Lineer Programlama

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com
Bu çalışma Creative Commons BY-NC-SA 4.0 lisansıyla paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 4 Kasım 2026

İçindekiler

Giriş 7

1 Lineer Programlama Problemi, Kanonik ve Standart Formlar . . 8
1.1 Lineer Programlama Problemi 8
1.2 Lineer Programlama Probleminin Varsayımları 10
1.3 Model Kurma 10
1.4 Lineer Programlama Probleminin Diğer Gösterimleri 13
1.5 Kanonik ve Standart Formlar 15
1.6 Dönüştürme Kuralları 21
1.7 Üç Formun Karşılaştırılması 25
1.8 Sık Yapılan Hatalar 29

2 Temel Çözümler ve Konveks Kümeler 31
2.1 Çözüm ve Uygun Çözüm 31
2.2 Temel Çözümler 33
2.3 Uygun Temel Çözümler ve Dejenerelik 34
2.4 Bütün Temel Çözümleri Hesaplamak 38
2.5 Optimal Çözüm 40
2.6 Konveks Kümeler 43
2.7 LP Probleminin Uygun Çözümleri 50

3 Uç Noktalar ve Grafik Yöntem 55
3.1 Optimum Bir Uç Noktada Alınır 55
3.2 Uç Noktalar ve Uygun Temel Çözümler 59
3.3 Grafik Yöntem 66
3.4 Özel Durumlar 74

4 Simpleks Yöntem 77
4.1 Bir Uç Noktadan Komşu Uç Noktaya 77
4.2 Optimallik ve Sınırsızlık 83
4.3 Başlangıç Tablosunun Kurulması 85
4.4 Yeni Tablonun Hesaplanması 87
4.5 Algoritmanın Adım Adım Özeti 93

5 Büyük M Yöntemi 100
5.1 Yapay Değişkenler ve M Problemi 100
5.2 M'li Simpleks Kriterleri 101
5.3 Bazdan Çıkan Yapay Değişkenin Sütunu 102

 CC BY-NC-SA 4.0

5.4 Yöntemin Sonuçları . . . 103
5.5 Büyük M Yöntemiyle Çözüm . . . 104
5.6 Uygun Çözümü Olmayan Problem . . . 115
5.7 Bazda Sıfır Değerli Yapay Değişken . . . 117

6 İki Faz Yöntemi . . . 120
6.1 Yöntemin Fikri . . . 120
6.2 Birinci Fazın Sonu: Üç Durum . . . 121
6.3 Yöntemin Adımları . . . 123
6.4 Uygun Çözümü Olan Problemler . . . 123
6.5 Uygun Çözümü Olmayan Problemler . . . 129
6.6 Bazda Sıfır Değerli Yapay Değişken Kalması . . . 132
6.7 Büyük M Yöntemiyle Karşılaştırma . . . 136

7 Sınırsız Çözüm ve Alternatif Optimal Çözüm . . . 138
7.1 Tablodan Okunan İki Eşitlik . . . 138
7.2 Sınırsız Çözüm . . . 139
7.3 Sınırsız Bölge ile Sınırsız Çözüm Aynı Şey Değildir . . . 146
7.4 Alternatif Optimal Çözüm . . . 148
7.5 Optimal Çözümlerin Sınırsız Olduğu Durum . . . 156

8 İşaret Kısıtlaması Olmayan Değişkenler . . . 160
8.1 Dönüşüm ve Eşdeğerlik . . . 160
8.2 Simpleks Yöntemle Çözüm . . . 161
8.3 Tabloda Birbirinin Negatifi Olan Sütunlar . . . 164
8.4 Sınırsız Çıkan Bir Örnek . . . 167

9 Sınırlı Değişkenler . . . 171
9.1 Sınırlı Değişken Türleri . . . 171
9.2 Dönüşümün Doğruluğu . . . 172
9.3 Çözüm Yöntemi . . . 173
9.4 Üstten Sınırlı Değişken . . . 173
9.5 Negatif Olmayan ve Üstten Sınırlı Değişken . . . 175
9.6 İki Yanlı Sınırlı Değişken . . . 178
9.7 Alttan Sınırlı Değişken . . . 181
9.8 Birden Çok Sınırlı Değişken . . . 184

10 Duyarlılık Analizi . . . 188
10.1 Duyarlılık Analizi Nedir? . . . 188
10.2 Optimal Tablonun B^{-1} ile Yazılması . . . 188
10.3 Amaç Fonksiyonu Katsayılarındaki Değişim . . . 194
10.4 Sağ Taraf Sabitlerindeki Değişim . . . 203
10.5 Özet . . . 206

 CC BY-NC-SA 4.0

11 Dualite . . . 207
11.1 Dual Problemin Fikri . . . 207
11.2 Primal ve Dual Problem . . . 208
11.3 Dualin Duali . . . 215
11.4 Zayıf Dualite . . . 216
11.5 Güçlü Dualite . . . 218
11.6 Primal ve Dual Optimal Tabloların Karşılaştırılması . . . 223

12 Dual Simpleks Algoritması . . . 232
12.1 Dual Uygun Temel Çözüm . . . 232
12.2 Dual Simpleks Kuralları . . . 233
12.3 Algoritma ve Örnekler . . . 235
12.4 Neden "Dual" Simpleks? . . . 240
12.5 Önce Dual Uygunluğu Sağlamak . . . 243
12.6 Duyarlılık Analizinden Sonra Dual Simpleks . . . 246

13 Tam Sayılı Programlama ve Dal-Sınır Yöntemi . . . 249
13.1 Tam Sayılı Programlama Problemi . . . 249
13.2 Yuvarlama Neden Yetmez . . . 250
13.3 Rahatlatılmış Problem Bir Sınır Verir . . . 252
13.4 Dallanma ve Budama . . . 253
13.5 Dal-Sınır Yöntemi . . . 256

14 Alıştırmalar . . . 266
14.1 Temel Çözümler . . . 266
14.2 Grafik Yöntem . . . 270
14.3 Simpleks Yöntem . . . 272
14.4 Büyük M Yöntemi . . . 275
14.5 Duyarlılık Analizi . . . 281
14.6 Dualite . . . 288
14.7 Dal-Sınır Yöntemi . . . 293

15 Uygulamalı Özet . . . 298
15.1 Soru Tipine Göre Yöntem . . . 298
15.2 Model Kurma . . . 298
15.3 Hangi Forma Getiriyorum? . . . 300
15.4 Değişken Kısıtları Tek Tabloda . . . 300
15.5 Bütün Temel Çözümler: Tablo Yöntemi . . . 302
15.6 Grafik Yöntem ve Aday Köşe Noktaları . . . 303
15.7 Simpleks Tablosunun Okunuşu . . . 305
15.8 Giren, Çıkan ve Durma Kuralları . . . 305
15.9 Yeni İterasyon Tablosu: Dikdörtgen Kuralı . . . 306
15.10 Simpleks Hesaplayıcı . . . 310

 CC BY-NC-SA 4.0

15.11 Başlangıç Bazı Yoksa: Büyük M mi, İki Faz mı? **310**
15.12 Dual Problemi Yazmak **311**
15.13 Dual Simpleks Algoritması **312**
15.14 Duyarlılık Analizi Formülleri **313**
15.15 Dal-Sınır Yöntemi Kısaca **313**
15.16 Son Kontrol Listesi **314**

 CC BY-NC-SA 4.0

Giriş

Lineer programlama, lineer kısıtlar altında lineer bir amaç fonksiyonunu en büyük ya da en küçük yapan çözümü arar. Sınırlı kaynakların en verimli nasıl paylaştırılacağı, en ucuz diyetin nasıl kurulacağı, bir fabrikanın hangi üründen ne kadar üreteceği gibi sorular bu kalıba girer. Ders, problemi modellemekten başlayıp simpleks algoritmasına, dualite teorisine ve tam sayılı programlamaya uzanır.

Notlar boyunca her problem önce **kanonik forma**, sonra **standart forma**, en sonunda da **simpleks yöntem ile çözülebilir hale** getirilir; bu üç kavram ilk bölümde yan yana karşılaştırılır. Simpleks tabloları her bölümde aynı düzende yazılır: üstte c_j satırı, solda x_B ve c_B sütunları, altta $z_j - c_j$ satırı. Bütün pratik kurallar, dikdörtgen kuralının renkli şekilleriyle birlikte, kitabın sonundaki Uygulamalı özet sayfasında tek yerde toplanmıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0

1. Lineer Programlama Problemi, Kanonik ve Standart Formlar

Bir atölye elindeki sınırlı işçilik ve malzemeyle hangi üründen kaç tane üretmeli ki kârı en büyük olsun? Bir diyet hangi besinlerden ne kadar içermeli ki vitamin gereksinimleri karşılansın ve maliyet en küçük kalsın? Bu soruların ortak bir kalıbı var: birkaç bilinmeyen doğrusal eşitsizliklerle sınırlanıyor ve yine doğrusal bir ölçütün en iyi değeri aranıyor. Lineer programlama bu kalıptaki soruları modellemek ve çözmek için geliştirilmiş bir yöntemdir.
Bu bölümde önce lineer programlama probleminin ne olduğunu ve hangi varsayımlara dayandığını göreceğiz, sonra sözel problemlerden model kurmayı öğreneceğiz. Bölümün ikinci yarısı, kitap boyunca sürekli kullanacağımız üç kavrama ayrılmıştır: **kanonik form**, **standart form** ve **simpleks yöntem ile çözülebilir hal**. Bu üçü birbirine çok benzediği için kolayca karışır. Bu yüzden her birini ayrı bir tanımla verecek, küçük örneklerle pekiştirecek, sonra bir problemi bu formlara getiren kuralları tek tek görecek ve en sonunda üçünü yan yana karşılaştıracağız.

1.1 Lineer Programlama Problemi

Önce yöntemin ne yaptığını ve bir modelin hangi parçalardan oluştuğunu görelim.
Lineer programlama (LP), belirli bir amaca ulaşmak için bazı kısıtlayıcı koşullar altında kıt kaynakların en verimli (optimal) biçimde kullanılmasını sağlayan bir yöntemdir. Adındaki "lineer" sözcüğü kullanılan fonksiyonların doğrusal olduğunu, "programlama" sözcüğü ise planlama işini anlatır; bilgisayar programlamasıyla bir ilgisi yoktur. Yani lineer programlama, bütün uygun seçenekler arasından en iyi (optimum) sonucu bulmaya yönelik bir planlama faaliyetidir. Böyle bir çalışmada önce gerekli veriler toplanır, sonra problem modellenir, en sonunda da modelin çözümü araştırılır.
Bir lineer programlama modeli kurulurken değişkenler arasındaki ilişkiler ve kullanılacak kıt kaynaklar belirlenir. Bunun için üç şey yapılır:

- **Karar değişkenleri belirlenir.** Karar verilecek sistem gözlemlenir; değeri bizim kontrolümüzde olan ve sistemin performansını etkileyen büyüklükler seçilir. Bu büyüklükler karar vericinin elindedir ve **karar değişkenleri** diye adlandırılır. Örneğin bir işletme A ve B tipinde iki farklı ürün üretmek istiyorsa karar değişkenleri, üretilecek A ve B miktarlarını gösteren x_1 ve x_2 olur.
- **Kısıtlayıcı koşullar belirlenir.** Eldeki kaynaklar sınırlı olduğundan karar değişkenleri istediğimiz her değeri alamaz. Bu sınırlamalar karar değişkenlerinin lineer fonksiyonları cinsinden eşitlik ya da eşitsizlik olarak yazılır ve **kısıtlar** diye adlandırılır.
- **Amaç fonksiyonu belirlenir.** Amaç en iyi dağılımı bulmak olduğundan, "iyiliği" ölçen büyüklük (kâr, maliyet, süre, ...) karar değişkenlerinin lineer bir fonksiyonu olarak yazılır. Bu fonksiyona **amaç fonksiyonu** denir; problem onu en büyük (maksimum) ya da en küçük (minimum) yapmaktır.

Bu üç parçayı genel olarak yazınca lineer programlama probleminin tanımına ulaşırız.

Tanım 1.1 (Lineer programlama problemi). a_{ij}, b_i ve c_j ($i = 1, 2, ..., m$ ve $j = 1, 2, ..., n$) bilinen sabitler olsun. Her satırda $\leq$, $=$, $\geq$ bağıntılarından biri bulunmak üzere

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &\left\{\begin{matrix}\leq\\=\\\geq\end{matrix}\right\} b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &\left\{\begin{matrix}\leq\\=\\\geq\end{matrix}\right\} b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &\left\{\begin{matrix}\leq\\=\\\geq\end{matrix}\right\} b_m
\end{aligned} \tag{1}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{2}$$

kısıtları altında

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{3}$$

amaç fonksiyonunu minimum (ya da maksimum) yapan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenlerini (değişkenlerini) belirleme problemine **lineer programlama problemi** denir. Ayrıca $m < n$ olduğu ve her $i = 1, 2, \ldots, m$ için $b_i \geq 0$ olduğu varsayılır.

Yani bir lineer programlama problemi üç bölümden oluşur:

1. **(1) kısıtlar sistemi.** Karar değişkenlerinin alabileceği değerleri sınırlar. Her kısıt doğrusal bir eşitlik ya da eşitsizliktir.
2. **(2) işaret koşulları.** Karar değişkenlerinin negatif olamayacağını söyler. Üretim miktarı, tüketilen besin, taşınan mal gibi büyüklükler zaten negatif olamaz.
3. **(3) amaç fonksiyonu.** Karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonudur ve maksimum ya da minimum yapılmak istenir.

İndislerin rolünü karıştırmamak için şunu akılda tutalım: a_{ij} katsayısında **ilk indis i kısıtın (satırın)**, **ikinci indis j değişkenin (sütunun)** numarasıdır. m kısıt sayısı, n değişken sayısıdır.
Tanımın sonundaki iki varsayım da kısıtlayıcı değildir. $b_i \geq 0$ varsayımı genelliği bozmaz: sağ tarafı negatif olan bir kısıtı -1 ile çarparsak eşitsizliğin yönü döner ve sağ taraf pozitif olur (bkz. Bölüm 1.6). Yalnız kanonik formda, eşitsizliklerin yönünü düzeltirken bu varsayımı geçici olarak bırakacağız; standart forma geçerken yeniden sağlanacak. $m < n$ varsayımı ise asıl olarak kısıtların hepsi eşitlik olduğunda anlam taşır: denklem sayısı bilinmeyen sayısından az olunca sistemin genellikle sonsuz çözümü vardır ve bunlar arasından en iyisini seçmek anlamlı hale gelir. Eşitsizlikli bir problemde $m \geq n$ olabilir; ileride eşitsizlikleri eşitliğe çevirirken eklenen yeni değişkenler değişken sayısını artırır. Örneğin birazdan kuracağımız üretim modelinde $m = 3$ kısıt ve $n = 2$ değişken vardır, ama eşitlik haline getirilmiş biçiminde 3 denklem ve 5 değişken olur.

Örnek 1.1 (Katsayıları okumak). Aşağıdaki problemde m, n ve bütün a_{ij}, b_i, c_j sabitlerini belirleyiniz:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 12 \\
2x_1 - x_2 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\
\max z &= 5x_1 + 4x_2 - x_3
\end{aligned}$$

Çözüm.
İki kısıt ve üç değişken var; $m = 2$ ve $n = 3$'tür.
Birinci kısıttaki katsayılar $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$'tür. İkinci kısıtta x_3 görünmüyor; görünmeyen değişkenin katsayısı sıfırdır. Böylece $a_{21} = 2$, $a_{22} = -1$, $a_{23} = 0$ olur. Sağ taraf sabitleri $b_1 = 12$ ve $b_2 = 4$'tür; ikisi de negatif değildir. Amaç fonksiyonunun katsayıları $c_1 = 5$, $c_2 = 4$, $c_3 = -1$'dir.
Birinci kısıt $\leq$, ikinci kısıt $=$ biçimindedir; amaç fonksiyonu maksimum yapılmak isteniyor. Tanımdaki (1), (2), (3) parçaları sırasıyla ilk iki satır, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ satırı ve son satırdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

1.2 Lineer Programlama Probleminin Varsayımları

Gerçek hayatta karşılaşılan çoğu karar problemi için, en azından uygun kabuller yapılarak, lineer bir model kurmak mümkündür. Model kurmak gerçek sistemi matematiksel olarak ifade etmek demektir. Modelden tutarlı sonuçlar alabilmek için aşağıdaki dört varsayımın geçerli olması gerekir.

Tanım 1.2 (Doğrusallık (oranlılık) varsayımı). Her karar değişkeninin amaç fonksiyonuna ve her kısıta katkısı, o değişkenin değeriyle **orantılıdır**: x_j değişkeninin amaca katkısı $c_j x_j$, i. kısıta katkısı $a_{ij}x_j$'dir.

Yani bir birim ürün 3 saat işçilik ve 50 TL kâr getiriyorsa, 10 birim ürün 30 saat işçilik ve 500 TL kâr getirir. Örneğin çok alana indirim yapılıyorsa birim fiyat miktara bağlı hale gelir ve bu varsayım bozulur.

Tanım 1.3 (Toplanabilirlik varsayımı). Amaç fonksiyonunun değeri ve her kısıtın sol tarafı, değişkenlerin ayrı ayrı katkılarının **toplamıdır**; değişkenler birbirinin katkısını artırmaz ya da azaltmaz.

Yani bir masa 2 saat, bir sandalye 1 saat işçilik istiyorsa x_1 masa ve x_2 sandalye için toplam işçilik $2x_1 + x_2$ saattir. Örneğin masa ve sandalye birlikte üretilince makine ayarı paylaşıldığı için süre kısalıyorsa, işçiliğe x_1x_2 gibi doğrusal olmayan bir terim karışır ve bu varsayım bozulur.

Tanım 1.4 (Bölünebilirlik varsayımı). Karar değişkenleri yalnız tam sayı değil, **kesirli değerler** de alabilir.

Yani çözüm 2,5 litre süt ya da 12,4 ton çelik çıkabilir ve bu anlamlıdır. Örneğin karar değişkeni satın alınacak kamyon sayısıysa 2,5 kamyon anlamsızdır ve bu varsayım bozulur. Böyle problemlerle Tam sayılı programlama ve dal-sınır yöntemi bölümünde ilgileneceğiz.

Tanım 1.5 (Belirlilik (kesinlik) varsayımı). Modeldeki bütün a_{ij}, b_i, c_j parametreleri **kesin olarak bilinir** ve değişmez.

Yani etin kilosunun 26 TL, eldeki işçiliğin 100 saat olduğu kesin olarak bilinir. Örneğin gelecek haftanın talebi tahminle belirleniyor ve rastgele değişiyorsa bu varsayım bozulur; böyle durumlarda parametrelerdeki küçük değişikliklerin çözümü nasıl etkilediğini Duyarlılık analizi bölümünde inceleyeceğiz.
Bir problemde karar değişkenleri ve parametrelerle ilgili doğrusallık, toplanabilirlik, bölünebilirlik ve belirlilik varsayımları geçerliyse, problem bir lineer programlama problemi olarak modellenip çözülebilir. Lineer programlamanın başlıca uygulama alanları şunlardır:

- **Ulaştırma ve lojistik problemleri:** malı depolardan mağazalara en düşük taşıma maliyetiyle dağıtmak.
- **Endüstriyel üretim planlaması ve stok kontrolü:** hangi üründen ne kadar üretileceğine, ne kadar stok tutulacağına karar vermek.
- **Karışım problemleri:** yem, yakıt, alaşım gibi karışımları istenen özellikleri sağlayacak en ucuz oranlarda hazırlamak.
- **Finansal planlama problemleri:** bir bütçeyi, getiri ve risk koşullarına uyarak yatırım seçenekleri arasında paylaştırmak.

1.3 Model Kurma

Sözel olarak verilen bir problemi lineer programlama problemine çevirmek, çözümün en önemli adımıdır; model yanlışsa en iyi çözüm yöntemi bile yanlış cevap verir. Aşağıdaki reçete bu işi düzene sokar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dört adımda model kurma

1. **Karar değişkenlerini birimleriyle tanımla:** "x_1: bir günde tüketilecek süt miktarı (lt)" gibi.
2. **Her kaynak ya da gereksinim için bir kısıt yaz:** "en az" $\to \geq$, "en çok, geçmemeli" $\to \leq$, "tam olarak" $\to =$. Kısıtın iki yanının birimi aynı olmalıdır.
3. **İşaret koşullarını ekle:** $x_j \geq 0$.
4. **Amaç fonksiyonunu yaz** ve maksimum mu minimum mu olduğunu belirt.

Bu kitapta bir problemi hep bu sırayla yazacağız: önce kısıtlar, sonra işaret koşulları, en sonda amaç fonksiyonu.

Örnek 1.2 (Diyet problemi). Bir kişi yalnız et, süt ve yumurta yiyerek diyet yapıyor. Günde en az 15 mg A vitamini, 30 mg C vitamini ve 10 mg D vitamini alması gerekiyor; buna karşılık besinlerden aldığı kolesterol günde 80 birimi geçmemeli.

- 1 litre sütte 1 mg A, 100 mg D vitamini ve 70 birim kolesterol vardır; sütün litresi 2,25 TL'dir.
- 1 kg ette 1 mg A, 10 mg C, 100 mg D vitamini ve 50 birim kolesterol vardır; etin kilosu 26 TL'dir.
- Bir yumurtada 10 mg A, 10 mg C, 10 mg D vitamini ve 120 birim kolesterol vardır; yumurtanın tanesi 0,21 TL'dir.

Kişi bu diyeti en ucuz yoldan gerçekleştirmek istiyor. Durumu bir lineer programlama problemi olarak ifade ediniz.

Çözüm.
Önce verileri bir tabloda toplayalım. Sütte C vitamini olmadığı için o hücreye 0 yazıyoruz.

Tablo 1.1: Diyet probleminin verileri

Gıda	A (mg)	C (mg)	D (mg)	Kolesterol (br)	Fiyat (TL/br)
Süt (lt)	1	0	100	70	2,25
Et (kg)	1	10	100	50	26
Yumurta (adet)	10	10	10	120	0,21
Gereksinim	≥ 15	≥ 30	≥ 10	≤ 80	

Karar değişkenleri. Kişinin karar vereceği şey, her besinden ne kadar tüketeceğidir:

- x_1: bir günde tüketilecek süt miktarı (lt),
- x_2: bir günde tüketilecek et miktarı (kg),
- x_3: bir günde tüketilecek yumurta miktarı (adet).

Kısıtlar. Tablodaki (bkz. Tablo 1.1) her besin öğesi sütunu bir kısıt verir. Örneğin A vitamini sütünü okuyalım: x_1 litre süt $1 \cdot x_1$ mg, x_2 kg et $1 \cdot x_2$ mg, x_3 yumurta $10x_3$ mg A vitamini verir. Toplam en az 15 mg olmalıdır: $x_1 + x_2 + 10x_3 \geq 15$. C ve D vitaminleri de aynı biçimde $\geq$ kısıtı verir. Kolesterol ise "geçmemeli" dendiği için $\leq$ kısıtıdır.
Amaç. Günlük maliyet $2{,}25x_1 + 26x_2 + 0{,}21x_3$ TL'dir ve en küçük yapılmak isteniyor.
Böylece model şudur:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 10x_3 &\geq 15 \\ 10x_2 + 10x_3 &\geq 30 \\ 100x_1 + 100x_2 + 10x_3 &\geq 10 \\ 70x_1 + 50x_2 + 120x_3 &\leq 80 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \min z &= 2{,}25x_1 + 26x_2 + 0{,}21x_3 \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Modeli kurmak, bütün kısıtları sağlayan bir diyetin var olduğunu garanti etmez. Bu verilerde kolesterol kısıtı çok sıkıdır. Değişkenler negatif olmadığından

$$50(x_2 + x_3) \leq 50x_2 + 120x_3 \leq 70x_1 + 50x_2 + 120x_3 \leq 80$$

olur, yani $x_2 + x_3 \leq 1{,}6$'dır. O halde $10x_2 + 10x_3 \leq 16$ çıkar ve C vitamini kısıtı (≥ 30) hiçbir biçimde sağlanamaz. Demek ki bu diyet verilen kolesterol sınırıyla gerçekleştirilemez. Simpleks yöntemin böyle durumları kendiliğinden nasıl fark ettiğini Büyük M yöntemi bölümünde göreceğiz.
■

Örnek 1.3 (Üretim planlaması). Bir atölye masa ve sandalye üretiyor. Bir masa 2 saat, bir sandalye 1 saat işçilik istiyor ve haftada en çok 100 saat işçilik var. Masa da sandalye de birer birim ahşap istiyor ve haftada en çok 80 birim ahşap var. Pazar haftada en çok 40 masa alabiliyor, sandalye için bir sınır yok. Bir masadan 30 TL, bir sandalyeden 20 TL kâr ediliyor. Haftalık kârı en büyük yapan üretim planı için bir lineer programlama modeli kurunuz.

Çözüm.
Karar değişkenleri. x_1: haftada üretilecek masa sayısı, x_2: haftada üretilecek sandalye sayısı. (Bölünebilirlik varsayımıyla bunları haftalık ortalama üretim olarak düşünür, kesirli değerlere de izin veririz.)
Kısıtlar. Her kaynak bir $\leq$ kısıtı verir:

- işçilik: x_1 masa $2x_1$ saat, x_2 sandalye x_2 saat ister ve toplam en çok 100 saattir: $2x_1 + x_2 \leq 100$;
- ahşap: $x_1 + x_2 \leq 80$;
- masa talebi: $x_1 \leq 40$.

Amaç. Haftalık kâr $30x_1 + 20x_2$ TL'dir ve en büyük yapılmak isteniyor.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 80 \\ x_1 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 30x_1 + 20x_2 \end{aligned}$$

Burada $m = 3$ kısıt ve $n = 2$ değişken vardır. Bu model bölümün geri kalanında birçok kez karşımıza çıkacak.
■

Örnek 1.4 (Karışım problemi). Bir çiftlik her gün tam 100 kg yem karışımı hazırlıyor. Karışımda mısır ve soya küspesi kullanılıyor. Mısırın %10'u, soya küspesinin %50'si proteindir; mısırın %2'si, soya küspesinin %6'sı liftir. Karışımın en az %30'u protein olmalı, en çok %5'i lif olabilir. Mısırın kilosu 4 TL, soya küspesinin kilosu 10 TL'dir. En ucuz karışım için bir lineer programlama modeli kurunuz.

Çözüm.
Karar değişkenleri. x_1: karışımdaki mısır miktarı (kg), x_2: karışımdaki soya küspesi miktarı (kg).
Kısıtlar. Karışım tam 100 kg olduğundan ilk kısıt bir eşitliktir: $x_1 + x_2 = 100$.
Protein miktarı $0{,}10x_1 + 0{,}50x_2$ kg'dır ve 100 kg'ın en az %30'u, yani en az 30 kg olmalıdır: $0{,}1x_1 + 0{,}5x_2 \geq 30$. İki yanı 10 ile çarparak ondalıklardan kurtulalım: $x_1 + 5x_2 \geq 300$.
Lif miktarı $0{,}02x_1 + 0{,}06x_2$ kg'dır ve en çok 5 kg olabilir: $0{,}02x_1 + 0{,}06x_2 \leq 5$. İki yanı 50 ile çarparsak $x_1 + 3x_2 \leq 250$ olur.
Amaç. Maliyet $4x_1 + 10x_2$ TL'dir ve en küçük yapılmak isteniyor.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 100 \\ x_1 + 5x_2 &\geq 300 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 250 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 4x_1 + 10x_2 \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu modelde üç tür kısıt da ($=, \geq, \leq$) bir arada bulunuyor. Örneğin 50 kg mısır ile 50 kg soya küspesi bütün kısıtları sağlar: $50+50=100$, $50+250=300\geq 300$, $50+150=200\leq 250$. Bu karışımın maliyeti $4\cdot 50+10\cdot 50=700$ TL'dir. En ucuz karışımın hangisi olduğunu ise ileride Uç noktalar ve grafik yöntem bölümündeki yöntemlerle bulacağız.
Karışımın toplamı sabit olmasaydı yüzdeleri toplam miktar cinsinden yazmamız gerekirdi. "Proteinin payı en az %30" koşulu o zaman

$$0{,}1x_1+0{,}5x_2\geq 0{,}3(x_1+x_2)$$

olur. Bütün değişkenleri sol tarafa toplarsak $-0{,}2x_1+0{,}2x_2\geq 0$, yani $-x_1+x_2\geq 0$ elde ederiz. Kısıtın sağ tarafında değişken bırakmayız; sağ tarafta yalnız sabit kalır.
■

1.4 Lineer Programlama Probleminin Diğer Gösterimleri

Tanımdaki uzun yazım, özellikle genel teoremleri ifade ederken hantal kalır. Aynı problem üç kısa biçimde de yazılabilir; üçü de ileride sık kullanılacak.

1.4.1 Toplam operatörüyle gösterim

Tanımda verilen (1), (2) ve (3) koşulları toplam sembolüyle

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{Bmatrix}\leq\\=\\\geq\end{Bmatrix} b_i, \qquad i=1,2,\ldots,m \quad (1)$$

$$x_j\geq 0, \qquad j=1,2,\ldots,n \quad (2)$$

$$\min z=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \quad (3)$$

biçiminde yazılır. Yani i sabit tutulup j üzerinden toplanınca i. kısıtın sol tarafı çıkar: örneğin $i=1$ için $\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n$. Maksimum probleminde (3) satırında min yerine max yazılır.

1.4.2 Matris gösterimi

Katsayıları ve değişkenleri matrislerde toplayalım:

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}, \qquad \vec{b}=\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}_{m\times 1},$$

$$\vec{x}=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}_{n\times 1}, \qquad \vec{c}=\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}_{n\times 1}.$$

A matrisine **katsayılar matrisi**, $\vec{b}$ vektörüne **sağ taraf vektörü**, $\vec{c}$ vektörüne **maliyet (amaç katsayıları) vektörü** denir. Bu matrislerle lineer programlama problemi

$$A\vec{x}\begin{Bmatrix}\leq\\=\\\geq\end{Bmatrix}\vec{b} \quad (1)$$

$$x_j\geq 0, \quad j=\overline{1,n} \quad (2)$$

$$\min z=\vec{c}^{\,T}\vec{x} \quad (3)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

biçiminde yazılır. Buradaki $j = \overline{1,n}$ yazımı "$j = 1, 2, ..., n$" demektir; kitap boyunca bu kısaltmayı kullanacağız. (2) koşulunu kısaca $\vec{x} \geq 0$ diye de yazarız: bir vektörün ≥ 0 olması, bütün bileşenlerinin ≥ 0 olması demektir. Aynı biçimde $A\vec{x} \leq \vec{b}$ yazımı, $A\vec{x}$ vektörünün her bileşeninin $\vec{b}$'nin karşılık gelen bileşeninden küçük ya da ona eşit olduğunu söyler. $\vec{c}^T\vec{x} = c_1x_1 + ... + c_nx_n$ ise iki vektörün iç çarpımıdır.

