 8.4 (Bin Atışta Tura Oranı İçin Bir Üst Sınır). Düzgün bir para 1000 kez atılıyor. Tura oranının $1/2$'den en az $0{,}05$ sapması olasılığı için bir üst sınır bulun.

Çözüm.
$X_i \sim \mathrm{Bernoulli}\left(\frac{1}{2}\right)$ olduğundan $\sigma^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$'tür. Zayıf büyük sayılar yasasının ispatındaki sınırı $n = 1000$ ve $\varepsilon = 0{,}05$ ile kullanalım:

$$P\left(\left|\,\bar{X}_{1000} - \frac{1}{2}\,\right| \ge 0{,}05\right) \le \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = \frac{0{,}25}{1000\cdot 0{,}0025} = \frac{0{,}25}{2{,}5} = 0{,}1.$$

Sapma olasılığı en çok $0{,}1$'dir. Tümleyen olaya geçersek $P\left(\,0{,}45 < \bar{X}_{1000} < 0{,}55\,\right) \ge 0{,}9$ bulunur. Yani bin atışta tura oranı en az $0{,}9$ olasılıkla $0{,}45$ ile $0{,}55$ arasındadır.
■

Örnek 8.5 (Chebyshev Sınırıyla Gereken Atış Sayısı). Tura oranının $1/2$'den $0{,}05$'ten az sapması olasılığının en az $0{,}95$ olması isteniyor. Chebyshev sınırına göre düzgün bir para en az kaç kez atılmalıdır?

Çözüm.
$\sigma^2 = \frac{1}{4}$ ve $\varepsilon = 0{,}05$ ile

$$P\left(\left|\,\bar{X}_n - \frac{1}{2}\,\right| \ge 0{,}05\right) \le \frac{0{,}25}{n\cdot 0{,}0025} = \frac{100}{n}$$

olur. Tümleyene geçersek

$$P\left(\left|\,\bar{X}_n - \frac{1}{2}\,\right| < 0{,}05\right) \ge 1 - \frac{100}{n}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sağ tarafın en az 0,95 olması için $\frac{100}{n} \leq 0{,}05$, yani $n \geq \frac{100}{0{,}05} = 2000$ gerekir. Chebyshev sınırı 2000 atışın yeteceğini garanti eder. Merkezi limit teoremiyle aynı soruyu yeniden ele alacağız (Örnek 8.19) ve çok daha küçük bir sayı bulacağız.
■

8.3 Hemen Hemen Her Yerde Yakınsama

Olasılıkta yakınsama her n için ayrı ayrı bir olasılığa bakar. Daha güçlü bir istek şudur: deneyin her sonucu w için $X_n(w)$ sayı dizisi $X(w)$'ye yakınsasın. Bunun bütün sonuçlarda olması gerekmez; yakınsamanın olmadığı sonuçların olasılığının sıfır olması yeter.

Tanım 8.2 (Hemen Hemen Her Yerde Yakınsama). (X_n) dizisi ve X aynı $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ olasılık uzayında tanımlı olsun.

$$P\left(\left\{ w : \lim_{n\to\infty} X_n(w) = X(w) \right\}\right) = 1$$

ise (X_n) dizisi X rastgele değişkenine **hemen hemen her yerde** (h.h.h.) **yakınsar** denir ve

$$X_n \overset{\text{h.h.h.}}{\underset{n\to\infty}{\to}} X$$

yazılır. Denk olarak her $\varepsilon > 0$ için

$$P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{ w : \mid X_n(w) - X(w) \mid < \varepsilon \}\right) = 1$$

olmalıdır.

Yani olasılıkta yakınsamada limit olasılığın **dışındadır**: önce $P(\mid X_n - X \mid \geq \varepsilon)$ sayıları hesaplanır, sonra bu sayı dizisinin limiti alınır. Hemen hemen her yerde yakınsamada ise limit olasılığın **içindedir**: her w için $X_n(w)$ sayı dizisine bakılır ve yakınsamanın olmadığı sonuçların kümesinin olasılığı 0 olmalıdır.
Tanımdaki ikinci koşulun içindeki küme, "bir N'den sonraki bütün n'lerde $\mid X_n(w) - X(w) \mid < \varepsilon$" olan sonuçlardan oluşur. $X_n(w) \to X(w)$ olması, bunun her ε için sağlanması demektir. $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ değerleri yeterlidir. Bu yüzden yakınsama kümesi, $\varepsilon = \frac{1}{k}$ için yazılan bu kümelerin $k = 1, 2, \ldots$ üzerinden kesişimidir. İkinci koşul sağlanıyorsa olasılığı 1 olan sayılabilir çoklukta olayın kesişiminin olasılığı da 1 olduğundan birinci koşul da sağlanır. Tersine, yakınsama kümesi her ε için bu kümenin içinde kaldığından birinci koşul ikinciyi verir. Demek ki iki koşul denktir.

Teorem 8.2 (Güçlü Büyük Sayılar Yasası). *$X_1, X_2, \ldots$ bağımsız, aynı dağılımlı, beklenen değeri μ ve varyansı $\sigma^2 < \infty$ olan rastgele değişkenler olsun. O zaman*

$$\bar{X}_n \overset{\text{h.h.h.}}{\underset{n\to\infty}{\to}} \mu$$

olur.

Yani örneklem ortalaması hemen hemen her yerde kitle ortalamasına yakınsar. Gözlemler birer birer eklendikçe hesaplanan ortalamalar dizisi, olasılığı 1 olan bir olay üzerinde μ'ye yakınsar. Sonuç 8.1'deki şekil tam bunu gösterir: her yol, yani her w için çizilen $\bar{X}_n(w)$ dizisi, ayrı ayrı $1/2$'ye gider. Bu yakınsama **güçlü büyük sayılar yasası** olarak bilinir. İspatı Borel–Cantelli lemması gibi bu dersin kapsamı dışındaki ölçü kuramı araçlarını gerektirir. Teorem, varyans sonsuz olsa bile $E \mid X_1 \mid < \infty$ olduğu sürece geçerlidir.

8.4 Dağılımda Yakınsama

Üçüncü yakınsama türü rastgele değişkenlerin değerlerine değil, yalnız dağılım fonksiyonlarına bakar. Bu yüzden X_n'lerin ve X'in aynı olasılık uzayında tanımlı olması bile gerekmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 8.3 (Dağılımda Yakınsama). (X_n), dağılım fonksiyonları F_n olan rastgele değişkenlerin bir dizisi, X de dağılım fonksiyonu F olan bir rastgele değişken olsun. F'nin sürekli olduğu her x noktasında

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

oluyorsa (X_n) dizisi X rastgele değişkenine **dağılımda yakınsar** denir ve $X_n \xrightarrow{D} X$ yazılır.

Yani n büyükken X_n ile ilgili olasılıklar X'in olasılıklarıyla yaklaşık olarak hesaplanabilir. F'nin sürekli olduğu $a < b$ noktaları için

$$P(a < X_n \le b) = F_n(b) - F_n(a) \to F(b) - F(a) = P(a < X \le b)$$

olur. Limit dağılım normal dağılım gibi sürekliyse koşul her x için geçerlidir. Tanımın F'nin sıçrama noktalarını neden dışarıda bıraktığını aşağıdaki ikinci örnek gösteriyor. Dağılımda yakınsamanın en önemli örneği ise bölümün sonundaki merkezi limit teoremidir.

Örnek 8.6 (Kesikli Düzgünden Sürekli Düzgüne). X_n, $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ kümesi üzerinde kesikli düzgün dağılımlı olsun. $X_n \xrightarrow{D} X$ olduğunu gösterin; burada $X \sim U(0,1)$'dir.

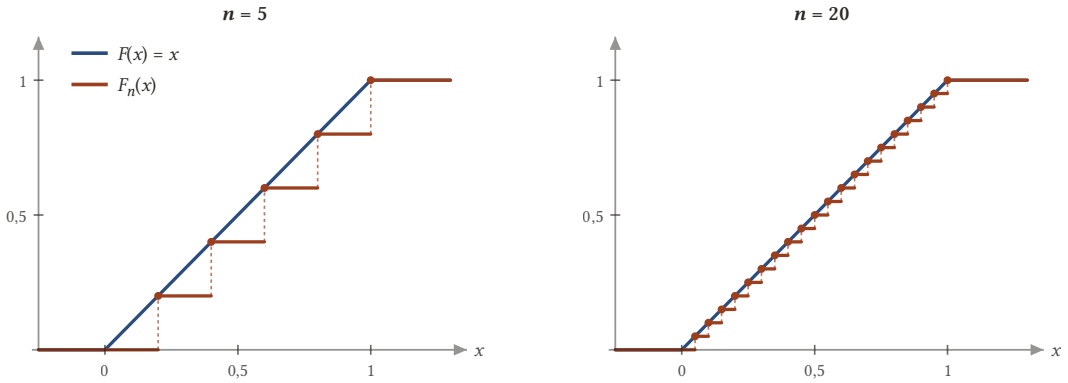
Çözüm.
$U(0,1)$ dağılımının dağılım fonksiyonu $x < 0$ için $F(x) = 0$, $0 \le x < 1$ için $F(x) = x$, $x \ge 1$ için $F(x) = 1$'dir. Bu fonksiyon her yerde süreklidir, bu yüzden yakınsamayı her x için göstermeliyiz.
X_n her $\frac{k}{n}$ değerini $\frac{1}{n}$ olasılıkla alır. x'ten küçük ya da ona eşit olan $\frac{k}{n}$ değerlerinin sayısı, $k \le nx$ koşulunu sağlayan $k \ge 1$ tam sayılarının sayısıdır. Buna göre:

- $x < 0$ ise $F_n(x) = 0 = F(x)$.
- $x \ge 1$ ise bütün değerler x'in solundadır ve $F_n(x) = 1 = F(x)$.
- $0 \le x < 1$ ise $F_n(x) = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$'dir. Burada $\lfloor nx \rfloor$, nx'i aşmayan en büyük tam sayıdır.

Son durumda $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \le nx$ eşitsizliğini n'ye bölersek

$$x - \frac{1}{n} < F_n(x) \le x$$

elde ederiz. Sıkıştırma ile $F_n(x) \to x = F(x)$ bulunur. Demek ki her x için $F_n(x) \to F(x)$ ve $X_n \xrightarrow{D} X$.



Şekil 8.2: {1/n, 2/n, ..., 1} kümesi üzerindeki kesikli düzgün dağılımın basamaklı dağılım fonksiyonu F_n (turuncu) ile U(0, 1) dağılımının F(x) = x fonksiyonu (mavi). Solda n = 5, sağda n = 20: basamaklar 1/n yüksekliğindedir ve n büyüdükçe doğruya yapışır.

Örnek şunu gösteriyor: her biri kesikli olan dağılımlar sürekli bir dağılıma yakınsayabilir. Basamaklar $\frac{1}{n}$ yüksekliğinde olduğundan n büyüdükçe basamaklı fonksiyon doğrudan ayırt edilemez hâle gelir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 8.7 (Sıçrama Noktasında Yakınsamayan Dağılım Fonksiyonları). Her n için $X_n = \frac{1}{n}$ sabit rastgele değişken, $X = 0$ olsun. $F_n(0)$ dizisinin $F(0)$'a yakınsamadığını, buna karşın $X_n \xrightarrow{D} X$ olduğunu gösterin.

Çözüm.
Sabit değişkenlerin dağılım fonksiyonları tek bir sıçramadan oluşur:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, x < \frac{1}{n}, \\ 1, x \geq \frac{1}{n}, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1, x \geq 0. \end{cases}$$

- $x < 0$ ise her n için $x < \frac{1}{n}$'dir ve $F_n(x) = 0 = F(x)$.
- $x > 0$ ise $n > \frac{1}{x}$ için $\frac{1}{n} < x$ olur ve $F_n(x) = 1 = F(x)$. Yani dizi bir yerden sonra sabit olarak $F(x)$'e eşittir.
- $x = 0$ için her n'de $F_n(0) = 0$'dır ama $F(0) = 1$'dir. Bu noktada yakınsama yoktur.

F'nin süreksiz olduğu tek nokta 0'dır. Tanım bu noktayı dışarıda bıraktığı için $X_n \xrightarrow{D} 0$ olur.
Sayılar olarak $\frac{1}{n} \to 0$ olduğundan bu sonucu beklemeliyiz. Yakınsamayı her noktada isteseydik, $\frac{1}{n}$ gibi en basit dizi bile dağılımda yakınsamazdı. Tanım, F'nin sıçrama noktalarını bu yüzden dışarıda bırakır.
■

8.5 Yakınsama Türleri Arasındaki İlişkiler

Üç yakınsama türü birbirinden bağımsız değildir. Biri diğerini gerektirir ve aralarında kesin bir sıralama vardır.

Teorem 8.3 (Yakınsama Türleri Arasındaki İlişkiler). *(X_n) dizisi ve X aynı olasılık uzayında tanımlı olsun.*
(i) *$X_n \xrightarrow[P]{\text{h.h.h.}} X$ ise $X_n \xrightarrow[D]{P} X$ olur.*
(ii) *$X_n \xrightarrow{P} X$ ise $X_n \xrightarrow{D} X$ olur.*

İspat.
(i) *$\varepsilon > 0$ verilsin ve her N için*

$$A_N = \bigcap_{n=N}^{\infty} \{\mid X_n - X \mid < \varepsilon\}$$

olsun. A_{N+1}, A_N'deki koşulların birini daha az içerir; bu yüzden $A_N \subseteq A_{N+1}$ olur ve (A_N) artan bir dizidir. Tanımın denk biçimine göre $\bigcup_N A_N$ birleşiminin olasılığı 1'dir. Olasılığın sürekliliği gereği $P(A_N) \to 1$ olur. Öte yandan $A_N \subseteq \{\mid X_N - X \mid < \varepsilon\}$'dir. Buradan

$$1 \geq P(\mid X_N - X \mid < \varepsilon) \geq P(A_N) \underset{N\to\infty}{\to} 1$$

elde edilir. Demek ki $\lim_{N\to\infty} P(\mid X_N - X \mid < \varepsilon) = 1$, yani $X_n \xrightarrow{P} X$.
(ii) *x, F'nin sürekli olduğu bir nokta olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $X_n \leq x$ iken $X > x + \varepsilon$ ise $X - X_n > \varepsilon$ olur. Bu yüzden*

$$\{X_n \leq x\} \subseteq \{X \leq x + \varepsilon\} \cup \{\mid X_n - X \mid \geq \varepsilon\}$$

olur. Benzer biçimde $X \leq x - \varepsilon$ iken $X_n > x$ ise $X_n - X > \varepsilon$ olur:

$$\{X \leq x - \varepsilon\} \subseteq \{X_n \leq x\} \cup \{\mid X_n - X \mid \geq \varepsilon\}.$$

Birleşimin olasılığı olasılıkların toplamını aşmaz. $p_n = P(\mid X_n - X \mid \geq \varepsilon)$ dersek iki kapsamadan

$$F(x - \varepsilon) - p_n \leq F_n(x) \leq F(x + \varepsilon) + p_n$$

bulunur. Varsayım gereği $p_n \to 0$'dır. $n \to \infty$ iken alt ve üst limitlere geçersek

$$F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Bu her $\varepsilon > 0$ için doğrudur. F, x'te sürekli olduğundan $\varepsilon \to 0$ iken iki uç da $F(x)$'e gider. Demek ki alt ve üst limit $F(x)$'e eşittir ve $F_n(x) \to F(x)$ olur.
■

Yani en güçlü yakınsama hemen hemen her yerde yakınsamadır, en zayıfı dağılımda yakınsamadır:

$$X_n \overset{\text{h.h.h.}}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{P}{\to} X \Rightarrow X_n \overset{D}{\to} X.$$

Özel olarak güçlü büyük sayılar yasası zayıf olanı içerir. İki gerektirmenin tersi doğru değildir. Aşağıdaki iki örnek bunu gösteriyor.

Örnek 8.8 (Dağılımda Yakınsayan Ama Olasılıkta Yakınsamayan Dizi). $X \sim N(0,1)$ ve her n için $X_n = -X$ olsun. $X_n \overset{D}{\to} X$ olduğunu, ama (X_n)'in olasılıkta X'e yakınsamadığını gösterin.

Çözüm.
Standart normal eğri 0 etrafında simetrik olduğundan $-X$ de $N(0,1)$ dağılımlıdır (Bağımsız Normallerin Doğrusal Birleşimi, tek terim ve $a_1 = -1$ ile). Bu yüzden her n için $F_n = F$ olur ve $X_n \overset{D}{\to} X$ kendiliğinden sağlanır.
Öte yandan $\mid X_n - X \mid = \mid -X - X \mid = 2 \mid X \mid$'tir. $\varepsilon = 1$ alalım. Standart normal tablosundan $P(0 \le Z \le 0{,}5) = 0{,}1915$ okunur ve her n için

$$\begin{aligned} P(\mid X_n - X \mid \ge 1) &= P\left(\mid X \mid \ge \frac{1}{2} \right) = 1 - 2P(0 \le X \le 0{,}5) \\ &= 1 - 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}6170 \end{aligned}$$

bulunur. Bu olasılık n'ye bağlı değildir ve 0'a gitmez. Demek ki X_n olasılıkta X'e yakınsamaz.
Dağılımda yakınsama yalnız dağılımların birbirine yaklaştığını söyler. Değişkenlerin kendileri birbirinden uzak kalabilir. Burada X_n ile X aynı dağılıma sahiptir ama her zaman ters işaretlidir.
■

Örnek 8.9 (Olasılıkta Yakınsayan Ama Hemen Hemen Her Yerde Yakınsamayan Dizi). $\Omega = [0,1]$ olsun ve bir alt aralığın olasılığı uzunluğu olsun (yani w, $[0,1]$'den düzgün seçiliyor). Her $n \ge 1$ tam sayısı tek bir biçimde $n = 2^k + j$ olarak yazılır; burada $k \ge 0$ ve $0 \le j < 2^k$'dir. Buna göre

$$I_n = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right], \qquad X_n(w) = \begin{cases} 1, w \in I_n, \\ 0, w \notin I_n \end{cases}$$

tanımlansın. $X_n \overset{P}{\to} 0$ olduğunu, ama $X_n(w)$ dizisinin hiçbir w için yakınsamadığını gösterin.

Çözüm.
Önce diziyi tanıyalım. $n = 1$ için $I_1 = [0,1]$ olur. $n = 2, 3$ için I_n sırayla $[0, \frac{1}{2}]$ ve $[\frac{1}{2}, 1]$ olur. $n = 4, \ldots, 7$ için $[0,1]$'in dört çeyreğini sırayla tarar, ve böyle devam eder. Her "tur" $[0,1]$'i baştan sona, her seferinde yarı boyda bloklarla tarar.
Olasılıkta yakınsama. $0 < \varepsilon \le 1$ ise $\mid X_n \mid \ge \varepsilon$ olayı $w \in I_n$ olayıdır ve

$$P(\mid X_n - 0 \mid \ge \varepsilon) = P(I_n) = \frac{1}{2^k}$$

olur. $\varepsilon \ge 1$ ise bu olasılık 0'dır. $2^k \le n < 2^{k+1}$ olduğundan $n \to \infty$ iken $k \to \infty$ ve $\frac{1}{2^k} \to 0$ olur. Demek ki $X_n \overset{P}{\to} 0$.
Hemen hemen her yerde yakınsamama. $w \in [0,1]$ sabit olsun. Her k turunda 2^k blok $[0,1]$'i örter. Bu yüzden w bu bloklardan en az birindedir ve o turda en az bir n için $X_n(w) = 1$ olur. $k \ge 2$ iken bir turda en az dört blok vardır ve w bunlardan en çok ikisine (iki komşu bloğun ortak ucuysa) düşer. Bu yüzden aynı turda en az bir n için $X_n(w) = 0$ olur. Demek ki $X_n(w)$ dizisi sonsuz kez 1, sonsuz kez 0 değerini alır ve yakınsamaz.
Bu her w için doğru olduğundan yakınsamanın olduğu küme boştur ve olasılığı 0'dır, 1 değildir. Olasılıkta yakınsamada bloklar küçüldüğü için "şanssız" sonuçların olasılığı azalır. Ama bloklar her turda yeniden başa döndüğü için her sonuç sonsuz kez şanssız olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

8.6 Merkezi Limit Teoremi

Büyük sayılar yasası $\bar{X}_n$'in μ'ye yaklaştığını söyler. Ama μ çevresinde nasıl dağıldığını söylemez. $\text{Var}\,(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$ sıfıra gittiği için dağılımın biçimini görmek istiyorsak $\bar{X}_n$'i standartlaştırmalıyız:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{Var}\,(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Her n için $E(Z_n) = 0$ ve $\text{Var}\,(Z_n) = 1$'dir. Merkezi limit teoremi, kitlenin dağılımı ne olursa olsun Z_n'in dağılımının standart normal dağılıma yaklaştığını söyler. Önce $E(\bar{X}_n)$ ve $\text{Var}\,(\bar{X}_n)$ hesabını somut bir kitlede görelim.

Örnek 8.10 (Binom Kitleden Alınan Örneklemlerin Ortalaması). Kitle $X \sim \text{Binom}\left(30, \frac{2}{5}\right)$ dağılımlıdır. Bu kitleden alınan 5 ve 12 hacimli rastgele örneklemlerin ortalamalarının beklenen değerlerini ve varyanslarını karşılaştırın.

Çözüm.
Binom dağılımının momentlerinden

$$\mu = E(X) = 30 \cdot \frac{2}{5} = 12, \qquad \sigma^2 = \text{Var}\,(X) = 30 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{36}{5}$$

bulunur. $E(\bar{X}_n) = \mu$ ve $\text{Var}\,(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$ olduğundan

$$n = 5: \quad E(\bar{X}_5) = 12, \quad \text{Var}\,(\bar{X}_5) = \frac{36/5}{5} = \frac{36}{25} = 1{,}44,$$
$$n = 12: \quad E(\bar{X}_{12}) = 12, \quad \text{Var}\,(\bar{X}_{12}) = \frac{36/5}{12} = \frac{36}{60} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

olur. İki ortalamanın merkezi aynıdır: kitle ortalaması 12. Örneklem büyüdükçe varyans küçülür: 1,44'ten 0,6'ya iner. Standartlaştırılmış

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - 12}{\sqrt{36/(5n)}}$$

değişkeni ise her iki n için de 0 ortalamalı ve 1 varyanslıdır. Merkezi limit teoremi bu Z_n'in dağılımıyla ilgilidir.
■

İspatta moment üreten fonksiyonları kullanacağız. Teklik teoremine göre moment üreten fonksiyon dağılımı belirler. Aşağıdaki teorem bunun limit hâlidir: moment üreten fonksiyonlar yakınsıyorsa dağılımlar da yakınsar. İspatı karakteristik fonksiyonlar için süreklilik teoremine dayanır ve bu dersin kapsamı dışındadır. Burada teoremi kullanacağız.

Teorem 8.4 (Moment Üreten Fonksiyonlar İçin Süreklilik Teoremi). *$Z_1, Z_2, \ldots$ ve Z rastgele değişkenlerinin moment üreten fonksiyonları ortak bir $(-h, h)$ aralığında var olsun. Her $t \in (-h, h)$ için*

$$\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t)$$

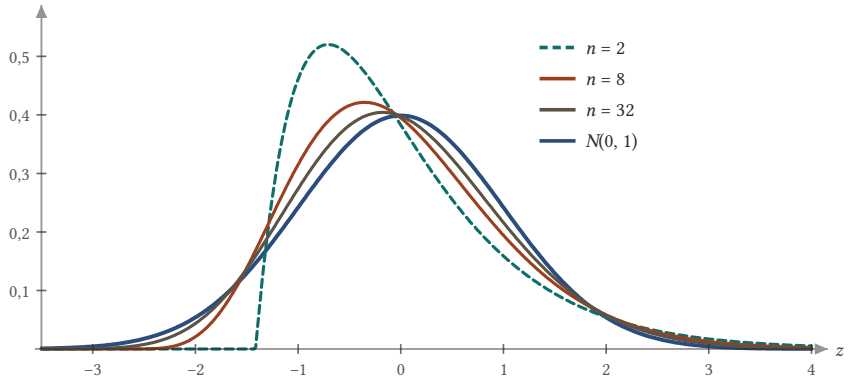
ise $Z_n \xrightarrow{D} Z$ olur.

Teorem 8.5 (Merkezi Limit Teoremi). *$X_1, X_2, \ldots$ bağımsız, aynı dağılımlı, beklenen değeri μ ve varyansı $0 < \sigma^2 < \infty$ olan rastgele değişkenler olsun. Moment üreten fonksiyonları 0'ın bir komşuluğunda var olsun. O zaman $n \to \infty$ iken*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{Var }(\bar{X}_n)}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

olur. $N(0,1)$*'in dağılım fonksiyonu* Φ *her yerde sürekli olduğundan bu, her* z *için* $\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z)$ *demektir.*
Aşağıdaki şekilde X_i*'ler çok çarpık bir dağılıma,* Üstel (1) *dağılımına sahiptir.* Z_n*'in gerçek yoğunluğu* n *büyüdükçe yine de standart normal yoğunluğa yaklaşır.*



Şekil 8.3: Üstel(1) dağılımlı n bağımsız değişkenin standartlaştırılmış toplamının (ya da ortalamasının) gerçek yoğunluğu, n = 2, 8 ve 32 için. Üstel dağılım çok çarpıktır; yine de n büyüdükçe eğriler standart normal yoğunluğa (mavi) yaklaşır.

İspat.
Standartlaştırma. $Y_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ *diyelim.* Y_i*'ler bağımsız ve aynı dağılımlıdır,* $E(Y_i) = 0$ *ve* $E(Y_i^2) = \text{Var }(Y_i) = 1$*'dir.* M_X *fonksiyonu* $(-h, h)$ *aralığında varsa*

$$M_Y(s) = E\left(\, e^{s(X-\mu)/\sigma}\,\right) = e^{-\mu s/\sigma} M_X\left(\frac{s}{\sigma}\right)$$

fonksiyonu $\mid s \mid < \sigma h$ *için vardır.* $h' = \sigma h$ *diyelim. Ayrıca*

$$\bar{X}_n - \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu) = \frac{\sigma}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

olduğundan $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ *olur.*
Z_n'in moment üreten fonksiyonu. Y_i*'ler bağımsız olduğundan* $e^{tY_i/\sqrt{n}}$ *çarpanları da bağımsızdır. Bağımsız değişkenlerin çarpımının beklenen değeri beklenen değerlerin çarpımıdır. Buradan* $\mid t \mid < h'\sqrt{n}$ *için*

$$M_{Z_n}(t) = E\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tY_i/\sqrt{n}}\right) = \prod_{i=1}^{n} M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left[\, M_Y\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n$$

bulunur. Özel olarak her M_{Z_n} *ortak* $(-h', h')$ *aralığında vardır.*
Taylor açılımı. *Moment üreten fonksiyondan momentler teoremine göre* $\mid s \mid < h'$ *için* M_Y *kuvvet serisine açılır:*

$$M_Y(s) = 1 + E(Y)\, s + \frac{E(Y^2)}{2}\, s^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{E(Y^k)}{k!}\, s^k = 1 + \frac{s^2}{2} + r(s).$$

Burada $r(s)$ *son toplamdır.* $\dfrac{r(s)}{s^2} = \displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{E(Y^k)}{k!}\, s^{k-2}$ *de yakınsak bir kuvvet serisidir ve* $s = 0$*'da değeri* 0*'dır. Kuvvet serileri sürekli olduğundan* $s \to 0$ *iken* $\dfrac{r(s)}{s^2} \to 0$ *olur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Limit. *$t \in (-h', h')$ sabit olsun. $t = 0$ ise $M_{Z_n}(0) = 1 = e^0$ olur ve söylenecek bir şey yoktur. $t \neq 0$ olsun ve*

$$a_n = \frac{t^2}{2n} + r\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

diyelim. Böylece $M_{Z_n}(t) = (1 + a_n)^n$ olur. $\frac{t}{\sqrt{n}} \to 0$ olduğundan

$$na_n = \frac{t^2}{2} + t^2 \cdot \frac{r(t/\sqrt{n})}{(t/\sqrt{n})^2} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{t^2}{2}$$

bulunur. Buradan $a_n \to 0$ olur. $g(a) = \frac{\ln(1+a)}{a}$ $(a \neq 0)$ ve $g(0) = 1$ fonksiyonu 0'da süreklidir. n yeterince büyükken $1 + a_n > 0$ olduğundan

$$\ln M_{Z_n}(t) = n \ln(1 + a_n) = na_n \cdot g(a_n) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{t^2}{2} \cdot 1 = \frac{t^2}{2}$$

olur. Üstel fonksiyon sürekli olduğundan $M_{Z_n}(t) \to e^{t^2/2}$ elde edilir.
Sonuç. *$e^{t^2/2}$, her t için var olan $N(0,1)$ dağılımının moment üreten fonksiyonudur. $(-h', h')$ aralığındaki her t için $M_{Z_n}(t) \to M_Z(t)$ gösterdik; burada $Z \sim N(0,1)$'dir. Teorem 8.4 gereği $Z_n \xrightarrow{D} Z$ olur.*
■

Yani $X_1, X_2, \ldots$ rastgele değişkenlerinin dağılımı ne olursa olsun (kesikli ya da sürekli, simetrik ya da çarpık), örneklem hacmi büyüdükçe örneklem ortalamasının dağılımı beklenen değeri μ, varyansı σ^2/n olan normal dağılıma yaklaşır:

$$\bar{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad (n \ \text{büyük}).$$

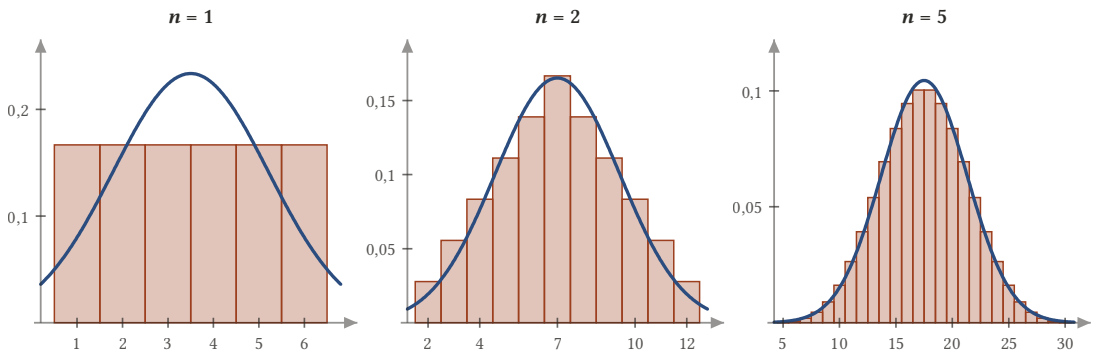
Uygulamada genel olarak $n \geq 30$ yeterli sayılır. Kitle simetrikse daha küçük n de iyi sonuç verir, çok çarpıksa daha büyük n gerekir. Kitle zaten normalse "yaklaşık" sözcüğü kalkar: $\bar{X}_n$ her n için tam olarak $N(\mu, \sigma^2/n)$ dağılımlıdır (Bağımsız Normallerin Doğrusal Birleşimi). Moment üreten fonksiyon varsayımı yalnız bizim ispatımız içindir. Teorem, karakteristik fonksiyonlarla verilen bir ispatla, $\sigma^2 < \infty$ olduğu sürece geçerlidir.
Teoremi toplamlar için de yazabiliriz. Bu biçim, toplam süre, toplam ağırlık ya da toplam puan gibi sorularda doğrudan kullanılır.

Sonuç 8.2 (Merkezi Limit Teoreminin Toplam Biçimi). *Teorem 8.5'nin varsayımları altında $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ olsun. O zaman*

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\text{Var}\ (S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

olur. Yani büyük n için $S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$'dir. Aşağıdaki şekilde X_i'ler zar atışlarıdır. Tek zarın düz dağılımı, birkaç zar toplandığında bile çan eğrisine dönüşür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.4: n zarın toplamının olasılıkları (genişliği 1 olan turuncu dikdörtgenler) ve aynı beklenen değer ile varyansa sahip N(3,5n; 35n/12) eğrisi, n = 1, 2 ve 5 için. Tek zarın dağılımı düzdür; iki zarda üçgen olur, beş zarda şimdiden çan eğrisine çok yakındır.

İspat.
Beklenen değerin doğrusallığından $E(S_n) = n\mu$*, bağımsızlıktan* $\text{Var}\,(S_n) = n\sigma^2$ *olur. Pay ve paydayı* n*'ye bölersek*

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}\left(S_n - n\mu\right)}{\frac{1}{n}\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_n$$

bulunur. Sol taraf, Teorem 8.5'deki Z_n *ile aynı rastgele değişkendir. Bu yüzden onunla aynı limite,* $N(0,1)$*'e dağılımda yakınsar.*
■

Binom dağılımı bağımsız Bernoulli değişkenlerinin toplamı olduğundan toplam biçiminin ilk ve en eski uygulaması binoma normal yaklaşımdır. Normal Dağılım bölümünde ispatsız kullandığımız teorem şimdi kolayca elde edilir.

Sonuç 8.3 (Binoma Normal Yaklaşım: De Moivre-Laplace Teoremi). $0 < p < 1$, $q = 1 - p$ *ve her* n *için* $X_n \sim \text{Binom}\,(n,p)$ *olsun. O zaman*

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

olur. Yani De Moivre-Laplace teoremi doğrudur: her $a < b$ *için*

$$P\left(a \le \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \to P(a \le Z \le b).$$

İspat.
$Y_1, Y_2, \ldots$ *bağımsız ve her biri* $\text{Bernoulli}\,(p)$ *dağılımlı olsun,* $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ *diyelim.* n *bağımsız denemedeki başarı sayısı binom dağılımlı olduğundan* $S_n \sim \text{Binom}\,(n,p)$*'dir. Olasılıklar yalnız dağılıma bağlı olduğundan* X_n *yerine* S_n *ile çalışabiliriz.*
Y_i*'lerin beklenen değeri* $\mu = p$*, varyansı* $\sigma^2 = pq$*'dur ve* $0 < p < 1$ *olduğundan* $0 < \sigma^2 < \infty$*'dur. Moment üreten fonksiyonları* $M_Y(t) = q + pe^t$ *her* t *için vardır. Sonuç 8.2'ın bütün varsayımları sağlanır ve*

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

bulunur. Limit dağılım fonksiyonu Φ *her yerde sürekli olduğundan her* $a < b$ *için*

$$P\left(a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Standartlaştırılmış S_n'in a noktasındaki olasılığı da sıfıra gider: $\varepsilon > 0$ için bu olasılık, $(a-\varepsilon, a]$ aralığının olasılığını aşmaz ve o da $\Phi(a) - \Phi(a-\varepsilon)$'a yakınsar. ε istendiği kadar küçük seçilebildiğinden sol ucun $\leq$ ya da $<$ olması limiti değiştirmez. Sonuç olarak limit $P(a \leq Z \leq b)$ olur.
■

8.7 Merkezi Limit Teoremiyle Olasılık Hesabı

Teoremin uygulamadaki değeri, kitlenin dağılımını bilmeden örneklem ortalaması ya da toplamı hakkında olasılık hesaplayabilmemizdir. Hesap her seferinde aynı şemayı izler.

Merkezi limit teoremiyle olasılık hesabı dört adımda

1. Kitlenin μ ortalamasını ve σ^2 varyansını bulun.
2. Soru ortalama hakkındaysa $\bar{X}_n \approx N(\mu, \sigma^2/n)$, toplam hakkındaysa $S_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$ alın.
3. Olayın sınırlarını standartlaştırın: $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ya da $z = \dfrac{s - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$.
4. Olasılığı standart normal tablosundan okuyun. Değişken tam sayı değerliyse ve tek bir değerin olasılığı soruluyorsa süreklilik düzeltmesi yapın.

İlk dört örnek aynı deneyle ilgilidir: düzgün bir tavla zarı 100 kez atılıyor. Örnek 8.3'de bulduğumuz gibi tek atışta $\mu = 3{,}5$ ve $\sigma^2 = 35/12$'dir. Zar ortalamasının $3{,}5$'e yakınsadığını büyük sayılar yasasından biliyoruz. Şimdi bu yakınsamanın hızını soruyoruz.

Örnek 8.11 (Yüz Atışın Ortalamasının 3,5'e Yakınlığı). Düzgün bir zar 100 kez atılıyor ($\mu = 3{,}5$, $\sigma^2 = 35/12$). Gelen sayıların ortalaması $\bar{X}_{100}$ için $P\left(\,|\,\bar{X}_{100} - 3{,}5\,|\,\leq 0{,}1\,\right)$ olasılığı nedir?

Çözüm.
Önce $\bar{X}_{100}$'ün beklenen değerini ve varyansını bulalım:

$$E(\bar{X}_{100}) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} E(X_i) = \frac{100 \cdot 3{,}5}{100} = 3{,}5,$$

$$\operatorname{Var}\,(\bar{X}_{100}) = \frac{1}{100^2}\sum_{i=1}^{100} \operatorname{Var}\,(X_i) = \frac{100 \cdot \frac{35}{12}}{100 \cdot 100} = \frac{35}{1200}.$$

Olayın iki yanını standart sapmaya bölelim:

$$P\left(\,|\,\bar{X}_{100} - 3{,}5\,|\,\leq 0{,}1\,\right) = P\left(\frac{|\,\bar{X}_{100} - 3{,}5\,|}{\sqrt{35/1200}} \leq \frac{0{,}1}{\sqrt{35/1200}}\right).$$

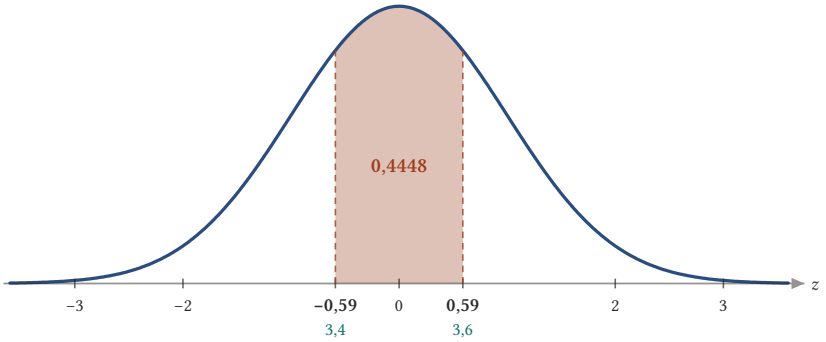
Sağdaki sınır

$$\frac{0{,}1}{\sqrt{35/1200}} = \sqrt{\frac{0{,}01 \cdot 1200}{35}} = \sqrt{\frac{12}{35}} \approx 0{,}5855 \approx 0{,}59$$

olur. Merkezi limit teoremine göre soldaki standartlaştırılmış değişken yaklaşık olarak $Z \sim N(0,1)$ dağılımlıdır. Standart normal tablosundan $P(0 \leq Z \leq 0{,}59) = 0{,}2224$ okunur:

$$P\left(\,|\,\bar{X}_{100} - 3{,}5\,|\,\leq 0{,}1\,\right) \approx P(-0{,}59 \leq Z \leq 0{,}59) = 2 \cdot 0{,}2224 = 0{,}4448.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.5: 100 zar atışının ortalaması için $3{,}4 \le \bar{X} \le 3{,}6$ olayı yaklaşık olarak $-0{,}59 \le Z \le 0{,}59$ olayına karşılık gelir; taralı alan $2 \cdot 0{,}2224 = 0{,}4448$'dir. Eksenin altındaki ikinci satırda $\bar{X}$'nin karşılık gelen değerleri var.

Yani 100 atıştan sonra bile ortalamanın 3,5'e 0,1'den yakın olma olasılığı yarıdan azdır. Büyük sayılar yasası sonunda işler, ama yavaş işler.
■

Örnek 8.12 (On Bin Atışın Ortalamasının 3,5'e Yakınlığı). Düzgün bir zar 10000 kez atılıyor ($\mu = 3{,}5$, $\sigma^2 = 35/12$). $P\left(\mid \bar{X}_{10000} - 3{,}5 \mid \le 0{,}1 \right)$ olasılığını hesaplayın.

Çözüm.
$E(\bar{X}_{10000}) = 3{,}5$ ve

$$\text{Var}\ (\bar{X}_{10000}) = \frac{35/12}{10000} = \frac{35}{120000}$$

olur. Standartlaştırılmış sınır

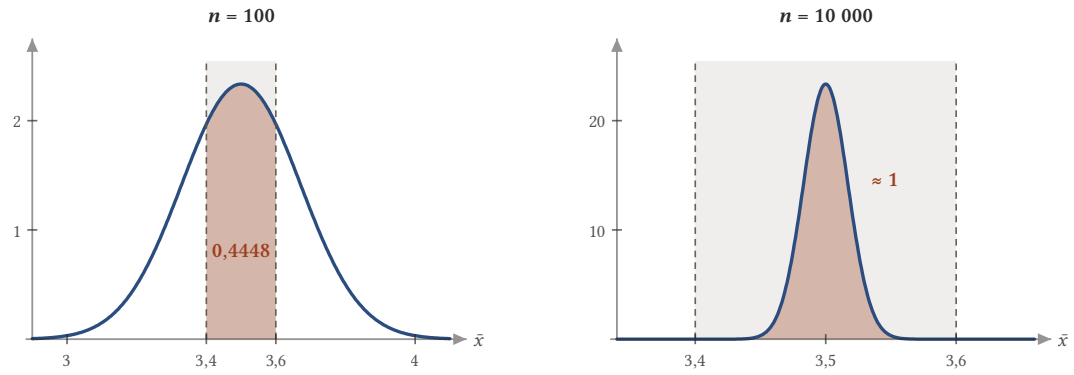
$$\frac{0{,}1}{\sqrt{35/120000}} = \sqrt{\frac{0{,}01 \cdot 120000}{35}} = \sqrt{\frac{1200}{35}} = 10\sqrt{\frac{12}{35}} \approx 5{,}86$$

bulunur. Merkezi limit teoremiyle

$$P\left(\mid \bar{X}_{10000} - 3{,}5 \mid \le 0{,}1 \right) \approx P(\mid Z \mid \le 5{,}86) = 2P(0 \le Z \le 5{,}86).$$

Standart normal tablosu 3,9'dan sonra dört ondalıkla 0,5000 verir. Yani olasılık dört ondalıkla 1'dir. Daha duyarlı bir hesap $2P(0 \le Z \le 5{,}86) \approx 0{,}999999995$ verir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.6: Zar ortalamasının yaklaşık yoğunluğu N(3,5; (35/12)/n) ve 3,4 ile 3,6 arasındaki bant. n = 100 iken bandın içinde kalan alan 0,4448'dir. n = 10 000 iken yoğunluk öylesine sivrilir ki (eksen ölçeği farklı) bütün alan bandın içine sığar: olasılık 0,999999995'tir.

Hacim 100 kat artınca standart sapma 10 kat küçüldü. Aynı $\pm 0{,}1$'lik bant, $\pm 0{,}59$ standart sapmalık bir banttan $\pm 5{,}86$ standart sapmalık bir banda dönüştü. Chebyshev sınırı bile burada güçlü bir sonuç verir:

$$P\left(\mid \bar{X}_{10000} - 3{,}5 \mid \leq 0{,}1 \right) \geq 1 - \frac{35/120000}{0{,}01} = 1 - \frac{35}{1200} \approx 0{,}9708.$$

■

Örnek 8.13 (Yüz Atışın Toplamının Bir Aralıkta Olması). Düzgün bir zar 100 kez atılıyor ($\mu = 3{,}5$, $\sigma^2 = 35/12$). Gelen sayıların toplamı $T = X_1 + \cdots + X_{100}$'ün $[340, 360]$ aralığında olması olasılığı nedir?

Çözüm.
Birinci yol: ortalamaya çevirme. Toplamı 100'e bölersek

$$340 \leq T \leq 360 \Leftrightarrow 3{,}4 \leq \frac{T}{100} \leq 3{,}6 \Leftrightarrow \mid \bar{X}_{100} - 3{,}5 \mid \leq 0{,}1$$

olur. Bu, Örnek 8.11'daki olayın ta kendisidir. Olasılık yine yaklaşık $0{,}4448$'dir.
İkinci yol: toplam biçimi. Sonuç 8.2'a göre T yaklaşık normaldir ve

$$E(T) = 100 \cdot 3{,}5 = 350, \qquad \text{Var}\ (T) = 100 \cdot \frac{35}{12} = \frac{875}{3} \approx 291{,}67$$

olur. $\sqrt{\text{Var}\ (T)} \approx 17{,}08$'dir. Sınırları standartlaştıralım:

$$\frac{360 - 350}{\sqrt{875/3}} = \frac{10}{17{,}08} \approx 0{,}59, \qquad \frac{340 - 350}{\sqrt{875/3}} \approx -0{,}59.$$

Buradan yine

$$P(340 \leq T \leq 360) \approx P(-0{,}59 \leq Z \leq 0{,}59) = 2 \cdot 0{,}2224 = 0{,}4448$$

bulunur. İki yol aynı sonucu verir, çünkü toplamı ve ortalamayı standartlaştırmak aynı Z_n'i verir.
Süreklilik düzeltmesiyle. T yalnız tam sayı değerleri alır. Süreklilik düzeltmesi yapılırsa aralık $[339{,}5;\ 360{,}5]$ olur. Sınırlar $\pm \frac{10{,}5}{17{,}08} \approx \pm 0{,}61$ olur ve

$$P(339{,}5 \leq T \leq 360{,}5) \approx 2 \cdot P(0 \leq Z \leq 0{,}61) = 2 \cdot 0{,}2291 = 0{,}4582$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. T'nin gerçek dağılımından bilgisayarla hesaplanan değer $0{,}4608$'dir. Düzeltmeli yaklaşım gerçek değere daha yakındır.
■

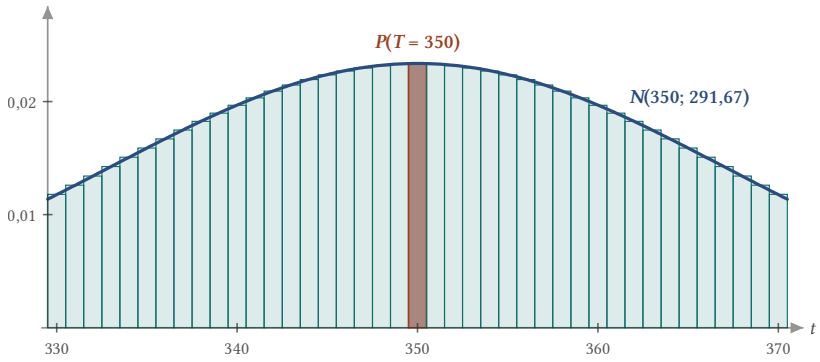
Örnek 8.14 (Yüz Atışın Toplamının Tam 350 Olması). Düzgün bir zar 100 kez atılıyor ($\mu = 3{,}5$, $\sigma^2 = 35/12$). Gelen sayıların toplamı T'nin tam olarak 350 olması olasılığı nedir?

Çözüm.
Sürekli bir dağılımda tek bir noktanın olasılığı 0'dır. Bu yüzden T'yi doğrudan normal değişkenle değiştirmek anlamsız bir 0 verir. T tam sayı değerli olduğundan süreklilik düzeltmesi yaparız. Düzeltme binom için tanımlandı, ama aynı gerekçeyle tam sayı değerli her değişkene uygulanır: her $P(T = t)$ olasılığı, $t - \frac{1}{2}$ ile $t + \frac{1}{2}$ arasında duran genişliği 1 olan bir dikdörtgenin alanıdır. Buna göre $T = 350$ olayı yerine $349{,}5 \le T \le 350{,}5$ aralığını kullanırız.
Örnek 8.13'deki gibi $E(T) = 350$ ve $\sqrt{\mathrm{Var}\,(T)} = \sqrt{875/3} \approx 17{,}08$'dir. Sınırlar

$$\frac{350{,}5 - 350}{17{,}08} \approx 0{,}0293 \approx 0{,}03, \qquad \frac{349{,}5 - 350}{17{,}08} \approx -0{,}03$$

olur. Standart normal tablosundan $P(0 \le Z \le 0{,}03) = 0{,}0120$ okunur:

$$P(T = 350) \approx P(-0{,}03 \le Z \le 0{,}03) = 2 \cdot 0{,}0120 = 0{,}0240.$$



Şekil 8.7: 100 zarın toplamı T'nin 330 ile 370 arasındaki gerçek olasılıkları (dikdörtgenler) ve N(350; 291,67) eğrisi. T = 350 olasılığı, genişliği 1 olan turuncu dikdörtgenin alanıdır; normal yaklaşımda bunun yerine eğrinin altında 349,5 ile 350,5 arasında kalan ince şerit alınır.

Tablo kullanımı z'yi iki ondalığa yuvarlamayı gerektirir. $z = 0{,}0293$ yuvarlanmadan hesaplanırsa sonuç $0{,}0234$ çıkar. Gerçek değer ise $0{,}0233$'tür. Yani yaklaşım çok iyidir. Yaklaşık $\%2{,}3$ olasılıkla toplam tam 350 olur.
■

Örnek 8.15 (Yüz Parçanın Toplam Dayanma Süresi). Bir elektronik parçanın yıl cinsinden dayanma süresi X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile veriliyor. Böyle 100 parçanın dayanma süreleri bağımsızdır. Toplam dayanma süresinin en az 110 yıl olması olasılığı nedir?

Çözüm.
X, Üstel (1) dağılımlıdır (üstel dağılım). Beklenen değeri ve varyansı $\mu = 1$ ve $\sigma^2 = 1$'dir. Bunu doğrudan da görebiliriz. Kısmi integrasyonla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$E(X) = \int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 1, \qquad E(X^2) = \int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = 2$$

bulunur, böylece $\sigma^2 = 2 - 1^2 = 1$ olur.
Toplam süre $T = X_1 + \cdots + X_{100}$ olsun. $n = 100$ büyük olduğundan Sonuç 8.2'a göre $T \approx N(n\mu, n\sigma^2)$ ve

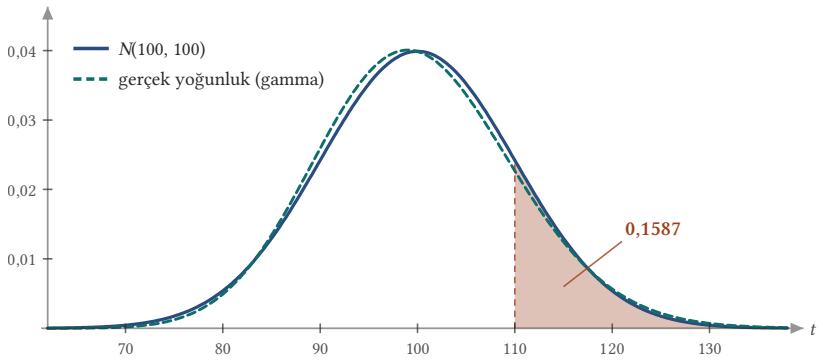
$$E(T) = 100 \cdot 1 = 100, \qquad \text{Var}\,(T) = 100 \cdot 1 = 100, \qquad \sqrt{\text{Var}\,(T)} = 10$$

olur. T sürekli olduğundan süreklilik düzeltmesi gerekmez:

$$P(T \geq 110) = P\left(\frac{T - 100}{10} \geq \frac{110 - 100}{10}\right) \approx P(Z \geq 1).$$

Standart normal tablosundan $P(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}3413$ okunur:

$$P(T \geq 110) \approx 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587.$$



Şekil 8.8: 100 parçanın toplam ömrü T için N(100, 100) yaklaşımı (mavi) ve T'nin gerçek yoğunluğu (kesikli). İki eğri neredeyse çakışır. Taralı sağ kuyruk T ≥ 110 olayıdır; alanı yaklaşık 0,5 − 0,3413 = 0,1587.

Bu örnekte T'nin gerçek dağılımını da biliyoruz: bağımsız üstel değişkenlerin toplamı $\text{Gamma}\,(100, 1)$ dağılımlıdır. Bu dağılımla hesaplanan gerçek değer $0{,}1583$'tür. Merkezi limit teoremi, gamma tablosuna hiç gerek duymadan çok yakın bir sonuç verdi.
■

Örnek 8.16 (Ortalama Dinleme Süresinin Sapması). Belli bir grubun bir radyo istasyonunun müzik programlarını dinleme süresi, ortalaması 4 saat ve standart sapması 1 saat olan normal dağılıma sahiptir. Bu gruptan 16 kişilik bir rastgele örneklem seçiliyor. Örneklemin ortalama dinleme süresi ile grup ortalaması arasındaki farkın $\frac{1}{2}$ saatten fazla olma olasılığı nedir?

Çözüm.
$X \sim N(4, 1)$ ve $n = 16$'dır. Kitle normal olduğundan $\bar{X}_{16}$ **tam olarak** normal dağılımlıdır (Bağımsız Normallerin Doğrusal Birleşimi); burada merkezi limit teoremine bile gerek yoktur:

$$E(\bar{X}_{16}) = 4, \qquad \text{Var}\,(\bar{X}_{16}) = \frac{\text{Var}\,(X)}{16} = \frac{1}{16}, \qquad \sqrt{\text{Var}\,(\bar{X}_{16})} = \frac{1}{4}.$$

İstenen olasılık

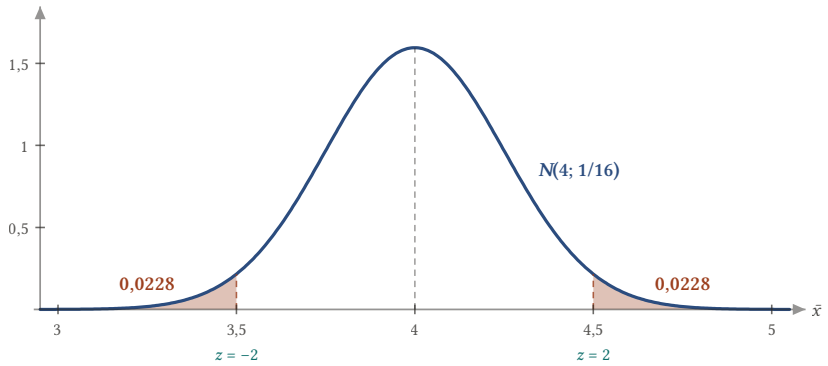
$$P\left(\mid \bar{X}_{16} - 4 \mid > \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{\mid \bar{X}_{16} - 4 \mid}{1/4} > \frac{1/2}{1/4}\right) = P(\mid Z \mid > 2)$$

olur. Standart normal tablosundan $P(0 \leq Z \leq 2) = 0{,}4772$ okunur. İki kuyruk eşit olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P(|\ Z\ | > 2) = 2\ (\ 0{,}5 - 0{,}4772\ ) = 2 \cdot 0{,}0228 = 0{,}0456$$

bulunur.



Şekil 8.9: 16 kişilik örneklemin ortalama dinleme süresi $\bar{X}$ ~ N(4; 1/16). Ortalamanın 4'ten yarım saatten fazla sapması iki kuyruğun ($\bar{X}$ < 3,5 ve $\bar{X}$ > 4,5) toplam alanıdır: 2 · 0,0228 = 0,0456.

Yani 16 kişilik bir örneklemin ortalaması, grup ortalamasından yalnız yaklaşık $\%4{,}6$ olasılıkla yarım saatten fazla sapar. Tek bir kişinin dinleme süresi için aynı olasılık

$$P(|\ Z\ | > 0{,}5) = 2(0{,}5 - 0{,}1915) = 0{,}6170$$

olurdu.
■

Son iki örnek aynı soruya iki farklı araçla bakar. Chebyshev eşitsizliği dağılım hakkında hiçbir şey varsaymadan kesin bir sınır verir. Merkezi limit teoremi ise yaklaşık ama çok daha keskin bir değer verir.

Örnek 8.17 (Boy Ortalaması İçin Chebyshev Alt Sınırı). Bir okuldaki erkek öğrencilerin boylarının varyansı 12 cm^2'dir. Bu okuldan 30 kişilik bir rastgele örneklem seçiliyor. Örneklem ortalaması ile kitle ortalaması arasındaki farkın 1 cm'den küçük olma olasılığı için bir alt sınır bulun.

Çözüm.
Boyların dağılımı bilinmiyor. Bu yüzden Chebyshev eşitsizliğini kullanırız. Kitle ortalaması μ olsun. $\sigma^2 = 12$ ve $n = 30$ ile

$$E(\bar{X}_{30}) = \mu, \qquad \text{Var}\ (\bar{X}_{30}) = \frac{12}{30} = 0{,}4$$

olur. Chebyshev eşitsizliğini $c = 1$ ile uygularsak

$$P\ (\ |\ \bar{X}_{30} - \mu\ | \geq 1\ ) \leq \frac{\text{Var}\ (\bar{X}_{30})}{1^2} = 0{,}4$$

bulunur. Tümleyen olaya geçersek

$$P\ (\ |\ \bar{X}_{30} - \mu\ | < 1\ ) \geq 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

olur. Aynı sonuç eşitsizliğin k'li biçiminden de çıkar. $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{12/30}$ olduğundan $k\sigma_{\bar{X}} = 1$ koşulu $k = \sqrt{30/12}$ verir. Buradan

$$P\ (\ |\ \bar{X}_{30} - \mu\ | < k\sigma_{\bar{X}}\ ) \geq 1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{12}{30} = \frac{18}{30} = 0{,}6$$

bulunur. Yani farkın 1 cm'den küçük olma olasılığı en az 0,6'dır. Tümleyen olay için bu bir üst sınır verir: farkın en az 1 cm olma olasılığı en çok 0,4'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

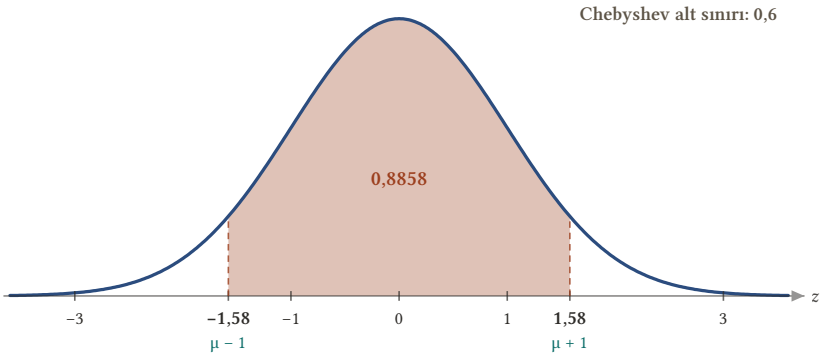
Örnek 8.18 (Boy Ortalamasında Merkezi Limit Teoremiyle Karşılaştırma). Bir okuldaki erkek öğrencilerin boylarının varyansı $12\,\text{cm}^2$'dir ve 30 kişilik bir rastgele örneklem seçiliyor. $P\left(\,|\,\bar{X}_{30}-\mu\,|<1\,\right)$ olasılığını merkezi limit teoremiyle yaklaşık olarak hesaplayın ve Örnek 8.17'deki 0,6 alt sınırıyla tutarlı olduğunu gösterin.

Çözüm.
$n=30$ olduğundan merkezi limit teoremini kullanabiliriz: $\bar{X}_{30}\approx N(\mu,0{,}4)$. Standartlaştırırsak

$$P\left(\,|\,\bar{X}_{30}-\mu\,|<1\,\right)=P\left(\frac{|\,\bar{X}_{30}-\mu\,|}{\sqrt{0{,}4}}<\frac{1}{\sqrt{0{,}4}}\right)\approx P\left(\,|\,Z\,|<\sqrt{\frac{30}{12}}\,\right)$$

olur. $\sqrt{30/12}=\sqrt{2{,}5}\approx 1{,}58$'dir. Standart normal tablosundan $P(0\le Z\le 1{,}58)=0{,}4429$ okunur:

$$P\left(\,|\,\bar{X}_{30}-\mu\,|<1\,\right)\approx P(-1{,}58<Z<1{,}58)=0{,}4429+0{,}4429=0{,}8858.$$



Şekil 8.10: 30 kişilik örneklemde $|\bar{X}-\mu|<1$ olayı yaklaşık olarak $-1{,}58<Z<1{,}58$ olayıdır; taralı alan $2\cdot 0{,}4429=0{,}8858$. Chebyshev eşitsizliği yalnız 0,6'lık bir alt sınır verir; normal yaklaşımın değeri bu sınırın üstündedir.

$0{,}8858\ge 0{,}6$ olduğundan yaklaşık değer Chebyshev alt sınırıyla tutarlıdır. Chebyshev sınırı çok daha temkinlidir, çünkü her dağılım için geçerli olmak zorundadır. Merkezi limit teoremi ise ortalamanın dağılımının normale yakın olduğunu kullanarak gerçek değere çok daha yakın bir sonuç verir.
■

Örnek 8.19 (Merkezi Limit Teoremiyle Gereken Atış Sayısı). Düzgün bir para n kez atılıyor. Tura oranının $1/2$'den $0{,}05$'ten az sapması olasılığının en az $0{,}95$ olması için, merkezi limit teoremine göre, n en az kaç olmalıdır?

Çözüm.
$X_i\sim\text{Bernoulli}\left(\,\frac{1}{2}\,\right)$ olduğundan $\mu=\frac{1}{2}$ ve $\sigma^2=\frac{1}{4}$'tür. Merkezi limit teoremine göre

$$\bar{X}_n\approx N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4n}\right),\qquad \sqrt{\text{Var}\,(\bar{X}_n)}=\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

olur. Standartlaştırırsak

$$P\left(\,|\,\bar{X}_n-\frac{1}{2}\,|<0{,}05\,\right)\approx P\left(\,|\,Z\,|<0{,}05\cdot 2\sqrt{n}\,\right)=P\left(\,|\,Z\,|<0{,}1\sqrt{n}\,\right)$$

bulunur. Bu olasılığın en az $0{,}95$ olması, $P(0\le Z\le 0{,}1\sqrt{n})\ge 0{,}475$ demektir. Standart normal tablosunda $0{,}4750$ değeri $z=1{,}96$'ya karşılık gelir; yani $z_{0{,}975}=1{,}96$'dır. Buradan

$$0{,}1\sqrt{n} \geq 1{,}96 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 19{,}6 \Leftrightarrow n \geq 384{,}16$$

olur. n tam sayı olduğundan en az 385 atış gerekir.
Örnek 8.5′de Chebyshev sınırı 2000 atış istemişti. Merkezi limit teoremi aynı güvenceyi yaklaşık beşte bir atışla verir. Aradaki fark, Chebyshev eşitsizliğinin hiçbir dağılım bilgisi kullanmamasından gelir.
■

Bu bölümde örneklem ortalamasının büyük örneklemlerdeki davranışını tamamladık. Büyük sayılar yasası örneklem ortalamasının kitle ortalamasına yakınsadığını, merkezi limit teoremi de bu yakınsamanın çevresinde dağılımın normal biçim aldığını söyler. Aynı düşünce örneklem momentlerinin kitle momentlerine yakınsaması için de geçerlidir. Bir sonraki bölüm tam da buna dayanır: Momentler Yöntemi kitle parametrelerini, kitle momentlerini örneklem momentlerine eşitleyerek tahmin eder.

 CC BY-NC-SA 4.0

9. Momentler Yöntemi

Buraya kadar dağılımların parametrelerini biliyormuş gibi davrandık: λ verildiğinde Poisson olasılıklarını, μ ile σ^2 verildiğinde normal alanları hesapladık. İstatistikte durum tersine döner. Elimizde veri vardır, dağılımın biçimini de çoğu zaman biliriz; bilmediğimiz şey parametrenin kendisidir. Bu kısmın konusu, veriden parametre için tek bir sayısal değer üretmektir. Bu bölümde önce temel kavramları kuracak, sonra ilk ve en eski tahmin yöntemini, momentler yöntemini öğreneceğiz.