Örnek 1.5 (Üretim modelinin matris gösterimi). Örnek 1.3 modelini ($2x_1 + x_2 \leq 100$, $x_1 + x_2 \leq 80$, $x_1 \leq 40$, $x_1, x_2 \geq 0$, $\max z = 30x_1 + 20x_2$) matris biçiminde yazınız.

Çözüm.
Üç kısıt ve iki değişken olduğundan A matrisi 3×2 boyutludur. A'nın i. satırı i. kısıtın katsayılarıdır; üçüncü kısıtta x_2 görünmediği için oraya 0 yazılır:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Model $A\vec{x} \leq \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$, $\max z = \vec{c}^T\vec{x}$ olur. Sağlama olarak çarpımı açalım:

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}, \qquad \vec{c}^T\vec{x} = 30x_1 + 20x_2.$$

Bileşen bileşen okununca üç kısıt ve amaç fonksiyonu aynen geri gelir.
■

1.4.3 Vektörel gösterim

Bu kez A matrisini sütunlarına ayıralım. $j = \overline{1,n}$ için

$$v_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad v_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

olsun. v_j, A'nın j. sütunudur, yani x_j değişkeninin bütün kısıtlardaki katsayılarını toplar; v_0 ise sağ taraf vektörüdür. Bu vektörlerle lineer programlama problemi

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_nv_n \left\{ \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \right\} v_0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_jv_j \left\{ \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \right\} v_0$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

biçiminde ifade edilir. Yani kısıtlar sistemi, A'nın sütunlarının x_j ağırlıklarıyla alınmış bir toplamının v_0 ile karşılaştırılmasıdır. Bu gösterim simpleks yöntemin dilidir: simpleks yöntemin başlangıç tablosunun sütunları tam olarak bu $v_0, v_1, ..., v_n$ vektörleridir (Simpleks yöntem).

Örnek 1.6 (Üretim modelinin vektörel gösterimi). Örnek 1.3 modelinin kısıtlarını ($2x_1 + x_2 \leq 100$, $x_1 + x_2 \leq 80$, $x_1 \leq 40$) vektörel biçimde yazınız ve v_1 vektörünü yorumlayınız.

Çözüm.
A'nın sütunları ve sağ taraf vektörü

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_0 = \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \\ 40 \end{bmatrix}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan kısıtlar

$$x_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\leq\begin{bmatrix}100\\80\\40\end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. Sol tarafı toplarsak $(2x_1+x_2, x_1+x_2, x_1)$ vektörü çıkar; bileşen bileşen karşılaştırma üç kısıtı geri verir.
v_1 vektörü **bir masanın** tükettiği kaynakları gösterir: 2 saat işçilik, 1 birim ahşap ve pazardaki 40 masalık talepten 1 birim. Benzer biçimde v_2 bir sandalyenin tükettiği kaynaklardır; sandalye masa talebini etkilemediği için son bileşeni 0'dır. Vektörel gösterimde her sütun bir "faaliyeti", v_0 ise eldeki kaynakları temsil eder.
■

1.5 Kanonik ve Standart Formlar

Aynı problem pek çok biçimde yazılabilir: bir kısıtı -1 ile çarpabilir, bir eşitsizliği yeni bir değişken ekleyerek eşitliğe çevirebiliriz. Çözüm yöntemleri ve teoriler ise problemi belirli kalıplarda ister. Aşağıda bu kalıpların üçünü tanımlayacağız.
Bir lineer programlama probleminin genel şeklini matris yapısında

$$A\vec{x}\begin{Bmatrix}\leq\\=\\\geq\end{Bmatrix}\vec{b} \qquad (1)$$

$$x_j\geq 0,\quad j=\overline{1,n} \qquad (2)$$

$$\min z=\vec{c}^{\,T}\vec{x}\quad(\text{veya }\max z=\vec{c}^{\,T}\vec{x}) \qquad (3)$$

olarak alalım. Amaç fonksiyonunun maksimum ya da minimum olmasına bağlı olarak problemin kanonik ve standart formlarını inceleyeceğiz.

1.5.1 Kanonik form

Kanonik form yalnız eşitsizliklerin **yönüyle** ilgili bir kalıptır. "Kanonik" sözcüğü "genel olarak kabul edilen, kurala uygun" anlamına gelir.

Tanım 1.6 (Kanonik form). Bütün değişkenleri negatif olmayan bir lineer programlama problemi

- **maksimum problemiyse** ve bütün kısıtları $\leq$ biçimindeyse,
- **minimum problemiyse** ve bütün kısıtları $\geq$ biçimindeyse

kanonik formdadır. Matris gösterimiyle maksimum ve minimum problemlerinin kanonik formları sırasıyla

$$\begin{aligned}A\vec{x}&\leq\vec{b}\\\vec{x}&\geq 0\\\max z&=\vec{c}^{\,T}\vec{x}\\\vec{x}&\geq 0\\\min z&=\vec{c}^{\,T}\vec{x}\end{aligned}\qquad\qquad A\vec{x}\geq\vec{b}$$

biçimindedir.

Yani kanonik formu tanımak için üç soruya bakarız: Amaç maksimum mu, minimum mu? Bütün kısıtlar amaca uygun yönde mi (maksimumda $\leq$, minimumda $\geq$)? Bütün değişkenler ≥ 0 mı? Kanonik formda **eşitlik kısıtı bulunmaz** ve **sağ tarafların işaretine bakılmaz**: b_i negatif de olabilir. Bu kalıp doğaldır: kârı büyütmek isteyen, sınırlı kaynaklarla yukarıdan ($\leq$) kısıtlanır; maliyeti küçültmek isteyen, karşılanması gereken ihtiyaçlarla aşağıdan ($\geq$) kısıtlanır. Kanonik formun asıl kullanıldığı yer dualitedir: bir problemin duali, kanonik formundan doğrudan yazılır (Dualite).

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 1.7 (Kanonik formda olan bir problem). Örnek 1.3 modeli ($2x_1 + x_2 \leq 100$, $x_1 + x_2 \leq 80$, $x_1 \leq 40$, $x_1, x_2 \geq 0$, $\max z = 30x_1 + 20x_2$) kanonik formda mıdır?

> **Çözüm.**
> Üç soruya sırayla bakalım. Amaç maksimumdur. Üç kısıtın üçü de $\leq$ biçimindedir; maksimum probleminde istenen yön budur. İki değişken de ≥ 0'dır. O halde problem kanonik formdadır ve hiçbir değişiklik gerekmez.
> ■

Örnek 1.8 (Kanonik formda olmayan bir problem). Aşağıdaki problem kanonik formda mıdır? Değilse kanonik forma getiriniz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

> **Çözüm.**
> Amaç minimumdur, dolayısıyla bütün kısıtların $\geq$ olması gerekir. Birinci kısıt uygundur, ama ikinci kısıt $\leq$ biçimindedir; problem kanonik formda değildir.
> İkinci kısıtın iki yanını -1 ile çarpalım. Bir eşitsizlik negatif bir sayıyla çarpılınca yönü döner:
>
> $$x_1 + 3x_2 \leq 9 \quad \Leftrightarrow \quad -x_1 - 3x_2 \geq -9.$$
>
> Böylece kanonik form
>
> $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ -x_1 - 3x_2 &\geq -9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$
>
> olur. İkinci satırın sağ tarafı -9'dur; kanonik form sağ tarafın işaretiyle ilgilenmediği için bu bir sorun değildir.
> ■

1.5.2 Standart form

Çözüm yöntemleri eşitsizliklerle değil, denklem sistemleriyle çalışır; çünkü doğrusal denklem sistemlerini çözmeyi iyi biliyoruz. Standart form, problemi bir denklem sistemine çevirir.

Tanım 1.7 (Standart form). Bir lineer programlama probleminde

- bütün kısıtlar **eşitlik** biçimindeyse,
- bütün sağ taraf sabitleri $b_i \geq 0$ ise,
- bütün değişkenler ≥ 0 ise

problem **standart formdadır**. Amaç fonksiyonu maksimum da minimum da olabilir. Matris gösterimiyle standart form $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \geq 0$, $\vec{x} \geq 0$, max (ya da min) $z = \vec{c}^T\vec{x}$ biçimindedir.

Yani standart formu tanımak için yine üç şeye bakarız: hepsi eşitlik mi, hepsinin sağ tarafı negatif olmayan mı, bütün değişkenler ≥ 0 mı? Kanonik formun tersine, standart formda eşitsizliklerin yönü artık yoktur ama **sağ tarafların işareti önemlidir**. $b_i \geq 0$ koşulunun nedeni bir sonraki adımda ortaya çıkacak: simpleks yöntem başlangıçta bazı değişkenlere doğrudan b_i değerini verir ve bu değerin negatif olmaması gerekir.
Bir eşitsizliği eşitliğe çevirmek için ona yeni bir değişken ekleriz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 1.8 (Aylak ve artık değişkenler). $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ kısıtını eşitliğe çevirmek için sol tarafa **eklenen** negatif olmayan değişkene **aylak (slack) değişken**, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ kısıtını eşitliğe çevirmek için sol taraftan **çıkarılan** negatif olmayan değişkene **artık (surplus) değişken** denir:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \qquad x_{n+i} \geq 0.$$

Aylak ve artık değişkenler sıradaki indisi alır ($x_{n+1}, x_{n+2}, ...$) ve amaç fonksiyonundaki katsayıları 0'dır. x_{n+i} yazımı her kısıta bir değişken eklendiği durum içindir; bazı kısıtlar eşitlikse yeni değişkenler yine sırayla numaralanır.

Yani aylak değişken $x_{n+i} = b_i - \sum_j a_{ij}x_j$, $\leq$ kısıtında **kullanılmayan kaynak miktarıdır**; artık değişken $x_{n+i} = \sum_j a_{ij}x_j - b_i$, $\geq$ kısıtında **gereksinimin aşılan kısmıdır**. İkisinin de amaç katsayısı 0'dır, çünkü boşta kalan kaynak ya da fazladan karşılanan gereksinim kâra ya da maliyete ayrıca bir şey eklemez. Yeni değişken eklemek problemi değiştirmez; bunu şimdi kesin olarak görelim.

Önerme 1.1 (Aylak ve artık değişkenle eşdeğerlik). *$x_1, ..., x_n$ sayıları için:*

- *$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ olması için gerek ve yeter koşul, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$ eşitliğini sağlayan bir $x_{n+i} \geq 0$ sayısının var olmasıdır;*
- *$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ olması için gerek ve yeter koşul, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i$ eşitliğini sağlayan bir $x_{n+i} \geq 0$ sayısının var olmasıdır.*

Bu sayı her iki durumda da tektir.

> ***İspat.***
> *Kısaca $s = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ yazalım.*
> *Birinci madde. $s \leq b_i$ ise $x_{n+i} = b_i - s$ seçelim; $x_{n+i} \geq 0$'dır ve $s + x_{n+i} = b_i$ sağlanır. Tersine, $s + x_{n+i} = b_i$ ve $x_{n+i} \geq 0$ ise $s = b_i - x_{n+i} \leq b_i$ olur. Eşitlik x_{n+i}'yi $x_{n+i} = b_i - s$ olarak tek biçimde belirler.*
> *İkinci madde. $s \geq b_i$ ise $x_{n+i} = s - b_i \geq 0$ seçilir ve $s - x_{n+i} = b_i$ olur. Tersine, $s - x_{n+i} = b_i$ ve $x_{n+i} \geq 0$ ise $s = b_i + x_{n+i} \geq b_i$'dir. Eşitlik $x_{n+i} = s - b_i$ değerini tek biçimde belirler.*
> *Aylak ve artık değişkenlerin amaç katsayısı 0 olduğundan, eşitliğe çevrilmiş problemin her çözümünde amaç fonksiyonunun değeri, ilk n değişkenden oluşan çözümdeki değerle aynıdır. Dolayısıyla iki problemin çözümleri birebir eşlenir ve optimal değerleri aynıdır.*
> ■

Önerme, kanonik formdaki bir problemin standart forma nasıl getirileceğini de söyler.
Maksimum problemi. Kanonik formdaki $A\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \max z = \vec{c}^T\vec{x}$ problemini (ve $\vec{b} \geq 0$ olduğunu) düşünelim. Standart forma getirmek için (1) kısıtlarındaki eşitsizlikleri kaldırmak gerekir. Bunun için her kısıta $x_{n+i}, i = 1, 2, ..., m$ aylak değişkenleri eklenir; bu değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katsayıları 0'dır. Maksimum probleminin standart formu şudur:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \\
x_1 \geq 0, ..., x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, ..., x_{n+m} &\geq 0 \\
\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n & \\
+0x_{n+1} + 0x_{n+2} + ... + 0x_{n+m} &
\end{aligned}$$

Minimum problemi. Kanonik formdaki $A\vec{x} \geq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \min z = \vec{c}^T\vec{x}$ problemini ($\vec{b} \geq 0$ olmak üzere) standart forma getirmek için her kısıttan $x_{n+i}, i = 1, 2, ..., m$ artık değişkenleri çıkarılır; amaç katsayıları yine 0'dır. Minimum probleminin standart formu şudur:

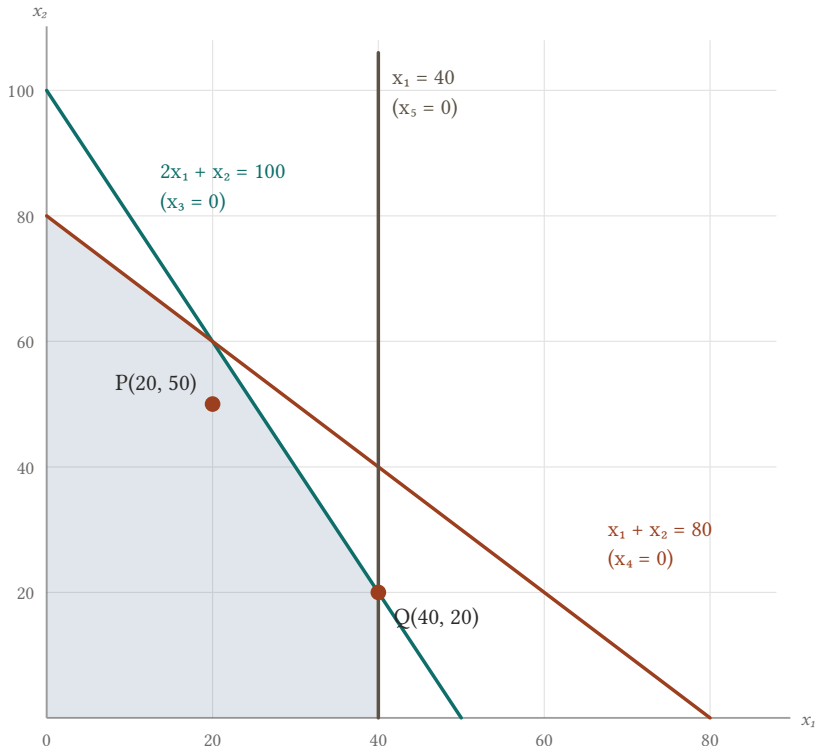
 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - x_{n+1} &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n - x_{n+2} &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n - x_{n+m} &= b_m \\
x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \ldots, x_{n+m} &\geq 0 \\
\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
+0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} &
\end{aligned}
$$

Matris diliyle: maksimum probleminde $A\vec{x} + I\vec{x}_s = \vec{b}$, minimum probleminde $A\vec{x} - I\vec{x}_s = \vec{b}$ olur; burada $\vec{x}_s = (x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ eklenen değişkenlerin vektörü, I ise $m \times m$ birim matristir. Bu işaret farkı (aylakta $+I$, artıkta $-I$) bir sonraki kavramın tam merkezindedir.

Örnek 1.9 (Aylak değişkenin anlamı). Örnek 1.3 modelini ($2x_1 + x_2 \leq 100$, $x_1 + x_2 \leq 80$, $x_1 \leq 40$, $x_1, x_2 \geq 0$, $\max z = 30x_1 + 20x_2$) standart forma getiriniz ve aylak değişkenlerin $P(20, 50)$ ile $Q(40, 20)$ üretim planlarındaki değerlerini yorumlayınız.

Çözüm.



Şekil 1.1: Üretim örneğinin kısıtları ve boyalı uygun bölge. Her kısıt doğrusu üzerinde o kısıtın aylak değişkeni sıfırdır. İçerideki P(20, 50) noktasında $x_3 = 10$, $x_4 = 10$, $x_5 = 20$; Q(40, 20) noktasında $x_3 = 0$, $x_4 = 20$, $x_5 = 0$.

Üç kısıtın üçü de $\leq$ biçimindedir ve sağ tarafları negatif değildir. Her birine sırasıyla x_3, x_4, x_5 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + x_3 &= 100 \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 80 \\
x_1 + x_5 &= 40 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \\
\max z = 30x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &
\end{aligned}
$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Aylak değişkenler kısıtlardan hesaplanır: $x_3 = 100 - 2x_1 - x_2$, $x_4 = 80 - x_1 - x_2$, $x_5 = 40 - x_1$.
$P(20, 50)$ planı: 20 masa ve 50 sandalye. İşçilik $2 \cdot 20 + 50 = 90$ saat kullanılır, $x_3 = 10$ saat boşta kalır. Ahşap $20 + 50 = 70$ birim kullanılır, $x_4 = 10$ birim artar. Masa talebinden $x_5 = 40 - 20 = 20$ masalık kısım karşılanmamış kalır.
$Q(40, 20)$ planı: İşçilik $80 + 20 = 100$ saat, yani tamamen kullanılır: $x_3 = 0$. Ahşap 60 birim kullanılır, $x_4 = 20$ birim artar. Masa talebi tamamen karşılanır: $x_5 = 0$.
Bir aylak değişkenin sıfır olması, o kaynağın sonuna kadar kullanıldığı, yani noktanın o kısıtın doğrusu üzerinde bulunduğu anlamına gelir. Aylak değişken pozitifse nokta doğrunun "içeri" tarafındadır ve kaynaktan artan vardır. Çözümün başındaki şekilde her kısıt doğrusu üzerinde ilgili aylak değişkenin sıfır olduğu görülüyor.
■

Örnek 1.10 (Artık değişkenin anlamı). İki besinden oluşan bir diyet düşünelim. B_1 besininin kilogramında 1 birim A ve 1 birim C vitamini, B_2 besininin kilogramında 1 birim A ve 3 birim C vitamini vardır. Günde en az 4 birim A ve 6 birim C vitamini alınmalıdır. B_1'in kilosu 2 TL, B_2'nin kilosu 3 TL'dir. x_1 ve x_2 sırasıyla tüketilecek B_1 ve B_2 miktarları (kg) olmak üzere modeli kurup standart forma getiriniz ve artık değişkenlerin $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ diyetindeki değerlerini yorumlayınız.

Çözüm.
A vitamini $x_1 + x_2$, C vitamini $x_1 + 3x_2$ birimdir ve maliyet $2x_1 + 3x_2$ TL'dir. Model

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

olur; minimum problemi ve bütün kısıtlar $\geq$ olduğundan kanonik formdadır. İki kısıttan da sırasıyla x_3 ve x_4 artık değişkenlerini çıkarırız:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Artık değişkenler $x_3 = x_1 + x_2 - 4$ ve $x_4 = x_1 + 3x_2 - 6$'dır. $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ diyetinde 5 birim A vitamini alınır; gereksinim $x_3 = 1$ birim aşılmıştır. C vitamini $3 + 6 = 9$ birimdir; gereksinim $x_4 = 3$ birim aşılmıştır. Bu diyetin maliyeti $2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$ TL'dir.
Artık değişken "fazladan alınan" miktardır. Artık değişken negatif olsaydı gereksinim karşılanmamış olurdu; $x_3, x_4 \geq 0$ koşulu tam olarak $\geq$ kısıtlarını ifade eder.
■

1.5.3 Simpleks yöntem ile çözülebilir hal

Standart form bir denklem sistemidir, ama simpleks yöntemin çalışmaya başlaması için bundan fazlası gerekir: sistemin bir başlangıç çözümünün **hiç hesap yapmadan okunabilmesi**. Bunu sağlayan yapı bir birim matristir.

Tanım 1.9 (Simpleks yöntem ile çözülebilir hal). m denklemli standart formdaki bir problemin katsayılar matrisi, sütunları arasında $m \times m$ birim matrisin bütün sütunlarını bulunduruyorsa, yani her $i = \overline{1, m}$ için **yalnız i. denklemde görünen ve orada katsayısı 1 olan** bir değişken varsa, problem **simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir**.

Yani çözülebilir halde her denklemin "kendine ait" bir değişkeni vardır. Bu değişkenler dışındaki bütün değişkenlere 0 verirsek, her denklem kendine ait değişkenin değerini doğrudan söyler: o değişken b_i'ye eşittir. Standart formda $b_i \geq 0$ olduğu için bu değerler negatif değildir ve elimizde kısıtların hepsini sağ-

 CC BY-NC-SA 4.0

layan bir başlangıç çözümü olur. Simpleks yöntem bu çözümden başlar ve adım adım daha iyi çözümlere geçer; birim sütunları veren değişkenler başlangıç **bazını** oluşturur (Simpleks yöntem).
Aylak değişkenlerin sütunları birim matrisin sütunlarıdır ($+I$); bu yüzden aylak değişkenler çözülebilir hal için hazır adaydır. Artık değişkenlerin sütunları ise $-I$'nın sütunlarıdır; katsayı -1 olduğu için birim sütun vermez. Birim sütunu olmayan denklemlere yardımcı bir değişken ekleriz.

Tanım 1.10 (Yapay değişken). Standart formda birim sütunu bulunmayan bir denklemin sol tarafına, yalnız o denklemde görünecek biçimde katsayısı 1 ile eklenen negatif olmayan değişkene **yapay (artificial) değişken** denir. Yapay değişkenler $x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots$, sütun vektörleri $v_{u_1}, v_{u_2}, \ldots$ ile gösterilir. Amaç fonksiyonundaki katsayıları, M çok büyük bir pozitif sayı olmak üzere, **minimum probleminde $+M$, maksimum probleminde $-M$**'dir.

Yani yapay değişken, gerçek problemde karşılığı olmayan geçici bir "yer tutucudur". Eklendiği denklem değişir: örneğin $x_1 + x_2 - x_3 = 4$ denklemi $x_1 + x_2 - x_3 + x_{u_1} = 4$ olur. Bu yeni denklem orijinaliyle ancak $x_{u_1} = 0$ iken aynıdır. Amaçtaki büyük ceza, yapay değişkeni pozitif tutmayı çok pahalı kılar: minimumda $+M$ maliyeti büyütür, maksimumda $-M$ kârı düşürür. Böylece simpleks yöntem yapay değişkenleri sıfıra indirmeye zorlanır; bunun ayrıntıları Büyük M yöntemi ve İki faz yöntemi bölümlerindedir. Zaten birim sütunu olan denkleme yapay değişken eklenmez.

Önerme 1.2 (Aylak değişkenler birim matris verir). *Kanonik formdaki bir maksimum probleminde $\vec{b} \geq 0$ ise, aylak değişkenler eklenerek elde edilen standart form simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir.*

> ***İspat.***
> *Kanonik formdaki maksimum probleminin bütün kısıtları $\leq$ biçimindedir. $\vec{b} \geq 0$ olduğundan hiçbir satırı -1 ile çarpmak gerekmez; her kısıta bir aylak değişken eklenince elde edilen sistem standart formdadır ve katsayılar matrisi $[\,A\,I\,]$ olur. Burada I sütunları $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ aylak değişkenlerine ait $m \times m$ birim matristir: x_{n+i} yalnız i. denklemde ve katsayısı 1 ile görünür. Bu, çözülebilir halin tanımındaki koşulun ta kendisidir.*
> ■

Bu önermenin bir sonucu olarak, $\leq$ kısıtlı ve sağ tarafları negatif olmayan bir maksimum probleminde yapay değişkene hiç gerek kalmaz. Kanonik formdaki bir minimum probleminde ise ($\vec{b} > 0$ iken) her denklemde bir artık değişken bulunur ve hiçbiri birim sütun vermez. Orijinal değişkenlerden biri bir denklem için birim sütun vermiyorsa o denkleme bir yapay değişken eklemek gerekir; uygulamada bu çoğunlukla her denklem demektir.

Örnek 1.11 (Çözülebilir halde olan bir problem). Aşağıdaki problem simpleks yöntem ile çözülebilir halde midir? Öyleyse başlangıç çözümünü okuyunuz.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_6 &= 2 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,6} \\ \min z &= -4x_1 - 5x_2 \end{aligned}$$

> **Çözüm.**
> Önce standart formda olup olmadığına bakalım: bütün kısıtlar eşitliktir, sağ taraflar $2, 6, 5, 2$ negatif değildir ve bütün değişkenler ≥ 0'dır. Problem standart formdadır.
> Katsayılar matrisini yazalım:
>
> $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Son dört sütun (x_3, x_4, x_5, x_6) 4×4 birim matrisi oluşturur: x_3 yalnız birinci, x_4 yalnız ikinci, x_5 yalnız üçüncü, x_6 yalnız dördüncü denklemde ve katsayısı 1 ile görünür. O halde problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir; yapay değişkene gerek yoktur.
Başlangıç çözümü için $x_1 = x_2 = 0$ alırız; denklemlerden $x_3 = 2$, $x_4 = 6$, $x_5 = 5$, $x_6 = 2$ okunur ve amaç değeri $z = 0$ olur. Bu problemi Simpleks yöntem bölümünde bu başlangıç çözümünden yola çıkarak çözeceğiz.
■

Örnek 1.12 (Yalnız gereken satıra yapay değişken). Aşağıdaki problemi önce standart forma, sonra simpleks yöntem ile çözülebilir hale getiriniz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.
Standart form. Birinci kısıt $\geq$ olduğundan x_3 artık değişkenini çıkarırız; ikinci kısıt $\leq$ olduğundan x_4 aylak değişkenini ekleriz. Sağ taraflar 4 ve 10 negatif değildir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

(Problem minimum problemi olduğu halde $\leq$ kısıtı içerdiği için kanonik formda değildir; ama standart form için kısıtların yönü önemli değildir.)
Çözülebilir hal. İkinci denklemde x_4 yalnız orada ve katsayısı 1 ile görünür; ikinci denklemin birim sütunu hazırdır. Birinci denklemde ise x_3'ün katsayısı -1'dir ve başka uygun değişken yoktur. Yalnız birinci denkleme bir x_{u_1} yapay değişkeni ekleriz; minimum problemi olduğu için amaç katsayısı $+M$'dir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_{u_1} &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1} &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_{u_1} \end{aligned}$$

Artık x_{u_1} ve x_4 sütunları 2×2 birim matrisi oluşturur. Başlangıç çözümü $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_{u_1} = 4$, $x_4 = 10$'dur.
Birinci denklemi -1 ile çarparak x_3'e katsayı 1 kazandırmak işe yaramaz: $-x_1 - x_2 + x_3 = -4$ denkleminde sağ taraf negatif olur, standart form bozulur ve $x_3 = -4$ başlangıç değeri $x_3 \geq 0$ koşulunu ihlal eder.
■

1.6 Dönüştürme Kuralları

Verilen bir problem çoğu zaman bu formların hiçbirinde değildir. Aşağıdaki kurallar problemi, çözümlerini ve optimal değerini koruyarak istenen forma getirir. Her kuralın başında hangi form için gerektiğini de belirtiyoruz.

1.6.1 Maksimum ve minimum arasında geçiş

Hangi formda olursa olsun amaç fonksiyonunu maksimumdan minimuma (ya da tersine) çevirmek gerekebilir; örneğin bir yöntem yalnız minimum problemleri için anlatılmışsa. Bunu sağlayan kural şudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 1.3 (Minimum ve maksimum arasındaki bağ). *S bir küme, f de S üzerinde tanımlı gerçel değerli bir fonksiyon olsun. f, S üzerindeki minimum değerini $\vec{x}^*$ noktasında alıyorsa $-f$ de maksimum değerini aynı $\vec{x}^*$ noktasında alır ve*

$$\min_S f = -\max_S (-f)$$

olur. Lineer programlama diliyle: $\min z = -\max(-z)$.

> ***İspat.***
> *$\vec{x}^*$ noktası f'nin minimum noktası olduğundan her $\vec{x} \in S$ için $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}^*)$'dır. Bu eşitsizliği -1 ile çarparsak her $\vec{x} \in S$ için $-f(\vec{x}) \leq -f(\vec{x}^*)$ çıkar. Demek ki $-f$ fonksiyonu S üzerindeki en büyük değerini $\vec{x}^*$ noktasında alır ve*
>
> $$\max_S (-f) = -f(\vec{x}^*) = -\min_S f$$
>
> *olur. İki yanı -1 ile çarpmak istenen eşitliği verir. Aynı akıl yürütme tersine de işler: $-f$'nin maksimum noktası f'nin minimum noktasıdır. Dolayısıyla birinin optimumu yoksa ötekinin de yoktur.*
> ■

Yani $\min z = \vec{c}^T\vec{x}$ problemini çözmek yerine $\max w = -\vec{c}^T\vec{x}$ problemini çözebiliriz: amaç katsayılarının hepsi -1 ile çarpılır, kısıtlara dokunulmaz. Optimal nokta değişmez; yalnız optimal değerin işaretini sonunda geri çevirmeyi unutmamak gerekir.

Örnek 1.13 (Minimum problemini maksimuma çevirmek). $x_1 + x_2 \leq 4, x_1, x_2 \geq 0$ kısıtları altında $\min z = x_1 - 2x_2$ problemini bir maksimum problemine çeviriniz ve iki problemin optimal değerlerini karşılaştırınız.

> **Çözüm.**
> Amaç katsayılarını -1 ile çarparak $w = -z$ tanımlayalım. Karşılık gelen problem
>
> $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max w &= -x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$
>
> olur. Bu küçük problemin optimumunu doğrudan bulabiliriz. $x_1 \geq 0$ olduğundan $w = -x_1 + 2x_2 \leq 2x_2$'dir; kısıttan da $x_2 \leq 4 - x_1 \leq 4$ çıkar. O halde her uygun noktada $w \leq 2 \cdot 4 = 8$ olur ve $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ noktasında $w = 8$ değerine ulaşılır. Yani $\max w = 8$'dir.
> Önerme 1.3 gereği $\min z = -\max w = -8$'dir ve minimum aynı $(0, 4)$ noktasında alınır. Sağlama: $z(0, 4) = 0 - 8 = -8$.
> ■

1.6.2 Eşitsizliğin yönünü çevirme (kanonik form için)

Kanonik form maksimum probleminde bütün kısıtların $\leq$, minimum probleminde bütün kısıtların $\geq$ olmasını ister. Yönü ters olan bir kısıtı iki yanını -1 ile çarparak düzeltiriz; bir eşitsizlik negatif sayıyla çarpılınca yönü döner:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n}(-a_{ij})x_j \leq -b_i.$$

İki eşitsizliği aynı $x_1, \ldots, x_n$ sayıları sağladığı için problem değişmez. Bu işlem sağ tarafı negatif yapabilir; kanonik form buna izin verir.