9.1 Tahmin Teorisine Giriş

Bir kitleyi incelerken genellikle "bu kitle hangi aileden bir dağılıma uyar?" sorusunun cevabını biliriz; ailenin hangi üyesi olduğu ise bir ya da birkaç sayıya bağlıdır. Bu sayılara bir ad verelim.

Tanım 9.1 (Parametre ve Parametre Kümesi). X rastgele değişkeninin dağılımı $f_X(x;\theta)$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonu ile verilsin; burada $\theta \in \Theta$'dır. θ'ya dağılımın **parametresi**, θ'nın alabileceği bütün değerlerin kümesi Θ'ya da **parametre kümesi** denir. Parametre birden çok sayıdan oluşabilir; o zaman $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$ bir vektör ve $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ olur.

Yani $f_X(x;\theta)$ tek bir dağılım değil, θ değiştikçe değişen bir dağılımlar ailesidir. Parametre kümesi de bu ailenin hangi üyelerinin "izinli" olduğunu söyler: $f_X(\,\cdot\,;\theta)$'nın gerçekten bir olasılık (yoğunluk) fonksiyonu olduğu θ değerleri.

Örnek 9.1 (Bilinen Dağılımların Parametre Kümeleri). Önceki bölümlerde gördüğümüz dağılımların parametreleri ve parametre kümeleri şunlardır.

- Bernoulli dağılımı $\text{Binom}\,(1,p)$: parametre p, parametre kümesi $\Theta = (0,1) \subset \mathbb{R}$.
- Poisson dağılımı $\text{Poisson}\,(\lambda)$: parametre λ, parametre kümesi $\Theta = (0,\infty) \subset \mathbb{R}$.
- Gamma dağılımı (Tanım 4.2) $\text{Gamma}\,(r,\alpha)$: parametreler r ve α, parametre kümesi $\Theta = (0,\infty) \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$.
- Normal dağılım $N(\mu,\sigma^2)$: parametreler μ ve σ^2, parametre kümesi $\Theta = (-\infty,\infty) \times (0,\infty) \subset \mathbb{R}^2$.

Son örnekte μ her reel değeri alabilir, ama varyans pozitif olmak zorundadır; parametre kümesinin ikinci çarpanının $(0,\infty)$ olması bundandır.

9.2 Nokta Tahmini

Parametreyi bilmediğimizde elimizdeki tek bilgi kaynağı kitleden çekilen örneklemdir. Örneklemin bir fonksiyonunu, yani bir istatistiği, parametrenin yerine koymak en doğal fikirdir. Parametre için tek bir sayı önermeye **nokta tahmini** denir.

Tanım 9.2 (Tahmin Edici ve Tahmin). Bilinmeyen bir θ parametresini (ya da θ'nın bir $g(\theta)$ fonksiyonunu) belirlemek amacıyla kullanılan bir örneklem istatistiğine θ'nın **tahmin edicisi** (kestirici, estimatör) denir ve $\hat{\theta} = T(X_1, \ldots, X_n)$ ile gösterilir. Tahmin edicinin gözlenen örneklemde aldığı sayısal değere **tahmin** (kestirim) denir.

Yani tahmin edici bir kuraldır: "gözlemleri topla, n'ye böl" gibi. Gözlemler rastgele olduğundan tahmin edici de bir rastgele değişkendir ve kendi dağılımı vardır; bu yüzden onu $\bar{X}$, S^2, T gibi büyük harflerle yazarız. Tahmin ise bu kuralın elimizdeki veriye uygulanmasıyla çıkan tek bir sayıdır, örneğin $\bar{x} = 3{,}12$. Aynı tahmin edici, başka bir örneklemde başka bir tahmin verir. Gösterimi yüklememek için ikisine de çoğu zaman $\hat{\theta}$ denir; hangisinin kastedildiği bağlamdan anlaşılır.

Örnek 9.2 (Bir Paranın Yazı Olasılığı). Yazı gelme olasılığı p bilinmeyen bir para 10 kez atılıyor. i. atışta yazı gelirse $X_i = 1$, tura gelirse $X_i = 0$ olsun; böylece $X_1, \ldots, X_{10}$ bir $\text{Binom}\,(1,p)$ kitlesinden alınmış bir örneklemdir. p için $\hat{p} = \bar{X}$ tahmin edicisi kullanılıyor ve atışlar $0,1,0,0,1,1,0,0,1,0$ sonu-

 CC BY-NC-SA 4.0

cunu veriyor. Paranın gerçek yazı olasılığı (istatistikçinin bilmediği) $p = 0{,}3$ olsun. Gözlenen tahmini, $\hat{p}$ tahmin edicisinin olasılık fonksiyonu içinde yorumlayınız.

Çözüm.
Gözlenen örneklemde 4 yazı vardır. Tahmin edicinin bu örneklemdeki değeri

$$\hat{p} = \bar{x} = \frac{0+1+0+0+1+1+0+0+1+0}{10} = \frac{4}{10} = 0{,}4$$

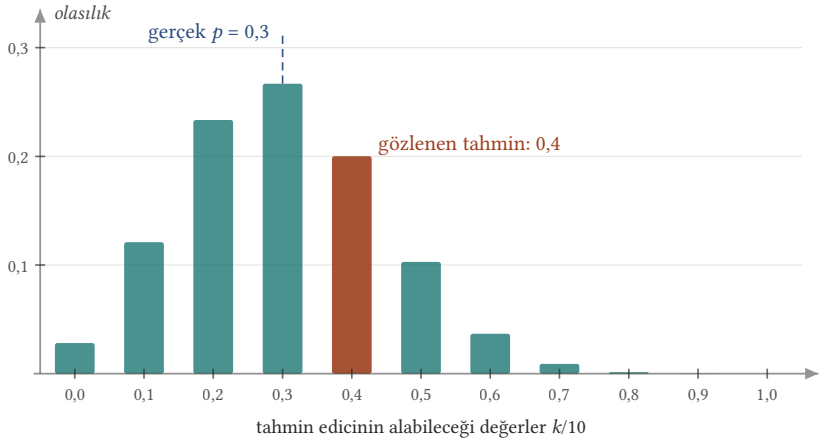
olur. Bu sayı bir **tahmindir**.
Şimdi $\hat{p} = \bar{X}$'in kendisine bakalım. $Y = X_1 + \cdots + X_{10}$ yazı sayısıdır ve $Y \sim \text{Binom}\ (10; 0{,}3)$'tür. $\hat{p} = Y/10$ olduğundan tahmin edici yalnız 0; 0,1; ...; 1 değerlerini alır ve $k = 0, 1, \ldots, 10$ için

$$P\left(\hat{p} = \frac{k}{10}\right) = P(Y = k) = \binom{10}{k}(0{,}3)^k(0{,}7)^{10-k}$$

olur. Örneğin

$$P(\hat{p} = 0{,}3) = \binom{10}{3}(0{,}3)^3(0{,}7)^7 \approx 0{,}2668,$$
$$P(\hat{p} = 0{,}4) = \binom{10}{4}(0{,}3)^4(0{,}7)^6 \approx 0{,}2001.$$

Yani tahmin edici gerçek değeri (0,3) en yüksek olasılıkla verir, ama bu olasılık yalnızca yaklaşık 0,27'dir; bizim gözlediğimiz 0,4 gibi komşu değerler de sık sık çıkar. Tahmin edicinin iyiliği tek bir tahmine bakarak değil, bu dağılıma bakarak değerlendirilir.



Şekil 9.1: p = 0,3 iken 10 atışlık örneklemden hesaplanan p̂ = X̄ tahmin edicisinin olasılık fonksiyonu. Tahmin edici 0; 0,1; ...; 1 değerlerinden birini rastgele alır; bu örneklemde gözlenen değer 0,4'tür.

■

Bir parametre için akla birçok tahmin edici gelebilir. Bunların hangisinin daha iyi olduğunu (yansızlık, etkinlik, tutarlılık gibi ölçütlerle) Tahmin Edicilerin Özellikleri bölümünde tartışacağız. Önce tahmin edicileri sistemli olarak **üretmenin** yollarına bakalım; bunların ilki momentler yöntemidir.

9.3 Momentler Yöntemi

Yöntemin fikri çok basittir. Kitle momentleri parametrelere bağlıdır; örneklem momentleri ise veriden hesaplanır ve büyük sayılar yasası gereği örneklem büyüdükçe karşılık gelen kitle momentine yaklaşır. O hâlde ikisini eşitleyip parametreyi çözebiliriz.

 CC BY-NC-SA 4.0

X'in olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x;\theta_1,...,\theta_m)$ olsun; yani dağılım m tane parametreye bağlı. X'in k. mertebeden momenti kesikli hâlde

$$E(X^k) = \sum_{x\in D_X} x^k f(x;\theta_1,...,\theta_m),$$

sürekli hâlde

$$E(X^k) = \int_{D_X} x^k f(x;\theta_1,...,\theta_m)\,dx$$

ile verilir; burada D_X, X'in değer kümesidir. Her iki hâlde de sonuç $\theta_1,...,\theta_m$ parametrelerinin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyona bir ad verelim:

$$E(X^k) = \Psi_k(\theta_1,...,\theta_m), \qquad k=1,2,...$$

Bu sayılara **kitle momentleri** de denir. Örneklem tarafındaki karşılıkları, Tanım 7.8 ile tanımladığımız örneklem momentleridir:

$$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k, \qquad k=1,2,...$$

M_k, gözlemlerin k. kuvvetlerinin aritmetik ortalamasıdır; özel olarak $M_1 = \bar{X}$'tir. $E \mid X \mid^k < \infty$ olduğunda $E(X_i^k) = E(X^k)$ olduğundan beklenen değerin doğrusallığıyla $E(M_k) = E(X^k)$ bulunur; yani M_k ortalamada tam olarak kitle momentini verir.

Tanım 9.3 (Momentler Yöntemi). X'in dağılımı $\theta_1,...,\theta_m$ parametrelerine bağlı ve $E(X^k) = \Psi_k(\theta_1,...,\theta_m)$ olsun. İlk m kitle momentini ilk m örneklem momentine eşitleyen

$$M_k = \Psi_k(\theta_1,...,\theta_m), \qquad k=1,2,...,m$$

denklem sisteminin $\theta_1,...,\theta_m$ için çözümü $\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_m$'ye parametrelerin **momentler yöntemi tahmin edicileri** (moment tahmin edicileri) denir.

Yani bilinmeyen sayısı kadar denklem kurarız: tek parametre için yalnız $\bar{X} = E(X)$ denklemi, iki parametre için bunun yanına $M_2 = E(X^2)$ denklemi yeterlidir. Uygulamada ilk m moment yerine parametreleri belirleyen başka m moment denklemi de (örneğin varyans denklemi) kullanılır; bu geniş anlamda aynı parametre için farklı tahmin ediciler çıkabilir. Çözümde bulunan ifade gözlemlerin bir fonksiyonu, yani bir istatistiktir; bu yüzden onu büyük harflerle yazarız.
İki parametreli dağılımlarda ikinci denklemi $E(X^2)$ yerine varyansla kurmak çoğu zaman hesabı kısaltır. Bunun meşru olduğunu şu özdeşlik gösterir.

Önerme 9.1 (Örneklem Varyansı Özdeşliği). *Her $X_1,...,X_n$ için*

$$M_2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2.$$

> ***İspat.***
> *Kareyi açıp toplamı terim terim dağıtalım:*
>
> $$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n}X_i + n\bar{X}^2.$$
>
> *$\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}$ olduğundan ortadaki terim $-2n\bar{X}^2$'dir; son terimle birleşince*
>
> $$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 = \sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2$$
>
> *kalır. İki yanı n'ye bölünce sol taraf $\frac{1}{n}\sum(X_i-\bar{X})^2$, sağ taraf $M_2-\bar{X}^2$ olur.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Kitle tarafında da varyans hesap formülü $\text{Var}\,(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$ der. Dolayısıyla $\bar{X} = E(X)$ denklemi yanında $M_2 = E(X^2)$ yazmak ile

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \text{Var}\,(X)$$

yazmak aynı sonucu verir.
Yöntemle ilgili iki gözlem, örneklere geçmeden önce akılda tutulmalı:

- Tahmin edilecek parametre sayısı kadar moment kullanılır; daha azı sistemi belirsiz bırakır.
- Momentler yöntemi bir parametre için tek bir tahmin edici vermek zorunda değildir. Hangi momentlerin eşitlendiğine göre aynı parametre için birbirinden farklı tahmin ediciler çıkabilir. Aşağıdaki Poisson örneği bunu açıkça gösterecek.

Momentler yöntemi üç adımda

1. Parametre sayısı m ise $E(X), E(X^2), \ldots, E(X^m)$ momentlerini parametreler cinsinden hesaplayın.
2. Her $E(X^k)$'yi karşılık gelen örneklem momenti M_k'ye eşitleyin ($M_1 = \bar{X}$).
3. Elde edilen sistemi parametreler için çözün ve sonucu gözlemlerin fonksiyonu olarak yazın.

Örnek 9.3 (Kuvvet Yoğunluğunda Moment Tahmin Edicisi). X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta) = (1+\theta)\,x^{\theta}, \qquad 0 \le x \le 1, \theta > -1$$

olsun. Bu dağılıma sahip bir kitleden n büyüklüğünde bir rastgele örneklem alındığında θ parametresinin tahmin edicisini momentler yöntemiyle bulunuz.

Çözüm.
Tek parametre olduğu için yalnız birinci momente ihtiyaç var.
Adım 1. $\theta > -1$ iken $\theta + 2 > 0$ olduğundan integral yakınsaktır ve

$$E(X) = \int_0^1 x\,(1+\theta)x^{\theta}\,dx = (1+\theta)\int_0^1 x^{\theta+1}\,dx = (1+\theta)\left[\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\right]_0^1 = \frac{1+\theta}{\theta+2}.$$

Adım 2. Bunu örneklem ortalamasına eşitleyelim:

$$\bar{X} = \frac{1+\theta}{\theta+2}.$$

Adım 3. Paydayı karşıya atıp θ'lı terimleri bir tarafa toplayalım:

$$\bar{X}\theta + 2\bar{X} = 1 + \theta \quad\Rightarrow\quad \theta(\bar{X} - 1) = 1 - 2\bar{X}.$$

$0 \le X_i \le 1$ olduğundan $\bar{X} \le 1$'dir ve sürekli bir dağılımda bütün gözlemlerin tam 1 çıkma olasılığı sıfırdır; yani $\bar{X} - 1 \neq 0$ ve bölebiliriz:

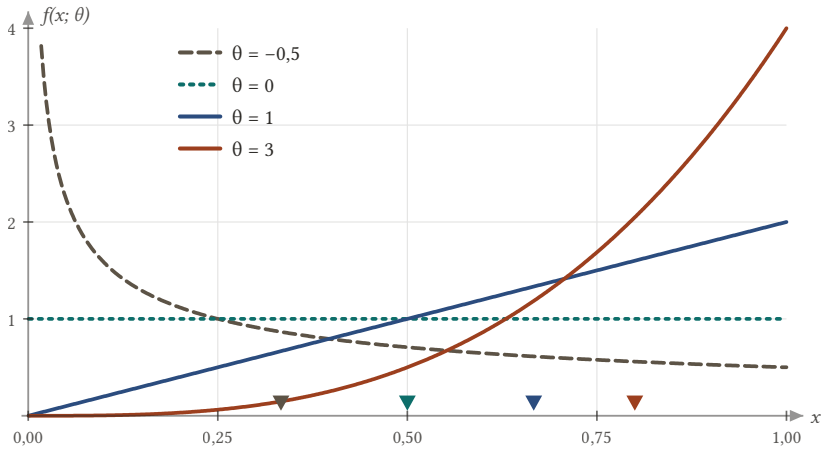
$$\hat{\theta} = \frac{1 - 2\bar{X}}{\bar{X} - 1} = \frac{2\bar{X} - 1}{1 - \bar{X}}.$$

Bulunan tahmin parametre kümesinin içinde mi? $1 - \bar{X} > 0$ olduğundan

$$\hat{\theta} > -1 \Leftrightarrow 2\bar{X} - 1 > -(1 - \bar{X}) \Leftrightarrow \bar{X} > 0$$

olur ve bütün gözlemlerin 0 çıkma olasılığı da sıfırdır. Demek ki $\hat{\theta}$ her zaman $(-1, \infty)$ içinde kalır.
Aşağıdaki şekil neden $\bar{X}$'in θ hakkında bilgi taşıdığını gösteriyor: θ büyüdükçe kütle 1'e doğru kayar ve beklenen değer artar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.2: Kuvvet ailesinden dört yoğunluk. θ büyüdükçe kütle 1'e doğru kayar; eksenin üstündeki üçgenler beklenen değerleri 1/3, 1/2, 2/3 ve 4/5'i gösterir. Bu yüzden $\bar{X}$ bize θ hakkında bilgi verir.

■

Örnek 9.4 (Kuvvet Yoğunluğunda Sayısal Tahmin). Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x;\theta) = (1+\theta)x^{\theta}$ $(0 \le x \le 1,\ \theta > -1)$ olan kitleden $n = 5$ büyüklüğünde bir örneklem çekilmiş ve 0,3; 0,5; 0,1; 0,1; 0,2 gözlemleri elde edilmiştir. θ'nın momentler yöntemiyle elde edilen tahminini bulunuz.

Çözüm.

Tahmin ediciyi Örnek 9.3 içinde $\hat{\theta} = \dfrac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$ olarak bulduk. Önce örneklem ortalamasını hesaplayalım:

$$\bar{x} = \frac{0{,}3 + 0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}2}{5} = \frac{1{,}2}{5} = 0{,}24.$$

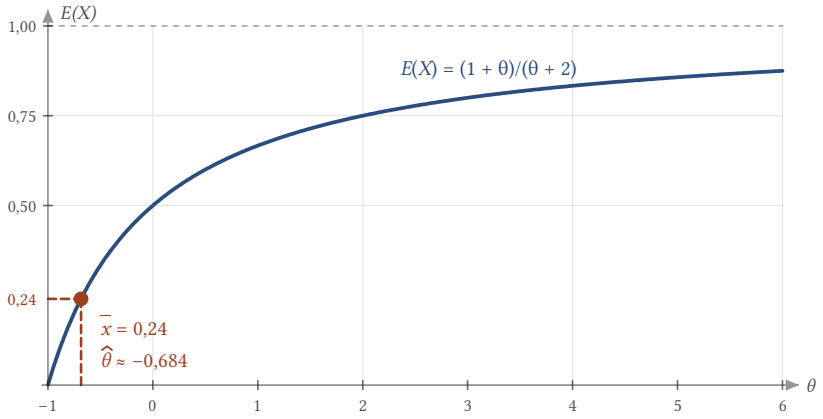
Bunu tahmin edicide yerine koyalım:

$$\hat{\theta} = \frac{2(0{,}24) - 1}{1 - 0{,}24} = \frac{-0{,}52}{0{,}76} = -\frac{13}{19} \approx -0{,}684.$$

Sağlama: $\theta = -\frac{13}{19}$ için $\dfrac{1+\theta}{\theta+2} = \dfrac{6/19}{25/19} = \dfrac{6}{25} = 0{,}24$ olur; yani bu değer kitle ortalamasını gerçekten gözlenen ortalamaya eşitler.

Negatif bir θ, yoğunluğun azalan olduğu, yani kütlenin 0 yakınında toplandığı anlamına gelir. Gözlemlerin hepsinin 0,5'ten küçük olması bununla uyumludur. Şekilde çözdüğümüz denklemi görüyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.3: E(X) = (1 + θ)/(θ + 2) eğrisi artandır ve 0 ile 1 arasındaki her değeri bir kez alır. Yatay x̄ = 0,24 çizgisi eğriyi tek bir noktada keser; o noktanın apsisi θ̂ = −13/19 ≈ −0,684 tahminidir.

■

9.4 Bilinen Dağılımlarda Moment Tahmin Edicileri

Şimdi yöntemi önceki bölümlerde tanıdığımız dağılımlara uygulayalım. Her örnekte gereken kitle momentleri ya kardeş kitapta ya da bu kitabın ilk kısmında hesaplanmıştır; biz yalnız eşitleme ve çözme adımlarını yapacağız.

Örnek 9.5 (Üstel Dağılımın Oran Parametresi). Üstel (λ) dağılımına sahip bir kitleden alınmış n boyutlu bir örnekleme dayanarak λ parametresinin momentler yöntemine göre tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm.
Tek parametre vardır. Üstel dağılımın momentlerinden $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$'dır. Bunu $\bar{X}$'e eşitleyelim:

$$\bar{X} = \frac{1}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}.$$

Gözlemler pozitif olduğundan $\bar{X} > 0$'dır ve bölme her zaman tanımlıdır.
Aynı parametre için ikinci momentten de bir denklem kurulabilir. Varyans hesap formülünden

$$E(X^2) = \operatorname{Var}(X) + \big(E(X)\big)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

olduğundan $M_2 = \dfrac{2}{\lambda^2}$ denklemi, $\lambda > 0$ olduğu hesaba katılınca,

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{M_2}}$$

tahmin edicisini verir. Tek parametre için birinci moment yeterli olduğundan olağan seçim $\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$'tir; $\tilde{\lambda}$, momentler yönteminin aynı parametreye farklı tahmin ediciler verebileceğinin bir örneğidir. ■

Örnek 9.6 (Normal Dağılımın İki Parametresi). $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımına sahip bir kitleden çekilen n boyutlu bir örnekleme dayanarak μ ve σ^2 parametrelerinin momentler yöntemiyle tahmin edicilerini bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

İki parametre olduğu için iki moment gerekir. Normal dağılımın momentlerinden $E(X) = \mu$ ve $\text{Var}\,(X) = \sigma^2$'dir; buradan

$$E(X^2) = \text{Var}\,(X) + \big(\,E(X)\big)^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

bulunur. Momentleri eşitleyelim:

$$\bar{X} = \mu, \qquad M_2 = \sigma^2 + \mu^2.$$

İlk denklem doğrudan $\hat{\mu} = \bar{X}$ verir. Bunu ikincide yerine koyarsak $\sigma^2 = M_2 - \bar{X}^2$ olur ve Önerme 9.1 ile

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = M_2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

elde edilir.
Dikkat: $\hat{\sigma}^2$'nin paydası n'dir; örneklem varyansı S^2'nin paydası ise $n-1$'dir. İkisi arasındaki farkın ne anlama geldiğini, yani $\hat{\sigma}^2$'nin σ^2'yi ortalamada biraz küçük tahmin ettiğini, Tahmin Edicilerin Özellikleri bölümünde göreceğiz. ■

Örnek 9.7 (Paket Ağırlıkları İçin Normal Model). Bir makinenin doldurduğu paketlerin ağırlığı (kg) normal dağılımlı kabul ediliyor. Rastgele seçilen 10 paketin ağırlıkları

$$4{,}8;\ 5{,}2;\ 5{,}0;\ 4{,}6;\ 5{,}4;\ 5{,}1;\ 4{,}9;\ 5{,}3;\ 4{,}7;\ 5{,}0$$

olarak ölçülmüştür. μ ve σ^2 için momentler yöntemiyle elde edilen tahminleri bulunuz.

Çözüm.
Normal kitle örneğinde (Örnek 9.6) bulduğumuz gibi $\hat{\mu} = \bar{X}$ ve $\hat{\sigma}^2 = M_2 - \bar{X}^2$'dir.
Gözlemlerin toplamı 50 olduğundan $\bar{x} = 50/10 = 5$'tir. Gözlemlerin karelerinin toplamı

$$\begin{aligned}\sum x_i^2 &= 23{,}04 + 27{,}04 + 25 + 21{,}16 + 29{,}16 \\ &\quad + 26{,}01 + 24{,}01 + 28{,}09 + 22{,}09 + 25 = 250{,}6\end{aligned}$$

olur; buradan $m_2 = 250{,}6/10 = 25{,}06$ ve

$$\hat{\mu} = 5, \qquad \hat{\sigma}^2 = 25{,}06 - 5^2 = 0{,}06$$

bulunur. Sağlama olarak sapmalarla hesaplayalım. $x_i - \bar{x}$ değerleri sırasıyla

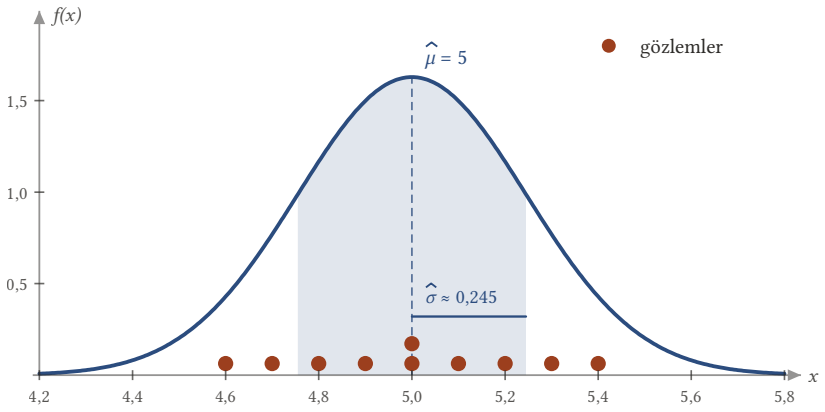
$$\begin{gathered}-0{,}2;\ 0{,}2;\ 0;\ -0{,}4;\ 0{,}4; \\ 0{,}1;\ -0{,}1;\ 0{,}3;\ -0{,}3;\ 0\end{gathered}$$

olup kareleri toplamı

$$0{,}04 + 0{,}04 + 0 + 0{,}16 + 0{,}16 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}09 + 0{,}09 + 0 = 0{,}60$$

olur; $0{,}60/10 = 0{,}06$ aynı sonucu verir. Standart sapmanın tahmini $\hat{\sigma} = \sqrt{0{,}06} \approx 0{,}245$ kg'dır. Karşılaştırma için örneklem varyansı $s^2 = 0{,}60/9 \approx 0{,}0667$'dir.
Tahmin edilen $N(5;\,0{,}06)$ modeli ve gözlemler aşağıda görülüyor.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.4: On paketin ağırlıkları (noktalar; 5,0 iki kez gözlendi) ve momentler yöntemiyle kurulan N(5; 0,06) yoğunluğu. Taralı şerit $\hat{\mu} \pm \hat{\sigma}$ aralığıdır.

■

Örnek 9.8 (Poisson Parametresi İçin İki Tahmin Edici). $\lambda > 0$ parametreli bir Poisson kitlesinden $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rastgele örneklemi alınsın. λ parametresinin momentler yöntemiyle iki farklı tahmin edicisini elde ediniz.

Çözüm.
Poisson dağılımının momentlerine göre (Teorem 3.2) $E(X) = \lambda$ ve $\mathrm{Var}\,(X) = \lambda$'dır. Ortalama ile varyansın aynı parametreye eşit olması, iki ayrı denklem kurmamıza izin verir.
Birinci yol (birinci moment). $E(X) = \lambda$'yı $\bar{X}$'e eşitlersek

$$\hat{\lambda}_1 = \bar{X}$$

bulunur.
İkinci yol (varyans). Varyans hesap formülünden $E(X^2) = \mathrm{Var}\,(X) + \big(E(X)\big)^2$, yani $E(X^2) = \lambda + \lambda^2$'dir. Buradan $\mathrm{Var}\,(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \lambda$ olur. Birinci moment yerine bu varyans denklemini kullanalım: kitle varyansı λ'yı örneklemin (paydası n olan) varyansına eşitleriz. Önerme 9.1 ile

$$\hat{\lambda}_2 = M_2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

elde edilir.
İki tahmin edici genellikle farklı değerler verir: $\hat{\lambda}_1$ verinin merkezine, $\hat{\lambda}_2$ yayılımına bakar. Yalnız ikinci momenti kullanıp $M_2 = \lambda + \lambda^2$ ikinci derece denklemini $\lambda > 0$ için çözmek de üçüncü bir tahmin edici verir:

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{\sqrt{1 + 4M_2} - 1}{2}.$$

■

Örnek 9.9 (Çağrı Sayıları İçin Poisson Tahminleri). Bir çağrı merkezine gelen çağrı sayısı Poisson dağılımlı kabul ediliyor. Rastgele seçilen 20 dakikada gelen çağrı sayılarının dağılımı aşağıdaki gibidir.

Çağrı sayısı k	0	1	2	3	4
Dakika sayısı	3	5	6	4	2

 CC BY-NC-SA 4.0

λ için $\hat{\lambda}_1 = \bar{X}$ ve $\hat{\lambda}_2 = M_2 - \bar{X}^2$ tahminlerini hesaplayınız.

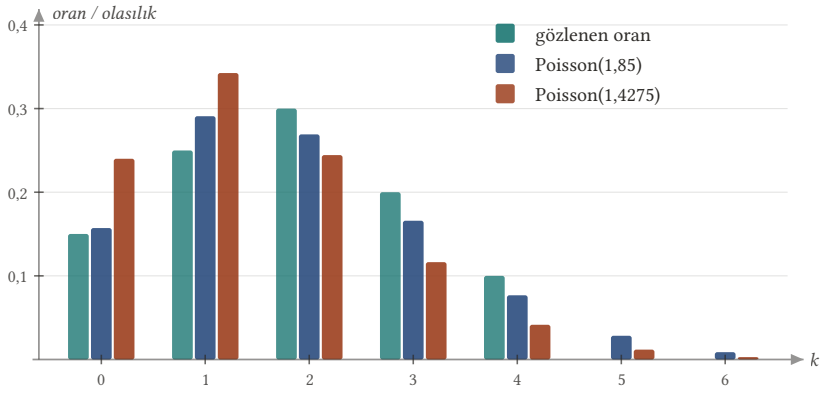
Çözüm.
Toplam gözlem sayısı $n = 3+5+6+4+2 = 20$'dir. Toplamları frekanslarla ağırlıklandırarak hesaplayalım:

$$\sum x_i = 0\cdot 3 + 1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 4 + 4\cdot 2 = 37,$$
$$\sum x_i^2 = 0\cdot 3 + 1\cdot 5 + 4\cdot 6 + 9\cdot 4 + 16\cdot 2 = 97.$$

Buradan $\bar{x} = 37/20 = 1{,}85$ ve $m_2 = 97/20 = 4{,}85$ olur. Tahminler

$$\hat{\lambda}_1 = \bar{x} = 1{,}85,$$
$$\hat{\lambda}_2 = m_2 - \bar{x}^2 = 4{,}85 - 3{,}4225 = 1{,}4275$$

bulunur. Aynı veri ve aynı yöntem, hangi momentin kullanıldığına göre farklı sayılar vermiştir. (Üçüncü tahmin edici de $\hat{\lambda}_3 = \left(\sqrt{1+19{,}4} - 1\right)/2 \approx 1{,}758$ verir.)
Şekil iki modelin veriyle nasıl karşılaştığını gösteriyor: $\hat{\lambda}_1$ ile kurulan model gözlenen oranlara daha yakın durur. Bu veride varyans ortalamadan küçüktür; Poisson modelinde ise ikisi eşit olmalıydı. Farkın ne kadarının rastlantıdan geldiği sorusu hipotez testlerinin konusudur.



Şekil 9.5: Yirmi dakikada gözlenen çağrı sayılarının oranları ile iki moment tahmininden kurulan Poisson olasılıkları. Ortalamadan gelen $\hat{\lambda}_1 = 1{,}85$ ile varyanstan gelen $\hat{\lambda}_2 = 1{,}4275$ farklı modeller verir.

■

Örnek 9.10 (Gamma Dağılımının İki Parametresi). Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}, \qquad x > 0, \alpha > 0, r > 0$$

olan Gamma (r, α) dağılımlı bir kitleden n büyüklüğünde bir rastgele örneklem alınıyor. r ve α parametrelerinin tahmin edicilerini momentler yöntemiyle bulunuz.

Çözüm.
İki parametre olduğu için ilk iki moment gerekir. Gamma dağılımının momentlerinden (Teorem 4.2)

$$E(X) = \frac{r}{\alpha}, \qquad \text{Var}\,(X) = \frac{r}{\alpha^2}$$

olduğunu biliyoruz; buradan

$$E(X^2) = \text{Var}\,(X) + \big(E(X)\big)^2 = \frac{r}{\alpha^2} + \frac{r^2}{\alpha^2} = \frac{r(r+1)}{\alpha^2}$$

bulunur.
Eşitleme ve çözüm. Denklemler

$$\bar{X} = \frac{r}{\alpha}, \qquad M_2 = \frac{r(r+1)}{\alpha^2} = \frac{r^2}{\alpha^2} + \frac{r}{\alpha^2}$$

olur. Birinci denklemin karesi $\bar{X}^2 = r^2/\alpha^2$ olduğundan ikinciden çıkarınca

$$M_2 - \bar{X}^2 = \frac{r}{\alpha^2} = \frac{r}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\bar{X}}{\alpha}$$

kalır. Buradan önce α, sonra $r = \alpha\bar{X}$ bulunur:

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}}{M_2 - \bar{X}^2}, \qquad \hat{r} = \frac{\bar{X}^2}{M_2 - \bar{X}^2}.$$

Önerme 9.1 gereği payda $\frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2$'dir; gözlemlerin hepsi eşit olmadıkça pozitiftir, dolayısıyla iki tahmin de pozitif çıkar. ■

9.5 Yöntemin Bir Zayıflığı

Momentler yöntemi hesap açısından çok rahattır, ama bulduğu tahmin her zaman veriyle uyumlu olmayabilir. Bunu, değer kümesi parametreye bağlı olan bir dağılımda görelim.

Örnek 9.11 (Üçgen Yoğunluğun Uç Noktası). Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2}, \qquad 0 < x < \theta$$

olan bir kitleden alınmış n hacimli bir örneklem yardımıyla θ parametresinin tahmin edicisini momentler yöntemiyle bulunuz.

Çözüm.
Tek parametre vardır; birinci momenti hesaplayalım:

$$E(X) = \int_0^\theta x\,\frac{2(\theta - x)}{\theta^2}\,dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta (\theta x - x^2)dx$$
$$= \frac{2}{\theta^2}\left(\frac{\theta^3}{2} - \frac{\theta^3}{3}\right) = \frac{2}{\theta^2}\cdot\frac{\theta^3}{6} = \frac{\theta}{3}.$$

Bu sonuç sezgiyle de uyumludur: yoğunluğun grafiği köşeleri $(0, 2/\theta)$, $(0,0)$ ve $(\theta, 0)$ olan bir üçgendir ve bir üçgenin ağırlık merkezinin apsisi köşelerin apsislerinin ortalaması $(0+0+\theta)/3$'tür.
$\bar{X} = \theta/3$ denklemi

$$\hat{\theta} = 3\bar{X}$$

tahmin edicisini verir. ■

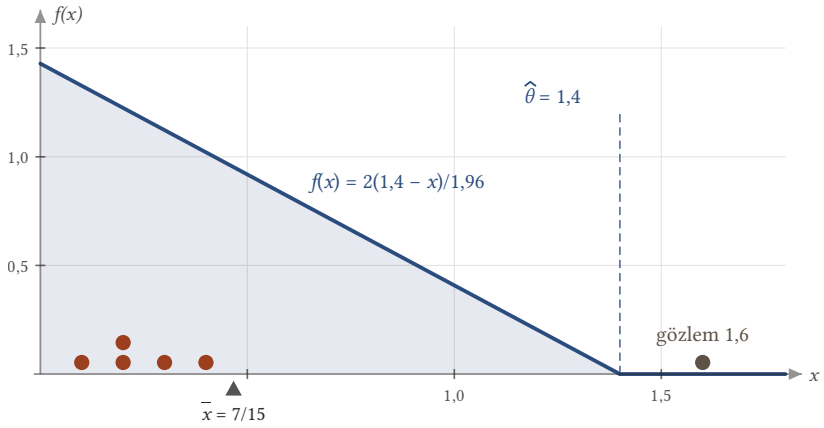
Örnek 9.12 (Veriyle Çelişen Bir Moment Tahmini). Üçgen yoğunluklu kitleden (Örnek 9.11) $n = 6$ gözlem alınmış ve 0,2; 0,1; 0,4; 0,3; 0,2; 1,6 değerleri gözlenmiştir. $\hat{\theta} = 3\bar{X}$ tahminini hesaplayıp veriyle karşılaştırınız.

Çözüm.
Gözlemlerin toplamı 2,8 olduğundan

$$\bar{x} = \frac{2{,}8}{6} = \frac{7}{15}, \qquad \hat{\theta} = 3 \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Oysa $\theta = 1{,}4$ olsaydı yoğunluk $x \geq 1{,}4$ için sıfır olurdu; yani 1,4'ten büyük bir gözlem imkânsız olurdu. Hâlbuki gözlemlerden biri 1,6'dır. Başka bir deyişle, momentler yöntemi tam da gözlediğimiz veriyi üretemeyecek bir model önermiştir. Veriyle uyumlu her θ en büyük gözlemden büyük, yani $\theta > 1{,}6$ olmalıdır.



Şekil 9.6: $\hat{\theta} = 3\bar{x} = 1{,}4$ ile kurulan üçgen yoğunluk 1,4'ün sağında sıfırdır; oysa gözlemlerden biri 1,6'dır. Moment tahmini, verinin kendisiyle çelişen bir model üretebilir.

Bunun nedeni, momentler yönteminin veriyi yalnızca $\bar{X}$ gibi özetler üzerinden görmesidir; $\bar{X}$ en büyük gözlemin parametre hakkında taşıdığı bilgiyi kullanmaz. ■

Momentler yöntemi kolaydır ve çoğu zaman makul tahminler verir; ama tahmin edici tek değildir ve son örnekte gördüğümüz gibi veriyle çelişebilir. Bir sonraki bölümde parametreyi "gözlenen veriyi en olası kılan değer" olarak seçen ve bu sorunları büyük ölçüde gideren yöntemi inceleyeceğiz: En Çok Olabilirlik Yöntemi.

 CC BY-NC-SA 4.0

10. En Çok Olabilirlik Yöntemi

Momentler yöntemi kitle momentlerini örneklem momentlerine eşitleyerek tahmin edici üretiyordu. Bu bölümde soruyu tersinden soruyoruz: Elimizde belirli gözlemler var; parametrenin hangi değeri **tam da bu gözlemleri** en olası kılar? Bu sorunun cevabı en çok olabilirlik (maksimum olabilirlik, İng. *maximum likelihood*) yöntemidir ve istatistikte en yaygın kullanılan tahmin yöntemidir.

10.1 Olabilirlik Fonksiyonu

Yöntemin temel nesnesi, örneklemin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonunun parametreye bağlı bir fonksiyon olarak okunmasıdır.
Bir kitle üzerinde tanımlı X rastgele değişkeninin dağılımı $f(x;\theta)$, $x \in D_X$, $\theta \in \Theta$ olasılık (yoğunluk) fonksiyonuyla verilsin; Θ parametrenin alabileceği değerlerin kümesidir (parametre uzayı). Bu kitleden alınan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ rastgele örneklemi bağımsızdır ve her X_i'nin olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f(x_i;\theta)$'dır. Bağımsızlık yüzünden ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonu bu fonksiyonların çarpımıdır.

Tanım 10.1 (Olabilirlik Fonksiyonu). $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $f(x;\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ dağılımından alınmış bir rastgele örneklem ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gözlenen değerler olsun.

$$\begin{aligned} L(\theta) = L(x_1, \ldots, x_n; \theta) &= f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta) \cdots f(x_n;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta), \qquad \theta \in \Theta \end{aligned}$$

fonksiyonuna, gözlemler sabit tutulup θ'nın bir fonksiyonu olarak düşünüldüğünde, **olabilirlik fonksiyonu** denir.

Yani formül örneklemin ortak olasılık (yoğunluk) fonksiyonunun ta kendisidir; değişen yalnız bakış açısıdır. Ortak olasılık fonksiyonunda θ sabittir ve x'ler değişir. Olabilirlikte ise veri elimizdedir, yani x'ler sabittir, değişen θ'dır. Kesikli bir kitlede $L(\theta)$, "parametre θ iken tam da bu gözlemlerin çıkma olasılığı" demektir. Sürekli bir kitlede $L(\theta)$ bir olasılık değil yoğunluktur, ama yorum aynıdır: $L(\theta)$ ne kadar büyükse gözlenen veri θ altında o kadar "beklenen" bir sonuçtur.

Örnek 10.1 (Aynı Formül, İki Bakış). X, λ parametreli Poisson dağılımına sahip olsun. Tek bir gözlem yapılıyor ve $x = 2$ bulunuyor. Olabilirlik fonksiyonunu yazınız ve onu en büyük yapan λ değerini bulunuz.

Çözüm.
Poisson olasılık fonksiyonu (Olasılık Teorisi'ndeki tanım)

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda \in \Theta = (0, \infty)$$

biçimindedir. λ sabitken bu, x'in bir fonksiyonudur: her x için $f(x;\lambda) \geq 0$ ve $\sum_x f(x;\lambda) = 1$. Şimdi ise $x = 2$ sabit, λ değişken:

$$L(\lambda) = f(2;\lambda) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}, \qquad \lambda > 0.$$

Çarpım kuralıyla türev alalım:

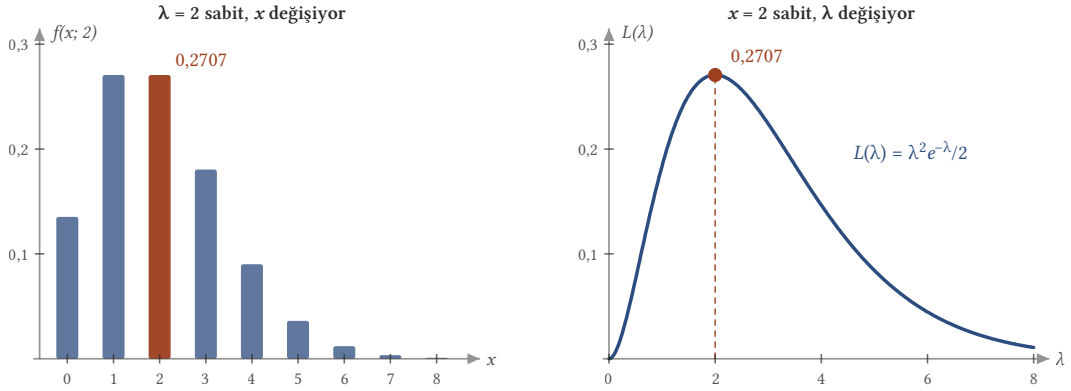
$$L'(\lambda) = \frac{2\lambda e^{-\lambda} - \lambda^2 e^{-\lambda}}{2} = \frac{\lambda(2-\lambda)\, e^{-\lambda}}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$\lambda > 0$ ve $e^{-\lambda} > 0$ olduğundan türevin işareti $2 - \lambda$'nın işaretidir: $(0, 2)$ aralığında L artar, $(2, \infty)$ aralığında azalır. O hâlde L en büyük değerini $\lambda = 2$'de alır:

$$L(2) = \frac{4e^{-2}}{2} = 2e^{-2} \approx 0{,}2707.$$

Karşılaştırma için $L(1) = e^{-1}/2 \approx 0{,}1839$ ve $L(4) = 8e^{-4} \approx 0{,}1465$. Yani tek gözlem 2 iken, bu sonucu en olası kılan parametre değeri $\lambda = 2$'dir.
Aşağıdaki şekil aynı formülün iki okunuşunu yan yana koyuyor. Solda $\lambda = 2$ için x'e göre olasılıklar, sağda $x = 2$ için λ'ya göre olabilirlik var; iki grafiğin ortak noktası $f(2; 2) = L(2)$'dir.



Şekil 10.1: Aynı formül, iki bakış. Solda λ = 2 sabitken x'e göre Poisson olasılıkları; çubukların toplamı 1'dir. Sağda gözlem x = 2 sabitken λ'ya göre olabilirlik fonksiyonu; en büyük değerini λ = 2'de alır. Vurgulu çubuk ile vurgulu nokta aynı sayıdır: f(2; 2) = L(2) ≈ 0,2707.

■

Olabilirlik fonksiyonu θ'ya göre bir olasılık dağılımı değildir; θ üzerinden toplamı ya da integrali 1 olmak zorunda değildir. Örneğin Bernoulli dağılımında tek gözlem $x = 1$ ise $L(p) = p$ olur ve $\int_0^1 p\,dp = \frac{1}{2}$ çıkar. Bu yüzden $L(\theta)$ için "olasılık" değil "olabilirlik" deriz.

10.2 En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi

Olabilirliği en büyük yapan parametre değeri, gözlenen veriyi en iyi açıklayan değerdir. Yöntem bu değeri tahmin olarak seçer.

Tanım 10.2 (En Çok Olabilirlik Tahmin Edicisi). Her gözlem kümesi $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ için $L(\theta)$ olabilirlik fonksiyonunu Θ üzerinde en büyük yapan değer $\hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olsun:

$$L\left(\hat{\theta}\right) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta).$$

Gözlemlerin yerine rastgele değişkenler konarak elde edilen $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ istatistiğine θ parametresinin **en çok olabilirlik tahmin edicisi** denir. Gözlenen değerlerden hesaplanan $\hat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$ sayısına da **en çok olabilirlik tahmini** denir.

Yani parametrenin alabileceği bütün değerler arasından, elimizdeki veriyi en yüksek olasılıkla (yoğunlukla) üreten değeri seçiyoruz. İngilizce kaynaklarda bu tahmin ediciye *maximum likelihood estimator* (kısaca MLE) denir. Tahmin edici ile tahmin arasındaki fark, momentler yönteminde gördüğümüzle aynıdır (Tanım 9.2): tahmin edici bir rastgele değişkendir, tahmin ise onun gözlenen bir değeridir.

 CC BY-NC-SA 4.0

10.2.1 Olabilirlik Denklemi

L türevlenebilir ve en büyük değerini Θ'nın bir iç noktasında alıyorsa, o noktada türevi sıfırdır. Bu, tahmin ediciyi bulmanın olağan yoludur.

Tanım 10.3 (Olabilirlik Denklemi). $L(\theta)$ türevlenebilir olsun.

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0$$

denklemine **olabilirlik denklemi** denir. Bu denklemin bir $\hat{\theta}$ çözümü için

$$\frac{d^2L(\theta)}{d\theta^2}\bigg|_{\theta=\hat{\theta}} < 0$$

ise $\hat{\theta}$, L'nin bir yerel en büyük noktasıdır; en çok olabilirlik tahmini bu tür çözümler arasında aranır.

Yani birinci türevin sıfır olduğu yer bir tepe adayıdır; ikinci türevin negatif olması eğrinin orada aşağı doğru büküldüğünü, dolayısıyla adayın gerçekten bir tepe olduğunu söyler. Yine de iki noktaya dikkat etmek gerekir. Birincisi, yerel bir tepe her zaman en yüksek tepe değildir; bu yüzden örneklerde bulduğumuz noktanın mutlak en büyük olduğunu da gerekçelendireceğiz. İkincisi, en büyük değer türevin sıfır olmadığı bir yerde de alınabilir (Örnek 10.15).
Olasılık (yoğunluk) fonksiyonları çoğu zaman üstel ifadeler ve çarpımlar içerir. Bu yüzden $L(\theta)$ yerine $\ln L(\theta)$'yı en büyük yapmak çok daha kullanışlıdır: logaritma çarpımı toplama, üssü çarpana çevirir. Aşağıdaki önerme bunun sonucu değiştirmediğini söylüyor.

Önerme 10.1 (Log-Olabilirlik Aynı Noktada En Büyüktür). *$L(\theta) > 0$ olan θ değerlerinde $\ln L(\theta)$ tanımlı olsun. L ile $\ln L$ en büyük değerlerini aynı noktalarda alır. Ayrıca L türevlenebilirse*

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{L'(\theta)}{L(\theta)},$$

dolayısıyla $L(\theta) > 0$ olan θ değerleri üzerinde olabilirlik denklemi ile $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = 0$ denklemi aynı çözümlere sahiptir.

> ***İspat.***
> *$\ln$ fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde kesin artandır. Bu yüzden $L(\theta_1), L(\theta_2) > 0$ için*
>
> $$L(\theta_1) \le L(\theta_2) \Leftrightarrow \ln L(\theta_1) \le \ln L(\theta_2).$$
>
> *L'nin en büyük değeri pozitiftir (gözlenen veri hiçbir θ altında imkânsız olsaydı veri gözlenemezdi); $L(\theta) = 0$ olan noktalar zaten en büyük değer adayı değildir. Şimdi $\hat{\theta}$ noktası L'yi en büyük yapsın. Her θ için $L(\theta) \le L(\hat{\theta})$ olduğundan yukarıdaki denklik $\ln L(\theta) \le \ln L(\hat{\theta})$ verir; yani $\hat{\theta}$, $\ln L$'yi de en büyük yapar. Aynı akıl yürütme ters yönde de işler.*
> *Türev için zincir kuralını uygularız: $(\ln u)' = u'/u$ olduğundan $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = L'(\theta)/L(\theta)$. Payda pozitif olduğundan bu kesir ancak $L'(\theta) = 0$ iken sıfırdır.* ■

Dört Adımda En Çok Olabilirlik Tahmini

1. Olabilirliği yazıp sadeleştirin: $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$.
2. Logaritmasını alıp toplam olarak yazın: $\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta)$.
3. $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = 0$ denklemini θ için çözün.
4. Bulunan noktanın en büyük değer olduğunu gösterin (ikinci türevin negatifliği ya da birinci türevin işaret değişimi), sonra x_i'lerin yerine X_i yazarak tahmin ediciye geçin.

 CC BY-NC-SA 4.0

10.3 Tek Parametreli Örnekler

Dört adımı önce en sık karşılaşılan iki kesikli dağılıma uygulayalım.

Örnek 10.2 (Poisson Dağılımında λ). Poisson (λ) dağılımına sahip bir kitleden alınmış n birimlik bir rastgele örnekleme dayanarak λ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm.
Olabilirlik. Poisson olasılık fonksiyonu

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda \in (0, \infty)$$

olduğundan $X_1, \ldots, X_n$'nin ortak olasılık fonksiyonu

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= f(x_1;\lambda)\, f(x_2;\lambda) \cdots f(x_n;\lambda) \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_2}}{x_2!} \cdots \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_n}}{x_n!} = \frac{e^{-n\lambda}\,\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{x_1!\,x_2! \cdots x_n!} \end{aligned}$$

olur: n tane $e^{-\lambda}$ çarpanı $e^{-n\lambda}$ verir, λ'nın üsleri toplanır.
Logaritma. Tek bir çarpanın logaritması

$$\ln \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = -\lambda + x_i \ln \lambda - \ln(x_i!)$$

olduğundan, bunları $i = 1, \ldots, n$ için toplarsak

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \ln \lambda - \ln\big(\, x_1!\, x_2! \cdots x_n! \,\big)\,.$$

Türev. Son terim λ'ya bağlı değildir, türevi sıfırdır:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln L(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

En büyük değer. Gözlemlerden en az biri pozitifse $(\sum x_i > 0)$

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} \ln L(\lambda) = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2} < 0$$

olur; $\lambda = \bar{x}$ noktasında değeri $-n\bar{x}/\bar{x}^{\,2} = -n/\bar{x}$'tir. İkinci türev her yerde negatif olduğundan birinci türev azalandır; $\bar{x}$'ten önce pozitif, sonra negatiftir. Yani $\bar{x}$ yalnız yerel değil, mutlak en büyük noktadır. (Bütün gözlemler 0 ise $L(\lambda) = e^{-n\lambda}$ azalan olur ve en büyük değerine Θ içinde ulaşmaz; formül yine sınır değeri $\bar{x} = 0$'ı verir.)
Gözlemlerin yerine rastgele değişkenleri koyarsak

$$\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$$

Örneklem ortalaması $\bar{X}$, λ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisidir. $E(X) = \lambda$ olduğundan momentler yöntemi de birinci momentten aynı tahmin ediciyi verir (Örnek 9.8). ■

Örnek 10.3 (Santrale Gelen Çağrılar). Bir telefon santraline bir dakikada gelen çağrı sayısı Poisson (λ) dağılımlıdır. Rastgele seçilen altı dakikada sırasıyla $2, 4, 3, 1, 5, 3$ çağrı gelmiştir. λ'nın en çok olabilirlik tahminini bulunuz.

Çözüm.
Genel sonuca göre (Örnek 10.2) tahmin, örneklem ortalamasıdır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 2+4+3+1+5+3 = 18, \qquad \hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{18}{6} = 3.$$

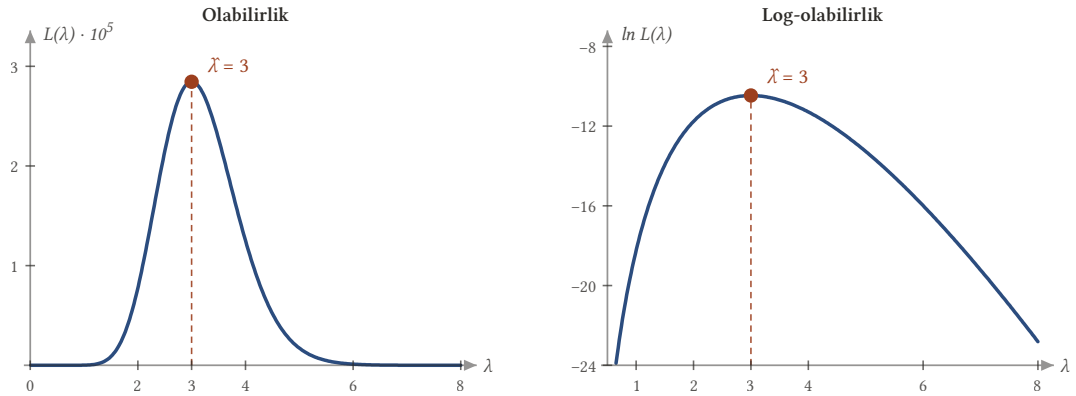
Sonucu olabilirlik üzerinden de görelim.

$$2!\,4!\,3!\,1!\,5!\,3! = 2 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 120 \cdot 6 = 207\,360$$

olduğundan

$$\ln L(\lambda) = -6\lambda + 18 \ln \lambda - \ln 207\,360.$$

Birkaç değer: $\ln L(2) \approx -11{,}766$, $\ln L(3) \approx -10{,}467$, $\ln L(4) \approx -11{,}289$. İkinci türev $-18/\lambda^2$, $\lambda = 3$'te -2'dir. Olabilirliğin kendisi çok küçüktür: $L(3) = e^{-10{,}467} \approx 2{,}85 \cdot 10^{-5}$. Bu, $\ln L$ ile çalışmanın pratik bir nedenidir; çok sayıda küçük olasılığın çarpımı hızla sıfıra yaklaşır, logaritmaları ise rahatça toplanır.



Şekil 10.2: Örneklem 2, 4, 3, 1, 5, 3 için Poisson olabilirliği (solda) ve logaritması (sağda). L(λ) çok küçük sayılardan oluşur (en büyük değeri yaklaşık $2{,}85 \cdot 10^{-5}$), ln L ise rahat okunur; ikisi de en büyük değerini aynı noktada, λ = x̄ = 3'te alır.

Yani bu altı dakikaya bakarak santrale dakikada ortalama 3 çağrı geldiğini tahmin ederiz. ■

Örnek 10.4 (Bernoulli Dağılımında p). Bernoulli (p) dağılımına sahip bir kitleden alınmış n birimlik bir rastgele örnekleme dayanarak p parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm.
Olabilirlik. Bernoulli olasılık fonksiyonu (Olasılık Teorisi'ndeki tanım) $f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x}$, $x \in \{0,1\}$, $0 < p < 1$ biçimindedir. Buna göre

$$\begin{aligned} L(p) &= p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdot p^{x_2}(1-p)^{1-x_2} \cdots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n x_i}\,(1-p)^{\,n-\sum_{i=1}^n x_i}. \end{aligned}$$

$\sum x_i$, örneklemdeki başarı (1) sayısıdır; kısaca $\sum x_i = n\bar{x}$ yazalım.
Logaritma ve türev.

$$\ln L(p) = n\bar{x} \ln p + n(1-\bar{x}) \ln(1-p),$$

$$\frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{n\bar{x}}{p} - \frac{n(1-\bar{x})}{1-p} = 0.$$

Buradan $\dfrac{n\bar{x}}{p} = \dfrac{n(1-\bar{x})}{1-p}$, yani $\bar{x}(1-p) = p(1-\bar{x})$ bulunur. Parantezleri açınca $\bar{x} - \bar{x}p = p - \bar{x}p$, dolayısıyla $p = \bar{x}$.

 CC BY-NC-SA 4.0

En büyük değer. $0 < \bar{x} < 1$ iken

$$\frac{d^2}{dp^2} \ln L(p) = -\frac{n\bar{x}}{p^2} - \frac{n(1-\bar{x})}{(1-p)^2} < 0$$

her p için doğrudur. Birinci türev azalan olduğundan $p = \bar{x}$ mutlak en büyük noktadır. (Bütün gözlemler 0 ya da hepsi 1 ise $L(p) = (1-p)^n$ ya da $L(p) = p^n$ tekdüzedir ve en büyük değerine Θ içinde ulaşmaz; formül yine sınır değeri $p = \bar{x}$'i verir.)
Sonuç olarak

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X},$$

yani başarı olasılığının tahmini örneklemdeki başarı oranıdır. $E(X) = p$ olduğundan momentler yöntemi de aynı tahmin ediciyi verir. ■

Örnek 10.5 (Beş Denemede Üç Başarı). Bir Bernoulli (p) deneyi beş kez bağımsız olarak tekrarlanıyor ve $(0, 1, 0, 1, 1)$ sonuçları gözleniyor. p'nin en çok olabilirlik tahminini bulunuz.

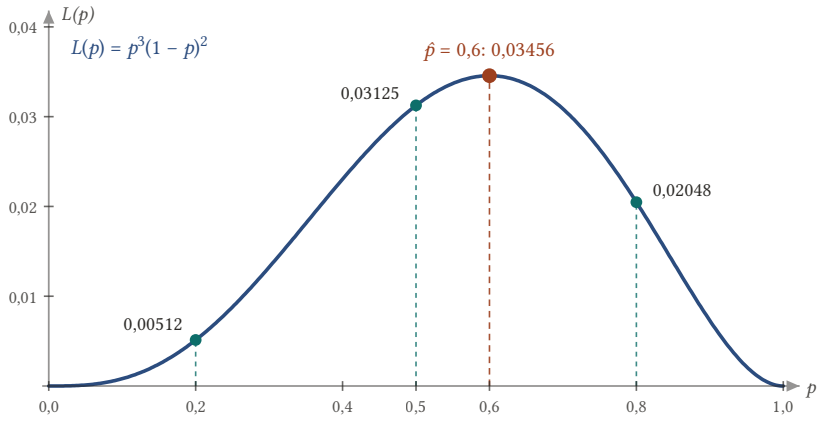
Çözüm.
Üç başarı olduğundan $\sum x_i = 3$ ve olabilirlik

$$L(p) = p^3(1-p)^2, \qquad 0 < p < 1.$$

Genel sonuca göre (Örnek 10.4) tahmin başarı oranıdır: $\hat{p} = \bar{x} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6$. Olabilirliği birkaç noktada hesaplayarak bunu doğrulayalım:

$$L(0{,}2) = 0{,}00512, \quad L(0{,}5) = 0{,}03125, \quad L(0{,}6) = 0{,}03456, \quad L(0{,}8) = 0{,}02048.$$

En büyük değer $p = 0{,}6$'dadır.



Şekil 10.3: Gözlemler 0, 1, 0, 1, 1 iken olabilirlik L(p) = p³(1 − p)². Birkaç aday değer işaretli: p = 0,6 bu beş sonucu en olası kılan değerdir.

Yani beş denemenin üçü başarılıysa, bu sonucu en olası kılan başarı olasılığı $3/5$'tir. ■

10.4 Değişmezlik Özelliği

Çoğu zaman parametrenin kendisi değil, ondan hesaplanan bir büyüklük istenir: σ^2 yerine σ, p yerine $P(X = 0) = 1 - p$ gibi. En çok olabilirlik yönteminde bunun için her şeyi baştan yapmak gerekmez.

Teorem 10.1 (Değişmezlik Özelliği). *$\hat{\theta}$, θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi ve g, Θ üzerinde tanımlı bire bir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g(\hat{\theta})$, $\eta = g(\theta)$ parametre fonksiyonunun en çok olabilirlik tahmin edicisidir.*
g bire bir değilse, η'nın olabilirliği $L^*(\eta) = \sup\{L(\theta) : g(\theta) = \eta\}$ ile tanımlanır ve sonuç yine geçerlidir.

> ***İspat.***
> ***Bire bir g.*** *Modeli θ yerine $\eta = g(\theta)$ ile yazalım. g bire bir olduğundan her $\eta \in g(\Theta)$ için tek bir $\theta = g^{-1}(\eta)$ vardır ve olasılık (yoğunluk) fonksiyonu $f\left(x; g^{-1}(\eta)\right)$ olur. Dolayısıyla η'ya göre olabilirlik*
>
> $$L^*(\eta) = L\left(g^{-1}(\eta)\right), \qquad \eta \in g(\Theta).$$
>
> *$\hat{\theta}$, L'yi en büyük yaptığından her η için*
>
> $$L^*(\eta) = L\left(g^{-1}(\eta)\right) \leq L(\hat{\theta}) = L^*\left(g(\hat{\theta})\right).$$
>
> *Yani L^* en büyük değerini $\eta = g(\hat{\theta})$'da alır: $\hat{\eta} = g(\hat{\theta})$.*
> ***Genel g.*** *L^*'ın tanımında $\theta = \hat{\theta}$ da $g(\theta) = g(\hat{\theta})$ koşulunu sağladığından*
>
> $$L^*\left(g(\hat{\theta})\right) \geq L(\hat{\theta}).$$
>
> *Öte yandan her η için $L^*(\eta)$, bazı $L(\theta)$ değerlerinin supremumudur ve bu değerlerin hepsi $L(\hat{\theta})$'dan küçük ya da ona eşittir; bu yüzden $L^*(\eta) \leq L(\hat{\theta})$. İki eşitsizlik birlikte her η için $L^*(\eta) \leq L^*\left(g(\hat{\theta})\right)$ verir, yani $g(\hat{\theta})$, L^*'ı en büyük yapar.* ■

Yani en çok olabilirlik tahmini, parametreyi nasıl adlandırdığımıza bağlı değildir. σ^2'nin tahmini $\hat{\sigma}^2$ ise σ'nın tahmini $\sqrt{\hat{\sigma}^2}$'dir; p'nin tahmini $\hat{p}$ ise $1-p$'nin tahmini $1-\hat{p}$'dir. Bu kullanışlı özelliği her tahmin edici taşımaz; sonraki bölümde yansızlığın böyle bir dönüşümle korunmadığını göreceğiz.

Örnek 10.6 (Başarısızlık Olasılığının Tahmini). Bir Bernoulli (p) deneyinin beş tekrarında $(0, 1, 0, 1, 1)$ değerleri gözleniyor. $P(X = 0)$ olasılığının en çok olabilirlik tahminini bulunuz.

> **Çözüm.**
> Önce p'yi tahmin edelim. Beş denemede üç başarı örneğinde (Örnek 10.5) bulduğumuz gibi $\hat{p} = \bar{x} = 3/5$.
> $P(X = 0) = 1 - p$'dir. $g(p) = 1 - p$ fonksiyonu bire birdir, bu yüzden değişmezlik özelliğine (Teorem 10.1) göre
>
> $$\widehat{P(X = 0)} = g(\hat{p}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$
>
> Yani tahmin edilen dağılım Bernoulli $(3/5)$'tir ve bu dağılımda 0 gelme olasılığı $2/5$'tir. ■

10.5 Birden Çok Parametre

Dağılım birden fazla bilinmeyen parametre içerdiğinde olabilirlik çok değişkenli bir fonksiyon olur ve tek türevin yerini kısmi türevler alır.