Örnek 1.14 (Maksimum probleminde ters yönlü kısıt). Aşağıdaki problemi kanonik forma getiriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ 3x_1 - 2x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 4x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.
Maksimum probleminde bütün kısıtların $\leq$ olması gerekir. Birinci kısıt uygundur. İkinci kısıtın iki yanını -1 ile çarparız: $3x_1 - 2x_2 \geq 2$ yerine $-3x_1 + 2x_2 \leq -2$ yazılır. Kanonik form

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 5 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leq -2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 4x_1 + x_2 \end{aligned}$$

olur. İkinci satırın sağ tarafının -2 olması kanonik formu bozmaz.
■

1.6.3 Sağ tarafı negatif olan kısıt (standart form için)

Standart form bütün sağ tarafların negatif olmamasını ister. Sağ tarafı negatif olan bir kısıtın iki yanı -1 ile çarpılır. Kısıt eşitsizlikse yönü döner, eşitlikse eşitlik olarak kalır. Aylak ya da artık değişkeni bu çarpmadan **sonra**, kısıtın yeni yönüne göre ekleriz.

Örnek 1.15 (Sağ tarafı negatif kısıtı standart forma getirmek). $x_1 - 4x_2 \leq -8$ kısıtını ($x_1, x_2 \geq 0$) standart forma uygun bir eşitliğe çeviriniz.

Çözüm.
Sağ taraf $-8 < 0$ olduğundan önce iki yanı -1 ile çarparız; eşitsizliğin yönü döner:

$$-x_1 + 4x_2 \geq 8.$$

Kısıt artık $\geq$ biçimindedir, dolayısıyla bir $x_3 \geq 0$ artık değişkeni çıkarılır:

$$-x_1 + 4x_2 - x_3 = 8.$$

Sağ taraf $8 \geq 0$ olduğu için bu eşitlik standart forma uygundur.
Sıra değiştirilirse de aynı sonuca varılır. Önce aylak değişken eklersek $x_1 - 4x_2 + x_3 = -8$ çıkar; bu eşitlikte sağ taraf negatif olduğu için henüz standart form sayılmaz. İki yanı -1 ile çarpınca yine $-x_1 + 4x_2 - x_3 = 8$ elde edilir. Yani aynı değişken, $\leq$ kısıtının aylağı olarak eklenip sonra -1 ile çarpılınca, $\geq$ kısıtının artığı gibi görünür. Aylağın ne olduğunu hatırlamak kolaydır: $x_3 = -8 - x_1 + 4x_2$, yani sağ tarafın sol taraftan ne kadar büyük olduğudur.
■

1.6.4 Eşitlik kısıtını iki eşitsizliğe ayırma (kanonik form için)

Kanonik formda eşitlik bulunmaz. Bir sayı ancak hem ondan küçük-eşit hem büyük-eşit olan sayıya eşit olabileceği için

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \text{ ve } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$$

yazılır. Maksimum probleminde ikinci eşitsizlik -1 ile çarpılıp $\leq$ yapılır; minimum probleminde birinci eşitsizlik -1 ile çarpılıp $\geq$ yapılır. Standart form için bu ayırmaya **gerek yoktur**: eşitlik zaten eşitliktir.

Örnek 1.16 (Eşitlik kısıtlı problemi kanonik forma getirmek). Aşağıdaki problemi kanonik forma getiriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.
Maksimum problemi olduğundan bütün kısıtların $\le$ olması gerekir. Eşitliği iki eşitsizliğe ayıralım: $2x_1 + x_2 \le 6$ ve $2x_1 + x_2 \ge 6$. İkincisini -1 ile çarparak $-2x_1 - x_2 \le -6$ yaparız. Kanonik form

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ -2x_1 - x_2 &\le -6 \\ x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

olur. İlk iki satır birlikte $6 \le 2x_1 + x_2 \le 6$, yani $2x_1 + x_2 = 6$ demektir. Kısıt sayısı 2'den 3'e çıktı; kanonik form bu bedeli öder.
■

1.6.5 İşaret kısıtlaması olmayan değişken

Bütün formlar değişkenlerin ≥ 0 olmasını ister. Bir x_j değişkeni her gerçel değeri alabiliyorsa (işaret kısıtlaması yoksa) onu iki negatif olmayan değişkenin farkı olarak yazarız:

$$x_j = x_j' - x_j'', \qquad x_j' \ge 0, \quad x_j'' \ge 0.$$

Bu her zaman mümkündür: $x_j \ge 0$ ise $x_j' = x_j$, $x_j'' = 0$; $x_j < 0$ ise $x_j' = 0$, $x_j'' = -x_j$ alınabilir. Sonra x_j her geçtiği yerde $x_j' - x_j''$ ile değiştirilir. Bu dönüşümün simpleks yöntemdeki ayrıntıları İşaret kısıtlaması olmayan değişkenler bölümündedir.

Örnek 1.17 (İşaretsiz değişkenli problemi kanonik forma getirmek). $x_1 \ge 0$ ve x_2 işaretsiz olmak üzere aşağıdaki problemi kanonik forma getiriniz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 - x_2 &\ge -2 \\ \max z &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.
$x_2 = x_2' - x_2''$, $x_2', x_2'' \ge 0$ yazıp her yerde yerine koyalım:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2' - x_2'' &\le 6 \\ x_1 - x_2' + x_2'' &\ge -2 \\ x_1, x_2', x_2'' &\ge 0 \\ \max z &= x_1 + 3x_2' - 3x_2'' \end{aligned}$$

Artık bütün değişkenler ≥ 0'dır. Maksimum probleminde ikinci kısıtın $\le$ olması gerektiğinden onu -1 ile çarparız: $-x_1 + x_2' - x_2'' \le 2$. Kanonik form

$$\begin{aligned} x_1 + x_2' - x_2'' &\le 6 \\ -x_1 + x_2' - x_2'' &\le 2 \\ x_1, x_2', x_2'' &\ge 0 \\ \max z &= x_1 + 3x_2' - 3x_2'' \end{aligned}$$

olur. Yeni problemin bir çözümünden eski problemin çözümü $x_2 = x_2' - x_2''$ ile geri okunur. Örneğin $x_2' = 0$, $x_2'' = 1$ çözümü $x_2 = -1$ demektir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

1.6.6 Pozitif olmayan değişken

Bir değişken için $x_j \leq 0$ koşulu verilmişse onu $x_j = -x'_j$, $x'_j \geq 0$ ile değiştiririz. $x_j \leq 0$ koşulunu sağlayan sayılar, tam olarak $x'_j \geq 0$ olmak üzere $-x'_j$ biçiminde yazılabilen sayılardır; bu kez tek bir yeni değişken yeter.

Örnek 1.18 (Pozitif olmayan değişkenli problem). $x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$ olmak üzere aşağıdaki problemi kanonik forma getiriniz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 5 \\ \min z &= 3x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.
$x_2 = -x'_2$, $x'_2 \geq 0$ yazalım. Birinci kısıt $2x_1 - x'_2 \geq 4$, ikinci kısıt $x_1 + x'_2 \leq 5$, amaç $z = 3x_1 + x'_2$ olur.
Minimum probleminde bütün kısıtların $\geq$ olması gerektiğinden ikinci kısıtı -1 ile çarparız: $-x_1 - x'_2 \geq -5$. Kanonik form

$$\begin{aligned} 2x_1 - x'_2 &\geq 4 \\ -x_1 - x'_2 &\geq -5 \\ x_1, x'_2 &\geq 0 \\ \min z &= 3x_1 + x'_2 \end{aligned}$$

olur. Bulunan çözümde $x_2 = -x'_2$ ile orijinal değişkene dönülür.
■

1.7 Üç Formun Karşılaştırılması

Artık üç kavramın hepsini gördük; şimdi onları yan yana koyalım. Aşağıdaki tablo, bir problemin hangi formda olduğuna karar verirken bakılacak her şeyi toplar.

Tablo 1.2: Kanonik form, standart form ve simpleks ile çözülebilir halin karşılaştırılması

Form	Amaç	Kısıtlar	Sağ taraf	Değişkenler	Ne işe yarar
Kanonik	max ya da min	max: hepsi $\leq$; min: hepsi $\geq$; eşitlik yok	işareti serbest	hepsi ≥ 0	Dual problem doğrudan yazılır (Dualite)
Standart	max ya da min; aylak ve artıkların katsayısı 0	hepsi $=$	hepsi $b_i \geq 0$	orijinaller, aylaklar, artıklar; hepsi ≥ 0	Temel çözümler bu denklem sisteminden hesaplanır (Temel çözümler)
Simpleks ile çözülebilir hal	standart formunki; yapaylar min'de $+M$, max'ta $-M$	hepsi $=$ ve katsayılar matrisinde $m \times m$ birim matris	hepsi $b_i \geq 0$	standart formunkiler ve gerekirse yapaylar; hepsi ≥ 0	Simpleks başlangıç tablosu doğrudan kurulur (Simpleks yöntem)

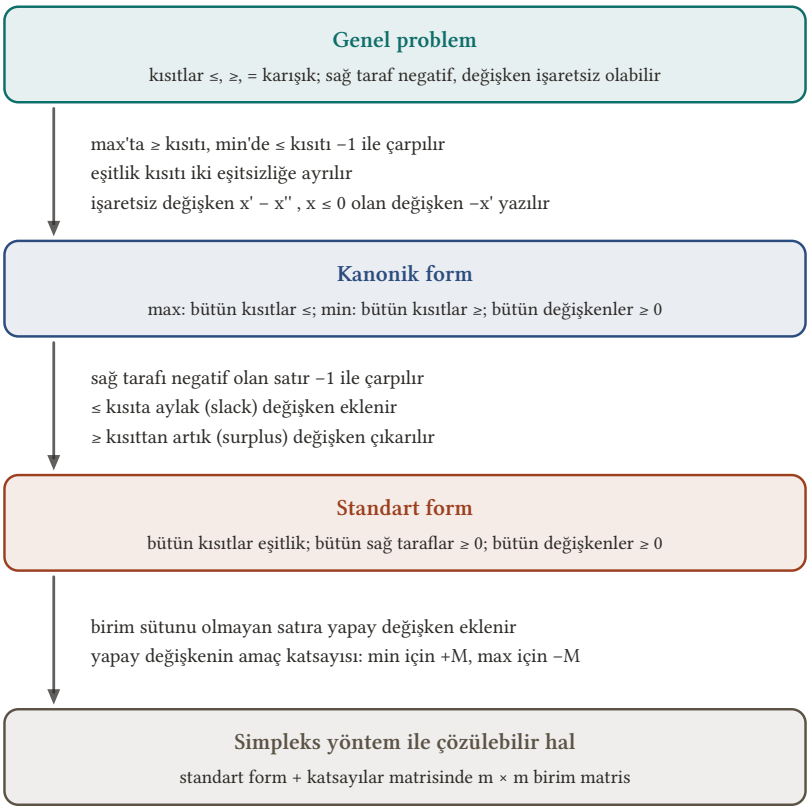
Karşılaştırma tablosunda (Tablo 1.2) dikkat edilecek iki nokta var. Birincisi, kanonik form **yöne**, standart form **eşitliğe ve sağ tarafın işaretine** bakar; bu yüzden bir problem kanonik olup standart olmayabilir, standart olup kanonik olmayabilir. İkincisi, çözülebilir hal standart formun bir özel durumudur: her çözülebilir hal standart formdadır, ama tersi doğru değildir. Aşağıdaki reçete bu formlar arasındaki yolu adım adım gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda simpleks yöntem ile çözülebilir hale getirme

1. **Kanonik form.** Değişkenleri ≥ 0 yap ($x_j = x_j' - x_j''$ ya da $x_j = -x_j'$). Maksimumda $\geq$ kısıtları, minimumda $\leq$ kısıtları -1 ile çarp; eşitlikleri iki eşitsizliğe ayır.
2. **Standart form.** Sağ tarafı negatif olan satırları -1 ile çarp. Sonra $\leq$ kısıtlara aylak değişken ekle, $\geq$ kısıtlardan artık değişken çıkar; eşitliklere dokunma. Aylak ve artıkların amaç katsayısı 0'dır.
3. **Çözülebilir hal.** Her denklemde katsayısı 1 olan ve başka denklemde görünmeyen bir değişken ara. Bulamadığın her denkleme bir yapay değişken ekle; amaç katsayısı minimumda $+M$, maksimumda $-M$'dir.

Standart form için kanonik formdan geçmek zorunlu değildir: eşitlikleri ikiye ayırmadan, verilen problemden doğrudan 2. adıma geçmek daha kısadır. Kanonik form asıl olarak dualite için gerekir.



Şekil 1.2: Bir lineer programlama problemini simpleks yöntem ile çözülebilir hale getirme. Okların yanında her geçişte yapılan işlemler yazılıdır.

Şimdi aynı reçeteyi üç tam örnekte uygulayalım: biri $\leq$ kısıtlı bir maksimum, biri $\geq$ kısıtlı bir minimum, biri de her türden kısıt içeren karışık bir problem.

Örnek 1.19 (Maksimum problemi üç forma). Örnek 1.3 modelini sırasıyla kanonik forma, standart forma ve simpleks yöntem ile çözülebilir hale getiriniz:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 80 \\ x_1 &\leq 40 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 30x_1 + 20x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.
Kanonik form. Amaç maksimum, üç kısıt da $\leq$, iki değişken de ≥ 0. Problem zaten kanonik formdadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Standart form. Sağ taraflar $100, 80, 40$ negatif değildir; -1 ile çarpılacak satır yok. Her $\leq$ kısıta bir aylak değişken ekleriz: işçiliğe x_3, ahşaba x_4, masa talebine x_5.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 100 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 80 \\ x_1 + x_5 &= 40 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \\ \max z &= 30x_1 + 20x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \end{aligned}$$

Çözülebilir hal. Katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olup x_3, x_4, x_5 sütunları 3×3 birim matrisi oluşturur. Standart form **zaten** simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir; yapay değişken gerekmez (bkz. Önerme 1.2).
Başlangıç çözümü: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 100$, $x_4 = 80$, $x_5 = 40$ ve $z = 0$. Anlamı açıktır: hiç üretim yapılmıyor ve bütün kaynaklar boşta. Simpleks yöntem buradan başlayıp kârı artıran planlara geçecek. ■

Örnek 1.20 (Minimum problemi üç forma). Örnek 1.10 diyetinin modelini ($x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 + 3x_2 \geq 6$, $x_1, x_2 \geq 0$, $\min z = 2x_1 + 3x_2$) sırasıyla kanonik forma, standart forma ve simpleks yöntem ile çözülebilir hale getiriniz.

Çözüm.
Kanonik form. Amaç minimum, iki kısıt da $\geq$, değişkenler ≥ 0. Problem zaten kanonik formdadır.
Standart form. Sağ taraflar 4 ve 6 negatif değildir. İki $\geq$ kısıttan da artık değişken çıkarırız:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Çözülebilir hal. Katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dir. x_3 ve x_4'ün sütunları $(-1, 0)$ ve $(0, -1)$'dir; birim sütun değildir. Bunları başlangıçta kullanmaya kalkarsak $x_1 = x_2 = 0$ için denklemlerden $x_3 = -4$ ve $x_4 = -6$ çıkar; bu değerler $x_3, x_4 \geq 0$ koşulunu bozar. Anlamı da saçmadır: hiç yemek yemeyen biri vitamin gereksinimini "-4 birim aşmış" olur. Bu yüzden iki denkleme de birer yapay değişken ekleriz. Minimum problemi olduğundan amaç katsayıları $+M$'dir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_{u_1} &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + x_{u_2} &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1}, x_{u_2} &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_{u_1} + Mx_{u_2} \end{aligned}$$

Artık v_{u_1} ve v_{u_2} sütunları 2×2 birim matrisi oluşturur ve problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir. Başlangıç çözümü $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_{u_1} = 4$, $x_{u_2} = 6$ ve $z = 10M$'dir.
Bu başlangıç noktası gerçek bir diyet değildir: hiçbir şey yenmiyor. Yapay değişkenler burada **eksik kalan vitamini** ölçer: $x_{u_1} = 4$ birim A, $x_{u_2} = 6$ birim C vitamini eksiktir. Amaçtaki büyük M cezası, simpleks yöntemi bu eksikleri gerçek besinlerle kapatmaya zorlar. Optimal çözümde yapay değişkenlerin hepsi sıfır olmalıdır; ayrıntılar Büyük M yöntemi bölümündedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 1.21 (Karışık kısıtlı problem üç forma). Aşağıdaki problemi sırasıyla kanonik forma, standart forma ve simpleks yöntem ile çözülebilir hale getiriniz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\geq 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - 3x_2 &\leq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Çözüm.
Kanonik form. Maksimum problemi olduğundan bütün kısıtlar $\leq$ olmalıdır. Satırlara tek tek bakalım:

- birinci kısıt $\leq$ biçimindedir, olduğu gibi kalır;
- ikinci kısıt $\geq$ biçimindedir; -1 ile çarparak $-2x_1 + x_2 - x_3 \leq -4$ yaparız;
- üçüncü kısıt eşitliktir; $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3$ ve $x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3$ diye ikiye ayırıp ikincisini -1 ile çarparız: $-x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -3$;
- dördüncü kısıt zaten $\leq$ biçimindedir; sağ tarafı negatif ama kanonik form için bu önemli değildir.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 &\leq -4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &\leq -3 \\ x_1 - 3x_2 &\leq -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Standart form. Standart formu kanonik formdan da elde edebilirdik, ama eşitliği ikiye ayırıp sonra iki yeni değişkenle yeniden eşitliğe çevirmek gereksiz iş olur. Bu yüzden standart formu verilen problemden yazıyoruz:

- birinci kısıt $\leq$: x_4 aylak değişkenini ekleriz, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$;
- ikinci kısıt $\geq$: x_5 artık değişkenini çıkarırız, $2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 4$;
- üçüncü kısıt eşitliktir ve sağ tarafı $3 \geq 0$'dır; olduğu gibi kalır;
- dördüncü kısıtın sağ tarafı $-2 < 0$'dır. Önce -1 ile çarparız: $-x_1 + 3x_2 \geq 2$. Artık $\geq$ biçiminde olduğu için x_6 artık değişkenini çıkarırız: $-x_1 + 3x_2 - x_6 = 2$.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_6 &= 2 \\ x_1, x_2, \ldots, x_6 &\geq 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \end{aligned}$$

Bütün kısıtlar eşitlik, bütün sağ taraflar $(10, 4, 3, 2)$ negatif değil ve bütün değişkenler ≥ 0; problem standart formdadır.
Çözülebilir hal. Katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dir. Birim sütun yalnız birinci denklemde vardır: x_4'ün sütunu $(1,0,0,0)$'dır. Diğer denklemlerin durumu şöyledir:

- ikinci denklemde x_5'in katsayısı -1'dir; artık değişken birim sütun vermez;
- üçüncü denkleme hiç yeni değişken eklenmedi; eşitlik kısıtının "boşluğu" yoktur. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ alınca sol taraf 0 olur ve 3'e eşit olamaz; denklemi başlangıçta sağlayacak bir değişken yoktur;
- dördüncü denklemde x_6'nın katsayısı yine -1'dir.

Bu üç denkleme sırasıyla $x_{u_1}, x_{u_2}, x_{u_3}$ yapay değişkenlerini ekleriz. Maksimum problemi olduğundan amaç katsayıları $-M$'dir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + x_{u_1} &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_{u_2} &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_6 + x_{u_3} &= 2 \\ x_1, \ldots, x_6, x_{u_1}, x_{u_2}, x_{u_3} &\geq 0 \\ \max z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & \\ - Mx_{u_1} - Mx_{u_2} - Mx_{u_3} & \end{aligned}$$

x_4, x_{u_1}, x_{u_2}, x_{u_3} sütunları 4×4 birim matrisi oluşturur; problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir. Başlangıç çözümü

$$x_4 = 10, \quad x_{u_1} = 4, \quad x_{u_2} = 3, \quad x_{u_3} = 2, \qquad z = -9M$$

ve geri kalan değişkenler 0'dır.
Yapay değişkenin neden gerektiğini bu örnek iyi gösterir. Aylak değişken "kullanılmayan kaynak" olarak başlangıçta bütün sağ tarafı üstlenebilir. Artık değişken bunu yapamaz, çünkü sağ tarafı üstlenmesi için negatif olması gerekir. Eşitlik kısıtında ise üstlenecek bir değişken hiç yoktur. Yapay değişken bu işi geçici olarak üstlenir. Başlangıç çözümü orijinal problemi sağlamaz (örneğin $2 \cdot 0 - 0 + 0 = 0 \geq 4$ değildir). Simpleks yöntem, $-M$ cezası sayesinde yapay değişkenleri adım adım sıfıra indirir; hepsi sıfır olunca elde kalan çözüm orijinal problemin de çözümüdür. Bu sürecin nasıl işlediğini Büyük M yöntemi bölümünde göreceğiz.
■

1.8 Sık Yapılan Hatalar

Üç formu birbirinden ayırırken en çok şu noktalarda yanılırız.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Dikkat edilecek noktalar

- **Standart form yöne bakmaz, kanonik form bakar.** Bir minimum probleminde $\leq$ kısıta aylak değişken eklemek standart formu bozmaz (bkz. Örnek 1.12). Ama o problem kanonik formda değildir; kanonik form için o kısıt -1 ile çarpılıp $\geq$ yapılmalıdır.
- **Kanonik formda sağ taraf negatif olabilir.** $-3x_1 + 2x_2 \leq -2$ gibi bir satır kanonik formu bozmaz; standart formu ise bozar.
- **$b_i < 0$ iken standart form olmaz.** $x_1 - 4x_2 + x_3 = -8$ bir eşitliktir ama standart form değildir; önce iki yan -1 ile çarpılır.
- **Artık değişken birim sütun vermez.** $-x_{n+i}$'nin sütunu -1 içerir; denklemi -1 ile çarparak düzeltmeye çalışmak sağ tarafı negatif yapar. Doğru yol yapay değişken eklemektir.
- **Eşitlik kısıtına aylak ya da artık değişken eklenmez.** Eşitlik zaten eşitliktir; çözülebilir hal için ona doğrudan yapay değişken eklenir.
- **Katsayıların işaretleri karışmamalı.** Aylak ve artık değişkenlerin amaç katsayısı 0'dır; yapay değişkenlerinki minimumda $+M$, maksimumda $-M$'dir.
- **Maksimumu minimuma çevirince işaret geri çevrilir.** $\max w = -z$ problemi çözülünce $\min z = -\max w$ olur; sonucu yazarken işaretini değiştirmeyi unutmayın.
- **Yapay değişken yalnız gereken satıra eklenir.** Birim sütunu zaten olan (aylak değişkenli) bir denkleme yapay değişken eklemek gereksizdir.

Bu bölümde bir lineer programlama problemini kurmayı ve onu kanonik forma, standart forma ve simpleks yöntem ile çözülebilir hale getirmeyi öğrendik. Standart formdaki bir denklem sisteminin, bazı değişkenleri sıfır alınarak bulunan özel çözümleri bütün çözüm yöntemlerinin temelidir. Bir sonraki bölümde, Temel çözümler ve konveks kümeler bölümünde, bu **temel çözümleri** tanımlayacak ve uygun çözümlerin kümesinin geometrik yapısını inceleyeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Temel Çözümler ve Konveks Kümeler

Önceki bölümde bir lineer programlama problemini standart forma getirmeyi öğrendik: bütün kısıtlar eşitlik, bütün sağ taraflar ve bütün değişkenler negatif olmayan. Standart formdaki kısıtlar m denklemli, n bilinmeyenli bir doğrusal denklem sistemidir ve $m < n$ olduğu için bu sistemin genellikle sonsuz sayıda çözümü vardır. Sonsuz sayıda aday arasından en iyisini aramak umutsuz görünür. Bölümün ilk yarısında bu sonsuz adayı sonlu sayıya indiren kavramı, **temel çözümü**, tanıyacağız: bazı değişkenleri sıfır alıp geri kalanlar için kare bir sistem çözerek bulunan özel çözümler.
İkinci yarıda işin geometrisine geçeceğiz. Uygun çözümlerin kümesinin **konveks** olduğunu, yani iki uygun çözümü birleştiren doğru parçasının tamamen uygun çözümlerden oluştuğunu göreceğiz. Yol boyunca temel çözümlerin uygun bölgenin köşeleriyle yakından ilgili olduğunu da fark edeceğiz; bu bağı bir sonraki bölümde kesin olarak kuracağız.

2.1 Çözüm ve Uygun Çözüm

Önce hangi problemle çalıştığımızı sabitleyelim. Bu bölüm boyunca standart formdaki (Tanım 1.7) bir problemi ele alacağız:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{2}$$

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (\text{veya } \max) \tag{3}$$

Matris gösterimiyle (1) sistemi $A\vec{x} = \vec{b}$, (2) koşulları ise $\vec{x} \geq 0$ demektir. A katsayılar matrisi $m \times n$ boyutludur ve $m < n$'dir.

Tanım 2.1 (Çözüm).

(1) sistemini sağlayan her $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ vektörüne ya da $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ noktasına lineer programlama probleminin bir **çözümü** denir.

Tanım 2.2 (Uygun çözüm).

(1) sistemini ve (2) koşullarını birlikte sağlayan her $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ vektörüne ya da $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ noktasına lineer programlama probleminin bir **uygun çözümü** denir.

Yani çözüm yalnız denklemlere bakar; uygun çözüm ayrıca her değişkenin negatif olmamasını ister. Her uygun çözüm bir çözümdür, ama tersi doğru değildir. Vektörü ve noktayı aynı nesne sayıyoruz: $\vec{x}$ yazımı hesaplarda, X yazımı geometrik yorumlarda işimize yarar. Amaç fonksiyonu bu iki tanımda hiç rol oynamaz; uygun çözümler arasından seçim yaparken devreye girecek (Tanım 2.7).

Örnek 2.1 (Çözüm mü, uygun çözüm mü?). $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$ denklemi ve $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ koşulları veriliyor ($m = 1, n = 3$). $(1,1,1)$, $(4,0,0)$, $(6,-1,0)$ ve $(0,0,5)$ noktalarından hangileri çözüm, hangileri uygun çözümdür?

> **Çözüm.**
> Her noktada önce denklemin sol tarafını hesaplayalım, sonra işaretlere bakalım.
>
> - $(1,1,1)$: $1 + 2 + 1 = 4$, denklem sağlanır. Bileşenlerin hepsi negatif olmadığından **uygun çözümdür**.

 CC BY-NC-SA 4.0

- $(4,0,0)$: $4+0+0=4$ ve bileşenler negatif değil; **uygun çözümdür**.
- $(6,-1,0)$: $6-2+0=4$, denklem sağlanır; bu nokta bir **çözümdür**. Ama $x_2=-1<0$ olduğu için uygun çözüm değildir.
- $(0,0,5)$: $0+0+5=5\neq 4$. Bileşenleri negatif olmadığı halde denklemi sağlamadığı için çözüm bile değildir.

Uygun çözüm olmak için iki koşulun birlikte sağlanması gerekir: denklemler ve işaret koşulları.
■

Örnek 2.2 (Uygun çözümleri bulmak).

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &= 7\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4 &= 3\\ x_1,x_2,x_3,x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

koşullarını ele alalım. Bu problemin uygun çözümlerini bulunuz. Uygun çözüm nasıl bulunur?

Çözüm.
İki denklem ve dört bilinmeyen var. Değişkenlerden ikisine değer verirsek geri kalan ikisi denklemlerden hesaplanır. Örneğin $x_3=2$ ve $x_4=0$ alalım. Denklemler

$$x_1+2x_2=1, \qquad 2x_1+x_2=1$$

olur. Birinciden $x_1=1-2x_2$ çıkar; ikincide yerine koyarsak $2-4x_2+x_2=1$, yani $x_2=\frac{1}{3}$ ve $x_1=\frac{1}{3}$ bulunur. Böylece

$$X=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},2,0\right)$$

noktası (1) denklemlerini sağlar ve bütün bileşenleri negatif olmadığı için (2) koşullarını da sağlar. Bu nokta bir uygun çözümdür.
Aynı işi bir kez genel olarak yapalım. x_3 ve x_4'ü serbest bırakıp denklemleri x_1, x_2 için çözelim:

$$\begin{aligned} x_1+2x_2 &= 7-3x_3-4x_4\\ 2x_1+x_2 &= 3-x_3-2x_4 \end{aligned}$$

İkinci denklemi 2 ile çarpıp birinciyi çıkarırsak

$$3x_1=(6-2x_3-4x_4)-(7-3x_3-4x_4)=x_3-1$$

olur. Birinci denklemi 2 ile çarpıp ikinciyi çıkarırsak

$$3x_2=(14-6x_3-8x_4)-(3-x_3-2x_4)=11-5x_3-6x_4$$

olur. Demek ki (1) sisteminin bütün çözümleri

$$x_1=\frac{x_3-1}{3}, \qquad x_2=\frac{11-5x_3-6x_4}{3}$$

biçimindedir; x_3 ve x_4 istenen her değeri alabilir. Bu çözümün uygun olması için dört değişkenin de negatif olmaması gerekir:

$$x_3\geq 1, \qquad x_4\geq 0, \qquad 5x_3+6x_4\leq 11.$$

Burada $x_1\geq 0$ koşulu $x_3\geq 1$'e, $x_2\geq 0$ koşulu $5x_3+6x_4\leq 11$'e dönüştü; $x_3\geq 1$ zaten $x_3\geq 0$'ı içerir. Bu üç eşitsizliği sağlayan her (x_3,x_4) seçimi bir uygun çözüm verir. Böyle sonsuz sayıda seçim olduğundan problemin sonsuz sayıda uygun çözümü vardır. Örneğin:

- $x_3=1, x_4=0$ için $X=(0,2,1,0)$ bulunur. Sağlama: $0+4+3+0=7$ ve $0+2+1+0=3$.
- $x_3=\frac{11}{5}, x_4=0$ için $X=\left(\frac{2}{5},0,\frac{11}{5},0\right)$ bulunur. Sağlama: $\frac{2}{5}+\frac{33}{5}=7$ ve $\frac{4}{5}+\frac{11}{5}=3$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Öte yandan $x_3 = x_4 = 0$ seçilirse $X = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 0, 0\right)$ çıkar. Bu nokta (1) denklemlerini sağlar ($-\frac{1}{3} + \frac{22}{3} = 7$, $-\frac{2}{3} + \frac{11}{3} = 3$), yani bir çözümdür. Ama $x_1 < 0$ olduğundan (2) koşulunu sağlamaz ve uygun çözüm değildir.
Bu örnek genel bir durumu gösteriyor: bir lineer programlama probleminin birden fazla, hatta sonsuz sayıda uygun çözümü olabilir.
■

2.2 Temel Çözümler

Önceki örnekte uygun çözümler iki serbest parametreye bağlıydı ve sonsuz sayıdaydı. Bunları tek tek denemek mümkün değildir. İşimize yarayacak özel çözümler, serbest bırakılabilecek değişkenlerin hepsine sıfır verilerek bulunanlardır: n değişkenden $n - m$ tanesi sıfır yapılırsa geriye m bilinmeyenli m denklem kalır ve bu kare sistemin çoğu zaman tek bir çözümü vardır.

Tanım 2.3 (Temel çözüm).