Tanım 10.4 (Olabilirlik Denklem Sistemi). $X_1, X_2, ..., X_n$ rastgele örneklemi $f(x; \theta_1, \theta_2, ..., \theta_k)$ gibi k parametreli bir dağılımdan alınmış olsun ve

$$L(\theta_1, ..., \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta_1, ..., \theta_k)$$

olabilirlik fonksiyonu olsun. L'yi en büyük yapan $(\hat{\theta}_1, ..., \hat{\theta}_k)$ değerlerine $\theta_1, ..., \theta_k$'nın en çok olabilirlik tahmin edicileri denir. L türevlenebilir ve en büyük değer iç bir noktada alınıyorsa bu değerler

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0, \quad ..., \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_k} = 0$$

ya da, log-olabilirlik önermesindeki (Önerme 10.1) nedenle eşdeğer olarak,

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_k} = 0$$

olabilirlik denklem sisteminin çözümleri arasındadır.

Yani her parametreye göre ayrı ayrı türev alınır, diğer parametreler o an sabit sayılır ve k denklem birlikte çözülür.

Örnek 10.7 (Normal Dağılımda μ ve σ²). $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınmış n birimlik bir rastgele örnekleme dayanarak μ ve σ^2 parametrelerinin en çok olabilirlik tahmin edicilerini bulunuz.

Çözüm.
Olabilirlik. Normal yoğunluk

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0.$$

n yoğunluğun çarpımında n tane $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ çarpanı $(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}$ verir, üsler toplanır:

$$\begin{aligned} L(\mu,\sigma^2) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\sigma^2)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \Big). \end{aligned}$$

Logaritma.

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

Birinci denklem (μ'ye göre). σ^2 sabit tutulur; $(x_i-\mu)^2$'nin μ'ye göre türevi $-2(x_i-\mu)$'dir:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} 2(x_i-\mu)(-1) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0.$$

$\sigma^2 > 0$ olduğundan $\sum(x_i-\mu) = 0$, yani $\sum x_i - n\mu = 0$ ve $\mu = \bar{x}$.
İkinci denklem (σ^2'ye göre). Bu kez μ sabit tutulur ve σ^2 tek bir değişken gibi türetilir:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0.$$

Her iki tarafı $2\sigma^4$ ile çarparsak $-n\sigma^2 + \sum(x_i-\mu)^2 = 0$, yani $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2$. Birinci denklemden gelen $\mu = \bar{x}$'i yerine koyarız.
En büyük değer. Çözümün gerçekten en büyük değer olduğunu iki adımda görelim; bütün gözlemlerin eşit olmadığını varsayıyoruz. Önce her μ için

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + n(\bar{x}-\mu)^2 \geq \sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

olur (sağdaki çapraz terim $2(\bar{x}-\mu)\sum(x_i-\bar{x}) = 0$'dır). Dolayısıyla her σ^2 için $\ln L(\mu,\sigma^2) \leq \ln L(\bar{x},\sigma^2)$. Sonra $A = \sum(x_i-\bar{x})^2 > 0$ ve $v = \sigma^2$ yazıp

$$h(v) = \ln L(\bar{x}, v) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln v - \frac{A}{2v}$$

fonksiyonuna bakalım. $h'(v) = -\dfrac{n}{2v} + \dfrac{A}{2v^2} = \dfrac{A-nv}{2v^2}$, $v < A/n$ iken pozitif, $v > A/n$ iken negatiftir. Yani h en büyük değerini $v = A/n$'de alır.
Sonuç olarak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\hat{\mu} = \bar{X}, \qquad \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Momentler yöntemi de aynı iki tahmin ediciyi verir (Örnek 9.6). Dikkat: $\widehat{\sigma^2}$'nin paydası n'dir; örneklem varyansı S^2'nin paydası ise $n-1$'dir, yani $\widehat{\sigma^2} = \frac{n-1}{n}S^2$. Bu farkın ne anlama geldiğini sonraki bölümde yansızlık kavramıyla göreceğiz. ■

Örnek 10.8 (Normal Dağılımda σ). $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınmış n birimlik bir rastgele örnekleme dayanarak standart sapma σ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm.
İki parametreli normal örnekte (Örnek 10.7) $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2$. $(0,\infty)$ üzerinde $g(v) = \sqrt{v}$ bire bir olduğundan değişmezlik özelliğine (Teorem 10.1) göre

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\widehat{\sigma^2}} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right]^{1/2}.$$

Aynı sonucu, modeli baştan σ ile yazarak da doğrulayabiliriz. $\ln \sigma^2 = 2\ln\sigma$ olduğundan

$$\ln L(\mu,\sigma) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

ve σ'ya göre türev

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

$\mu = \bar{x}$ konunca yukarıdaki $\hat{\sigma}$ çıkar; değişmezlik özelliğinin söylediği de budur. ■

Örnek 10.9 (Beş Ölçümden μ ve σ). Normal dağılımlı bir kitleden alınan beş ölçüm $3, 5, 6, 7, 9$'dur. μ, σ^2 ve σ'nın en çok olabilirlik tahminlerini bulunuz.

Çözüm.
Normal dağılım için bulduğumuz formülleri (Örnek 10.7, Örnek 10.8) uygulayalım. Ortalama

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{3+5+6+7+9}{5} = \frac{30}{5} = 6.$$

Ortalamadan sapmalar $-3, -1, 0, 1, 3$; kareleri $9, 1, 0, 1, 9$ ve toplamları 20'dir. Buna göre

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{20}{5} = 4, \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{4} = 2.$$

Karşılaştırma için örneklem varyansı $s^2 = 20/4 = 5$'tir.
Tahmin edilen dağılım $N(6,4)$'tür. Olabilirliğin anlamını görmek için onu iki başka adayla karşılaştıralım. $n = 5$ için

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{5}{2}\ln(2\pi) - \frac{5}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu)^2$$

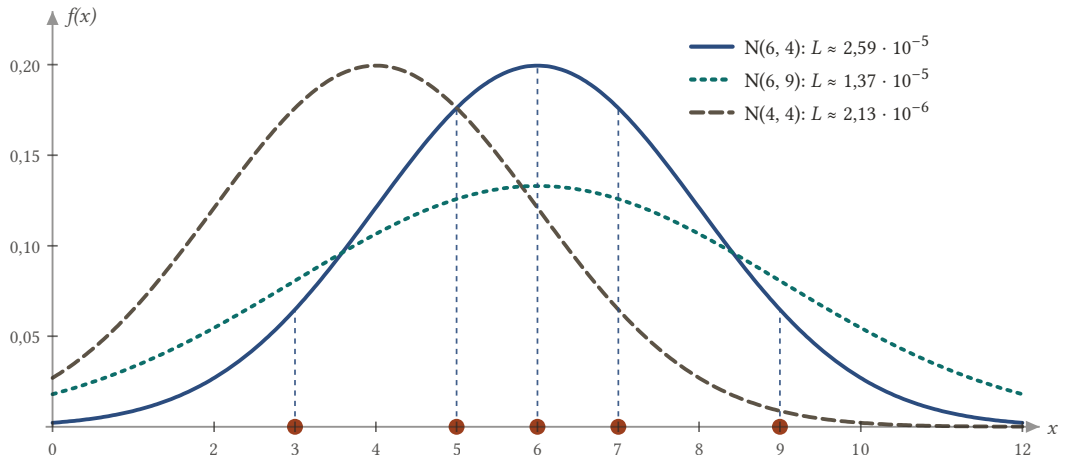
formülünden:

Aday	$\sum(x_i-\mu)^2$	$\ln L$
$N(6,4)$	20	$\approx -10{,}560$
$N(6,9)$	20	$\approx -11{,}199$

 CC BY-NC-SA 4.0

Aday	$\sum(x_i-\mu)^2$	$\ln L$
$N(4,4)$	40	$\approx -13{,}060$

En büyük değer tahmin edilen dağılımdadır. Merkezi kaydırmak gözlemleri eğrinin kuyruğuna iter; eğriyi gereğinden fazla yaymak ise bütün yükseklikleri alçaltır.



Şekil 10.4: Beş gözlem (eksen üzerindeki noktalar) ve üç aday normal yoğunluk. Bir adayın olabilirliği, gözlemlerin üstündeki yoğunluk yüksekliklerinin çarpımıdır; kesikli çizgiler N(6, 4) için bu yükseklikleri gösteriyor. Merkezi kaydırmak (N(4, 4)) ya da eğriyi yaymak (N(6, 9)) çarpımı küçültür.

■

Örnek 10.10 (Ortalaması ile Varyansı Eşit Normal Dağılım). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $N(\theta, \theta)$ dağılımından alınmış bir örneklem olsun; yani ortalama da varyans da θ'dır. θ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm.
Varyans pozitif olacağından $\theta > 0$'dır. Bu kez tek parametre vardır ama hem ortalamada hem varyansta görünür.
Olabilirlik ve logaritma. İki parametreli normal örnekteki (Örnek 10.7) hesapta μ ve σ^2 yerine θ yazarsak

$$L(\theta) = \frac{1}{(2\pi\theta)^{n/2}} \exp\Big(-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \theta)^2 \Big),$$

$$\ln L(\theta) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\theta) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\theta)^2}{\theta}.$$

Türev. Bölümün türevi kuralıyla

$$\frac{d}{d\theta}\,\frac{(x-\theta)^2}{\theta} = \frac{-2(x-\theta)\theta - (x-\theta)^2}{\theta^2} = -\frac{(x-\theta)(x+\theta)}{\theta^2} = -\frac{x^2-\theta^2}{\theta^2},$$

çünkü paydaki ortak çarpan $(x-\theta)$ dışarı alınınca $2\theta + (x-\theta) = x+\theta$ kalır. Ayrıca $\frac{d}{d\theta}\ln(2\pi\theta) = \frac{1}{\theta}$. Buna göre

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \theta^2) = -\frac{n}{2\theta} + \frac{\sum x_i^2}{2\theta^2} - \frac{n}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$m_2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2$ (ikinci örneklem momentinin gözlenen değeri, Tanım 7.8) yazıp ortak paydada toplarsak

$$\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = \frac{n}{2\theta^2}(m_2 - \theta - \theta^2).$$

Denklemin çözümü. Türev ancak $\theta^2 + \theta - m_2 = 0$ iken sıfırdır. Gözlemlerin hepsi 0 değilse $m_2 > 0$'dır; köklerin çarpımı $-m_2 < 0$ olduğundan biri pozitif, biri negatiftir; $\theta > 0$ koşulu pozitif kökü seçer:

$$\theta = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4m_2}}{2}.$$

En büyük değer. $\frac{n}{2\theta^2} > 0$ olduğundan türevin işareti $m_2 - \theta - \theta^2$'nin işaretidir. $\theta + \theta^2$ ifadesi $\theta > 0$ üzerinde artandır; bu yüzden türev bulunan kökten önce pozitif, sonra negatiftir. Yani kök mutlak en büyük noktadır.
Sonuç olarak

$$\hat{\theta} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4M_2}}{2}, \qquad M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Tahmin edici $\bar{X}$'e değil, gözlemlerin karelerinin ortalamasına dayanır; çünkü θ hem ortalamayı hem varyansı belirler ve $E(X^2) = \theta + \theta^2$'dir. ■

Örnek 10.11 (N(θ, θ) Modelinde Bir Örneklem). $N(\theta, \theta)$ dağılımından alınan dört gözlem $0, 2, 2, 4$'tür. θ'nın en çok olabilirlik tahminini bulunuz.

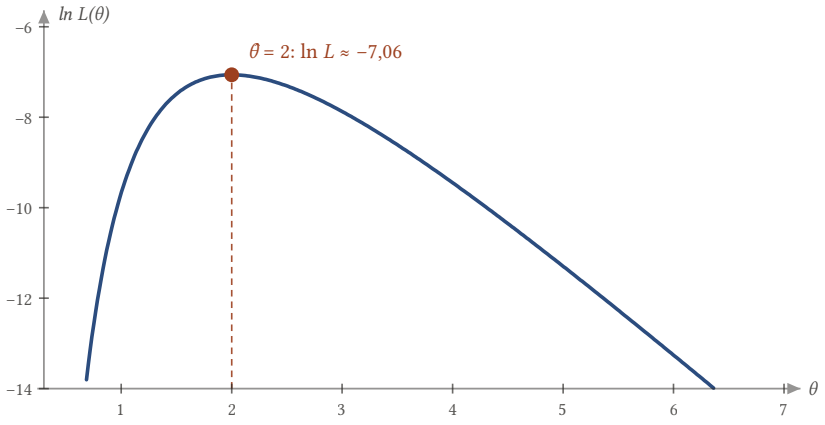
Çözüm.
Genel formülü (Örnek 10.10) kullanalım. Karelerin ortalaması

$$m_2 = \frac{0^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2}{4} = \frac{24}{4} = 6,$$

dolayısıyla

$$\hat{\theta} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2.$$

Gerçekten $\theta = 2$ için $\theta^2 + \theta = 6 = m_2$'dir. Log-olabilirliğin birkaç değeri de bunu doğrular: $\ln L(1) \approx -9{,}676$, $\ln L(2) \approx -7{,}062$, $\ln L(3) \approx -7{,}873$.



Şekil 10.5: N(θ, θ) modelinde 0, 2, 2, 4 örneklemi için log-olabilirlik. Eğrinin tek bir tepesi vardır ve bu tepe $\theta^2 + \theta = 6$ denkleminin pozitif kökü $\theta = 2$'dedir.

Bu örneklemde ortalama $\bar{x} = 2$ ve sapma kareleri ortalaması

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2=\frac{4+0+0+4}{4}=2$$

de $\hat{\theta}$ ile aynı çıkıyor; genel olarak bu üç sayı farklıdır. ■

10.6 Başka Dağılımlar

Aşağıdaki örneklerde aynı dört adımı başka dağılımlara uyguluyoruz; sonuncusu, olabilirlik denkleminin işe yaramadığı bir durumu gösteriyor.

Örnek 10.12 (Geometrik Dağılımda p). Geo (p) dağılımından alınmış n birimlik bir rastgele örnekleme dayanarak p parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm.
Geometrik olasılık fonksiyonu (Olasılık Teorisi'ndeki tanım) $f(x;p)=(1-p)^{x-1}p$, $x=1,2,\ldots$, $0<p<1$ biçimindedir; X ilk başarıya kadar yapılan deneme sayısıdır.
Olabilirlik ve logaritma.

$$L(p)=(1-p)^{x_1-1}p\cdot(1-p)^{x_2-1}p\cdots(1-p)^{x_n-1}p=p^n(1-p)^{\sum x_i-n},$$

$$\ln L(p)=n\ln p+\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\Big)\ln(1-p).$$

Türev.

$$\frac{d}{dp}\ln L(p)=\frac{n}{p}-\frac{\sum x_i-n}{1-p}=0.$$

Paydaları eşitlersek $n(1-p)=p\left(\sum x_i-n\right)$, yani $n-np=p\sum x_i-np$ ve $n=p\sum x_i$. Buradan

$$p=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\bar{x}}.$$

En büyük değer. Gözlemlerin hepsi 1 değilse $\sum x_i-n>0$ ve

$$\frac{d^2}{dp^2}\ln L(p)=-\frac{n}{p^2}-\frac{\sum x_i-n}{(1-p)^2}<0,$$

yani türev azalandır ve $1/\bar{x}$ mutlak en büyük noktadır. (Hepsi 1 ise $L(p)=p^n$ artandır ve en büyük değerine Θ içinde ulaşmaz; formül yine sınır değeri $p=1/\bar{x}=1$'i verir.)
Sonuç olarak $\hat{p}=\dfrac{1}{\bar{X}}$. Yani ilk başarı ortalama $\bar{x}$ denemede geliyorsa, başarı olasılığı $1/\bar{x}$ olarak tahmin edilir; bu, $E(X)=1/p$ ilişkisiyle de uyumludur. ■

Örnek 10.13 (Gamma Dağılımında α (r Bilinirken)). r bilinen bir sabit olmak üzere Gamma (r,α) dağılımından alınmış n birimlik bir rastgele örnekleme dayanarak α parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm.
Gamma yoğunluğu (Tanım 4.2), $(\alpha x)^{r-1}=\alpha^{r-1}x^{r-1}$ açılınca

$$f(x;\alpha)=\frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1}e^{-\alpha x}=\frac{\alpha^r}{\Gamma(r)}\,x^{r-1}e^{-\alpha x},\qquad x>0$$

biçimini alır; burada $\alpha>0$ bilinmeyen, $r>0$ bilinen parametredir.
Olabilirlik ve logaritma. n yoğunluğun çarpımında sabit çarpanlar $\alpha^{nr}/\Gamma(r)^n$ verir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$L(\alpha) = \frac{\alpha^{nr}}{\Gamma(r)^n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{r-1} e^{-\alpha\sum x_i},$$

$$\ln L(\alpha) = nr\ln\alpha + (r-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i - n\ln\Gamma(r).$$

Türev. Yalnız birinci ve üçüncü terim α'ya bağlıdır:

$$\frac{d}{d\alpha}\ln L(\alpha) = \frac{nr}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{nr}{\sum x_i} = \frac{r}{\bar{x}}.$$

En büyük değer. $\dfrac{d^2}{d\alpha^2}\ln L(\alpha) = -\dfrac{nr}{\alpha^2} < 0$ her $\alpha > 0$ için doğrudur; tek kritik nokta mutlak en büyük noktadır.
Sonuç olarak $\hat{\alpha} = \dfrac{r}{\bar{X}}$. $E(X) = r/\alpha$ olduğundan (Teorem 4.2) bu, ortalamayı $\bar{X}$'e eşitlemekle aynı sonuçtur. $r = 1$ özel durumunda üstel dağılımın oran parametresi için $\hat{\alpha} = 1/\bar{X}$ bulunur. ■

Örnek 10.14 (Üstel Dağılımda Bir Olasılığın Tahmini). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\,e^{-x/\theta}, \qquad x > 0, \theta > 0$$

olan dağılımdan alınmış bir örneklem olsun. $P(X \le 2)$ olasılığının en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm.
Bu, ortalaması θ olan üstel dağılımdır (Olasılık Teorisi'ndeki tanımda $\lambda = 1/\theta$).
İstenen olasılık θ cinsinden.

$$P(X \le 2) = \int_0^2 \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\,dx = \Big[-e^{-x/\theta}\Big]_0^2 = 1 - e^{-2/\theta}.$$

θ'nın tahmini. $L(\theta) = \theta^{-n}e^{-\sum x_i/\theta}$ ve

$$\ln L(\theta) = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \frac{d}{d\theta}\ln L(\theta) = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum x_i}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}\,(\bar{x} - \theta).$$

Türev $\theta < \bar{x}$ iken pozitif, $\theta > \bar{x}$ iken negatiftir; mutlak en büyük nokta $\theta = \bar{x}$'tir. (İkinci türev bu noktada $-n/\bar{x}^{\,2} < 0$'dır.) Yani $\hat{\theta} = \bar{X}$.
Değişmezlik. $g(\theta) = 1 - e^{-2/\theta}$ fonksiyonu $\theta > 0$ üzerinde kesin azalandır ($g'(\theta) = -\frac{2}{\theta^2}e^{-2/\theta} < 0$), dolayısıyla bire birdir. Değişmezlik özelliğine (Teorem 10.1) göre

$$\widehat{P(X \le 2)} = g(\hat{\theta}) = 1 - e^{-2/\bar{X}}.$$

Örneğin gözlemlerin ortalaması $\bar{x} = 4$ olsaydı tahmin $1 - e^{-1/2} \approx 0{,}3935$ olurdu. ■

Örnek 10.15 (Düzgün Dağılımda θ: Türevin İşe Yaramadığı Durum). $X_1, X_2, \ldots, X_n$, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta}, \qquad 0 \le x \le \theta, \theta > 0$$

olan $U(0,\theta)$ dağılımından (Olasılık Teorisi'ndeki tanım) alınmış bir rastgele örneklem olsun. θ'nın en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz ve gözlemler $2, 3, 5$ iken tahmini hesaplayınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

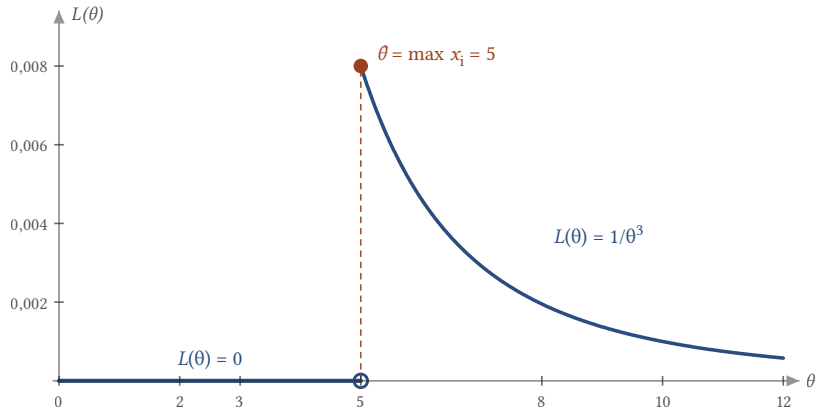
Olabilirlik. Bir x_i gözlemi için $f(x_i;\theta)$, $x_i \le \theta$ ise $1/\theta$, $x_i > \theta$ ise 0'dır. Çarpımın sıfırdan farklı olması için bütün gözlemlerin θ'dan küçük ya da eşit olması, yani $\theta \ge \max_i x_i$ olması gerekir:

$$L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n}, & \theta \ge \max\{x_1, \dots, x_n\}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Olabilirlik denklemi çözümsüz. $\theta \ge \max x_i$ bölgesinde $\dfrac{d}{d\theta}\theta^{-n} = -n\,\theta^{-n-1} < 0$; türev hiçbir yerde sıfır olmaz. Bu yüzden türeve bakarak değil, fonksiyonun biçimine bakarak düşünürüz.
En büyük değer. $\theta < \max x_i$ iken $L(\theta) = 0$'dır. $\theta \ge \max x_i$ iken $L(\theta) = \theta^{-n}$ kesin azalandır; en büyük değerini bu bölgenin sol ucunda alır. O hâlde

$$\hat{\theta} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

Yani θ her gözlemden en az onun kadar büyük olmak zorundadır; bu koşulu sağlayan değerler arasında yoğunluk $1/\theta$'yı en büyük yapan en küçüğüdür.
Sayısal durum. Gözlemler $2, 3, 5$ ise $n = 3$ ve $\hat{\theta} = 5$. Olabilirlik $L(5) = 1/125 = 0{,}008$; buna karşılık $L(6) = 1/216 \approx 0{,}0046$ ve 5'ten küçük her θ için $L(\theta) = 0$'dır, çünkü o durumda 5 gözlemi imkânsız olurdu.



Şekil 10.6: U(0, θ) modelinde 2, 3, 5 gözlemleri için olabilirlik. θ < 5 iken 5 gözlemi imkânsızdır ve L(θ) = 0'dır; θ ≥ 5 iken L(θ) = 1/θ³ azalır. En büyük değer, türevin sıfır olduğu bir noktada değil, sıçramanın olduğu θ = 5'te alınır.

Karşılaştırma için momentler yöntemi $E(X) = \theta/2$ eşitliğinden $2\bar{x} = 20/3 \approx 6{,}67$ verir; iki yöntem her zaman aynı sonucu vermez. Üstelik $2\bar{X}$ bazı örneklemlerde en büyük gözlemden küçük çıkabilir, yani veriyle çelişebilir (benzer bir durum için bkz. Örnek 9.12); $\max X_i$ ise hiçbir zaman çelişmez. ■

Bu bölümde bir örneklemden, onu en olası kılan parametre değerini seçen genel bir tahmin yöntemi kurduk ve onu kesikli, sürekli, tek ve çok parametreli dağılımlara uyguladık. Aynı parametre için artık birden fazla tahmin edicimiz var: örneğin σ^2 için $\widehat{\sigma^2}$ ile S^2, $U(0,\theta)$ için $\max X_i$ ile $2\bar{X}$. Hangisinin daha iyi olduğunu söyleyebilmek için ölçütlere ihtiyaç var; bunları Tahmin Edicilerin Özellikleri bölümünde ele alacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

11. Tahmin Edicilerin Özellikleri

Momentler yöntemi ve en çok olabilirlik yöntemi bize tahmin edici üretmeyi öğretti. Ama aynı parametre için genellikle birden çok aday vardır. Örneğin kitle ortalaması μ için örneklem ortalaması $\bar{X}$, örneklem medyanı, ilk ve son gözlemin ortalaması $(X_1 + X_n)/2$, hatta yalnız ilk gözlem X_1 akla gelebilir. Hangisini kullanmalıyız? Bu bölümde bir tahmin edicinin "iyi" olmasını ölçen dört ölçütü tanıyacağız: yansızlık, hata kareler ortalaması, etkinlik ve tutarlılık.
Bir istatistik olan $T(X_1, X_2, ..., X_n)$ tahmin edicisini kısaca T ile göstereceğiz. T bir rastgele değişkendir: örneklem değiştikçe değeri de değişir. Örneklem gözlendikten sonra T'nin aldığı sayı ise bir tahmindir. Bu yüzden büyük harfli $\bar{X}$ tahmin edicidir, küçük harfli $\bar{x}$ onun gözlenen değeri, yani tahmindir (Tanım 9.2). Bir tahmin edicinin iyiliğini tek bir tahmine bakarak değil, T'nin dağılımına bakarak değerlendiririz. Tahmin edilen parametre θ, parametre kümesi Θ ile gösterilir (Tanım 9.1).

11.1 Yansızlık

İlk istek doğaldır: tahmin edici ortalamada hedefi tutturmalı, sistematik olarak ne yukarıda ne aşağıda kalmalıdır.

Tanım 11.1 (Yansız Tahmin Edici). $\theta \in \Theta$ kitle parametresi için önerilen bir T tahmin edicisi her $\theta \in \Theta$ için

$$E(T) = \theta$$

özelliğine sahipse T'ye θ parametresinin **yansız tahmin edicisi** denir.

Tanım 11.2 (Bir Tahmin Edicinin Yanlılığı). θ parametresi için önerilen bir T tahmin edicisinin **yanlılığı**

$$\text{Yanlılık } (T, \theta) = E(T) - \theta$$

sayısıdır. Yanlılığı sıfırdan farklı olan tahmin ediciye **yanlı** tahmin edici denir.

Yani T'yi çok sayıda örneklem için hesaplayıp ortalamasını alsaydık, yansız bir tahmin edicide bu ortalama tam θ'ya denk gelirdi. Yanlılık, T'nin merkezinin hedeften ne kadar kaydığını ölçer: pozitifse T ortalamada θ'yı fazla, negatifse eksik tahmin eder. T ancak ve ancak yanlılığı her $\theta \in \Theta$ için sıfırsa yansızdır.
İki noktaya dikkat edelim. Birincisi, $E(T) = \theta$ eşitliği **her** $\theta \in \Theta$ için sağlanmalıdır; yalnız bir parametre değerinde tutan eşitlik yetmez. İkincisi, yansızlık tahmin edilen niceliğe göre söylenir. Örneğin $E(T) = \alpha$ ise T, α parametresinin yansız tahmin edicisidir. $E(T) = 1/\alpha$ ise T bu kez $1/\alpha$'nın yansız tahmin edicisidir, ama α'nın yanlı bir tahmin edicisidir.

Örnek 11.1 (Örneklem Ortalamasının Yansızlığı). $(X_1, X_2, ..., X_n)$, ortalaması μ olan bir kitleden alınmış bir örneklem olsun. $\bar{X}$'in μ için yansız olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Örneklemdeki her X_i kitle ile aynı dağılıma sahip olduğundan $E(X_i) = \mu$'dür. Beklenen değerin doğrusallığından
>
> $$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu.$$
>
> Bu eşitlik her μ için doğrudur; o hâlde $\bar{X}$, μ'nün yansız tahmin edicisidir. Bu, Teorem 7.1 içindeki ilk eşitliğin tahmin dilindeki karşılığıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örneklem varyansını n yerine $n-1$'e bölerek tanımlamıştık (Tanım 7.7):

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

İki birimlik bir kitlede bu bölmenin kitle varyansını ortalamada tam verdiğini Örnek 7.10 içinde saymıştık. Aşağıdaki teorem bunun her kitle için doğru olduğunu söyler.

Teorem 11.1 (Örneklem Varyansının Yansızlığı). *$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, ortalaması μ ve varyansı $\sigma^2 < \infty$ olan bir kitleden alınmış bir rastgele örneklem olsun. Bu durumda*

$$E(S^2) = \sigma^2,$$

yani S^2, σ^2 kitle varyansının yansız tahmin edicisidir.

İspat.
Kareler toplamını önce daha kullanışlı bir biçime getirelim. Her terimde μ ekleyip çıkaralım:

$$X_i - \bar{X} = (X_i - \mu) + \left(\mu - \bar{X}\right).$$

Karesini alıp i üzerinden toplarsak

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 + 2\left(\mu-\bar{X}\right)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) + n\left(\mu-\bar{X}\right)^2.$$

Ortadaki terimde $\mu - \bar{X}$ ifadesi i'ye bağlı olmadığı için toplamın dışına çıktı. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu) = \sum_{i=1}^{n}X_i - n\mu = n\bar{X} - n\mu = -n\left(\mu-\bar{X}\right)$$

olduğundan ortadaki terim $-2n\left(\mu-\bar{X}\right)^2$ olur. Bunu son terimle birleştirirsek

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 - n\left(\bar{X}-\mu\right)^2.$$

Şimdi beklenen değer alalım. Her i için $E\left[\,(X_i-\mu)^2\,\right] = \mathrm{Var}\,(X_i) = \sigma^2$'dir. $E(\bar{X}) = \mu$ olduğundan $E\left[\,(\bar{X}-\mu)^2\,\right] = \mathrm{Var}\,(\bar{X}) = \sigma^2/n$'dir (Teorem 7.1). Böylece

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right] = n\sigma^2 - n\cdot\frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\,\sigma^2.$$

İki tarafı $n-1$'e bölersek

$$E(S^2) = \frac{1}{n-1}\,E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right] = \frac{(n-1)\,\sigma^2}{n-1} = \sigma^2.$$

■

İspattaki özdeşlik neden $n-1$ gerektiğini de açıklar. Kitle ortalaması μ bilinseydi $\frac{1}{n}\sum(X_i-\mu)^2$ tam σ^2'yi ortalamada verirdi. Ama μ'yü bilmediğimiz için yerine $\bar{X}$'i koyarız ve $\bar{X}$ gözlemlere kareler toplamı anlamında μ'den en az o kadar yakındır: özdeşliğe göre $\sum(X_i-\bar{X})^2 \leq \sum(X_i-\mu)^2$ ve aradaki fark $n(\bar{X}-\mu)^2$'dir. Bu kayıp ortalamada tam bir σ^2 ettiği için n yerine $n-1$'e böleriz. Sonlu bir kitlenin varyansı ise bütün birimler ve gerçek μ bilindiğinden $\frac{1}{N}\sum(x_i-\mu)^2$ ile hesaplanır; orada düzeltmeye gerek yoktur.

 CC BY-NC-SA 4.0

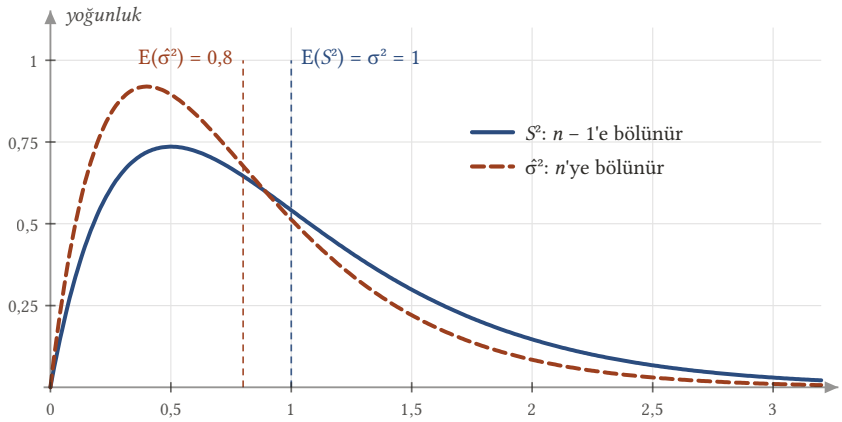
Sonuç 11.1 (Kareler Toplamını n'ye Bölmek). *Teorem 11.1 içindeki varsayımlar altında*

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

tahmin edicisi için

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2, \qquad \text{Yanlılık } (\hat{\sigma}^2, \sigma^2) = -\frac{\sigma^2}{n}$$

olur. Yani $\sigma^2 > 0$ iken $\hat{\sigma}^2$, σ^2'nin yanlı bir tahmin edicisidir ve varyansı ortalamada eksik tahmin eder.



Şekil 11.1: Varyansı $\sigma^2 = 1$ olan normal bir kitleden alınan $n = 5$ birimlik örneklemlerde iki varyans tahmin edicisinin dağılımı. $n-1$'e bölünen S^2'nin ortalaması tam $\sigma^2 = 1$'dir; n'ye bölünen $\hat{\sigma}^2$ ise sola kaymıştır ve ortalaması $(n-1)/n \cdot \sigma^2 = 0{,}8$ olur.

İspat.
$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}\,S^2$ *yazılabilir. Beklenen değerin doğrusallığı ve Teorem 11.1 ile*

$$E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\,E(S^2) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2.$$

Buradan yanlılık

$$\text{Yanlılık } (\hat{\sigma}^2, \sigma^2) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2 - \sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{n}$$

bulunur; $\sigma^2 > 0$ iken bu sayı negatiftir.
■

Örnek 11.2 (Örneklem Ortalamasının Karesi). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınmış bir örneklem olsun. $(\bar{X})^2$ istatistiğinin μ^2 parametresi için yansız bir tahmin edici olup olmadığını inceleyiniz; yani $E\left[\,(\bar{X})^2\,\right] = \mu^2$ mi?

Çözüm.
Teorem 7.1 uyarınca $E(\bar{X}) = \mu$ ve $\text{Var}\,(\bar{X}) = \sigma^2/n$'dir. Varyansın hesap formülü $\text{Var}\,(Y) = E(Y^2) - \big(\,E(Y)\big)^2$'yi $Y = \bar{X}$ için yazıp $E(\bar{X}^2)$'yi yalnız bırakırsak

$$E\left[\,(\bar{X})^2\,\right] = \text{Var}\,(\bar{X}) + \big(\,E(\bar{X})\big)^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2.$$

$\sigma^2 > 0$ olduğundan bu değer μ^2'den büyüktür. O hâlde $(\bar{X})^2$, μ^2'nin **yanlı** bir tahmin edicisidir ve yanlılığı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\text{Yanlılık}\left(\ (\bar{X})^2, \mu^2\ \right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

olur. Kareyi almak ortalamayı değiştirmeyen bir işlem değildir: $\bar{X}$'in μ çevresindeki salınımı kareye geçince hep pozitif bir katkı bırakır. Hesapta normalliği kullanmadığımıza da dikkat edelim; sonuç sonlu varyanslı her kitle için geçerlidir.
■

Bu örnek yansızlığın dönüşümlerle korunmadığını gösterir: $\bar{X}$, μ için yansızdır ama $(\bar{X})^2$, μ^2 için yansız değildir. En çok olabilirlik tahmin edicileri ise dönüşümlerle korunur (Teorem 10.1). Aynı olgu varyans ile standart sapma arasında da görülür. S^2, σ^2 için yansızdır; ama $S = \sqrt{S^2}$ için

$$0 \le \text{Var}\ (S) = E(S^2) - \left(\ E(S)\right)^2 = \sigma^2 - \left(\ E(S)\right)^2$$

olduğundan $E(S) \le \sigma$'dır. Eşitlik ancak $\text{Var}\ (S) = 0$, yani S sabitken olur; bu da gözlemlerin hep aynı değeri aldığı yozlaşmış durumdur. Dolayısıyla S, σ'yı genellikle ortalamada eksik tahmin eder.

11.1.1 Asimptotik yansızlık

Son iki örnekteki yanlılıklar, $-\sigma^2/n$ ve σ^2/n, örneklem büyüdükçe sıfıra gider. Bu tür tahmin ediciler küçük örneklemlerde yanlıdır ama büyük örneklemlerde yansıza yaklaşır.

Tanım 11.3 (Asimptotik Yansız Tahmin Edici). n birimlik örneklemden hesaplanan tahmin ediciyi T_n ile gösterelim. Her $\theta \in \Theta$ için

$$\lim_{n\to\infty} E(T_n) = \theta$$

ise T_n'ye θ parametresinin **asimptotik olarak yansız tahmin edicisi** denir.

Yani yanlılık $n \to \infty$ iken sıfıra gidiyorsa tahmin edici asimptotik yansızdır. Her yansız tahmin edici elbette asimptotik yansızdır; tersi doğru değildir.

Örnek 11.3 (Ortalamanın Karesi Asimptotik Yansızdır). $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınan n birimlik örneklemde $T_n = (\bar{X})^2$ olsun. T_n'nin μ^2 için asimptotik yansız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Örnek 11.2 içinde $E(T_n) = \mu^2 + \sigma^2/n$ bulduk. σ^2 sabit ve $\sigma^2/n \to 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\ (\bar{X})^2\ \right] = \lim_{n\to\infty}\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right) = \mu^2.$$

Bu her μ ve σ^2 için doğrudur. O hâlde $(\bar{X})^2$, μ^2 parametresinin asimptotik olarak yansız tahmin edicisidir.
■

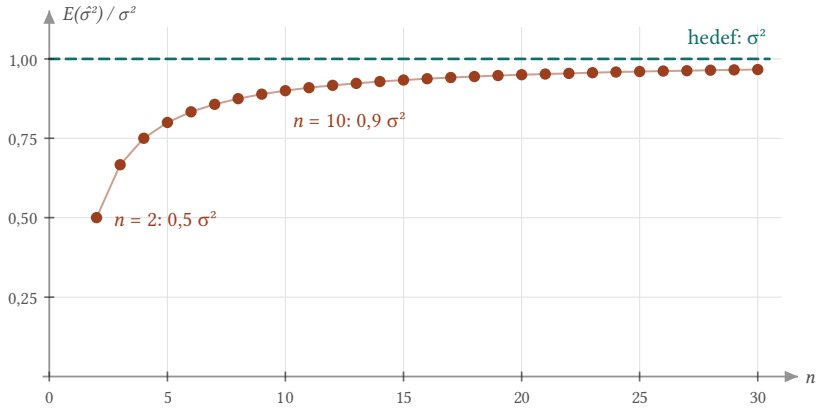
Örnek 11.4 (n'ye Bölünen Varyans Asimptotik Yansızdır). Sonuç 11.1 içindeki $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ tahmin edicisinin σ^2 için asimptotik yansız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Sonuç 11.1 uyarınca $E(\hat{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2$'dir. $1/n \to 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\sigma}^2) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2 = \sigma^2.$$

Demek ki $\hat{\sigma}^2$ her n için yanlıdır, ama asimptotik olarak yansızdır. Örneğin $n = 2$ iken ortalamada σ^2'nin yalnız yarısını, $n = 10$ iken 0,9 katını verir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.2: n'ye bölünen varyans tahmin edicisi σ̂²'nin beklenen değeri σ²'nin (n − 1)/n katıdır. Her n için hedefin altında kalır (yanlıdır), ama n büyüdükçe oran 1'e yaklaşır: σ̂² asimptotik olarak yansızdır.

■

11.1.2 Yanlılığı düzeltmek

Beklenen değeri parametrenin doğrusal bir fonksiyonu olan bir tahmin ediciyi basit bir kaydırma ve ölçekleme ile yansız hâle getirebiliriz. Bu bölümdeki örneklerin çoğu bu fikre dayanır.

Önerme 11.1 (Doğrusal Düzeltme). *T, θ parametresi için bir tahmin edici olsun ve $a \neq 0$ ile c, θ'ya bağlı olmayan sabitler olmak üzere her $\theta \in \Theta$ için*

$$E(T) = a\theta + c$$

olsun. Bu durumda $\dfrac{T-c}{a}$, θ'nın yansız bir tahmin edicisidir.

İspat.
a ve c sabit olduğundan beklenen değerin doğrusallığıyla her $\theta \in \Theta$ için

$$E\left(\frac{T-c}{a}\right) = \frac{E(T)-c}{a} = \frac{a\theta + c - c}{a} = \theta.$$

$(T-c)/a$ yalnız T'ye ve bilinen sabitlere bağlı olduğundan bir istatistiktir.
■

Buradaki a ile c'nin θ'ya bağlı olmaması şarttır; aksi hâlde $(T-c)/a$ bilinmeyen parametreyi içerir ve istatistik olmaz. Beklenen değer θ'nın doğrusal olmayan bir fonksiyonu olduğunda ise başka bir istatistikten gelen düzeltme terimine ihtiyaç duyarız.

Örnek 11.5 (Ortalamanın Karesini Düzeltmek). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınmış bir örneklem olsun. $(\bar{X})^2$'yi düzelterek μ^2 için yansız bir tahmin edici bulunuz.

Çözüm.
Örnek 11.2 uyarınca $E\left[\,(\bar{X})^2\,\right] = \mu^2 + \sigma^2/n$'dir. Fazladan gelen σ^2/n terimi bilinmeyen σ^2'yi içerdiği için doğrudan çıkarılamaz. Ama Teorem 11.1 uyarınca $E(S^2) = \sigma^2$, dolayısıyla $E(S^2/n) = \sigma^2/n$'dir. Bu yüzden

$$T = (\bar{X})^2 - \frac{S^2}{n}$$

alırsak doğrusallıktan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$E(T) = \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = \mu^2$$

bulunur. T yalnız örneklemden hesaplandığı için bir istatistiktir ve μ^2'nin yansız tahmin edicisidir. Bir gözlem hatırlatması: T negatif değerler de alabilir, oysa $\mu^2 \geq 0$'dır. Yansızlık tek başına tahminin her zaman makul olmasını garanti etmez.
■

11.1.3 Binom kitlelerinde yansız tahmin ediciler

Şimdi kesikli bir kitlede p ve p^2 için yansız tahmin ediciler kuralım. Hatırlatma: $X \sim \text{Binom}\ (n, p)$ ise $E(X) = np$ ve $\text{Var}\ (X) = np(1-p)$'dir (Olasılık Teorisi'ndeki binom momentleri).

Örnek 11.6 (Tek Gözlemden p için Yansız Tahmin). $X \sim \text{Binom}\ (3, p)$ dağılımına sahip bir kitleden tek bir gözlem alınıyor (örneklem hacmi 1). p parametresi için yansız bir tahmin edici belirleyiniz.

Çözüm.
$E(T) = p$ olan bir $T = T(X)$ arıyoruz. Binom dağılımında

$$E(X) = 3p$$

olduğundan $E(X) = 3p$ eşitliği Önerme 11.1 içindeki biçimdedir ($a = 3$, $c = 0$). İki tarafı 3'e bölersek

$$E\left(\frac{X}{3}\right) = \frac{1}{3}E(X) = p.$$

O hâlde $T_1 = X/3$, p'nin yansız bir tahmin edicisidir: üç denemedeki başarı oranı.
■

Örnek 11.7 (Tek Gözlemden p² için Yansız Tahmin). $X \sim \text{Binom}\ (3, p)$ dağılımına sahip bir kitleden tek bir gözlem alınıyor. p^2 parametresi için yansız bir tahmin edici belirleyiniz.

Çözüm.
İlk akla gelen $(X/3)^2$'dir, ama yansız değildir. Görelim: önce $E(X^2)$'yi hesaplayalım. $\text{Var}\ (X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$ olduğundan

$$E(X^2) = \text{Var}\ (X) + \big(E(X)\big)^2 = 3p(1-p) + 9p^2 = 3p + 6p^2.$$

Buna göre

$$E\left[\left(\frac{X}{3}\right)^2\right] = \frac{3p + 6p^2}{9} = \frac{p}{3} + \frac{2p^2}{3} \neq p^2$$

olur.
$E(X^2)$'deki fazladan $3p$ terimi tam $E(X)$'e eşittir. Bu yüzden onu X ile yok edebiliriz:

$$E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) = 3p + 6p^2 - 3p = 6p^2.$$

İki tarafı 6'ya bölersek

$$E\left(\frac{X^2 - X}{6}\right) = p^2.$$

O hâlde $T_3 = \dfrac{X(X-1)}{6}$, p^2'nin yansız bir tahmin edicisidir.
Sonucu doğrudan da denetleyebiliriz. T_3 değerleri $x = 0, 1, 2, 3$ için sırasıyla 0, 0, $\frac{1}{3}$, 1'dir. $P(X = 2) = 3p^2(1-p)$ ve $P(X = 3) = p^3$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$E(T_3) = \frac{1}{3}\cdot 3p^2(1-p) + 1\cdot p^3 = p^2 - p^3 + p^3 = p^2.$$

■

Örnek 11.8 (Binom Örnekleminden p^2 için Yansız Tahmin). $(X_1, X_2, ..., X_n)$, Binom $(3, p)$ dağılımından alınmış bir rastgele örneklem olsun. p^2 için bütün örneklemi kullanan yansız bir tahmin edici bulunuz.

Çözüm.
Tek gözlemdeki fikri $\bar{X}$'e uygulayalım. $E(X_i) = 3p$ ve Var $(X_i) = 3p(1-p)$ olduğundan

$$E(\bar{X}) = 3p, \qquad \text{Var}\,(\bar{X}) = \frac{3p(1-p)}{n}.$$

(İlk eşitlikten $\bar{X}/3$'ün p için yansız olduğu da görülür.) Varyansın hesap formülüyle

$$E(\bar{X}^2) = \text{Var}\,(\bar{X}) + \big(E(\bar{X})\big)^2 = \frac{3p(1-p)}{n} + 9p^2.$$

Paydadan kurtulmak için n ile çarpalım:

$$E(n\bar{X}^2) = 3p - 3p^2 + 9np^2 = 3p + (9n-3)\,p^2.$$

Fazladan gelen $3p$ yine $E(\bar{X})$'e eşittir; onu çıkarırsak

$$E(n\bar{X}^2 - \bar{X}) = (9n-3)\,p^2.$$

$9n - 3 > 0$ olduğundan iki tarafı ona bölebiliriz:

$$\hat{p^2} = \frac{n\bar{X}^2 - \bar{X}}{9n-3}$$

p^2'nin yansız bir tahmin edicisidir. $n = 1$ iken $\bar{X} = X_1$ ve bu ifade $(X_1^2 - X_1)/6$ olur; yani Örnek 11.7 içindeki tahmin edicinin genellemesidir.
■

Örnek 11.9 (Bernoulli Örnekleminden p^2 için Yansız Tahmin). $(X_1, X_2, ..., X_n)$, $n \geq 2$, Binom $(1, p)$ dağılımından alınmış bir örneklem olsun. Çekilen örneklemin tümüne bağlı kalarak p^2 için bir yansız tahmin edici bulununuz.

Çözüm.
Her X_i bir Bernoulli değişkenidir: $E(X_i) = p$ ve Var $(X_i) = p(1-p)$. Ayrıca X_i yalnız 0 ve 1 değerlerini aldığı için $X_i^2 = X_i$'dir; gerçekten de

$$E(X_i^2) = \text{Var}\,(X_i) + \big(E(X_i)\big)^2 = p - p^2 + p^2 = p.$$

Örneklem ortalaması için $E(\bar{X}) = p$ ve Var $(\bar{X}) = p(1-p)/n$ olduğundan

$$E(\bar{X}^2) = \frac{p(1-p)}{n} + p^2.$$

Yani $\bar{X}^2$ yanlıdır. n ile çarpıp düzenleyelim:

$$E(n\bar{X}^2) = p - p^2 + np^2 = p + (n-1)\,p^2.$$

$p = E(\bar{X})$ olduğundan

$$E(n\bar{X}^2 - \bar{X}) = (n-1)\,p^2,$$

ve $n \geq 2$ iken $n - 1 > 0$ ile bölerek

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\hat{p^2} = \frac{n\bar{X}^2 - \bar{X}}{n-1}$$

p^2'nin yansız bir tahmin edicisi olur.
Bu tahmin edicinin sade bir yorumu var. Başarı sayısı $Y = \sum X_i$ ise $\bar{X} = Y/n$ ve

$$\frac{n\bar{X}^2 - \bar{X}}{n-1} = \frac{Y^2/n - Y/n}{n-1} = \frac{Y(Y-1)}{n(n-1)}.$$

$Y(Y-1)$, iki başarının sıralı seçiliş sayısıdır; $n(n-1)$ ise bütün sıralı gözlem çiftlerinin sayısı. Yani $\hat{p^2}$, $i \neq j$ olan bütün (i,j) çiftleri üzerinden X_iX_j çarpımlarının ortalamasıdır. Tek bir çift de yansızdır, çünkü bağımsızlıktan $E(X_1X_2) = p^2$'dir; ama X_1X_2 yalnız iki gözlemi kullanır. Soruda istenen, bütün örneklemi kullanan tahmin edicidir.
■

11.1.4 Örneklem momentleri

k. örneklem momenti $M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$ (Tanım 7.8), ortalamada tam olarak karşılık gelen kitle momentini verir. Momentler yöntemi de bu yüzden işe yarar. Bu gözlemi yansızlık diliyle kaydedelim; aşağıdaki örneklerde işimizi çok kolaylaştıracak.

Önerme 11.2 (Örneklem Momentlerinin Yansızlığı). *$(X_1, X_2, ..., X_n)$, X kitlesinden alınmış bir örneklem ve $E(X^k)$ sonlu olsun. Bu durumda*

$$E(M_k) = E(X^k),$$

yani M_k, k. kitle momentinin yansız tahmin edicisidir.

İspat.
Her X_i kitle ile aynı dağılıma sahip olduğundan $E(X_i^k) = E(X^k)$'dir. Beklenen değerin doğrusallığıyla

$$E(M_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^k) = \frac{1}{n} \cdot n\, E(X^k) = E(X^k).$$

■

Örnek 11.10 (Poisson Kitlesinin Üçüncü Momenti). $(X_1, X_2, ..., X_n)$, Poisson (λ) dağılımından alınmış bir örneklem olsun. $E(X^3)$ için yansız bir tahmin edici bulunuz ve $E(X^3)$'ü λ cinsinden hesaplayınız.

Çözüm.
Poisson dağılımının bütün momentleri sonludur (Olasılık Teorisi'ndeki tanım). Önerme 11.2 uyarınca üçüncü örneklem momenti

$$M_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$$

$E(X^3)$'ün yansız bir tahmin edicisidir.
$E(X^3)$'ü bulmak için faktöriyel momentleri kullanalım. $k(k-1)(k-2)$ çarpımı $k = 0, 1, 2$ için sıfırdır; $k \geq 3$ için $k!$'in son üç çarpanını sadeleştirir:

$$\begin{aligned} E\left[\, X(X-1)(X-2)\,\right] &= \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda^3 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k-3}}{(k-3)!} = \lambda^3. \end{aligned}$$

Son toplam, Poisson olasılıklarının toplamı olduğu için 1'dir. Aynı yolla $E\left[\, X(X-1)\,\right] = \lambda^2$ ve $E(X) = \lambda$ bulunur. Şimdi x^3'ü bu çarpımlar cinsinden yazalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x.$$

Gerçekten, sağ taraf açılırsa

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 3x^2 - 3x + x = x^3$$

olur. Beklenen değer alırsak

$$E(X^3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

Aynı düşünceyle $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(X_i-1)(X_i-2)$ istatistiği de λ^3'ün yansız bir tahmin edicisidir.
■

Örnek 11.11 (Üçgen Yoğunlukta Sol Uç Noktası). Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{2}{(b-\theta)^2}\,(x-\theta), \qquad \theta < x < b$$

olan kitleden $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ örneklemi alınıyor; b bilinen bir sabittir. θ için bir yansız tahmin edici bulunuz.

Çözüm.
Önce kitle ortalamasını hesaplayalım. $L = b - \theta$ ve $u = x - \theta$ diyelim; x, θ'dan b'ye giderken u da 0'dan L'ye gider ve $x = u + \theta$ olur:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\theta}^{b} x\,\frac{2(x-\theta)}{L^2}\,dx = \frac{2}{L^2}\int_{0}^{L} (u+\theta)\,u\,du \\ &= \frac{2}{L^2}\left(\frac{L^3}{3} + \theta\,\frac{L^2}{2}\right) = \frac{2L}{3} + \theta. \end{aligned}$$

$L = b - \theta$ yerine konursa

$$E(X) = \theta + \frac{2(b-\theta)}{3} = \frac{1}{3}\,\theta + \frac{2b}{3}.$$

Buna göre $E(\bar{X}) = E(X) = \frac{1}{3}\theta + \frac{2b}{3}$ olur. Bu, Önerme 11.1 içindeki biçimdir: $a = \frac{1}{3}$, $c = \frac{2b}{3}$ ve ikisi de θ'ya bağlı değildir. O hâlde

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X} - \frac{2b}{3}}{\frac{1}{3}} = 3\bar{X} - 2b$$

θ'nın yansız bir tahmin edicisidir. Denetleyelim: $E(3\bar{X} - 2b) = \theta + 2b - 2b = \theta$.
■

Örnek 11.12 (Rayleigh Tipi Yoğunlukta Ölçek Parametresi). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta}\,e^{-x^2/\theta}, \qquad x \geq 0,\ \theta > 0$$

olan bir kitleden alınmış bir örneklem olsun. θ parametresi için yansız bir tahmin edici öneriniz.

Çözüm.
Yoğunluk x^2 üzerinden yazıldığı için ikinci momente bakmak doğaldır. $u = x^2/\theta$ dönüşümünde $du = \frac{2x}{\theta}\,dx$ ve $x^2 = \theta u$ olur; x, 0'dan ∞'a giderken u da öyle gider:

$$E(X^2) = \int_{0}^{\infty} x^2\,\frac{2x}{\theta}\,e^{-x^2/\theta}\,dx = \int_{0}^{\infty} \theta u\,e^{-u}\,du = \theta \cdot 1 = \theta.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Son integral $\int_0^\infty u\, e^{-u}\, du = 1$'dir. Demek ki ikinci kitle momenti tam θ'dır. Önerme 11.2 uyarınca

$$\hat{\theta} = M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

θ'nın yansız bir tahmin edicisidir.
Birinci moment burada işe yaramaz: aynı dönüşümle $E(X) = \sqrt{\theta}\,\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$ bulunur (Tanım 4.1). Bu, θ'nın doğrusal bir fonksiyonu olmadığı için $\bar{X}$'ten doğrusal bir düzeltmeyle θ'nın yansız tahmin edicisi elde edilemez.
■

Örnek 11.13 (Simetrik Düzgün Dağılımda θ² için Yansız Tahmin). $(X_1, X_2, ..., X_n)$, $U(-\theta, \theta)$ dağılımından alınmış bir rastgele örneklem olsun. θ^2 parametresi için yansız bir tahmin edici öneriniz.

Çözüm.
$U(-\theta, \theta)$ yoğunluğu $(-\theta, \theta)$ aralığında $\frac{1}{2\theta}$'dır (Olasılık Teorisi'ndeki tanım). Birinci moment simetriden sıfırdır, dolayısıyla θ hakkında bilgi taşımaz. İkinci momente bakalım:

$$E(X^2) = \int_{-\theta}^{\theta} x^2\, \frac{1}{2\theta}\, dx = \frac{1}{2\theta}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-\theta}^{\theta} = \frac{1}{2\theta}\cdot\frac{2\theta^3}{3} = \frac{\theta^2}{3}.$$

Önerme 11.2 uyarınca $E(M_2) = \theta^2/3$, yani $E(3M_2) = \theta^2$'dir. O hâlde

$$T = 3M_2 = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

θ^2'nin yansız bir tahmin edicisidir; kısaca T, X^2 değerlerinin ortalamasının üç katıdır.
Burada M_2 ile $(\bar{X})^2$'yi karıştırmamak gerekir. $E(\bar{X}) = 0$ olduğundan $E\left[\,(\bar{X})^2\,\right] = \mathrm{Var}\,(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{3n}$'dir; yani $3(\bar{X})^2$ yansız değildir.
■

11.2 Hata kareler ortalaması

Yansızlık tek başına yeterli bir ölçüt değildir. Yansız bir tahmin edici θ çevresinde çok geniş salınabilir; hafif yanlı ama dar dağılmış bir tahmin edici ise çoğu örneklemde θ'ya daha yakın düşebilir. Bu iki etkiyi tek bir sayıda toplayan ölçüt, T ile θ arasındaki uzaklığın karesinin ortalamasıdır.

Tanım 11.4 (Hata Kareler Ortalaması). $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ kitle parametresine önerilen bir T tahmin edicisi için

$$\mathrm{HKO}\,(T, \theta) = E\left[\,(T-\theta)^2\,\right]$$

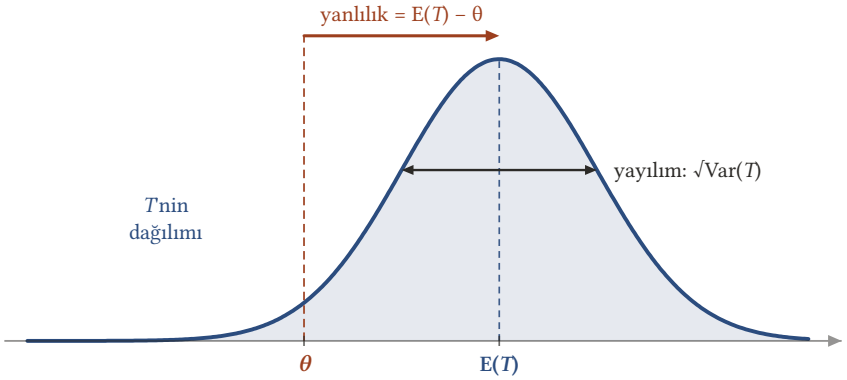
sayısına T tahmin edicisinin **hata kareler ortalaması** (HKO) denir.

Yani HKO, tahminin hedeften ortalama kare uzaklığıdır. Ne kadar küçükse tahmin edici o kadar iyidir. İki tahmin edici karşılaştırılırken her $\theta \in \Theta$ için HKO'su daha küçük olan tercih edilir; HKO θ'ya bağlı olduğundan sıralama bazı parametre değerlerinde değişebilir. T yansız ise $E(T) = \theta$ olduğundan $\mathrm{HKO}\,(T, \theta) = E\left[\,(T - E(T))^2\,\right] = \mathrm{Var}\,(T)$ olur.

Teorem 11.2 (Hata Kareler Ortalamasının Ayrışımı). *θ kitle parametresine önerilen ve varyansı sonlu olan bir T tahmin edicisi için*

$$\mathrm{HKO}\,(T, \theta) = \mathrm{Var}\,(T) + \big(\,\text{Yanlılık}\,(T, \theta)\big)^2$$

dir.



Şekil 11.3: Bir T tahmin edicisinin dağılımı. Hata kareler ortalaması iki parçadan oluşur: dağılımın merkezi E(T)'nin hedef θ'dan uzaklığı (yanlılık) ve dağılımın kendi merkezi çevresindeki yayılımı (varyans).

İspat.
$T-\theta$ farkına $E(T)$ ekleyip çıkaralım:

$$T-\theta=\left(\,T-E(T)\,\right)+\left(\,E(T)-\theta\,\right).$$

Karesini alıp beklenen değer alırsak

$$\begin{aligned}\text{HKO}\,(T,\theta)=E\left[\left(\,T-E(T)\right)^2\right]+2E\left[\left(\,T-E(T)\,\right)\left(\,E(T)-\theta\,\right)\right]\\ +E\left[\left(\,E(T)-\theta\right)^2\right].\end{aligned}$$

$E(T)-\theta$ bir sabittir; rastgele değil. Bu yüzden ortadaki terimde beklenen değerin dışına çıkar ve kalan beklenen değer sıfırdır:

$$E\left[\left(\,T-E(T)\,\right)\left(\,E(T)-\theta\,\right)\right]=\left(\,E(T)-\theta\,\right)\underbrace{E\left[\,T-E(T)\,\right]}_{E(T)-E(T)=0}=0.$$

Son terim de bir sabitin beklenen değeri olduğundan kendisine eşittir: $\left(\,E(T)-\theta\right)^2$. İlk terim tanım gereği $\text{Var}\,(T)$'dir. Böylece

$$\text{HKO}\,(T,\theta)=\text{Var}\,(T)+\left(\,E(T)-\theta\right)^2=\text{Var}\,(T)+\left(\,\text{Yanlılık}\,(T,\theta)\right)^2.$$

■

Teorem, iyi bir tahmin edicinin iki şeyi birden istediğini söyler: merkezi hedefe yakın olmalı (küçük yanlılık) ve merkezi çevresinde dar dağılmalı (küçük varyans). Biraz yanlılığa katlanıp varyansı çok azaltmak HKO'yu küçültebilir. Aşağıdaki örnek tam olarak bunu gösterir.

Örnek 11.14 (Üstel Kitlede İki Tahmin Edicinin Karşılaştırılması). Olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x;\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$ olan bir kitleden (X_1,X_2) rastgele örneklemi alınıyor. $1/\lambda$ parametresi için tanımlanan

$$T_1=\frac{X_1+X_2}{2}\qquad\text{ve}\qquad T_2=\sqrt{X_1X_2}$$

tahmin edicilerini HKO ölçütüne göre karşılaştırınız.

Çözüm.
Kitle üstel dağılımlıdır, dolayısıyla $E(X_i)=\dfrac{1}{\lambda}$ ve $\text{Var}\,(X_i)=\dfrac{1}{\lambda^2}$'dir (Olasılık Teorisi'ndeki üstel dağılım). X_1 ile X_2 bağımsızdır.
T_1'in HKO'su. Doğrusallıktan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$E(T_1) = \frac{1}{2}\,\big(\,E(X_1) + E(X_2)\,\big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

yani T_1, $1/\lambda$'nın yansız tahmin edicisidir. Bağımsızlıktan varyanslar toplanır:

$$\operatorname{Var}(T_1) = \frac{1}{4}\,\big(\,\operatorname{Var}(X_1) + \operatorname{Var}(X_2)\,\big) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2}.$$

Yanlılık sıfır olduğundan Teorem 11.2 ile

$$\text{HKO}\left(T_1, \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{2\lambda^2}.$$

T_2'nin beklenen değeri. Bağımsızlıktan $E(T_2) = E\,\big(\,\sqrt{X_1}\,\big)\,E\,\big(\,\sqrt{X_2}\,\big)$'dir. $t = \lambda x$ dönüşümüyle $(dt = \lambda\,dx)$

$$E\,\big(\,\sqrt{X}\,\big) = \int_0^\infty x^{1/2}\,\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{1/2} e^{-t}\,dt = \frac{\Gamma(3/2)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Son integral tanım gereği $\Gamma(3/2)$'dir (Tanım 4.1). Teorem 4.1 uyarınca $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\,\Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olduğundan $E\,\big(\,\sqrt{X}\,\big) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$ ve

$$E(T_2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{4\lambda}.$$

$\pi/4 \approx 0{,}785 < 1$ olduğundan T_2, $1/\lambda$'nın yanlı bir tahmin edicisidir ve onu ortalamada eksik tahmin eder:

$$\text{Yanlılık}\left(T_2, \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{4\lambda} - \frac{1}{\lambda} = -\frac{4-\pi}{4\lambda}.$$

T_2'nin varyansı ve HKO'su. $T_2^2 = X_1 X_2$ olduğundan bağımsızlıkla $E(T_2^2) = E(X_1)\,E(X_2) = \dfrac{1}{\lambda^2}$'dir. Buna göre

$$\operatorname{Var}(T_2) = E(T_2^2) - \big(\,E(T_2)\big)^2 = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\pi^2}{16\lambda^2} = \frac{16-\pi^2}{16\lambda^2}.$$

Teorem 11.2 ile

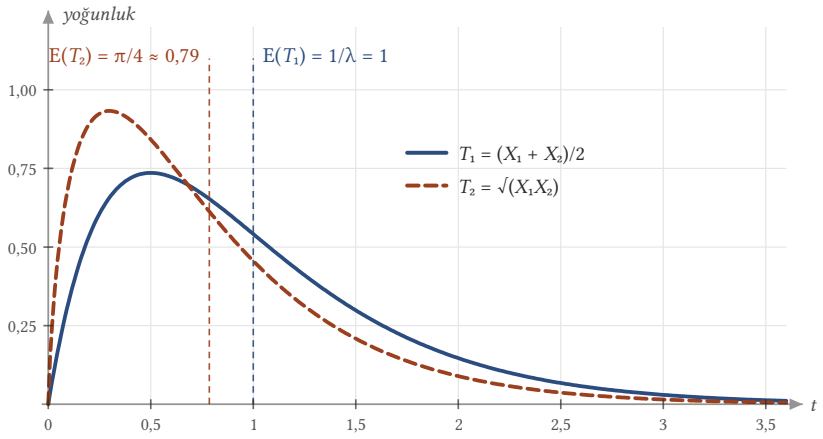
$$\begin{aligned}\text{HKO}\left(T_2, \frac{1}{\lambda}\right) &= \frac{16-\pi^2}{16\lambda^2} + \frac{(4-\pi)^2}{16\lambda^2} = \frac{16-\pi^2+16-8\pi+\pi^2}{16\lambda^2}\\ &= \frac{32-8\pi}{16\lambda^2} = \frac{4-\pi}{2\lambda^2}.\end{aligned}$$

Karşılaştırma. İki HKO'nun paydası aynıdır; paylar $4-\pi \approx 0{,}8584$ ve 1'dir. $4-\pi < 1$ olduğundan her $\lambda > 0$ için

$$\text{HKO}\left(T_2, \frac{1}{\lambda}\right) \approx \frac{0{,}4292}{\lambda^2} < \frac{0{,}5}{\lambda^2} = \text{HKO}\left(T_1, \frac{1}{\lambda}\right).$$

Yani HKO ölçütüne göre yanlı olan T_2, yansız olan T_1'den daha iyidir. T_2'nin yanlılığının karesi yalnız $\approx 0{,}0461/\lambda^2$'dir; buna karşılık varyansı T_1'inkinden yaklaşık $0{,}1169/\lambda^2$ daha küçüktür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.4: $\lambda = 1$ iken iki tahmin edicinin dağılımı. T_1'in ortalaması hedef $1/\lambda = 1$'dir; T_2'nin ortalaması $\pi/4 \approx 0{,}79$ ile hedefin solunda kalır, ama T_2 ortalaması çevresinde daha dar toplanır.