(1) sistemindeki n değişken ($m < n$) içinden $n - m$ tanesi keyfi olarak seçilip sıfır yapılsın. Geriye kalan m değişkenli ve m denklemli doğrusal denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklıysa, bu sistemin çözümü ile sıfır yapılan değişkenlerin birlikte oluşturduğu vektöre (1) sisteminin bir **temel çözümü** denir.

Yani bir temel çözüm üç adımda bulunur: $n - m$ değişkeni sıfırla, kalan $m \times m$ sistemin determinantına bak, determinant sıfırdan farklıysa sistemi çöz. Determinantı kısaca Δ ile göstereceğiz. $\Delta \neq 0$ olması, kare sistemin tek bir çözümü olmasını garanti eder (bkz. Lineer Cebir, Cramer kuralı). $\Delta = 0$ ise sistemin ya hiç çözümü yoktur ya da sonsuz çözümü vardır; iki durumda da o seçimden bir temel çözüm elde edilmez.
Kalan m değişkenin katsayılar matrisi, A'nın bu değişkenlere ait m sütunundan oluşur. Lineer programlama problemi bölümündeki vektörel gösterimle, yani A'nın sütunlarını $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ile göstererek söylersek: $\Delta \neq 0$ olması, seçilen m sütun vektörünün lineer bağımsız olması demektir (bkz. Lineer Cebir, regülerliğin determinant ölçütü).

Tanım 2.4 (Temel değişken). Bir temel çözümde keyfi olarak seçilip sıfır yapılan $n - m$ değişkenin dışında kalan m değişkene **temel değişken**, sıfır yapılan değişkenlere de **temel olmayan** (keyfi) değişken denir. Temel değişkenlerin sütun vektörlerine **temel (baz) vektörleri**, bu vektörlerin oluşturduğu kümeye de o temel çözümün **bazı** denir.

Yani bir temel çözümde temel olmayan değişkenler tanım gereği sıfırdır; temel değişkenler ise denklemlerden hesaplanır. Temel değişkenlerin değeri çoğunlukla sıfırdan farklıdır, ama sıfır da çıkabilir (bkz. Tanım 2.6). Temel değişkenler bir temel çözümün "kimliğidir": hangi m değişkenin temel olduğunu söylemek, o temel çözümü tamamen belirler.
Temel çözümlerin sayısı sonludur; bunun için bir üst sınır verebiliriz.

Önerme 2.1 (Temel çözüm sayısının üst sınırı). *$m < n$ olmak üzere m denklemli ve n değişkenli (1) sisteminin en fazla*

$$C(n, m) = \binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$$

tane temel çözümü vardır.

İspat.
Bir temel çözüm, hangi $n - m$ değişkenin sıfır yapılacağı seçilerek bulunur. Sıfırlanacak $n - m$ değişkeni seçmek, geri kalan m temel değişkeni seçmekle aynı şeydir ve n değişken arasından m tanesi $C(n, m)$ farklı biçimde seçilir.
Her seçimde iki durum vardır. $\Delta = 0$ ise o seçimden temel çözüm çıkmaz. $\Delta \neq 0$ ise kare sistemin tek bir çözümü vardır ve seçim tam olarak bir temel çözüm verir. Demek ki her seçim en fazla bir temel çözüm verir. Farklı seçimler aynı noktayı da verebilir (bkz. Örnek 2.6); bu yalnız farklı temel çözümlerin sayısını azaltır. Böylece farklı temel çözümlerin sayısı en fazla $C(n, m)$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Yani sonsuz sayıdaki çözüm arasında ilgilenmemiz gereken temel çözümler sonlu sayıdadır. Örneğin $m = 2$, $n = 4$ için en fazla $C(4,2) = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$, $m = 3$, $n = 5$ için en fazla $C(5,3) = 10$ temel çözüm vardır. Ne var ki bu sayı hızla büyür: $m = 10$, $n = 20$ için $C(20,10) = 184\,756$ olur. Temel çözümleri akıllıca dolaşan bir yönteme bu yüzden ihtiyaç duyacağız (Simpleks yöntem).

Örnek 2.3 (Üç değişkenli bir sistemin temel çözümleri).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

sisteminin bütün temel çözümlerini bulunuz.

Çözüm.
Burada $m = 2$ ve $n = 3$'tür. Her seferinde $n - m = 1$ değişken sıfırlanır; en fazla $C(3,2) = 3$ temel çözüm vardır. Üç seçimi sırayla deneyelim.
$x_3 = 0$ seçilsin. Temel değişkenler x_1, x_2 olur:

$$\begin{aligned} &\{x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 2, \qquad &\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0. \end{aligned}$$

İki denklemi toplarsak $2x_1 = 6$, yani $x_1 = 3$ ve $x_2 = 1$ bulunur. Temel çözüm $(3,1,0)$'dır.
$x_2 = 0$ seçilsin. Temel değişkenler x_1, x_3 olur:

$$\begin{aligned} &\{x_1 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_3 = 2, \qquad &\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \end{aligned}$$

İkinci denklemden birinciyi çıkarırsak $2x_3 = -2$, yani $x_3 = -1$ ve $x_1 = 5$ bulunur. Temel çözüm $(5,0,-1)$'dir.
$x_1 = 0$ seçilsin. Temel değişkenler x_2, x_3 olur:

$$\begin{aligned} &\{x_2 + x_3 = 4 \\ -x_2 + 3x_3 = 2, \qquad &\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0. \end{aligned}$$

İki denklemi toplarsak $4x_3 = 6$, yani $x_3 = \frac{3}{2}$ ve $x_2 = \frac{5}{2}$ bulunur. Temel çözüm $\left(0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$'dir.
Üç seçimin üçünde de $\Delta \neq 0$ olduğu için üst sınıra ulaşıldı: sistemin tam 3 temel çözümü var. İkinci temel çözümde $x_3 = -1$ negatiftir; bir temel çözümün negatif bileşenleri olabilir. Bu ayrımı şimdi bir tanımla yapacağız.
■

2.3 Uygun Temel Çözümler ve Dejenerelik

Temel çözüm tanımı yalnız (1) denklemlerine bakar, (2) işaret koşullarını hiç kullanmaz. İşaret koşullarını da hesaba katınca asıl ilgilendiğimiz çözümler ortaya çıkar.

Tanım 2.5 (Uygun temel çözüm).

(1) sisteminin temel çözümleri arasından (2) koşullarını da sağlayanların her birine **uygun temel çözüm** denir.

Yani uygun temel çözüm iki süzgeçten geçen çözümdür: önce temel olmalıdır ($n - m$ değişken sıfır, kalan sistemin $\Delta \neq 0$), sonra uygun olmalıdır (hiçbir bileşeni negatif değil). Uygun temel çözümler hem temel çözümlerin hem de uygun çözümlerin içinde yer alır.

 CC BY-NC-SA 4.0

> **i** Not
>
> Uygun çözümde bütün x_j değişkenleri sıfır ya da pozitiftir. Temel çözümde ise değişkenler negatif olabilir. Bir temel çözüm negatif bileşen içermiyorsa uygun temel çözüm adını alır.

Örnek 2.4 (Hangi temel çözümler uygun?). Örnek 2.3 sistemine ($x_1 + x_2 + x_3 = 4,\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ koşulları eklensin. Bulunan üç temel çözümden hangileri uygun temel çözümdür?

Çözüm.
Üç temel çözümün bileşenlerinin işaretlerine bakalım:

- $(3, 1, 0)$: bileşenlerin hiçbiri negatif değil; **uygun temel çözümdür**.
- $(5, 0, -1)$: $x_3 = -1 < 0$; bu bir temel çözümdür ama **uygun temel çözüm değildir**.
- $\left(0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$: bileşenlerin hiçbiri negatif değil; **uygun temel çözümdür**.

Sistemin iki uygun temel çözümü vardır.
■

Bir temel çözümde temel olmayan $n - m$ değişken zorunlu olarak sıfırdır. Bazen temel değişkenlerden biri de sıfır çıkar; bu durumun kendine özgü bir adı vardır.

Tanım 2.6 (Dejenere ve dejenere olmayan uygun temel çözüm). Bir uygun temel çözümdeki temel değişkenlerden bir ya da daha fazlası sıfırsa bu uygun temel çözüme **dejenere (yozlaşmış) uygun temel çözüm** denir. Temel değişkenlerinin hepsi pozitif olan uygun temel çözüme **dejenere olmayan uygun temel çözüm** denir.

Yani bir uygun temel çözümde sıfır olan değişkenleri sayarız. Dejenere olmayan uygun temel çözümde tam $n - m$ değişken sıfır, m değişken pozitiftir. Dejenere uygun temel çözümde ise temel olmayanlara ek olarak en az bir temel değişken de sıfırdır; sıfır olan değişken sayısı $n - m$'den fazladır. Örneğin ısınma örneğindeki (Örnek 2.4) iki uygun temel çözüm de dejenere değildir: $(3, 1, 0)$'da temel değişkenler $x_1 = 3$ ve $x_2 = 1$, $\left(0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$'de $x_2 = \frac{5}{2}$ ve $x_3 = \frac{3}{2}$'dir.

> **i** Not
>
> Aksi söylenmedikçe bir uygun temel çözümden söz edilirken onun dejenere olmadığı, yani temel değişkenlerinin hiçbirinin sıfır olmadığı varsayılır. Dejenere çözümler karşımıza çıktığında bunu ayrıca belirteceğiz.

Örnek 2.5 (Dejenere bir uygun temel çözüm).

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

koşullarını göz önüne alalım. x_3 keyfi değişken seçilerek bulunan temel çözümün dejenere bir uygun temel çözüm olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$m = 2, n = 3$ olduğundan bir değişken sıfırlanır. $x_3 = 0$ alınca temel değişkenler x_1, x_2 olur:

$$\begin{aligned} &\{x_1 + 5x_2 = 5 \\ 3x_1 + 8x_2 = 8, \qquad &\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7 \neq 0. \end{aligned}$$

Birinci denklemden $x_1 = 5 - 5x_2$; ikincide yerine koyarsak $15 - 15x_2 + 8x_2 = 8$, yani $7x_2 = 7$ ve $x_2 = 1$ bulunur. O halde $x_1 = 0$'dır ve temel çözüm

 CC BY-NC-SA 4.0

$$X = (0, 1, 0)$$

olur. Bütün bileşenler negatif olmadığı için X bir uygun temel çözümdür. Fakat temel değişkenlerinden biri, x_1, sıfırdır. Dolayısıyla X **dejenere** bir uygun temel çözümdür. Sayarak da görebiliriz: X'te iki değişken sıfırdır, oysa dejenere olmayan bir temel çözümde tam $n - m = 1$ değişken sıfırdır.
■

Örnek 2.6 (Aynı noktayı veren iki baz). Aynı sistemin ($x_1 + 5x_2 + x_3 = 5$, $3x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 8$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$) diğer iki temel çözümünü bulunuz. Kaç farklı temel çözüm vardır?

Çözüm.
Geriye $x_2 = 0$ ve $x_1 = 0$ seçimleri kaldı.
$x_2 = 0$ seçilsin. Temel değişkenler x_1, x_3 olur:

$$\begin{aligned} &\{x_1 + x_3 = 5 \\ &3x_1 + 7x_3 = 8, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 4 \neq 0. \end{aligned}$$

$x_1 = 5 - x_3$ yazıp ikincide yerine koyarsak $15 + 4x_3 = 8$, yani $x_3 = -\frac{7}{4}$ ve $x_1 = \frac{27}{4}$ bulunur. Temel çözüm $\left(\frac{27}{4}, 0, -\frac{7}{4}\right)$'tür; $x_3 < 0$ olduğu için uygun değildir.
$x_1 = 0$ seçilsin. Temel değişkenler x_2, x_3 olur:

$$\begin{aligned} &\{5x_2 + x_3 = 5 \\ &8x_2 + 7x_3 = 8, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 27 \neq 0. \end{aligned}$$

$x_3 = 5 - 5x_2$ yazıp ikincide yerine koyarsak $8x_2 + 35 - 35x_2 = 8$, yani $27x_2 = 27$, $x_2 = 1$ ve $x_3 = 0$ bulunur. Temel çözüm yine $(0, 1, 0)$'dır. Bu kez temel değişken x_3 sıfırdır; çözüm yine dejeneredir. Böylece üç seçimin üçü de temel çözüm verdi, ama bunlardan ikisi aynı noktadır: sistemin farklı temel çözümleri $(0, 1, 0)$ ve $\left(\frac{27}{4}, 0, -\frac{7}{4}\right)$ olmak üzere iki tanedir. Dejenere bir noktada sıfır olan değişken sayısı $n - m$'den fazla olduğundan, sıfırlanacak $n - m$ değişkeni bu sıfırlar arasından birden fazla biçimde seçebiliriz; $\Delta \neq 0$ olan her seçim aynı noktayı verir. Simpleks yöntemde bu durum, bazın değiştiği halde noktanın yerinde saydığı adımlar olarak karşımıza çıkacak.
■

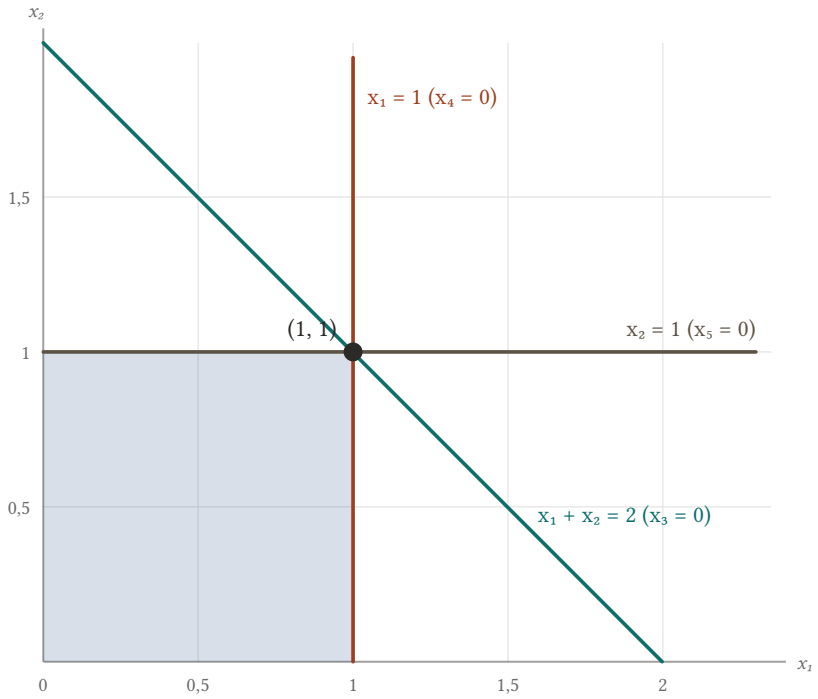
Örnek 2.7 (Üç doğrunun kesiştiği köşe).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

kısıtlarını standart forma getirip uygun bölgenin $(1, 1)$ köşesine karşılık gelen temel çözümleri bulunuz ve dejenere olduklarını gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.1: $x_1 + x_2 \le 2$, $x_1 \le 1$, $x_2 \le 1$ kısıtlarının uygun bölgesi birim karedir. $(1, 1)$ köşesinden üç kısıt doğrusu birden geçer: bu noktada x_3, x_4, x_5 aylak değişkenlerinin üçü de sıfırdır. Temel çözümde yalnız iki değişken sıfırlandığı için üçüncü sıfır bir temel değişkendir; köşe dejenere bir uygun temel çözümdür.

Önce kısıtları standart forma getirelim. Üç kısıt da $\le$ biçiminde ve sağ tarafları negatif değil; sırasıyla x_3, x_4, x_5 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_5 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

Burada $m = 3$ ve $n = 5$'tir; bir temel çözümde $n - m = 2$ değişken sıfırlanır.
$(1, 1)$ noktasında aylak değişkenler $x_3 = 2 - 1 - 1 = 0$, $x_4 = 1 - 1 = 0$, $x_5 = 1 - 1 = 0$'dır. Yani bu köşeye karşılık gelen nokta $X = (1, 1, 0, 0, 0)$'dır ve üç değişkeni sıfırdır. Bir temel çözüm elde etmek için bu üç sıfırdan ikisini temel olmayan değişken olarak seçebiliriz; üç seçim vardır ve her birinde temel değişkenler x_1, x_2 ile kalan aylak değişkendir:

- $x_4 = x_5 = 0$ seçilirse temel değişkenler x_1, x_2, x_3 olur ve

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

- $x_3 = x_5 = 0$ seçilirse temel değişkenler x_1, x_2, x_4 olur ve

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$$

- $x_3 = x_4 = 0$ seçilirse temel değişkenler x_1, x_2, x_5 olur ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Üç determinant da sıfırdan farklı, dolayısıyla her seçim bir temel çözüm verir. Örneğin ilk seçimde ikinci denklemden $x_1 = 1$, üçüncüden $x_2 = 1$, birinciden $x_3 = 0$ bulunur. Diğer iki seçim de aynı $X = (1, 1, 0, 0, 0)$ noktasını verir. Her seçimde temel değişkenlerden biri (sırasıyla x_3, x_4, x_5) sıfırdır; üç temel çözüm de dejeneredir.
Şekilde durumun geometrisi görülüyor. Düzlemde bir köşe normalde iki kısıt doğrusunun kesişimidir ve orada iki değişken sıfırdır. $(1, 1)$ köşesinden ise üç doğru birden geçer ve orada üç değişken sıfırdır. Bu fazladan sıfır dejenereliği doğurur. Dikkat edilirse $x_1 + x_2 \leq 2$ kısıtı bölgeyi hiç küçültmez; birim kareye yalnız köşesinde değer.
■

2.4 Bütün Temel Çözümleri Hesaplamak

Şimdi daha büyük bir sistemin bütün temel çözümlerini düzenli biçimde bulalım. İşi aşağıdaki reçeteyle yürüteceğiz.

Dört adımda bütün temel çözümleri bulma

1. **Sayı:** m ve n'yi belirle. En fazla $C(n, m)$ seçim vardır; hiçbirini atlamamak için seçimleri sistemli sırala.
2. **Determinant:** Her seçimde $n - m$ değişkeni sıfırla ve kalan $m \times m$ sistemin Δ'sını hesapla. $\Delta = 0$ ise bu seçimden temel çözüm çıkmaz.
3. **Çözüm:** $\Delta \neq 0$ ise kalan sistemi yok etme yöntemiyle ya da Cramer kuralıyla çöz.
4. **Sınıflandırma:** Negatif bileşen yoksa çözüm uygun temel çözümdür; ayrıca bir temel değişken sıfırsa dejeneredir. Amaç fonksiyonu varsa z değerini hesapla. Sonuçları bir tabloda topla.

Örnek 2.8 (Dört değişkenli sistemin bütün temel çözümleri). Örnek 2.2 sisteminin

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

bütün temel çözümlerini bulunuz.

Çözüm.
$m = 2, n = 4$ ve $n - m = 2$ olduğundan x_1, x_2, x_3, x_4 değişkenlerinden herhangi ikisi keyfi değişken seçilerek sıfır yapılır. En fazla $C(4, 2) = 6$ seçim vardır.
a) x_3, x_4 keyfi değişken seçilsin.

$$x_3 = x_4 = 0 \Rightarrow \{ x_1 + 2x_2 = 7$$
$$2x_1 + x_2 = 3, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

İkinci denklemden $x_2 = 3 - 2x_1$; birincide yerine koyarsak $x_1 + 6 - 4x_1 = 7$, yani $x_1 = -\frac{1}{3}$ ve $x_2 = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$ bulunur. O halde

$$X_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 0, 0 \right)$$

bir temel çözümdür ve bu temel çözümdeki temel değişkenler x_1, x_2'dir.
b) x_2, x_4 keyfi değişken seçilsin.

$$x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow \{ x_1 + 3x_3 = 7$$
$$2x_1 + x_3 = 3, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci denklemden $x_3 = 3 - 2x_1$; birincide yerine koyarsak $x_1 + 9 - 6x_1 = 7$, yani $x_1 = \frac{2}{5}$ ve $x_3 = 3 - \frac{4}{5} = \frac{11}{5}$ bulunur. O halde

$$X_2 = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{11}{5}, 0\right)$$

bir temel çözümdür ve temel değişkenler x_1, x_3'tür.
c) x_2, x_3 keyfi değişken seçilsin.

$$x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \{x_1 + 4x_4 = 7$$
$$2x_1 + 2x_4 = 3, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

İkinci denklemden $x_1 = \frac{3}{2} - x_4$; birincide yerine koyarsak $\frac{3}{2} + 3x_4 = 7$, yani $x_4 = \frac{11}{6}$ ve $x_1 = \frac{3}{2} - \frac{11}{6} = -\frac{1}{3}$ bulunur. O halde

$$X_3 = \left(-\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{11}{6}\right)$$

bir temel çözümdür ve temel değişkenler x_1, x_4'tür.
d) x_1, x_4 keyfi değişken seçilsin.

$$x_1 = x_4 = 0 \Rightarrow \{2x_2 + 3x_3 = 7$$
$$x_2 + x_3 = 3, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

İkinci denklemden $x_2 = 3 - x_3$; birincide yerine koyarsak $6 + x_3 = 7$, yani $x_3 = 1$ ve $x_2 = 2$ bulunur. O halde

$$X_4 = (0, 2, 1, 0)$$

bir temel çözümdür ve temel değişkenler x_2, x_3'tür.
e) x_1, x_3 keyfi değişken seçilsin.

$$x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow \{2x_2 + 4x_4 = 7$$
$$x_2 + 2x_4 = 3, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant sıfır olduğundan bu seçimden bir temel çözüme ulaşılmaz. Gerçekten ikinci denklemi 2 ile çarparsak $2x_2 + 4x_4 = 6$ çıkar; bu, birinci denklemle çelişir. Sistemin hiç çözümü yoktur.
f) x_1, x_2 keyfi değişken seçilsin.

$$x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow \{3x_3 + 4x_4 = 7$$
$$x_3 + 2x_4 = 3, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

İkinci denklemden $x_3 = 3 - 2x_4$; birincide yerine koyarsak $9 - 2x_4 = 7$, yani $x_4 = 1$ ve $x_3 = 1$ bulunur. O halde

$$X_5 = (0, 0, 1, 1)$$

bir temel çözümdür ve bu temel çözümdeki temel değişkenler x_3 ve x_4'tür.
Bu örnekte $n = 4$ ve $m = 2$ olduğundan en fazla 6 temel çözüm elde edilebilirdi. e) seçiminde determinant sıfır çıktığı için bu sistemin 5 temel çözümü vardır.
■

Örnek 2.9 (Dört değişkenli sistemin uygun temel çözümleri). Aynı sisteme ($x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7$, $2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3$) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ koşulları eklensin. Uygun temel çözümleri belirleyiniz. Bunlardan dejenere olan var mıdır?

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Önceki örnekte (Örnek 2.8) bulunan beş temel çözümün işaretlerine sırayla bakalım.

- $X_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 0, 0\right)$ temel çözümü (2) koşullarını sağlamadığından bir **uygun temel çözüm değildir**.
- $X_2 = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{11}{5}, 0\right)$ temel çözümü (2) koşullarını sağladığından bir **uygun temel çözümdür**.
- $X_3 = \left(-\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{11}{6}\right)$ temel çözümü (2) koşullarını sağlamadığından bir **uygun temel çözüm değildir**.
- $X_4 = (0, 2, 1, 0)$ temel çözümü (2) koşullarını sağladığından bir **uygun temel çözümdür**.
- $X_5 = (0, 0, 1, 1)$ temel çözümü (2) koşullarını sağladığından bir **uygun temel çözümdür**.

Demek ki X_2, X_4 ve X_5 noktaları birer uygun temel çözümdür. Bu noktalarda temel değişkenler sıfırdan farklıdır (X_2'de $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_3 = \frac{11}{5}$; X_4'te $x_2 = 2$, $x_3 = 1$; X_5'te $x_3 = x_4 = 1$). Bu yüzden üçü de dejenere olmayan uygun temel çözümlerdir.
Bütün hesabı aşağıdaki tabloda (Tablo 2.1) toplayalım. Dejenerelik yalnız uygun temel çözümler için tanımlandığından uygun olmayan satırlarda o sütun boş bırakılmıştır.

Tablo 2.1: Dört değişkenli sistemin bütün temel çözümleri

Seçim	Sıfırlanan	Temel değişkenler	Δ	Temel çözüm	Uygun mu?	Dejenere mi?
a)	x_3, x_4	x_1, x_2	-3	$X_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, 0, 0\right)$	Hayır ($x_1 < 0$)	–
b)	x_2, x_4	x_1, x_3	-5	$X_2 = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{11}{5}, 0\right)$	Evet	Hayır
c)	x_2, x_3	x_1, x_4	-6	$X_3 = \left(-\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{11}{6}\right)$	Hayır ($x_1 < 0$)	–
d)	x_1, x_4	x_2, x_3	-1	$X_4 = (0, 2, 1, 0)$	Evet	Hayır
e)	x_1, x_3	x_2, x_4	0	yok	–	–
f)	x_1, x_2	x_3, x_4	2	$X_5 = (0, 0, 1, 1)$	Evet	Hayır

■

2.5 Optimal Çözüm

Şimdiye kadar amaç fonksiyonunu hiç kullanmadık. Problemin asıl sorusu ise uygun çözümler arasından amaç fonksiyonunu en iyi yapanı bulmaktır.

Tanım 2.7 (Optimal çözüm). X^* bir uygun çözüm olsun. Her uygun çözüm X için minimum probleminde $z(X^*) \leq z(X)$, maksimum probleminde $z(X^*) \geq z(X)$ oluyorsa X^*'a problemin bir **optimal çözümü**, $z^* = z(X^*)$ sayısına da **optimal değer** denir.

Yani optimal çözüm hem uygun olmalı hem de hiçbir uygun çözüm ondan daha iyi olmamalıdır. Uygun olmayan bir noktanın amaç değeri ne kadar iyi olursa olsun aday değildir. Optimal çözüm tek olmayabilir; bir problemin hiç optimal çözümü de olmayabilir. Örneğin uygun çözüm hiç yoksa ya da amaç fonksiyonu uygun çözümler üzerinde maksimumda sınırsız büyüyebiliyor, minimumda sınırsız küçülebiliyorsa optimal çözüm yoktur. Bu durumları Sınırsız çözüm ve alternatif optimal çözüm bölümünde inceleyeceğiz. Uç noktalar ve grafik yöntem bölümünde önemli bir gerçeği ispatlayacağız: optimal çözüm varsa uygun temel çözümlerden en az biri optimaldir. O halde optimumu ararken sonlu sayıdaki uygun temel çözümleri karşılaştırmak yeter. Aşağıdaki örnekte bu fikri önceden deneyelim ve bulduğumuz noktanın gerçekten optimal olduğunu ayrıca doğrulayalım.

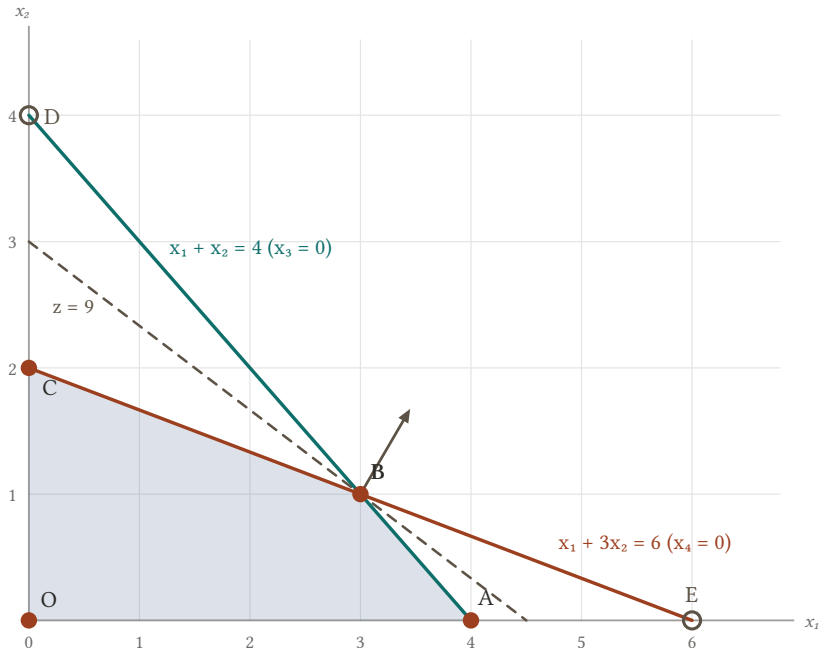
Örnek 2.10 (Aylak değişkenli bir problemin bütün temel çözümleri).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

problemini standart forma getirip bütün temel çözümlerini bulunuz ve uygun temel çözümler arasından optimal çözümü seçiniz.

Çözüm.



Şekil 2.2: Uygun bölge boyalı dörtgendir. Her kısıt doğrusu üzerinde bir değişken sıfırdır (eksenlerde $x_1 = 0$ ya da $x_2 = 0$); iki doğrunun her kesişimi, o iki değişken sıfırlanarak bulunan bir temel çözümdür. Dolu noktalar O, A, B, C uygun temel çözümlerdir ve bölgenin köşeleridir; boş noktalar D(0, 4) ve E(6, 0) uygun olmayan temel çözümlerdir ve bölgenin dışında kalır. Kesikli $z = 9$ doğrusu bölgeye yalnız B(3, 1) köşesinde değer.

Standart form. İki kısıt da $\leq$ biçiminde ve sağ tarafları negatif değil. Birinci kısıta x_3, ikinciye x_4 aylak değişkenini ekleriz; amaçtaki katsayıları 0'dır:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \max z &= 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Artık $m = 2$, $n = 4$'tür; en fazla $C(4, 2) = 6$ temel çözüm vardır.
Temel çözümler. Her seçimde iki değişkeni sıfırlayıp kalan 2×2 sistemi çözelim.

- $x_1 = x_2 = 0$ (x_3, x_4 temel): denklemler doğrudan $x_3 = 4$, $x_4 = 6$ verir; $\Delta = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$. Çözüm $(0, 0, 4, 6)$.
- $x_1 = x_3 = 0$ (x_2, x_4 temel): $x_2 = 4$ ve $3x_2 + x_4 = 6$; $\Delta = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 3 = 1$. $x_4 = 6 - 12 = -6$ ve çözüm $(0, 4, 0, -6)$.
- $x_1 = x_4 = 0$ (x_2, x_3 temel): $x_2 + x_3 = 4$ ve $3x_2 = 6$; $\Delta = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3$. $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ ve çözüm $(0, 2, 2, 0)$.
- $x_2 = x_3 = 0$ (x_1, x_4 temel): $x_1 = 4$ ve $x_1 + x_4 = 6$; $\Delta = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1$. $x_4 = 2$ ve çözüm $(4, 0, 0, 2)$.

 CC BY-NC-SA 4.0

- $x_2 = x_4 = 0$ (x_1, x_3 temel): $x_1 + x_3 = 4$ ve $x_1 = 6$; $\Delta = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$. $x_3 = -2$ ve çözüm $(6, 0, -2, 0)$.
- $x_3 = x_4 = 0$ (x_1, x_2 temel): $x_1 + x_2 = 4$ ve $x_1 + 3x_2 = 6$; $\Delta = 3 - 1 = 2$. İkinciden birinciyi çıkarırsak $2x_2 = 2$, yani $x_2 = 1$, $x_1 = 3$ ve çözüm $(3, 1, 0, 0)$.

Altı seçimin hepsinde $\Delta \neq 0$ olduğundan tam 6 temel çözüm vardır. Geometrik yorumda kullanmak için bunları x_1x_2 düzlemindeki izdüşümlerine göre O, D, C, A, E, B diye adlandıralım ve tabloda (Tablo 2.2) toplayalım. z sütununu uygun olmayan satırlar için de hesapladık; bunun nedeni birazdan anlaşılacak.

Tablo 2.2: Aylak değişkenli problemin bütün temel çözümleri

Nokta	Sıfırlanan	Temel değişkenler	Δ	Temel çözüm	Uygun mu?	Dejenere mi?	z
O	x_1, x_2	x_3, x_4	1	$(0, 0, 4, 6)$	Evet	Hayır	0
D	x_1, x_3	x_2, x_4	1	$(0, 4, 0, -6)$	Hayır ($x_4 < 0$)	—	12
C	x_1, x_4	x_2, x_3	-3	$(0, 2, 2, 0)$	Evet	Hayır	6
A	x_2, x_3	x_1, x_4	1	$(4, 0, 0, 2)$	Evet	Hayır	8
E	x_2, x_4	x_1, x_3	-1	$(6, 0, -2, 0)$	Hayır ($x_3 < 0$)	—	12
B	x_3, x_4	x_1, x_2	2	$(3, 1, 0, 0)$	Evet	Hayır	9

Optimumun seçimi. Uygun temel çözümler O, C, A, B'dir ve amaç değerleri sırasıyla 0, 6, 8, 9'dur. En büyüğü $B = (3, 1, 0, 0)$ noktasındaki $z = 9$'dur. Uygun olmayan D ve E'nin z değeri 12 ile daha büyüktür, ama bu noktalar kısıtları ihlal ettiği için aday değildir. Örneğin D'de $x_4 = -6$'dır, yani ikinci kısıtın sol tarafı $0 + 3 \cdot 4 = 12$ olur ve 6'yı aşar.

***B* gerçekten optimal mi?** Bunu doğrudan gösterebiliriz. Amaç fonksiyonunu iki kısıtın sol taraflarının negatif olmayan katsayılarla alınmış bir toplamı olarak yazalım:

$$2x_1 + 3x_2 = \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2).$$

Sağ tarafı açarsak gerçekten

$$\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 2x_1 + 3x_2$$

olur. Her uygun çözümde $x_1 + x_2 \leq 4$ ve $x_1 + 3x_2 \leq 6$ olduğundan

$$z = \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2) \leq \frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 9$$

bulunur. B'de $z = 9$ olduğuna göre hiçbir uygun çözüm B'den iyi değildir. Optimal çözüm $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ (ve $x_3 = x_4 = 0$), optimal değer $z^* = 9$'dur. Bu katsayıların nasıl bulunduğu Dualite bölümünün konusudur.

Geometrik yorum. Çözümün başındaki şekil tablonun geometrisini gösteriyor. $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ eksenleri ile iki kısıt doğrusu ($x_3 = 0$ ve $x_4 = 0$) düzlemde dört doğrudur. Bir temel çözüm iki değişkeni sıfırladığına göre, bu dört doğrudan ikisinin kesişim noktasıdır; dört doğrudan $C(4, 2) = 6$ çift seçilir ve her çift bir temel çözüm verir. Uygun temel çözümler O, A, B, C uygun bölgenin tam olarak dört köşesidir. Uygun olmayan D ve E ise kısıt doğrularının eksenleri bölgenin dışında kestiği noktalardır. Köşelerle uygun temel çözümler arasındaki bu bağ bir rastlantı değildir. Onu bir sonraki bölümde genel olarak ispatlayacağız.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

2.6 Konveks Kümeler

Önceki örnekte uygun temel çözümlerin uygun bölgenin köşeleri olduğunu gördük. "Köşe" kavramını her boyutta kullanabilmek ve uygun bölgenin biçimini anlamak için lineer programlamanın çözümünde kullanılan birkaç geometrik kavrama ihtiyacımız var. Bu kavramlar Konveks Analiz dersinde ayrıntılı işlenir; burada lineer programlamada kullanacağımız kadarını kısaca veriyoruz.

2.6.1 Konveks kombinasyon ve doğru parçası

İlk kavram, birkaç noktanın "ağırlıklı ortalaması"dır.

Tanım 2.8 (Konveks kombinasyon). $A_1, A_2, \ldots, A_k$ noktaları (ya da vektörleri) ve

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1,k}, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

koşullarını sağlayan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sayıları verilsin. Bu koşullar altında oluşturulan

$$A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_k A_k$$

noktasına (vektörüne) $A_1, A_2, \ldots, A_k$ noktalarının (vektörlerinin) bir **konveks kombinasyonu** denir.

Yani konveks kombinasyon, noktaların ağırlıklı ortalamasıdır: ağırlıklar negatif değildir ve toplamları 1'dir. İki nokta için $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1 - \lambda$ $(0 \leq \lambda \leq 1)$ yazılır ve kombinasyon $\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2$ olur. Daha ayrıntılı bir anlatım için bkz. Konveks Analiz.

Örnek 2.11 (Bir noktayı konveks kombinasyon olarak yazmak). $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (4,0)$, $A_3 = (0,4)$ olsun. $A = (1,1)$ noktasını bu üç noktanın bir konveks kombinasyonu olarak yazınız.

> **Çözüm.**
> $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 = (4\lambda_2, 4\lambda_3)$ olduğundan $(1,1)$ noktasını elde etmek için $4\lambda_2 = 1$ ve $4\lambda_3 = 1$, yani $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}$ olmalıdır. Katsayıların toplamı 1 olacağından $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ bulunur. Üç katsayı da negatif olmadığından
>
> $$A = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{4}A_2 + \frac{1}{4}A_3$$
>
> bir konveks kombinasyondur. Aynı yolu $(3,3)$ noktası için izlersek $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{4}$ ve $\lambda_1 = -\frac{1}{2} < 0$ çıkar. $(3,3)$ bu üç noktanın konveks kombinasyonu değildir; gerçekten de $A_1A_2A_3$ üçgeninin dışındadır $(3+3 > 4)$.
> ■

İki noktanın bütün konveks kombinasyonları, düzlemde ve uzayda bildiğimiz doğru parçasını verir. Bu gözlem doğru parçasını her boyutta tanımlamamızı sağlar.

Tanım 2.9 (Doğru parçası). n boyutlu uzayda $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ve $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ noktalarının konveks kombinasyonu olan

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda A + (1-\lambda)B, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

noktalarının kümesine AB **doğru parçası** denir.

Yani X noktasının her x_i bileşeni

$$x_i = \lambda a_i + (1-\lambda)b_i, \qquad i = \overline{1,n}$$

biçimindedir: X'in her bileşeni, A ve B'nin karşılık gelen a_i ve b_i bileşenlerinin, bütün bileşenler için **aynı** λ ile alınmış konveks kombinasyonudur. $\lambda = 1$ için A, $\lambda = 0$ için B, $\lambda = \frac{1}{2}$ için orta nokta elde edilir. $A \neq B$ ise doğru parçasının her noktası için bu λ tektir. λ sayısı $[0,1]$ aralığının dışına çıkarsa aynı doğrunun parçanın dışında kalan noktaları elde edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.12 (Bir nokta doğru parçası üzerinde mi?). $A = (1, 2, 0)$ ve $B = (3, 0, 4)$ olsun. $C = (2, 1, 2)$ ve $D = (5, -2, 8)$ noktalarından hangileri AB doğru parçası üzerindedir?

> **Çözüm.**
> Doğru parçasının noktaları
>
> $$X = \lambda(1, 2, 0) + (1 - \lambda)(3, 0, 4) = (3 - 2\lambda, 2\lambda, 4 - 4\lambda)$$
>
> biçimindedir. Bir nokta üç bileşeni de **aynı** λ ile veriyorsa ve bu λ $[0, 1]$ aralığındaysa doğru parçası üzerindedir.
> $\boldsymbol{C = (2, 1, 2)}$**:** Birinci bileşenden $3 - 2\lambda = 2$, yani $\lambda = \frac{1}{2}$. Bu değerle ikinci bileşen $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, üçüncü bileşen $4 - 2 = 2$ olur; ikisi de tutar. $\lambda = \frac{1}{2} \in [0, 1]$ olduğundan C doğru parçası üzerindedir; üstelik AB'nin orta noktasıdır.
> $\boldsymbol{D = (5, -2, 8)}$**:** Birinci bileşenden $3 - 2\lambda = 5$, yani $\lambda = -1$. Bu değerle ikinci bileşen -2, üçüncü bileşen $4 + 4 = 8$ olur; üçü de tutar. Demek ki D, A ile B'den geçen doğru üzerindedir. Ama $\lambda = -1 \notin [0, 1]$ olduğundan D doğru parçası üzerinde değildir. Gerçekten B, A ile D'nin orta noktasıdır: $\frac{1}{2}(A + D) = (3, 0, 4) = B$. Yani D, doğru parçasının B ucunun ötesindedir.
> ■

2.6.2 Konveks küme

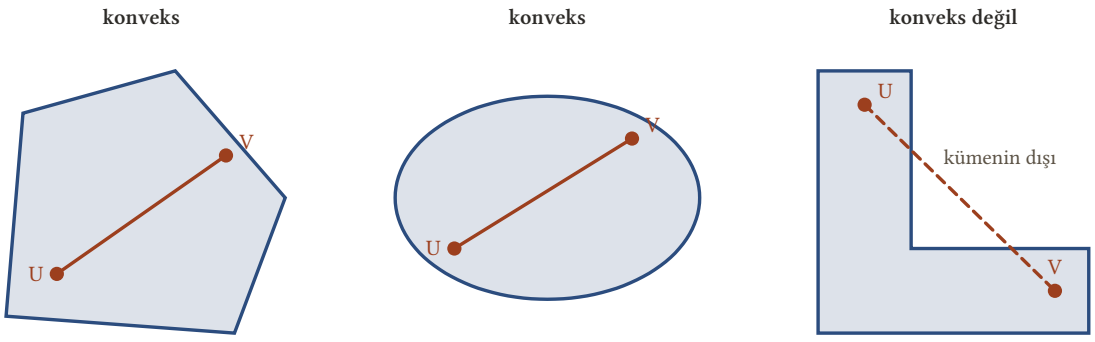
Artık bu bölümün ana kavramını tanımlayabiliriz.

Tanım 2.10 (Konveks küme). n boyutlu Öklid uzayının bir C alt kümesi verilsin. C'nin her nokta çiftinin her konveks kombinasyonu yine C'de ise, yani her $A, B \in C$ ve her $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\lambda A + (1 - \lambda)B \in C$$

oluyorsa C'ye **konveks küme** (konveks bölge) denir. Eşdeğer olarak: C'deki her A, B nokta çifti için AB doğru parçasının her X noktası yine C'ye aitse C konveks kümedir.

Yani konveks küme, herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasından hiç dışarı taşmayan kümedir. İki tanım aynı şeyi söyler, çünkü AB doğru parçası tam olarak A ile B'nin konveks kombinasyonlarından oluşur. Boş küme ve tek noktalı kümeler de konvekstir, çünkü koşulu bozacak iki farklı nokta yoktur. Karşılaştırma için bkz. Konveks Analiz.



Şekil 2.3: Soldaki çokgen ve ortadaki elips konvekstir: içlerinden hangi iki nokta alınırsa alınsın, UV doğru parçası kümenin içinde kalır. Sağdaki L biçimli küme konveks değildir: U ve V kümededir ama UV doğru parçasının bir kısmı kümenin dışından geçer.

Örnek 2.13 (Dairesel bölge konvekstir). $\| (x_1, x_2) \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ olmak üzere $C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, yani $\| X \| \leq 1$ koşulunu sağlayan noktaların kümesi verilsin. C'nin konveks olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**

$U, V \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ alalım; $W = \lambda U + (1-\lambda)V$ noktasının C'de olduğunu göstereceğiz. Üçgen eşitsizliğine göre iki vektörün toplamının uzunluğu uzunluklarının toplamını aşmaz: $\| P + Q \| \leq \| P \| + \| Q \|$. Ayrıca bir vektörü negatif olmayan bir t sayısıyla çarpmak uzunluğunu t ile çarpar: $\| tP \| = t \| P \|$. Bu iki bilgiyle

$$\| W \| \leq \| \lambda U \| + \| (1-\lambda)V \| = \lambda \| U \| + (1-\lambda) \| V \| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$$

bulunur. Son adımda $\| U \| \leq 1$, $\| V \| \leq 1$ ve $\lambda \geq 0$, $1 - \lambda \geq 0$ olduğunu kullandık. Demek ki $W \in C$'dir ve C konvekstir.
■

Örnek 2.14 (Koordinat eksenlerinin birleşimi). $C = \{(x_1, x_2) : x_1 x_2 = 0\}$ kümesi, yani iki koordinat ekseninin birleşimi konveks midir?

Çözüm.
$U = (1, 0)$ ve $V = (0, 1)$ noktaları C'dedir, çünkü $1 \cdot 0 = 0$ ve $0 \cdot 1 = 0$'dır. $\lambda = \frac{1}{2}$ ile konveks kombinasyonları

$$\frac{1}{2}U + \frac{1}{2}V = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

olur ve $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq 0$ olduğundan bu nokta C'de değildir. C konveks değildir.
Bir kümenin konveks olmadığını göstermek için tek bir karşı örnek yeter. Konveks olduğunu göstermek için ise bütün nokta çiftleri ve bütün λ değerleri için akıl yürütmek gerekir, önceki örnekte (Örnek 2.13) yaptığımız gibi.
■

2.6.3 Hiperdüzlemler ve yarı uzaylar

Bir lineer programlama probleminin her kısıtı doğrusal bir eşitlik ya da eşitsizliktir. Bu tür denklem ve eşitsizliklerin tanımladığı kümelerin özel adları vardır.

Tanım 2.11 (Hiperdüzlem ve yarı uzaylar). $a_1, a_2, \ldots, a_n$ hepsi birden sıfır olmayan sabitler ve b bir sabit olsun. n boyutlu uzayda

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

denklemini sağlayan noktaların kümesine bir **hiperdüzlem** denir. Bu hiperdüzlem uzayı ikiye böler:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \geq b$$

eşitsizliği **üst yarı uzayı** (üst yarı hiperdüzlemi),

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq b$$

eşitsizliği ise **alt yarı uzayı** (alt yarı hiperdüzlemi) ifade eder.

Yani $n = 2$ iken hiperdüzlem bir doğru, yarı uzaylar da onun iki yanındaki yarı düzlemlerdir; $n = 3$ iken hiperdüzlem bir düzlemdir; $n > 3$ iken gözümüzde canlandıramadığımız ama aynı biçimde davranan bir "düzlem"dir. Bir lineer programlama probleminde her eşitlik kısıtı bir hiperdüzlem, her $\leq$ ya da $\geq$ kısıtı ve her $x_j \geq 0$ koşulu bir yarı uzay tanımlar. Ayrıntılar için bkz. Konveks Analiz, hiperdüzlem ve yarı uzaylar.

Önerme 2.2 (Hiperdüzlemler ve yarı uzaylar konvekstir). *Her hiperdüzlem ve her yarı uzay konveks bir kümedir.*

İspat.
Kısaca $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ yazalım; bir $X = (x_1, \ldots, x_n)$ noktası için $\vec{a}^T X = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ olsun. Bu ifade doğrusaldır: her U, V ve her λ için

$$\vec{a}^T \left(\lambda U + (1-\lambda)V \right) = \lambda \vec{a}^T U + (1-\lambda) \vec{a}^T V.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Alt yarı uzay. *$\vec{a}^T U \leq b$, $\vec{a}^T V \leq b$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. $\lambda \geq 0$ ve $1-\lambda \geq 0$ olduğundan eşitsizlikleri bu sayılarla çarpabiliriz:*

$$\vec{a}^T \left(\lambda U + (1-\lambda)V \right) = \lambda \vec{a}^T U + (1-\lambda)\vec{a}^T V \leq \lambda b + (1-\lambda)b = b.$$

Yani $\lambda U + (1-\lambda)V$ de alt yarı uzaydadır.
Üst yarı uzay. *Aynı hesap bütün eşitsizlikler ters çevrilerek yapılır: $\geq b$ olan iki değerin negatif olmayan ağırlıklı ortalaması da $\geq b$'dir.*
Hiperdüzlem. *$\vec{a}^T U = \vec{a}^T V = b$ ise hesap $\lambda b + (1-\lambda)b = b$ verir. Ayrıca hiperdüzlem, iki yarı uzayın kesişimi olarak da düşünülebilir.*
■

2.6.4 Konveks kümelerin özellikleri

Konveks kümelerin lineer programlamada sürekli kullanacağımız üç özelliği var. İlki, konveks kombinasyon koşulunun iki noktadan çok noktaya genişletilebilmesidir.

Önerme 2.3 (Konveks küme noktalarının konveks kombinasyonlarını içerir). *$A_1, A_2, ..., A_k$ noktaları C konveks kümesine ait ise, bunların her konveks kombinasyonu olan*

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i, \qquad \lambda_i \geq 0, i = \overline{1,k}, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

noktası da C kümesindedir.

İspat.
Nokta sayısı k üzerinden tümevarım yapalım.
$k=1$ ve $k=2$. *$k=1$ için $\lambda_1 = 1$ ve $A = A_1 \in C$'dir. $k=2$ için $A = \lambda A_1 + (1-\lambda)A_2$ olur; C konveks olduğundan tanım gereği $A \in C$'dir.*
Tümevarım adımı. *Özelliğin $k-1$ nokta için doğru olduğunu kabul edelim: C'ye ait $k-1$ noktanın her konveks kombinasyonu C'dedir. Şimdi $A_1, ..., A_k \in C$ ve $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i A_i$ bir konveks kombinasyon olsun.*
$\lambda_k = 1$ ise diğer bütün katsayılar sıfırdır ve $A = A_k \in C$ olur. $\lambda_k < 1$ ise

$$t = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_{k-1} = 1 - \lambda_k > 0$$

diyelim ve $\alpha_i = \lambda_i / t$ ($i = \overline{1, k-1}$) tanımlayalım. $\alpha_i \geq 0$ ve

$$\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{t} = \frac{t}{t} = 1$$

olduğundan

$$B = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i A_i$$

noktası $A_1, ..., A_{k-1}$ noktalarının bir konveks kombinasyonudur ve tümevarım varsayımından $B \in C$'dir. $\lambda_i = t\alpha_i$ olduğunu kullanırsak

$$A = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i A_i + \lambda_k A_k = t \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i A_i + \lambda_k A_k = tB + \lambda_k A_k$$

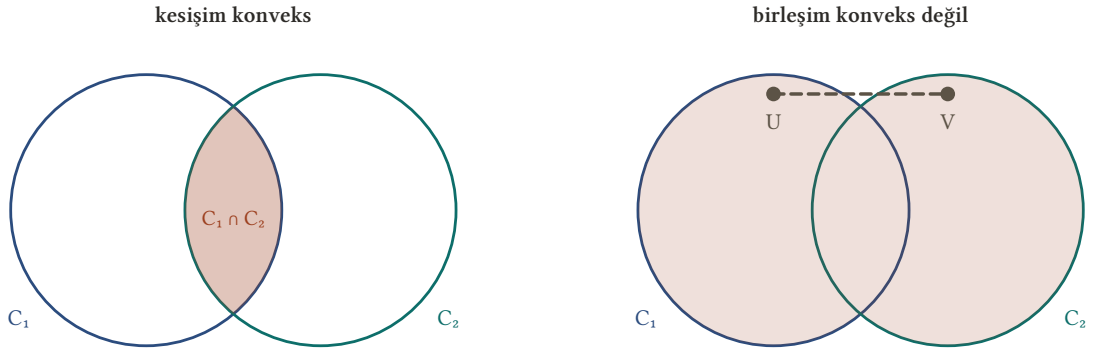
olur. Burada $t > 0$, $\lambda_k \geq 0$ ve $t + \lambda_k = 1$'dir; yani A, B ile A_k'nın bir konveks kombinasyonudur. B ve A_k noktaları C konveks kümesinde olduğundan onların konveks kombinasyonu olan A da C'dedir.
■

Yani konveks bir kümeden istediğimiz kadar nokta alıp ağırlıklı ortalamalarını alsak da kümenin dışına çıkamayız. Aynı sonucun bir başka ispatı için bkz. Konveks Analiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci özellik, konveks kümelerin kesişim ve birleşim altında nasıl davrandığıyla ilgilidir.

Önerme 2.4 (Kesişim ve birleşim). *İki konveks kümenin kesişimi yine konvekstir. İki konveks kümenin birleşiminin ise her zaman konveks olması gerekmez.*



Şekil 2.4: İki dairesel bölge konvekstir. Solda kesişimleri (koyu boyalı mercek) yine konvekstir. Sağda birleşimleri konveks değildir: U birinci, V ikinci bölgededir, ama UV doğru parçasının ortası iki bölgenin de dışında kalır.

> ***İspat.***
> ***Kesişim.*** *C_1 ve C_2 konveks kümeler olsun. $A, B \in C_1 \cap C_2$ ve $0 \le \lambda \le 1$ alalım. A ve B hem C_1'de hem C_2'de olduğundan, iki kümenin konveksliği gereği $\lambda A + (1-\lambda)B$ noktası hem C_1'de hem C_2'dedir; yani $C_1 \cap C_2$'dedir. Demek ki kesişim konvekstir.*
> ***Birleşim.*** *Bir karşı örnek yeter. $C_1 = \{(x_1, x_2) : x_2 = 0\}$ (x_1 ekseni) ve $C_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0\}$ (x_2 ekseni) birer doğrudur, yani düzlemde hiperdüzlemdir; Önerme 2.2 gereği ikisi de konvekstir. Birleşimleri ise $\{(x_1, x_2) : x_1 x_2 = 0\}$ kümesidir ve Örnek 2.14 bu kümenin konveks olmadığını gösterdi.*
> ■

Kesişim özelliği tümevarımla sonlu sayıda kümeye genişler: $C_1, \ldots, C_p$ konveks ise $C_1 \cap C_2$ konvekstir, onun C_3 ile kesişimi de konvekstir ve böyle devam edilir. (Aslında sonsuz sayıda konveks kümenin kesişimi de konvekstir; bkz. Konveks Analiz.) Lineer programlamada uygun bölge tam olarak böyle bir kesişim olacak.

2.6.5 Uç noktalar

Üçüncü özellik için köşe kavramını her boyutta geçerli olacak biçimde tanımlamamız gerekiyor. Bir çokgenin köşesini ötekilerden ayıran şey, iki başka noktanın arasında kalmamasıdır.

Tanım 2.12 (Uç (ekstrem) nokta). C konveks bir küme ve $X \in C$ olsun. X noktası C'nin X'ten başka ve birbirinden farklı iki noktasının konveks kombinasyonu olarak ifade edilemiyorsa, yani

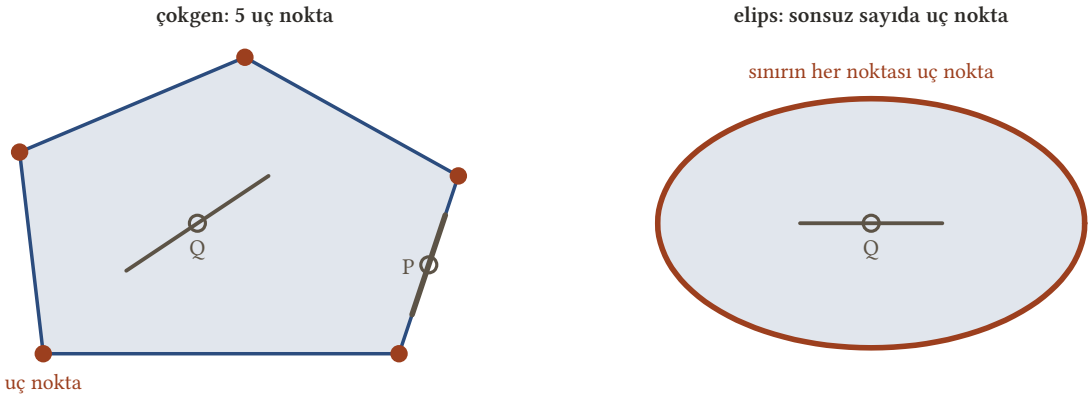
$$X = \lambda U + (1-\lambda)V, \qquad U, V \in C, \quad U \neq V, \quad 0 < \lambda < 1$$

eşitliğini sağlayan U, V ve λ bulunamıyorsa X noktasına C'nin bir **uç noktası** (ekstrem noktası) denir.

Yani uç nokta, C'nin içinde kalan hiçbir doğru parçasının "iç" noktası, uçları dışındaki bir noktası olamayan noktadır. ($U \neq V$ ve $0 < \lambda < 1$ iken X ne U'ya ne V'ye eşit olabilir; tanımdaki "X'ten başka" koşulu bu yüzden formüle kendiliğinden yerleşmiştir.) Bir çokgende uç noktalar köşelerdir; bu yüzden uç noktaya köşe noktası da denir. Karşılaştırma için bkz. Konveks Analiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

> **i** Not
>
> Bir konveks bölgenin sonlu sayıda uç noktası olabileceği gibi, daire, elips, küre, elipsoit gibi bölgelerin sınırlarındaki sonsuz sayıdaki noktanın her biri de uç noktadır. Yarı düzlem gibi bazı konveks kümelerin ise hiç uç noktası yoktur.



Şekil 2.5: Solda çokgenin uç noktaları beş köşesidir. Bir kenarın ortasındaki P noktası uç nokta değildir: o kenar üzerinde P'nin iki yanındaki iki noktanın konveks kombinasyonudur. İçteki Q noktası da kendisinden geçen kısa bir doğru parçasının ortasıdır. Sağda elipsin sınırındaki her nokta uç noktadır; içteki noktalar değildir.

Örnek 2.15 (Karenin uç noktaları). $0 \le x_1 \le 2$ ve $0 \le x_2 \le 2$ koşullarını sağlayan (x_1, x_2) noktalarının oluşturduğu C karesi verilsin. $(2,2)$, $(2,1)$ ve $(1,1)$ noktalarından hangileri C'nin uç noktasıdır?

Çözüm.
$(2,1)$: $(2,0)$ ve $(2,2)$ noktaları C'dedir, birbirinden farklıdır ve

$$(2,1) = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(2,2)$$

olur. $(2,1)$ uç nokta değildir.
$(1,1)$: Benzer biçimde $(1,1) = \frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(2,2)$ olduğundan uç nokta değildir.
$(2,2)$: Tersine, $(2,2) = \lambda U + (1-\lambda)V$ olacak biçimde $U = (u_1, u_2)$, $V = (v_1, v_2) \in C$ ve $0 < \lambda < 1$ bulunduğunu varsayalım. Birinci bileşenler

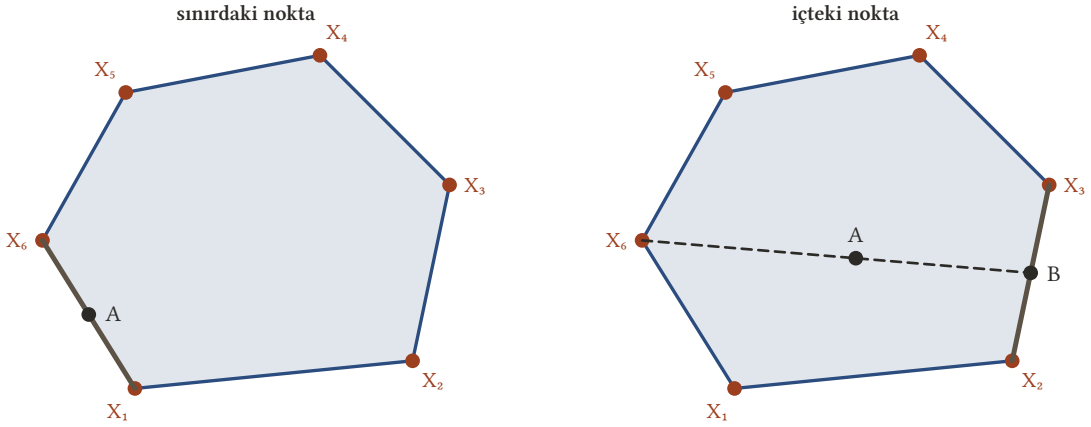
$$2 = \lambda u_1 + (1-\lambda)v_1, \qquad \text{yani} \qquad \lambda(2-u_1) + (1-\lambda)(2-v_1) = 0$$

verir. $U, V \in C$ olduğundan $2 - u_1 \ge 0$ ve $2 - v_1 \ge 0$'dır; $\lambda > 0$ ve $1 - \lambda > 0$ olduğundan iki terim de negatif değildir. Toplamları sıfır olduğuna göre ikisi de sıfırdır: $u_1 = v_1 = 2$. İkinci bileşenler için aynı akıl yürütme $u_2 = v_2 = 2$ verir. O halde $U = V = (2,2)$ olur; bu, $U \neq V$ koşuluyla çelişir. $(2,2)$ bir uç noktadır.
Aynı akıl yürütmeyle karenin dört köşesi de uç noktadır. Başka uç noktası yoktur: bir kenarın köşe olmayan her noktası, o kenar üzerinde kendi iki yanındaki iki noktanın orta noktasıdır; içteki her nokta da kendisinden geçen kısa bir yatay doğru parçasının orta noktasıdır.
■

Üçüncü özellik, uç noktaların bir konveks kümeyi "ürettiğini" söyler. Bunu, lineer programlamada en çok karşılaşacağımız durum olan sınırlı düzlemsel bölgeler için ifade edip ispatlayalım.

Önerme 2.5 (Konveks çokgenin noktaları uç noktalardan üretilir). *Düzlemde sonlu sayıda doğru parçasıyla sınırlanan sınırlı ve konveks bir C bölgesinin (sınırı dahil konveks çokgenin) her noktası, C'nin uç noktalarının (köşelerinin) bir konveks kombinasyonu olarak yazılabilir.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.6: Konveks çokgenin bir noktasını uç noktaların konveks kombinasyonu olarak yazmak. Solda A sınırdadır ve X_6X_1 kenarı üzerinde olduğu için X_6 ile X_1'in konveks kombinasyonudur. Sağda A içtedir: X_6'dan A'ya giden ışın sınırı X_2X_3 kenarındaki B noktasında keser; A, X_6 ile B'nin, B de X_2 ile X_3'ün konveks kombinasyonudur.