■

Örnek 11.15 (Geometrik Ortalamayı Yansız Yapmak). Örnek 11.14 içindeki kitle ve örneklemle $T_2 = \sqrt{X_1 X_2}$'yi düzelterek $1/\lambda$ için yansız bir T_3 tahmin edicisi kurunuz ve T_3'ü HKO ölçütüne göre $T_1 = (X_1 + X_2)/2$ ve T_2 ile karşılaştırınız.

Çözüm.
$E(T_2) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\lambda}$ bulmuştuk. Bu Önerme 11.1 içindeki biçimdir ($a = \pi/4$, $c = 0$). O hâlde

$$T_3 = \frac{4}{\pi}\sqrt{X_1 X_2}$$

$1/\lambda$'nın yansız bir tahmin edicisidir. Yansız olduğu için HKO'su varyansına eşittir; sabit çarpan varyansa karesiyle geçer:

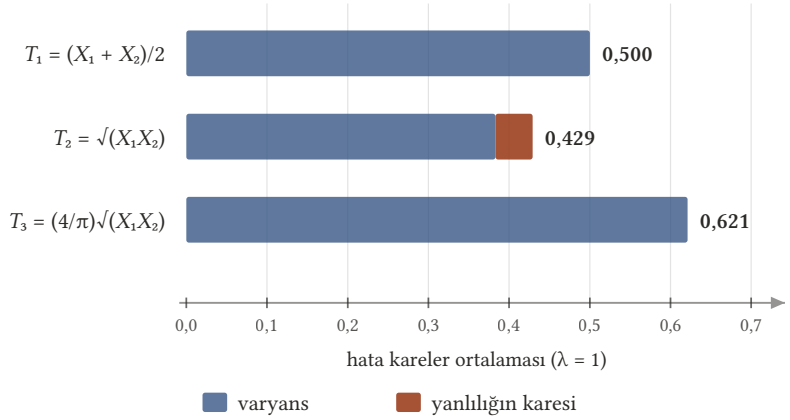
$$\text{HKO}\left(T_3, \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{16}{\pi^2}\,\text{Var}\,(T_2) = \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{16 - \pi^2}{16\lambda^2} = \frac{16 - \pi^2}{\pi^2 \lambda^2} \approx \frac{0{,}6211}{\lambda^2}.$$

Bu değer T_1'in $\frac{0{,}5}{\lambda^2}$'sinden de, T_2'nin $\approx \frac{0{,}4292}{\lambda^2}$'sinden de büyüktür. Sonuç olarak üç tahmin edicinin sıralaması

$$\text{HKO}\,(T_2) < \text{HKO}\,(T_1) < \text{HKO}\,(T_3)$$

olur. T_2'nin yanlılığını gidermek onu ölçeklediği için varyansını da büyüttü: yansız hâle getirilen T_3, başladığımız T_2'den kötüdür. İki yansız tahmin edici arasında ise T_1 daha iyidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.5: $\lambda = 1$ iken üç tahmin edicinin hata kareler ortalaması, varyans ve yanlılığın karesi olarak parçalanmış. T_1 ile T_3 yansızdır; yanlı olan T_2'nin küçük bir yanlılık karşılığında kazandığı varyans, onu en küçük hata kareler ortalamasına taşır.

■

Son olarak, iki tahmin yönteminin farklı sonuç verdiği bir modele dönelim. En çok olabilirlik yöntemi bölümünde $U(0,\theta)$ kitlesi için momentler yönteminin $2\bar{X}$'i, en çok olabilirlik yönteminin ise en büyük gözlemi verdiğini görmüştük (Örnek 10.15). Hangisinin daha iyi olduğunu artık söyleyebiliriz.

Örnek 11.16 (Düzgün Dağılımda En Büyük Gözlem ile İki Kat Ortalama). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $U(0,\theta)$ dağılımından alınmış bir rastgele örneklem ve $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ olsun. θ için $T_1 = 2\bar{X}$ ve $T_2 = X_{(n)}$ tahmin edicilerini HKO ölçütüne göre karşılaştırınız.

Çözüm.

$U(0,\theta)$ kitlesinde $E(X) = \dfrac{\theta}{2}$ ve $\operatorname{Var}(X) = \dfrac{\theta^2}{12}$'dir (Olasılık Teorisi'ndeki düzgün dağılım).

$T_1 = 2\bar{X}$. $E(2\bar{X}) = 2 \cdot \dfrac{\theta}{2} = \theta$, yani T_1 yansızdır. Teorem 7.1 ile

$$\operatorname{HKO}(T_1, \theta) = \operatorname{Var}(2\bar{X}) = 4 \cdot \frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

$T_2 = X_{(n)}$'in dağılımı. En büyük gözlem x'i aşmıyorsa bütün gözlemler x'i aşmıyordur. Bağımsızlıktan $0 \le x \le \theta$ için

$$P\left(X_{(n)} \le x\right) = P(X_1 \le x) \cdots P(X_n \le x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n.$$

Türev alarak yoğunluk $g(x) = \dfrac{n\,x^{n-1}}{\theta^n}$, $0 < x < \theta$ bulunur. Buradan

$$E(X_{(n)}) = \int_0^\theta x\,\frac{n\,x^{n-1}}{\theta^n}\,dx = \frac{n}{\theta^n} \cdot \frac{\theta^{n+1}}{n+1} = \frac{n\theta}{n+1},$$

ve aynı yolla $E(X_{(n)}^2) = \dfrac{n\theta^2}{n+2}$. Varyans

$$\operatorname{Var}(X_{(n)}) = \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{n\theta^2\left[\,(n+1)^2 - n(n+2)\,\right]}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)},$$

çünkü $(n+1)^2 - n(n+2) = 1$'dir.

T_2'nin HKO'su. Yanlılık $\dfrac{n\theta}{n+1} - \theta = -\dfrac{\theta}{n+1}$'dir; en büyük gözlem θ'yı hiçbir zaman aşamadığı için ortalamada eksik tahmin eder. Teorem 11.2 ile

$$\text{HKO}\,(T_2,\theta) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2} = \frac{\theta^2(2n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Karşılaştırma. Farkı ortak paydada yazalım:

$$\frac{\theta^2}{3n} - \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{\theta^2\left[\,(n+1)(n+2) - 6n\,\right]}{3n(n+1)(n+2)} = \frac{\theta^2(n-1)(n-2)}{3n(n+1)(n+2)}.$$

Bu sayı $n = 1, 2$ için sıfır, $n \geq 3$ için pozitiftir. Yani $n \geq 3$ iken yanlı T_2, yansız T_1'den daha küçük HKO'ya sahiptir. Fark örneklem büyüdükçe açılır: T_1'in HKO'su $1/n$ gibi, T_2'ninki $1/n^2$ gibi küçülür. Örneğin $n = 10$ iken HKO $(T_1,\theta) = \theta^2/30 \approx 0{,}0333\,\theta^2$, HKO $(T_2,\theta) = \theta^2/66 \approx 0{,}0152\,\theta^2$ olur. ■

Örnek 11.17 (En Büyük Gözlemi Yansız Yapmak). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $U(0,\theta)$ dağılımından alınmış bir rastgele örneklem ve $X_{(n)} = \max\{X_1,\ldots,X_n\}$ olsun. $X_{(n)}$'i düzelterek θ için yansız bir T_3 tahmin edicisi kurunuz ve HKO'sunu $X_{(n)}$'inkiyle karşılaştırınız.

Çözüm.
Örnek 11.16 içinde $E(X_{(n)}) = \dfrac{n}{n+1}\,\theta$ ve Var $(X_{(n)}) = \dfrac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$ bulduk. Beklenen değer θ'nın sabit bir katı olduğundan Önerme 11.1 ($a = \frac{n}{n+1}$, $c = 0$) ile

$$T_3 = \frac{n+1}{n}\,X_{(n)}$$

θ'nın yansız bir tahmin edicisidir. Yansız olduğu için HKO'su varyansına eşittir:

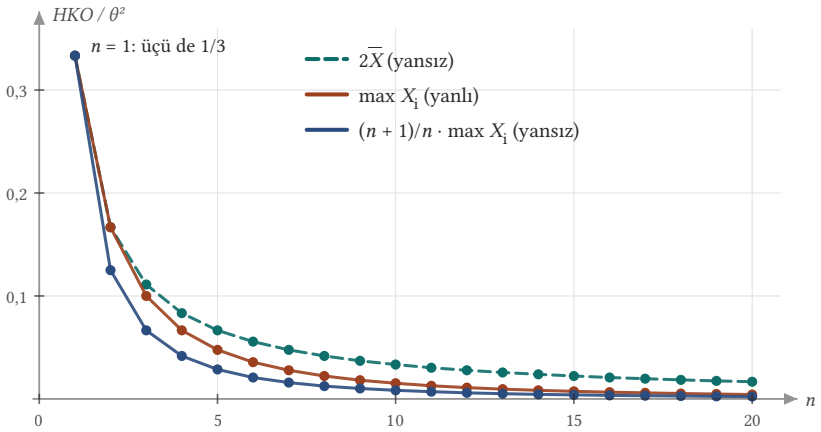
$$\text{HKO}\,(T_3,\theta) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\cdot\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

$X_{(n)}$'in HKO'su $\dfrac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}$ idi. Ortak $\dfrac{\theta^2}{n+2}$ çarpanı dışında $\dfrac{1}{n}$ ile $\dfrac{2}{n+1}$ karşılaştırılır ve

$$\frac{1}{n} \leq \frac{2}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \leq 2n \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Demek ki her n için HKO $(T_3,\theta) \leq$ HKO $(X_{(n)},\theta)$'dır; eşitlik yalnız $n = 1$'de olur. Burada, Örnek 11.15 ile tersine, yanlılığı gidermek HKO'yu küçültür: $X_{(n)}$'i $\frac{n+1}{n}$ ile büyütmek varyansı çok az artırır ama yanlılığı tümüyle yok eder. $n = 10$ iken HKO $(T_3,\theta) = \theta^2/120 \approx 0{,}0083\,\theta^2$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.6: U(0, θ) kitlesinde üç tahmin edicinin hata kareler ortalaması (θ² birimiyle) örneklem hacmine göre. n = 1'de üçü aynıdır; n büyüdükçe en büyük gözleme dayanan iki tahmin edicinin HKO'su 2X̄'inkinden çok daha hızlı küçülür.

■

11.3 Etkinlik

Yansız tahmin ediciler arasında HKO varyansa eşittir. Bu yüzden iki yansız tahmin ediciyi karşılaştırmak, varyanslarını karşılaştırmak demektir: varyansı küçük olan, hedefin çevresinde daha dar toplanır.

Tanım 11.5 (Etkinlik ve Göreli Etkinlik). T_1 ve T_2, θ parametresinin iki yansız tahmin edicisi olsun. Her $\theta \in \Theta$ için $\operatorname{Var}(T_1) \le \operatorname{Var}(T_2)$ ise ve eşitsizlik en az bir θ için kesinse T_1'e T_2'den **daha etkin** denir. T_1'in T_2'ye göre **göreli etkinliği**

$$e(T_1, T_2) = \frac{\operatorname{Var}(T_2)}{\operatorname{Var}(T_1)}$$

oranıdır.

Yani $e(T_1, T_2) > 1$ ise T_1 daha etkindir ve T_2'nin varyansı T_1'inkinin $e(T_1, T_2)$ katıdır. En küçük varyanslı yansız tahmin ediciyi aramak, bu ölçütün doğal devamıdır.

Örnek 11.18 (Tek Gözlem ile Örneklem Ortalaması). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ortalaması μ ve varyansı $\sigma^2 > 0$ olan bir kitleden alınmış bir rastgele örneklem olsun. μ için $\hat{\mu}_1 = X_1$ ve $\hat{\mu}_2 = \bar{X}$ tahmin edicilerini etkinlik bakımından karşılaştırınız.

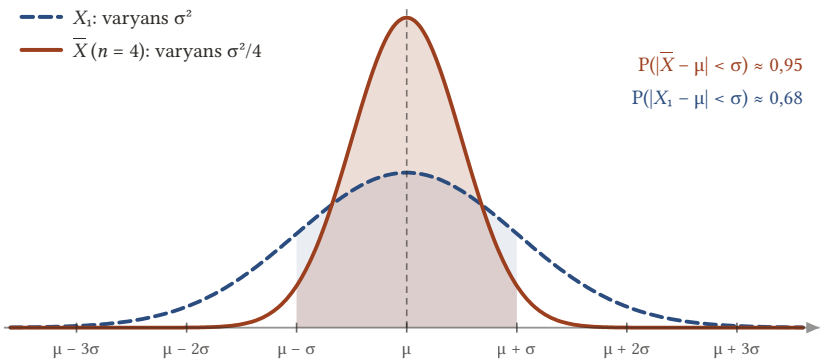
Çözüm.
İkisi de yansızdır: $E(X_1) = \mu$ ve Örnek 11.1 uyarınca $E(\bar{X}) = \mu$. Varyansları

$$\operatorname{Var}(X_1) = \sigma^2, \qquad \operatorname{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

olur. $n \ge 2$ iken $\sigma^2 > \sigma^2/n$ olduğundan $\bar{X}$, X_1'den daha etkindir ve göreli etkinlik

$$e(\bar{X}, X_1) = \frac{\operatorname{Var}(X_1)}{\operatorname{Var}(\bar{X})} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2/n} = n$$

bulunur. Tek gözleme yaslanan tahmin edicinin varyansı, bütün örneklemi kullananınkinin n katıdır.



Şekil 11.7: Normal bir kitlede μ'nün iki yansız tahmin edicisi. İkisi de μ çevresinde toplanır, ama n = 4 iken $\bar{X}$'in varyansı X_1'inkinin dörtte biridir: μ'ye σ'dan yakın düşme olasılığı X_1 için yaklaşık 0,68, $\bar{X}$ için yaklaşık 0,95'tir.

■

Örnek 11.19 (İlk ve Son Gözlemin Ortalaması). Ortalaması μ ve varyansı $\sigma^2 > 0$ olan bir kitleden $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, rastgele örneklemi alınıyor. $T = (X_1 + X_n)/2$ tahmin edicisinin $\bar{X}$'e göre göreli etkinliğini bulunuz.

Çözüm.
$E(T) = \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \mu$ olduğundan T yansızdır. X_1 ile X_n bağımsız olduğundan

$$\operatorname{Var}(T) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{Var}(X_1) + \operatorname{Var}(X_n)\right) = \frac{1}{4}\cdot 2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Buna göre

$$e(\bar{X}, T) = \frac{\operatorname{Var}(T)}{\operatorname{Var}(\bar{X})} = \frac{\sigma^2/2}{\sigma^2/n} = \frac{n}{2}.$$

$n = 2$ iken $T = \bar{X}$'tir ve oran 1'dir. $n > 2$ için oran 1'den büyüktür: $\bar{X}$ daha etkindir. Örneğin $n = 10$ iken T'nin varyansı $\bar{X}$'inkinin 5 katıdır.
■

Örnek 11.20 (Düzgün Dağılımda İki Yansız Tahmin Edicinin Etkinliği). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $U(0, \theta)$ dağılımından alınmış bir rastgele örneklem olsun. θ'nın iki yansız tahmin edicisi $2\bar{X}$ ve $T_3 = \frac{n+1}{n}\max\{X_1, \ldots, X_n\}$ için göreli etkinliği $e(T_3, 2\bar{X})$'i bulunuz.

Çözüm.
Örnek 11.16 ve Örnek 11.17 içinde varyansları bulduk:

$$\operatorname{Var}(2\bar{X}) = \frac{\theta^2}{3n}, \qquad \operatorname{Var}(T_3) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

Tanımdan

$$e(T_3, 2\bar{X}) = \frac{\operatorname{Var}(2\bar{X})}{\operatorname{Var}(T_3)} = \frac{\theta^2/(3n)}{\theta^2/\left(n(n+2)\right)} = \frac{n+2}{3}.$$

$n = 1$ iken oran 1'dir; gerçekten de o zaman iki tahmin edici de $2X_1$'dir. $n \geq 2$ için oran 1'den büyüktür, yani T_3 daha etkindir; örneğin $n = 10$ iken $2\bar{X}$'in varyansı T_3'ünkünün 4 katıdır. Örneklem büyüdükçe fark sınırsız artar.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 11.18 ve Örnek 11.19 içindeki tahmin ediciler gözlemlerin ağırlıklı toplamlarıdır. Bu tür tahmin ediciler arasında örneklem ortalamasının en iyisi olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 11.3 (Doğrusal Yansız Tahmin Ediciler Arasında Örneklem Ortalaması). *$(X_1, X_2, ..., X_n)$, ortalaması $\mu \in \mathbb{R}$ bilinmeyen ve varyansı $\sigma^2 > 0$ olan bir kitleden alınmış bir rastgele örneklem olsun. $a_1, ..., a_n$ sabitleri için $T = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ biçimindeki tahmin ediciler arasında μ'nün yansız tahmin edicileri tam olarak $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ olanlardır ve bunlar arasında varyansı en küçük olan yalnız $\bar{X}$'tir.*

İspat.
Yansızlık koşulu. *Doğrusallıktan $E(T) = \sum a_i E(X_i) = \mu \sum a_i$'dir. Bunun her $\mu \in \mathbb{R}$ için μ'ye eşit olması, örneğin $\mu = 1$ alınarak, $\sum a_i = 1$ demektir; tersine $\sum a_i = 1$ ise her μ için $E(T) = \mu$ olur.*
Varyans. *Gözlemler bağımsız olduğundan*

$$\text{Var}\ (T) = \sum_{i=1}^n a_i^2\ \text{Var}\ (X_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Şimdi $\sum a_i = 1$ koşulu altında $\sum a_i^2$'yi alttan sınırlayalım. Kareyi açıp $\sum a_i = 1$'i kullanırsak

$$\sum_{i=1}^n \left(a_i - \frac{1}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^n a_i + n \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{i=1}^n a_i^2 - \frac{1}{n}.$$

Sol taraf kareler toplamı olduğu için negatif olamaz. Demek ki

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \geq \frac{1}{n}, \qquad \text{yani} \qquad \text{Var}\ (T) \geq \frac{\sigma^2}{n} = \text{Var}\ (\bar{X}),$$

ve eşitlik ancak her i için $a_i = 1/n$, yani $T = \bar{X}$ iken sağlanır.
■

Teorem yalnız doğrusal tahmin edicileri karşılaştırır. Doğrusal olmayan tahmin ediciler daha iyi olabilir: $U(0, \theta)$ kitlesinde ortalama $\mu = \theta/2$'dir ve Örnek 11.20 gösteriyor ki $\frac{n+1}{2n} \max X_i$, μ'yü $\bar{X}$'ten çok daha küçük varyansla tahmin eder.

11.4 Tutarlılık

Şimdiye kadarki ölçütler örneklem hacmi n sabitken tahmin edicinin dağılımına baktı. Son ölçüt n büyüdükçe ne olduğunu sorar: çok veri topladığımızda tahmin edicinin hedefe yaklaşmasını isteriz. Bunu olasılıkta yakınsama ile ifade ederiz.

Tanım 11.6 (Tutarlı Tahmin Edici). n birimlik örneklemden hesaplanan tahmin ediciyi T_n ile gösterelim. Her $\theta \in \Theta$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\ |\ T_n - \theta\ |\ \geq \varepsilon\ \right) = 0$$

ise, yani T_n olasılıkta θ'ya yakınsıyorsa, T_n'ye θ parametresinin **tutarlı tahmin edicisi** denir.

Yani ne kadar dar bir $\theta \pm \varepsilon$ aralığı seçersek seçelim, örneklem yeterince büyüdüğünde T_n'nin bu aralığın dışına düşme olasılığı istediğimiz kadar küçülür. Tutarlılığı tanımdan göstermek çoğu zaman zordur; aşağıdaki teorem işi HKO hesabına indirger.

Teorem 11.4 (HKO Sıfıra Giderse Tahmin Edici Tutarlıdır). *Her $\theta \in \Theta$ için $\lim_{n\to\infty} \text{HKO}\ (T_n, \theta) = 0$ ise T_n, θ'nın tutarlı bir tahmin edicisidir.*

İspat.

$\theta \in \Theta$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $\mid T_n - \theta \mid \geq \varepsilon$ olayı $(T_n - \theta)^2 \geq \varepsilon^2$ olayıyla aynıdır. Negatif olmayan $(T_n - \theta)^2$ değişkenine Markov eşitsizliğini uygularsak

$$P\left(\mid T_n - \theta \mid \geq \varepsilon \right) = P\left((T_n - \theta)^2 \geq \varepsilon^2 \right) \leq \frac{E\left[(T_n - \theta)^2 \right]}{\varepsilon^2} = \frac{\text{HKO}\ (T_n, \theta)}{\varepsilon^2}.$$

ε sabitken sağ taraf varsayımdan sıfıra gider. Olasılık negatif olamayacağı için sol taraf da sıfıra gider.
■

Sonuç 11.2 (Tutarlılık için Yeter Koşul). *Her $\theta \in \Theta$ için*

$$\lim_{n\to\infty} E(T_n) = \theta \qquad \text{ve} \qquad \lim_{n\to\infty} \text{Var}\ (T_n) = 0$$

ise T_n, θ'nın tutarlı bir tahmin edicisidir. Özel olarak varyansı sıfıra giden asimptotik yansız bir tahmin edici tutarlıdır.

İspat.
Teorem 11.2 uyarınca

$$\text{HKO}\ (T_n, \theta) = \text{Var}\ (T_n) + \Big(E(T_n) - \theta \Big)^2.$$

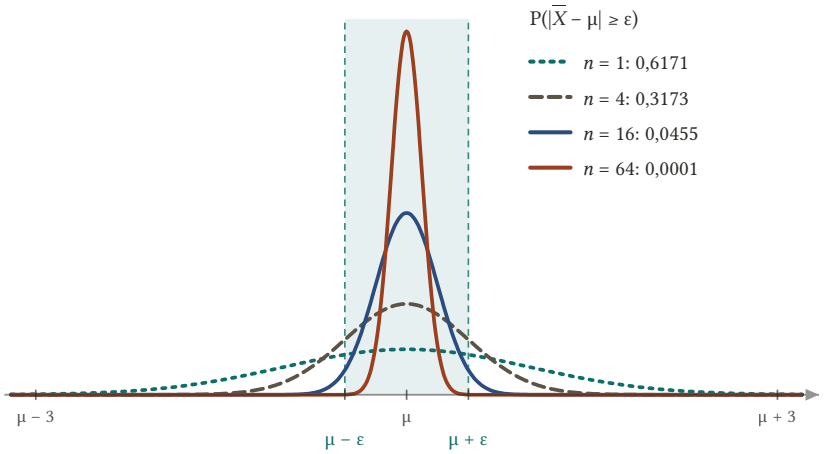
Varsayımdan ilk terim sıfıra gider; $E(T_n) - \theta \to 0$ olduğundan ikinci terim de sıfıra gider. Böylece $\text{HKO}\ (T_n, \theta) \to 0$ olur ve Teorem 11.4 sonucu verir.
■

Örnek 11.21 (Örneklem Ortalamasının Tutarlılığı). Ortalaması μ ve varyansı $\sigma^2 < \infty$ olan bir kitleden alınan n birimlik örneklemin ortalaması $\bar{X}_n$ olsun. $\bar{X}_n$'nin μ için tutarlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\bar{X}_n$ yansız olduğundan HKO'su varyansına eşittir:

$$\text{HKO}\ (\bar{X}_n, \mu) = \text{Var}\ (\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Teorem 11.4 uyarınca $\bar{X}_n$, μ'nün tutarlı bir tahmin edicisidir. Bu sonuç, zayıf büyük sayılar yasasının tahmin dilindeki karşılığıdır.



Şekil 11.8: σ = 1 olan normal bir kitlede X̄'in dağılımı n = 1, 4, 16, 64 için; taralı şerit μ ± ε, ε = 0,5. n büyüdükçe dağılım μ'nün çevresine sıkışır ve şeridin dışına düşme olasılığı sıfıra gider: X̄, μ'nün tutarlı bir tahmin edicisidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 11.22 (Ortalamanın Karesinin Tutarlılığı). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınmış bir örneklem olsun. $(\bar{X}_n)^2$'nin μ^2 için tutarlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Örnek 11.2 içinde $(\bar{X}_n)^2$'nin yanlı ama asimptotik yansız olduğunu gördük. Tutarlılık için HKO'sunu hesaplayalım. Normal kitleden alınan örneklemin ortalaması yine normaldir: $\bar{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ (Teorem 7.4). Standartlaştırarak $\bar{X}_n = \mu + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} Z$ yazalım; burada $Z \sim N(0,1)$. Buna göre

$$(\bar{X}_n)^2 - \mu^2 = \left(\, \bar{X}_n - \mu \,\right)\left(\, \bar{X}_n + \mu \,\right) = \frac{\sigma Z}{\sqrt{n}}\left(2\mu + \frac{\sigma Z}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2\mu\sigma}{\sqrt{n}} Z + \frac{\sigma^2}{n} Z^2.$$

Karesini alalım:

$$\left(\, (\bar{X}_n)^2 - \mu^2 \right)^2 = \frac{4\mu^2\sigma^2}{n} Z^2 + \frac{4\mu\sigma^3}{n\sqrt{n}} Z^3 + \frac{\sigma^4}{n^2} Z^4.$$

Standart normalin momentleri: $E(Z^2) = 1$, simetriden $E(Z^3) = 0$ ve $E(Z^4) = 3$. Sonuncusu $M_Z(t) = e^{t^2/2} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \cdots$ açılımında $t^4/4!$'ün katsayısından gelir: $\frac{4!}{8} = 3$. Beklenen değer alırsak

$$\text{HKO}\left(\, (\bar{X}_n)^2, \mu^2 \,\right) = \frac{4\mu^2\sigma^2}{n} + \frac{3\sigma^4}{n^2} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Teorem 11.4 uyarınca $(\bar{X}_n)^2$, μ^2'nin tutarlı bir tahmin edicisidir. Yani yanlı bir tahmin edici de tutarlı olabilir.
■

Örnek 11.23 (Yansız ama Tutarsız Bir Tahmin Edici). $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınmış bir örneklem ve $T_n = (X_1 + X_n)/2$ olsun. T_n'nin μ için yansız olduğunu ama tutarlı olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Örnek 11.19 içinde $E(T_n) = \mu$ ve $\text{Var}\,(T_n) = \sigma^2/2$ bulduk. X_1 ile X_n bağımsız normal olduğundan T_n de normaldir: her $n \geq 2$ için $T_n \sim N(\mu, \sigma^2/2)$. Yani T_n'nin dağılımı n'ye hiç bağlı değildir; örneklem büyüse de yalnız iki gözlem kullanılır.
$\varepsilon = \sigma/\sqrt{2}$ alalım. T_n'yi standartlaştırırsak $Z = \dfrac{T_n - \mu}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ ve

$$\begin{aligned} P\left(\, |\, T_n - \mu \,| \geq \varepsilon \,\right) &= P\left(\, |\, Z \,| \geq 1 \,\right) \\ &= 2\left(\, 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 1) \,\right) \\ &= 2(0{,}5 - 0{,}3413) = 0{,}3174. \end{aligned}$$

Burada $P(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}3413$ değeri standart normal tablosundan okunur. Bu olasılık her n için aynıdır, dolayısıyla $n \to \infty$ iken sıfıra gitmez. O hâlde T_n yansız olduğu hâlde tutarlı değildir. Aynı sonuç Teorem 11.4 ile de uyumludur: HKO $(T_n, \mu) = \sigma^2/2$ sıfıra gitmez.
■

Özetle: yansızlık tahmin edicinin merkezine, etkinlik yayılımına, hata kareler ortalaması ikisinin toplam etkisine, tutarlılık ise büyük örneklemlerdeki davranışına bakar. Bu ölçütlerin hiçbiri diğerlerini tek başına garanti etmez. Nokta tahminini burada bitiriyoruz. Bir sonraki kısımda tek bir sayı yerine parametreyi belli bir güvenle içeren aralıklar kuracağız; bunun için önce normal kitleden alınan örneklemlerde $\bar{X}$ ve S^2'nin dağılımlarını Örneklem Dağılımları bölümünde inceleyeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

12. Örneklem Dağılımları

Nokta tahmininde bir parametreyi tek bir sayıyla tahmin ettik. Bu tahminin ne kadar güvenilir olduğunu söyleyebilmek, yani bir güven aralığı kurmak ya da bir hipotezi sınamak için, tahmin edicinin kendisinin nasıl dağıldığını bilmemiz gerekir. Normal bir kitleden çekilen örneklemde $\bar{X}$ ve S^2'den kurulan istatistiklerin dağılımları üç aileyle ifade edilir: ki-kare, t ve F dağılımları. Bu bölümde bu üç aileyi tanıyacak, yoğunluklarını türetecek, tablolarını okumayı öğrenecek ve sonunda normal örneklemdeki iki temel teoremi ispatlayacağız.

12.1 Ki-kare Dağılımı

İlk aile, gamma ailesinin istatistikte en sık karşılaşılan üyesidir; standart normal değişkenlerin karelerinin toplamı olarak ortaya çıkar.

Tanım 12.1 (Ki-kare Dağılımı). ν pozitif bir tam sayı olsun. Olasılık yoğunluk fonksiyonu

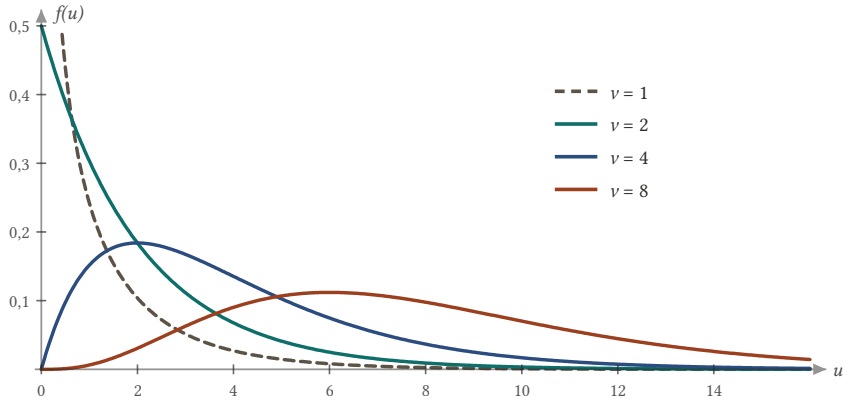
$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{\nu/2-1}\, e^{-u/2}}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}, & u > 0, \\ 0, & u \le 0 \end{cases}$$

olan U rastgele değişkenine **ν serbestlik dereceli ki-kare dağılımına** sahiptir denir ve $U \sim \chi^2_\nu$ yazılır.

Yani χ^2_ν, $r = \nu/2$ ve $\alpha = 1/2$ parametreli gamma dağılımıdır (Tanım 4.2). Gamma yoğunluğunda bu değerler yerine konunca

$$\frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha u)^{r-1}e^{-\alpha u} = \frac{(1/2)^{\nu/2}}{\Gamma(\nu/2)}\, u^{\nu/2-1}e^{-u/2}$$

bulunur ve bu, yukarıdaki yoğunluktur. Böylece f'nin gerçekten bir yoğunluk olduğunu ayrıca göstermemize gerek kalmaz. Dağılım yalnız pozitif değerler alır ve tek parametresi ν'dür. Eğrinin biçimi aşağıdaki şekilde görülüyor: $\nu = 1$ ve $\nu = 2$ için yoğunluk sıfırdan itibaren azalır, $\nu \ge 3$ için sıfırdan başlayıp $u = \nu - 2$'de tepe yapar ve sağa doğru uzun bir kuyrukla sönümlenir.



Şekil 12.1: Serbestlik derecesi ν = 1, 2, 4 ve 8 olan χ^2 yoğunlukları. ν = 1 ve ν = 2 için eğri sıfırdan başlayarak azalır; ν ≥ 3 için tepe ν − 2 noktasındadır. ν büyüdükçe eğri sağa kayar, yayılır ve daha simetrik bir çan biçimine yaklaşır.

Parametrenin adı bir sayma işlemini anlatır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 12.2 (Serbestlik Derecesi). Bir örneklemdeki bağımsız gözlemlerin sayısından, bu gözlemlere dayanarak tahmin edilen kitle parametrelerinin sayısı çıkarılınca elde edilen sayıya **serbestlik derecesi** denir.

Yani serbestlik derecesi, bir büyüklüğü hesaplarken elimizde "serbestçe değişebilen" kaç bilgi kaldığını sayar. n bağımsız standart normal değişkenin kareleri toplamında her terim serbesttir ve serbestlik derecesi n'dir (Sonuç 12.1). $\sum(X_i - \bar{X})^2$ toplamında ise n terim vardır ama sapmaların toplamı her zaman $\sum(X_i - \bar{X}) = 0$'dır; ilk $n-1$ sapma bilinince sonuncusu belirlenir. $\bar{X}$ ile kitle ortalamasını tahmin etmenin bedeli bir serbestlik derecesidir ve bu toplam $n-1$ serbestlik derecelidir (Teorem 12.8).
Gamma dağılımı için bildiklerimiz ki-kare dağılımına doğrudan aktarılır.

Teorem 12.1 (Ki-kare Dağılımının Moment Üreten Fonksiyonu ve Momentleri). *$U \sim \chi^2_\nu$ ise $t < \frac{1}{2}$ için*

$$M_U(t) = (1-2t)^{-\nu/2}$$

ve

$$E(U) = \nu, \qquad \text{Var}\,(U) = 2\nu.$$

> ***İspat.***
> *$U \sim \text{Gamma}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan Teorem 4.3 $r = \frac{\nu}{2}$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ ile uygulanır. $t < \frac{1}{2}$ için*
>
> $$M_U(t) = \left(\frac{1/2}{1/2 - t}\right)^{\nu/2} = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\nu/2} = (1-2t)^{-\nu/2}.$$
>
> *Momentler Teorem 4.2 ile bulunur:*
>
> $$E(U) = \frac{r}{\alpha} = \frac{\nu/2}{1/2} = \nu, \qquad \text{Var}\,(U) = \frac{r}{\alpha^2} = \frac{\nu/2}{1/4} = 2\nu.$$
>
> *Aynı sonuçlar moment üreten fonksiyondan da okunur. Türevler*
>
> $$M'_U(t) = \nu(1-2t)^{-\nu/2-1}, \qquad M''_U(t) = \nu(\nu+2)(1-2t)^{-\nu/2-2}$$
>
> *olduğundan $E(U) = M'_U(0) = \nu$, $E(U^2) = M''_U(0) = \nu^2 + 2\nu$ ve $\text{Var}\,(U) = \nu^2 + 2\nu - \nu^2 = 2\nu$.*
> ■

Yani ki-kare dağılımının ortalaması serbestlik derecesine, varyansı serbestlik derecesinin iki katına eşittir. Moment üreten fonksiyon dağılımı tek türlü belirlediğinden (teklik teoremi), $(1-2t)^{-\nu/2}$ biçiminde bir moment üreten fonksiyonu olan her değişken χ^2_ν dağılımlıdır. Bu gözlem aşağıdaki ispatların hepsinde kullanılacak.

Örnek 12.1 (Moment Üreten Fonksiyondan Ki-kare Dağılımını Tanımak). U rastgele değişkeninin moment üreten fonksiyonu $t < \frac{1}{2}$ için $M_U(t) = (1-2t)^{-6}$ ise U'nun dağılımını, beklenen değerini ve varyansını bulunuz.

> **Çözüm.**
> Verilen ifadeyi $(1-2t)^{-\nu/2}$ ile karşılaştıralım: $\frac{\nu}{2} = 6$, yani $\nu = 12$'dir. Teklik teoremi gereği $U \sim \chi^2_{12}$'dir. Teorem 12.1 ile
>
> $$E(U) = 12, \qquad \text{Var}\,(U) = 2 \cdot 12 = 24.$$
>
> ■

Ki-kare olasılıklarının integrali (ν çift olmadıkça) elemanter fonksiyonlarla kapalı biçimde hesaplanamaz; bu yüzden değerler tablodan okunur. Kantil gösterimi normal dağılımdakiyle aynıdır (Tanım 5.1): $\chi^2_{\nu,p}$, χ^2_ν eğrisinin altında solunda p kadar alan bırakan noktadır, yani $U \sim \chi^2_\nu$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P\left(\, U \le \chi^2_{\nu,\,p} \,\right) = p.$$

Kitabın sonundaki χ^2 tablosu bu kantilleri satırda ν, sütunda p olacak biçimde verir. Dağılım simetrik olmadığından sol ve sağ kuyruk kantilleri ayrı ayrı okunur; normal dağılımdaki $z_{1-p} = -z_p$ gibi bir kısayol yoktur.

Örnek 12.2 (Ki-kare Dağılımında Sağ Kuyruk). $U \sim \chi^2_{10}$ ise $P(U > 18{,}31)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
χ^2 tablosunun $\nu = 10$ satırında $18{,}31$ değeri $p = 0{,}95$ sütunundadır: $\chi^2_{10,\,0{,}95} = 18{,}31$, yani $P(U \le 18{,}31) = 0{,}95$. Tümleyen olaya geçersek

$$P(U > 18{,}31) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$$

■

Örnek 12.3 (Ki-kare Dağılımında İki Kantil Arası). $U \sim \chi^2_{10}$ ise $P(3{,}25 \le U \le 20{,}48)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
χ^2 tablosunun $\nu = 10$ satırından $\chi^2_{10,\,0{,}025} = 3{,}25$ ve $\chi^2_{10,\,0{,}975} = 20{,}48$ okunur. U sürekli olduğundan

$$P(3{,}25 \le U \le 20{,}48) = P(U \le 20{,}48) - P(U < 3{,}25) = 0{,}975 - 0{,}025 = 0{,}95.$$

İki sınır $E(U) = 10$'a göre simetrik değildir: $10 - 3{,}25 = 6{,}75$ iken $20{,}48 - 10 = 10{,}48$'dir. Uzun sağ kuyruk yüzünden üst sınır ortalamadan daha uzaktadır.
■

Serbestlik derecesi 2 iken yoğunluk $f(u) = \tfrac{1}{2}e^{-u/2}$ olur; bu, ortalaması 2 olan üstel dağılımdır ve olasılıklar tablo olmadan da hesaplanır.

Örnek 12.4 (İki Serbestlik Dereceli Ki-kare Dağılımı). $U \sim \chi^2_2$ için $P(U > u)$'yu kapalı biçimde bulunuz ve $\chi^2_{2,\,0{,}95} = 5{,}99$ tablo değerini doğrulayınız.

Çözüm.
$\nu = 2$ için $\Gamma(1) = 1$ ve $u^{\nu/2-1} = u^0 = 1$ olduğundan yoğunluk $u > 0$ için $f(u) = \tfrac{1}{2}e^{-u/2}$'dir. $u > 0$ için

$$P(U > u) = \int_u^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2}\, dx = \Big[-e^{-x/2} \Big]_u^{\infty} = e^{-u/2}.$$

$u = 5{,}99$ için

$$P(U > 5{,}99) = e^{-2{,}995} \approx 0{,}0500,$$

yani $P(U \le 5{,}99) \approx 0{,}95$'tir. Bu, χ^2 tablosundaki $\chi^2_{2,\,0{,}95} = 5{,}99$ değeriyle uyuşur. Kesin kantil $P(U > c) = 0{,}05$ denkleminden $c = -2\ln 0{,}05 = 2\ln 20 \approx 5{,}991$ bulunur.
■

12.1.1 Standart Normallerin Kareleri

Ki-kare dağılımının istatistikteki önemi, standart normal değişkenlerle olan bağından gelir. İlk adım tek bir standart normalin karesidir.

Teorem 12.2 (Standart Normalin Karesi). *$Z \sim N(0,1)$ ise $Z^2 \sim \chi^2_1$'dir. Daha genel olarak $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise*

$$\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Φ standart normal dağılım fonksiyonunu, $\varphi = \Phi'$ da standart normal yoğunluğu göstersin. $Y = Z^2$ diyelim ve dağılım fonksiyonunu hesaplayalım. $y \le 0$ için $P(Y \le y) = 0$'dır (sıfır olasılıklı $Z = 0$ olayı dışında $Z^2 > 0$). $y > 0$ için

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Z^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le Z \le \sqrt{y}) \\ &= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1; \end{aligned}$$

son adımda standart normalin simetrisinden gelen $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ eşitliğini kullandık. $y > 0$ için zincir kuralıyla türev alalım:

$$f_Y(y) = 2\varphi(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, y^{-1/2} e^{-y/2}.$$

Öte yandan $\nu = 1$ için ki-kare yoğunluğunun paydası $2^{1/2}\Gamma(1/2) = \sqrt{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{2\pi}$'dir ($\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, Teorem 4.1 (d)). Dolayısıyla

$$f_Y(y) = \frac{y^{1/2-1} e^{-y/2}}{2^{1/2}\,\Gamma(1/2)}, \qquad y > 0,$$

χ^2_1 yoğunluğudur. Genel durumda $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ olduğundan (standartlaştırma) ilk kısım uygulanır. ■

İkinci adım, bağımsız ki-kare değişkenlerinin toplamıdır.

Teorem 12.3 (Bağımsız Ki-kare Değişkenlerinin Toplamı). *$U_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ ve $U_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ bağımsız ise*

$$U_1 + U_2 \sim \chi^2_{\nu_1+\nu_2}.$$

Tümevarımla, bağımsız $U_i \sim \chi^2_{\nu_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ için $U_1 + \cdots + U_k \sim \chi^2_{\nu_1+\cdots+\nu_k}$.

İspat.
U_1 ile U_2 bağımsız olduğundan e^{tU_1} ile e^{tU_2} de bağımsızdır ve bağımsız değişkenlerin çarpımının beklenen değeri, beklenen değerlerin çarpımıdır. $t < \frac{1}{2}$ için Teorem 12.1 ile

$$M_{U_1+U_2}(t) = E\left(e^{tU_1}\right) E\left(e^{tU_2}\right) = (1-2t)^{-\nu_1/2}(1-2t)^{-\nu_2/2} = (1-2t)^{-(\nu_1+\nu_2)/2}.$$

Bu, $\chi^2_{\nu_1+\nu_2}$ dağılımının moment üreten fonksiyonudur; teklik teoremi gereği $U_1 + U_2 \sim \chi^2_{\nu_1+\nu_2}$. (Bu, bağımsız gamma değişkenlerinin toplamına ilişkin Teorem 4.4 sonucunun $\alpha = \frac{1}{2}$ durumudur.) k terimli toplam için $U_1 + \cdots + U_{k-1}$ ile U_k'nin bağımsız olduğunu kullanıp aynı adımı tekrarlarız. ■

İki teorem birleşince ki-kare dağılımının en bilinen tanımı çıkar.

Sonuç 12.1 (Standart Normallerin Kareleri Toplamı). *$X_1, \ldots, X_n$ bağımsız ve $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ olsun. $Y_i = \dfrac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}$ standartlaştırılmış değişkenler olmak üzere*

$$U = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi^2_n.$$

Özel olarak $Z_1, \ldots, Z_n$ bağımsız standart normal ise $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2_n$'dir.

İspat.
Her Y_i standart normaldir; Teorem 12.2 gereği $Y_i^2 \sim \chi^2_1$. X_i'ler bağımsız olduğundan onların ayrı ayrı fonksiyonları olan $Y_1^2, \ldots, Y_n^2$ de bağımsızdır. Teorem 12.3 ile

$$U = Y_1^2 + \cdots + Y_n^2 \sim \chi^2_{1+\cdots+1} = \chi^2_n.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Yani χ^2_n, n tane bağımsız standart normalin karelerinin toplamıdır. Bu bakış açısı $E(U) = n$ sonucunu da açıklar: her ${Y_i}^2$'nin beklenen değeri $E({Y_i}^2) = \text{Var}\ (Y_i) = 1$'dir ve n tanesi toplanır.

Örnek 12.5 (Üç Normalin Standart Karelerinin Toplamı). $X_1 \sim N(1,4)$, $X_2 \sim N(0,9)$ ve $X_3 \sim N(-2,1)$ bağımsız olsun.

$$U = \frac{(X_1 - 1)^2}{4} + \frac{X_2^2}{9} + (X_3 + 2)^2$$

için $P(U > 7{,}81)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Standart sapmalar $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$'dir. Buna göre

$$U = \left(\frac{X_1 - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2 - 0}{3}\right)^2 + \left(\frac{X_3 - (-2)}{1}\right)^2$$

bağımsız üç standart normalin kareleri toplamıdır ve Sonuç 12.1 gereği $U \sim \chi^2_3$'tür. χ^2 tablosundan $\chi^2_{3,\,0{,}95} = 7{,}81$ olduğundan

$$P(U > 7{,}81) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$$

■

Ki-kare dağılımının beklenen değeri, kitle varyansı için yansız tahmin ediciler bulmayı kolaylaştırır. Kitle ortalaması biliniyorsa kareli sapmaları bu bilinen ortalamadan ölçmek yeter.

Örnek 12.6 (Ortalaması Sıfır Olan Normal Kitlede Varyansın Yansız Tahmini). $X_1, \ldots, X_n$, $N(0, \sigma^2)$ dağılımlı bir kitleden alınmış bir örneklem olsun. Örneklemin tümüne dayanan, σ^2 için yansız bir tahmin edici bulunuz.

Çözüm.
Her $X_i \sim N(0, \sigma^2)$ olduğundan $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$'dir ve örneklemin gözlemleri bağımsızdır. Sonuç 12.1 ile

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2_n.$$

Ki-kare dağılımının beklenen değeri serbestlik derecesidir (Teorem 12.1):

$$E\left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = n \quad \Rightarrow \quad E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = n\sigma^2.$$

Her iki tarafı n'ye bölelim. Buna göre

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

için $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$'dir; $\hat{\sigma}^2$, σ^2'nin yansız (Tanım 11.1) bir tahmin edicisidir. Varyansı da aynı yoldan bulunur: $\text{Var}\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = 2n$ olduğundan

$$\text{Var}\ (\hat{\sigma}^2) = \frac{\sigma^4}{n^2} \cdot 2n = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 12.7 (Ortalaması Bir Olan Normal Kitlede Varyansın Yansız Tahmini). $X_1, ..., X_n$, $N(1, \sigma^2)$ dağılımlı bir kitleden alınmış bir örneklem olsun. Örneklemin tümüne dayanan, σ^2 için yansız bir tahmin edici bulunuz.

Çözüm.
Bu kez $\frac{X_i - 1}{\sigma} \sim N(0,1)$'dir. Sonuç 12.1 ile

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2 \sim \chi^2_n,$$

ve beklenen değeri n'dir. Dolayısıyla $E\left(\sum(X_i-1)^2\right) = n\sigma^2$ olur ve

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 1)^2$$

σ^2'nin yansız bir tahmin edicisidir. Önceki örnekten tek farkı, sapmaların bilinen ortalama olan 1'den ölçülmesidir. Varyansı yine $\frac{2\sigma^4}{n}$'dir.
■

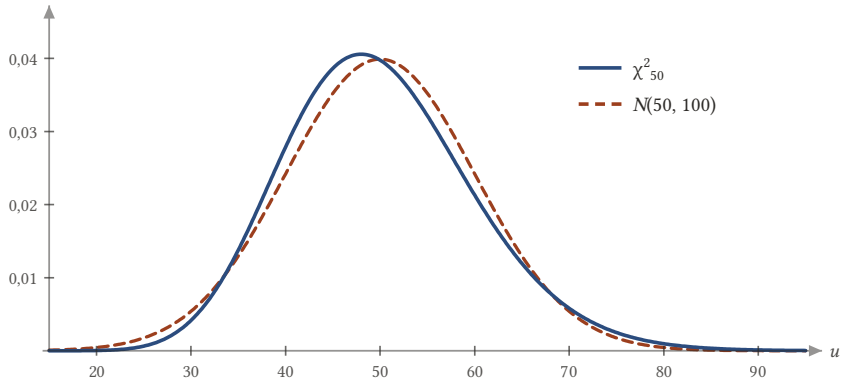
12.1.2 Büyük Serbestlik Derecelerinde Normal Yaklaşım

Şekildeki eğriler serbestlik derecesi büyüdükçe daha simetrik bir çana benziyordu. Bunun nedeni, χ^2_ν'nün ν tane bağımsız ve aynı dağılımlı terimin toplamı olmasıdır.

Önerme 12.1 (Ki-kare Dağılımına Normal Yaklaşım). *$U_\nu \sim \chi^2_\nu$ ise her z için*

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left(\frac{U_\nu - \nu}{\sqrt{2\nu}} \le z\right) = \Phi(z).$$

Uygulamada $\nu > 30$ için χ^2_ν dağılımı yaklaşık olarak $N(\nu, 2\nu)$ alınır.



Şekil 12.2: χ^2_{50} yoğunluğu (düz) ile aynı ortalama ve varyansa sahip N(50, 100) yoğunluğu (kesikli). İki eğri birbirine çok yakındır; χ^2 eğrisinin tepesi biraz solda, sağ kuyruğu biraz daha kalındır.

İspat.
$Z_1, Z_2, \ldots$ bağımsız standart normal olsun. Sonuç 12.1 gereği $Z_1^2 + \cdots + Z_\nu^2$ ile U_ν aynı dağılıma sahiptir; dolayısıyla olasılığı $Z_1^2 + \cdots + Z_\nu^2$ için hesaplamak yeter. Z_i^2'ler bağımsız, aynı dağılımlı ve χ^2_1 dağılımlıdır; Teorem 12.1 ile ortalamaları 1, varyansları 2'dir. Z_i^2'nin moment üreten fonksiyonu $(1-2t)^{-1/2}$, sıfırın bir komşuluğunda vardır. Toplamın ortalaması ν, varyansı 2ν olduğundan merkezi limit teoremi (Teorem 8.5) standartlaştırılmış toplamın dağılım fonksiyonunun Φ'ye yakınsadığını söyler:

$$\frac{Z_1^2 + \cdots + Z_\nu^2 - \nu}{\sqrt{2\nu}} = \frac{\bar{W}_\nu - 1}{\sqrt{2}/\sqrt{\nu}}, \qquad \bar{W}_\nu = \frac{Z_1^2 + \cdots + Z_\nu^2}{\nu}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 12.8 (Elli Serbestlik Dereceli Ki-kare Dağılımında Kantil). $U \sim \chi^2_{50}$ için $\chi^2_{50,\,0{,}95}$ kantilini normal yaklaşımla bulunuz ve tablo değeriyle karşılaştırınız.

Çözüm.
Önerme 12.1 ile U yaklaşık olarak $N(50, 100)$ dağılımlıdır; standart sapma $\sqrt{100} = 10$'dur. $P(U \le c) = 0{,}95$ koşulu, standartlaştırınca $\frac{c-50}{10} \approx z_{0{,}95} = 1{,}645$ demektir. Buradan

$$c \approx 50 + 1{,}645 \cdot 10 = 66{,}45.$$

χ^2 tablosundaki değer $\chi^2_{50,\,0{,}95} = 67{,}50$'dir. Yaklaşımın hatası yaklaşık 1 birimdir. Hatanın yönü şekilden görülür: ki-kare eğrisinin sağ kuyruğu normal eğrininkinden kalındır, bu yüzden sağ kuyruk kantilleri normal yaklaşımın verdiğinden biraz büyüktür.
■

Örnek 12.9 (Elli Serbestlik Dereceli Ki-kare Dağılımında Olasılık). $U \sim \chi^2_{50}$ için $P(U > 60)$ olasılığını normal yaklaşımla bulunuz.

Çözüm.
U yaklaşık $N(50, 100)$ dağılımlı olduğundan standartlaştıralım:

$$P(U > 60) \approx P\left(Z > \frac{60 - 50}{10}\right) = P(Z > 1).$$

Standart normal tablosundan $P(0 \le Z \le 1) = 0{,}3413$ olduğundan

$$P(U > 60) \approx 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587.$$

Bilgisayarla hesaplanan kesin değer $0{,}1572$'dir; yaklaşım iki ondalık basamakta doğrudur.
■

12.2 Student t Dağılımı

İkinci aile, bir standart normalin, bağımsız bir ki-kare değişkeninin serbestlik derecesine bölünmüş hâlinin kareköküne oranıdır. Kitle varyansı bilinmediğinde ortalama hakkında sonuç çıkarırken bu oran kendiliğinden ortaya çıkar (Teorem 12.9).

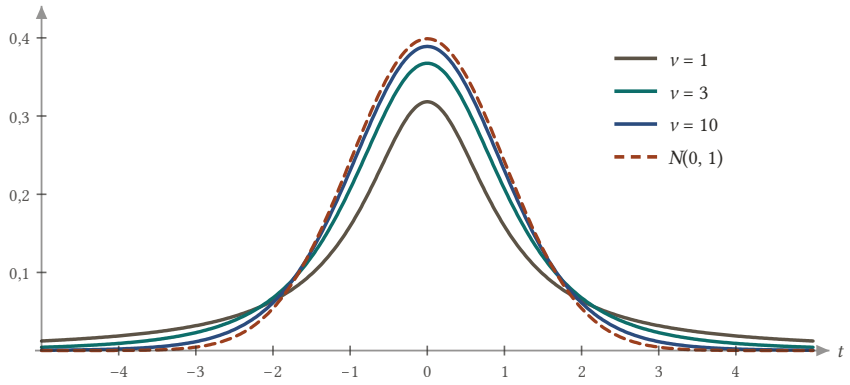
Tanım 12.3 (Student t Dağılımı). $Z \sim N(0,1)$ ve $V \sim \chi^2_\nu$ bağımsız olsun.

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$$

rastgele değişkeninin dağılımına **ν serbestlik dereceli Student t dağılımı** denir ve $T \sim t_\nu$ yazılır.

Yani t değişkeni, bir standart normalin, "tahmin edilmiş bir birim"e bölünmesidir: $\frac{V}{\nu}$'nün beklenen değeri 1'dir ve ν büyüdükçe 1'e yaklaşır; bu yüzden T, Z'ye benzer ama paydadaki rastgelelik nedeniyle ondan daha dağınıktır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.3: Serbestlik derecesi $\nu = 1$, 3 ve 10 olan t yoğunlukları ile standart normal yoğunluk (kesikli). Hepsi 0'a göre simetriktir. t eğrilerinin tepesi daha alçak, kuyrukları daha kalındır; ν büyüdükçe eğri standart normale yaklaşır.

Yoğunluk, V'nin değeri verildiğinde T'nin normal olmasından yararlanılarak bulunur.

Teorem 12.4 (Student t Dağılımının Yoğunluğu). *$T \sim t_\nu$ ise her $t \in \mathbb{R}$ için*

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

İspat.
Z ile V bağımsız olduğundan ortak yoğunlukları $\varphi(z)f_V(v)$ çarpımıdır; burada φ standart normal, f_V ise χ^2_ν yoğunluğudur. $v > 0$ için $T \le t$ olayı $Z \le t\sqrt{v/\nu}$ demektir. Önce z'ye göre integral alalım:

$$F_T(t) = P\left(Z \le t\sqrt{V/\nu}\right) = \int_0^\infty \Phi\left(t\sqrt{v/\nu}\right) f_V(v)\,dv.$$

t'ye göre türev alalım. İntegrandın türevi $\varphi\left(t\sqrt{v/\nu}\right)\sqrt{v/\nu}\,f_V(v)$'dir ve $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{v/\nu}\,f_V(v)$ ile sınırlıdır; bu sınır integrallenebilir olduğundan türev integralin içine alınabilir:

$$f_T(t) = \int_0^\infty \varphi\left(t\sqrt{v/\nu}\right)\sqrt{\frac{v}{\nu}}\,f_V(v)\,dv.$$

İntegrandı açık yazalım. İlk iki çarpan

$$\varphi\left(t\sqrt{v/\nu}\right)\sqrt{\frac{v}{\nu}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\,v^{1/2}e^{-t^2v/(2\nu)}$$

olduğundan

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}\,2^{\nu/2}\,\Gamma(\nu/2)}\int_0^\infty v^{\frac{\nu+1}{2}-1}e^{-\lambda v}\,dv, \qquad \lambda = \frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right).$$

Son integral, Teorem 4.1 (e) ile $p = \frac{\nu+1}{2}$ için $\frac{\Gamma(p)}{\lambda^p}$'dir:

$$\int_0^\infty v^{\frac{\nu+1}{2}-1}e^{-\lambda v}\,dv = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)2^{\frac{\nu+1}{2}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Yerine koyunca ikinin kuvvetleri sadeleşir, çünkü $\dfrac{2^{(\nu+1)/2}}{\sqrt{2}\cdot 2^{\nu/2}} = 1$ ve $\sqrt{2\pi\nu} = \sqrt{2}\,\sqrt{\pi\nu}$'dir. Geriye iddia edilen formül kalır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Formülden dağılımın temel özellikleri okunur.

Önerme 12.2 (Student t Dağılımının Özellikleri). *$T \sim t_\nu$ olsun.*
1. Yoğunluk 0'a göre simetriktir: $f_T(-t) = f_T(t)$. Tepe noktası $t = 0$'dadır.
2. $\nu = 1$ için T standart Cauchy dağılımlıdır; beklenen değeri yoktur.
3. $\nu > 1$ ise $E(T) = 0$; $\nu > 2$ ise $\operatorname{Var}(T) = \dfrac{\nu}{\nu - 2}$.
4. $\nu \to \infty$ iken her t için $f_T(t) \to \varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$.

İspat.
1. *t formülde yalnız t^2 olarak geçer, dolayısıyla $f_T(-t) = f_T(t)$. $1 + \frac{t^2}{\nu}$ en küçük değerini $t = 0$'da aldığından ve üs negatif olduğundan yoğunluk en büyük değerini $t = 0$'da alır.*
2. *$\nu = 1$ için $\Gamma(1) = 1$ ve $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ olduğundan*

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}\,(1 + t^2)^{-1} = \frac{1}{\pi(1 + t^2)},$$

bu da standart Cauchy yoğunluğudur (Tanım 4.6, $c = 1$, $\theta = 0$). Cauchy dağılımının beklenen değeri yoktur (Teorem 4.9).
3. *Z ile V bağımsız olduğundan $\mid Z \mid$ ile $V^{-1/2}$ de bağımsızdır ve*

$$E \mid T \mid = \sqrt{\nu} E \mid Z \mid E\left(V^{-1/2} \right).$$

$V \sim \text{Gamma}\left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} \right)$ için Teorem 4.2, $s > -\frac{\nu}{2}$ olan her s için $E(V^s)$'nin sonlu olduğunu söyler. $s = -\frac{1}{2}$ için bu koşul $\nu > 1$ demektir; o zaman $E \mid T \mid < \infty$ olur ve simetri nedeniyle $E(T) = 0$'dır. Varyans için $s = -1$ alınır; koşul $\nu > 2$'dir ve

$$E\left(V^{-1} \right) = \frac{\Gamma(\nu/2 - 1)}{\Gamma(\nu/2)\,(1/2)^{-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu/2 - 1} = \frac{1}{\nu - 2};$$

burada $\Gamma(\nu/2) = (\nu/2 - 1)\,\Gamma(\nu/2 - 1)$ eşitliğini kullandık. Buna göre

$$\operatorname{Var}(T) = E(T^2) = \nu\, E(Z^2)\, E\left(V^{-1} \right) = \frac{\nu}{\nu - 2}.$$

4. *Yoğunluğu $f_T(t) = c_\nu\, g_\nu(t)$ biçiminde yazalım: $g_\nu(t) = \left(1 + \frac{t^2}{\nu} \right)^{-(\nu+1)/2}$ ve c_ν öndeki sabit. Her t için*

$$\ln g_\nu(t) = -\frac{\nu + 1}{2} \ln\left(1 + \frac{t^2}{\nu} \right) \to -\frac{t^2}{2},$$

çünkü $x \to 0$ iken $\ln(1 + x) \sim x$'tir ve $\frac{\nu+1}{2} \cdot \frac{t^2}{\nu} \to \frac{t^2}{2}$. Demek ki $g_\nu(t) \to e^{-t^2/2}$. Sabitin limitini bulmak için $\int f_T = 1$, yani $c_\nu = 1 / \int g_\nu$ eşitliğini kullanırız. $\left(1 + \frac{a}{\nu} \right)^\nu$ ifadesi ν ile arttığından $\nu \geq 2$ için

$$\left(1 + \frac{t^2}{\nu} \right)^{\frac{\nu+1}{2}} \geq \left(1 + \frac{t^2}{\nu} \right)^{\frac{\nu}{2}} \geq 1 + \frac{t^2}{2},$$

yani $g_\nu(t) \leq \frac{1}{1 + t^2/2}$'dir ve sağdaki fonksiyonun bütün doğru üzerindeki integrali sonludur. Baskın yakınsaklık teoremiyle $\int g_\nu \to \int e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$, dolayısıyla $c_\nu \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ve $f_T(t) \to \varphi(t)$.
■

Üçüncü özellik şekildeki görüntüyü açıklar: $\operatorname{Var}(T) = \frac{\nu}{\nu-2} > 1$ olduğundan t dağılımı standart normalden daha yayvandır; kütlenin bir kısmı merkezden kuyruklara kaymıştır. Örneğin $\nu = 10$ için varyans 1,25'tir. ν büyüdükçe varyans 1'e iner ve eğri standart normale yaklaşır.
t dağılımının kantilleri de normal dağılımdaki gibi sol kuyruk alanıyla gösterilir.

Tanım 12.4 (Student t Dağılımının Kantili). $T \sim t_\nu$ ve $0 < p < 1$ olsun.

$$P\left(T \leq t_{\nu,\,p} \right) = p$$

eşitliğini sağlayan $t_{\nu,\,p}$ sayısına t_ν dağılımının ***p* kantili** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani $t_{\nu,\,p}$, t_ν eğrisinin altında solunda p kadar alan bırakan noktadır. Dağılım simetrik olduğundan

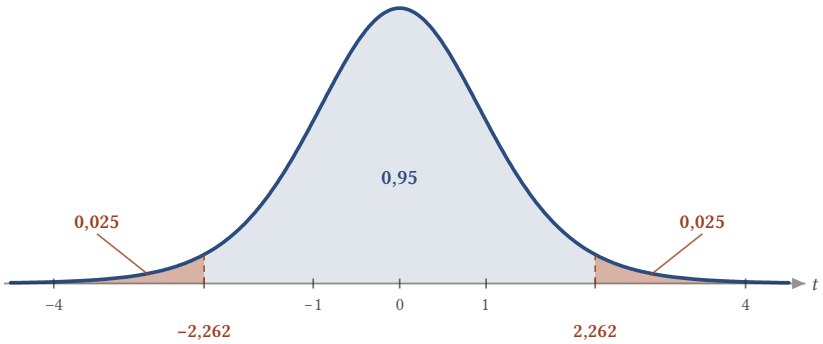
$$t_{\nu,\,1-p} = -t_{\nu,\,p}$$

dir; örneğin $t_{9,\,0{,}025} = -t_{9,\,0{,}975}$. Kitabın sonundaki t tablosu satırda ν, sütunda p olacak biçimde $p \geq 0{,}60$ için kantilleri verir; küçük p'ler bu simetriyle okunur.

Örnek 12.10 (Dokuz Serbestlik Dereceli t Dağılımında Simetrik Aralık). $T \sim t_9$ ise $P(-2{,}262 \leq T \leq 2{,}262)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
t tablosunun $\nu = 9$ satırında $2{,}262$ değeri $p = 0{,}975$ sütunundadır: $t_{9,\,0{,}975} = 2{,}262$. Simetriden $t_{9,\,0{,}025} = -2{,}262$. Buna göre

$$P(-2{,}262 \leq T \leq 2{,}262) = 0{,}975 - 0{,}025 = 0{,}95.$$



Şekil 12.4: t_9 yoğunluğu. Simetri nedeniyle 2,262'nin sağındaki ve −2,262'nin solundaki alanlar eşittir (0,025'er); aradaki alan 0,95'tir.

■

Örnek 12.11 (Ortada Yüzde Doksan Alan Bırakan Sınır). $T \sim t_{15}$ ise $P(-c \leq T \leq c) = 0{,}90$ olacak biçimde c sayısını bulunuz ve standart normal için karşılık gelen sayıyla karşılaştırınız.

Çözüm.
Ortada 0,90 alan kalıyorsa iki kuyruğun toplamı 0,10'dur ve simetri nedeniyle her birinin alanı 0,05'tir. Demek ki c'nin solunda 0,95 alan vardır: $c = t_{15,\,0{,}95}$. t tablosunun $\nu = 15$ satırından

$$c = t_{15,\,0{,}95} = 1{,}753.$$

Standart normal için aynı koşul $c = z_{0{,}95} = 1{,}645$ verir. t dağılımının kuyrukları daha kalın olduğundan, aynı alanı ortada bırakmak için sınırın daha dışarıda olması gerekir.
■

Örnek 12.12 (Normal ve Ki-kare Değişkenlerinden t Değişkeni Kurmak). $Z \sim N(0,1)$ ve $V \sim \chi^2_4$ bağımsız olsun. $P\left(\dfrac{2Z}{\sqrt{V}} > 2{,}132\right)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Oranı t tanımındaki biçime getirelim: $\sqrt{V/4} = \frac{\sqrt{V}}{2}$ olduğundan

$$\frac{2Z}{\sqrt{V}} = \frac{Z}{\sqrt{V}/2} = \frac{Z}{\sqrt{V/4}} \sim t_4.$$

t tablosundan $t_{4,\,0{,}95} = 2{,}132$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P\left(\frac{2Z}{\sqrt{V}} > 2{,}132\right) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$$

■

12.3 F Dağılımı

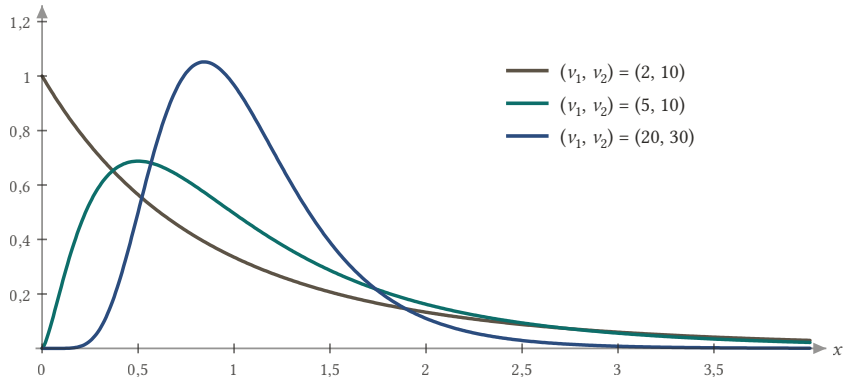
Üçüncü aile, iki bağımsız ki-kare değişkeninin, her biri kendi serbestlik derecesine bölünmüş hâllerinin oranıdır. İki kitlenin varyanslarını karşılaştırırken bu oran ortaya çıkar.

Tanım 12.5 (F Dağılımı). $U_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$ ve $U_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ bağımsız olsun.

$$F = \frac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2}$$

rastgele değişkeninin dağılımına $(\boldsymbol{\nu_1, \nu_2})$ **serbestlik dereceli** $\boldsymbol{F}$ **dağılımı** denir ve $F \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ yazılır. ν_1'e payın, ν_2'ye paydanın serbestlik derecesi denir.

Yani F, iki "ortalama kare"nin oranıdır: pay ve paydanın beklenen değerleri 1'dir. Serbestlik derecelerinin sırası önemlidir; F_{ν_1,ν_2} ile F_{ν_2,ν_1} genelde farklı dağılımlardır.



Şekil 12.5: Serbestlik dereceleri (2, 10), (5, 10) ve (20, 30) olan F yoğunlukları. Hepsi yalnız pozitif değerler alır ve sağa çarpıktır; serbestlik dereceleri büyüdükçe dağılım 1'in çevresinde toplanır.

Teorem 12.5 (F Dağılımının Yoğunluğu). *$F \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ ise $x > 0$ için*

$$f_F(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \cdot \frac{\nu_1^{\nu_1/2}\,\nu_2^{\nu_2/2}\,x^{\nu_1/2-1}}{(\nu_2+\nu_1 x)^{(\nu_1+\nu_2)/2}},$$

$x \le 0$ için $f_F(x) = 0$'dır.

İspat.
F pozitif değerli olduğundan $x \le 0$ için yoğunluk sıfırdır. $x > 0$ olsun. $U_2 = v > 0$ iken $F \le x$ olayı $U_1 \le \frac{\nu_1 x}{\nu_2} v$ demektir. U_1 ile U_2 bağımsız olduğundan

$$F_F(x) = \int_0^\infty F_{U_1}\left(\frac{\nu_1 x v}{\nu_2}\right) f_{U_2}(v)\,dv.$$

x'e göre türev alırsak (t dağılımındaki gibi türev integrale girer)

$$f_F(x) = \int_0^\infty \frac{\nu_1 v}{\nu_2}\, f_{U_1}\left(\frac{\nu_1 x v}{\nu_2}\right) f_{U_2}(v)\,dv.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İki ki-kare yoğunluğunu yazıp v'nin kuvvetlerini ve üstel çarpanları toplayalım. $\frac{\nu_1 v}{\nu_2}$ çarpanı f_{U_1}'deki $\left(\frac{\nu_1 x v}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2-1}$ ile birleşince $\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} x^{\nu_1/2-1} v^{\nu_1/2}$ verir. Sabitleri

$$K = \frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2} x^{\nu_1/2-1}}{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\,\Gamma(\nu_1/2)\,\Gamma(\nu_2/2)}$$

ile gösterirsek

$$f_F(x) = K \int_0^\infty v^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}-1} e^{-\lambda v}\, dv, \qquad \lambda = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\nu_1 x}{\nu_2}\right) = \frac{\nu_2 + \nu_1 x}{2\nu_2}.$$

Teorem 4.1 (e) ile integral $\Gamma\left(\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\right) \lambda^{-(\nu_1+\nu_2)/2}$'dir ve

$$\lambda^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}} = \frac{2^{(\nu_1+\nu_2)/2}\nu_2^{(\nu_1+\nu_2)/2}}{(\nu_2+\nu_1 x)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}.$$

K ile çarpınca ikinin kuvvetleri sadeleşir ve $\nu_2^{-\nu_1/2}\,\nu_2^{(\nu_1+\nu_2)/2} = \nu_2^{\nu_2/2}$ olur. Geriye iddia edilen formül kalır.
■

Yoğunluk yalnız pozitif eksen üzerindedir ve sağa çarpıktır. $\nu_2 > 2$ için beklenen değer, pay ile paydanın bağımsızlığından ve Önerme 12.2 ispatında bulunan $E(U_2^{-1}) = \frac{1}{\nu_2-2}$ eşitliğinden

$$E(F) = \frac{\nu_2}{\nu_1}\, E(U_1)\, E\left(U_2^{-1}\right) = \frac{\nu_2}{\nu_1} \cdot \nu_1 \cdot \frac{1}{\nu_2 - 2} = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$$

olur ve ν_2 büyüdükçe 1'e yaklaşır. Serbestlik dereceleri birlikte büyüdükçe pay ve payda, büyük sayılar yasası (Teorem 8.1) gereği 1'e yaklaşan ortalamalardır; bu yüzden dağılım 1'in çevresinde toplanır ve biçimi simetrik bir çana benzemeye başlar.
F tanımındaki pay ile paydanın yer değiştirmesi, tablolarda yalnız sağ kuyruk kantillerinin verilmesine izin verir.

Önerme 12.3 (F Değişkeninin Tersi). *$F \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ ise $\dfrac{1}{F} \sim F_{\nu_2,\nu_1}$'dir. Buna göre her $0 < p < 1$ için*

$$F_{\nu_1,\nu_2,\,1-p} = \frac{1}{F_{\nu_2,\nu_1,\,p}}.$$

İspat.
$F = \frac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2}$ ise $\frac{1}{F} = \frac{U_2/\nu_2}{U_1/\nu_1}$'dir; bu, payında $\chi^2_{\nu_2}$, paydasında ondan bağımsız $\chi^2_{\nu_1}$ değişkeni olan orandır ve tanım gereği F_{ν_2,ν_1} dağılımlıdır.
Kantiller için $c = F_{\nu_2,\nu_1,\,p}$ diyelim; $\frac{1}{F} \sim F_{\nu_2,\nu_1}$ olduğundan $P\left(\frac{1}{F} \le c\right) = p$'dir. $F > 0$ ve $c > 0$ olduğundan $\frac{1}{F} \ge c$ ile $F \le \frac{1}{c}$ aynı olaydır ve F sürekli olduğundan

$$P\left(F \le \frac{1}{c}\right) = P\left(\frac{1}{F} \ge c\right) = 1 - p.$$

Demek ki $\frac{1}{c}$, F_{ν_1,ν_2} dağılımının $1-p$ kantilidir.
■

t ile F dağılımları arasında da basit bir bağ vardır.

Önerme 12.4 (t Değişkeninin Karesi). *$T \sim t_\nu$ ise $T^2 \sim F_{1,\nu}$'dir.*

İspat.
$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}}$ yazalım; $Z \sim N(0,1)$ ve $V \sim \chi^2_\nu$ bağımsızdır. Karesini alalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$T^2 = \frac{Z^2}{V/\nu} = \frac{Z^2/1}{V/\nu}.$$

Teorem 12.2 gereği $Z^2 \sim \chi^2_1$*'dir ve* Z^2*,* V*'den bağımsızdır. Tanım gereği* $T^2 \sim F_{1,\nu}$*.*
■

Kitabın sonundaki F tablosu $F_{\nu_1,\nu_2,p}$ kantillerini $p = 0{,}95$, $0{,}975$ ve $0{,}99$ için verir; sütun ν_1, satır ν_2'dir. Sol kuyruk kantilleri Önerme 12.3 ile bulunur.

Örnek 12.13 (F Dağılımında Sağ Kuyruk). $F \sim F_{5,10}$ ise $P(F > 3{,}33)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
F tablosunun $p = 0{,}95$ kısmında $\nu_1 = 5$ sütunu ile $\nu_2 = 10$ satırının kesişiminde $F_{5,10,\,0{,}95} = 3{,}33$ okunur. Buna göre

$$P(F > 3{,}33) = 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$$

■

Örnek 12.14 (F Dağılımında Sol Kuyruk Kantili). $F_{5,10,\,0{,}025}$ kantilini bulunuz.

Çözüm.
Sol kuyruk kantilleri tabloda yoktur. Önerme 12.3 ile $p = 0{,}975$ alınırsa

$$F_{5,10,\,0{,}025} = \frac{1}{F_{10,5,\,0{,}975}}.$$

Serbestlik derecelerinin yer değiştirdiğine dikkat: F tablosunun $p = 0{,}975$ kısmında $\nu_1 = 10$ sütunu ile $\nu_2 = 5$ satırından $F_{10,5,\,0{,}975} = 6{,}62$ okunur. Buna göre

$$F_{5,10,\,0{,}025} = \frac{1}{6{,}62} \approx 0{,}151.$$

Karşılaştırma için $F_{5,10,\,0{,}975} = 4{,}24$'tür; iki kantilin 1'e uzaklıkları çok farklıdır, çünkü dağılım sağa çarpıktır.
■

Örnek 12.15 (İki Ki-kare Değişkeninin Oranı). $U_1 \sim \chi^2_5$ ve $U_2 \sim \chi^2_{10}$ bağımsız olsun. $P\left(\dfrac{U_1}{U_2} \le c\right) = 0{,}95$ olacak biçimde c sayısını bulunuz.

Çözüm.
Oranı F tanımındaki biçime getirelim:

$$F = \frac{U_1/5}{U_2/10} = 2\,\frac{U_1}{U_2} \sim F_{5,10}.$$

Demek ki $\frac{U_1}{U_2} = \frac{F}{2}$ ve $\frac{U_1}{U_2} \le c$ olayı $F \le 2c$ olayıdır. $P(F \le 2c) = 0{,}95$ koşulu $2c = F_{5,10,\,0{,}95} = 3{,}33$ demektir (F tablosu). Buna göre

$$c = \frac{3{,}33}{2} = 1{,}665.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 12.16 (t Tablosu ile F Tablosunun Uyumu). $T \sim t_{10}$ olsun. $P(T^2 \le c) = 0{,}95$ olacak biçimde c sayısını önce t tablosundan, sonra F tablosundan bulunuz.

Çözüm.
t tablosuyla. $T^2 \le c$ olayı $-\sqrt{c} \le T \le \sqrt{c}$ olayıdır. Ortada 0,95 alan kalması için $\sqrt{c} = t_{10,\,0{,}975} = 2{,}228$ olmalıdır (t tablosu). Buradan

$$c = 2{,}228^2 \approx 4{,}964.$$

F tablosuyla. Önerme 12.4 gereği $T^2 \sim F_{1,10}$'dur; dolayısıyla $c = F_{1,10,\,0{,}95} = 4{,}96$ (F tablosu).
İki yol yuvarlama sınırları içinde aynı sonucu verir. Genel olarak $F_{1,\nu,\,1-\alpha} = t^2_{\nu,\,1-\alpha/2}$'dir: t^2'nin sağ kuyruğu, t'nin iki kuyruğundan oluşur.
■

12.4 Normal Örneklemde Örneklem Ortalaması ve Varyansı

Şimdi bu üç ailenin neden önemli olduğunu görelim. $X_1, \ldots, X_n$, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı bir kitleden alınmış bir örneklem olsun. Örneklem ortalaması (Tanım 7.6) ve örneklem varyansı (Tanım 7.7)

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

dir. Bağımsız normallerin doğrusal birleşimi normal olduğundan (Sonuç 5.1, her $a_i = \frac{1}{n}$) örneklem ortalamasının dağılımı tam olarak (Teorem 7.4)

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

dir; bu, normal kitlede merkezi limit teoremine başvurmadan, her n için geçerlidir. Bu kısımda S^2'nin dağılımını bulacağız ve σ bilinmediğinde $\bar{X}$'i standartlaştırmanın yolunu göreceğiz. Önce bir yardımcı sonuç.

Teorem 12.6 (Ki-kare Değişkenlerinin Farkı). *U_1 ile U_2 bağımsız rastgele değişkenler olsun. $U_1 + U_2 \sim \chi^2_n$ ve $U_1 \sim \chi^2_\nu$ $(\nu < n)$ ise*

$$U_2 \sim \chi^2_{n-\nu}.$$

İspat.
$t < \frac{1}{2}$ olsun. Bağımsızlık nedeniyle $E\left(e^{t(U_1+U_2)}\right) = E\left(e^{tU_1}\right)E\left(e^{tU_2}\right)$'dir; sol taraf ile $E(e^{tU_1})$ sonlu ve pozitif olduğundan $E(e^{tU_2})$ de sonludur. Teorem 12.1 ile

$$(1-2t)^{-n/2} = (1-2t)^{-\nu/2}\, M_{U_2}(t).$$

$(1-2t)^{-\nu/2}$ ile bölelim:

$$M_{U_2}(t) = (1-2t)^{-n/2+\nu/2} = (1-2t)^{-(n-\nu)/2}, \qquad t < \frac{1}{2}.$$

Bu, $\chi^2_{n-\nu}$ dağılımının moment üreten fonksiyonudur; teklik teoremi gereği $U_2 \sim \chi^2_{n-\nu}$.
■

Yani bir ki-kare değişkenini iki bağımsız parçaya ayırdığımızda, parçalardan biri ki-kare ise öteki de ki-karedir ve serbestlik dereceleri toplanır. Teoremi uygulayabilmek için parçaların bağımsız olması gerekir; normal örneklemde bu bağımsızlığı sağlayan, aşağıdaki dikkate değer sonuçtur.

Teorem 12.7 (Örneklem Ortalaması ile Örneklem Varyansının Bağımsızlığı). *$X_1, \ldots, X_n$, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı bir kitleden alınmış bir örneklem olsun ($n \ge 2$). O zaman $\bar{X}$ ile $(X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$ sapma vektörü bağımsızdır. Özel olarak $\bar{X}$ ile S^2 bağımsızdır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
İspatta rastgele vektörlerin moment üreten fonksiyonunu kullanacağız. $(Y_1, ..., Y_k)$ vektörü için $M(t_1, ..., t_k) = E\left(e^{t_1 Y_1 + \cdots + t_k Y_k} \right)$ tanımlanır. Tek değişkenli durumdaki gibi bu fonksiyon (sıfırın bir komşuluğunda sonluysa) ortak dağılımı tek türlü belirler. Buradan şu sonuç çıkar: ortak moment üreten fonksiyon, yalnız birinci gruptaki değişkenlere ait t'lere bağlı bir çarpan ile yalnız ikinci gruba ait t'lere bağlı bir çarpanın çarpımına ayrılıyorsa, iki grup bağımsızdır. Bu çok boyutlu teklik sonucunu ispatsız kullanıyoruz.
$D_i = X_i - \bar{X}$ diyelim. $t, s_1, ..., s_n$ gerçel sayılar ve $\bar{s} = \frac{1}{n}\sum s_i$ olsun. Üsteki ifadeyi X_i'lerin doğrusal birleşimi olarak yazalım. $\sum_i s_i \bar{X} = n\bar{s}\,\bar{X} = \bar{s}\sum_i X_i$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{n} s_i D_i = \sum_{i=1}^{n} s_i X_i - \bar{s}\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} (s_i - \bar{s}) X_i$$

ve dolayısıyla

$$t\bar{X} + \sum_{i=1}^{n} s_i D_i = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i, \qquad c_i = \frac{t}{n} + s_i - \bar{s}.$$

X_i'ler bağımsız ve $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı olduğundan

$$\begin{aligned} E\left(e^{\sum c_i X_i} \right) &= \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{c_i X_i} \right) = \prod_{i=1}^{n} e^{\mu c_i + \frac{\sigma^2 c_i^2}{2}} \\ &= \exp\Big(\mu \sum_{i=1}^{n} c_i + \frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \Big). \end{aligned}$$

$\sum_i (s_i - \bar{s}) = 0$ olduğundan iki toplam sadeleşir:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} c_i = t, \\ &\sum_{i=1}^{n} c_i^2 = n \cdot \frac{t^2}{n^2} + \frac{2t}{n} \sum_{i=1}^{n} (s_i - \bar{s}) + \sum_{i=1}^{n} (s_i - \bar{s})^2 \\ &\qquad = \frac{t^2}{n} + \sum_{i=1}^{n} (s_i - \bar{s})^2. \end{aligned}$$

Yerine koyalım:

$$M(t, s_1, ..., s_n) = \exp\Big(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2n} \Big) \cdot \exp\Big(\frac{\sigma^2}{2} \sum_{i=1}^{n} (s_i - \bar{s})^2 \Big).$$

Birinci çarpan yalnız t'ye, ikinci çarpan yalnız $s_1, ..., s_n$'ye bağlıdır. (s'lerin hepsi sıfırken ifade $\bar{X}$'in moment üreten fonksiyonu, $t = 0$ iken sapma vektörününki olur.) Demek ki $\bar{X}$ ile $(D_1, ..., D_n)$ bağımsızdır. $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum D_i^2$ yalnız sapma vektörünün bir fonksiyonu olduğundan $\bar{X}$ ile S^2 de bağımsızdır.
■

İlk bakışta şaşırtıcı bir sonuçtur: S^2, $\bar{X}$ kullanılarak hesaplanır, ama ondan bağımsızdır. Bu özellik normal dağılıma özgüdür. Örneğin üstel bir kitlede büyük bir $\bar{X}$ değeri genellikle büyük sapmalarla birlikte gelir ve iki istatistik bağımlıdır.
Artık ana teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 12.8 (Örneklem Varyansının Dağılımı). *$X_1, ..., X_n$, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı bir kitleden alınmış bir örneklem olsun ($n \geq 2$). O zaman*

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2_{n-1}.$$

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önce cebirsel bir özdeşlik kuralım. Her terimde $X_i - \mu = (X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu)$ yazıp kareyi açalım:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 + 2(\bar{X}-\mu)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X}) + n(\bar{X}-\mu)^2.$$

Ortadaki toplam sıfırdır, çünkü $\sum X_i = n\bar{X}$'tir. σ^2'ye bölünce ve $\frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2} = \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2$ yazınca

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2}_{W} = \underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{U_2} + \underbrace{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}_{U_1}.$$

Şimdi üç terimin dağılımına bakalım.

- *W, bağımsız n standart normalin kareleri toplamıdır; Sonuç 12.1 gereği $W \sim \chi^2_n$.*
- *$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ olduğundan $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ ve Teorem 12.2 gereği $U_1 \sim \chi^2_1$.*
- *U_1 yalnız $\bar{X}$'in, U_2 yalnız S^2'nin fonksiyonudur; Teorem 12.7 gereği U_1 ile U_2 bağımsızdır.*

$W = U_1 + U_2$ olduğundan Teorem 12.6 $\nu = 1$ ile uygulanır:

$$U_2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}.$$

■

Yani sapmaları bilinen μ'den ölçseydik n serbestlik dereceli bir ki-kare değişkeni elde ederdik; μ yerine onun tahmini $\bar{X}$'i kullanmak bir serbestlik derecesi kaybettirir (Tanım 12.2). Teoremden S^2'nin momentleri de hemen çıkar.

Sonuç 12.2 (Normal Örneklemde Örneklem Varyansının Momentleri). *$N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı bir kitleden alınmış $n \geq 2$ hacimli örneklemin varyansı için*

$$E(S^2) = \sigma^2, \qquad \text{Var}\,(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

İspat.
$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ olduğundan Teorem 12.1 ile $E(U) = n-1$ ve $\text{Var}\,(U) = 2(n-1)$'dir. $S^2 = \frac{\sigma^2}{n-1}U$ olduğundan

$$E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n-1}(n-1) = \sigma^2, \qquad \text{Var}\,(S^2) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

■

Birinci eşitlik S^2'nin yansız olduğunu söyler; bu, varyansı sonlu her kitlede doğrudur (Teorem 11.1). İkincisi ise normal kitleye özgüdür: S^2'nin varyansı n büyüdükçe sıfıra gider, yani S^2 büyük örneklemlerde σ^2'ye yakın değerler alır.

Örnek 12.17 (Örneklem Varyansı için Olasılık Sınırları). $N(\mu, 4)$ dağılımlı bir kitleden $n = 10$ hacimli bir örneklem alınıyor. $P(S^2 < a) = 0{,}025$ ve $P(S^2 > b) = 0{,}025$ olacak biçimde a ve b sayılarını bulunuz.

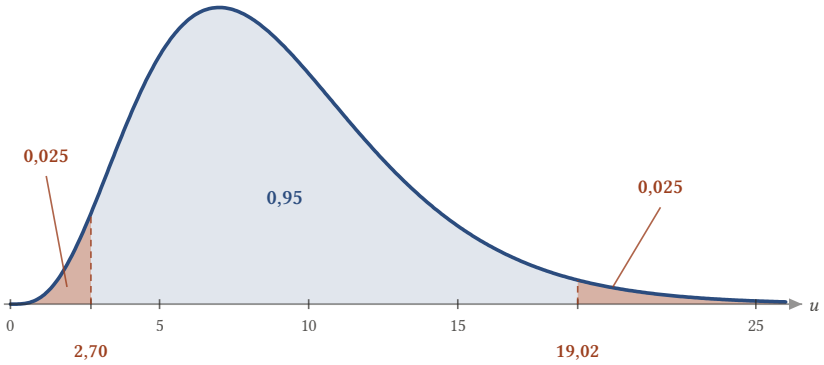
Çözüm.
Teorem 12.8 gereği

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{9S^2}{4} \sim \chi^2_9.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$S^2 < a$ olayı $U < \frac{9a}{4}$ olayıdır. $P(U < \frac{9a}{4}) = 0{,}025$ koşulu $\frac{9a}{4} = \chi^2_{9,\,0{,}025}$ demektir. Benzer biçimde $P(U > \frac{9b}{4}) = 0{,}025$ koşulu $\frac{9b}{4} = \chi^2_{9,\,0{,}975}$ demektir. χ^2 tablosundan $\chi^2_{9,\,0{,}025} = 2{,}70$ ve $\chi^2_{9,\,0{,}975} = 19{,}02$ okunur:

$$a = \frac{4 \cdot 2{,}70}{9} = 1{,}20, \qquad b = \frac{4 \cdot 19{,}02}{9} \approx 8{,}45.$$



Şekil 12.6: χ^2_9 yoğunluğu. 2,70'in solunda ve 19,02'nin sağında 0,025'er alan kalır; aradaki alan 0,95'tir. Dağılım simetrik olmadığından iki kantil 0'a göre simetrik değildir; ayrı ayrı okunur.

Yani kitle varyansı 4 iken, 10 gözlemden hesaplanan örneklem varyansı %95 olasılıkla 1,20 ile 8,45 arasına düşer. Aralık $\sigma^2 = 4$'e göre simetrik değildir ve oldukça geniştir: küçük örneklemlerde S^2 güvenilir bir tahmin değildir.

■

Örnek 12.18 (Bilinen Ortalamayla Varyans Tahmini ile Örneklem Varyansının Karşılaştırılması). $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı bir kitlede μ biliniyor olsun. σ^2'nin iki tahmin edicisini karşılaştırınız:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2, \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Çözüm.
Örnek 12.6 çözümündeki yol, ortalama 0 yerine μ alınarak aynen işler: $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ olduğundan

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2, \qquad \operatorname{Var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

Sonuç 12.2 gereği $E(S^2) = \sigma^2$ ve $\operatorname{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$'dir. İki tahmin edici de yansızdır, ama $\frac{2\sigma^4}{n} < \frac{2\sigma^4}{n-1}$ olduğundan $\hat{\sigma}^2$'nin varyansı daha küçüktür. Yansız bir tahmin edicinin hata kareler ortalaması (Tanım 11.4) varyansına eşit olduğundan bu ölçüte göre $\hat{\sigma}^2$ daha iyidir. Örneğin $\sigma^2 = 4$ ve $n = 10$ için

$$\operatorname{Var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{2 \cdot 16}{10} = 3{,}2, \qquad \operatorname{Var}(S^2) = \frac{2 \cdot 16}{9} \approx 3{,}56.$$

Fark, bir serbestlik derecesinin değeridir: μ'yü bilmek bir gözlem kadar bilgi taşır. μ bilinmiyorsa $\hat{\sigma}^2$ hesaplanamaz ve S^2 kullanılır.

■

12.4.1 Varyans Bilinmediğinde Ortalamanın Standartlaştırılması

$\bar{X}$'i standartlaştırmak için σ'yı bilmek gerekir: $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$. Uygulamada σ çoğu zaman bilinmez ve yerine onun tahmini olan S konur. Bu değişiklik dağılımı değiştirir; paydadaki rastgelelik, normal yerine t dağılımını getirir.

Teorem 12.9 (Normal Örneklemde t İstatistiği). *$X_1, \ldots, X_n$, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı bir kitleden alınmış bir örneklem olsun ($n \geq 2$). O zaman*

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

İspat.
İki yardımcı değişken tanımlayalım:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}, \qquad V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ olduğundan $Z \sim N(0,1)$'dir. Teorem 12.8 gereği $V \sim \chi^2_{n-1}$'dir. Z yalnız $\bar{X}$'in, V yalnız S^2'nin fonksiyonu olduğundan Teorem 12.7 gereği bağımsızdırlar. t dağılımının tanımındaki oranı kuralım; $\frac{V}{n-1} = \frac{S^2}{\sigma^2}$ olduğundan

$$\frac{Z}{\sqrt{V/(n-1)}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{S/\sigma} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cdot \frac{\sigma}{S} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}.$$

Bilinmeyen σ sadeleşti. Tanım 12.3 gereği bu oran t_{n-1} dağılımlıdır.
■

Teoremin gücü, T'nin dağılımının bilinmeyen σ'ya bağlı olmamasıdır: T yalnız μ ve gözlemlerle hesaplanır, dağılımı ise yalnız n'ye bağlıdır. Serbestlik derecesi S^2'den gelir ve $n-1$'dir. Bir sonraki bölümde güven aralığını bu teoremle kuracağız.

Örnek 12.19 (Ortalamanın Örneklem Standart Sapması Cinsinden Yakınlığı). Normal bir kitleden $n = 16$ hacimli bir örneklem alınıyor. $P\left(\mid \bar{X} - \mu \mid \leq cS \right) = 0{,}95$ olacak biçimde c sayısını bulunuz.

Çözüm.
Eşitsizliğin iki tarafını $\frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{S}{4}$ ile bölelim ($S > 0$ olasılık 1 ile):

$$\mid \bar{X} - \mu \mid \leq cS \Leftrightarrow \left| \frac{\bar{X} - \mu}{S/4} \right| \leq 4c \Leftrightarrow \mid T \mid \leq 4c,$$

burada Teorem 12.9 gereği $T \sim t_{15}$'tir. $P(\mid T \mid \leq 4c) = 0{,}95$ koşulu $4c = t_{15,\,0{,}975} = 2{,}131$ demektir (t tablosu). Buna göre

$$c = \frac{2{,}131}{4} \approx 0{,}533.$$

Yani 16 gözlemlik bir örneklemde $\bar{X}$, %95 olasılıkla kitle ortalamasına yarım örneklem standart sapmasından ($0{,}533\,S$) daha yakındır.
■

Örnek 12.20 (Bir Ortalama İddiasının Örneklemle Uyumu). Bir kitlenin normal dağılımlı ve ortalamasının $\mu = 50$ olduğu ileri sürülüyor. 16 gözlemlik bir örneklemde $\bar{x} = 53$ ve $s = 5$ bulunuyor. $\mu = 50$ ise T istatistiğinin bu kadar ya da daha büyük bir değer alma olasılığı hakkında ne söylenebilir?

Çözüm.
$\mu = 50$ ise Teorem 12.9 gereği $T = \frac{\bar{X}-50}{S/4} \sim t_{15}$'tir. Gözlenen değer

$$t = \frac{53 - 50}{5/4} = \frac{3}{1{,}25} = 2{,}4.$$

t tablosunun $\nu = 15$ satırında $t_{15,\,0{,}975} = 2{,}131$ ve $t_{15,\,0{,}99} = 2{,}602$'dir. $2{,}131 < 2{,}4 < 2{,}602$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$0{,}01 < P(T \geq 2{,}4) < 0{,}025.$$

(Bilgisayarla hesaplanan kesin değer yaklaşık $0{,}015$'tir.) Yani $\mu = 50$ doğru olsaydı böyle bir örneklem yüz denemede ancak bir iki kez çıkardı. Bu, iddiadan kuşkulanmak için güçlü bir nedendir; bu tür akıl yürütmeyi hipotez testlerinde sistemli hâle getireceğiz.
■

Bölümün sonuçlarını bir arada görelim. Bağımsız bileşenler için:

Kurulum	Dağılım
$Z \sim N(0,1)$	$Z^2 \sim \chi^2_1$
$Z_1, \ldots, Z_n$ bağımsız $N(0,1)$	$Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2_n$
$Z \sim N(0,1)$, $V \sim \chi^2_\nu$	$\dfrac{Z}{\sqrt{V/\nu}} \sim t_\nu$
$U_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$, $U_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$	$\dfrac{U_1/\nu_1}{U_2/\nu_2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$

Normal kitleden alınmış n hacimli örneklem için ise $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ ve $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$'dir. Bu istatistiklerin her birinin dağılımı bilinmeyen parametrelere bağlı değildir; bir sonraki bölümde, Ortalama İçin Aralık Tahmini bölümünde, bu özellikten yararlanarak kitle ortalaması için güven aralıkları kuracağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

13. Ortalama için Aralık Tahmini

Bir parametrenin en iyi tahmin edicisini bulsak bile, bir örneklemden hesaplanan tahmin gerçek değere neredeyse hiçbir zaman tam olarak eşit olmaz. θ yerine $\hat{\theta}$ kullanmakla yaptığımız $\mid \hat{\theta} - \theta \mid$ hatasını bilemeyiz, ama yüksek bir olasılıkla ne kadar büyük olabileceğini söyleyebiliriz. Bu yüzden çoğu zaman tek bir sayı yerine, parametreyi yüksek bir olasılıkla kapsayan bir aralık vermek daha kullanışlıdır. Bu yönteme parametrenin **aralık tahmini** denir. Bu bölümde aralık tahmininin temel kavramlarını tanıyacak ve Örneklem Dağılımları bölümündeki sonuçlarla kitle ortalaması için güven aralıkları kuracağız.

13.1 Güven Aralığı ve Güven Düzeyi

Aralığın uçları örneklemden hesaplanır; dolayısıyla uçlar birer istatistiktir ve örneklemden örnekleme değişir. Tanım bu rastgele aralığın parametreyi kapsama olasılığı üzerine kuruludur.

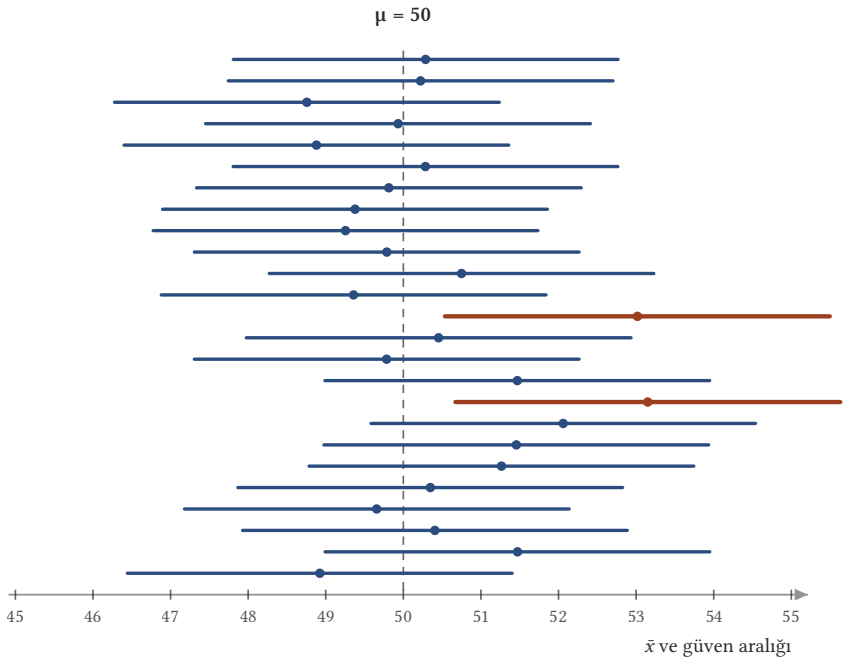
Tanım 13.1 (Güven Aralığı ve Güven Düzeyi). $X_1, \ldots, X_n$, θ parametreli bir kitleden alınmış bir örneklem ve $0 < \alpha < 1$ olsun. $L_1 = L_1(X_1, \ldots, X_n)$ ve $L_2 = L_2(X_1, \ldots, X_n)$ istatistikleri her θ için

$$P\left(L_1 \leq \theta \leq L_2 \right) = 1 - \alpha$$

koşulunu sağlıyorsa $[L_1, L_2]$ aralığına θ için $\boldsymbol{\%100(1-\alpha)}$ **düzeyli güven aralığı** denir. $1 - \alpha$ sayısına **güven düzeyi** (güven katsayısı), α'ya da **hata miktarı** denir.

Yani güven düzeyi, aralığı kurma yönteminin parametreyi yakalama olasılığıdır. α genellikle 0,01, 0,05 ya da 0,10 gibi küçük bir sayı seçilir ve güven düzeyi yüzde olarak söylenir: $\alpha = 0{,}05$ için %95 güven aralığı. Aralıkta rastgele olan şey uçlardır, θ değil: θ bilinmeyen ama sabit bir sayıdır. Aynı kitleden çok sayıda örneklem çekip her birinden bir %95 güven aralığı kursaydık, bu aralıkların uzun vadede yaklaşık %95'i θ'yı içerirdi. Örneğin %99 güven düzeyinde, 100 örneklemden kurulan 100 aralığın yaklaşık 99'u θ'yı içerir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.1: N(50, 16) kitlesinden çekilen 25 ayrı örneklemin (her biri n = 10) her birinden kurulan %95 güven aralığı. Nokta örneklem ortalamasını gösterir. Aralıkların 23 tanesi μ = 50'yi içeriyor, 2 tanesi (turuncu) içermiyor. Uzun vadede aralıkların yaklaşık %95'i μ'yü yakalar.

İyi bir aralık tahmininde iki istek çatışır: aralığın olabildiğince dar olmasını (bilgi verici olsun diye) ve parametreyi kapsama olasılığının olabildiğince yüksek olmasını isteriz. Güven düzeyini artırmak aralığı genişletir; aynı güven düzeyinde aralığı daraltmanın yolu ise daha çok gözlem toplamaktır. Bu dengeyi aşağıdaki formüllerde açıkça göreceğiz.

Örnek 13.1 (Bir Güven Aralığının Doğru Yorumu). Bir paketleme makinesinin doldurduğu paketlerin ortalama ağırlığı μ için bir örneklemden %95 güven aralığı [494,38; 502,22] gram bulunuyor. "μ'nün 494,38 ile 502,22 arasında olma olasılığı 0,95'tir" cümlesi doğru mudur? Doğru yorum nedir?

Çözüm.
Cümle, tanımın söylediği şey değildir. μ sabit bir sayıdır; 494,38 ve 502,22 de artık sabit sayılardır. Sabit bir sayının sabit bir aralıkta olup olmaması rastgele bir olay değildir: μ ya bu aralıktadır ya da değildir, ama hangisinin doğru olduğunu bilmiyoruz.
0,95 olasılığı, veri toplanmadan önceki rastgele aralık $[L_1, L_2]$ hakkındadır: $P(L_1 \leq \mu \leq L_2) = 0{,}95$. Doğru yorum şöyledir: "Bu aralık, kullanıldığı her 100 durumdan yaklaşık 95'inde μ'yü yakalayan bir yöntemle kurulmuştur." Yukarıdaki şekilde 25 aralığın 23'ü μ'yü içeriyor; tek bir aralığa bakarak onun o 23'ten biri mi, yoksa ıskalayan 2'den biri mi olduğunu söyleyemeyiz. Güvenimiz tek aralığa değil, yönteme duyulan güvendir.
■

Güven aralığı kurmanın genel yolu hep aynıdır: içinde bilinmeyen parametreyi taşıyan ve dağılımı parametreye bağlı olmayan bir büyüklük bulunur, bu büyüklük dağılımının iki kantili arasına sıkıştırılır, sonra eşitsizlikler parametre için çözülür. Bu bölümde yöntemi kitle ortalaması μ'ye, önce kitle varyansı σ^2 bilinirken, sonra bilinmezken uygulayacağız. Aynı yöntemle Varyans ve İki Kitle İçin Aralık Tahmini bölümünde σ^2, iki varyansın oranı σ_1^2/σ_2^2 ve iki ortalamanın farkı $\mu_1 - \mu_2$ için, Oran için Aralık Tahmini bölümünde de oran p ve iki oranın farkı $p_1 - p_2$ için aralıklar kuracağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

13.2 Varyans Bilindiğinde Kitle Ortalaması İçin Güven Aralığı

Kitle ortalamasının doğal tahmin edicisi örneklem ortalaması $\bar{X}$'tir; güven aralığını onun dağılımı üzerine kuracağız. Kitle $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlıysa her n için tam olarak

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

dir (Teorem 7.4). Kitle normal değilse ama merkezi limit teoreminin (Teorem 8.5) koşullarını sağlıyorsa (varyansı sonlu ve pozitif, moment üreten fonksiyonu 0'ın bir komşuluğunda var), bu teorem aynı sonucun büyük n için yaklaşık olarak geçerli olduğunu söyler. Her iki durumda da standartlaştırılmış ortalama

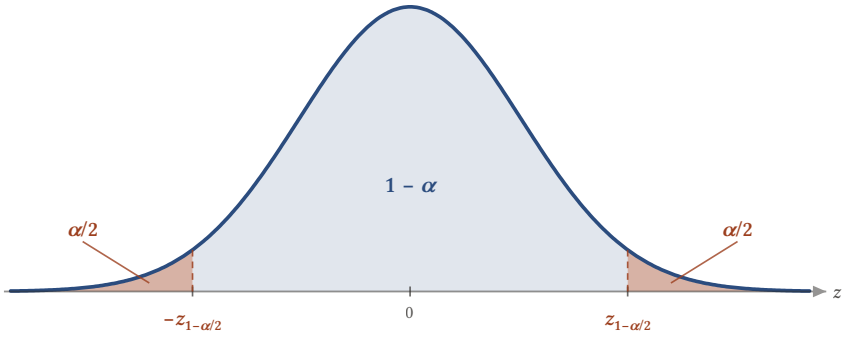
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

(tam ya da yaklaşık olarak) standart normal dağılımlıdır. Z bilinmeyen μ'yü içerir ama dağılımı μ'ye bağlı değildir; aradığımız büyüklük budur. Kantiller için standart normal kantil gösterimini kullanacağız (Tanım 5.1): z_p, solunda p alan kalan noktadır ve simetri nedeniyle $z_{1-p} = -z_p$'dir. Özel olarak $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$.

Teorem 13.1 (Varyans Bilindiğinde Ortalama İçin Güven Aralığı). *$X_1, \ldots, X_n$, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı bir kitleden alınmış bir örneklem ve σ bilinen bir sayı olsun. $0 < \alpha < 1$ için*

$$\left[\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

aralığı μ için $\%100(1-\alpha)$ düzeyli bir güven aralığıdır. Kitle normal değilse ama Teorem 8.5 koşullarını sağlıyorsa aralık, büyük n için yaklaşık olarak $\%100(1-\alpha)$ düzeylidir.



Şekil 13.2: Standart normal eğrisinin ortasında 1 − α alan bırakan iki nokta: −z(1−α/2) ve z(1−α/2). Her kuyrukta α/2 alan kalır. Z = (X̄ − μ)/(σ/√n) bu iki nokta arasına 1 − α olasılıkla düşer.

İspat.
Kısaltma için $c = z_{1-\alpha/2}$ diyelim. $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ olduğundan ve Z sürekli olduğundan

$$P(-c \le Z \le c) = \Phi(c) - \Phi(-c) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha;$$

burada $\Phi(-c) = \Phi(z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$ kullanıldı. Şimdi olayı μ için çözelim. $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} > 0$ ile çarpmak eşitsizlikleri korur:

$$-c \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le c \Leftrightarrow -c\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X} - \mu \le c\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Her tarafı -1 ile çarpıp (eşitsizlikler yön değiştirir) $\bar{X}$ ekleyelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$-c\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \bar{X}-\mu \le c\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \bar{X}-c\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}+c\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

İki olay aynı olduğundan olasılıkları da aynıdır:

$$P\left(\bar{X}-z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X}+z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha.$$

Uçlar yalnız örneklemden ve bilinen σ'dan hesaplanan istatistiklerdir; Tanım 13.1 gereği aralık $\%100(1-\alpha)$ düzeyli bir güven aralığıdır. Kitle normal değilse $P(-c \le Z \le c)$, merkezi limit teoremi gereği $n \to \infty$ iken $1-\alpha$'ya yakınsar; aynı çözüm adımları yaklaşık sonucu verir.
■

Yani aralık, $\bar{X}$'in iki yanına $z_{1-\alpha/2}$ tane standart hata ($\sigma_{\bar{X}}=\sigma/\sqrt{n}$, Tanım 7.10) eklenerek kurulur ve $\bar{X}$'e göre simetriktir. Sık kullanılan güven düzeylerinin kantilleri standart normal tablosundan okunur:

Güven düzeyi $1-\alpha$	$\alpha/2$	$z_{1-\alpha/2}$
%90	0,05	1,645
%95	0,025	1,96
%99	0,005	2,576

Örneğin %95 için tabloda $P(0 \le Z \le z)=0{,}4750$ aranır ve $z=1{,}96$'da bulunur, çünkü $P(Z \le 1{,}96)=0{,}5+0{,}4750=0{,}975$'tir.
Aralığın uzunluğu, hangi büyüklüğün aralığı nasıl etkilediğini açıkça gösterir.

Önerme 13.1 (Güven Aralığının Uzunluğu). *Teorem 13.1 içindeki aralığın uzunluğu*

$$L=2\,z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

dir. Buna göre, öteki büyüklükler sabitken:
1. σ küçüldükçe aralık daralır; L, σ ile doğru orantılıdır.
2. n büyüdükçe aralık daralır; L, $\sqrt{n}$ ile ters orantılıdır.
3. Güven düzeyi $1-\alpha$ arttıkça aralık genişler.

İspat.
Uzunluk üst uç eksi alt uçtur:

$$L=\left(\bar{X}+z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)-\left(\bar{X}-z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\,z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

İlk iki iddia formülden doğrudan okunur. Üçüncüsü için: $1-\alpha$ artarsa α azalır ve $1-\frac{\alpha}{2}$ artar. Φ kesin artan olduğundan kantil $z_{1-\alpha/2}$ de artar ve L büyür.
■

Uzunluk $\bar{X}$'e bağlı değildir; yani aralığın ne kadar geniş olacağı, veri toplanmadan önce bilinir. Bu, istenen bir kesinliği sağlamak için kaç gözlem gerektiğini önceden hesaplamamızı sağlar. Bunun için aralığın yarısına bir ad verelim.

Tanım 13.2 (Hata Payı). Bir güven aralığı $\bar{X} \mp E$ biçimindeyse, aralığın yarı uzunluğu olan E sayısına aralığın **hata payı** denir. Teorem 13.1 içindeki aralık için

$$E=z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Yani hata payı, belirtilen güven düzeyinde $\bar{X}$'in μ'den en çok ne kadar uzaklaşabileceğini söyler: $|\,\bar{X}-\mu\,| \le E$ olayının olasılığı $1-\alpha$'dır. İstenen bir E_0 sınırı için $E \le E_0$ koşulu $\sqrt{n} \ge \frac{z_{1-\alpha/2}\,\sigma}{E_0}$, yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\,\sigma}{E_0} \right)^2$$

demektir; n bu koşulu sağlayan en küçük tam sayı seçilir.

Varyans bilindiğinde güven aralığı üç adımda

1. **Kantili bul.** Güven düzeyinden α'yı belirleyin ve standart normal tablosundan $z_{1-\alpha/2}$'yi okuyun.
2. **Standart hatayı hesapla.** $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
3. **Aralığı yaz.** $\bar{x} \mp z_{1-\alpha/2}\,\sigma_{\bar{X}}$; sınırları verinin duyarlığına uygun yuvarlayın.

Sıradaki üç örnek aynı veriyi kullanır: bir makinenin doldurduğu paketlerin ağırlığı standart sapması $\sigma = 10$ gram olan normal dağılıma uyuyor. Rastgele seçilen $n = 25$ paketin ortalama ağırlığı $\bar{x} = 498{,}3$ gram bulunuyor. Standart hata

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2 \ \text{ gram}\,.$$

Örnek 13.2 (Paket Ağırlığı için Yüzde Doksan Beş Güven Aralığı). Paket ağırlıkları $N(\mu, 10^2)$ dağılımlı, $n = 25$ ve $\bar{x} = 498{,}3$ gram ise μ için %95 güven aralığını bulunuz.

Çözüm.
Kantil. $1-\alpha = 0{,}95$ için $\alpha = 0{,}05$, $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$ ve tablodan $z_{0{,}975} = 1{,}96$.
Standart hata. $\sigma_{\bar{X}} = 2$.
Aralık. Hata payı $1{,}96 \cdot 2 = 3{,}92$ olduğundan

$$\left[\, 498{,}3 - 3{,}92;\, 498{,}3 + 3{,}92 \,\right] = \left[\, 494{,}38;\, 502{,}22 \,\right].$$

Paketlerin ortalama ağırlığı %95 güvenle 494,38 ile 502,22 gram arasındadır. Hedef ağırlık 500 gram ise bu veri, makinenin hedeften saptığına işaret etmez: 500 aralığın içindedir.
■

Örnek 13.3 (Paket Ağırlığı için Yüzde Doksan Güven Aralığı). Paket ağırlıkları $N(\mu, 10^2)$ dağılımlı, $n = 25$ ve $\bar{x} = 498{,}3$ gram ise μ için %90 güven aralığını bulunuz.

Çözüm.
$1-\alpha = 0{,}90$ için $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$ ve tablodan $z_{0{,}95} = 1{,}645$. Standart hata 2 olduğundan hata payı $1{,}645 \cdot 2 = 3{,}29$'dur:

$$\left[\, 498{,}3 - 3{,}29;\, 498{,}3 + 3{,}29 \,\right] = \left[\, 495{,}01;\, 501{,}59 \,\right].$$

Aralık %95 aralığından dardır: daha az güven karşılığında daha kesin bir sonuç elde ettik.
■

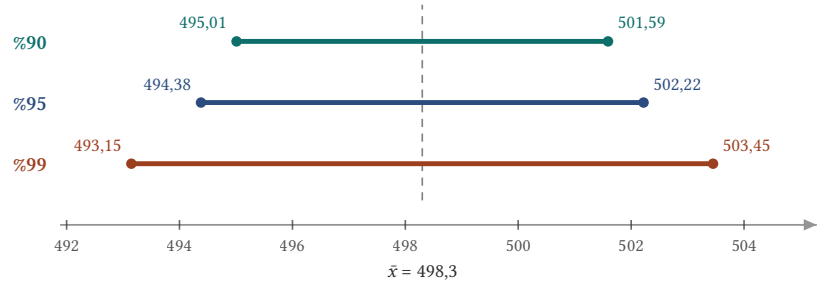
Örnek 13.4 (Paket Ağırlığı için Yüzde Doksan Dokuz Güven Aralığı). Paket ağırlıkları $N(\mu, 10^2)$ dağılımlı, $n = 25$ ve $\bar{x} = 498{,}3$ gram ise μ için %99 güven aralığını bulunuz ve üç güven düzeyinin aralıklarını karşılaştırınız.

Çözüm.
$1-\alpha = 0{,}99$ için $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}995$ ve tablodan $z_{0{,}995} = 2{,}576$. Hata payı $2{,}576 \cdot 2 = 5{,}152$'dir:

$$\left[\, 498{,}3 - 5{,}152;\, 498{,}3 + 5{,}152 \,\right] \approx \left[\, 493{,}15;\, 503{,}45 \,\right].$$

Üç aralığın uzunlukları $2 \cdot 3{,}29 = 6{,}58$, $2 \cdot 3{,}92 = 7{,}84$ ve $2 \cdot 5{,}152 \approx 10{,}30$ gramdır. Güveni %95'ten %99'a çıkarmak aralığı $\frac{2{,}576}{1{,}96} \approx 1{,}31$ kat uzatır (Önerme 13.1).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.3: Aynı örneklemden (n = 25, σ = 10, x̄ = 498,3) kurulan %90, %95 ve %99 güven aralıkları. Güven düzeyi arttıkça aralık genişler; üçü de x̄'nin çevresinde simetriktir.

■

Örnek 13.5 (İstenen Kesinlik için Gereken Örneklem Hacmi). Paket ağırlıklarının standart sapması $\sigma = 10$ gramdır. μ için %95 güven aralığının yarı uzunluğunun en çok 2 gram olması için en az kaç paket tartılmalıdır?

Çözüm.
Yarı uzunluk $E = z_{0,975}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}}$'dir. $E \le 2$ koşulu

$$\sqrt{n} \ge \frac{1{,}96 \cdot 10}{2} = 9{,}8 \quad \Rightarrow \quad n \ge 9{,}8^2 = 96{,}04$$

demektir. n tam sayı olduğundan en az $n = 97$ paket tartılmalıdır.
Karşılaştırma için: 25 paketle yarı uzunluk 3,92 gramdı (Örnek 13.2). Yarı uzunluğu yaklaşık yarıya indirmek için örneklemi yaklaşık dört katına çıkarmak gerekti; çünkü uzunluk $\sqrt{n}$ ile ters orantılıdır. Aynı kesinliği %99 güvenle istersek $n \ge \left(\frac{2{,}576 \cdot 10}{2}\right)^2 \approx 165{,}9$, yani $n = 166$ gerekir.
■

Kitle normal olmadığında da, örneklem büyükse aynı aralık yaklaşık olarak kullanılır.

Örnek 13.6 (Ampul Ömrü için Büyük Örneklem Aralığı). Bir fabrikanın ürettiği ampullerin ömrünün dağılımı bilinmiyor, ancak standart sapmasının $\sigma = 40$ saat olduğu önceki üretimlerden biliniyor. Rastgele seçilen 64 ampulün ortalama ömrü $\bar{x} = 780$ saat bulunuyor. Ortalama ömür μ için %95 güven aralığını bulunuz.

Çözüm.
Kitlenin dağılımı normal olmayabilir; ama $n = 64$ büyük olduğundan merkezi limit teoremi gereği $\bar{X}$ yaklaşık $N\left(\mu, \frac{40^2}{64}\right)$ dağılımlıdır ve Teorem 13.1 içindeki aralık yaklaşık olarak kullanılabilir. Standart hata

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{40}{\sqrt{64}} = \frac{40}{8} = 5 \ \text{ saat},$$

hata payı $1{,}96 \cdot 5 = 9{,}8$ saattir. Buna göre yaklaşık %95 güven aralığı

$$\left[\, 780 - 9{,}8;\, 780 + 9{,}8 \,\right] = \left[\, 770{,}2;\, 789{,}8 \,\right] \ \text{ saattir.}$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Varyans Bilinmediğinde Kitle Ortalaması İçin Güven Aralığı

Uygulamada kitle varyansı çoğu zaman bilinmez. Doğal çözüm, σ^2 yerine onun yansız tahmin edicisi S^2'yi, σ yerine de S'yi kullanmaktır. Ancak Z'deki σ yerine S konunca elde edilen

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

artık standart normal dağılımlı değildir. Normal bir kitlede $T \sim t_{n-1}$'dir (Teorem 12.9). T de bilinmeyen μ'yü içerir ve dağılımı ne μ'ye ne de σ'ya bağlıdır; güven aralığını bu kez onunla kuracağız. Kantiller için t kantil gösterimini kullanacağız (Tanım 12.4): $P(T \le t_{\nu,\,p}) = p$ ve simetri nedeniyle $t_{\nu,\,\alpha/2} = -t_{\nu,\,1-\alpha/2}$.

Teorem 13.2 (Varyans Bilinmediğinde Ortalama İçin Güven Aralığı). *$X_1, \ldots, X_n$, $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı bir kitleden alınmış bir örneklem ($n \ge 2$) ve σ bilinmiyor olsun. $0 < \alpha < 1$ için*

$$\left[\bar{X} - t_{n-1,\,1-\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + t_{n-1,\,1-\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$

aralığı μ için $\%100(1-\alpha)$ düzeyli bir güven aralığıdır.

> ***İspat.***
> *Kısaltma için $c = t_{n-1,\,1-\alpha/2}$ diyelim. $T \sim t_{n-1}$ sürekli ve 0'a göre simetrik olduğundan*
>
> $$P(-c \le T \le c) = P(T \le c) - P(T < -c) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha.$$
>
> *$S > 0$ olasılık 1 ile doğrudur, dolayısıyla $\frac{S}{\sqrt{n}} > 0$ ile çarpmak eşitsizlikleri korur. Teorem 13.1 ispatındaki adımlar σ yerine S ile aynen tekrarlanır:*
>
> $$-c \le \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \le c \Leftrightarrow \bar{X} - c\,\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + c\,\frac{S}{\sqrt{n}}.$$
>
> *İki olayın olasılıkları eşittir ve uçlar yalnız örneklemden hesaplanır; aralık $\%100(1-\alpha)$ düzeyli bir güven aralığıdır.*
> ■

Yani biçim aynıdır, yalnız iki şey değişir: σ yerine S, z kantili yerine t_{n-1} kantili gelir. t dağılımının kuyrukları daha kalın olduğundan $t_{n-1,\,1-\alpha/2} > z_{1-\alpha/2}$'dir. Bu, σ'yı bilmemenin bedelidir: aynı güven düzeyi için aralık daha geniş olur.

Örnek 13.7 (Bardak Hacmi için t Aralığı). Bir kahve makinesinin doldurduğu bardakların hacmi normal dağılıma uyuyor; ortalaması da varyansı da bilinmiyor. Rastgele seçilen 10 bardağın hacimleri (mL) şöyle ölçülüyor:

$$198,\ 203,\ 201,\ 197,\ 205,\ 199,\ 202,\ 200,\ 196,\ 204.$$

Ortalama hacim μ için $\%95$ güven aralığını bulunuz.

> **Çözüm.**
> *Örneklem ortalaması.* Gözlemlerin toplamı 2005 olduğundan $\bar{x} = \frac{2005}{10} = 200{,}5$.
> *Örneklem varyansı.* Ortalamadan sapmalar sırasıyla
>
> $$-2{,}5;\ 2{,}5;\ 0{,}5;\ -3{,}5;\ 4{,}5;\ -1{,}5;\ 1{,}5;\ -0{,}5;\ -4{,}5;\ 3{,}5$$
>
> dir (toplamları 0). Karelerinin toplamı
>
> $$\begin{aligned} &6{,}25 + 6{,}25 + 0{,}25 + 12{,}25 + 20{,}25 \\ &\quad + 2{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25 + 20{,}25 + 12{,}25 = 82{,}5 \end{aligned}$$
>
> olduğundan

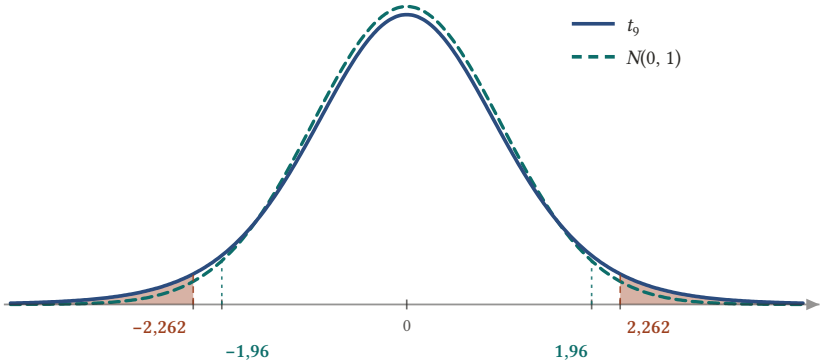
 CC BY-NC-SA 4.0

$$s^2 = \frac{82{,}5}{10-1} \approx 9{,}167, \qquad s \approx 3{,}028.$$

Kantil. σ bilinmediği ve kitle normal olduğu için Teorem 13.2 kullanılır. Serbestlik derecesi $n-1 = 9$'dur ve t tablosundan $t_{9,\,0{,}975} = 2{,}262$.
Aralık. Standart hatanın tahmini $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}028}{\sqrt{10}} \approx 0{,}9574$, hata payı $2{,}262 \cdot 0{,}9574 \approx 2{,}17$'dir:

$$\left[\, 200{,}5 - 2{,}17;\, 200{,}5 + 2{,}17 \,\right] = \left[\, 198{,}33;\, 202{,}67 \,\right] \ \text{mL} \ .$$

σ'nın 3,028 olduğu biliniyor olsaydı $z_{0{,}975} = 1{,}96$ ile hata payı $1{,}96 \cdot 0{,}9574 \approx 1{,}88$ olurdu. t aralığının daha geniş olmasının nedeni aşağıdaki şekilde görülüyor.



Şekil 13.4: t_9 yoğunluğu (düz) ve standart normal yoğunluk (kesikli). Her iki kuyrukta 0,025 alan bırakan noktalar t_9 için ±2,262, standart normal için ±1,96'dır. Kalın kuyruklar yüzünden t aralığı daha geniştir.

■

Sıradaki iki örnek Örneklem Dağılımları bölümündeki veriyi kullanır (Örnek 12.20): normal bir kitleden alınan $n = 16$ gözlemlik örneklemde $\bar{x} = 53$ ve $s = 5$ bulunmuştu. Standart hatanın tahmini $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{5}{4} = 1{,}25$'tir ve serbestlik derecesi 15'tir.

Örnek 13.8 (On Altı Gözlemle Yüzde Doksan Beş t Aralığı). Normal bir kitleden alınan $n = 16$ gözlemlik örneklemde $\bar{x} = 53$ ve $s = 5$ ise μ için %95 güven aralığını bulunuz. $\mu = 50$ değeri bu aralıkta mıdır?

Çözüm.
t tablosundan $t_{15,\,0{,}975} = 2{,}131$. Hata payı $2{,}131 \cdot 1{,}25 \approx 2{,}66$'dır:

$$\left[\, 53 - 2{,}66;\, 53 + 2{,}66 \,\right] = \left[\, 50{,}34;\, 55{,}66 \,\right] .$$

50 bu aralığın dışındadır. Bu, Örnek 12.20 çözümünde bulduğumuz sonuçla uyumludur: $\mu = 50$ iken T'nin 2,4 ya da daha büyük olma olasılığı 0,025'ten küçüktü.
■

Örnek 13.9 (On Altı Gözlemle Yüzde Doksan Dokuz t Aralığı). Normal bir kitleden alınan $n = 16$ gözlemlik örneklemde $\bar{x} = 53$ ve $s = 5$ ise μ için %99 güven aralığını bulunuz. $\mu = 50$ değeri bu aralıkta mıdır?