İspat.
C'nin köşeleri $X_1, X_2, \ldots, X_p$ olsun. Önce köşelerin gerçekten uç nokta olduğunu görelim; akıl yürütme kare örneğindekinin (Örnek 2.15) aynısıdır. Bir X_j köşesinden geçen iki kenarın doğruları $\vec{a}^T X = b$ ve $\vec{d}^T X = e$ olsun. C konveks olduğundan her kenar doğrusunun bir yanında kalır; diyelim ki C'nin her noktasında $\vec{a}^T X \le b$ ve $\vec{d}^T X \le e$'dir. $X_j = \lambda U + (1-\lambda)V, U, V \in C, 0 < \lambda < 1$ olsun. O zaman

$$b = \vec{a}^T X_j = \lambda\, \vec{a}^T U + (1-\lambda)\, \vec{a}^T V$$

olur. Sağdaki iki değer b'yi aşmadığı ve ağırlıklar pozitif olduğu için ikisi de b'ye eşittir; yani U ve V birinci doğru üzerindedir. Aynı biçimde ikinci doğru üzerindedirler. İki doğru yalnız X_j'de kesiştiğinden $U = V = X_j$ çıkar. Demek ki X_j iki farklı noktanın konveks kombinasyonu olarak yazılamaz ve bir uç noktadır.
Şimdi $A \in C$ alalım. Şekildeki altıgende ($p = 6$) iki durumu ayrı ayrı inceleyelim.
Durum 1: A sınırda. *C'nin sınırı kenarlardan oluşur; A bir kenar üzerindedir. Şekilde A, X_6X_1 kenarı üzerindedir. Doğru parçasının tanımına göre bir $0 \le \lambda \le 1$ için*

$$A = \lambda X_6 + (1-\lambda)X_1$$

olur; yani A, X_6 ve X_1 uç noktalarının bir konveks kombinasyonudur.
Durum 2: A içte. *Bir köşe seçelim, örneğin X_6, ve X_6'dan başlayıp A'dan geçen ışını düşünelim: $X_6 + s(A - X_6)$, $s \ge 0$. C sınırlı olduğundan bu ışın bir yerde C'den çıkar; C sınırını içerdiğinden ışının C'de kalan en uzak noktası vardır. Bu noktaya B diyelim: $B = X_6 + s^*(A - X_6)$. B sınırdadır ve şekilde X_2X_3 kenarı üzerindedir. A içte olduğundan ışın A'yı geçtikten sonra da bir süre C'de kalır; bu yüzden $s^* > 1$'dir. B'nin tanımından*

$$A = X_6 + \frac{1}{s^*}(B - X_6) = \lambda X_6 + (1-\lambda)B, \qquad \lambda = 1 - \frac{1}{s^*}$$

bulunur ve $0 < \lambda < 1$'dir; A, X_6B doğru parçası üzerindedir. B noktası da X_2X_3 doğru parçası üzerinde olduğundan $0 \le \alpha \le 1$ olmak üzere $B = \alpha X_2 + (1-\alpha)X_3$'tür. Buradan

$$\begin{aligned} A &= \lambda X_6 + (1-\lambda)B = \lambda X_6 + (1-\lambda)\,\big(\,\alpha X_2 + (1-\alpha)X_3\,\big) \\ &= \lambda X_6 + \alpha(1-\lambda)X_2 + (1-\lambda)(1-\alpha)X_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Katsayılar

$$\lambda \ge 0, \qquad \alpha(1-\lambda) \ge 0, \qquad (1-\lambda)(1-\alpha) \ge 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

koşullarını sağlar ve toplamları

$$\lambda + \alpha(1-\lambda) + (1-\lambda)(1-\alpha) = \lambda + (1-\lambda)\ \big(\ \alpha + 1 - \alpha\ \big) = 1$$

olur. Yani A noktası X_6, X_2, X_3 uç noktalarının bir konveks kombinasyonu olarak ifade edilir. Işın başka bir kenarda çıksaydı aynı hesap o kenarın iki ucuyla yapılırdı.
■

Önermedeki sınırlılık koşulu gereklidir. Örneğin yarı düzlem konvekstir ama hiç uç noktası yoktur; onun noktalarını uç noktaların kombinasyonu olarak yazmak mümkün değildir. Sınırlı ve sınırını içeren konveks kümeler için aynı özellik her boyutta geçerlidir; bunun genel ifadesi Konveks Analiz dersinin konusudur.

2.7 LP Probleminin Uygun Çözümleri

Artık bölümün ana teoremine hazırız: uygun çözümlerin kümesi konvekstir. Bu, uygun bölgede "delik" ya da "girinti" olmadığı anlamına gelir.

Teorem 2.1 (Uygun çözümler konveks küme oluşturur). *Bir lineer programlama probleminin uygun çözümleri konveks bir küme oluşturur.*

İspat.
Lineer programlama problemi

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad (1)$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n} \qquad (2)$$
$$\min z = \vec{c}^{\,T}\vec{x} \qquad (3)$$

olsun. Uygun çözümü hiç yoksa uygun çözümler kümesi boştur ve boş küme konvekstir. Aksi halde problemin herhangi iki uygun çözümü $U = (u_1, u_2, ..., u_n)$ ve $V = (v_1, v_2, ..., v_n)$ olmak üzere, bu noktaların bir konveks kombinasyonu

$$W = (w_1, w_2, ..., w_n) = \lambda U + (1-\lambda)V, \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$

olsun. Teoremin ispatı için W noktasının bir uygun çözüm olduğunu göstermek yeterlidir.
1. W noktası (1) eşitliğini sağlar. *U ve V uygun çözüm olduğundan $AU = \vec{b}$ ve $AV = \vec{b}$'dir. Matris çarpımının dağılma özelliğini kullanarak*

$$AW = A\ [\ \lambda U + (1-\lambda)V\ ] = \lambda AU + (1-\lambda)AV = \lambda\vec{b} + (1-\lambda)\vec{b} = \vec{b}$$

elde edilir.
2. W noktasının hiçbir bileşeni negatif değildir. *$W = \lambda U + (1-\lambda)V$ eşitliği bileşen bileşen*

$$w_i = \lambda u_i + (1-\lambda)v_i, \qquad i = \overline{1,n}$$

demektir. $u_i \geq 0, v_i \geq 0$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ (yani $\lambda \geq 0$ ve $1-\lambda \geq 0$) olduğundan iki terim de negatif değildir; w_i değerleri (2) koşulunu sağlar.
1 ve 2 nedeniyle W bir uygun çözümdür.
■

Yani herhangi iki uygun çözümün herhangi bir konveks kombinasyonu da bir uygun çözümdür; uygun çözümlerin kümesi bu yüzden konvekstir. Amaç fonksiyonu ispatta hiç kullanılmadı; teorem maksimum problemleri için de aynen geçerlidir. Aynı sonuca geometrik bir yoldan da varılabilir: (1) sisteminin katsayıları hepsi birden sıfır olmayan her denklemi bir hiperdüzlem (katsayıları hepsi sıfır olan bir denklem ya bütün uzayı ya da boş kümeyi verir; ikisi de konvekstir), (2)'deki her koşul bir yarı uzaydır; uygun çözümler kümesi bu sonlu sayıda konveks kümenin kesişimidir (Önerme 2.2, Önerme 2.4). Bu ikinci yol, kısıtları eşitsizlik biçiminde verilen problemler için de doğrudan işler, çünkü her $\leq$ ya da $\geq$ kısıtı da bir yarı uzaydır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç 2.1 (Uygun bölgenin biçimi).

- *İki boyutlu Öklid uzayında (düzlemde), kısıtları x_1 ve x_2 cinsinden eşitsizlikler olan bir lineer programlama probleminin uygun çözümleri, sonlu sayıda doğruyla sınırlanan konveks bir düzlemsel bölge oluşturur.*
- *Üç boyutlu uzayda uygun çözümlerin kümesi, sonlu sayıda düzlemle sınırlanan konveks bir uzay bölgesidir. Daha yüksek boyutlu Öklid uzaylarında uygun çözümlerin kümesi, sonlu sayıda hiperdüzlemle sınırlanan konveks bir bölge (**polihedron**, yani sonlu sayıda yarı uzayın kesişimi olan küme) oluşturur.*
- *Bir lineer programlama probleminin uygun çözümlerinin oluşturduğu konveks küme K ile gösterilecektir. K konveks bölgesi bazı doğrultularda (doğrularla, düzlemlerle, ...) sınırlandırılmış ya da sınırlandırılmamış olabilir.*

> ***İspat.***
> *Problemin her kısıtı ve her işaret koşulu bir hiperdüzlem (eşitlik) ya da bir yarı uzay (eşitsizlik) tanımlar ve bunların sayısı sonludur. (Katsayıları hepsi sıfır olan bir kısıt ya her noktada sağlanır ve atılabilir ya da hiçbir noktada sağlanmaz ve K boş olur; boş küme de konvekstir. Bu yüzden böyle kısıtların olmadığını varsayabiliriz.) Uygun çözümlerin kümesi K, bu kümelerin hepsini birlikte sağlayan noktalardan oluştuğu için onların kesişimidir. Önerme 2.2 gereği her biri konvekstir ve Önerme 2.4 tümevarımla uygulanınca K konveks çıkar. Bir hiperdüzlem de iki yarı uzayın kesişimi olduğundan K sonlu sayıda yarı uzayın kesişimidir, yani bir polihedrondur (bkz. Konveks Analiz).*
> *K'nın sınırı bu yarı uzayların sınırlarından, yani sonlu sayıda hiperdüzlemin parçalarından oluşur: düzlemde her yarı düzlemin sınırı bir doğru, üç boyutta her yarı uzayın sınırı bir düzlemdir. Böylece ilk iki madde elde edilir.*
> *Son madde için iki örnek yeter: Örnek 2.10 problemindeki K bir dörtgendir ve sınırlıdır; aşağıdaki örnekteki (Örnek 2.16) K ise bir yönde sonsuza uzanır.*
> ■

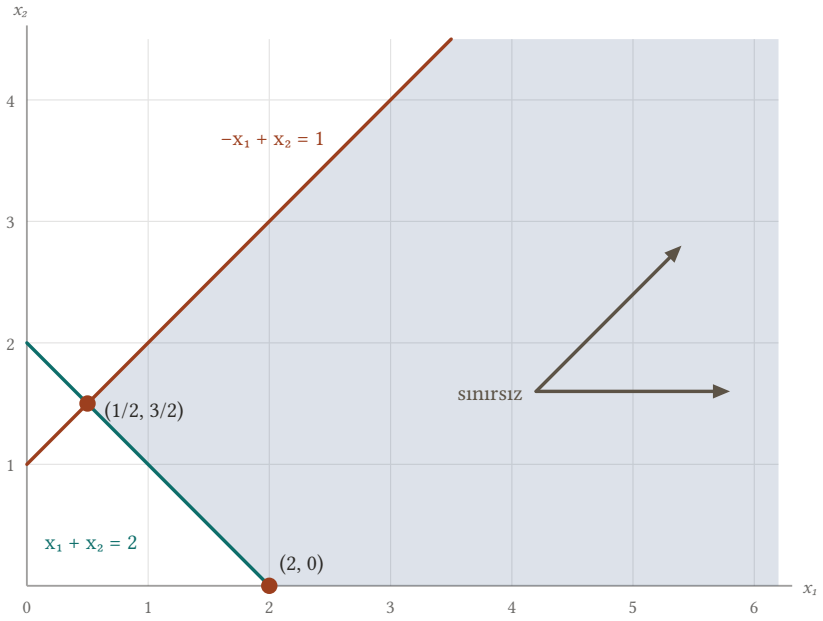
Örnek 2.16 (Sınırsız bir uygun bölge).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

kısıtlarının belirlediği K uygun bölgesi sınırlı mıdır? K'nın köşelerini bulunuz.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.7: $x_1 + x_2 \geq 2$, $-x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1, x_2 \geq 0$ kısıtlarının uygun bölgesi. Bölge iki doğru ve x_1 ekseniyle sınırlanır ama sağa ve sağ yukarı doğru sonsuza uzanır; sınırsız bir konveks bölgedir. Yalnız iki köşesi vardır: $(2, 0)$ ve $(1/2, 3/2)$.

K, dört yarı düzlemin kesişimidir ve Sonuç 2.1 gereği konvekstir.
Sınırlı mı? $t \geq 2$ olmak üzere $(t, 0)$ noktalarına bakalım: $t + 0 \geq 2$, $-t + 0 \leq 1$, $t \geq 0$ ve $0 \geq 0$ sağlanır. Demek ki x_1 ekseninin $t \geq 2$ kısmının tamamı K'dadır ve K, x_1 yönünde sonsuza uzanır. K sınırsızdır.
Köşeler. Köşeler, sınır doğrularından ikisinin K'da kalan kesişim noktalarıdır. Dört sınır doğrusu $x_1 + x_2 = 2$, $-x_1 + x_2 = 1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$'dır; altı çiftin kesişimine bakalım:

- $x_1 + x_2 = 2$ ile $x_2 = 0$: $(2, 0)$. $-2 + 0 \leq 1$ sağlanır; **köşedir**.
- $x_1 + x_2 = 2$ ile $-x_1 + x_2 = 1$: toplarsak $2x_2 = 3$, yani $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. İki koordinat da pozitif; **köşedir**.
- $x_1 + x_2 = 2$ ile $x_1 = 0$: $(0, 2)$. $-0 + 2 = 2 > 1$ olduğundan K'da değildir.
- $-x_1 + x_2 = 1$ ile $x_1 = 0$: $(0, 1)$. $0 + 1 = 1 < 2$ olduğundan K'da değildir.
- $-x_1 + x_2 = 1$ ile $x_2 = 0$: $(-1, 0)$. $x_1 < 0$ olduğundan K'da değildir.
- $x_1 = 0$ ile $x_2 = 0$: $(0, 0)$. $0 + 0 < 2$ olduğundan K'da değildir.

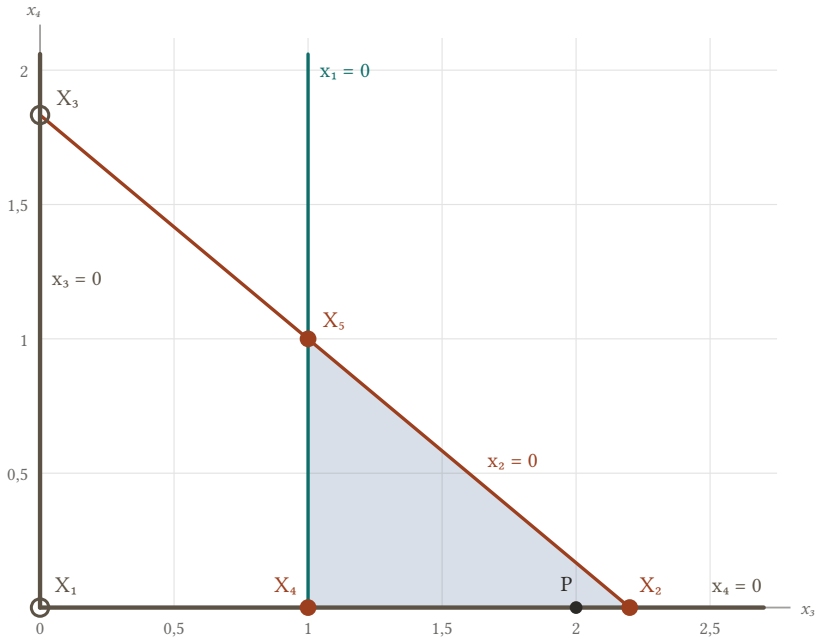
K'nın yalnız iki köşesi vardır: $(2, 0)$ ve $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Sınırsız bir bölgenin her noktası köşelerinin konveks kombinasyonu olarak yazılamaz; örneğin $(5, 0)$ noktası iki köşeyi birleştiren doğru parçasının çok uzağındadır. Bu yüzden Önerme 2.5 sınırlı bölgeler için ifade edildi. Sınırsız bir uygun bölgede amaç fonksiyonunun optimumu olmayabilir; bu durumu Sınırsız çözüm ve alternatif optimal çözüm bölümünde inceleyeceğiz.
■

Bölümü, ilk yarının dört değişkenli örneğine geometrik gözle yeniden bakarak bitirelim. Dört değişkenli bir problemin uygun bölgesini doğrudan çizemeyiz, ama bu örnekte uygun çözümler yalnız iki serbest değişkene bağlı olduğu için bir düzlemde çizilebilir.

Örnek 2.17 (Temel çözümler ve uygun bölgenin köşeleri). Örnek 2.2 koşullarının ($x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7, 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, x_j \geq 0$) uygun çözümler kümesini x_3x_4 düzleminde çiziniz ve temel çözümlerin bu çizimde nerede bulunduğunu belirleyiniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.8: Örneğin uygun çözümleri x_3x_4 düzleminde: $x_1 = (x_3 - 1)/3$ ve $x_2 = (11 - 5x_3 - 6x_4)/3$ olduğundan $x_1 \geq 0$ koşulu $x_3 \geq 1$, $x_2 \geq 0$ koşulu $5x_3 + 6x_4 \leq 11$ demektir. Uygun bölge boyalı üçgendir ve köşeleri üç uygun temel çözüm X_2, X_4, X_5'tir. Uygun olmayan X_1 ve X_3 üçgenin dışındadır. $x_1 = 0$ ile $x_3 = 0$ doğruları paraleldir; bu yüzden x_1 ve x_3 birlikte sıfırlanınca temel çözüm çıkmaz. P noktası (1/3, 1/3, 2, 0) uygun çözümüdür.

Örnek 2.2 çözümünde her çözümün x_3 ve x_4 tarafından belirlendiğini gördük:

$$x_1 = \frac{x_3 - 1}{3}, \qquad x_2 = \frac{11 - 5x_3 - 6x_4}{3}.$$

Böylece her çözüme x_3x_4 düzleminde bir (x_3, x_4) noktası karşılık gelir ve bu eşleme birebirdir. Çözümün uygun olması

$$x_3 \geq 1, \qquad x_4 \geq 0, \qquad 5x_3 + 6x_4 \leq 11$$

demektir; yani uygun çözümler düzlemde üç yarı düzlemin kesişimi olan bir T üçgenine karşılık gelir. T'nin köşeleri, sınır doğrularının ikişer ikişer kesişimidir:

- $x_3 = 1$ ile $x_4 = 0$: $(1, 0)$;
- $5x_3 + 6x_4 = 11$ ile $x_4 = 0$: $\left(\frac{11}{5}, 0\right)$;
- $x_3 = 1$ ile $5x_3 + 6x_4 = 11$: $6x_4 = 6$, yani $(1, 1)$.

Formüllere göre bu üç nokta sırasıyla $X_4 = (0, 2, 1, 0)$, $X_2 = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{11}{5}, 0\right)$ ve $X_5 = (0, 0, 1, 1)$ çözümleridir. Tablodaki (Tablo 2.1) üç uygun temel çözüm, T'nin tam olarak üç köşesidir.
Uygun olmayan temel çözümler de çizimde görünür. X_1 $(x_3 = x_4 = 0)$ başlangıç noktasına, X_3 $(x_2 = x_3 = 0)$ $\left(0, \frac{11}{6}\right)$ noktasına karşılık gelir; ikisi de T'nin dışındadır. Temel çözüm vermeyen e) seçiminin $(x_1 = x_3 = 0)$ nedeni de açıktır: $x_1 = 0$ doğrusu $x_3 = 1$, $x_3 = 0$ doğrusu ise x_4 eksenidir; bu iki doğru paraleldir ve kesişmez.
Son olarak ilk bulduğumuz uygun çözüm $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2, 0\right)$ düzlemde $(2, 0)$ noktasına, yani X_4X_2 kenarı üzerine düşer. $2 = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda) \cdot \frac{11}{5}$ eşitliğinden $\lambda = \frac{1}{6}$ bulunur ve gerçekten

$$\frac{1}{6}X_4 + \frac{5}{6}X_2 = \left(0 + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} + 0, \frac{1}{6} + \frac{11}{6}, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 2, 0\right) = P$$

olur. Yani P, iki uygun temel çözümün konveks kombinasyonudur. x_1 ve x_2, x_3 ile x_4'ün birinci dereceden ifadeleri olduğundan konveks kombinasyonlar bu eşlemede korunur; bu yüzden T için geçerli

 CC BY-NC-SA 4.0

olan Önerme 2.5, uygun çözümlerin her birini X_2, X_4, X_5 uygun temel çözümlerinin bir konveks kombinasyonu olarak yazabileceğimizi söyler.
■

Bu bölümde standart formdaki bir problemin çözümlerini sınıflandırdık: çözüm, uygun çözüm, temel çözüm, uygun temel çözüm, dejenere uygun temel çözüm ve optimal çözüm. Temel çözümlerin sayısının en fazla $C(n, m)$ olduğunu, uygun çözümlerin kümesinin ise konveks olduğunu gördük. İki örnekte uygun temel çözümler uygun bölgenin köşeleri, yani uç noktaları çıktı. Bir sonraki bölümde, Uç noktalar ve grafik yöntem bölümünde, bunun her zaman böyle olduğunu ve optimal çözüm varsa bir uç noktada bulunduğunu ispatlayacak, iki değişkenli problemleri grafik yöntemle çözeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. Uç Noktalar ve Grafik Yöntem

Temel çözümler ve konveks kümeler bölümünde iki şey gördük: bir lineer programlama probleminin uygun çözümleri konveks bir küme oluşturur ve standart formdaki kısıt sisteminin temel çözümleri, bazı değişkenler sıfır alınarak sonlu sayıda adaydan hesaplanır. Bu bölümde bu iki yapıyı birleştiriyoruz. Önce amaç fonksiyonunun en iyi değerini uygun çözümler kümesinin bir **uç noktasında** aldığını, sonra da uç noktaların tam olarak **uygun temel çözümler** olduğunu ispatlayacağız. İki sonuç birlikte çok güçlü bir şey söyler: sonsuz çok uygun çözüm arasında optimumu aramak yerine sonlu sayıdaki uygun temel çözüme bakmak yeter.
Bölümün ikinci yarısında iki değişkenli problemleri **grafik yöntemle** çözeceğiz. Düzlemde uygun çözümler kümesi bir çokgendir, uç noktaları da bu çokgenin köşeleridir; teoremlerin söylediği her şey burada gözle görülür. Grafik yöntem yalnız iki değişkende işe yarar, ama simpleks yöntemin arkasındaki geometriyi anlamanın en kısa yoludur.

3.1 Optimum Bir Uç Noktada Alınır

Önce kullanacağımız çerçeveyi kuralım. Bir lineer programlama probleminin uygun çözümlerinin kümesini K ile gösteriyoruz; K'nın noktalarını, yani uygun çözümleri $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ gibi büyük harflerle yazıyoruz. Amaç fonksiyonunu da noktanın bir fonksiyonu olarak düşünelim:

$$z = f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \vec{c}^T X.$$

Konveks küme, konveks kombinasyon ve uç nokta kavramlarını Temel çözümler ve konveks kümeler bölümünde tanımladık. Kısaca hatırlayalım: $X_1, ..., X_k$ noktalarının bir **konveks kombinasyonu**, $\lambda_i \geq 0$ ve $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$ olmak üzere $\lambda_1X_1 + ... + \lambda_kX_k$ biçimindeki bir noktadır. K'nın bir X noktası, K'nın X'ten farklı iki ayrı noktasının konveks kombinasyonu olarak yazılamıyorsa X'e K'nın bir **uç noktası** denir. Uygun çözümler kümesi K bir **polihedrondur**, yani sonlu sayıda yarı uzayın kesişimidir. K sınırlıysa uç noktalarının sayısı sonludur ve K'nın her noktası uç noktalarının bir konveks kombinasyonu olarak yazılabilir. Düzlemdeki sınırlı bölgeler için bunu önceki bölümde ispatladık; daha yüksek boyutta bu gerçeği ispatsız kullanacağız. (Standart formdaki problemler için bu kabulü hiç kullanmayan tam bir ispat aşağıda Teorem 3.4 ile gelecek.)
İspatlarda amaç fonksiyonunun tek bir özelliğini kullanacağız: f **lineer** bir fonksiyondur. Bu yüzden her konveks kombinasyon için

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, \vec{c}^T X_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(X_i)$$

olur. Yani noktaların ağırlıklı ortalamasında f'nin değeri, f değerlerinin aynı ağırlıklarla alınmış ortalamasıdır. Ağırlıklı bir ortalama da ortalanan sayıların en küçüğünden küçük, en büyüğünden büyük olamaz. Aşağıdaki teoremin bütün fikri budur.

Teorem 3.1 (Optimum bir uç noktada alınır). *Bir lineer programlama probleminin uygun çözümler kümesi K boş olmayan, sınırlı bir polihedron olsun. Bu durumda:*

1. *z amaç fonksiyonu minimum (maksimum) değerini K'nın uç noktalarından birinde alır.*
2. *z amaç fonksiyonu minimum (maksimum) değerini K'nın birden fazla uç noktasında alıyorsa, bu uç noktaların konveks kombinasyonu olan her noktada da aynı değeri alır.*

> ***İspat.***
> *K sınırlı olduğundan uç noktaları sonlu sayıdadır; bunlar $X_1, X_2, ..., X_k$ olsun. İspatı minimum problemi için yapıyoruz.*
> ***1.*** *$f(X_1), f(X_2), ..., f(X_k)$ sayılarının en küçüğü $f(X_t)$ olsun; burada t, 1 ile k arasındaki bir indistir. X, K'nın herhangi bir noktası olsun. K sınırlı bir polihedron olduğundan X uç noktaların bir konveks kombinasyonudur:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$X = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i X_i, \qquad \lambda_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

f lineer olduğundan

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(X_i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(X_t) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k)\, f(X_t) = f(X_t) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizlik adımında her i için $\lambda_i \geq 0$ ve $f(X_i) \geq f(X_t)$ olmasını, son adımda da ağırlıkların toplamının 1 olmasını kullandık. Demek ki K'nın her X noktası için $f(X) \geq f(X_t)$'dir, yani z minimum değerini X_t uç noktasında alır.
z minimum değerini başka bir X_0 noktasında da alıyorsa, X_0 minimum noktası olduğu için $f(X_0) \leq f(X_t)$'dir; yukarıdaki eşitsizlik $X = X_0$ için $f(X_0) \geq f(X_t)$ verir. İki durum birlikte $f(X_0) = f(X_t)$ demektir. O halde amaç fonksiyonunu minimum yapan bir uç nokta her zaman vardır.
2. *z minimum değerini $X_1, X_2, \ldots, X_r$ uç noktalarında alsın ve bu ortak minimum değere $f(X_0)$ diyelim: $f(X_i) = f(X_0)$, $i = \overline{1,r}$. Bu noktaların herhangi bir konveks kombinasyonu*

$$Y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i, \qquad \lambda_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$$

olsun. K konveks olduğundan $Y \in K$'dır, yani Y bir uygun çözümdür. Ayrıca

$$f(Y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(X_i) = f(X_0) \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = f(X_0)$$

olur. Yani Y noktası da amaç fonksiyonunun aynı minimum değerini verir.
Maksimum probleminde $f(X_t)$ olarak en büyük değer seçilir ve eşitsizliklerin yönü döner: her $X \in K$ için $f(X) \leq f(X_t)$ çıkar. İkinci kısmın ispatı hiç değişmez. (Ya da Önerme 1.3 ile maksimum problemi $-z$'nin minimumuna çevrilir.)
■

Yani sınırlı bir uygun bölgede optimum hiçbir zaman "bölgenin ortasında bir yerde" saklanmaz; mutlaka bir uç noktada da alınır. Optimum birden fazla uç noktada alınıyorsa bu uç noktaları birleştiren bütün noktalar da optimaldir; bu durumda sonsuz çok optimal çözüm vardır.
Teoremdeki sınırlılık koşulu ispatın tek bir yerinde kullanıldı: K'nın her noktasını uç noktaların konveks kombinasyonu olarak yazarken. Sınırsız bir bölgede bu yazım mümkün olmayabilir ve amaç fonksiyonunun optimumu hiç olmayabilir (bkz. Örnek 3.11). Optimum **varsa** bölge sınırsız olsa bile bir uç noktada alındığını ise aşağıdaki Teorem 3.4 gösterecek.

Sonuç 3.1 (Uç noktaları tarama). *K boş olmayan, sınırlı bir polihedron ise z amaç fonksiyonunun K'nın uç noktalarında aldığı değerler taranarak optimal çözüme (Tanım 2.7) ulaşılabilir: minimum probleminde en küçük, maksimum probleminde en büyük z değerini veren uç nokta bir optimal çözümdür.*

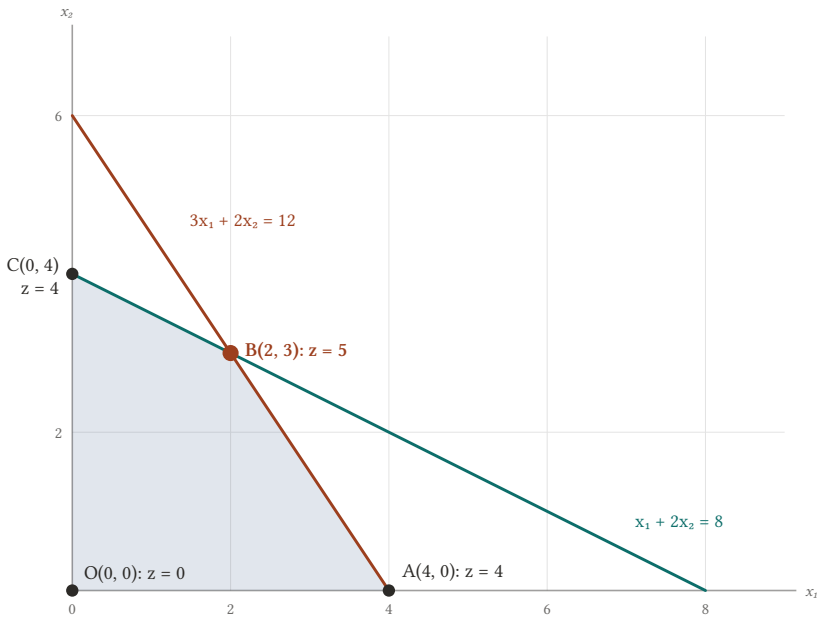
İspat.
Teorem 3.1 teoreminin ilk kısmının ispatında, uç noktalardaki değerlerin en küçüğünü veren X_t noktası için her $X \in K$ noktasında $f(X) \geq f(X_t)$ olduğunu gösterdik. Demek ki uç noktalardaki değerleri karşılaştırıp en küçüğünü seçmek, bütün K üzerindeki minimumu verir. Maksimum için aynı akıl yürütme en büyük değerle yapılır.
■

Örnek 3.1 (Köşeleri tarayarak optimum). Aşağıdaki problemin optimal çözümünü uygun bölgenin uç noktalarını tarayarak bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
\max z &= x_1 + x_2
\end{aligned}
$$

Çözüm.



Şekil 3.1: $x_1 + 2x_2 \leq 8$, $3x_1 + 2x_2 \leq 12$, $x_1, x_2 \geq 0$ kısıtlarının uygun bölgesi OABC dörtgenidir. $z = x_1 + x_2$ amaç fonksiyonu dört uç noktada 0, 4, 5, 4 değerlerini alır; en büyük değer B(2, 3) noktasındadır.

Uygun bölge dört yarı düzlemin kesişimidir: $x_1 \geq 0$ ve $x_2 \geq 0$ birinci bölgeyi, diğer iki kısıt da iki doğrunun alt tarafını verir. Bölge bir dörtgendir ve köşeleri kısıt doğrularının ikişer ikişer kesişimleridir.

- $O(0, 0)$: iki eksenin kesişimi.
- A: $x_2 = 0$ ile $3x_1 + 2x_2 = 12$ doğrusunun kesişimi, $x_1 = 4$. Diğer kısıt $4 + 0 = 4 \leq 8$ sağlanır; $A(4, 0)$.
- B: iki kısıt doğrusunun kesişimi. İkinci denklemden birinciyi çıkarırsak $2x_1 = 4$, yani $x_1 = 2$ ve $x_2 = 3$ olur; $B(2, 3)$.
- C: $x_1 = 0$ ile $x_1 + 2x_2 = 8$ doğrusunun kesişimi, $x_2 = 4$. Diğer kısıt $0 + 8 = 8 \leq 12$ sağlanır; $C(0, 4)$.

Doğruların diğer iki kesişimi köşe değildir. $x_1 + 2x_2 = 8$ doğrusu x_1 eksenini $(8, 0)$'da keser, ama orada $3 \cdot 8 = 24 > 12$ olur. $3x_1 + 2x_2 = 12$ doğrusu x_2 eksenini $(0, 6)$'da keser, ama orada $2 \cdot 6 = 12 > 8$ olur. Bu iki nokta uygun değildir.
Bölge sınırlıdır: her uygun noktada $x_1 \leq 4$ ve $x_2 \leq 4$'tür. O halde Sonuç 3.1 uygulanabilir. Dört köşede amaç değerleri şöyledir:

Tablo 3.1: Uç noktalarda amaç değerleri

Uç nokta	$O(0, 0)$	$A(4, 0)$	$B(2, 3)$	$C(0, 4)$
$z = x_1 + x_2$	0	4	5	4

En büyük değer B noktasındadır: optimal çözüm $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ ve $\max z = 5$'tir.
Sonucu bağımsız olarak da doğrulayabiliriz. Amaç fonksiyonu iki kısıtın sol taraflarının bir birleşimidir:

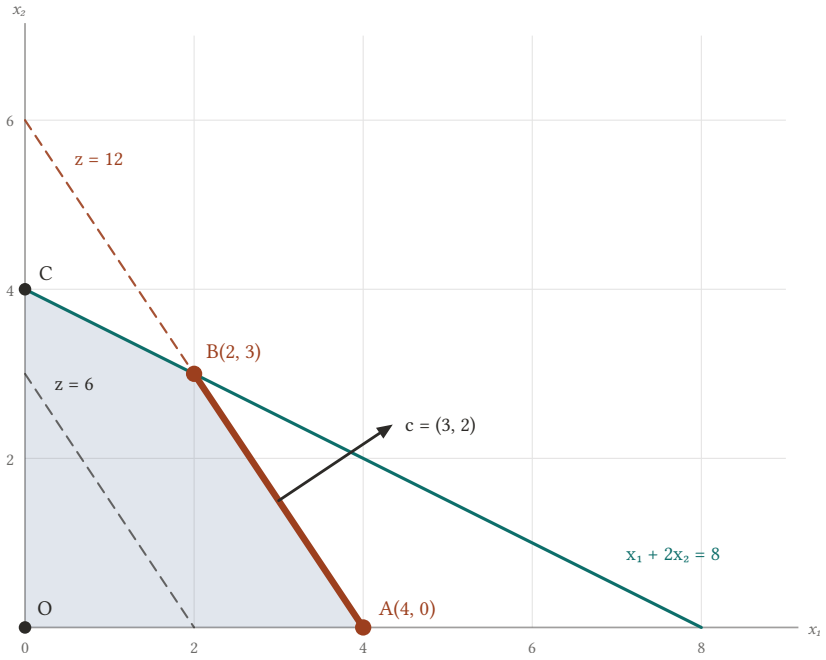
 CC BY-NC-SA 4.0

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + 2x_2) + \frac{1}{4}(3x_1 + 2x_2) \le \frac{8}{4} + \frac{12}{4} = 5.$$

Yani hiçbir uygun noktada z değeri 5'i geçemez ve B'de bu değere ulaşılır.
■

Örnek 3.2 (Birden fazla uç noktada optimum). Örnek 3.1 örneğindeki kısıtlar ($x_1 + 2x_2 \le 8, 3x_1 + 2x_2 \le 12, x_1, x_2 \ge 0$) altında $\max z = 3x_1 + 2x_2$ problemini çözünüz.

Çözüm.



Şekil 3.2: Aynı bölgede z = 3x₁ + 2x₂. En büyük değer z = 12, A ve B uç noktalarında alınır; z = 12 seviye doğrusu AB kenarının üzerine oturduğu için kalın çizilen kenarın her noktası optimaldir. Ok gradyan yönünü, yani z'nin arttığı yönü gösterir.

Uygun bölge ve köşeleri aynıdır: $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(2,3)$, $C(0,4)$. Köşelerde

$$z(O) = 0, \quad z(A) = 12, \quad z(B) = 6 + 6 = 12, \quad z(C) = 8$$

olur. En büyük değer 12'dir ve **iki** uç noktada, A ile B'de alınır. Teorem 3.1 teoreminin ikinci kısmına göre A ile B'nin her konveks kombinasyonu da optimaldir. Bunu doğrudan görelim: $0 \le \lambda \le 1$ için

$$\lambda A + (1-\lambda)B = \big(\, 4\lambda + 2(1-\lambda), 3(1-\lambda) \,\big) = (2 + 2\lambda, 3 - 3\lambda)$$

noktasında

$$z = 3(2 + 2\lambda) + 2(3 - 3\lambda) = 6 + 6\lambda + 6 - 6\lambda = 12$$

olur. Örneğin $\lambda = \frac{1}{2}$ için AB kenarının orta noktası $(3, \frac{3}{2})$'de de $z = 9 + 3 = 12$'dir. Problemin sonsuz çok optimal çözümü vardır: AB kenarının bütün noktaları. Nedeni de açıktır: amaç fonksiyonu $3x_1 + 2x_2$, ikinci kısıtın sol tarafıyla aynıdır ve bu kısıt $3x_1 + 2x_2 \le 12$ der; en büyük değer tam olarak kısıt doğrusu üzerinde alınır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Uç Noktalar ve Uygun Temel Çözümler

Önceki kısım optimumu uç noktalarda aramamızı söylüyor; ama uç nokta geometrik bir kavramdır ve ikiden fazla değişkende uç noktaları çizerek bulamayız. Bu kısımda uç noktaları cebirsel olarak tanıyacağız: uç noktalar, denklem sisteminden hesaplanabilen uygun temel çözümlerin ta kendisidir.
Problemi standart formda (Tanım 1.7) ve vektörel gösterimle ele alalım:

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_mv_m + ... + x_nv_n = v_0 \quad (1)$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \quad (2)$$
$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad (3)$$

Burada $v_1, ..., v_n$ katsayılar matrisi A'nın sütunları, v_0 sağ taraf vektörüdür; hepsi m bileşenlidir. $m < n$ olduğunu ve A'nın rankının m olduğunu, yani $v_1, ..., v_n$ arasında m tane lineer bağımsız vektör bulunduğunu varsayıyoruz. K, (1) ve (2) koşullarını sağlayan $X = (x_1, ..., x_n)$ noktalarının kümesidir.
Temel çözüm tanımını (Tanım 2.3) hatırlayalım: $v_1, ..., v_n$ arasından m tane lineer bağımsız vektör seçilir; bunlara karşılık gelen değişkenler temel değişkenlerdir, geri kalan $n - m$ değişkene sıfır verilir ve (1) sisteminin bu durumdaki tek çözümü bir **temel çözümdür**. Bütün bileşenleri negatif olmayan temel çözüm bir **uygun temel çözümdür** (Tanım 2.5); temel değişkenlerinden en az biri sıfır olan uygun temel çözüm **dejeneredir** (Tanım 2.6).

Teorem 3.2 (Uç noktanın pozitif bileşenleri). *$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, (1)–(3) probleminin uygun çözümler kümesi K'nın bir uç noktası olsun. Bu durumda pozitif x_j değerlerini katsayı olarak kabul eden v_j vektörleri lineer bağımsızdır.*

İspat.
Gerekirse değişkenleri yeniden numaralayarak X'in ilk k bileşeninin pozitif, diğerlerinin sıfır olduğunu varsayalım: $x_1, ..., x_k > 0$ ve $x_{k+1} = ... = x_n = 0$. ($k = 0$ ise, yani $X = 0$ ise, iddia edilen vektör kümesi boştur ve boş küme lineer bağımsız sayılır.) Bu durumda (1) eşitliği

$$x_1v_1 + x_2v_2 + ... + x_kv_k = v_0 \qquad (a)$$

*biçimine dönüşür. $v_1, ..., v_k$ vektörlerinin **lineer bağımlı** olduğunu varsayalım. O zaman en az biri sıfırdan farklı $y_1, ..., y_k$ sayıları için*

$$y_1v_1 + y_2v_2 + ... + y_kv_k = 0 \qquad (b)$$

yazılabilir. $t > 0$ bir sayı olsun. (b) eşitliğini t ile çarpıp (a) eşitliğine önce ekleyelim, sonra ondan çıkaralım:

$$(x_1 + ty_1)v_1 + ... + (x_k + ty_k)v_k = v_0,$$
$$(x_1 - ty_1)v_1 + ... + (x_k - ty_k)v_k = v_0.$$

t sayısını, $x_i \mp ty_i$ sayılarının hepsi pozitif kalacak kadar küçük seçebiliriz: $y_i \neq 0$ olan indisler için $x_i / \mid y_i \mid$ oranlarının en küçüğünden küçük bir $t > 0$ almak yeter. Çünkü $y_i = 0$ ise $x_i \mp ty_i = x_i > 0$, $y_i \neq 0$ ise $t \mid y_i \mid < x_i$ olduğundan $x_i \mp ty_i \geq x_i - t \mid y_i \mid > 0$ olur. Böyle bir t için

$$X_1 = (x_1 + ty_1, ..., x_k + ty_k, 0, ..., 0),$$
$$X_2 = (x_1 - ty_1, ..., x_k - ty_k, 0, ..., 0)$$

noktaları (1) ve (2) koşullarını sağlar, yani K konveks kümesindedir. y_i'lerin en az biri sıfırdan farklı ve $t > 0$ olduğundan $X_1 - X_2 = 2t(y_1, ..., y_k, 0, ..., 0) \neq 0$'dır; X_1 ile X_2 farklı noktalardır ve ikisi de X'ten farklıdır. Öte yandan yukarıdaki iki eşitliğin bileşenlerini taraf tarafa toplayıp 2'ye bölersek

$$X = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2$$

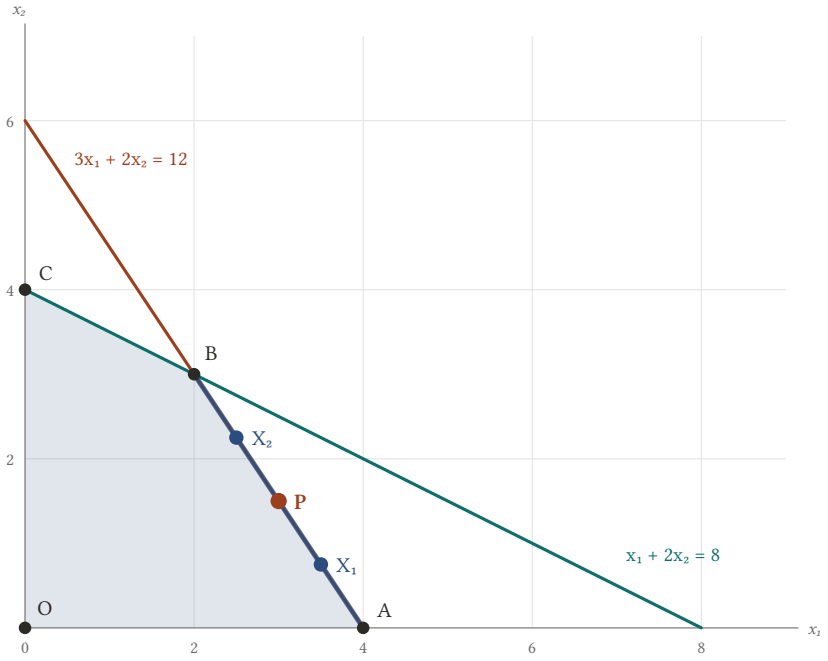
elde ederiz. Yani X uç noktası, K'nın kendisinden farklı iki ayrı noktasının konveks kombinasyonu olarak yazılmış olur. Uç nokta tanımına göre bu mümkün değildir. Demek ki $v_1, ..., v_k$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğu varsayımı yanlıştır; bu vektörler lineer bağımsızdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani bir uç noktada pozitif olan değişkenlerin sütunları arasında "gereksiz" bir sütun yoktur. Gereksiz bir sütun olsaydı, pozitif değişkenleri bu sütunlar arasındaki bağıntı yönünde biraz artırıp biraz azaltarak noktayı iki uygun noktanın tam ortasına yerleştirebilirdik. Lineer bağımsızlığın tanımı için bkz. Lineer Cebir.

Örnek 3.3 (Uç nokta olmayan bir noktada bağımlı sütunlar). Örnek 3.1 örneğindeki kısıtları ($x_1 + 2x_2 \le 8$, $3x_1 + 2x_2 \le 12$, $x_1, x_2 \ge 0$) standart forma getiriniz. AB kenarının orta noktası $P(3, \frac{3}{2})$ için pozitif bileşenlere ait sütunların lineer bağımlı olduğunu gösteriniz ve Teorem 3.2 teoreminin ispatındaki X_1, X_2 noktalarını bulunuz.

Çözüm.



Şekil 3.3: P(3, 3/2) noktası AB kenarının ortasındadır ve uç nokta değildir. İspattaki kaydırma, t = 1/4 için P'yi X_1(7/2, 3/4) ile X_2(5/2, 9/4) noktalarının orta noktası olarak yazar; t = 1/2 alınınca X_1 ve X_2 tam A ve B uç noktalarına ulaşır.

Önce problemi standart forma getirelim. İki kısıt da $\le$ biçimindedir ve sağ tarafları negatif değildir; birinciye x_3, ikinciye x_4 aylak değişkenini ekleriz:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

Sütun vektörleri

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

olur. $P(3, \frac{3}{2})$ noktasında aylak değişkenler $x_3 = 8 - 3 - 3 = 2$ ve $x_4 = 12 - 9 - 3 = 0$'dır. Standart formdaki nokta $P = (3, \frac{3}{2}, 2, 0)$'dır ve üç bileşeni pozitiftir: x_1, x_2, x_3.
v_1, v_2, v_3 vektörleri iki bileşenlidir ve iki bileşenli üç vektör daima lineer bağımlıdır. Bağıntıyı bulalım: $y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 = 0$ eşitliği

$$y_1 + 2y_2 + y_3 = 0, \qquad 3y_1 + 2y_2 = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

sistemine denktir. $y_1 = 2$ seçersek ikinci denklemden $y_2 = -3$, birinciden $y_3 = -2 + 6 = 4$ çıkar. Sağlama:

$$2v_1 - 3v_2 + 4v_3 = (2 - 6 + 4, 6 - 6 + 0) = (0, 0).$$

İspattaki gibi $t > 0$ için

$$X_1 = (3 + 2t, \frac{3}{2} - 3t, 2 + 4t, 0),$$
$$X_2 = (3 - 2t, \frac{3}{2} + 3t, 2 - 4t, 0)$$

noktalarını kuralım. Bileşenlerin pozitif kalması için $\frac{3}{2} - 3t > 0$ ve $2 - 4t > 0$, yani $t < \frac{1}{2}$ gerekir. $t = \frac{1}{4}$ seçelim:

$$X_1 = (\ \frac{7}{2}, \frac{3}{4}, 3, 0\ ), \qquad X_2 = (\ \frac{5}{2}, \frac{9}{4}, 1, 0\ )\ .$$

İkisi de kısıtları sağlar: X_1 için $\frac{7}{2} + \frac{3}{2} + 3 = 8$ ve $\frac{21}{2} + \frac{3}{2} + 0 = 12$; X_2 için $\frac{5}{2} + \frac{9}{2} + 1 = 8$ ve $\frac{15}{2} + \frac{9}{2} + 0 = 12$. Orta noktaları da

$$\frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2 = (\ 3, \frac{3}{2}, 2, 0\ ) = P$$

olur. Böylece P, iki farklı uygun noktanın orta noktası olarak yazıldı; P uç nokta değildir. t'yi sınıra kadar büyütüp $t = \frac{1}{2}$ alırsak $X_1 = (4, 0, 4, 0)$ ve $X_2 = (2, 3, 0, 0)$ olur: bunlar tam A ve B uç noktalarıdır.
Karşılaştırma için $B = (2, 3, 0, 0)$ uç noktasına bakalım. Pozitif bileşenler x_1 ve x_2'dir ve

$$\det[\,v_1 v_2\,] = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$$

olduğundan v_1, v_2 lineer bağımsızdır; teoremin söylediği gibi.
■

Teoremden iki önemli sonuç çıkar.

Sonuç 3.2 (Uç noktada en fazla m pozitif bileşen). *(1)–(3) probleminde K'nın her uç noktasında pozitif bileşenlerin sayısı en fazla m'dir; başka bir deyişle en az $n - m$ bileşen sıfırdır.*

İspat.
$v_1, \ldots, v_n$ vektörlerinin her biri m bileşenlidir, yani m boyutlu uzayın elemanıdır. m boyutlu uzayda en fazla m tane lineer bağımsız vektör vardır; $m + 1$ tane vektör daima lineer bağımlıdır (bkz. Lineer Cebir). Başka bir ifadeyle A matrisinin ($m < n$) en fazla m tane lineer bağımsız sütunu vardır. Teorem 3.2 teoremine göre bir uç noktanın pozitif bileşenlerine ait sütunlar lineer bağımsızdır; bu yüzden pozitif bileşenlerin sayısı en fazla m'dir ve geri kalan en az $n - m$ bileşen sıfırdır.
■

Sonuç 3.3 (Her uç nokta bir uygun temel çözümdür). *(1)–(3) probleminde K'nın uç noktalarından her biri bir uygun temel çözüme karşılık gelir. Özel olarak K'nın uç noktalarının sayısı en fazla $\binom{n}{m}$'dir.*

İspat.
X bir uç nokta olsun ve pozitif bileşenleri yine $x_1, \ldots, x_k$ olsun. Teorem 3.2 teoremine göre $v_1, \ldots, v_k$ lineer bağımsızdır ve Sonuç 3.2 sonucuna göre $k \leq m$'dir.
$k = m$ ise $v_1, \ldots, v_m$ tam bir baz oluşturur. $k < m$ ise bu k vektörü A'nın sütunlarından seçilen $m - k$ vektörle tamamlayarak m tane lineer bağımsız sütun elde edebiliriz: A'nın rankı m olduğundan sütunları m boyutlu uzayı doğurur ve lineer bağımsız bir küme, doğuran bir kümenin elemanlarıyla bir tabana tamamlanabilir (bkz. Lineer Cebir).

 CC BY-NC-SA 4.0

Her iki durumda da X'in sıfırdan farklı bileşenlerinin hepsi, seçilen m sütuna karşılık gelen değişkenler arasındadır. Bu m sütunun oluşturduğu B matrisi lineer bağımsız sütunlardan oluştuğu için tersinirdir; diğer değişkenler sıfırken (1) sistemi $B\vec{x}_B = v_0$ biçimini alır ve tek çözümü vardır. X bu sistemi sağladığı için o tek çözüm X'tir. Demek ki X, bu baza ait temel çözümdür. Bütün bileşenleri negatif olmadığından X bir uygun temel çözümdür; $k < m$ ise bazı temel değişkenleri sıfır olduğundan dejeneredir.
m sütunluk bir baz, n sütun arasından m tanesini seçerek oluşur; bunun en fazla $\binom{n}{m}$ yolu vardır ve her baz en fazla bir temel çözüm verir. Her uç nokta bir temel çözüm olduğundan uç noktaların sayısı en fazla $\binom{n}{m}$'dir.
■

Bu sonucun tersi de doğrudur; ispatı tanımlardan doğrudan çıkar.

Teorem 3.3 (Her uygun temel çözüm bir uç noktadır). *(1)–(3) probleminin her uygun temel çözümü, K'nın bir uç noktasıdır.*

İspat.
$X = (x_1, ..., x_n)$ bir uygun temel çözüm olsun. Temel değişkenlerin indis kümesine J diyelim; J'ye ait m sütunun oluşturduğu B matrisi tersinirdir ve $j \notin J$ için $x_j = 0$'dır.
X'in uç nokta olmadığını varsayalım. O zaman X'ten farklı ve birbirinden farklı $X_1, X_2 \in K$ noktaları ve $0 < \lambda < 1$ sayısı için

$$X = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$$

yazılabilir. X_1'in ve X_2'nin bileşenlerini $x_j^{(1)}$ ve $x_j^{(2)}$ ile gösterelim. $j \notin J$ için

$$0 = x_j = \lambda x_j^{(1)} + (1-\lambda) x_j^{(2)}$$

olur. Sağdaki iki terim de negatif değildir ($\lambda > 0, 1-\lambda > 0$ ve $X_1, X_2 \in K$); toplamları sıfır olduğundan ikisi de sıfırdır. Demek ki X_1 ve X_2'nin de temel olmayan bileşenleri sıfırdır. Bu durumda X_1 ve X_2 de, temel olmayan değişkenler sıfırken (1) sistemini, yani $B\vec{x}_B = v_0$ sistemini sağlar. B tersinir olduğundan bu sistemin tek çözümü vardır; o da X'in temel bileşenleridir. O halde $X_1 = X$ ve $X_2 = X$ olur. Bu, X_1 ile X_2'nin X'ten farklı olmasıyla çelişir. Demek ki X bir uç noktadır.
■

Yani Sonuç 3.3 ile Teorem 3.3 birlikte şunu söyler:

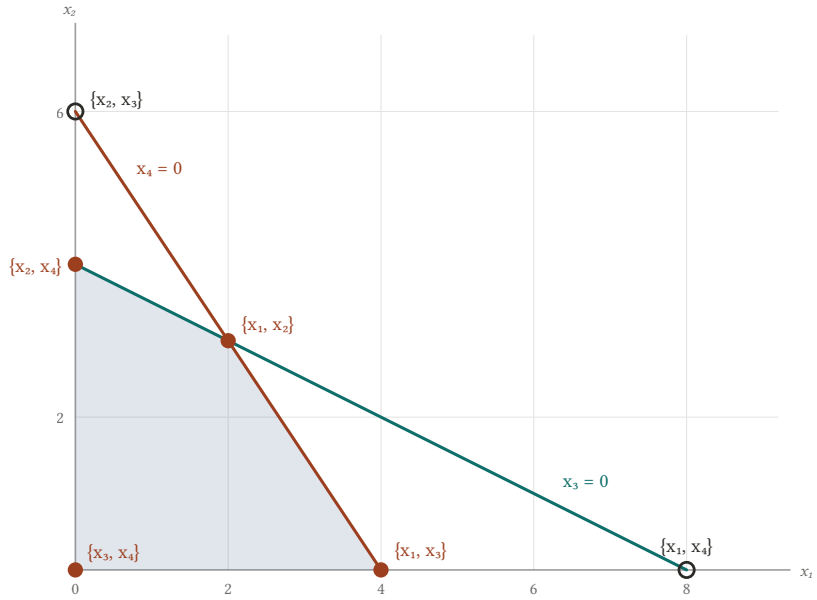
$$X \text{ uç noktadır} \Leftrightarrow X \text{ uygun temel çözümdür}.$$

Geometrik kavram (uç nokta) ile cebirsel kavram (uygun temel çözüm) aynı nesneyi iki farklı dilde anlatır. Tek bir inceliğe dikkat edelim: dejenere bir uç nokta, birden fazla baza ait temel çözüm olabilir; yani bazlar ile uç noktalar arasındaki eşleme her zaman birebir değildir (bkz. Örnek 3.5).

Örnek 3.4 (Temel çözümler ve köşeler). Örnek 3.3 örneğindeki standart formun ($x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$, $3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12$, $x_j \geq 0$) bütün temel çözümlerini bulunuz ve uygun olanların uygun bölgenin köşeleriyle eşleştiğini gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.4: Standart formun altı baz adayı. Dolu noktalar uygun temel çözümlerdir ve tam olarak bölgenin dört köşesidir; içi boş noktalar (8, 0) ile (0, 6) uygun olmayan temel çözümlerdir. Her noktanın yanında baz değişkenleri yazılıdır; bir kısıt doğrusu üzerinde o kısıtın aylak değişkeni sıfırdır.

$m = 2$ denklem ve $n = 4$ değişken vardır; baz adayı sayısı $\binom{4}{2} = 6$'dır. Sütunlar $v_1 = (1, 3)$, $v_2 = (2, 2)$, $v_3 = (1, 0)$, $v_4 = (0, 1)$ olmak üzere her ikilinin determinantı sıfırdan farklıdır:

$$\det[v_1\ v_2] = -4,\ \det[v_1\ v_3] = -3,\ \det[v_1\ v_4] = 1,$$
$$\det[v_2\ v_3] = -2,\ \det[v_2\ v_4] = 2,\quad \det[v_3\ v_4] = 1.$$

Yani altı ikilinin hepsi bir baz oluşturur. Her baz için temel olmayan iki değişkene sıfır verip kalan 2×2 sistemi çözelim.

- $\boldsymbol{\{x_3, x_4\}}$: $x_1 = x_2 = 0$ alınınca $x_3 = 8$, $x_4 = 12$. Çözüm $(0, 0, 8, 12)$; uygun.
- $\boldsymbol{\{x_1, x_3\}}$: $x_2 = x_4 = 0$ alınınca ikinci denklemden $3x_1 = 12$, $x_1 = 4$; birinciden $x_3 = 8 - 4 = 4$. Çözüm $(4, 0, 4, 0)$; uygun.
- $\boldsymbol{\{x_1, x_2\}}$: $x_3 = x_4 = 0$ alınınca $x_1 + 2x_2 = 8$ ve $3x_1 + 2x_2 = 12$; çıkarma $2x_1 = 4$ verir, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Çözüm $(2, 3, 0, 0)$; uygun.
- $\boldsymbol{\{x_2, x_4\}}$: $x_1 = x_3 = 0$ alınınca $2x_2 = 8$, $x_2 = 4$; ikinci denklemden $x_4 = 12 - 8 = 4$. Çözüm $(0, 4, 0, 4)$; uygun.
- $\boldsymbol{\{x_1, x_4\}}$: $x_2 = x_3 = 0$ alınınca $x_1 = 8$; ikinci denklemden $x_4 = 12 - 24 = -12$. Çözüm $(8, 0, 0, -12)$; $x_4 < 0$ olduğu için **uygun değil**.
- $\boldsymbol{\{x_2, x_3\}}$: $x_1 = x_4 = 0$ alınınca $2x_2 = 12$, $x_2 = 6$; birinci denklemden $x_3 = 8 - 12 = -4$. Çözüm $(0, 6, -4, 0)$; $x_3 < 0$ olduğu için **uygun değil**.

Dört uygun temel çözümün ilk iki bileşeni $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 3)$, $(0, 4)$'tür: bunlar tam olarak Örnek 3.1 örneğindeki O, A, B, C köşeleridir. Uygun olmayan iki temel çözüm ise $(8, 0)$ ve $(0, 6)$ noktalarına karşılık gelir; bunlar kısıt doğrularının bölge dışında kalan kesişim noktalarıdır.
Geometrik anlamı şudur: $x_3 = 0$, noktanın birinci kısıt doğrusu üzerinde; $x_4 = 0$, ikinci kısıt doğrusu üzerinde; $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ de eksenler üzerinde olması demektir. İki değişkeni sıfır yapmak, dört doğrudan ikisini seçip kesiştirmektir. Her temel çözümde tam iki bileşen sıfırdan farklıdır; dört uygun temel çözümde bu iki bileşen pozitiftir. Bu, Sonuç 3.2 sonucuyla uyumludur ($m = 2$) ve uygun temel çözümlerin hiçbiri dejenere değildir.
Uygunluk kontrolünün neden şart olduğunu amaç fonksiyonu $z = x_1 + x_2$ ile görelim: uygun olmayan $(8, 0, 0, -12)$ temel çözümünde $z = 8$ olur ve bu, gerçek optimum 5'ten büyüktür. Tarama yalnız **uygun** temel çözümler üzerinden yapılır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 3.1 teoremi sınırlı bölgeler içindi. Şimdi optimumun var olduğu her durumda, bölge sınırsız olsa bile, bir uygun temel çözümde alındığını gösterelim.