Çözüm.
t tablosundan $t_{15,\,0{,}995} = 2{,}947$. Hata payı $2{,}947 \cdot 1{,}25 \approx 3{,}68$'dir:

$$\left[\, 53 - 3{,}68;\, 53 + 3{,}68 \,\right] = \left[\, 49{,}32;\, 56{,}68 \,\right] .$$

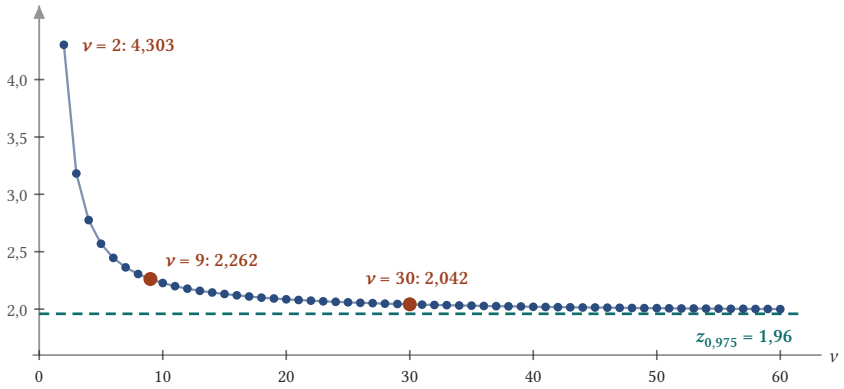
 CC BY-NC-SA 4.0

Bu kez 50 aralığın içindedir. Aynı veri, %95 düzeyinde $\mu = 50$ ile uyumsuz, %99 düzeyinde ise uyumlu görünüyor: daha yüksek güven, daha geniş ve dolayısıyla daha "hoşgörülü" bir aralık demektir.
■

13.4 Büyük Örneklemlerde Aralık

Serbestlik derecesi büyüdükçe t dağılımı standart normale yaklaşır (Önerme 12.2). Bu, kantillerin de yaklaştığı anlamına gelir; dolayısıyla büyük örneklemlerde t kantili yerine z kantili kullanılabilir.

Önerme 13.2 (t Kantillerinin Normal Kantillere Yakınsaması). *Her $0 < p < 1$ için $\nu \to \infty$ iken $t_{\nu,p} \to z_p$'dir.*



Şekil 13.5: Serbestlik derecesine göre t(ν; 0,975) kantilleri. ν küçükken kantil 1,96'dan belirgin biçimde büyüktür; ν = 30 civarında fark 0,1'in altına iner ve ν büyüdükçe kantiller z(0,975) = 1,96'ya yaklaşır.

İspat.
F_ν, t_ν dağılımının dağılım fonksiyonu olsun. Önce her x için $F_\nu(x) \to \Phi(x)$ olduğunu gösterelim. Önerme 12.2 (4) ispatında $f_\nu(t) = c_\nu\, g_\nu(t)$, $g_\nu(t) \to e^{-t^2/2}$, $c_\nu \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ve $\nu \geq 2$ için $g_\nu(t) \leq \frac{1}{1+t^2/2}$ bulunmuştu. c_ν yakınsak olduğundan sınırlıdır; dolayısıyla f_ν, bütün doğru üzerinde integrali sonlu olan bir fonksiyonla sınırlanır ve $f_\nu(t) \to \varphi(t)$'dir. Baskın yakınsaklık teoremiyle

$$F_\nu(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\nu(t)\,dt \to \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt = \Phi(x).$$

Şimdi $\varepsilon > 0$ verilsin. Φ kesin artan olduğundan $\Phi(z_p - \varepsilon) < p < \Phi(z_p + \varepsilon)$'dir. Yukarıdaki yakınsaklık gereği bir ν_0'dan sonra $F_\nu(z_p - \varepsilon) < p < F_\nu(z_p + \varepsilon)$ olur. F_ν sürekli ve kesin artan olduğundan $F_\nu(t_{\nu,p}) = p$ eşitliği $z_p - \varepsilon < t_{\nu,p} < z_p + \varepsilon$ verir. ε keyfi olduğundan $t_{\nu,p} \to z_p$.
■

Şekil, yakınsamanın ne kadar hızlı olduğunu gösteriyor: $t_{30,\,0{,}975} = 2{,}042$ ile $z_{0{,}975} = 1{,}96$ arasındaki fark yalnız 0,08'dir; $\nu = 100$ için $t_{100,\,0{,}975} = 1{,}984$'tür. Bu yüzden uygulamada genel kural şudur: örneklem hacmi $n > 30$ ise σ bilinmese de $t_{n-1,\,1-\alpha/2}$ yerine $z_{1-\alpha/2}$ kullanılabilir ve yaklaşık güven aralığı

$$\bar{X} \mp z_{1-\alpha/2}\,\frac{S}{\sqrt{n}}$$

olur. Büyük örneklemde kitlenin normal olması da gerekmez: merkezi limit teoremi $\bar{X}$'i yaklaşık normal yapar. Ayrıca S^2, σ^2'nin tutarlı bir tahmin edicisidir (Tanım 11.6); büyük n'de S/σ oranı 1'e yakın olduğundan $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ de yaklaşık $N(0,1)$ dağılımlıdır. Bu, ispatını vermediğimiz bir yaklaşım kuralıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 13.10 (Büyük Örneklemde Varyans Bilinmeden Aralık). Bir kitleden alınan $n = 100$ gözlemlik örneklemde $\bar{x} = 12{,}4$ ve $s = 2{,}5$ bulunuyor. Kitle ortalaması için yaklaşık %95 güven aralığını bulunuz.

> **Çözüm.**
> $n = 100 > 30$ olduğundan z kantili kullanılabilir: $z_{0{,}975} = 1{,}96$. Standart hatanın tahmini $\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}5}{10} = 0{,}25$, hata payı $1{,}96 \cdot 0{,}25 = 0{,}49$'dur:
>
> $$\left[\, 12{,}4 - 0{,}49;\, 12{,}4 + 0{,}49 \,\right] = \left[\, 11{,}91;\, 12{,}89 \,\right].$$
>
> Kitle normal olsaydı ve t kantili kullanılsaydı, $t_{99,\,0{,}975} \approx 1{,}984$ ile hata payı $1{,}984 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}496$ ve aralık yaklaşık $[11{,}90;\, 12{,}90]$ olurdu. Fark ikinci ondalık basamakta kalır.
> ■

Hangi aralığın kullanılacağı iki soruya bağlıdır: σ biliniyor mu ve örneklem büyük mü?

Durum	Güven aralığı	Kantil
Kitle normal, σ biliniyor	$\bar{X} \mp z_{1-\alpha/2}\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	kesin
Kitle normal, σ bilinmiyor	$\bar{X} \mp t_{n-1,\,1-\alpha/2}\,\dfrac{S}{\sqrt{n}}$	kesin
Kitle herhangi, $n > 30$, σ biliniyor	$\bar{X} \mp z_{1-\alpha/2}\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	yaklaşık
Kitle herhangi, $n > 30$, σ bilinmiyor	$\bar{X} \mp z_{1-\alpha/2}\,\dfrac{S}{\sqrt{n}}$	yaklaşık

Kitle ortalaması için güven aralığını kurduk. Aynı yöntemi kitle varyansına ve iki kitlenin karşılaştırılmasına Varyans ve İki Kitle İçin Aralık Tahmini bölümünde uygulayacağız; orada ki-kare ve F dağılımları da devreye girecek.

 CC BY-NC-SA 4.0

14. Varyans ve İki Kitle için Aralık Tahmini

Ortalama İçin Aralık Tahmini bölümünde bir güven aralığının nasıl kurulduğunu gördük. Yöntem hep aynıdır: içinde yalnız bilinmeyen parametreyi taşıyan ve dağılımı tümüyle bilinen bir büyüklük bulunur, bu büyüklük iki kantilin arasına sıkıştırılır, sonra eşitsizlikler parametre için çözülür. Bu bölümde aynı yöntemi üç yeni soruya uygulayacağız: bir kitlenin yayılımı ne kadardır (σ^2), iki kitleden hangisi daha değişkendir (σ_1^2/σ_2^2) ve iki kitlenin ortalamaları ne kadar farklıdır ($\mu_1 - \mu_2$). Kullanacağımız ki-kare, t ve F dağılımları Örneklem Dağılımları bölümünde tanıtıldı; tablo değerleri Tablolar sayfasından okunur.

14.1 Kitle Varyansı İçin Güven Aralığı

Bir dolum makinesinin şişelere koyduğu ortalama miktar doğru ayarlanmış olabilir; ama miktarlar şişeden şişeye çok dalgalanıyorsa üretim yine kusurludur. Bu yüzden kitle varyansını tahmin etmek, ortalamayı tahmin etmek kadar önemlidir.
σ^2'nin doğal tahmin edicisi örneklem varyansıdır:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2.$$

S^2, σ^2'nin yansız tahmin edicisidir. Aralığı bu yüzden S^2 üzerine kuracağız. Anahtar sonuç, normal bir kitleden alınan n birimlik rastgele örneklem için

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

olmasıdır (örneklem varyansının dağılımı). Bu büyüklük bilinmeyen parametrelerden yalnız σ^2'yi içerir ve dağılımı ne μ'ye ne de σ^2'ye bağlıdır; aradığımız büyüklük tam olarak budur.
Kitap boyunca olduğu gibi $\chi^2_{\nu,\,p}$, ν serbestlik dereceli ki-kare dağılımında solunda p alan kalan noktadır. Ki-kare dağılımı yalnız pozitif değerler alır ve simetrik değildir. Bu yüzden normal ve t dağılımlarındaki gibi alt kantil üst kantilin eksi işaretlisi değildir; $\chi^2_{\nu,\,\alpha/2}$ ile $\chi^2_{\nu,\,1-\alpha/2}$ χ^2 tablosundan ayrı ayrı okunur. Örneğin $\nu = 9$ için $\chi^2_{9,\,0{,}025} = 2{,}70$ ve $\chi^2_{9,\,0{,}975} = 19{,}02$'dir.

Teorem 14.1 (Varyans İçin Güven Aralığı). *$X_1, \ldots, X_n$ ($n \geq 2$), ortalaması ve varyansı bilinmeyen $N(\mu, \sigma^2)$ kitlesinden alınmış bir rastgele örneklem ve S^2 örneklem varyansı olsun. $0 < \alpha < 1$ için σ^2'nin % $100(1-\alpha)$ düzeyli güven aralığı*

$$\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}}\right]$$

olur. Büyük kantilin alt sınıra, küçük kantilin üst sınıra gittiğine dikkat edin.

> ***İspat.***
> *$Q = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ diyelim; $Q \sim \chi^2_{n-1}$'dir. Kantillerin tanımından Q'nun $\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}$'nin solunda kalma olasılığı $\alpha/2$, $\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}$'nin solunda kalma olasılığı $1-\alpha/2$'dir. Dağılım sürekli olduğundan uç noktaların olasılığı sıfırdır ve*
>
> $$P\left(\chi^2_{n-1,\,\alpha/2} \leq Q \leq \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha.$$
>
> *Şimdi parantez içindeki olayı σ^2 için çözelim. $n \geq 2$ iken $S^2 > 0$ olasılığı 1'dir ve iki kantil de pozitiftir; yani eşitsizlikteki bütün terimler pozitiftir. Pozitif sayıların tersini almak eşitsizliklerin yönünü değiştirir:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}} \le \frac{\sigma^2}{(n-1)S^2} \le \frac{1}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}}.$$

Her tarafı pozitif $(n-1)S^2$ *ile çarpınca*

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}}$$

bulunur. Bu olay baştaki olayla aynıdır, dolayısıyla olasılığı da $1-\alpha$*'dır.*
■

Sınırlar S^2'ye bağlı olduğu için rastgeledir. Örneklem gözlendikten sonra S^2 yerine gözlenen s^2 değeri konur ve sayısal bir aralık elde edilir; bu aralığın yorumu ortalama için kurulan aralıklarınki gibidir. Aralık s^2'nin iki yanına eşit uzanmaz: ki-kare eğrisi sağa çarpık olduğundan üst sınır s^2'den çok daha uzaktadır. Bir de uyarı: bu aralık kitlenin normal olmasına çok duyarlıdır. Ortalama için kurulan aralıklar büyük örneklemlerde merkezi limit teoremi sayesinde normallikten sapmaya dayanıklıdır; varyans aralığının böyle bir güvencesi yoktur.
Standart sapma varyansın karekökü olduğundan onun aralığı da kökler alınarak bulunur.

Sonuç 14.1 (Standart Sapma İçin Güven Aralığı). *Varyans aralığının (Teorem 14.1) varsayımları altında* σ*'nın* $\%100(1-\alpha)$ *düzeyli güven aralığı*

$$\left[\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}}},\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}}}\right]$$

olur.

İspat.
Sınırlara kısaca A *ve* B *diyelim* $(0<A<B)$*.* $\sigma>0$*'dır ve karekök fonksiyonu* $[0,\infty)$ *üzerinde kesin artandır; bu yüzden*

$$A \le \sigma^2 \le B \Leftrightarrow \sqrt{A} \le \sigma \le \sqrt{B}.$$

İki olay aynı olduğundan olasılıkları da aynıdır ve varyans aralığına (Teorem 14.1) göre bu olasılık $1-\alpha$*'dır.*
■

Örnek 14.1 (Dolum Makinesinin Varyansı). Bir dolum makinesinden rastgele seçilen 10 şişedeki sıvı miktarları ölçülüyor ve örneklem varyansı $s^2 = 4{,}8$ (mL²) bulunuyor. Miktarların normal dağıldığını varsayarak kitle varyansı σ^2 için %95 güven aralığını bulunuz.

Çözüm.
$n=10$ olduğundan serbestlik derecesi $\nu=9$'dur. $1-\alpha=0{,}95$ için her kuyruğa $\alpha/2=0{,}025$ kalır. χ^2 tablosundan

$$\chi^2_{9,\,0{,}025} = 2{,}70, \qquad \chi^2_{9,\,0{,}975} = 19{,}02$$

okunur. Pay her iki sınırda aynıdır:

$$(n-1)s^2 = 9 \cdot 4{,}8 = 43{,}2.$$

Varyans aralığında (Teorem 14.1) alt sınır büyük kantille, üst sınır küçük kantille bölünerek bulunur:

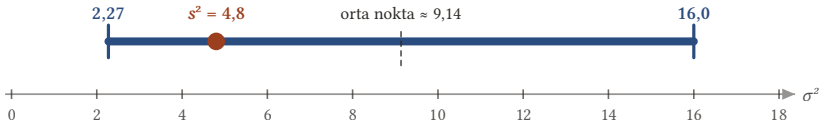
$$\frac{43{,}2}{19{,}02} \approx 2{,}271, \qquad \frac{43{,}2}{2{,}70} = 16{,}0.$$

Buna göre %95 güven aralığı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$2{,}271 \le \sigma^2 \le 16{,}0$$

olur. Nokta tahmini $s^2 = 4{,}8$ bu aralığın ortasında değil, alt ucuna yakındır; üst sınır s^2'nin üç katından fazladır. On gözlemle bir varyansı ancak bu kadar kaba tahmin edebiliriz.



Şekil 14.1: σ² için %95 güven aralığı [2,27; 16,0] ve nokta tahmini s² = 4,8. Tahmin aralığın ortasında değil, alt uca yakındır: aralık s²'nin iki yanına eşit uzanmaz, sağa doğru çok daha uzundur.

■

Örnek 14.2 (Dolum Makinesinin Standart Sapması). Aynı dolum makinesinden seçilen 10 şişede örneklem varyansı $s^2 = 4{,}8$ bulunmuştu. Miktarların normal dağıldığını varsayarak kitle standart sapması σ için %95 güven aralığını bulunuz.

Çözüm.
Önceki örnekte σ^2 için %95 güven aralığı $2{,}271 \le \sigma^2 \le 16{,}0$ bulundu. Standart sapma aralığına (Sonuç 14.1) göre sınırların karekökünü alırız:

$$\sqrt{2{,}271} \approx 1{,}507, \qquad \sqrt{16{,}0} = 4{,}0.$$

Buna göre $1{,}507 \le \sigma \le 4{,}0$ (mL) olur. Karşılaştırma için nokta tahmini $s = \sqrt{4{,}8} \approx 2{,}191$'dir; bu değer de aralığın ortasında değildir.
■

Örnek 14.3 (Ham Veriden Varyans Aralığı). Bir laboratuvarda aynı numune üzerinde yapılan 8 bağımsız ölçüm şunlardır:

$$12{,}4;\ 11{,}8;\ 12{,}9;\ 12{,}1;\ 13{,}0;\ 11{,}6;\ 12{,}5;\ 12{,}1.$$

Ölçümlerin normal dağıldığını varsayarak ölçüm varyansı σ^2 için %90 güven aralığını bulunuz.

Çözüm.
Önce örneklem ortalamasını bulalım. Ölçümlerin toplamı 98,4 olduğundan

$$\bar{x} = \frac{98{,}4}{8} = 12{,}3.$$

Ortalamadan sapmalar sırasıyla

$$0{,}1;\ -0{,}5;\ 0{,}6;\ -0{,}2;\ 0{,}7;\ -0{,}7;\ 0{,}2;\ -0{,}2$$

ve bunların kareleri

$$0{,}01;\ 0{,}25;\ 0{,}36;\ 0{,}04;\ 0{,}49;\ 0{,}49;\ 0{,}04;\ 0{,}04$$

olur. Karelerin toplamı $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1{,}72$'dir. Demek ki

$$(n-1)s^2 = 1{,}72, \qquad s^2 = \frac{1{,}72}{7} \approx 0{,}2457.$$

Aralığın sınırlarında yalnız $(n-1)s^2$ geçtiğinden s^2'yi ayrıca yuvarlamaya gerek yoktur. Serbestlik derecesi $\nu = 7$'dir. $1 - \alpha = 0{,}90$ için her kuyruğa 0,05 kalır ve χ^2 tablosundan

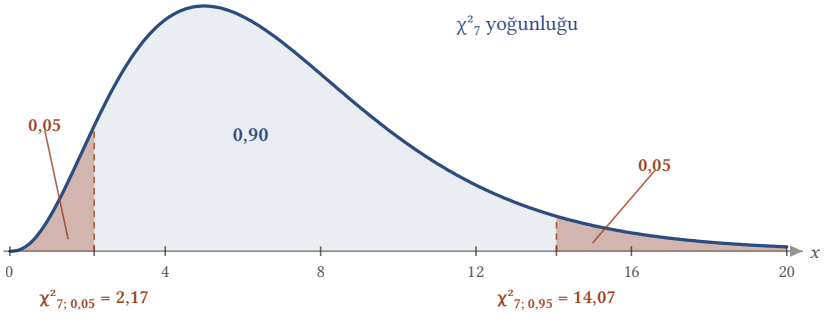
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\chi^2_{7,\,0{,}05} = 2{,}17, \qquad \chi^2_{7,\,0{,}95} = 14{,}07$$

okunur. Sınırlar

$$\frac{1{,}72}{14{,}07} \approx 0{,}1222, \qquad \frac{1{,}72}{2{,}17} \approx 0{,}7926$$

olduğundan %90 güven aralığı $0{,}1222 \le \sigma^2 \le 0{,}7926$ olur. Karekökler alınırsa ölçümlerin standart sapması için de $0{,}350 \le \sigma \le 0{,}890$ aralığı elde edilir.



Şekil 14.2: Serbestlik derecesi 7 olan ki-kare yoğunluğu. 2,17'nin solunda ve 14,07'nin sağında 0,05'er alan kalır; aradaki alan 0,90'dır. Varyans aralığında büyük kantil 14,07 alt sınırın, küçük kantil 2,17 üst sınırın paydasına gider.

■

14.2 İki Varyansın Oranı İçin Güven Aralığı

İki makineden, iki ölçüm yönteminden ya da iki üretim hattından hangisinin daha tutarlı çalıştığını anlamak için varyanslarını karşılaştırırız.
İki kitlenin bilinmeyen varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 ise karşılaştırmayı fark yerine oran üzerinden yaparız: σ_1^2/σ_2^2 oranı 1'e yakınsa yayılımlar benzerdir, 1'den çok büyükse birinci kitle daha değişkendir. Oranın doğal nokta tahmini s_1^2/s_2^2'dir. Oranı seçmemizin nedeni, örneklem varyanslarının oranının dağılımının bilinmesi ve bilinmeyen parametrelere bağlı olmamasıdır.
Bu kısım ve bölümün geri kalanı boyunca şu düzeni kullanacağız: $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$, $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ kitlesinden; $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ kitlesinden alınmış rastgele örneklemlerdir ve iki örneklem birbirinden bağımsızdır. $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ örneklem ortalamaları, S_1^2, S_2^2 örneklem varyanslarıdır.

Teorem 14.2 (İki Örneklem Varyansının Oranı). *Yukarıdaki düzende*

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \frac{(X_{1i}-\bar{X}_1)^2}{\sigma_1^2(n_1-1)}}{\sum_{j=1}^{n_2} \frac{(X_{2j}-\bar{X}_2)^2}{\sigma_2^2(n_2-1)}} \sim F_{n_1-1,\,n_2-1}$$

olur. Bu büyüklüğe payı $\nu_1 = n_1 - 1$, paydası $\nu_2 = n_2 - 1$ serbestlik dereceli ***F istatistiği*** *denir.*

İspat.
İkinci eşitlik yalnızca S_1^2 ve S_2^2'nin tanımının yerine yazılmasıdır. Dağılım için

$$U = \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}, \qquad V = \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}$$

diyelim. Her örneklem normal bir kitleden geldiği için $U \sim \chi^2_{n_1-1}$ ve $V \sim \chi^2_{n_2-1}$'dir (örneklem varyansının dağılımı). U yalnız birinci örnekleme, V yalnız ikinci örnekleme bağlıdır; örneklemler bağımsız

olduğundan U ile V de bağımsızdır. F dağılımının tanımına göre serbestlik dereceleriyle bölünmüş iki bağımsız ki-kare değişkeninin oranı

$$\frac{U/(n_1-1)}{V/(n_2-1)} \sim F_{n_1-1,\,n_2-1}$$

dağılımına sahiptir. $U/(n_1-1) = S_1^2/\sigma_1^2$ ve $V/(n_2-1) = S_2^2/\sigma_2^2$ olduğundan bu oran tam olarak F'dir.
■

F dağılımının kantilleri de sol kuyruk alanıyla gösterilir: $F_{\nu_1,\nu_2,p}$, F_{ν_1,ν_2} dağılımında solunda p alan kalan noktadır. F tablosu yalnız $p = 0{,}95,\ 0{,}975$ ve $0{,}99$ değerlerini verir; küçük p'ler için

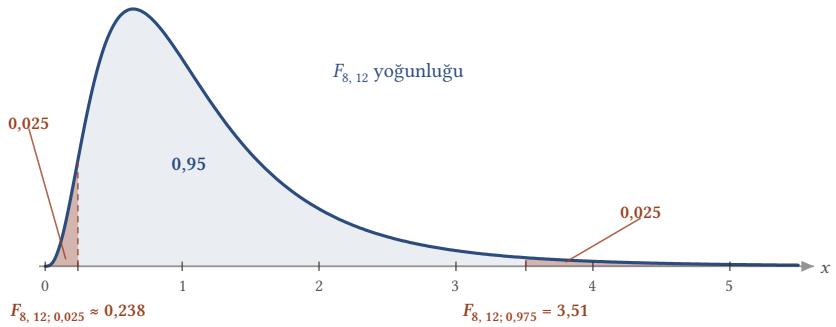
$$F_{\nu_1,\nu_2,\alpha} = \frac{1}{F_{\nu_2,\nu_1,1-\alpha}}$$

eşitliği kullanılır (F değişkeninin tersi); bu eşitlik, $F \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ ise $1/F \sim F_{\nu_2,\nu_1}$ olmasından gelir. Serbestlik derecelerinin yer değiştirdiğine dikkat edin.

Teorem 14.3 (Varyans Oranı İçin Güven Aralığı). *Yukarıdaki düzende $\nu_1 = n_1 - 1$, $\nu_2 = n_2 - 1$ olsun. σ_1^2/σ_2^2 oranının $\%100(1-\alpha)$ düzeyli güven aralığı*

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha/2}},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot F_{\nu_2,\nu_1,1-\alpha/2}\right]$$

olur. Karekökler alınarak σ_1/σ_2 için de aynı düzeyli bir aralık elde edilir.



Şekil 14.3: Serbestlik dereceleri 8 ve 12 olan F yoğunluğu. Sağ kuyruğun sınırı olan 0,975 kantili 3,51 tablodan okunur. Sol kuyruğun sınırı olan 0,025 kantili tabloda yoktur; serbestlik dereceleri yer değiştirmiş F dağılımının 0,975 kantilinden 1/4,20 ≈ 0,238 olarak bulunur. Her kuyruğun alanı 0,025, aradaki alan 0,95'tir.

İspat.
F istatistiğinin dağılımına (Teorem 14.2) göre $F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$'dir. İki kuyruğa $\alpha/2$ bırakınca

$$P\left(F_{\nu_1,\nu_2,\alpha/2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le F_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

olur. Terimlerin hepsi pozitiftir. Önce tersleri alalım; eşitsizliklerin yönü değişir:

$$\frac{1}{F_{\nu_1,\nu_2,1-\alpha/2}} \le \frac{S_2^2}{S_1^2}\cdot\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{1}{F_{\nu_1,\nu_2,\alpha/2}}.$$

Sonra her tarafı pozitif S_1^2/S_2^2 ile çarpalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\nu_1,\nu_2,\,1-\alpha/2}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{\nu_1,\nu_2,\,\alpha/2}}.$$

Son olarak $1/F_{\nu_1,\nu_2,\,\alpha/2} = F_{\nu_2,\nu_1,\,1-\alpha/2}$ yazılınca üst sınır istenen biçimi alır. Olay değişmediği için olasılık $1-\alpha$'dır. σ_1/σ_2 için, standart sapma aralığında (Sonuç 14.1) olduğu gibi, karekökün kesin artan olması kullanılır.

■

Aralığın 1'i içerip içermediği önemli bir bilgidir. 1'i içeriyorsa veriler "varyanslar eşittir" varsayımıyla çelişmez; tümüyle 1'in sağında (ya da solunda) kalıyorsa birinci kitlenin varyansı daha büyüktür (ya da daha küçüktür). Bu bilgiyi aşağıda iki ortalamanın farkı için doğru aralığı seçerken kullanacağız.

Örnek 14.4 (İki Dolum Makinesinin Varyansları). İki dolum makinesinin tutarlılığı karşılaştırılıyor. Birinci makineden 9, ikinci makineden 13 şişe rastgele seçiliyor; doldurulan miktarların örneklem varyansları $s_1^2 = 3{,}6$ ve $s_2^2 = 1{,}8$ bulunuyor. Miktarların iki makinede de normal dağıldığını ve örneklemlerin bağımsız olduğunu varsayarak σ_1^2/σ_2^2 için %95 güven aralığını bulunuz.

Çözüm.
Serbestlik dereceleri $\nu_1 = 9-1 = 8$ ve $\nu_2 = 13-1 = 12$'dir. Nokta tahmini

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{3{,}6}{1{,}8} = 2.$$

$1-\alpha = 0{,}95$ için $1-\alpha/2 = 0{,}975$'tir. F tablosunun $p = 0{,}975$ kısmından

$$F_{8,12,\,0{,}975} = 3{,}51, \qquad F_{12,8,\,0{,}975} = 4{,}20$$

okunur (ilkinde sütun 8, satır 12; ikincisinde sütun 12, satır 8). Varyans oranı aralığına (Teorem 14.3) göre

$$\frac{2}{3{,}51} \approx 0{,}570, \qquad 2\cdot 4{,}20 = 8{,}40,$$

yani %95 güven aralığı $0{,}570 \le \sigma_1^2/\sigma_2^2 \le 8{,}40$'dır. Birinci makinenin örneklem varyansı ikincininkinin iki katı olsa da aralık 1'i içerir: bu küçük örneklemlerle iki makinenin kitle varyanslarının farklı olduğu söylenemez.

■

Örnek 14.5 (İki Ölçüm Yönteminin Standart Sapmaları). Aynı büyüklük iki farklı yöntemle ölçülüyor. Birinci yöntemle yapılan 11 ölçümün örneklem varyansı $s_1^2 = 12{,}5$, ikinci yöntemle yapılan 16 ölçümünki $s_2^2 = 2{,}5$'tir. Ölçümlerin normal dağıldığını ve iki örneklemin bağımsız olduğunu varsayarak standart sapmaların oranı σ_1/σ_2 için %90 güven aralığını bulunuz.

Çözüm.
Serbestlik dereceleri $\nu_1 = 10$ ve $\nu_2 = 15$'tir; nokta tahmini $s_1^2/s_2^2 = 12{,}5/2{,}5 = 5$'tir. $1-\alpha = 0{,}90$ için $1-\alpha/2 = 0{,}95$ olduğundan F tablosunun $p = 0{,}95$ kısmına bakarız:

$$F_{10,15,\,0{,}95} = 2{,}54, \qquad F_{15,10,\,0{,}95} = 2{,}85.$$

Önce varyansların oranı için aralığı kuralım:

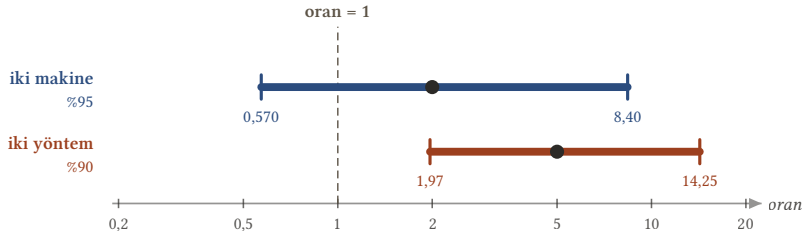
$$\frac{5}{2{,}54} \approx 1{,}969, \qquad 5\cdot 2{,}85 = 14{,}25,$$

yani $1{,}969 \le \sigma_1^2/\sigma_2^2 \le 14{,}25$. Karekökler alınınca

$$\sqrt{1{,}969} \approx 1{,}403, \qquad \sqrt{14{,}25} \approx 3{,}775$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve %90 güven aralığı $1{,}403 \leq \sigma_1/\sigma_2 \leq 3{,}775$ olur. Aralık tümüyle 1'in sağındadır: birinci yöntemin standart sapması ikincininkinden büyüktür, üstelik en az yaklaşık 1,4 katıdır.



Şekil 14.4: Varyans oranı σ_1^2/σ_2^2 için iki güven aralığı, logaritmik eksende (siyah noktalar s_1^2/s_2^2 tahminleridir). Makinelerin aralığı 1'i içerir: varyansların eşit olması verilerle çelişmez. Yöntemlerin aralığı tümüyle 1'in sağındadır: birinci yöntemin varyansı daha büyüktür.

■

14.3 İki Ortalamanın Farkı İçin Güven Aralığı

Deneysel çalışmalarda çoğu zaman iki kitlenin ortalamalarını karşılaştırırız: iki gübrenin verimini, iki öğretim yönteminin başarısını, iki makinenin ortalama dolumunu. Bilinmeyen parametre artık $\mu_1 - \mu_2$ farkıdır.

Önceki kısımdaki düzeni koruyoruz: iki bağımsız rastgele örneklem, birincisi $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, ikincisi $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ kitlesinden. $\bar{X}_1$ ve $\bar{X}_2$ sırasıyla μ_1 ve μ_2'nin yansız tahmin edicileri olduğundan

$$E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \mu_1 - \mu_2$$

olur ve $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, $\mu_1 - \mu_2$'nin yansız nokta tahmin edicisidir. Aralığın biçimi ise varyanslar hakkında ne bildiğimize bağlıdır. Üç durum vardır:

1. Kitle varyansları σ_1^2 ve σ_2^2 biliniyor.
2. Kitle varyansları bilinmiyor ama eşit kabul ediliyor: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.
3. Kitle varyansları bilinmiyor ve farklı kabul ediliyor: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Üç durumun hepsinde kullanacağımız temel sonuç, örneklem ortalamaları farkının dağılımıdır.

Önerme 14.1 (Örneklem Ortalamalarının Farkı). *Yukarıdaki düzende*

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

ve dolayısıyla

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

olur.

İspat.
Normal kitlede örneklem ortalamasının dağılımına göre $\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2/n_1)$ *ve* $\bar{X}_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2/n_2)$*'dir.* $\bar{X}_1$ *yalnız birinci,* $\bar{X}_2$ *yalnız ikinci örnekleme bağlıdır; örneklemler bağımsız olduğundan* $\bar{X}_1$ *ile* $\bar{X}_2$ *de bağımsızdır. Bağımsız normallerin doğrusal birleşimi* $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ *katsayılarıyla uygulanırsa*

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, 1^2 \cdot \frac{\sigma_1^2}{n_1} + (-1)^2 \cdot \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Varyanslar toplanır, çünkü -1 katsayısının karesi 1'dir: fark almak belirsizliği azaltmaz. Normal bir değişkenden ortalamasını çıkarıp standart sapmasına bölmek standart normal bir değişken verdiğinden $Z \sim N(0,1)$'dir.
■

14.3.1 Varyanslar Biliniyorsa

Varyanslar biliniyorsa Z'nin içinde bilinmeyen tek şey $\mu_1 - \mu_2$'dir ve aralık doğrudan kurulur. z_p, standart normal dağılımın solunda p alan kalan noktasıdır.

Teorem 14.4 (Varyanslar Bilinirken Ortalama Farkı). *σ_1^2 ve σ_2^2 biliniyorsa $\mu_1 - \mu_2$'nin $\%100(1-\alpha)$ düzeyli güven aralığının sınırları*

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

olur; eksi işareti alt sınırı, artı işareti üst sınırı verir.

İspat.
Kısalık için $\sigma_D = \sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$ diyelim. Standart normal dağılım 0 etrafında simetrik olduğundan $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$'dir ve farkın dağılımına (Önerme 14.1) göre

$$P\big(-z_{1-\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}\big) = 1 - \alpha$$

olur. Eşitsizliği pozitif σ_D ile çarpalım:

$$-z_{1-\alpha/2}\,\sigma_D \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2) \le z_{1-\alpha/2}\,\sigma_D.$$

Her taraftan $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$'yi çıkarıp -1 ile çarpalım (yönler değişir, sonra iki uç yer değiştirir):

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - z_{1-\alpha/2}\,\sigma_D \le \mu_1 - \mu_2 \le (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + z_{1-\alpha/2}\,\sigma_D.$$

Olay değişmediğinden olasılığı $1-\alpha$'dır.
■

Örnek 14.6 (İki Üretim Hattının Ortalamaları). İki üretim hattından çıkan paketlerin ağırlıkları normal dağılıyor ve uzun deneyimden standart sapmaların birinci hatta $\sigma_1 = 5$ g, ikinci hatta $\sigma_2 = 6$ g olduğu biliniyor. Birinci hattan 25 paketin ortalaması $\bar{x}_1 = 80$ g, ikinci hattan 36 paketin ortalaması $\bar{x}_2 = 75$ g bulunuyor. $\mu_1 - \mu_2$ için $\%95$ güven aralığını bulunuz.

Çözüm.
Farkın standart sapması

$$\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{25}{25} + \frac{36}{36}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4142.$$

$1 - \alpha = 0{,}95$ için $z_{0{,}975}$ gerekir. Standart normal tablosunda 0 ile $1{,}96$ arasındaki alan $0{,}4750$'dir; sağ kuyrukta $0{,}025$ kalır ve $z_{0{,}975} = 1{,}96$ olur. Hata payı

$$1{,}96 \cdot 1{,}4142 \approx 2{,}772,$$

nokta tahmini $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 5$'tir. Bilinen varyanslı aralığa (Teorem 14.4) göre

$$5 - 2{,}772 = 2{,}228, \qquad 5 + 2{,}772 = 7{,}772,$$

yani $\%95$ güven aralığı $2{,}228 \le \mu_1 - \mu_2 \le 7{,}772$ (g) olur. Aralık 0'ı içermez ve tümüyle pozitiftir: birinci hattın ortalama ağırlığı daha büyüktür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

14.3.2 Varyanslar Bilinmiyor ama Eşitse

Uygulamada kitle varyansları çoğu zaman bilinmez. Önce iki kitlenin aynı varyansa sahip olduğunu, yani $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ olduğunu kabul edelim. O zaman farkın dağılımındaki (Önerme 14.1) büyüklük

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

biçimini alır ve içinde bilinmeyen σ vardır. S_1^2 ve S_2^2'nin ikisi de aynı σ^2'yi tahmin ettiğinden, ikisini birleştirip tek ve daha iyi bir tahmin elde ederiz.

Tanım 14.1 (Ortak Varyans). İki örneklemin **ortak (birleştirilmiş) varyansı**

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

istatistiğidir; $S_p = \sqrt{S_p^2}$ yazılır.

Yani S_p^2, iki örneklem varyansının serbestlik dereceleriyle ağırlıklandırılmış ortalamasıdır: büyük örneklemin varyansı daha çok ağırlık alır, $n_1 = n_2$ ise basit ortalama elde edilir. Pay, her gözlemin kendi örneklem ortalamasından sapmalarının karelerinin toplamıdır. $E(S_1^2) = E(S_2^2) = \sigma^2$ olduğundan

$$E(S_p^2) = \frac{(n_1 - 1)\sigma^2 + (n_2 - 1)\sigma^2}{n_1 + n_2 - 2} = \sigma^2,$$

yani S_p^2 de σ^2'nin yansız tahmin edicisidir.

Teorem 14.5 (Ortak Varyanslı t İstatistiği). *Yukarıdaki düzende $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ise*

$$T = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

olur.

> ***İspat.***
> *Ortak varyansa σ^2 diyelim ve üç adımda ilerleyelim.*
> Pay. *Farkın dağılımına (Önerme 14.1) göre yukarıdaki Z standart normaldir.*
> Payda. *Ortak varyansın tanımından*
>
> $$W = \frac{(n_1 + n_2 - 2)S_p^2}{\sigma^2} = \frac{(n_1 - 1)S_1^2}{\sigma^2} + \frac{(n_2 - 1)S_2^2}{\sigma^2}$$
>
> *olur. Sağdaki iki terim sırasıyla $\chi^2_{n_1-1}$ ve $\chi^2_{n_2-1}$ dağılımlıdır ve farklı örneklemlere bağlı olduklarından bağımsızdır. Bağımsız ki-kare değişkenlerinin toplamı, serbestlik dereceleri toplanmış bir ki-kare değişkenidir (bağımsız ki-kare değişkenlerinin toplamı); dolayısıyla $W \sim \chi^2_{n_1+n_2-2}$.*
> Bağımsızlık. *Normal bir örneklemde $\bar{X}$ ile S^2 bağımsızdır. Örneklemler de birbirinden bağımsız olduğundan $\bar{X}_1, S_1^2, \bar{X}_2, S_2^2$ dördü birden bağımsızdır. Z yalnız $\bar{X}_1$ ve $\bar{X}_2$'ye, W yalnız S_1^2 ve S_2^2'ye bağlı olduğundan Z ile W bağımsızdır.*
> *t dağılımının tanımına göre $Z \,/\, \sqrt{W/(n_1 + n_2 - 2)} \sim t_{n_1+n_2-2}$'dir. Bu oranı açalım: $\sqrt{W/(n_1 + n_2 - 2)} = S_p/\sigma$ olduğundan*
>
> $$\frac{Z}{S_p/\sigma} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \cdot \frac{\sigma}{S_p} = T.$$
>
> *Bilinmeyen σ sadeleşip gider; T'nin dağılımı $t_{n_1+n_2-2}$'dir.*
> ■

Teorem 14.6 (Eşit Varyanslarda Ortalama Farkı). *$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ kabul ediliyor ama ortak değer bilinmiyorsa $\mu_1 - \mu_2$'nin $\%100(1-\alpha)$ düzeyli güven aralığının sınırları*

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp t_{n_1+n_2-2,\,1-\alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

olur.

> ***İspat.***
> *t dağılımı 0 etrafında simetrik olduğundan, $\nu = n_1 + n_2 - 2$ için ortak varyanslı t istatistiğine (Teorem 14.5) göre*
>
> $$P\big(-t_{\nu,\,1-\alpha/2} \le T \le t_{\nu,\,1-\alpha/2}\big) = 1 - \alpha$$
>
> *olur. Eşitsizliği pozitif $S_p\sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$ ile çarpıp bilinen varyanslı aralığın (Teorem 14.4) ispatındaki gibi $\mu_1 - \mu_2$ için çözünce istenen sınırlar bulunur; olay değişmediğinden olasılık $1-\alpha$'dır.*
> ■

Örnek 14.7 (İki Öğretim Yöntemi). İki öğretim yöntemi karşılaştırılıyor. Birinci yöntemle çalışan 10 öğrencinin sınav puanlarının ortalaması $\bar{x}_1 = 85$, örneklem varyansı $s_1^2 = 16$; ikinci yöntemle çalışan 12 öğrencininki $\bar{x}_2 = 81$ ve $s_2^2 = 25$'tir. Puanların iki grupta da normal dağıldığını, varyansların eşit olduğunu ve grupların bağımsız olduğunu kabul ederek $\mu_1 - \mu_2$ için $\%95$ güven aralığını bulunuz.

> **Çözüm.**
> Önce ortak varyansı hesaplayalım:
>
> $$s_p^2 = \frac{9 \cdot 16 + 11 \cdot 25}{10 + 12 - 2} = \frac{144 + 275}{20} = \frac{419}{20} = 20{,}95,$$
>
> buradan $s_p = \sqrt{20{,}95} \approx 4{,}577$. Ayrıca
>
> $$\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{11}{60}} \approx 0{,}4282$$
>
> olduğundan farkın tahmini standart sapması $4{,}577 \cdot 0{,}4282 \approx 1{,}960$'tır. Serbestlik derecesi $\nu = 20$ ve t tablosundan $t_{20,\,0{,}975} = 2{,}086$'dır. Hata payı
>
> $$2{,}086 \cdot 1{,}960 \approx 4{,}088,$$
>
> nokta tahmini $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 4$'tür. Eşit varyanslı aralığa (Teorem 14.6) göre
>
> $$4 - 4{,}088 = -0{,}088, \qquad 4 + 4{,}088 = 8{,}088,$$
>
> yani $\%95$ güven aralığı $-0{,}088 \le \mu_1 - \mu_2 \le 8{,}088$ olur. Aralık 0'ı (kıl payı da olsa) içerir: birinci grubun ortalaması 4 puan yüksek çıkmış olsa da bu verilerle $\%95$ güvenle yöntemler arasında fark olduğu söylenemez.
> ■

İki örneklem de büyükse (kabaca $n_1 \ge 30$ ve $n_2 \ge 30$) işler kolaylaşır. Merkezi limit teoremi sayesinde, kitleler tam normal olmasa bile, Önerme 14.1 içindeki Z yaklaşık olarak standart normaldir. Büyük örneklemlerde S_1^2 ve S_2^2 de kitle varyanslarına çok yakın değerler alır; σ_i^2 yerine S_i^2 yazmanın bu yaklaşımı bozmadığı gösterilebilir (burada ispatlamıyoruz). Yani

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

de yaklaşık olarak standart normal dağılır. Buna göre, varyanslar bilinmese ve eşit kabul edilmese de, $\mu_1 - \mu_2$ için yaklaşık $\%100(1-\alpha)$ düzeyli güven sınırları

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

olur. Bu, bilinen varyanslı aralığın (Teorem 14.4) σ_i^2 yerine S_i^2 yazılmış hâlidir.

Örnek 14.8 (Büyük Örneklemlerle Ortalama Farkı). İki şehirde hanelerin günlük su tüketimi karşılaştırılıyor. Birinci şehirden 50 hanenin ortalaması $\bar{x}_1 = 72$ litre, standart sapması $s_1 = 8$ litre; ikinci şehirden 40 hanenin ortalaması $\bar{x}_2 = 68$ litre, standart sapması $s_2 = 6$ litredir. $\mu_1 - \mu_2$ için yaklaşık %95 güven aralığını bulunuz.

> **Çözüm.**
> İki örneklem de 30'dan büyük olduğundan z ile yaklaşık aralık kurabiliriz. Farkın tahmini standart sapması
>
> $$\sqrt{\frac{8^2}{50} + \frac{6^2}{40}} = \sqrt{1{,}28 + 0{,}90} = \sqrt{2{,}18} \approx 1{,}4765.$$
>
> Standart normal tablosundan $z_{0{,}975} = 1{,}96$ olduğundan hata payı $1{,}96 \cdot 1{,}4765 \approx 2{,}894$'tür. Nokta tahmini $72 - 68 = 4$ olduğundan
>
> $$4 - 2{,}894 = 1{,}106, \qquad 4 + 2{,}894 = 6{,}894,$$
>
> yani yaklaşık %95 güven aralığı $1{,}106 \le \mu_1 - \mu_2 \le 6{,}894$ (litre) olur. Birinci şehirde ortalama tüketim daha yüksektir.
> ■

14.3.3 Varyanslar Bilinmiyor ve Farklıysa

Varyansların eşit olduğunu kabul edemiyorsak her birini kendi örneklem varyansıyla tahmin ederiz. Farkın dağılımındaki (Önerme 14.1) Z'de σ_i^2 yerine S_i^2 yazılınca

$$T' = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

bulunur. Küçük örneklemlerde T' ne standart normaldir ne de tam olarak bir t dağılımına sahiptir; üstelik gerçek dağılımı bilinmeyen σ_1^2/σ_2^2 oranına bağlıdır. Bu yüzden T''nin dağılımına uygun bir serbestlik dereceli t dağılımıyla yaklaşılır. Serbestlik derecesini belirlemek için çeşitli yollar vardır; en yaygını aşağıdaki Welch–Satterthwaite (Smith–Satterthwaite olarak da anılır) yaklaşımıdır.

Teorem 14.7 (Welch–Satterthwaite Aralığı). *Yukarıdaki düzende σ_1^2 ve σ_2^2 bilinmiyor ve eşit kabul edilmiyorsa T' yaklaşık olarak t_ν dağılımına sahiptir; burada*

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}$$

dir. Buna göre $\mu_1 - \mu_2$ için yaklaşık $\%100(1-\alpha)$ düzeyli güven sınırları

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \mp t_{\nu,\,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

olur. ν genellikle tam sayı değildir; tablo kullanılırken bir alt tam sayıya yuvarlanır. Ayrıca her zaman

$$\min(n_1, n_2) - 1 \le \nu \le n_1 + n_2 - 2$$

sağlanır.

> ***Serbestlik derecesinin gerekçesi.***
> *Kısalık için $a_i = \sigma_i^2/n_i$ ve $V = S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2$ diyelim; $\theta = a_1 + a_2$ olsun.*

 CC BY-NC-SA 4.0

V'nin beklenen değeri ve varyansı. *Normal örneklemde örneklem varyansının momentleri*

$$E(S_i^2) = \sigma_i^2, \qquad \operatorname{Var}(S_i^2) = \frac{2\sigma_i^4}{n_i - 1}$$

olduğundan $E(V) = \theta$ *bulunur. Ayrıca*

$$\operatorname{Var}\left(\frac{S_i^2}{n_i}\right) = \frac{1}{n_i^2} \cdot \frac{2\sigma_i^4}{n_i - 1} = \frac{2a_i^2}{n_i - 1}.$$

S_1^2 *ile* S_2^2 *bağımsız olduğundan*

$$\operatorname{Var}(V) = \frac{2a_1^2}{n_1 - 1} + \frac{2a_2^2}{n_2 - 1}.$$

Yaklaşım. $Z = \big[\,(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)\,\big] / \sqrt{\theta}$ *standart normaldir ve* $T' = Z \,/\, \sqrt{V/\theta}$ *yazılabilir.* Z, V*'den bağımsızdır, çünkü normal örneklemlerde örneklem ortalamaları örneklem varyanslarından bağımsızdır. Eğer bir* ν *için* $\nu V/\theta \sim \chi^2_\nu$ *olsaydı,* t *dağılımının tanımına göre* T' *tam olarak* t_ν *dağılımına sahip olurdu. Böyle bir* V*'nin beklenen değeri* θ*, varyansı*

$$\frac{\theta^2}{\nu^2} \cdot 2\nu = \frac{2\theta^2}{\nu}$$

olurdu. Beklenen değer zaten uyuyor; ν*'yü varyanslar da eşit olacak biçimde seçelim:*

$$\frac{2\theta^2}{\nu} = \frac{2a_1^2}{n_1 - 1} + \frac{2a_2^2}{n_2 - 1} \Leftrightarrow \nu = \frac{(a_1 + a_2)^2}{\frac{a_1^2}{n_1 - 1} + \frac{a_2^2}{n_2 - 1}}.$$

Bilinmeyen $a_i = \sigma_i^2/n_i$ *yerine tahminleri* S_i^2/n_i *yazılınca teoremdeki* ν *elde edilir. Aralık, eşit varyanslı durumdaki (Teorem 14.6) gibi*

$$P\big(-t_{\nu,\,1-\alpha/2} \le T' \le t_{\nu,\,1-\alpha/2}\big) \approx 1 - \alpha$$

eşitsizliği $\mu_1 - \mu_2$ *için çözülerek bulunur.*
ν'nün sınırları. $b_i = S_i^2/n_i$ *ve* $k_i = n_i - 1$ *yazalım. Cauchy–Schwarz eşitsizliğiyle*

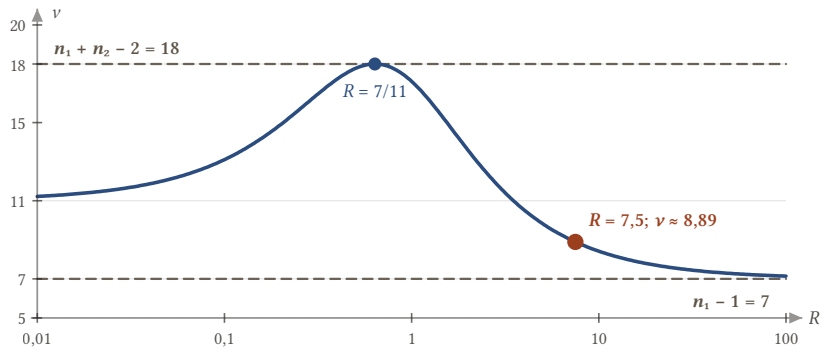
$$(b_1 + b_2)^2 = \left(\frac{b_1}{\sqrt{k_1}}\sqrt{k_1} + \frac{b_2}{\sqrt{k_2}}\sqrt{k_2}\right)^2 \le \left(\frac{b_1^2}{k_1} + \frac{b_2^2}{k_2}\right)(k_1 + k_2),$$

yani $\nu \le k_1 + k_2 = n_1 + n_2 - 2$*; eşitlik* $b_1/k_1 = b_2/k_2$ *iken sağlanır. Öte yandan* $k = \min(k_1, k_2)$ *için*

$$\frac{b_1^2}{k_1} + \frac{b_2^2}{k_2} \le \frac{b_1^2 + b_2^2}{k} \le \frac{(b_1 + b_2)^2}{k},$$

yani $\nu \ge k = \min(n_1, n_2) - 1$*. Aşağıdaki şekil* ν*'nün iki örneklemin katkılarının oranına göre bu sınırlar arasında nasıl değiştiğini gösterir.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.5: $n_1 = 8$, $n_2 = 12$ için Welch serbestlik derecesi ν, $R = (s_1^2/n_1)/(s_2^2/n_2)$ oranının fonksiyonu olarak (yatay eksen logaritmik). ν hiçbir zaman 18'i aşmaz ve 7'nin altına inmez; en büyük değer $R = 7/11$'de alınır. R büyüdükçe ν, birinci örneklemin $n_1 - 1 = 7$ değerine, R küçüldükçe ikinci örneklemin $n_2 - 1 = 11$ değerine yaklaşır. Turuncu nokta örnekteki $R = 7{,}5$ durumudur.

■

Alt tam sayıya yuvarlamak serbestlik derecesini küçültür, t kantilini büyütür ve aralığı biraz genişletir; yani güvenli taraftadır. ν'nün alt sınırı, en kötü durumda bile küçük örneklemin serbestlik derecesini kullanabileceğimizi söyler.

Örnek 14.9 (Değişkenliği Farklı İki Kitle). İki kitleden bağımsız örneklemler alınıyor. Birinci kitleden 8 gözlemin ortalaması $\bar{x}_1 = 30$ ve örneklem varyansı $s_1^2 = 20$; ikinci kitleden 12 gözlemin ortalaması $\bar{x}_2 = 25$ ve örneklem varyansı $s_2^2 = 4$'tür. Kitlelerin normal olduğunu ve varyanslarının farklı olduğunu kabul ederek $\mu_1 - \mu_2$ için %95 güven aralığını bulunuz.

Çözüm.
İki katkıyı ayrı ayrı hesaplayalım:

$$\frac{s_1^2}{n_1} = \frac{20}{8} = 2{,}5, \qquad \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{4}{12} \approx 0{,}3333.$$

Toplamları $2{,}8333$ olduğundan farkın tahmini standart sapması $\sqrt{2{,}8333} \approx 1{,}6833$'tür. Serbestlik derecesi için pay ve paydayı ayrı hesaplayalım:

$$\text{pay} = 2{,}8333^2 \approx 8{,}0278,$$
$$\text{payda} = \frac{2{,}5^2}{7} + \frac{0{,}3333^2}{11} \approx 0{,}8929 + 0{,}0101 = 0{,}9030.$$

Buna göre $\nu \approx 8{,}0278/0{,}9030 \approx 8{,}89$'dur ve bir alt tam sayıya yuvarlayarak $\nu = 8$ alırız. t tablosundan $t_{8,\,0{,}975} = 2{,}306$ okunur. Hata payı

$$2{,}306 \cdot 1{,}6833 \approx 3{,}882,$$

nokta tahmini $30 - 25 = 5$'tir. Welch–Satterthwaite aralığına (Teorem 14.7) göre

$$5 - 3{,}882 = 1{,}118, \qquad 5 + 3{,}882 = 8{,}882,$$

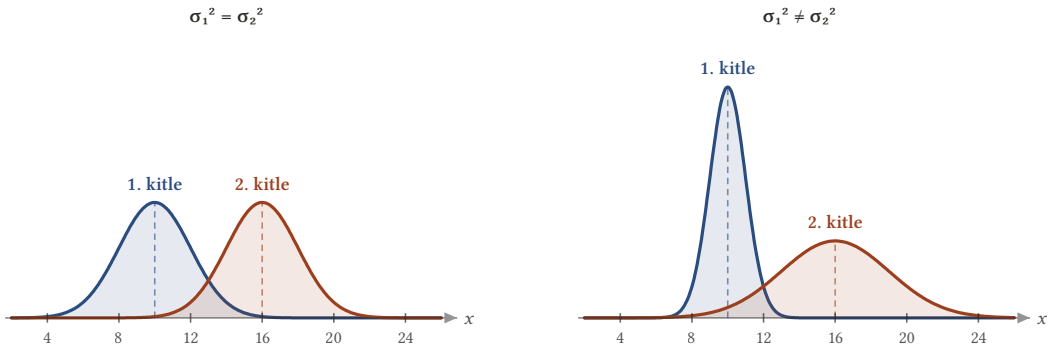
yani yaklaşık %95 güven aralığı $1{,}118 \le \mu_1 - \mu_2 \le 8{,}882$ olur.
$\nu \approx 8{,}89$ değerinin $n_1 + n_2 - 2 = 18$'den çok küçük, alt sınır $n_1 - 1 = 7$'ye ise yakın olduğuna dikkat edin. Nedeni, farkın varyansının neredeyse tamamının küçük ve değişken birinci örneklemden gelmesidir ($2{,}5$'e karşı $0{,}33$); aralığın belirsizliğini asıl bu örneklem belirler.
■

Üç durumu bir arada kullanmak için basit bir reçete verelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda doğru aralığı seçmek

1. Kitle varyansları biliniyorsa z aralığını (Teorem 14.4) kullanın.
2. Varyanslar bilinmiyor ama iki örneklem de büyükse ($n_1, n_2 \geq 30$) σ_i^2 yerine s_i^2 yazılmış z aralığı yeterlidir.
3. Varyanslar bilinmiyor ve örneklemler küçükse önce σ_1^2/σ_2^2 için bir aralık kurun (Teorem 14.3). Aralık 1'i içeriyorsa varyansları eşit kabul edip ortak varyanslı t aralığını (Teorem 14.6), içermiyorsa Welch aralığını (Teorem 14.7) kullanın. Emin olamadığınızda Welch aralığı güvenli seçimdir: varyanslar eşit olduğunda da iyi çalışır.



Şekil 14.6: Ortalamaları 10 ve 16 olan iki normal kitle. Solda iki eğri aynı biçimdedir, yalnız yerleri farklıdır: varyanslar eşittir ve tek bir ortak σ^2 tahmin edilir. Sağda birinci kitle dar, ikincisi geniştir: varyanslar farklıdır ve her biri ayrı tahmin edilir.

Örnek 14.10 (Aralık Türünü Seçmek). İki ölçüm yöntemi karşılaştırılıyor. Birinci yöntemle yapılan 11 ölçümün ortalaması $\bar{x}_1 = 40{,}2$ ve örneklem varyansı $s_1^2 = 12{,}5$; ikinci yöntemle yapılan 16 ölçümün ortalaması $\bar{x}_2 = 36{,}5$ ve örneklem varyansı $s_2^2 = 2{,}5$'tir. Ölçümler normal dağılıyor ve örneklemler bağımsızdır; kitle varyansları bilinmiyor. $\mu_1 - \mu_2$ için %95 güven aralığını uygun yöntemi seçerek bulunuz.

Çözüm.
Yöntemin seçimi. Varyanslar bilinmiyor ve örneklemler küçük, dolayısıyla reçetenin üçüncü adımındayız. Bu veriler için σ_1^2/σ_2^2'nin %90 güven aralığını daha önce (Örnek 14.5) $1{,}969 \leq \sigma_1^2/\sigma_2^2 \leq 14{,}25$ olarak bulmuştuk. Aralık 1'i içermez; varyansları eşit kabul edemeyiz ve Welch aralığını kullanırız.
Serbestlik derecesi. Katkılar

$$\frac{s_1^2}{n_1} = \frac{12{,}5}{11} \approx 1{,}1364, \qquad \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{2{,}5}{16} = 0{,}15625$$

ve toplamları $1{,}2926$'dır; farkın tahmini standart sapması $\sqrt{1{,}2926} \approx 1{,}1369$'dur. Pay ve payda

$$\text{pay} = 1{,}2926^2 \approx 1{,}6709,$$
$$\text{payda} = \frac{1{,}1364^2}{10} + \frac{0{,}15625^2}{15} \approx 0{,}12913 + 0{,}00163 = 0{,}13076$$

olduğundan $\nu \approx 1{,}6709/0{,}13076 \approx 12{,}78$ bulunur; $\nu = 12$ alırız.
Aralık. t tablosundan $t_{12,\,0{,}975} = 2{,}179$'dur. Hata payı $2{,}179 \cdot 1{,}1369 \approx 2{,}477$, nokta tahmini $40{,}2 - 36{,}5 = 3{,}7$'dir. Buna göre

$$3{,}7 - 2{,}477 = 1{,}223, \qquad 3{,}7 + 2{,}477 = 6{,}177,$$

yani yaklaşık %95 güven aralığı $1{,}223 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 6{,}177$ olur. Birinci yöntem hem daha değişken hem de ortalama olarak daha büyük değerler ölçmektedir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu bölümde normal kitlelerin varyansı, iki varyansın oranı ve iki ortalamanın farkı için güven aralıkları kurduk; hepsinde yöntem aynıydı, değişen yalnız kullandığımız dağılımdı (ki-kare, F, normal ya da t). Sonraki bölüm Oran İçin Aralık Tahmini, aynı fikri binom dağılımının p parametresine ve iki binom parametresinin farkına uyguluyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

15. Oran için Aralık Tahmini

Bir seçim anketinde adayı destekleyenlerin oranı, bir üretim hattında kusurlu parçaların oranı, bir tedaviyle iyileşen hastaların oranı... İstatistikte en sık tahmin edilen büyüklüklerden biri bir kitledeki "başarıların" oranıdır. Önceki iki bölümde normal kitlelerin ortalaması ve varyansı için güven aralığı (Tanım 13.1) kurduk (Ortalama için Aralık Tahmini, Varyans ve İki Kitle için Aralık Tahmini). Bu bölümde aynı fikri binom dağılımına uyguluyoruz: önce tek bir oran p için, sonra iki oranın farkı $p_1 - p_2$ için güven aralığı kuracağız. Bölümün sonunda da bütün aralık türlerini bir arada kullanan çözümlü örnekler var.

15.1 Binom Parametresi p için Aralık Tahmini

Bir kitledeki bireylerin bir kısmı belli bir özelliğe sahip olsun ve bu özelliğe sahip olanların oranı p bilinmesin. Kitleden bağımsız olarak n birey seçip özelliğe sahip olanları sayarsak, bu sayı $X \sim \text{Binom}\ (n, p)$ dağılımına sahiptir (Olasılık Teorisi'ndeki tanım). Burada n bilinir, p tahmin edilecek parametredir.

Tanım 15.1 (Örneklem Oranı). $X \sim \text{Binom}\ (n, p)$ olsun.

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

istatistiğine **örneklem oranı** denir. Ayrıca $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ yazılır.

Yani $\hat{p}$, örneklemdeki başarıların oranıdır. X rastgele bir değişken olduğundan $\hat{p}$ de rastgele bir değişkendir: başka bir örneklem seçilse başka bir değer alır. X'in olanaklı değerleri $0, 1, \ldots, n$ olduğundan $\hat{p}$'nin olanaklı değerleri

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1$$

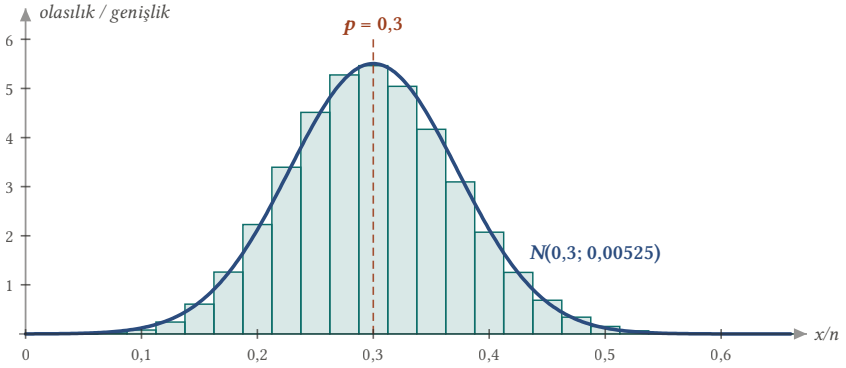
olur. Aralık kurmak için $\hat{p}$'nin dağılımı hakkında üç şey bilmemiz yeter.

Önerme 15.1 (Örneklem Oranının Dağılımı). *$0 < p < 1, X \sim \text{Binom}\ (n, p), q = 1 - p$ ve $\hat{p} = X/n$ olsun.*
1. $E(\hat{p}) = p$; yani $\hat{p}$, p'nin yansız bir tahmin edicisidir.
2. $\text{Var}\ (\hat{p}) = \dfrac{pq}{n}$.
3. n büyükken

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}}$$

yaklaşık olarak $N(0, 1)$ dağılımına sahiptir.
Aşağıdaki şekil $n = 40, p = 0{,}3$ için $\hat{p}$'nin olasılıklarını ve bunları yaklaşık olarak veren $N(p, pq/n)$ eğrisini gösteriyor.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.1: n = 40 ve p = 0,3 iken $\hat{p} = X/n$ oranının olasılıkları: k/40 değerinin olasılığı, genişliği 1/40 olan bir dikdörtgenin alanıdır. Üstteki eğri N(p, pq/n) = N(0,3; 0,00525) yoğunluğudur; dikdörtgenler eğriyi yakından izler ve p = 0,3 çevresinde toplanır.

> ***İspat.***
> *Binom dağılımında $E(X) = np$ ve $\text{Var}\ (X) = npq$'dur (Olasılık Teorisi'ndeki binom momentleri).*
> *1. Beklenen değer doğrusal olduğundan*
>
> $$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{np}{n} = p.$$
>
> *2. Bir sabitle çarpılan değişkenin varyansı, sabitin karesiyle çarpılır:*
>
> $$\text{Var}\ (\hat{p}) = \text{Var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\ \text{Var}\ (X) = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}.$$
>
> *3. Z'nin payını ve paydasını n ile çarpalım:*
>
> $$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{n\hat{p} - np}{n\sqrt{pq/n}} = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}.$$
>
> *Son ifade binom değişkeninin standartlaştırılmış hâlidir. De Moivre-Laplace teoremine (Teorem 5.1) göre n büyükken bu ifade yaklaşık olarak $N(0,1)$ dağılımına sahiptir.*
> ■

Yani $\hat{p}$ ortalamada p'yi tutturur ve varyansı pq/n, n büyüdükçe sıfıra gider: büyük örneklemde $\hat{p}$ değerleri p'nin çevresinde toplanır. Ayrıca $\hat{p}$, n tane Bernoulli gözleminin ortalamasıdır; bu yüzden p'nin doğrusal yansız tahmin edicileri arasında varyansı en küçük olanıdır (Teorem 11.3). Bu yüzden p için aralığı $\hat{p}$'nin çevresinde kuracağız.
Aşağıda $z_{1-\alpha/2}$, standart normal dağılımın $1-\alpha/2$ kantilidir (Tanım 5.1): $P(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$. Örneğin $z_{0,975} = 1{,}96$.

Teorem 15.1 (Binom Parametresi için Güven Aralığı). *$0 < p < 1$, $X \sim \text{Binom}\ (n,p)$, $\hat{p} = X/n$, $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. n büyükken*

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

aralığı p için yaklaşık $\%100(1-\alpha)$ düzeyli bir güven aralığıdır.

> ***İspat.***
> *Kısalık için $z = z_{1-\alpha/2}$ yazalım.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Olasılık ifadesi. *Standart normal dağılım 0'a göre simetrik olduğundan $P(Z<-z)=P(Z>z)=\alpha/2$'dir. İki kuyruk çıkarılınca ortada $1-\alpha$ alan kalır. Önerme 15.1 gereğince n büyükken $(\hat{p}-p)/\sqrt{pq/n}$ yaklaşık standart normal olduğundan*

$$P\left(-z<\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{pq/n}}<z\right)\approx 1-\alpha.$$

p'yi yalnız bırakma. *Eşitsizliğin her tarafını pozitif $\sqrt{pq/n}$ sayısıyla çarpalım:*

$$-z\sqrt{\frac{pq}{n}}<\hat{p}-p<z\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Her taraftan $\hat{p}$ çıkarıp -1 ile çarparsak eşitsizlikler yön değiştirir:

$$P\left(\hat{p}-z\sqrt{\frac{pq}{n}}<p<\hat{p}+z\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\approx 1-\alpha.$$

Sınırları hesaplanabilir yapma. *Bulduğumuz sınırlar bilinmeyen p'yi (ve $q=1-p$'yi) içerir; bu yüzden istatistik değildir ve örneklemden hesaplanamaz. Bu sorunu p yerine yansız tahmin edicisi $\hat{p}$'yi koyarak çözeriz. Bu değişiklik yaklaşımı bozmaz. Büyük sayılar yasasına göre (Sonuç 8.1) n büyüdükçe $\hat{p}$, p'ye olasılıkta yakınsar; $0<p<1$ olduğundan $c_n=\sqrt{pq/(\hat{p}\hat{q})}$ çarpanı da 1'e olasılıkta yakınsar. Dağılımda standart normale yakınsayan bir değişken, olasılıkta 1'e yakınsayan bir çarpanla çarpılınca limit dağılımı değişmez (Slutsky teoremi; bu derste ispatsız kullanıyoruz). Bu yüzden*

$$\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}}=c_n\cdot\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{pq/n}}=\frac{X/n-p}{\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}}$$

de büyük n için yaklaşık $N(0,1)$ dağılımına sahip olur. Yukarıdaki adımlar bu değişkenle tekrarlanınca, sınırlarında yalnız $\hat{p}$ bulunan aralık elde edilir.

■

Yani p için güven aralığı "tahmin $\pm$ hata payı" biçimindedir:

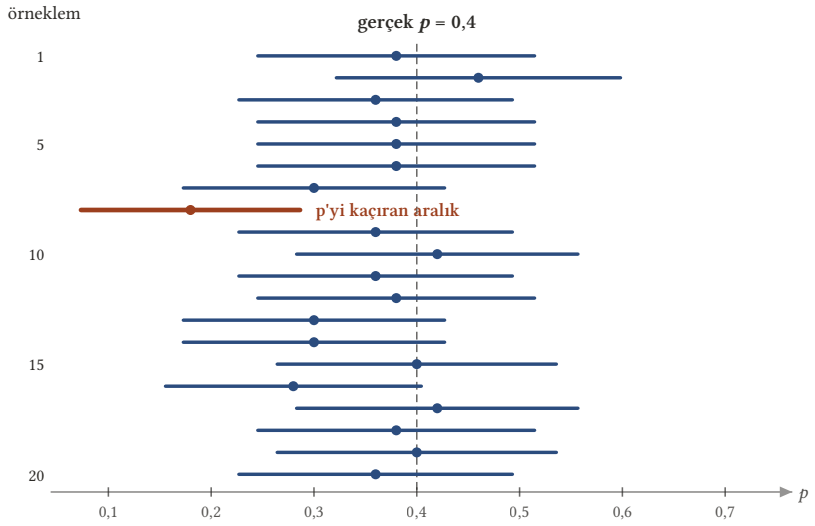
$$\hat{p}\mp E,\qquad E=z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}.$$

Aralığın merkezi örneklem oranı $\hat{p}$, yarı genişliği E'dir; E'ye tahminin **hata payı** da denir. Güven düzeyi büyüdükçe $z_{1-\alpha/2}$ büyür ve aralık genişler; örneklem büyüdükçe $\sqrt{n}$ paydada olduğundan aralık daralır. Aralık bir normal yaklaşıma dayandığından n'nin yeterince büyük olması gerekir; binoma normal yaklaşımdaki kural burada da kullanılır: $n\hat{p}\geq 5$ ve $n\hat{q}\geq 5$ olmalıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

i Güven düzeyi ne anlatır?

p sabit bir sayıdır; rastgele olan aralıktır. Aynı kitleden çok sayıda örneklem alıp her birinden %95'lik bir aralık hesaplarsak, bu aralıkların yaklaşık %95'i p'yi içerir. Aşağıdaki şekilde $p = 0{,}4$ olan bir kitleden alınmış 20 örneklemin aralıkları görülüyor: biri p'yi kaçırıyor. Tek bir örneklemden hesaplanan somut aralık ise p'yi ya içerir ya içermez; "%95 güven", bu aralığı üreten yöntemin uzun vadedeki başarısıdır.



Şekil 15.2: Aynı kitleden (p = 0,4) alınmış 20 ayrı n = 50 hacimli örneklemden hesaplanan %95'lik güven aralıkları; noktalar p̂ değerleridir. Aralıklar örneklemden örnekleme değişir, p ise sabittir. Burada 20 aralığın 19'u p'yi içeriyor; uzun vadede aralıkların yaklaşık %95'i içerir.

Oran için güven aralığı dört adımda

1. $\hat{p} = x/n$ ve $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ değerlerini hesaplayın; $n\hat{p} \geq 5$ ve $n\hat{q} \geq 5$ olduğunu kontrol edin.
2. Güven düzeyinden α'yı ve $z_{1-\alpha/2}$ kantilini bulun (standart normal tablosu).
3. Hata payını hesaplayın: $E = z_{1-\alpha/2}\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n}$.
4. Aralığı $(\hat{p} - E;\, \hat{p} + E)$ olarak yazın ve soru bağlamında yorumlayın.

Örnek 15.1 (Seçim Anketinde Yüzde Doksan Beş Güven). Rastgele seçilen 1500 seçmenin %42'si bir adayı desteklediğini söylüyor. Adayı destekleyen seçmenlerin kitledeki oranı p için %95 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
1. Örneklem oranı. $n = 1500$ ve $\hat{p} = 0{,}42$, dolayısıyla $\hat{q} = 0{,}58$. Ayrıca $n\hat{p} = 630$ ve $n\hat{q} = 870$ sayıları 5'ten çok büyük olduğundan normal yaklaşım rahatça kullanılabilir.
2. Kantil. $1 - \alpha = 0{,}95$ ise $\alpha/2 = 0{,}025$ ve $1 - \alpha/2 = 0{,}975$'tir. Standart normal tablosunda $0{,}975 - 0{,}5 = 0{,}4750$ değeri $1{,}96$'ya karşılık gelir: $z_{0{,}975} = 1{,}96$.
3. Hata payı.

$$\frac{\hat{p}\hat{q}}{n} = \frac{0{,}42 \cdot 0{,}58}{1500} = \frac{0{,}2436}{1500} = 0{,}0001624,$$
$$E = 1{,}96\sqrt{0{,}0001624} \approx 1{,}96 \cdot 0{,}012744 \approx 0{,}0250.$$

4. Aralık.

$$0{,}42 - 0{,}0250 < p < 0{,}42 + 0{,}0250 \quad \Rightarrow \quad 0{,}3950 < p < 0{,}4450.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani adayın kitledeki desteği %95 güvenle yaklaşık %39,5 ile %44,5 arasındadır. Anket sonuçlarında sık görülen “hata payı $\pm 2{,}5$ puan” ifadesi tam olarak bu E sayısıdır.
■

Örnek 15.2 (Seçim Anketinde Yüzde Doksan Dokuz Güven). Rastgele seçilen 1500 seçmenin %42’si bir adayı desteklediğini söylüyor. Adayı destekleyenlerin kitledeki oranı p için %99 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz ve %95’lik aralıkla karşılaştırınız.

Çözüm.
Örneklem aynı olduğundan $\hat{p} = 0{,}42$, $\hat{q} = 0{,}58$ ve $\sqrt{\hat{p}\hat{q}/n} \approx 0{,}012744$ değişmez.
$1 - \alpha = 0{,}99$ ise $1 - \alpha/2 = 0{,}995$’tir. Standart normal tablosunda $0{,}4950$ değeri $2{,}57$ ($0{,}4949$) ile $2{,}58$ ($0{,}4951$) arasının tam ortasına düşer; daha kesin değer $z_{0{,}995} = 2{,}576$’dır. Hata payı

$$E = 2{,}576 \cdot 0{,}012744 \approx 0{,}0328$$

ve aralık

$$0{,}42 - 0{,}0328 < p < 0{,}42 + 0{,}0328 \quad \Rightarrow \quad 0{,}3872 < p < 0{,}4528$$

olur. Aynı veriyle daha yüksek güven istediğimizde z kantili $1{,}96$’dan $2{,}576$’ya çıktı ve aralık $0{,}0500$ genişlikten $0{,}0656$ genişliğe büyüdü. Daha emin olmanın bedeli daha geniş, yani daha az bilgi veren bir aralıktır.
■

Hata payı formülü tersinden de kullanılabilir: istenen bir hata payına ulaşmak için örneklemin ne kadar büyük olması gerektiğini, veri toplanmadan önce hesaplayabiliriz.

Örnek 15.3 (Gereken Örneklem Hacmi). Bir oranı %95 güven düzeyinde en çok $0{,}03$ hata payıyla tahmin etmek istiyoruz. p hakkında hiçbir ön bilgi yoksa en az kaç birimlik örneklem alınmalıdır?

Çözüm.
Hata payının $0{,}03$’ü aşmaması için

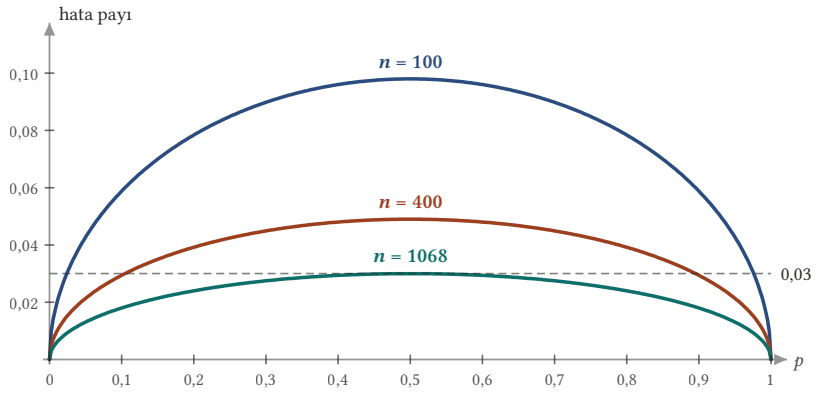
$$1{,}96\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le 0{,}03$$

olmalıdır. Sorun şu: $\hat{p}$ ancak veri toplandıktan sonra bilinir. Ama $\hat{p}\hat{q}$ çarpımının alabileceği en büyük değeri biliyoruz. $0 \le t \le 1$ için

$$t(1-t) = \frac{1}{4} - \Big(t - \frac{1}{2}\Big)^2 \le \frac{1}{4}$$

ve eşitlik yalnız $t = \tfrac{1}{2}$’de sağlanır. Yani hata payı $\hat{p} = \tfrac{1}{2}$ iken en büyüktür. Aşağıdaki şekil bunu üç farklı n için gösteriyor.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.3: %95 güven düzeyinde hata payı 1,96·√(p(1 − p)/n), p'nin fonksiyonu olarak. Her n için en büyük değer p = 1/2'de alınır; n = 1068 iken bu en büyük değer bile 0,03'ün altında kalır.

En kötü durumda bile hata payının 0,03'ü aşmaması için $\hat{p}\hat{q}$ yerine $\frac{1}{4}$ koyalım:

$$1{,}96\sqrt{\frac{1}{4n}} \leq 0{,}03 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1{,}96}{2 \cdot 0{,}03} \Leftrightarrow n \geq \left(\frac{1{,}96}{0{,}06}\right)^2 \approx 1067{,}1.$$

n tam sayı olduğundan en az 1068 birim seçilmelidir. Bu hacimle, $\hat{p}$ ne çıkarsa çıksın, hata payı 0,03'ü aşmaz.
■

15.2 İki Binom Parametresinin Farkı için Aralık Tahmini

Çoğu zaman tek bir oranı değil, iki oranı karşılaştırmak isteriz: iki makinenin kusur oranı, aşılı ve aşısız gruplarda hastalanma oranı. İki kitleden birbirinden bağımsız iki örneklem alalım: birinci kitleden n_1 birimde X_1 başarı, ikinci kitleden n_2 birimde X_2 başarı gözlensin. $X_1 \sim \text{Binom}\,(n_1, p_1)$ ve $X_2 \sim \text{Binom}\,(n_2, p_2)$ bağımsızdır; tahmin edilecek büyüklük $p_1 - p_2$ farkıdır. Doğal nokta tahmini, örneklem oranlarının farkıdır:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = \frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}.$$

Önerme 15.2 (İki Örneklem Oranının Farkı). *$0 < p_1, p_2 < 1$ olmak üzere $X_1 \sim \text{Binom}\,(n_1, p_1)$ ve $X_2 \sim \text{Binom}\,(n_2, p_2)$ bağımsız, $q_i = 1 - p_i$ ve $\hat{p}_i = X_i/n_i$ olsun.*
1. $E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = p_1 - p_2$.
2. $\text{Var}\,(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \dfrac{p_1 q_1}{n_1} + \dfrac{p_2 q_2}{n_2}$.
3. n_1 ve n_2 büyükken

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

yaklaşık olarak $N(0,1)$ dağılımına sahiptir.

İspat.
1. Beklenen değerin doğrusallığı ve Önerme 15.1 kullanılarak

$$E(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = E(\hat{p}_1) - E(\hat{p}_2) = p_1 - p_2.$$

2. $\hat{p}_1$ ile $\hat{p}_2$ bağımsız olduğundan kovaryansları 0'dır ve farkın varyansı varyansların toplamıdır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\text{Var}\,(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \text{Var}\,(\hat{p}_1) + \text{Var}\,(\hat{p}_2) = \frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}.$$

3. Önerme 15.1 gereğince $\hat{p}_1$ yaklaşık $N(p_1, p_1q_1/n_1)$, $\hat{p}_2$ yaklaşık $N(p_2, p_2q_2/n_2)$ dağılımına sahiptir ve ikisi bağımsızdır. Bağımsız normal değişkenlerin farkı da normaldir (Sonuç 5.1); dolayısıyla $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ yaklaşık olarak 1. ve 2. maddelerdeki ortalama ve varyansla normal dağılır. Bu değişkeni standartlaştırınca Z elde edilir.
■

Tek oranda olduğu gibi, bu olasılık ifadesini $p_1 - p_2$ için çözüp bilinmeyen varyansı tahminiyle değiştiririz.

Teorem 15.2 (İki Binom Parametresinin Farkı için Güven Aralığı). *Önerme 15.2 içindeki varsayımlar altında $\hat{q}_i = 1 - \hat{p}_i$ olsun. n_1 ve n_2 büyükken $p_1 - p_2$ için yaklaşık $\%100(1-\alpha)$ düzeyli güven aralığının sınırları*

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$$

dir.

İspat.
$z = z_{1-\alpha/2}$ ve $\sigma_D = \sqrt{p_1q_1/n_1 + p_2q_2/n_2}$ yazalım. Önerme 15.2 gereğince

$$P\left(-z < \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sigma_D} < z\right) \approx 1 - \alpha.$$

Eşitsizliği pozitif σ_D ile çarpıp tek oranda yaptığımız gibi düzenleyelim:

$$P\left((\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - z\sigma_D < p_1 - p_2 < (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) + z\sigma_D\right) \approx 1 - \alpha.$$

Bu sınırlar bilinmeyen p_1 ve p_2'yi içerdiğinden istatistik değildir. Parametreleri nokta tahmin edicileri $\hat{p}_1 = X_1/n_1$ ve $\hat{p}_2 = X_2/n_2$ ile değiştiririz. Büyük sayılar yasasına göre (Sonuç 8.1) $\hat{p}_i$, p_i'ye olasılıkta yakınsadığından tahmin edilmiş standart sapmanın σ_D'ye oranı olasılıkta 1'e yakınsar; tek oranın ispatındaki gibi Slutsky teoremiyle standartlaştırılmış fark yine yaklaşık $N(0,1)$ dağılır ve olasılık yaklaşık $1-\alpha$ kalır. Böylece teoremdeki sınırlar bulunur.
■

Yani iki oranın farkı için aralık da "tahmin $\pm$ hata payı" biçimindedir; iki örneklem bağımsız olduğundan hata payının karekökü altında iki örneklemin varyans tahminleri toplanır. Aralığın yorumunda 0 önemlidir: aralık 0'ı içeriyorsa veriler $p_1 = p_2$ ile çelişmez; aralığın tamamı 0'ın bir tarafındaysa oranlardan biri öbüründen belirgin biçimde büyüktür.

Örnek 15.4 (İki Makinenin Kusur Oranları). Birinci makinenin ürettiği parçalardan rastgele seçilen 200 parçanın 18'i, ikinci makinenin ürettiklerinden rastgele seçilen 250 parçanın 15'i kusurlu çıkıyor. Kusur oranlarının farkı $p_1 - p_2$ için $\%95$'lik bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Örneklem oranları.

$$\hat{p}_1 = \frac{18}{200} = 0{,}09, \qquad \hat{p}_2 = \frac{15}{250} = 0{,}06, \qquad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0{,}03.$$

Başarı ve başarısızlık sayıları (18, 182, 15, 235) 5'ten büyük olduğundan normal yaklaşım kullanılabilir.
Standart sapma tahmini.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} = \frac{0{,}09 \cdot 0{,}91}{200} = 0{,}0004095,$$
$$\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2} = \frac{0{,}06 \cdot 0{,}94}{250} = 0{,}0002256,$$
$$\sqrt{0{,}0004095 + 0{,}0002256} = \sqrt{0{,}0006351} \approx 0{,}02520.$$

Aralık. $z_{0{,}975} = 1{,}96$ (standart normal tablosu) olduğundan hata payı $E = 1{,}96 \cdot 0{,}02520 \approx 0{,}0494$'tür ve

$$0{,}03 - 0{,}0494 < p_1 - p_2 < 0{,}03 + 0{,}0494 \quad \Rightarrow \quad -0{,}0194 < p_1 - p_2 < 0{,}0794.$$

Aralık 0'ı içerir. Örneklemde birinci makinenin kusur oranı daha yüksek çıksa da bu fark, örneklemden örnekleme doğal olarak oluşabilecek bir farktır; verilere göre iki makinenin kusur oranları eşit olabilir. ■

15.3 Aralık Tahmini Örnekleri

Buraya kadar ortalama, varyans ve oran için ayrı ayrı güven aralıkları kurduk. Bir soruda asıl iş, hangi aralığın kullanılacağına karar vermektir. Aşağıdaki reçete ve tablo bu kararı verir; ardından gelen örnekler her aralık türünü en az bir kez uygular.

Güven aralığı sorusu üç adımda

1. **Parametreyi belirleyin:** tek kitlenin ortalaması mı, varyansı mı, oranı mı; yoksa iki kitlenin ortalamaları farkı, varyansları oranı ya da oranları farkı mı?
2. **Durumu belirleyin ve dağılımı seçin:** kitle varyansı biliniyor mu, örneklem büyük mü, kitleler normal mi, iki varyans eşit kabul ediliyor mu?

Parametre	Durum	Dağılım	Bölüm
μ	σ biliniyor ya da n büyük	Z	Ortalama
μ	normal kitle, σ bilinmiyor	t_{n-1}	Ortalama
σ^2	normal kitle	χ^2_{n-1}	Varyans
σ_1^2/σ_2^2	iki normal kitle	$F_{n_1-1,\,n_2-1}$	Varyans
$\mu_1 - \mu_2$	varyanslar biliniyor	Z	İki kitle
$\mu_1 - \mu_2$	bilinmiyor, eşit	$t_{n_1+n_2-2}$	İki kitle
$\mu_1 - \mu_2$	bilinmiyor, farklı	t_ν	İki kitle
p	n büyük	Z	Teorem 15.1
$p_1 - p_2$	n_1, n_2 büyük	Z	Teorem 15.2

3. **Hesaplayıp yorumlayın:** tablodan kantili okuyun (Tablolar), sınırları hesaplayın ve aralığın ne söylediğini soru bağlamında yazın.

Örnek 15.5 (Kitle Ortalaması: Parça Uzunluğu). Bir üretim sürecinde üretilen parçaların uzunluklarının standart sapması 0,45 mm olarak biliniyor. Bir kalite kontrol uzmanı her sabah rastgele seçtiği 40 parçayı ölçüyor. Bir gün ölçülen ortalama uzunluk 35,62 mm olduğuna göre, kitle ortalaması μ için %95 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Durum. Parametre tek kitlenin ortalaması μ'dür ve kitle standart sapması $\sigma = 0{,}45$ bilinmektedir. Bu durumda $\bar{X}$'in standartlaştırılmışı standart normal dağılıma sahip olduğundan ortalama için Z aralığı kullanılır:

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Veriler. $n = 40$, $\bar{x} = 35{,}62$, $\sigma = 0{,}45$, $1-\alpha = 0{,}95$. Buradan $\alpha/2 = 0{,}025$ ve $z_{0{,}975} = 1{,}96$ (standart normal tablosu).
Hesap.

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}45}{\sqrt{40}} \approx \frac{0{,}45}{6{,}3246} \approx 0{,}07115, \qquad E = 1{,}96 \cdot 0{,}07115 \approx 0{,}1395.$$

$$35{,}62 - 0{,}1395 < \mu < 35{,}62 + 0{,}1395 \quad \Rightarrow \quad 35{,}48 < \mu < 35{,}76.$$

Yani parçaların ortalama uzunluğu %95 güvenle 35,48 mm ile 35,76 mm arasındadır.
■

Örnek 15.6 (Kitle Ortalaması: İyileşme Süresi). Bir hastalığın tedavisi için yeni bir yöntem geliştiriliyor. Rastgele seçilen 12 hasta bu yöntemle tedavi ediliyor ve iyileşinceye kadar geçen süreler (gün) şöyle ölçülüyor:

$$10,\ 12,\ 8,\ 9,\ 9,\ 17,\ 9,\ 14,\ 3,\ 7,\ 12,\ 10.$$

İyileşme sürelerinin normal dağıldığını varsayarak ortalama iyileşme süresi μ için %95 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Durum. Kitle varyansı bilinmiyor ve örneklem küçük; kitle normal olduğundan σ yerine örneklem standart sapması S kullanılır ve ortalama için t aralığı kurulur:

$$\bar{x} - t_{n-1,\,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{n-1,\,1-\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Örneklem ortalaması. Gözlemlerin toplamı 120 olduğundan $\bar{x} = 120/12 = 10$.
Örneklem varyansı. Her gözlemin ortalamadan farkının karesi sırasıyla

$$0,\ 4,\ 4,\ 1,\ 1,\ 49,\ 1,\ 16,\ 49,\ 9,\ 4,\ 0$$

ve bunların toplamı 138'dir. Buradan

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{138}{11} \approx 12{,}545, \qquad s \approx 3{,}542.$$

Kantil. Serbestlik derecesi $n-1 = 11$'dir. t tablosundan $t_{11,\,0{,}975} = 2{,}201$.
Aralık.

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{12{,}545}{12}} \approx 1{,}0225, \qquad E = 2{,}201 \cdot 1{,}0225 \approx 2{,}250.$$

$$10 - 2{,}250 < \mu < 10 + 2{,}250 \quad \Rightarrow \quad 7{,}75 < \mu < 12{,}25.$$

Yani bu yöntemle ortalama iyileşme süresi %95 güvenle yaklaşık 7,75 ile 12,25 gün arasındadır.
■

Örnek 15.7 (Kitle Ortalaması: Tansiyon Ölçümleri). Yeni bir ilaç 8 kalp hastası üzerinde deneniyor. Hastaların tansiyonlarının ortalaması 11, örneklem standart sapması 3,207 olarak bulunuyor. Tansiyonların normal dağıldığını varsayarak kitle ortalaması μ için %95 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Durum. σ bilinmiyor; verilen 3,207 örneklemden hesaplanmış standart sapma s'dir. Örneklem küçük ve kitle normal olduğundan t aralığı kullanılır.
Veriler. $n = 8$, $\bar{x} = 11$, $s = 3{,}207$, $1 - \alpha = 0{,}95$. Serbestlik derecesi 7 ve t tablosundan $t_{7,\,0{,}975} = 2{,}365$.
Hesap.

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}207}{\sqrt{8}} \approx \frac{3{,}207}{2{,}8284} \approx 1{,}1339, \qquad E = 2{,}365 \cdot 1{,}1339 \approx 2{,}682.$$

$$11 - 2{,}682 < \mu < 11 + 2{,}682 \quad \Rightarrow \quad 8{,}32 < \mu < 13{,}68.$$

■

Örnek 15.8 (Kitle Ortalaması: Büyük Örneklemde Normal Yaklaşım). Bir önceki örnekteki ilaç 8 yerine 136 kalp hastası üzerinde denenseydi ve yine ortalama 11, örneklem standart sapması 3,207 bulunsaydı, μ için %95'lik güven aralığı ne olurdu?

Çözüm.
Durum. σ yine bilinmiyor, ama bu kez $n = 136$ büyüktür. Serbestlik derecesi 135 olan t dağılımı standart normale çok yakındır: $t_{135,\,0{,}975}$ değeri t tablosunda $\nu = 120$ satırındaki 1,980 ile $\nu = \infty$ satırındaki 1,960 arasındadır. Bu yüzden genel kural olarak $n > 30$ iken t kantili yerine z kantili kullanılır (ortalama için aralık tahmini): $z_{0{,}975} = 1{,}96$.
Hesap.

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}207}{\sqrt{136}} \approx \frac{3{,}207}{11{,}6619} \approx 0{,}2750, \qquad E = 1{,}96 \cdot 0{,}2750 \approx 0{,}539.$$

$$11 - 0{,}539 < \mu < 11 + 0{,}539 \quad \Rightarrow \quad 10{,}46 < \mu < 11{,}54.$$

Kesin $t_{135,\,0{,}975} \approx 1{,}978$ değeriyle hesaplansa da iki ondalıkta aynı aralık çıkar. Örneklem 17 katına çıkınca aralığın genişliği 5,36'dan 1,08'e düştü: hem $\sqrt{n}$ büyüdü hem de kantil 2,365'ten 1,96'ya indi.
■

Örnek 15.9 (Ortalamalar Farkı: Varyanslar Biliniyor). Uçak kanatlarında kullanılan iki tür alüminyum direğin dayanıklılığı test ediliyor. Sonuçlar aşağıdadır:

Direk	Denek sayısı	Örneklem ortalaması	Kitle varyansı
A	$n_1 = 18$	$\bar{x}_1 = 200$	$\sigma_1^2 = 15$
B	$n_2 = 20$	$\bar{x}_2 = 190$	$\sigma_2^2 = 12$

Dayanıklılıkların normal dağıldığını varsayarak kitle ortalamaları farkı $\mu_1 - \mu_2$ için %90 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Durum. İki bağımsız normal kitlenin ortalamaları karşılaştırılıyor ve kitle varyansları biliniyor. Bu durumda $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$, ortalaması $\mu_1 - \mu_2$ ve varyansı $\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2$ olan bir normal dağılıma sahip olduğundan iki ortalamanın farkı için Z aralığı kullanılır:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}.$$

Kantil. $1 - \alpha = 0{,}90$ ise $1 - \alpha/2 = 0{,}95$'tir. Standart normal tablosunda 0,4500 değeri 1,64 (0,4495) ile 1,65 (0,4505) arasının tam ortasındadır: $z_{0{,}95} = 1{,}645$.
Hesap.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sqrt{\frac{15}{18}+\frac{12}{20}} = \sqrt{0{,}8333+0{,}6} = \sqrt{1{,}4333} \approx 1{,}1972,$$
$$E = 1{,}645 \cdot 1{,}1972 \approx 1{,}969.$$

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 10$ olduğundan

$$10 - 1{,}969 < \mu_1 - \mu_2 < 10 + 1{,}969 \quad \Rightarrow \quad 8{,}03 < \mu_1 - \mu_2 < 11{,}97.$$

Aralığın tamamı pozitiftir: %90 güvenle A direklerinin ortalama dayanıklılığı B direklerininkinden 8 ile 12 birim kadar fazladır.
■

Örnek 15.10 (Ortalamalar Farkı: Varyanslar Eşit Kabul Ediliyor). A markası otomobil lastiklerinden 7, B markasından 10 lastik seçilip aynı iklim ve yol koşullarında dayanma süreleri ölçülüyor:

A: 10, 27, 7, 15, 18, 20, 8,
B: 14, 12, 16, 14, 15, 13, 17, 11, 16, 12.

Dayanma sürelerinin iki marka için de normal dağıldığı ve koşullar aynı olduğundan kitle varyanslarının eşit olduğu kabul ediliyor. $\mu_1 - \mu_2$ için %90 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Durum. Kitle varyansları bilinmiyor fakat eşit kabul ediliyor. Bu durumda iki örneklemin varyansları birleştirilerek ortak varyans tahmini

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

hesaplanır ve birleştirilmiş t aralığı kullanılır:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp t_{n_1+n_2-2,\,1-\alpha/2}\, s_p \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

A markası. Toplam 105, $\bar{x}_1 = 105/7 = 15$. Ortalamadan farkların kareleri $25, 144, 64, 0, 9, 25, 49$ ve toplamları 316; $s_1^2 = 316/6 \approx 52{,}67$.
B markası. Toplam 140, $\bar{x}_2 = 140/10 = 14$. Farkların kareleri $0, 4, 4, 0, 1, 1, 9, 9, 4, 4$ ve toplamları 36; $s_2^2 = 36/9 = 4$.
Ortak varyans.

$$s_p^2 = \frac{6 \cdot \frac{316}{6} + 9 \cdot 4}{7+10-2} = \frac{316+36}{15} = \frac{352}{15} \approx 23{,}467, \qquad s_p \approx 4{,}844.$$

Kantil. Serbestlik derecesi $7+10-2 = 15$ ve $1-\alpha/2 = 0{,}95$; t tablosundan $t_{15,\,0{,}95} = 1{,}753$.
Aralık.

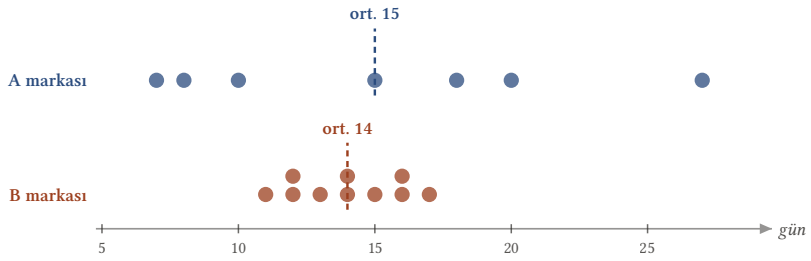
$$E = 1{,}753 \cdot 4{,}844 \cdot \sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{10}} = 1{,}753 \cdot 4{,}844 \cdot \sqrt{\frac{17}{70}}$$
$$\approx 1{,}753 \cdot 4{,}844 \cdot 0{,}4928 \approx 4{,}185.$$

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1$ olduğundan

$$1 - 4{,}185 < \mu_1 - \mu_2 < 1 + 4{,}185 \quad \Rightarrow \quad -3{,}18 < \mu_1 - \mu_2 < 5{,}18.$$

Aralık 0'ı içerir; verilere göre iki markanın ortalama dayanma süreleri eşit olabilir.
Aşağıdaki şekil verilere bir kez daha bakmanın yararını gösteriyor: ortalamalar yakın, ama A markasının gözlemleri çok daha geniş bir alana yayılmış.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.4: İki lastik markasının dayanma süreleri. Ortalamalar (15 ve 14) birbirine yakın, fakat A markasının gözlemleri B markasınınkilerden çok daha geniş bir alana yayılmış.

Örneklem varyanslarının oranı $s_1^2/s_2^2 \approx 13{,}2$ gibi büyük bir sayıdır ve eşit varyans varsayımını kuşkulu kılar. Varsayım bırakılırsa bir sonraki örnekteki gibi farklı varyanslar için t aralığı kullanılır. Bu veride o aralığın serbestlik derecesi $\nu \approx 6{,}64$, yani 6 çıkar; $t_{6,\,0{,}95} = 1{,}943$ ve $\sqrt{s_1^2/7 + s_2^2/10} \approx 2{,}815$ ile aralık $-4{,}47 < \mu_1 - \mu_2 < 6{,}47$ olur. Varsayım değişince aralık genişledi, ama sonuç aynı kaldı: aralık yine 0'ı içeriyor.
■

Örnek 15.11 (Ortalamalar Farkı: Tedavi Yöntemleri, Eşit Varyanslar). Bir hastalığa yakalanmış hastalardan rastgele seçilen 8'i cerrahi yöntemle, 9'u ilaçla tedavi ediliyor. İyileşme süreleri (gün) şöyledir:

$$\begin{aligned} \text{cerrahi:}&\quad 15,\,15,\,20,\,18,\,20,\,17,\,22,\,17,\\ \text{ilaç:}&\quad 12,\,15,\,7,\,10,\,9,\,18,\,12,\,16,\,9. \end{aligned}$$

İki kitlede iyileşme sürelerinin normal dağıldığını ve kitle varyanslarının eşit olduğunu varsayarak $\mu_1 - \mu_2$ için %99 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Örneklem ortalamaları. Cerrahi grubun toplamı 144, ilaç grubunun toplamı 108'dir:

$$\bar{x}_1 = \frac{144}{8} = 18, \qquad \bar{x}_2 = \frac{108}{9} = 12, \qquad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 6.$$

Örneklem varyansları. Cerrahi grupta ortalamadan farkların kareleri $9, 9, 4, 0, 4, 1, 16, 1$ ve toplamları 44; ilaç grubunda $0, 9, 25, 4, 9, 36, 0, 16, 9$ ve toplamları 108'dir:

$$s_1^2 = \frac{44}{7} \approx 6{,}286, \qquad s_2^2 = \frac{108}{8} = 13{,}5.$$

Ortak varyans. Varyanslar eşit kabul edildiğinden (birleştirilmiş t aralığı)

$$s_p^2 = \frac{7 \cdot \frac{44}{7} + 8 \cdot 13{,}5}{8 + 9 - 2} = \frac{44 + 108}{15} = \frac{152}{15} \approx 10{,}133, \qquad s_p \approx 3{,}183.$$

Kantil. $1 - \alpha = 0{,}99$ ise $1 - \alpha/2 = 0{,}995$; serbestlik derecesi 15 ve t tablosundan $t_{15,\,0{,}995} = 2{,}947$.
Aralık.

$$E = 2{,}947 \cdot 3{,}183 \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{9}} \approx 2{,}947 \cdot 3{,}183 \cdot 0{,}4859 \approx 4{,}558,$$

$$6 - 4{,}558 < \mu_1 - \mu_2 < 6 + 4{,}558 \quad \Rightarrow \quad 1{,}44 < \mu_1 - \mu_2 < 10{,}56.$$

Aralığın tamamı pozitiftir: %99 güvenle cerrahi tedavide iyileşme ilaç tedavisine göre ortalama 1,44 ile 10,56 gün daha uzun sürer.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 15.12 (Ortalamalar Farkı: Tedavi Yöntemleri, Farklı Varyanslar). Bir önceki örnekteki iyileşme süreleri için (8 cerrahi, 9 ilaç hastası) kitle varyanslarının eşit olduğu varsayılmasın. Kitleler yine normal olmak üzere $\mu_1 - \mu_2$ için %99 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Durum. Varyanslar bilinmiyor ve farklı kabul ediliyor. Bu durumda her örneklemin kendi varyansı kullanılır ve farklı varyanslar için t aralığı kurulur:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \mp t_{\nu,\,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}, \qquad \nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}}.$$

Serbestlik derecesi tam sayı çıkmazsa aşağı yuvarlanır; bu, kantili biraz büyütür ve aralığı güvenli tarafta tutar.
Bileşenler. Önceki örnekten $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 6$, $s_1^2 = 44/7$ ve $s_2^2 = 13{,}5$:

$$\frac{s_1^2}{n_1} = \frac{44/7}{8} = \frac{11}{14} \approx 0{,}7857, \qquad \frac{s_2^2}{n_2} = \frac{13{,}5}{9} = 1{,}5, \qquad \text{toplam} \quad \frac{16}{7} \approx 2{,}2857.$$

Serbestlik derecesi.

$$\nu = \frac{2{,}2857^2}{\dfrac{0{,}7857^2}{7} + \dfrac{1{,}5^2}{8}} \approx \frac{5{,}2245}{0{,}0882 + 0{,}2813} \approx \frac{5{,}2245}{0{,}3694} \approx 14{,}14,$$

aşağı yuvarlanınca $\nu = 14$. t tablosundan $t_{14,\,0{,}995} = 2{,}977$.
Aralık.

$$E = 2{,}977\sqrt{2{,}2857} \approx 2{,}977 \cdot 1{,}5119 \approx 4{,}501,$$

$$6 - 4{,}501 < \mu_1 - \mu_2 < 6 + 4{,}501 \quad \Rightarrow \quad 1{,}50 < \mu_1 - \mu_2 < 10{,}50.$$

Eşit varyans varsayımıyla bulunan $(1{,}44;\ 10{,}56)$ aralığına çok yakın bir sonuç çıktı. Burada örneklem varyansları (6,29 ve 13,5) birbirinden çok uzak olmadığından iki yöntem neredeyse aynı sonucu verir; sonuç yine cerrahi tedavide iyileşmenin daha uzun sürdüğüdür.
■

Örnek 15.13 (Kitle Varyansı: Yaş Dağılımı). Bir sosyolog bisiklet hırsızlığı üzerine bir araştırmada 8 çocuğu inceliyor. Çocukların yaş ortalaması 16,9, örneklem standart sapması 5,2 bulunuyor. Yaşların normal dağıldığını varsayarak kitle varyansı σ^2 için %95 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Durum. Soru ortalamayı değil, yaşların değişkenliğini, yani σ^2'yi soruyor; örneklem ortalaması bu hesapta kullanılmaz. Normal kitlede $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$ olduğundan varyans için χ^2 aralığı kullanılır:

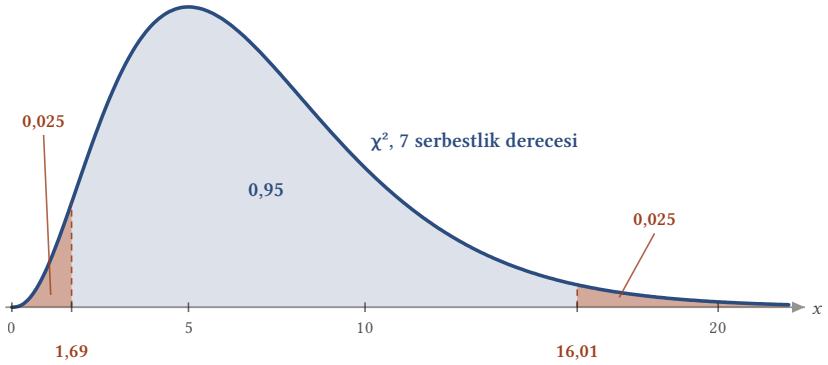
$$P\left(\chi^2_{n-1,\,\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

eşitsizliği σ^2 için çözülünce (terslerini alırken eşitsizlikler yön değiştirir)

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\,\alpha/2}}.$$

Kantiller. $n - 1 = 7$, $\alpha/2 = 0{,}025$. χ^2 tablosundan $\chi^2_{7,\,0{,}025} = 1{,}69$ ve $\chi^2_{7,\,0{,}975} = 16{,}01$. χ^2 dağılımı simetrik olmadığından iki kantil ayrı ayrı okunur:

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.5: 7 serbestlik dereceli χ^2 yoğunluğu. Solunda 0,025 alan bırakan nokta 1,69, solunda 0,975 alan bırakan nokta 16,01'dir; ikisinin arasında 0,95 alan kalır. Eğri simetrik olmadığından iki nokta ortalama 7'ye eşit uzaklıkta değildir.

Hesap. $s^2 = 5{,}2^2 = 27{,}04$ ve $(n-1)s^2 = 7 \cdot 27{,}04 = 189{,}28$. Buradan

$$\frac{189{,}28}{16{,}01} < \sigma^2 < \frac{189{,}28}{1{,}69} \quad \Rightarrow \quad 11{,}82 < \sigma^2 < 112{,}00.$$

Karekök alınırsa standart sapma için $3{,}44 < \sigma < 10{,}58$ bulunur. Yalnız 8 gözlemle varyans çok belirsiz tahmin edilir; aralığın üst ucu alt ucunun yaklaşık 9,5 katıdır.
■

Örnek 15.14 (Varyanslar Oranı: Yetenek Testi). Liseyi bitirmiş 13 erkek ve 16 kız öğrenciye bir genel yetenek testi uygulanıyor. Erkeklerin not ortalaması 82, örneklem standart sapması 8; kızların not ortalaması 78, örneklem standart sapması 7'dir. σ_1^2 ve σ_2^2 sırasıyla erkek ve kız öğrenci kitlelerinin varyansları olmak üzere, notların normal dağıldığını varsayarak σ_1^2/σ_2^2 için %90'lık bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Durum. İki normal kitlenin varyansları karşılaştırılıyor. $\nu_1 = n_1 - 1$ ve $\nu_2 = n_2 - 1$ olmak üzere

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{\nu_1,\nu_2}$$

olduğundan varyanslar oranı için F aralığı kullanılır.

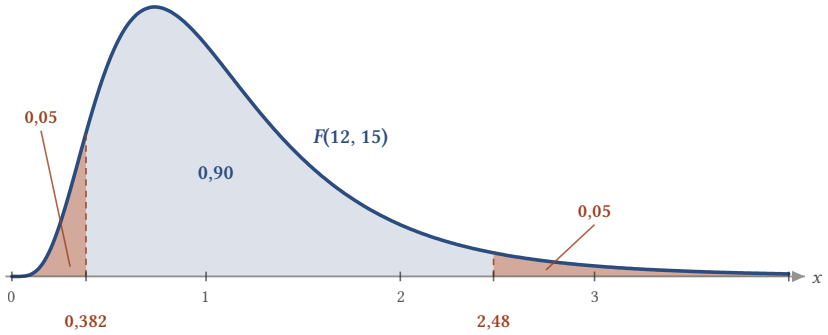
$$P\left(F_{\nu_1,\nu_2,\,\alpha/2} < F < F_{\nu_1,\nu_2,\,1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

eşitsizliği σ_1^2/σ_2^2 için çözülür ve $F_{\nu_1,\nu_2,\,\alpha/2} = 1/F_{\nu_2,\nu_1,\,1-\alpha/2}$ kullanılırsa

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\nu_1,\nu_2,\,1-\alpha/2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot F_{\nu_2,\nu_1,\,1-\alpha/2}$$

bulunur.
Veriler. $n_1 = 13$, $n_2 = 16$, dolayısıyla $\nu_1 = 12$, $\nu_2 = 15$. $s_1^2 = 64$, $s_2^2 = 49$ ve $s_1^2/s_2^2 = 64/49 \approx 1{,}3061$.
Kantiller. $1 - \alpha = 0{,}90$ ise $1 - \alpha/2 = 0{,}95$. F tablosundan $F_{12,15,\,0{,}95} = 2{,}48$ ve $F_{15,12,\,0{,}95} = 2{,}62$. Sol kuyruk kantili $F_{12,15,\,0{,}05} = 1/2{,}62 \approx 0{,}382$ olur:

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.6: (12, 15) serbestlik dereceli F yoğunluğu. Solunda 0,95 alan bırakan nokta 2,48, solunda 0,05 alan bırakan nokta $1/2{,}62 \approx 0{,}382$'dir ($2{,}62$, serbestlik dereceleri yer değiştirmiş F(15, 12) dağılımının 0,95 kantilidir); aralarında 0,90 alan kalır.

Aralık.

$$\frac{1{,}3061}{2{,}48} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1{,}3061 \cdot 2{,}62 \quad \Rightarrow \quad 0{,}527 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3{,}422.$$

Aralık 1'i içerir; verilere göre iki kitlenin not varyansları eşit olabilir.
■

Örnek 15.15 (Varyanslar Oranı: Mısır Verimi). İki çeşit mısır aynı büyüme koşullarında sırasıyla 7 ve 13 dönümlük alanlara ekiliyor. Dönüm başına verimlerin (kg) örneklem varyansı birinci çeşit için 6,5, ikinci çeşit için 14,4 bulunuyor. σ_1^2 ve σ_2^2 çeşitlerin kitle varyansları olmak üzere, verimlerin normal dağıldığını varsayarak σ_1^2/σ_2^2 için %98'lik bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Durum. Bir önceki örnekteki gibi varyanslar oranı için F aralığı kullanılır:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\nu_1,\nu_2,\,1-\alpha/2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot F_{\nu_2,\nu_1,\,1-\alpha/2}.$$

Veriler. $n_1 = 7$, $n_2 = 13$, dolayısıyla $\nu_1 = 6$, $\nu_2 = 12$. Oran $s_1^2/s_2^2 = 6{,}5/14{,}4 \approx 0{,}4514$.
Kantiller. $1-\alpha = 0{,}98$ ise $\alpha/2 = 0{,}01$ ve $1-\alpha/2 = 0{,}99$. F tablosundan $F_{6,12,\,0{,}99} = 4{,}82$ ve $F_{12,6,\,0{,}99} = 7{,}72$.
Aralık.

$$\frac{0{,}4514}{4{,}82} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 0{,}4514 \cdot 7{,}72 \quad \Rightarrow \quad 0{,}094 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3{,}485.$$

Aralık 1'i içerdiğinden verimlerin değişkenliği iki çeşitte eşit olabilir. Örneklemler küçük ve güven düzeyi yüksek olduğundan aralık çok geniştir.
■

Örnek 15.16 (Tek Oran: Ölüm Oranı). Akciğer kanseri olan 1000 hasta rastgele seçiliyor ve bunların 823'ünün öldüğü görülüyor. Akciğer kanserli hastalarda ölüm oranı p için %95 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Durum. Her hasta için "öldü" ya da "ölmedi" sonucu olduğundan ölenlerin sayısı binom dağılımına sahiptir ve tek bir oran tahmin ediliyor: Teorem 15.1 kullanılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örneklem oranı. $\hat{p} = 823/1000 = 0{,}823$ ve $\hat{q} = 0{,}177$. $n\hat{p} = 823$ ve $n\hat{q} = 177$ olduğundan normal yaklaşım uygundur.
Kantil. $z_{0{,}975} = 1{,}96$ (standart normal tablosu).
Hesap.

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}823 \cdot 0{,}177}{1000}} = \sqrt{0{,}000145671} \approx 0{,}012069,$$
$$E = 1{,}96 \cdot 0{,}012069 \approx 0{,}0237.$$

$$0{,}823 - 0{,}0237 < p < 0{,}823 + 0{,}0237 \quad \Rightarrow \quad 0{,}7993 < p < 0{,}8467.$$

Yani akciğer kanserli hastalarda ölüm oranı %95 güvenle yaklaşık %79,9 ile %84,7 arasındadır.
■

Örnek 15.17 (Oranlar Farkı: Grip Aşısı). Grip aşısının etkisini görmek için rastgele seçilen 3000 kişiye aşı yapılıyor ve sonradan bunlardan 130'unun grip olduğu görülüyor. Kontrol grubu olarak seçilen ve aşı yapılmayan 2500 kişiden 170'i grip oluyor. p_1 aşılananların, p_2 aşılanmayanların grip olma oranı olmak üzere $p_1 - p_2$ için %95 güven düzeyinde bir güven aralığı bulunuz.

Çözüm.
Durum. İki bağımsız örneklemde iki oran karşılaştırılıyor: Teorem 15.2 kullanılır.
Örneklem oranları.

$$\hat{p}_1 = \frac{130}{3000} \approx 0{,}04333, \qquad \hat{p}_2 = \frac{170}{2500} = 0{,}068, \qquad \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \approx -0{,}02467.$$

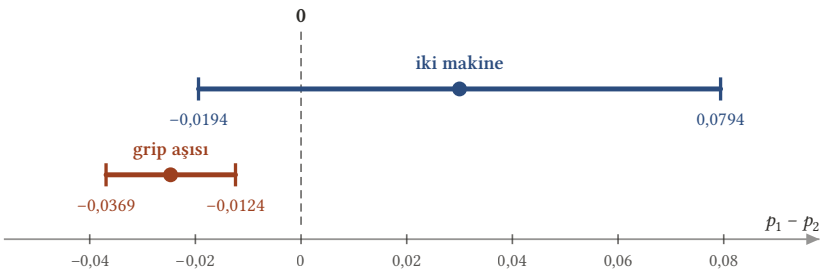
Standart sapma tahmini.

$$\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} = \frac{0{,}04333 \cdot 0{,}95667}{3000} \approx 0{,}00001382,$$
$$\frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2} = \frac{0{,}068 \cdot 0{,}932}{2500} \approx 0{,}00002535,$$
$$\sqrt{0{,}00001382 + 0{,}00002535} = \sqrt{0{,}00003917} \approx 0{,}006259.$$

Aralık. $z_{0{,}975} = 1{,}96$ ile $E = 1{,}96 \cdot 0{,}006259 \approx 0{,}01227$ ve

$$-0{,}02467 - 0{,}01227 < p_1 - p_2 < -0{,}02467 + 0{,}01227,$$

yani $-0{,}0369 < p_1 - p_2 < -0{,}0124$.
Aralığın tamamı 0'ın solundadır, yani $p_1 < p_2$: %95 güvenle aşılananlarda grip oranı aşılanmayanlardakinden 1,2 ile 3,7 puan kadar düşüktür. Aşağıdaki şekil bu aralığı, 0'ı içeren iki makine örneğindeki aralıkla karşılaştırıyor.



Şekil 15.7: $p_1 - p_2$ için iki %95'lik güven aralığı. İki makine örneğindeki aralık 0'ı içerir: verilere göre kusur oranları eşit olabilir. Grip aşısı örneğindeki aralığın tamamı 0'ın solundadır: aşılananlarda grip oranı belirgin biçimde daha düşüktür.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 15.18 (Varyanslar Oranı: Ücretlerdeki Değişkenlik). A ve B firmalarında çalışanların ücretlerinin normal dağıldığı kabul ediliyor. A firmasından 10, B firmasından 8 işçi seçiliyor ve ücretlerin örneklem varyansları sırasıyla 25 ve 20 birim bulunuyor. $\alpha = 0{,}10$ olmak üzere iki firmadaki ücretlerin değişkenliğinin farklı olup olmadığına nasıl karar verirsiniz?

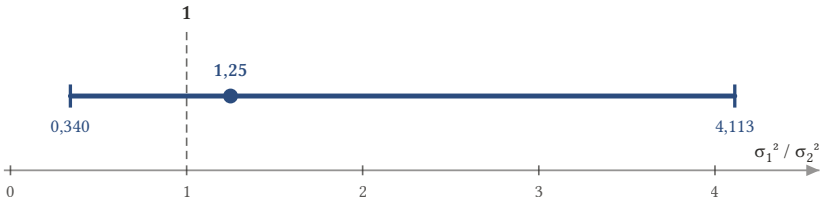
Çözüm.
Yol. σ_1^2 ve σ_2^2, A ve B firmalarındaki ücretlerin kitle varyansları olsun. Değişkenliği varyans ölçer; soru $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ olup olmadığıdır, yani σ_1^2/σ_2^2 oranının 1 olup olmadığı. Bu oran için $\%100(1-\alpha) = \%90$'lık bir güven aralığı kurarız. Aralık 1'i içeriyorsa veriler varyansların eşitliğiyle çelişmez; içermiyorsa değişkenlikler farklıdır deriz. (Güven aralığıyla verilen bu karar, Hipotez Testlerine Giriş bölümünde bir teste dönüşecek.)
Aralık. Varyanslar oranı için F aralığı:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\nu_1,\nu_2,\,1-\alpha/2}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot F_{\nu_2,\nu_1,\,1-\alpha/2}.$$

$n_1 = 10$, $n_2 = 8$ olduğundan $\nu_1 = 9$, $\nu_2 = 7$; oran $s_1^2/s_2^2 = 25/20 = 1{,}25$. $1-\alpha/2 = 0{,}95$ için F tablosundan $F_{9,7,\,0{,}95} = 3{,}68$ ve $F_{7,9,\,0{,}95} = 3{,}29$:

$$\frac{1{,}25}{3{,}68} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1{,}25 \cdot 3{,}29 \quad\Rightarrow\quad 0{,}340 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 4{,}113.$$

Karar. Aralık 1'i içerir:



Şekil 15.8: σ_1^2/σ_2^2 oranı (A ve B firmaları) için %90'lık güven aralığı (0,340; 4,113) ve nokta tahmini 1,25. Aralık 1'i içerdiğinden iki firmanın ücret varyanslarının eşit olması verilerle çelişmez.

Dolayısıyla $\alpha = 0{,}10$ düzeyinde iki firmadaki ücretlerin değişkenliğinin farklı olduğunu söyleyemeyiz; örneklem varyanslarındaki 25 ile 20 farkı, bu kadar küçük örneklemlerde tesadüfen oluşabilecek bir farktır.
■

Tek bir oran ve iki oranın farkı için güven aralıklarıyla birlikte ortalama, varyans ve oran için bütün temel aralıkları görmüş olduk. Son örnekte bir aralığın 1'i içerip içermediğine bakarak bir soruya evet ya da hayır yanıtı verdik. Bu fikri sistemli hâle getiren araç hipotez testidir; sıradaki bölüm Hipotez Testlerine Giriş.

 CC BY-NC-SA 4.0

16. Hipotez Testlerine Giriş

Aralık tahmininde bir parametrenin hangi değerler arasında olabileceğini sorduk (Ortalama İçin Aralık Tahmini). Çoğu zaman ise soru bir evet–hayır sorusudur: Dolum makinesi paketleri eksik mi dolduruyor? Yeni gübre fidelerin boyunu artırıyor mu? Tabletlerdeki etken madde miktarı etikette yazana uyuyor mu? Hipotez testi, bir örneklemden elde edilen bilgiyle böyle bir iddiayı kabul etmek ya da reddetmek için kurulmuş bir karar kuralıdır. Örneklem rastgele olduğundan her kararın bir yanılma payı vardır; bu bölümde bu payı nasıl ölçüp denetim altında tuttuğumuzu göreceğiz.

16.1 Hipotezler

Her test, kitle hakkında birbirine rakip iki iddia arasında seçim yapar. Önce bu iddiaları adlandıralım.

Tanım 16.1 (İstatistiksel Hipotez). Bir kitlenin dağılımı ya da bu dağılımın parametreleri hakkında ileri sürülen bir iddiaya **istatistiksel hipotez** denir.

Yani hipotez, doğruluğunu kesin olarak bilmediğimiz ve örneklemle sınayacağımız bir önermedir. “Paketlerin ortalama ağırlığı 500 gramdır”, “kitle normal dağılımlıdır” birer hipotezdir.

Tanım 16.2 (Basit Hipotez). Kitlenin dağılımını tümüyle belirleyen hipoteze **basit hipotez** denir.

Tanım 16.3 (Bileşik Hipotez). Basit olmayan, yani kitlenin dağılımını birden fazla olasılığa açık bırakan hipoteze **bileşik hipotez** denir.

Yani kitlenin $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlı ve σ'nın bilindiğini varsayalım. $\mu = 50$ hipotezi dağılımı $N(50, \sigma^2)$ olarak tek türlü belirler; basittir. $\mu > 50$ ise sonsuz sayıda dağılıma izin verir; bileşiktir. σ bilinmiyorsa $\mu = 50$ bile bileşiktir, çünkü varyans açıkta kalır.

Tanım 16.4 (Sıfır Hipotezi ve Karşı Hipotez). Test edilen, reddedilmediği sürece doğru kabul edilen hipoteze **sıfır hipotezi** denir ve H_0 ile gösterilir. H_0 reddedildiğinde kabul edilecek rakip hipoteze **karşı hipotez** denir ve H_1 ile gösterilir.

Yani H_0 genellikle “değişiklik yok”, “etki yok”, “etiketteki değer doğru” türünden bir iddiadır; araştırmacının kanıtlamak istediği şey ise H_1'e yazılır. H_0 ancak veriler ona karşı güçlü bir kanıt sunduğunda reddedilir. Mahkemedeki “suçu kanıtlanana kadar masumdur” ilkesine benzer: H_0'ı reddetmemek onun doğru olduğunu kanıtlamaz, yalnız ona karşı yeterli kanıt bulunamadığını söyler.
Ortalama μ için sıfır hipotezi çoğunlukla $H_0 : \mu = \mu_0$ biçimindedir; burada μ_0 verilmiş bir sayıdır. Karşı hipotez ise iki biçimden birinde olur.

Tanım 16.5 (Tek Yönlü Karşı Hipotez). $H_1 : \mu > \mu_0$ ya da $H_1 : \mu < \mu_0$ biçimindeki karşı hipoteze **tek yönlü karşı hipotez** denir.

Tanım 16.6 (İki Yönlü Karşı Hipotez). $H_1 : \mu \neq \mu_0$ biçimindeki karşı hipoteze **iki yönlü karşı hipotez** denir.

Yani karşı hipotezin yönü sorunun kendisinden gelir. Tüketici derneği paketlerin **eksik** doldurulduğundan şüpheleniyorsa $H_0 : \mu = 500$, $H_1 : \mu < 500$ kurulur; çünkü fazla doldurma derneğin derdi değildir. Tabletlerin etikete uyup uymadığını denetleyen biri için ise iki yöndeki sapma da sorundur: $H_1 : \mu \neq 12$. İki durumda da H_0 basit, H_1 bileşiktir.

 CC BY-NC-SA 4.0

16.2 Test İstatistiği ve Kritik Bölge

Karar örneklemden hesaplanan tek bir sayıya dayanır; örneklem uzayı da bu sayıya göre iki parçaya ayrılır.

Tanım 16.7 (Test İstatistiği). Değerine bakılarak H_0 hakkında karar verilen istatistiğe **test istatistiği** denir.

Yani test istatistiği, verideki bütün bilgiyi karar için tek bir sayıya indirir. Ortalama testlerinde bu sayı $\bar{X}$ ya da $\bar{X}$'in standartlaştırılmış hâlidir: $\bar{X}$, μ_0'dan çok uzaksa $H_0 : \mu = \mu_0$'dan şüphelenmek için nedenimiz olur.

Tanım 16.8 (Kritik Bölge ve Kabul Bölgesi). Test istatistiğinin alabileceği değerlerin, H_0'ın reddedilmesine yol açan kümesine **kritik bölge** ya da **ret bölgesi**, geri kalan kümesine **kabul bölgesi** denir. İki bölgeyi ayıran sınır noktalarına **kritik değer** denir.

Yani bir test, kritik bölgesi verilince tümüyle belirlenir: istatistiğin gözlenen değeri kritik bölgedeyse H_0 reddedilir, değilse reddedilmez. "Kabul bölgesi" adı yerleşmiştir; ama yukarıda söylediğimiz gibi oraya düşmek H_0'ı kanıtlamaz, yalnız reddetmemek demektir. $H_1 : \mu > \mu_0$ için kritik bölge doğal olarak $\bar{X} > c$ biçimindedir; $H_1 : \mu < \mu_0$ için $\bar{X} < c$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ için de $\bar{X}$'in μ_0'dan iki yönden birine fazla uzaklaştığı iki parçalı bir bölgedir.

16.3 İki Tür Hata ve Testin Gücü

Kararımız rastgele bir örnekleme dayandığından iki farklı biçimde yanılabiliriz. Gerçek durumla verilen karar dört biçimde eşleşir:

	H_0 reddedilmez	H_0 reddedilir
H_0 doğru	doğru karar	I. tip hata
H_0 yanlış	II. tip hata	doğru karar

Tanım 16.9 (I. ve II. Tip Hata). Doğru olan H_0'ı reddetmeye **I. tip hata**, yanlış olan H_0'ı reddetmemeye **II. tip hata** denir. II. tip hatanın olasılığı β ile gösterilir:

$$\beta = P(H_0 \ \text{ reddedilmez} \mid H_1 \ \text{ doğru}).$$

Yani I. tip hata "olmayan bir etkiyi var sanmak", II. tip hata "var olan bir etkiyi gözden kaçırmak"tır. H_1 bileşik olduğunda β, gerçek parametre değerine bağlıdır; bu yüzden β'yı hep belli bir alternatif değer için hesaplarız.

Tanım 16.10 (Anlamlılık Düzeyi). I. tip hata olasılığına testin **anlamlılık düzeyi** denir ve α ile gösterilir:

$$\alpha = P(H_0 \ \text{ reddedilir} \mid H_0 \ \text{ doğru}).$$

H_0 bileşikse α, H_0'ın izin verdiği parametre değerleri üzerinden bu olasılığın en büyük değeridir.

Yani α, haksız yere H_0'ı reddetme riskimizin üst sınırıdır. Uygulamada α önceden seçilir; en sık kullanılan değerler 0,10, 0,05 ve 0,01'dir. Kritik bölge de bu α'yı verecek biçimde kurulur.

Tanım 16.11 (Güç Fonksiyonu). Parametrenin her μ değeri için

$$\pi(\mu) = P(H_0 \ \text{ reddedilir} \mid \text{gerçek ortalama } \ \mu)$$

fonksiyonuna testin **güç fonksiyonu** denir. H_1'deki bir μ için $\pi(\mu) = 1 - \beta$ sayısına testin o noktadaki **gücü** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani güç, yanlış olan H_0'ı yakalama olasılığıdır; iyi bir testin gücü yüksektir. Güç fonksiyonu iki hata türünü tek bir eğride toplar: H_0'ın içindeki değerlerde $\pi(\mu)$ I. tip hata olasılığıdır, H_1'in içindeki değerlerde ise $1-\pi(\mu)$ II. tip hata olasılığıdır.

Örnek 16.1 (Belli Bir Kritik Bölge İçin Alfa ve Beta). Bir makinenin ürettiği parçaların uzunluğu (mm) $N(\mu, 16)$ dağılımlıdır. 16 parçalık bir rastgele örneklemle $H_0 : \mu = 50$ hipotezi $H_1 : \mu = 52$ hipotezine karşı test edilecek; $\bar{x} > 51{,}5$ ise H_0 reddedilecektir. Bu testin α ve β olasılıklarını bulunuz.

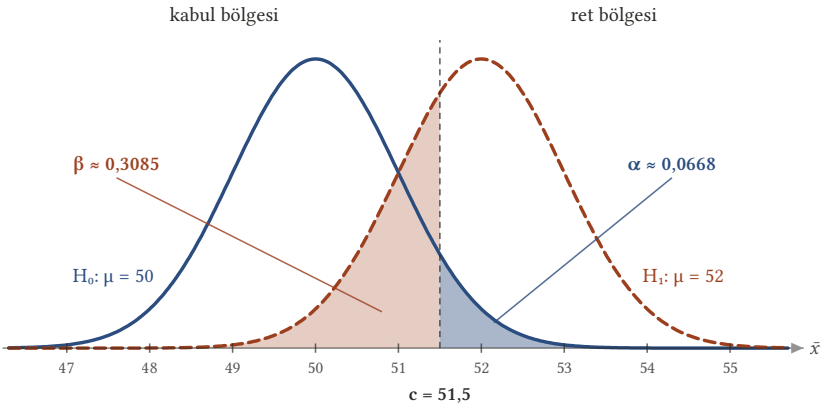
Çözüm.
Normal bir kitlede $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$'dir; bunu Z testinin ispatında gerekçesiyle göreceğiz (Teorem 16.1). Burada $\sigma = 4$ ve $n = 16$ olduğundan $\bar{X}$'in standart sapması $\sigma/\sqrt{n} = 4/4 = 1$'dir.
α. H_0 doğruyken $\bar{X} \sim N(50, 1)$'dir. Standart normal tablosundan $P(0 \le Z \le 1{,}5) = 0{,}4332$ olduğundan

$$\begin{aligned}\alpha &= P(\bar{X} > 51{,}5 \mid \mu = 50) = P\left(Z > \frac{51{,}5 - 50}{1}\right) \\ &= P(Z > 1{,}5) = 0{,}5 - 0{,}4332 = 0{,}0668.\end{aligned}$$

β. H_1 doğruyken $\bar{X} \sim N(52, 1)$'dir ve H_0, $\bar{X} \le 51{,}5$ olduğunda reddedilmez. Tablodan $P(0 \le Z \le 0{,}5) = 0{,}1915$ olduğundan

$$\begin{aligned}\beta &= P(\bar{X} \le 51{,}5 \mid \mu = 52) = P\left(Z \le \frac{51{,}5 - 52}{1}\right) \\ &= P(Z \le -0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}1915 = 0{,}3085.\end{aligned}$$

Buna göre $\mu = 52$ iken testin gücü $1 - \beta = 0{,}6915$'tir. Aşağıdaki şekilde iki alan birlikte görülüyor: α, H_0 eğrisinin kritik bölgeye düşen kuyruğu; β ise H_1 eğrisinin kabul bölgesine düşen kısmıdır.



Şekil 16.1: Düz mavi eğri H_0 doğruyken ($\mu = 50$), kesikli turuncu eğri $\mu = 52$ iken $\bar{X}$'nin dağılımı. $c = 51{,}5$'in sağındaki koyu mavi alan I. tip hata olasılığı α, solundaki turuncu alan II. tip hata olasılığı β'dır.

■

Şekilden bir takas da okunur. Kritik değeri sağa, örneğin $c = 52$'ye kaydırırsak $\alpha = P(Z > 2) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228$'e düşer, ama $\beta = P(Z \le 0) = 0{,}5$'e çıkar. Sabit bir örneklem büyüklüğünde birini küçültmek ötekini büyütür. İkisini birden küçültmenin yolu örneklemi büyütmektir: $n = 64$ alınırsa $\sigma/\sqrt{n} = 0{,}5$ olur ve aynı $c = 51{,}5$ ile

$$\alpha = P\left(Z > \frac{51{,}5 - 50}{0{,}5}\right) = P(Z > 3) = 0{,}5 - 0{,}4987 = 0{,}0013,$$
$$\beta = P\left(Z \le \frac{51{,}5 - 52}{0{,}5}\right) = P(Z \le -1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Eğriler daralınca üst üste binen kısımları küçülür. Uygulamada önce α sabitlenir, kritik bölge ona göre kurulur ve β bu testin sonucu olarak hesaplanır.

16.4 Normal Kitlenin Ortalaması İçin Z Testi

Standart sapması bilinen normal bir kitlenin ortalamasını test etmek, bütün bu kavramların en temiz örneğidir; çünkü test istatistiğinin dağılımı tam olarak bilinir. Kantiller için kitabın genel gösterimini kullanıyoruz: $P(Z \le z_p) = p$; örneğin $z_{0{,}95} = 1{,}645$ ve $z_{0{,}975} = 1{,}96$ (kantil tanımı).

Teorem 16.1 (Ortalama İçin Z Testi). *$X_1, \ldots, X_n$, σ'sı bilinen bir $N(\mu, \sigma^2)$ kitlesinden alınmış bir rastgele örneklem ve $0 < \alpha < 1$ olsun.*

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

test istatistiği $H_0 : \mu = \mu_0$ doğruyken $N(0,1)$ dağılımlıdır. $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezinin α anlamlılık düzeyindeki testinin kritik bölgesi, karşı hipoteze göre şöyledir:
1. $H_1 : \mu > \mu_0$ için $Z > z_{1-\alpha}$, yani

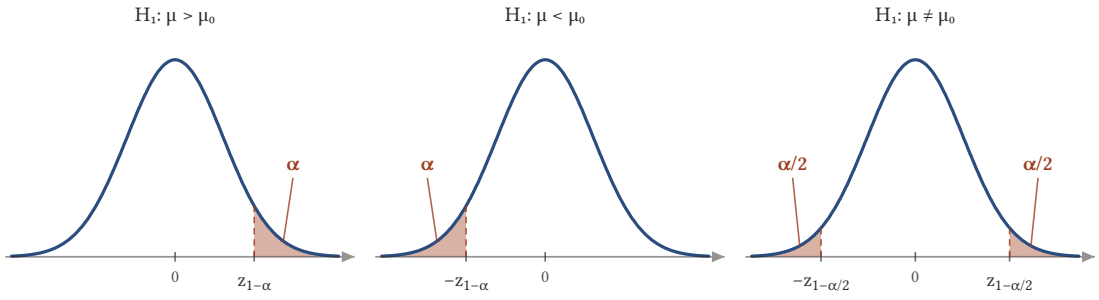
$$\bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

2. $H_1 : \mu < \mu_0$ için $Z < -z_{1-\alpha}$, yani

$$\bar{X} < \mu_0 - z_{1-\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

3. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ için $\mid Z \mid > z_{1-\alpha/2}$, yani

$$\bar{X} < \mu_0 - z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{ya da} \quad \bar{X} > \mu_0 + z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$



Şekil 16.2: Z istatistiğinin ölçeğinde üç karşı hipotezin ret bölgeleri (turuncu). Tek yönlü testlerde α bütünüyle karşı hipotezin gösterdiği kuyruğa konur; iki yönlü testte iki kuyruğa α/2'şer bölünür.

İspat.
$\bar{X}$'in dağılımı. *X_i'ler bağımsız ve $N(\mu, \sigma^2)$ dağılımlıdır. Bağımsız normallerin doğrusal birleşimi için verilen sonucu (Sonuç 5.1) bütün katsayılar $a_i = 1/n$ olacak biçimde uygularsak $\bar{X} = \frac{1}{n}X_1 + \cdots + \frac{1}{n}X_n$ için ortalama $n \cdot \frac{1}{n}\mu = \mu$, varyans $n \cdot \frac{1}{n^2}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ çıkar:*

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

H_0 doğruyken $\mu = \mu_0$'dır; $\bar{X}$'ten ortalamasını çıkarıp standart sapmasına bölmek onu standartlaştırır (standartlaştırma teoremi). Demek ki $Z \sim N(0,1)$.
Kritik bölgeler. *$\sigma/\sqrt{n} > 0$ olduğundan her eşitsizliğin iki yanını $\sigma/\sqrt{n}$ ile çarpıp μ_0 eklemek yönü değiştirmez; bu yüzden Z cinsinden ve $\bar{X}$ cinsinden yazılan bölgeler aynı olaylardır. I. tip hata olasılıklarını $Z \sim N(0,1)$ ile hesaplayalım.*

 CC BY-NC-SA 4.0

1. Kantilin tanımından $P(Z > z_{1-\alpha}) = 1 - (1-\alpha) = \alpha$.
2. Simetriden $-z_{1-\alpha} = z_\alpha$ *olduğundan* $P(Z < -z_{1-\alpha}) = P(Z < z_\alpha) = \alpha$.
3. İki kuyruğun her biri $\alpha/2$*'dir:*

$$P(\mid Z \mid > z_{1-\alpha/2}) = P(Z < -z_{1-\alpha/2}) + P(Z > z_{1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Üç durumda da H_0 *doğruyken reddetme olasılığı tam* α*'dır.*
■

Yani kritik bölge karşı hipotezin gösterdiği yöne konur: H_1 büyük değerleri söylüyorsa sağ kuyruğa, küçük değerleri söylüyorsa sol kuyruğa, iki yönü de söylüyorsa iki kuyruğa $\alpha/2$'şer. Büyüklüğü α ile, yeri H_1 ile belirlenir.
Aynı hesabı H_0 yanlışken yaparsak testin gücünü elde ederiz.

Teorem 16.2 (Z Testinin Güç Fonksiyonu). *Z testinin (Teorem 16.1) varsayımları altında* $\delta = \dfrac{(\mu - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$ *olsun. Gerçek ortalama* μ *iken üç testin gücü,* $Z \sim N(0,1)$ *olmak üzere şöyledir:*
1. $H_1 : \mu > \mu_0$ *için*

$$\pi(\mu) = P(Z > z_{1-\alpha} - \delta).$$

2. $H_1 : \mu < \mu_0$ *için*

$$\pi(\mu) = P(Z < -z_{1-\alpha} - \delta).$$

3. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ *için*

$$\pi(\mu) = P(Z < -z_{1-\alpha/2} - \delta) + P(Z > z_{1-\alpha/2} - \delta).$$

Her üç durumda $\pi(\mu_0) = \alpha$*'dır. Sağa yönlü testte* π *artan, sola yönlü testte azalandır.*

İspat.
Gerçek ortalama μ *iken* $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ *olduğundan* $Z' = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$*'dir. Test istatistiğini* Z' *cinsinden yazalım:*

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z' + \delta.$$

Sağa yönlü testte H_0*,* $Z' + \delta > z_{1-\alpha}$*, yani* $Z' > z_{1-\alpha} - \delta$ *olduğunda reddedilir; bunun olasılığı ilk formüldür. Sola yönlü testte ret olayı* $Z' + \delta < -z_{1-\alpha}$*, yani* $Z' < -z_{1-\alpha} - \delta$*'dır. İki yönlü testte ret olayı iki ayrık olayın birleşimidir:* $Z' + \delta < -z_{1-\alpha/2}$ *ya da* $Z' + \delta > z_{1-\alpha/2}$*; olasılıkları toplanır.*
$\mu = \mu_0$ *iken* $\delta = 0$ *olur ve formüller Z testinin ispatındaki* α *hesabına döner. Sağa yönlü testte* μ *büyüdükçe* δ *büyür, eşik* $z_{1-\alpha} - \delta$ *küçülür ve eşiğin sağındaki alan büyür; demek ki* π *artandır. Sola yönlü test için aynı akıl yürütme ters yönde işler.*
■

Teoremin iki önemli sonucu var. Birincisi, sağa yönlü testte π artan olduğundan her $\mu \leq \mu_0$ için $\pi(\mu) \leq \pi(\mu_0) = \alpha$'dır. Demek ki aynı kritik bölge, bileşik $H_0 : \mu \leq \mu_0$ hipotezi için de α düzeyli bir testtir (sola yönlü testte $H_0 : \mu \geq \mu_0$ için aynı şey geçerlidir). İkincisi, $\mu \neq \mu_0$ sabitken n büyüdükçe $\mid \delta \mid$ sınırsız büyür ve güç 1'e yaklaşır: yeterince büyük bir örneklem, H_0'dan en küçük sapmayı bile yakalar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Hipotez testi beş adımda

1. **Hipotezleri kur.** $H_0 : \mu = \mu_0$; H_1'in yönünü sorudan oku.
2. **Anlamlılık düzeyini seç.** Verilmemişse genellikle $\alpha = 0{,}05$ alınır.
3. **Test istatistiğini belirle.** σ biliniyorsa $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.
4. **Kritik bölgeyi yaz.** H_1'in yönüne göre sağ, sol ya da iki kuyruk; kantili tablodan oku.
5. **Hesapla ve karar ver.** Gözlenen değer kritik bölgedeyse H_0'ı reddet; değilse reddetme. Sonucu sorunun diliyle yaz.

Örnek 16.2 (Paketler Eksik mi Dolduruluyor). Bir dolum makinesinin doldurduğu paketlerin ağırlığı (gram) $\sigma = 6$ ile normal dağılımlıdır ve paketlerin üzerinde 500 gram yazmaktadır. Rastgele seçilen 36 paketin ortalama ağırlığı $\bar{x} = 498{,}1$ gram bulunuyor. $\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyinde paketlerin ortalamada eksik doldurulduğu söylenebilir mi?

Çözüm.
Hipotezler. Şüphe eksik doldurma yönünde olduğundan

$$H_0 : \mu = 500, \qquad H_1 : \mu < 500.$$

Test istatistiği. σ bilinir ve $\sigma/\sqrt{n} = 6/6 = 1$'dir; $Z = \dfrac{\bar{X} - 500}{1}$.
Kritik bölge. Sola yönlü test olduğundan $\alpha = 0{,}05$'in tamamı sol kuyruğa konur. $z_{0{,}95} = 1{,}645$ olduğundan H_0, $Z < -1{,}645$ olduğunda, yani

$$\bar{X} < 500 - 1{,}645 \cdot 1 = 498{,}355$$

olduğunda reddedilir.
Karar. Gözlenen değer $\bar{x} = 498{,}1 < 498{,}355$'tir; aynı şeyi Z ölçeğinde söylersek

$$z = \frac{498{,}1 - 500}{1} = -1{,}9 < -1{,}645.$$

Buna göre H_0 reddedilir: %5 anlamlılık düzeyinde paketlerin ortalamada eksik doldurulduğu sonucuna varılır.
■

Örnek 16.3 (İki Yönlü Testin Gücü). Parça uzunlukları (mm) $N(\mu, 16)$ dağılımlıdır. 16 parçalık bir rastgele örneklemle $H_0 : \mu = 50$ hipotezi $H_1 : \mu \neq 50$ hipotezine karşı $\alpha = 0{,}05$ düzeyinde test ediliyor. Gerçek ortalama $\mu = 52$ ise testin gücü nedir?

Çözüm.
Kritik bölge. $\sigma/\sqrt{n} = 4/4 = 1$ ve iki yönlü test olduğundan her kuyrukta 0,025 kalır; $z_{0{,}975} = 1{,}96$. Z testine (Teorem 16.1) göre H_0,

$$\bar{X} < 50 - 1{,}96 = 48{,}04 \quad \text{ya da} \quad \bar{X} > 50 + 1{,}96 = 51{,}96$$

olduğunda reddedilir.
Güç. $\mu = 52$ iken $\bar{X} \sim N(52, 1)$'dir. Ret olasılığını bu dağılımla hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \pi(52) &= P(\bar{X} < 48{,}04) + P(\bar{X} > 51{,}96) \\ &= P\left(Z < \frac{48{,}04 - 52}{1}\right) + P\left(Z > \frac{51{,}96 - 52}{1}\right) \\ &= P(Z < -3{,}96) + P(Z > -0{,}04). \end{aligned}$$

Tabloda 3,96'nın karşılığı 0,5000'dır; yani $P(Z < -3{,}96) \approx 0{,}0000$. İkinci terimde simetriden

$$P(Z > -0{,}04) = 0{,}5 + P(0 \le Z \le 0{,}04) = 0{,}5 + 0{,}0160 = 0{,}5160.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Buna göre

$$\pi(52) \approx 0{,}5160, \qquad \beta = 1 - \pi(52) \approx 0{,}4840.$$

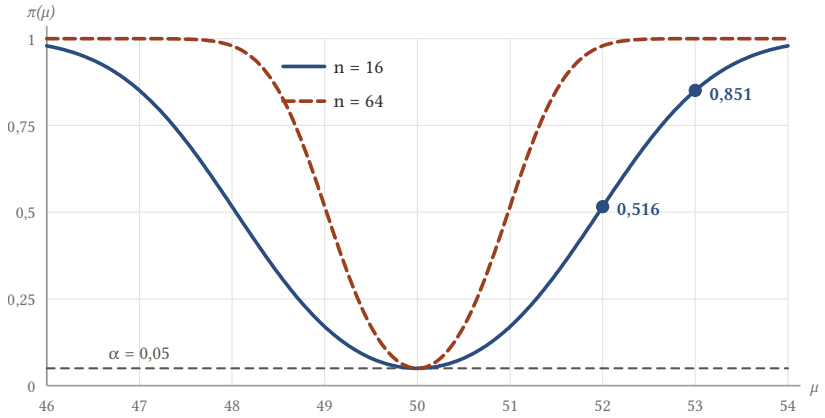
Yani ortalama gerçekte 2 mm kaymışken test bunu ancak yarı yarıya fark eder. Aynı hesap $\mu = 53$ için

$$\pi(53) \approx P(Z > -1{,}04) = 0{,}5 + 0{,}3508 = 0{,}8508$$

verir. Örneklemi $n = 64$'e çıkarırsak $\sigma/\sqrt{n} = 0{,}5$ ve $\delta = (52-50)/0{,}5 = 4$ olur; güç fonksiyonu formülünden (Teorem 16.2)

$$\pi(52) \approx P(Z > 1{,}96 - 4) = P(Z > -2{,}04) = 0{,}5 + 0{,}4793 = 0{,}9793$$

bulunur. Aşağıdaki güç eğrileri bu değerleri bir arada gösteriyor.



Şekil 16.3: H_0: μ = 50 hipotezinin iki yönlü testi için güç fonksiyonu (σ = 4, α = 0,05). Eğri μ = 50'de en düşük değeri α'yı alır ve μ, 50'den uzaklaştıkça 1'e yaklaşır; örneklem büyüdükçe (n = 64) daha dik yükselir.

■

16.5 Varyans Bilinmediğinde t Testi

Uygulamada kitlenin standart sapması çoğu zaman bilinmez. O zaman σ yerine örneklem standart sapması S konur ve standart normal yerine t dağılımı kullanılır; güven aralığında yaptığımız değişikliğin aynısı.

Teorem 16.3 (Ortalama İçin t Testi). *$X_1, \dots, X_n$, μ ve σ'sı bilinmeyen bir $N(\mu, \sigma^2)$ kitlesinden alınmış bir rastgele örneklem ve S örneklem standart sapması olsun.*

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

istatistiği $H_0 : \mu = \mu_0$ doğruyken t_{n-1} dağılımlıdır. α düzeyli testlerin kritik bölgeleri, Z testindeki (Teorem 16.1) z kantilleri yerine t_{n-1} kantilleri konarak elde edilir: $H_1 : \mu > \mu_0$ için $T > t_{n-1,\,1-\alpha}$, $H_1 : \mu < \mu_0$ için $T < -t_{n-1,\,1-\alpha}$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ için $|\,T\,| > t_{n-1,\,1-\alpha/2}$.

İspat.

Normal bir örneklemde $\dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ istatistiğinin t_{n-1} dağılımlı olduğu örneklem dağılımları bölümünde gösterildi; H_0 doğruyken $\mu = \mu_0$ olduğundan bu istatistik T'dir. t dağılımı 0'a göre simetrik olduğundan $-t_{n-1,\,1-\alpha} = t_{n-1,\,\alpha}$'dır. Geri kalan hesap Z testinin ispatının aynısıdır: kantilin tanımından $P(T > t_{n-1,\,1-\alpha}) = \alpha$, $P(T < -t_{n-1,\,1-\alpha}) = \alpha$ ve iki kuyruğun her biri $\alpha/2$ olduğundan $P(|\,T\,| > t_{n-1,\,1-\alpha/2}) = \alpha$.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 16.4 (Yeni Gübre Fidelerin Boyunu Artırıyor mu). Eski gübreyle yetiştirilen fidelerin ortalama boyu 20 cm'dir. Yeni gübreyle yetiştirilen 9 fidenin boyları ölçülüyor ve $\bar{x} = 21{,}8$ cm, $s = 2{,}4$ cm bulunuyor. Boyların normal dağıldığını varsayarak, $\alpha = 0{,}05$ düzeyinde yeni gübrenin ortalama boyu artırdığı söylenebilir mi?

Çözüm.
Hipotezler. Araştırılan iddia artış olduğundan

$$H_0 : \mu = 20, \qquad H_1 : \mu > 20.$$

Test istatistiği. σ bilinmediğinden t testi kullanılır. $S/\sqrt{n} = 2{,}4/3 = 0{,}8$ ve serbestlik derecesi $n - 1 = 8$'dir.
Kritik bölge. Sağa yönlü testte H_0, $T > t_{8,\,0{,}95}$ olduğunda reddedilir. t tablosundan $t_{8,\,0{,}95} = 1{,}860$ okunur. $\bar{X}$ cinsinden kritik bölge

$$\bar{X} > 20 + 1{,}860 \cdot 0{,}8 = 21{,}488$$

olur; burada S'nin de rastgele olduğunu unutmayalım, bu sınır gözlenen $s = 2{,}4$ ile hesaplanmıştır.
Karar. Gözlenen değer

$$t = \frac{21{,}8 - 20}{0{,}8} = \frac{1{,}8}{0{,}8} = 2{,}25 > 1{,}860$$

olduğundan H_0 reddedilir: %5 düzeyinde yeni gübrenin fidelerin ortalama boyunu artırdığı sonucuna varılır.
■

16.6 p Değeri

Kritik bölgeyle verilen karar yalnız "reddet" ya da "reddetme" der; verinin H_0'a karşı ne kadar güçlü bir kanıt olduğunu söylemez. Paket örneğinde $z = -1{,}9$ bulduk; $z = -1{,}7$ ya da $z = -4$ bulsaydık da aynı karara varırdık. Bu farkı ölçen sayı p değeridir.

Tanım 16.12 (p Değeri). Test istatistiğinin gözlenen değeri verilmiş olsun. H_0 doğruyken test istatistiğinin, karşı hipotez yönünde gözlenen değer kadar ya da ondan daha aşırı bir değer alma olasılığına ***p* değeri** denir. Z testinde gözlenen değer z ise:

- $H_1 : \mu > \mu_0$ için $p = P(Z \geq z)$,
- $H_1 : \mu < \mu_0$ için $p = P(Z \leq z)$,
- $H_1 : \mu \neq \mu_0$ için $p = P(\mid Z \mid \geq \mid z \mid) = 2\,P(Z \geq \mid z \mid)$.

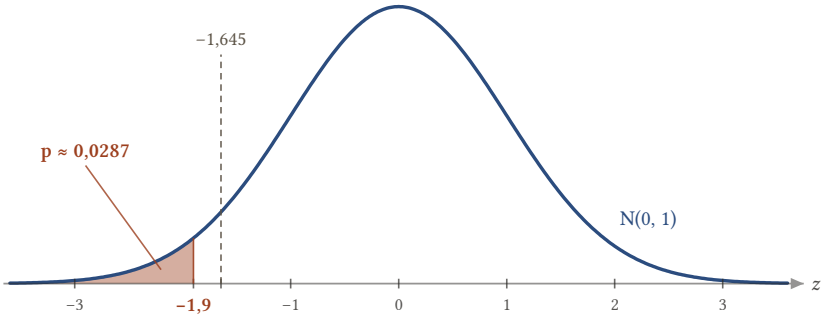
Yani p değeri şu soruyu yanıtlar: H_0 doğru olsaydı, en az bu kadar aykırı bir sonuç görmek ne kadar olası olurdu? Küçük bir p değeri, gözlenen verinin H_0 altında pek beklenmedik olduğunu, dolayısıyla H_0'a karşı güçlü bir kanıt olduğunu söyler.
p değeri ile kritik bölge aynı kararı verir. Örneğin sağa yönlü Z testinde $z > z_{1-\alpha}$ olması, z'nin sağında α'dan az alan kalması, yani $p < \alpha$ olması demektir. Öteki iki durum da aynı biçimde görülür. Kısaca: ***p* < α ise H_0 reddedilir, *p* ≥ α ise reddedilmez.** p değeri bu yüzden, verinin H_0'ı reddettiği en küçük anlamlılık düzeyi olarak da düşünülebilir; önceden seçilmiş bir α'ya bağlı kalmadan bildirilebilir.

Örnek 16.5 (Paket Örneğinde p Değeri). Paket örneğinde (Örnek 16.2) $H_0 : \mu = 500$ hipotezi $H_1 : \mu < 500$'e karşı test edilmiş, gözlenen test istatistiği $z = -1{,}9$ bulunmuştu. Bu testin p değerini bulup $\alpha = 0{,}05$ ve $\alpha = 0{,}01$ düzeylerindeki kararı belirleyiniz.

Çözüm.
Sola yönlü test olduğundan p değeri, $-1{,}9$'un solundaki alandır. Simetriden ve tablodan $P(0 \leq Z \leq 1{,}9) = 0{,}4713$ ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$p = P(Z \le -1{,}9) = P(Z \ge 1{,}9) = 0{,}5 - 0{,}4713 = 0{,}0287.$$



Şekil 16.4: Sola yönlü testte gözlenen z = −1,9 için p değeri, eğrinin altında −1,9'un solunda kalan alandır (turuncu). Kesikli çizgi α = 0,05 düzeyindeki kritik değer −1,645'tir; gözlenen değer onun solunda kaldığından p < 0,05'tir.

$p = 0{,}0287 < 0{,}05$ olduğundan $\%5$ düzeyinde H_0 reddedilir; bu, kritik bölgeyle verilen kararla (Örnek 16.2) aynıdır. Öte yandan $p = 0{,}0287 > 0{,}01$ olduğundan $\%1$ düzeyinde H_0 reddedilmez: veri eksik doldurmaya işaret ediyor, ama bu kadar katı bir düzeyde yeterince güçlü bir kanıt değil.
■

t testinde de p değeri aynı biçimde tanımlanır; yalnız alanlar t_{n-1} eğrisinin altından alınır. Tablo yalnız bazı kantilleri verdiğinden p çoğu zaman iki değer arasına sıkıştırılır. Örneğin gübre örneğinde (Örnek 16.4) gözlenen $t = 2{,}25$, t tablosundaki $t_{8,\,0{,}95} = 1{,}860$ ile $t_{8,\,0{,}975} = 2{,}306$ arasında kalır; demek ki $0{,}025 < p < 0{,}05$'tir.

Örnek 16.6 (Tabletlerde Etken Madde). Bir ilacın tabletlerindeki etken madde miktarı (mg) $\sigma = 1{,}5$ ile normal dağılımlıdır ve etikette 12 mg yazmaktadır. Rastgele seçilen 25 tabletin ortalaması $\bar{x} = 12{,}5$ mg bulunuyor. $H_0 : \mu = 12$ hipotezini $H_1 : \mu \neq 12$ hipotezine karşı test eden Z testinin p değerini bulup $\alpha = 0{,}05$ ve $\alpha = 0{,}10$ düzeylerindeki kararı belirleyiniz.

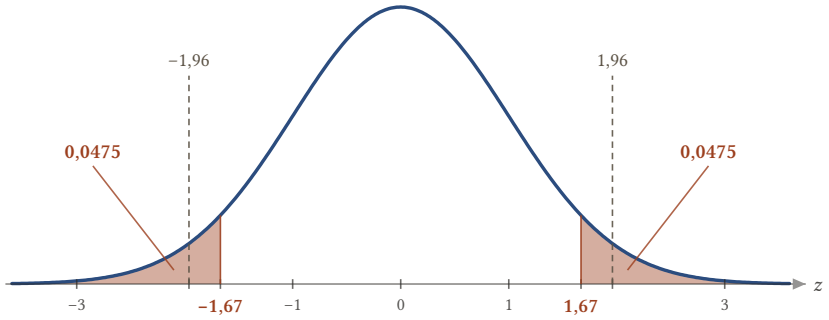
Çözüm.
$\sigma/\sqrt{n} = 1{,}5/5 = 0{,}3$ olduğundan gözlenen test istatistiği

$$z = \frac{12{,}5 - 12}{0{,}3} = \frac{0{,}5}{0{,}3} \approx 1{,}67$$

olur. İki yönlü testte iki kuyruk birlikte sayılır. Tablodan $P(0 \le Z \le 1{,}67) = 0{,}4525$ ile

$$p = 2\,P(Z \ge 1{,}67) = 2\,(0{,}5 - 0{,}4525) = 2 \cdot 0{,}0475 = 0{,}095.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.5: İki yönlü testte gözlenen z = 1,67 için p değeri, iki kuyruktaki turuncu alanların toplamıdır: p ≈ 2 · 0,0475 = 0,095. Kesikli çizgiler α = 0,05 düzeyindeki kritik değerler ±1,96'dır; gözlenen değer bunların arasında kalır.

$p = 0{,}095 > 0{,}05$ olduğundan %5 düzeyinde H_0 reddedilmez; gerçekten de $\mid z \mid = 1{,}67 < z_{0{,}975} = 1{,}96$'dır. $p = 0{,}095 < 0{,}10$ olduğundan %10 düzeyinde ise H_0 reddedilir; bu da $\mid z \mid = 1{,}67 > z_{0{,}95} = 1{,}645$ olmasıyla uyumludur. Yani veri etiketten bir sapmaya zayıf bir işaret veriyor; kararın seçilen α'ya bağlı olduğu bir sınır durumudur.

■

16.7 Güven Aralığı ile İki Yönlü Test

İki yönlü test ile güven aralığı aynı madalyonun iki yüzüdür: biri tek bir μ_0 değerini sınar, öteki verilerle uyumlu bütün değerleri listeler.

Teorem 16.4 (Güven Aralığı ile İki Yönlü Test). *$X_1, \ldots, X_n$, σ'sı bilinen bir $N(\mu, \sigma^2)$ kitlesinden alınmış bir rastgele örneklem olsun. $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezinin $H_1 : \mu \neq \mu_0$'a karşı α düzeyli Z testi, ancak ve ancak μ_0,*

$$\bar{X} - z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + z_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

%100$(1-\alpha)$ güven aralığının dışında kaldığında H_0'ı reddeder. σ bilinmediğinde σ yerine S, $z_{1-\alpha/2}$ yerine $t_{n-1,\,1-\alpha/2}$ konarak aynı sonuç t testi için geçerlidir.

İspat.
Kısalık için $h = z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$ diyelim. Z testine (Teorem 16.1) göre H_0, $\mid \bar{X} - \mu_0 \mid > h$ olduğunda reddedilir; yani $\mid \bar{X} - \mu_0 \mid \le h$ olduğunda reddedilmez. Mutlak değer eşitsizliğini açalım:

$$\mid \bar{X} - \mu_0 \mid \le h \Leftrightarrow -h \le \mu_0 - \bar{X} \le h \Leftrightarrow \bar{X} - h \le \mu_0 \le \bar{X} + h.$$

Sağdaki koşul, μ_0'ın güven aralığının içinde olmasıdır. Demek ki H_0 reddedilmez ancak ve ancak μ_0 aralığın içindedir; eşdeğer olarak H_0 reddedilir ancak ve ancak μ_0 aralığın dışındadır. t testi için aynı hesap $h = t_{n-1,\,1-\alpha/2}\,S/\sqrt{n}$ ile yapılır.

■

Yani %95 güven aralığı, %5 düzeyindeki iki yönlü testte reddedilmeyen μ_0 değerlerinin kümesidir. Bir güven aralığı elde, hiç yeni hesap yapmadan her μ_0 için test sonucunu okuyabiliriz.

Örnek 16.7 (Güven Aralığından Test Kararı). Tablet örneğindeki (Örnek 16.6) verilerde ($\sigma = 1{,}5$, $n = 25$, $\bar{x} = 12{,}5$) μ için %95 güven aralığını kurup $H_0 : \mu = 12$ hipotezinin $\alpha = 0{,}05$ düzeyindeki iki yönlü test kararını bu aralıktan okuyunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$z_{0,975} = 1{,}96$ ve $\sigma/\sqrt{n} = 0{,}3$ olduğundan aralığın yarı genişliği $1{,}96 \cdot 0{,}3 = 0{,}588$'dir. %95 güven aralığı

$$12{,}5 - 0{,}588 \le \mu \le 12{,}5 + 0{,}588, \qquad \text{yani} \qquad 11{,}912 \le \mu \le 13{,}088$$

olur. $\mu_0 = 12$ bu aralığın içindedir; bu yüzden (Teorem 16.4) %5 düzeyinde H_0 reddedilmez. Bu, $p = 0{,}095 > 0{,}05$ ile bulunan kararın (Örnek 16.6) aynısıdır.
Aynı aralıktan başka hipotezlerin kararı da okunur: örneğin $H_0 : \mu = 13$ de reddedilmez (13 aralıktadır), ama $H_0 : \mu = 11{,}8$ reddedilir ($11{,}8 < 11{,}912$).
■

Hipotez testinin temel dilini kurduk: hipotezler, kritik bölge, iki tür hata, güç, p değeri ve güven aralığıyla bağlantı. Bu araçlar kitabın sonundaki Alıştırmalar bölümünde, özellikle normal ortalama testi ve testin gücü alıştırmasında iki yönlü bir testin kritik bölgesini ve gücünü hesaplarken kullanılıyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

17. Alıştırmalar

Bu bölümdeki alıştırmalar kitabın farklı kısımlarını bir araya getirir: yansızlık, iki tahmin yöntemi, bir hipotez testinin gücü ve iki varyansın oranı için güven aralığı. Her çözüm, kullandığı sonucun anlatıldığı bölüme bağlantı verir; tablo değerleri Tablolar sayfasından okunur.

Alıştırma 17.1 (Farkların karelerinden yansız tahmin edici). (X_1, X_2, X_3), ortalaması 2 ve varyansı σ^2 olan bir kitleden alınmış bir rastgele örneklem olsun.

$$T = c[(X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2]$$

istatistiğinin σ^2 için yansız bir tahmin edici olması için c ne olmalıdır?

> **Çözüm.**
> T'nin yansız olması $E(T) = \sigma^2$ demektir (yansızlık). Bu yüzden önce $E\left[\,(X_i - X_j)^2\,\right]$'yi hesaplayalım.
> Örneklem rastgele olduğundan X_1, X_2, X_3 bağımsızdır ve hepsi kitle ile aynı dağılıma sahiptir. Buna göre her i için
>
> $$E(X_i^2) = \operatorname{Var}(X_i) + \big(E(X_i)\big)^2 = \sigma^2 + 4,$$
>
> ve $i \neq j$ için bağımsızlıktan $E(X_iX_j) = E(X_i)\,E(X_j) = 2 \cdot 2 = 4$ olur. Böylece
>
> $$\begin{aligned} E\left[\,(X_i - X_j)^2\,\right] &= E(X_i^2) - 2E(X_iX_j) + E(X_j^2) \\ &= (\sigma^2 + 4) - 2 \cdot 4 + (\sigma^2 + 4) = 2\sigma^2. \end{aligned}$$
>
> Yani ortalama 2 sadeleşip gider; iki gözlemin farkı yalnız yayılımı taşır. Beklenen değerin doğrusallığıyla
>
> $$E(T) = c\big(2\sigma^2 + 2\sigma^2\big) = 4c\,\sigma^2.$$
>
> $E(T) = \sigma^2$ olması her σ^2 için $4c = 1$ demektir. O hâlde $c = \dfrac{1}{4}$ ve
>
> $$T = \frac{(X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2}{4}$$
>
> σ^2'nin yansız bir tahmin edicisidir.

Alıştırma 17.2 (Momentler yöntemiyle tahmin). Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\theta) = (\theta^2 + \theta)\,x^{\theta-1}(1 - x), \qquad 0 < x < 1, \theta > 0$$

olan bir kitleden n birimlik bir rastgele örneklem alınıyor. θ parametresinin tahmin edicisini momentler yöntemi ile bulunuz.

> **Çözüm.**
> Momentler yönteminde kitle momentleri örneklem momentlerine eşitlenir. Tek parametre olduğundan birinci moment yeter: $E(X) = \bar{X}$.
> Önce $E(X)$'i hesaplayalım. $\theta^2 + \theta = \theta(\theta + 1)$ yazıp integrali terim terim alırsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$E(X) = \theta(\theta+1)\int_0^1 x\cdot x^{\theta-1}(1-x)\,dx = \theta(\theta+1)\int_0^1 \left(x^{\theta} - x^{\theta+1}\right)dx$$
$$= \theta(\theta+1)\left(\frac{1}{\theta+1} - \frac{1}{\theta+2}\right) = \theta(\theta+1)\cdot\frac{1}{(\theta+1)(\theta+2)} = \frac{\theta}{\theta+2}.$$

(Aynı hesap x çarpanı olmadan yapılınca $\theta(\theta+1)\left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta+1}\right) = 1$ çıkar; yani f gerçekten bir yoğunluktur.)
Şimdi $\dfrac{\theta}{\theta+2} = \bar{X}$ denklemini θ için çözelim:

$$\theta = \bar{X}\theta + 2\bar{X} \quad\Rightarrow\quad \theta(1-\bar{X}) = 2\bar{X} \quad\Rightarrow\quad \hat{\theta} = \frac{2\bar{X}}{1-\bar{X}}.$$

Gözlemler $(0,1)$ aralığında olduğundan $0 < \bar{X} < 1$'dir; bu yüzden payda sıfır olmaz ve $\hat{\theta} > 0$ çıkar.

Alıştırma 17.3 (En çok olabilirlik tahmin edicisi). $(X_1, \ldots, X_n)$, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x;\tau) = \frac{1}{\tau}\,x^{\frac{1-\tau}{\tau}}, \qquad 0 < x < 1, \tau > 0$$

olan bir kitleden alınmış bir rastgele örneklem olsun. τ parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisini bulunuz.

Çözüm.
Gözlemler bağımsız olduğundan olabilirlik fonksiyonu yoğunlukların çarpımıdır:

$$L(\tau) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\tau}\,x_i^{\frac{1-\tau}{\tau}} = \frac{1}{\tau^n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1-\tau}{\tau}}.$$

Logaritma artan olduğundan L ile $\ln L$ aynı noktada en büyük olur. $\frac{1-\tau}{\tau} = \frac{1}{\tau} - 1$ yazarsak

$$\ln L(\tau) = -n\ln\tau + \left(\frac{1}{\tau} - 1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

Türev alıp sıfıra eşitleyelim:

$$\frac{d}{d\tau}\ln L(\tau) = -\frac{n}{\tau} - \frac{1}{\tau^2}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0.$$

Her iki tarafı τ^2 ile çarpınca $-n\tau - \sum \ln x_i = 0$, yani

$$\hat{\tau} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i.$$

$0 < X_i < 1$ olduğundan her $\ln X_i$ negatiftir; dolayısıyla $\hat{\tau} > 0$ olur.
Bulunan noktanın gerçekten en büyük değer olduğunu görelim. İkinci türev

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\ln L(\tau) = \frac{n}{\tau^2} + \frac{2}{\tau^3}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

olup $\sum \ln x_i = -n\hat{\tau}$ yazılınca $\tau = \hat{\tau}$'da $\dfrac{n}{\hat{\tau}^2} - \dfrac{2n}{\hat{\tau}^2} = -\dfrac{n}{\hat{\tau}^2} < 0$ çıkar. Ayrıca birinci türev $\tau < \hat{\tau}$ için pozitif, $\tau > \hat{\tau}$ için negatiftir; yani $\hat{\tau}$ tek kritik noktadır ve $\ln L$'nin mutlak en büyük değeri oradadır.

Alıştırma 17.4 (Normal ortalama testi ve testin gücü). Standart sapması $\sigma = 2$ olan normal bir kitleden $n = 16$ birimlik bir rastgele örneklem alınıyor. $H_0 : \mu = 9$ hipotezi $H_1 : \mu \neq 9$ hipotezine karşı $\alpha = 0{,}10$ anlamlılık düzeyinde test edilecektir. Kritik bölgeyi örneklem ortalaması $\bar{X}$ cinsinden yazınız ve gerçek ortalama $\mu = 10$ iken testin gücünü bulunuz.

Çözüm.
Test istatistiği. σ bilindiğinden H_0 doğruyken

$$Z = \frac{\bar{X} - 9}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 9}{2/4} = \frac{\bar{X} - 9}{0{,}5} \sim N(0,1)$$

olur (normal ortalama testi).
Kritik bölge. Karşı hipotez iki yönlü olduğundan $\alpha = 0{,}10$ iki kuyruğa eşit bölünür: her kuyrukta 0,05. Standart normal tablosunda 0,45 alanı 1,64 ile 1,65 arasında kalır; $z_{0{,}95} = 1{,}645$. H_0, $\mid Z \mid > 1{,}645$ olduğunda reddedilir. $\bar{X}$ cinsinden:

$$\bar{X} < 9 - 0{,}5 \cdot 1{,}645 = 8{,}1775 \quad \text{ya da} \quad \bar{X} > 9 + 0{,}5 \cdot 1{,}645 = 9{,}8225.$$

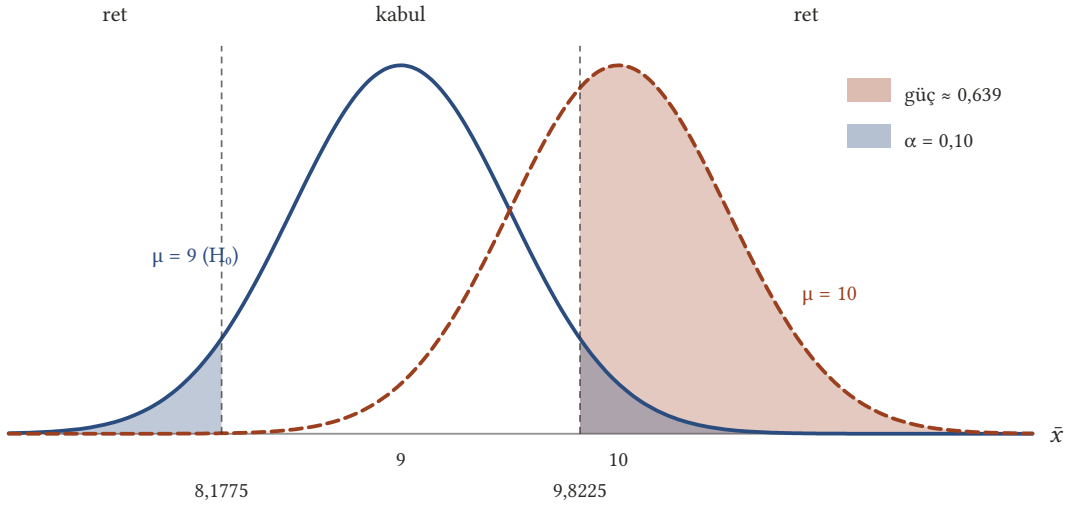
Kabul bölgesi $8{,}1775 \le \bar{X} \le 9{,}8225$ aralığıdır.
Güç. Testin gücü $1 - \beta$, H_0 yanlışken onu reddetme olasılığıdır; burada $\mu = 10$ iken H_0'ın reddedilme olasılığı. $\mu = 10$ iken $\bar{X} \sim N(10; 0{,}5^2)$ olduğundan standartlaştırma $\bar{X}$'ten 10 çıkarıp 0,5'e bölmektir:

$$\begin{aligned} 1 - \beta &= P(\bar{X} < 8{,}1775) + P(\bar{X} > 9{,}8225) \\ &= P\left(Z < \frac{8{,}1775 - 10}{0{,}5}\right) + P\left(Z > \frac{9{,}8225 - 10}{0{,}5}\right) \\ &= P(Z < -3{,}645) + P(Z > -0{,}355). \end{aligned}$$

Simetriyle $P(Z < -3{,}645) = 0{,}5 - A(3{,}645)$ olur ve tablodan bu değer yaklaşık 0,0001 bulunur. İkinci terimde simetriyle $P(Z > -0{,}355) = 0{,}5 + A(0{,}355)$ olur. $A(0{,}35) = 0{,}1368$ ile $A(0{,}36) = 0{,}1406$ arasında ara değer alınırsa $A(0{,}355) \approx 0{,}1387$ bulunur. Buna göre

$$1 - \beta \approx 0{,}0001 + 0{,}6387 = 0{,}6388.$$

Yani gerçek ortalama 10 iken test, yanlış olan H_0'ı yaklaşık %64 olasılıkla reddeder. Sol kuyruğun katkısı yok denecek kadar küçüktür, çünkü $\mu = 10$ sağ taraftadır. Aşağıdaki şekilde iki dağılım ve kritik bölge görülüyor.



Şekil 17.1: Mavi eğri H_0 altında ($\mu = 9$), kesikli turuncu eğri $\mu = 10$ iken $\bar{X}$'nin dağılımı. Mavi kuyruklar toplamı $\alpha = 0{,}10$; turuncu taralı alan testin gücüdür.

Alıştırma 17.5 (İki varyansın oranı için güven aralığı). İki çeşit mısırın her biri aynı düzgün büyüme koşullarında, birinci çeşit 6, ikinci çeşit 11 parsele ekiliyor. Parsel verimlerinin örneklem varyansları birinci çeşit için $s_1^2 = 6$, ikinci çeşit için $s_2^2 = 14$ bulunuyor. Verimlerin normal dağıldığını varsayarak, birinci çeşidin kitle varyansı σ_1^2 ile ikinci çeşidin kitle varyansı σ_2^2'nin oranı σ_1^2/σ_2^2 için %95 güven aralığını bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Örneklem büyüklükleri $n_1 = 6$ ve $n_2 = 11$'dir. İki bağımsız normal örneklem için

$$F = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,\, n_2-1} = F_{5,10}$$

olur (iki varyansın oranı için aralık). $1-\alpha = 0{,}95$ için her kuyruğa $0{,}025$ kalır:

$$P\left(F_{5,10,\,0{,}025} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le F_{5,10,\,0{,}975} \right) = 0{,}95.$$

Eşitsizlikleri σ_1^2/σ_2^2 için çözelim. Terimlerin tersini alınca yönler değişir; sonra S_1^2/S_2^2 ile çarparız:

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{5,10,\,0{,}975}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{F_{5,10,\,0{,}025}}.$$

Sol kuyruk kantili tabloda yoktur, ama $F_{5,10,\,0{,}025} = 1/F_{10,5,\,0{,}975}$ olduğundan üst sınır $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\,F_{10,5,\,0{,}975}$ olur. *F* tablosundan $F_{5,10,\,0{,}975} = 4{,}24$ ve $F_{10,5,\,0{,}975} = 6{,}62$ okunur. $s_1^2/s_2^2 = 6/14 \approx 0{,}4286$ ile

$$\frac{0{,}4286}{4{,}24} \approx 0{,}101 \qquad \text{ve} \qquad 0{,}4286 \cdot 6{,}62 \approx 2{,}837.$$

Buna göre %95 güven aralığı

$$0{,}101 \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le 2{,}837$$

olur. Aralık 1'i içerdiğinden bu verilerle iki çeşidin varyanslarının farklı olduğu söylenemez.

 CC BY-NC-SA 4.0

18. Tablolar

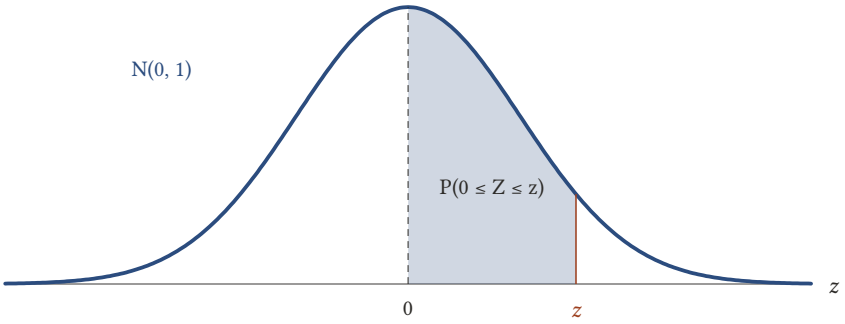
Kitaptaki örneklerde ve alıştırmalarda kullanılan bütün tablo değerleri bu sayfadadır. Değerler doğrudan dağılım fonksiyonlarından hesaplanmıştır: normal alanlar 4, t değerleri 3, χ^2 ve F değerleri 2 ondalık basamağa yuvarlanmıştır (1'den küçük χ^2 değerleri 3 anlamlı basamakla verilmiştir).
Kantiller için kitap boyunca tek bir gösterim kullanılır: alt indisteki p, noktanın **solunda** kalan alandır.

$$P(Z \le z_p) = p,\ P(T \le t_{\nu,p}) = p,\ P(\chi^2 \le \chi^2_{\nu,p}) = p,\ P(F \le F_{\nu_1,\nu_2,p}) = p.$$

Burada ν serbestlik derecesidir.

18.1 Standart Normal Dağılım

Tablo, $Z \sim N(0,1)$ için 0 ile z arasındaki alanı, yani $P(0 \le Z \le z)$ olasılığını verir. z'nin ilk ondalığı satırdan, ikinci ondalığı sütundan okunur: örneğin $z = 1{,}96$ için 1,9 satırı ile 0,06 sütununun kesişimi 0,4750'dir.



Şekil 18.1: Tablodaki değer, standart normal eğrinin altında 0 ile z arasında kalan taralı alandır.

Eğri 0 etrafında simetrik ve toplam alan 1 olduğundan, $z \ge 0$ için tablodaki değer $A(z)$ ile gösterilirse

- $P(Z \le z) = 0{,}5 + A(z)$ ve $P(Z \ge z) = 0{,}5 - A(z)$,
- $P(Z \le -z) = 0{,}5 - A(z)$,
- $P(-z \le Z \le z) = 2A(z)$,
- $0 \le a \le b$ için $P(a \le Z \le b) = A(b) - A(a)$.

Örneğin $z_{0{,}975} = 1{,}96$ olur, çünkü $P(Z \le 1{,}96) = 0{,}5 + 0{,}4750 = 0{,}975$. Sık kullanılan kantiller: $z_{0{,}90} = 1{,}282$, $z_{0{,}95} = 1{,}645$, $z_{0{,}975} = 1{,}960$, $z_{0{,}99} = 2{,}326$, $z_{0{,}995} = 2{,}576$. $z \ge 3{,}90$ için alan dört basamakta 0,5000'dir.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224

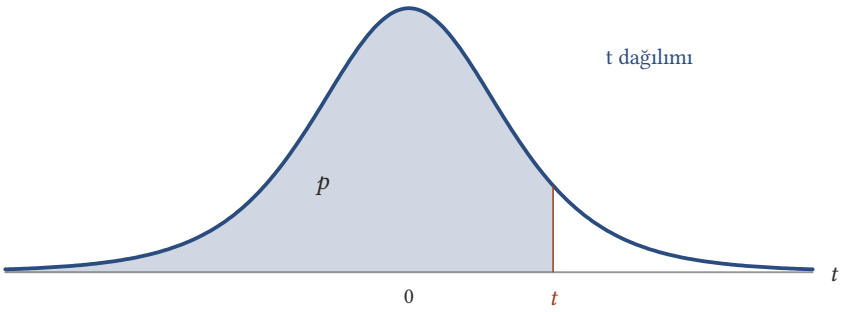
 CC BY-NC-SA 4.0

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

 CC BY-NC-SA 4.0

18.2 t Dağılımı

Tablo, ν serbestlik dereceli t dağılımının $t_{\nu,p}$ kantillerini verir: satır ν, sütun p'dir. Örneğin $t_{9,\,0{,}975} = 2{,}262$.



Şekil 18.2: Tablodaki t değeri, solunda kalan alan p olan noktadır: P(T ≤ t) = p.

Dağılım 0 etrafında simetrik olduğundan sol kuyruktaki kantiller de buradan okunur: $t_{\nu,1-p} = -t_{\nu,p}$. Son satır ($\nu = \infty$) standart normal kantilleridir; ν büyüdükçe t değerleri bu satıra yaklaşır.

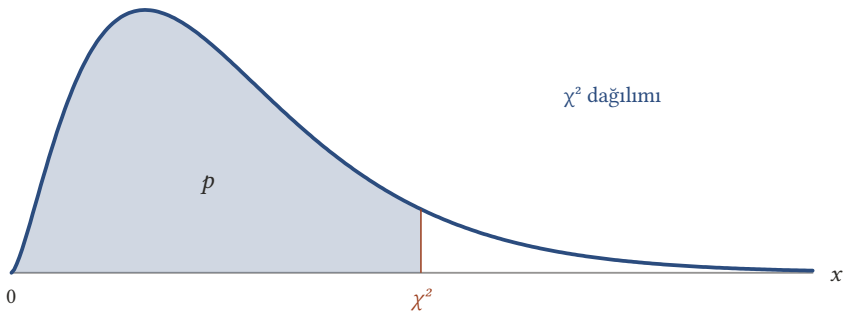
ν	$t_{0,60}$	$t_{0,70}$	$t_{0,80}$	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$	$t_{0,995}$	$t_{0,9995}$
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,599
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792

 CC BY-NC-SA 4.0

ν	$t_{0,60}$	$t_{0,70}$	$t_{0,80}$	$t_{0,90}$	$t_{0,95}$	$t_{0,975}$	$t_{0,99}$	$t_{0,995}$	$t_{0,9995}$
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
80	0,254	0,526	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,416
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,390
120	0,254	0,526	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

18.3 Ki-kare Dağılımı

Tablo, ν serbestlik dereceli χ^2 dağılımının $\chi^2_{\nu,\,p}$ kantillerini verir. Örneğin $\chi^2_{9,\,0,95} = 16{,}92$: χ^2_9 dağılımında 16,92'nin solunda kalan alan 0,95'tir.



Şekil 18.3: Tablodaki χ^2 değeri, solunda kalan alan p olan noktadır.

Dağılım simetrik olmadığından güven aralıklarında iki ayrı kantil gerekir; örneğin $\chi^2_{9,\,0,025} = 2{,}70$ ve $\chi^2_{9,\,0,975} = 19{,}02$. Tablo, okunabilsin diye iki parçaya bölünmüştür.

Sol kuyruk kantilleri ($p \leq 0{,}50$)

ν	$\chi^2_{0,005}$	$\chi^2_{0,01}$	$\chi^2_{0,025}$	$\chi^2_{0,05}$	$\chi^2_{0,10}$	$\chi^2_{0,25}$	$\chi^2_{0,50}$
1	0,0000393	0,000157	0,000982	0,00393	0,0158	0,102	0,455
2	0,01	0,0201	0,0506	0,103	0,211	0,575	1,39
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	1,21	2,37
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06	1,92	3,36

 CC BY-NC-SA 4.0

ν	$\chi^2_{0,005}$	$\chi^2_{0,01}$	$\chi^2_{0,025}$	$\chi^2_{0,05}$	$\chi^2_{0,10}$	$\chi^2_{0,25}$	$\chi^2_{0,50}$
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	2,67	4,35
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	7,58	10,34
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,34
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,34
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	10,17	13,34
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,04	14,34
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,91	15,34
17	5,70	6,41	7,56	8,67	10,09	12,79	16,34
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	13,68	17,34
19	6,84	7,63	8,91	10,12	11,65	14,56	18,34
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	15,45	19,34
21	8,03	8,90	10,28	11,59	13,24	16,34	20,34
22	8,64	9,54	10,98	12,34	14,04	17,24	21,34
23	9,26	10,20	11,69	13,09	14,85	18,14	22,34
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	19,04	23,34
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	19,94	24,34
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	20,84	25,34
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	21,75	26,34
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	22,66	27,34
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	23,57	28,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	24,48	29,34
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	33,66	39,34
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	42,94	49,33
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	52,29	59,33
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	61,70	69,33
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	71,14	79,33
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	80,62	89,33
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	90,13	99,33

Sağ kuyruk kantilleri ($p \geq 0{,}75$)

 CC BY-NC-SA 4.0

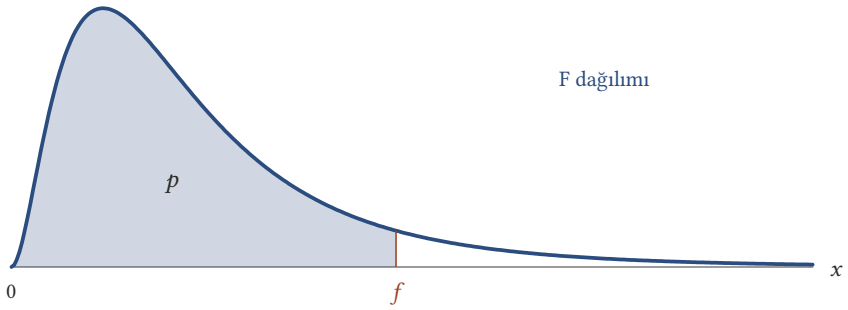
ν	$\chi^2_{0,75}$	$\chi^2_{0,90}$	$\chi^2_{0,95}$	$\chi^2_{0,975}$	$\chi^2_{0,99}$	$\chi^2_{0,995}$
1	1,32	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	4,11	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	20,49	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	21,60	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	22,72	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	23,83	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	24,93	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	26,04	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	27,14	32,01	35,17	38,08	41,64	44,18
24	28,24	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	29,34	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	30,43	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	31,53	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	32,62	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	33,71	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	34,80	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	45,62	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
50	56,33	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
60	66,98	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
70	77,58	85,53	90,53	95,02	100,43	104,21
80	88,13	96,58	101,88	106,63	112,33	116,32

 CC BY-NC-SA 4.0

ν	$\chi^2_{0,75}$	$\chi^2_{0,90}$	$\chi^2_{0,95}$	$\chi^2_{0,975}$	$\chi^2_{0,99}$	$\chi^2_{0,995}$
90	98,65	107,57	113,15	118,14	124,12	128,30
100	109,14	118,50	124,34	129,56	135,81	140,17

18.4 F Dağılımı

Tablolar, pay serbestlik derecesi ν_1 ve payda serbestlik derecesi ν_2 olan F dağılımının $F_{\nu_1,\nu_2,p}$ kantillerini $p = 0{,}95$, $0{,}975$ ve $0{,}99$ için verir. Sütun ν_1, satır ν_2'dir. Örneğin $F_{5,10,\,0{,}975} = 4{,}24$ ve $F_{10,5,\,0{,}975} = 6{,}62$.



Şekil 18.4: Tablodaki F değeri, solunda kalan alan p olan noktadır: P(F ≤ f) = p.

Sol kuyruk kantilleri tabloda yoktur; onlar serbestlik derecelerinin yer değiştirdiği sağ kuyruk kantilinden bulunur:

$$F_{\nu_1,\nu_2,\,1-p} = \frac{1}{F_{\nu_2,\nu_1,\,p}}.$$

Örneğin $F_{5,10,\,0{,}025} = 1/F_{10,5,\,0{,}975}$ olduğundan $F_{5,10,\,0{,}025} = 1/6{,}62 \approx 0{,}151$ bulunur. Bu eşitlik, $F \sim F_{\nu_1,\nu_2}$ ise $1/F \sim F_{\nu_2,\nu_1}$ olmasından gelir.

18.4.1 $p = 0{,}95$

$\nu_2 \setminus \nu_1$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85

 CC BY-NC-SA 4.0

$\nu_2 \setminus \nu_1$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94

$\nu_2 \setminus \nu_1$	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	∞
1	240,54	241,88	243,91	245,95	248,01	250,10	252,20	254,31
2	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,48	19,50
3	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,62	8,57	8,53
4	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,75	5,69	5,63
5	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,50	4,43	4,36
6	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,81	3,74	3,67
7	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,38	3,30	3,23
8	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,08	3,01	2,93
9	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,86	2,79	2,71
10	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,70	2,62	2,54
11	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,57	2,49	2,40
12	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,47	2,38	2,30
13	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,38	2,30	2,21
14	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,31	2,22	2,13
15	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,25	2,16	2,07
16	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,19	2,11	2,01

 CC BY-NC-SA 4.0

$\nu_2 \setminus \nu_1$	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	∞
17	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,15	2,06	1,96
18	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,11	2,02	1,92
19	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,07	1,98	1,88
20	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,04	1,95	1,84
22	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	1,98	1,89	1,78
24	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,94	1,84	1,73
26	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,90	1,80	1,69
28	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,87	1,77	1,65
30	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,84	1,74	1,62
40	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,74	1,64	1,51
60	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,65	1,53	1,39
120	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,55	1,43	1,25
∞	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,46	1,32	1,00

18.4.2 $p = 0{,}975$

$\nu_2 \setminus \nu_1$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01

 CC BY-NC-SA 4.0

$\nu_2 \setminus \nu_1$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19

$\nu_2 \setminus \nu_1$	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	∞
1	963,28	968,63	976,71	984,87	993,10	1001,41	1009,80	1018,26
2	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,48	39,50
3	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,08	13,99	13,90
4	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,46	8,36	8,26
5	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,23	6,12	6,02
6	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,07	4,96	4,85
7	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,36	4,25	4,14
8	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,89	3,78	3,67
9	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,56	3,45	3,33
10	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,31	3,20	3,08
11	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,12	3,00	2,88
12	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	2,96	2,85	2,72
13	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,84	2,72	2,60
14	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,73	2,61	2,49
15	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,64	2,52	2,40
16	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,57	2,45	2,32
17	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,50	2,38	2,25
18	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,44	2,32	2,19
19	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,39	2,27	2,13
20	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,35	2,22	2,09
22	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,27	2,14	2,00
24	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,21	2,08	1,94

 CC BY-NC-SA 4.0

$\nu_2 \setminus \nu_1$	9	10	12	15	20	30	60	∞
26	2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,16	2,03	1,88
28	2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,11	1,98	1,83
30	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,07	1,94	1,79
40	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	1,94	1,80	1,64
60	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,82	1,67	1,48
120	2,22	2,16	2,05	1,94	1,82	1,69	1,53	1,31
∞	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,57	1,39	1,00

18.4.3 $p = 0{,}99$

$\nu_2 \setminus \nu_1$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4052,18	4999,50	5403,35	5624,58	5763,65	5858,99	5928,36	5981,07
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23

 CC BY-NC-SA 4.0

$\nu_2 \setminus \nu_1$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51

$\nu_2 \setminus \nu_1$	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	∞
1	6022,47	6055,85	6106,32	6157,28	6208,73	6260,65	6313,03	6365,86
2	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,47	99,48	99,50
3	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,50	26,32	26,13
4	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,84	13,65	13,46
5	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,38	9,20	9,02
6	7,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,23	7,06	6,88
7	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	5,99	5,82	5,65
8	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,20	5,03	4,86
9	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,65	4,48	4,31
10	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,25	4,08	3,91
11	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	3,94	3,78	3,60
12	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,70	3,54	3,36
13	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,51	3,34	3,17
14	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,35	3,18	3,00
15	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,21	3,05	2,87
16	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,10	2,93	2,75
17	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,00	2,83	2,65
18	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	2,92	2,75	2,57
19	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,84	2,67	2,49
20	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,78	2,61	2,42
22	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,67	2,50	2,31
24	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,58	2,40	2,21
26	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,50	2,33	2,13
28	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,44	2,26	2,06
30	3,07	2,98	2,84	2,70	2,55	2,39	2,21	2,01
40	2,89	2,80	2,66	2,52	2,37	2,20	2,02	1,80
60	2,72	2,63	2,50	2,35	2,20	2,03	1,84	1,60
120	2,56	2,47	2,34	2,19	2,03	1,86	1,66	1,38

 CC BY-NC-SA 4.0

$\nu_2 \setminus \nu_1$	**9**	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**60**	∞
∞	2,41	2,32	2,18	2,04	1,88	1,70	1,47	1,00

 CC BY-NC-SA 4.0