Teorem 3.4 (Optimum varsa bir uygun temel çözümde de alınır). *(1)–(3) probleminin bir optimal çözümü varsa, uygun temel çözüm olan bir optimal çözümü de vardır. Yani amaç fonksiyonu optimum değerini K'nın bir uç noktasında da alır.*

> ***İspat.***
> *İspatı minimum problemi için yapıyoruz. Bütün optimal çözümler arasından pozitif bileşen sayısı **en az** olanı seçelim ve X diyelim; pozitif bileşenleri yine $x_1, \ldots, x_k$ olsun. $v_1, \ldots, v_k$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu göstereceğiz.*
> *Bağımlı olduklarını varsayalım: en az biri sıfırdan farklı $y_1, \ldots, y_k$ için $y_1 v_1 + \ldots + y_k v_k = 0$ olsun ve $i > k$ için $y_i = 0$ diyerek $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ vektörünü kuralım. Her t sayısı için $X + tY$ noktası (1) sistemini sağlar, çünkü $\sum_j (x_j + t y_j) v_j = v_0 + t \cdot 0 = v_0$'dır. Amaç değeri*
>
> $$f(X + tY) = f(X) + t\,\vec{c}^{\,T} Y$$
>
> *olur.*
> ***$\vec{c}^{\,T} Y = 0$'dır.*** *$|\,t\,|$ yeterince küçükse, önceki teoremin ispatındaki gibi, $X + tY$ noktasının ilk k bileşeni pozitif kalır, diğerleri sıfırdır; yani $X + tY \in K$'dır. $\vec{c}^{\,T} Y \neq 0$ olsaydı, küçük bir t'yi $t\,\vec{c}^{\,T} Y < 0$ olacak işarette seçerek $f(X + tY) < f(X)$ elde ederdik; bu, X'in optimal olmasıyla çelişir. Demek ki $\vec{c}^{\,T} Y = 0$'dır ve K'da kalan her $X + tY$ noktası da optimaldir.*
> ***Daha az pozitif bileşenli bir optimal çözüm.*** *Gerekirse Y yerine $-Y$ alarak Y'nin en az bir bileşeninin negatif olduğunu varsayabiliriz. $y_i < 0$ olan indisler üzerinden*
>
> $$\bar{t} = \min\left\{ \frac{x_i}{-y_i} : y_i < 0 \right\} > 0$$
>
> *diyelim. $0 \le t \le \bar{t}$ için $X + tY$ noktasının bileşenleri negatif olmaz: $y_i \ge 0$ olan bileşenler azalmaz, $y_i < 0$ olanlar ise ancak $t = x_i/(-y_i)$ değerinde sıfıra iner. Dolayısıyla $X + \bar{t}Y \in K$'dır ve bu nokta da optimaldir. Üstelik minimumu veren indiste bileşen sıfır olur ve $i > k$ için bileşenler sıfır kalır. Böylece $X + \bar{t}Y$, X'ten daha az pozitif bileşeni olan bir optimal çözümdür. Bu, X'in seçimiyle çelişir.*
> *O halde $v_1, \ldots, v_k$ lineer bağımsızdır. Sonuç 3.3 ispatındaki gibi bu vektörler m lineer bağımsız sütuna tamamlanır ve X bu baza ait bir uygun temel çözüm olur. Teorem 3.3 teoremine göre X aynı zamanda bir uç noktadır. Maksimum problemi için $-z$'nin minimumuna bakmak yeter (Önerme 1.3).*
> ■

Sonuç 3.4 (Uygun temel çözümleri tarama). *(1)–(3) probleminin bir optimal çözümü varsa, amaç fonksiyonunun K'nın uç noktalarında alacağı değerler taranarak optimal çözüme ulaşılabilir. Özetle, z amaç fonksiyonunun **uygun temel çözümler** için alacağı değerlere bakılarak optimal çözüme ulaşılabilir: en fazla $\binom{n}{m}$ tane olan uygun temel çözümler arasında, minimum probleminde z'yi en küçük, maksimum probleminde en büyük yapan uygun temel çözüm bir optimal çözümdür. K boş olmayan ve sınırlı ise optimal çözüm her zaman vardır.*

> ***İspat.***
> *Teorem 3.4 teoremine göre optimal çözüm varsa uygun temel çözümlerden biri optimaldir. Uygun temel çözümlerin her biri bir uygun çözüm olduğu için hiçbiri optimumdan daha iyi bir değer veremez. O halde uygun temel çözümler arasında en iyi z değerini veren, bütün K üzerinde de en iyisidir. Uygun temel çözümlerin sayısı Sonuç 3.3 ispatındaki sayma gereği en fazla $\binom{n}{m}$'dir. K boş olmayan ve sınırlı ise Teorem 3.1 optimumun var olduğunu da garanti eder.*
> ■

Bu sonuç çizim yapamadığımız problemlerde de işe yarar. Ama optimumun **var olduğunu** bilmeden tarama yapmak yanıltıcıdır: uygun bölge sınırsızsa amaç fonksiyonu sınırsız büyüyebilir ve köşelerdeki en iyi değer optimum olmaz (bkz. Örnek 3.11). Bir de tarama sayısı hızla büyür: 10 denklem ve 20 değişkenli bir problemde $\binom{20}{10} = 184\,756$ baz adayı vardır. Simpleks yöntem bütün adaylara bakmak yerine uygun temel çözümden daha iyi bir komşu uygun temel çözüme geçerek ilerler.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 3.5 (Dört değişkenli bir problemde tarama). Aşağıdaki problemi bütün temel çözümleri hesaplayarak çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,4} \\ \min z &= x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Çözüm.
Problem standart formdadır: iki kısıt da eşitliktir, sağ taraflar 4 ve 2 negatif değildir ve bütün değişkenler ≥ 0'dır. $m = 2$, $n = 4$ olduğundan $\binom{4}{2} = 6$ baz adayı vardır. Sütunlar

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve her ikilinin determinantı sıfırdan farklıdır (-3, -1, -3, 2, 3, -1); altı adayın hepsi bazdır.
Optimumun var olduğunu önceden bilebiliriz: birinci denklemin bütün katsayıları pozitiftir, bu yüzden her uygun çözümde $0 \leq x_j \leq 4$'tür ve K sınırlıdır. K boş da değildir (örneğin $(2, 2, 0, 0)$ uygundur). Sonuç 3.4 gereği optimal çözüm uygun temel çözümlerden biridir.
Her baz için temel olmayan iki değişkene sıfır verip 2×2 sistemi çözelim:

- $\boldsymbol{\{x_1, x_2\}}$: $x_1 + x_2 = 4$, $2x_1 - x_2 = 2$. Toplarsak $3x_1 = 6$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2$.
- $\boldsymbol{\{x_1, x_3\}}$: $x_1 + x_3 = 4$, $2x_1 + x_3 = 2$. Çıkarırsak $x_1 = -2$, $x_3 = 6$.
- $\boldsymbol{\{x_1, x_4\}}$: $x_1 + 2x_4 = 4$, $2x_1 + x_4 = 2$. İkincinin iki katından birinciyi çıkarırsak $3x_1 = 0$, $x_1 = 0$, $x_4 = 2$.
- $\boldsymbol{\{x_2, x_3\}}$: $x_2 + x_3 = 4$, $-x_2 + x_3 = 2$. Toplarsak $2x_3 = 6$, $x_3 = 3$, $x_2 = 1$.
- $\boldsymbol{\{x_2, x_4\}}$: $x_2 + 2x_4 = 4$, $-x_2 + x_4 = 2$. Toplarsak $3x_4 = 6$, $x_4 = 2$, $x_2 = 0$.
- $\boldsymbol{\{x_3, x_4\}}$: $x_3 + 2x_4 = 4$, $x_3 + x_4 = 2$. Çıkarırsak $x_4 = 2$, $x_3 = 0$.

Tablo 3.2: Dört değişkenli problemin temel çözümleri

Baz	(x_1, x_2, x_3, x_4)	Uygun mu?	z
$\{x_1, x_2\}$	$(2, 2, 0, 0)$	evet	6
$\{x_1, x_3\}$	$(-2, 0, 6, 0)$	hayır ($x_1 < 0$)	—
$\{x_1, x_4\}$	$(0, 0, 0, 2)$	evet, dejenere	2
$\{x_2, x_3\}$	$(0, 1, 3, 0)$	evet	-1
$\{x_2, x_4\}$	$(0, 0, 0, 2)$	evet, dejenere	2
$\{x_3, x_4\}$	$(0, 0, 0, 2)$	evet, dejenere	2

Uygun temel çözümlerin z değerleri 6, 2 ve -1'dir. En küçüğü -1'dir: optimal çözüm $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$ ve $\min z = -1$'dir. Uygun olmayan $(-2, 0, 6, 0)$ temel çözümünde $z = -2 - 6 = -8$ olurdu; bu değer optimumdan küçüktür ama bir uygun çözüme ait olmadığı için hesaba katılmaz.
Tabloda ilginç bir şey var: altı bazdan üçü aynı $(0, 0, 0, 2)$ noktasını veriyor. Bu noktada yalnız bir bileşen pozitiftir ($x_4 = 2$), yani $m = 2$'den az; nokta dejenere bir uygun temel çözümdür (Tanım 2.6). x_4'ün yanında bazda sıfır değerli bir değişken daha bulunur; bu değişken x_1, x_2 ya da x_3 olabildiği için üç farklı baz aynı noktayı verir. Böylece K'nın beş değil yalnız **üç** uç noktası vardır: $(2, 2, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 2)$ ve $(0, 1, 3, 0)$.
Sonucu bağımsız olarak doğrulayalım. İki denklemi toplarsak $3x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6$, buradan $x_3 = 3 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4$ çıkar. Bunu birinci denklemde yerine koyarsak $x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4$ bulunur. Amaç fonksiyonunda yerine yazarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} z &= x_1 + 2\left(1 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4\right) - \left(3 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4\right) + x_4 \\ &= -1 + \frac{7}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 \end{aligned}$$

olur. $x_1, x_4 \geq 0$ olduğundan her uygun çözümde $z \geq -1$'dir ve eşitlik ancak $x_1 = x_4 = 0$ iken, yani $(0, 1, 3, 0)$ noktasında sağlanır. Amaç fonksiyonunu temel olmayan değişkenler cinsinden yazıp katsayılarının işaretine bakmak, simpleks yöntemin optimallik testinin özüdür.
■

3.3 Grafik Yöntem

İki değişkenli problemler basit bir şekilde grafik yöntemle çözülebilir. Bu durumda her kısıt düzlemde bir yarı düzlem ya da bir doğru belirtir, uygun çözümler kümesi K bu yarı düzlemlerin kesişimi olan konveks bir çokgensel bölgedir ve uç noktalar bu bölgenin köşeleridir. Amaç fonksiyonunun davranışını anlamak için önce onun sabit değer aldığı noktalara bakalım.

Tanım 3.1 (Seviye doğrusu). $z = c_1x_1 + c_2x_2$ amaç fonksiyonu ve bir k sayısı için $c_1x_1 + c_2x_2 = k$ doğrusuna amaç fonksiyonunun ***k* seviye doğrusu** denir. Amaç katsayılarından oluşan $\vec{c} = (c_1, c_2)$ vektörü z'nin **gradyanıdır**: $\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right) = (c_1, c_2)$.

Yani z bir parametre olarak düşünülürse $z = c_1x_1 + c_2x_2$ denklemi bir doğru ailesi belirtir. z'nin her değerine bu ailenin tek bir doğrusu, ailenin her doğrusuna da z'nin tek bir değeri karşılık gelir. Aynı seviye doğrusu üzerindeki bütün noktalarda amaç fonksiyonu aynı değeri alır. Önemli olan, doğru hangi yönde ötelenirse z'nin artacağını belirlemektir.

Önerme 3.1 (Seviye doğruları ve gradyan). *$\vec{c} = (c_1, c_2) \neq 0$ olsun.*

1. *Bütün seviye doğruları birbirine paraleldir ve $\vec{c}$ vektörüne diktir.*
2. *Her X noktası ve her $t > 0$ için $z(X + t\vec{c}) > z(X)$'tir. Yani z, gradyan yönünde ilerledikçe artar, gradyanın zıt yönünde ilerledikçe azalır.*

İspat.
1. *k seviye doğrusu üzerinde iki nokta $X = (x_1, x_2)$ ve $Y = (y_1, y_2)$ olsun. $c_1x_1 + c_2x_2 = k$ ve $c_1y_1 + c_2y_2 = k$ eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak*

$$c_1(x_1 - y_1) + c_2(x_2 - y_2) = 0$$

olur; yani doğrunun doğrultusu olan $X - Y$ vektörü ile $\vec{c}$'nin iç çarpımı sıfırdır. Her seviye doğrusu $\vec{c}$'ye dik olduğundan hepsi aynı doğrultudadır, yani birbirine paraleldir. Farklı k değerleri için doğrular ortak nokta içermez; çünkü bir noktada z tek bir değer alır.
2. *$X = (x_1, x_2)$ için*

$$\begin{aligned} z(X + t\vec{c}) &= c_1(x_1 + tc_1) + c_2(x_2 + tc_2) \\ &= z(X) + t(c_1^2 + c_2^2) \end{aligned}$$

olur. $\vec{c} \neq 0$ olduğundan $c_1^2 + c_2^2 > 0$'dır; $t > 0$ için z artar, $t < 0$ için (zıt yönde) azalır.
■

Yani bir seviye doğrusunu kendine paralel olarak gradyan yönünde kaydırdıkça z büyür. Maksimum probleminde amaç fonksiyonu optimum değerini konveks bölgenin bir uç noktasında alır ve bu noktaya gradyan yönünde ilerleyerek varılır: seviye doğrusu, uygun bölgeyle ortak noktası kalacak şekilde gradyan yönünde olabildiğince kaydırılır ve bölgeye son değdiği nokta optimaldir. Minimum probleminde optimum değere gradyanın zıt yönünde ilerleyerek varılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Beş adımda grafik yöntem

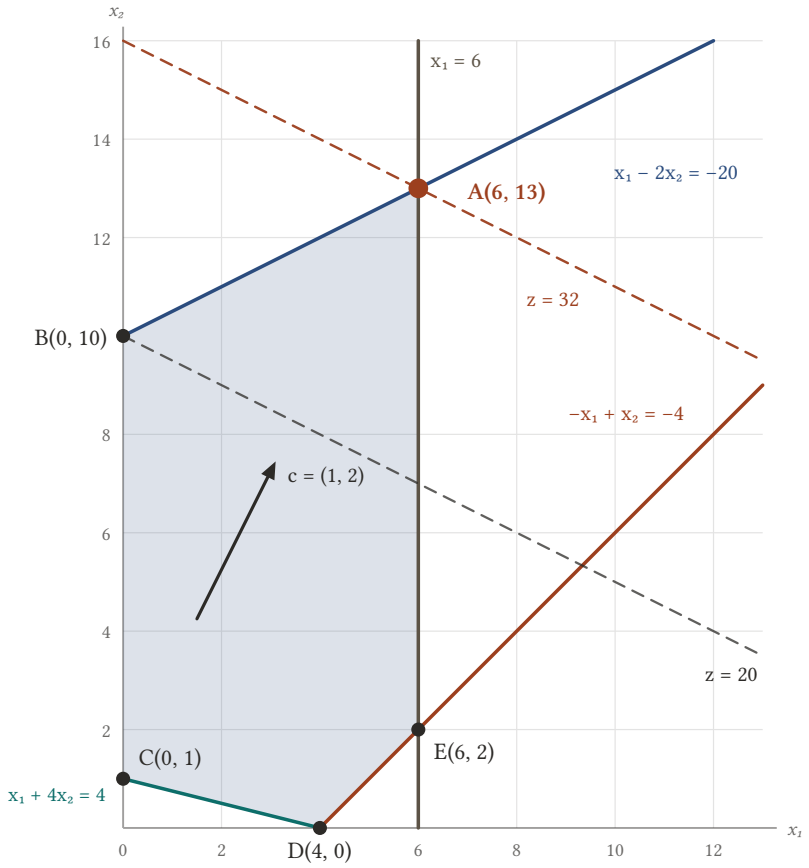
1. **Kısıt doğrularını çiz.** Her kısıtı eşitlik olarak yaz ve doğruyu iki noktasından (çoğunlukla eksenleri kestiği noktalardan) çiz.
2. **Yarı düzlemi test noktasıyla belirle.** Doğru üzerinde olmayan bir nokta (çoğunlukla $O(0,0)$) kısıtı sağlıyorsa o noktanın bulunduğu tarafı, sağlamıyorsa öbür tarafı al. $x_1, x_2 \geq 0$ koşulları birinci bölgeyi verir.
3. **Uygun bölgeyi bul.** Uygun bölge bütün yarı düzlemlerin kesişimidir. Kesişim boşsa problemin uygun çözümü yoktur.
4. **Köşe noktalarını hesapla.** Her köşe iki kısıt doğrusunun kesişimidir: iki denklemli sistemi çöz ve bulunan noktanın diğer kısıtları sağladığını kontrol et.
5. **Optimumu bul.** Bir seviye doğrusu çiz ve onu maksimum probleminde gradyan $\vec{c}$ yönünde, minimum probleminde $-\vec{c}$ yönünde, bölgeyle ortak noktası kalana kadar kaydır; bölgeye son değdiği köşe optimaldir. Ya da köşelerde z değerlerini hesaplayıp karşılaştır; bu karşılaştırma optimum varken geçerlidir, bölge sınırsızsa önce seviye doğrusuyla optimumun var olduğunu gör.

Örnek 3.6 (Grafik yöntemle bir maksimum problemi). Aşağıdaki problemin grafik çözümünü bulunuz.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 4 &\geq 0 \\ -x_1 + x_2 + 4 &\geq 0 \\ x_1 - 6 &\leq 0 \\ x_1 - 2x_2 + 20 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.5: Uygun bölge ABCDE beşgenidir. Kesikli doğrular z = $x_1 + 2x_2$ amaç fonksiyonunun z = 20 ve z = 32 seviye doğrularıdır; ok gradyan yönünü gösterir. Seviye doğrusu gradyan yönünde kaydırıldığında bölgeden en son A(6, 13) köşesinde ayrılır: max z = 32.

Sabitleri sağa alırsak kısıtlar $x_1 + 4x_2 \geq 4$, $-x_1 + x_2 \geq -4$, $x_1 \leq 6$ ve $x_1 - 2x_2 \geq -20$ olur.
1–2. Kısıt doğruları ve yarı düzlemler. Her doğruyu iki noktasından çizip $O(0,0)$ test noktasını yerine koyalım:

- $x_1 + 4x_2 = 4$ doğrusu $(4,0)$ ve $(0,1)$'den geçer. O'da $0 \geq 4$ yanlıştır; uygun taraf O'nun **karşı** tarafıdır.
- $-x_1 + x_2 = -4$ doğrusu $(4,0)$ ve $(6,2)$'den geçer. O'da $0 \geq -4$ doğrudur; uygun taraf O'nun bulunduğu taraftır.
- $x_1 = 6$ düşey doğrusu için O'da $0 \leq 6$ doğrudur; uygun taraf doğrunun solu.
- $x_1 - 2x_2 = -20$ doğrusu $(0,10)$ ve $(6,13)$'ten geçer. O'da $0 \geq -20$ doğrudur; uygun taraf O'nun bulunduğu taraftır.

3. Uygun bölge. Bu yarı düzlemlerin birinci bölgedeki kesişimi $ABCDE$ beşgenidir.
4. Köşeler. Her köşe iki doğrunun kesişimidir:

- A: $x_1 = 6$ ve $x_1 - 2x_2 = -20$; $2x_2 = 26$, $A(6,13)$.
- B: $x_1 = 0$ ve $x_1 - 2x_2 = -20$; $x_2 = 10$, $B(0,10)$.
- C: $x_1 = 0$ ve $x_1 + 4x_2 = 4$; $x_2 = 1$, $C(0,1)$.
- D: $x_2 = 0$ ve $x_1 + 4x_2 = 4$; $x_1 = 4$, $D(4,0)$.
- E: $x_1 = 6$ ve $-x_1 + x_2 = -4$; $x_2 = 2$, $E(6,2)$.

Her köşenin diğer kısıtları sağladığını kontrol edelim. Örneğin $A(6,13)$ için $6 + 52 = 58 \geq 4$ ve $-6 + 13 = 7 \geq -4$; $E(6,2)$ için $6 + 8 = 14 \geq 4$ ve $6 - 4 = 2 \geq -20$'dir. Diğer köşeler de aynı biçimde bütün kısıtları sağlar.

 CC BY-NC-SA 4.0

5. Optimum. z bir parametre olarak düşünülürse $x_1 + 2x_2 = z$ paralel bir doğru ailesidir ve gradyan $\vec{c} = (1, 2)$'dir. Amaç maksimum olduğundan seviye doğrusunu $\vec{c}$ yönünde, yani sağ yukarıya doğru kaydırırız. Örneğin B'den geçen $z = 20$ seviye doğrusu bölgeyi keser; bölgenin bu doğrunun üstünde kalan kısmında z daha büyüktür. Doğruyu kaydırmaya devam edince bölgeden en son $A(6, 13)$ köşesinde ayrılır: A'dan geçen $z = 32$ seviye doğrusunun üstünde bölgenin hiçbir noktası yoktur.
Aynı sonucu köşe tablosuyla da görebiliriz (bölge sınırlı olduğu için Sonuç 3.1 geçerlidir):

Tablo 3.3: Grafik örneğinde köşelerdeki amaç değerleri

Köşe	$A(6,13)$	$B(0,10)$	$C(0,1)$	$D(4,0)$	$E(6,2)$
$z = x_1 + 2x_2$	32	20	2	4	10

Bütün kısıtların sağlandığı $A(6, 13)$ noktasından geçen $z = x_1 + 2x_2$ doğrusunda amaç fonksiyonu maksimum değerini alır. Optimal çözüm $x_1 = 6$, $x_2 = 13$ ve $\max z = 32$'dir.
$D(4, 0)$ köşesinde ilginç bir şey olur: $-x_1 + x_2 = -4$ doğrusu da bu noktadan geçer. Yani D'de üç doğru ($x_2 = 0$, $x_1 + 4x_2 = 4$, $-x_1 + x_2 = -4$) kesişir. Problemi standart forma getirelim: birinci kısıttan x_3 artık değişkenini çıkarırız; ikinci kısıtın sağ tarafı negatif olduğu için önce -1 ile çarparız ($x_1 - x_2 \le 4$) ve x_4 aylak değişkenini ekleriz; üçüncüye x_5 aylak değişkenini ekleriz; dördüncüyü -1 ile çarparız ($-x_1 + 2x_2 \le 20$) ve x_6 aylak değişkenini ekleriz:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_5 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_6 &= 20 \\ x_j \ge 0, \quad j &= \overline{1,6} \\ \max z &= x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \end{aligned}$$

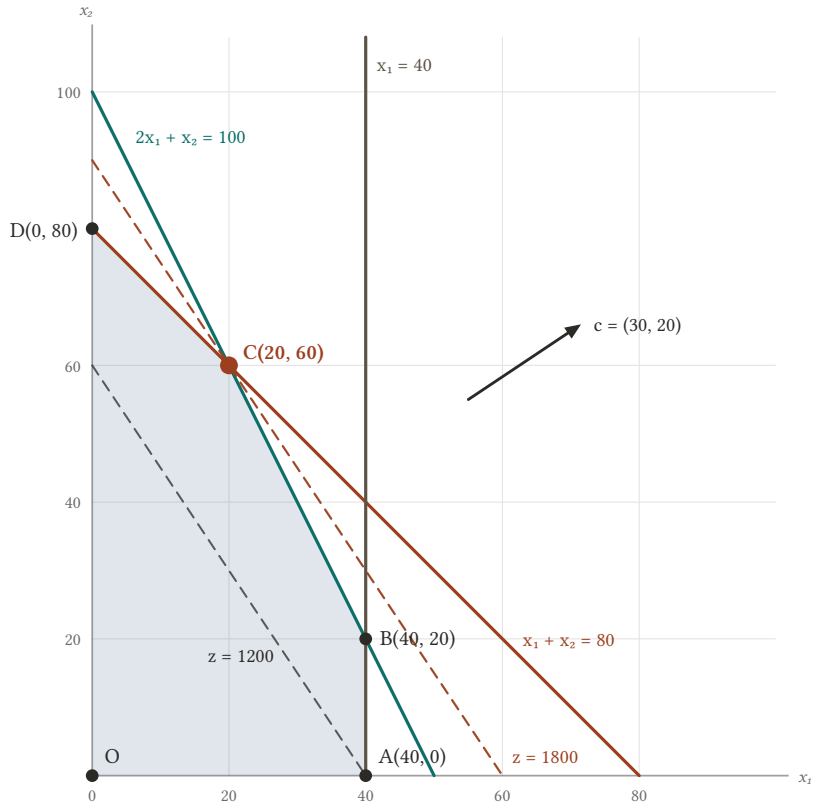
Burada $m = 4$'tür. $A(6, 13)$'te $x_3 = 54$, $x_4 = 11$, $x_5 = x_6 = 0$ olur ve tam dört bileşen pozitiftir (x_1, x_2, x_3, x_4). $D(4, 0)$'da ise $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 2$, $x_6 = 24$ olur: yalnız üç bileşen (x_1, x_5, x_6) pozitiftir. D bir dejenere uygun temel çözümdür (Tanım 2.6). Düzlemde dejenerelik, bir köşeden gereğinden fazla kısıt doğrusunun geçmesi olarak görünür.
■

Reçeteyi bir kez daha, bu kez ilk bölümde kurduğumuz üretim modelinde uygulayalım.

Örnek 3.7 (Üretim planlamasının grafik çözümü). Örnek 1.3 modelini ($2x_1 + x_2 \le 100$, $x_1 + x_2 \le 80$, $x_1 \le 40$, $x_1, x_2 \ge 0$, $\max z = 30x_1 + 20x_2$) grafik yöntemle çözünüz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.6: Üretim modelinin uygun bölgesi OABCD. $z = 30x_1 + 20x_2$ seviye doğruları gradyan yönünde kaydırıldığında bölgeden en son C(20, 60) köşesinde ayrılır: 20 masa ve 60 sandalye ile max z = 1800 TL.

Kısıt doğruları. $2x_1 + x_2 = 100$ doğrusu $(50, 0)$ ve $(0, 100)$'den, $x_1 + x_2 = 80$ doğrusu $(80, 0)$ ve $(0, 80)$'den geçer; $x_1 = 40$ düşey bir doğrudur. $O(0, 0)$ üç kısıtı da sağlar ($0 \le 100$, $0 \le 80$, $0 \le 40$); uygun taraflar hep O'nun bulunduğu taraftır.
Uygun bölge ve köşeler. Uygun bölge $OABCD$ beşgenidir:

- $O(0, 0)$;
- A: $x_2 = 0$ ve $x_1 = 40$; $A(40, 0)$;
- B: $x_1 = 40$ ve $2x_1 + x_2 = 100$; $x_2 = 20$, $B(40, 20)$. Kontrol: $40 + 20 = 60 \le 80$;
- C: $2x_1 + x_2 = 100$ ve $x_1 + x_2 = 80$; çıkarırsak $x_1 = 20$, $x_2 = 60$, $C(20, 60)$. Kontrol: $20 \le 40$;
- D: $x_1 = 0$ ve $x_1 + x_2 = 80$; $D(0, 80)$. Kontrol: $0 + 80 = 80 \le 100$.

Optimum. Gradyan $\vec{c} = (30, 20)$'dir. Örneğin $z = 1200$ seviye doğrusu $(40, 0)$ ve $(0, 60)$'tan geçer. Doğruyu $\vec{c}$ yönünde kaydırdıkça z artar; bölgeden en son $C(20, 60)$ köşesinde ayrılır. C'den geçen seviye doğrusu $30x_1 + 20x_2 = 1800$'dür. Köşe değerleri de bunu doğrular:

Tablo 3.4: Üretim modelinde köşelerdeki amaç değerleri

Köşe	O	$A(40, 0)$	$B(40, 20)$	$C(20, 60)$	$D(0, 80)$
$z = 30x_1 + 20x_2$	0	1200	1600	1800	1600

Optimal plan haftada $x_1 = 20$ masa ve $x_2 = 60$ sandalye üretmektir; en büyük kâr $\max z = 1800$ TL'dir. Bu planda işçilik ($2 \cdot 20 + 60 = 100$ saat) ve ahşap ($20 + 60 = 80$ birim) tamamen kullanılır, masa talebinden ise $40 - 20 = 20$ masalık pay boşta kalır. Yani optimal köşede sıfır olan aylak değişkenler işçilik ve ahşap kısıtlarınınkilerdir.
■

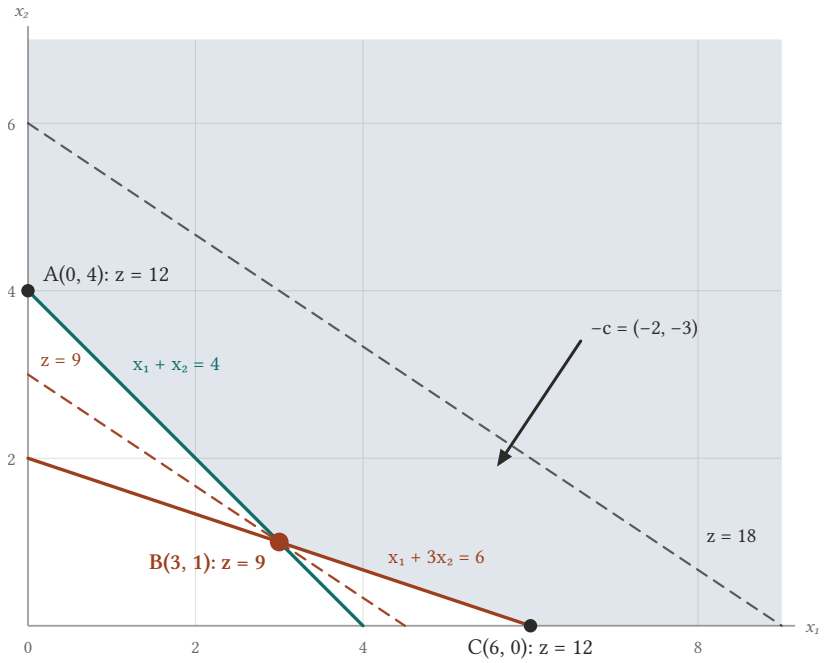
 CC BY-NC-SA 4.0

Minimum problemlerinde de aynı reçete geçerlidir; yalnız seviye doğrusu gradyanın zıt yönünde kaydırılır. $\geq$ kısıtlı minimum problemlerinde uygun bölge çoğu zaman sınırsızdır; bu durumda köşe tablosunu kullanmadan önce optimumun var olduğunu görmek gerekir.

Örnek 3.8 (Sınırsız bölgede bir minimum problemi). Örnek 1.10 diyetinin modelini grafik yöntemle çözünüz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.



Şekil 3.7: Uygun bölge sağa ve yukarı doğru sınırsızdır. Minimum problemi olduğu için $z = 2x_1 + 3x_2$ seviye doğrusu gradyanın tersi yönünde kaydırılır; bölgeye son dokunduğu nokta B(3, 1) köşesidir: min $z = 9$.

Kısıt doğruları ve yarı düzlemler. $x_1 + x_2 = 4$ doğrusu $(4, 0)$ ve $(0, 4)$'ten, $x_1 + 3x_2 = 6$ doğrusu $(6, 0)$ ve $(0, 2)$'den geçer. $O(0, 0)$ iki kısıtı da sağlamaz ($0 \geq 4$ ve $0 \geq 6$ yanlıştır); uygun taraflar O'nun karşı taraflarıdır. Uygun bölge iki doğrunun "üstünde" kalan ve sağa, yukarı doğru sınırsız uzanan bölgedir.

Köşeler.

- A: $x_1 = 0$ ve $x_1 + x_2 = 4$; $A(0, 4)$. Kontrol: $0 + 12 = 12 \geq 6$.
- B: iki kısıt doğrusunun kesişimi. İkinci denklemden birinciyi çıkarırsak $2x_2 = 2$, $x_2 = 1$ ve $x_1 = 3$; $B(3, 1)$.
- C: $x_2 = 0$ ve $x_1 + 3x_2 = 6$; $C(6, 0)$. Kontrol: $6 + 0 = 6 \geq 4$.

Diğer kesişimler uygun değildir: $(0, 2)$'de $0 + 2 = 2 < 4$, $(4, 0)$'da $4 + 0 = 4 < 6$ olur.

Optimumun varlığı. Gradyan $\vec{c} = (2, 3)$'tür; minimum problemi olduğu için seviye doğrusunu $-\vec{c}$ yönünde, yani sol aşağıya doğru kaydırırız. Örneğin $z = 18$ seviye doğrusu bölgeyi keser. Doğru aşağı indikçe z azalır ve doğru bölgeye en son $B(3, 1)$ köşesinde değer; $z = 9$ seviye doğrusunun altında bölgenin hiçbir noktası yoktur. Bölge sınırsız olduğu halde minimum vardır, çünkü z uygun bölge üzerinde alttan sınırlıdır; bunu şimdi kesin olarak gösterelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bunu kesin olarak da görebiliriz. Amaç fonksiyonu, iki kısıtın sol taraflarının pozitif katsayılı bir birleşimidir:

$$2x_1 + 3x_2 = \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2) \geq \frac{3}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 9.$$

Yani her uygun noktada $z \geq 9$'dur ve B'de $z = 9$'dur.
Köşe tablosuyla karşılaştırma. Optimumun var olduğunu bildiğimiz için köşelerdeki değerleri karşılaştırabiliriz:

Tablo 3.5: Diyet probleminde köşelerdeki amaç değerleri

Köşe	$A(0,4)$	$B(3,1)$	$C(6,0)$
$z = 2x_1 + 3x_2$	12	9	12

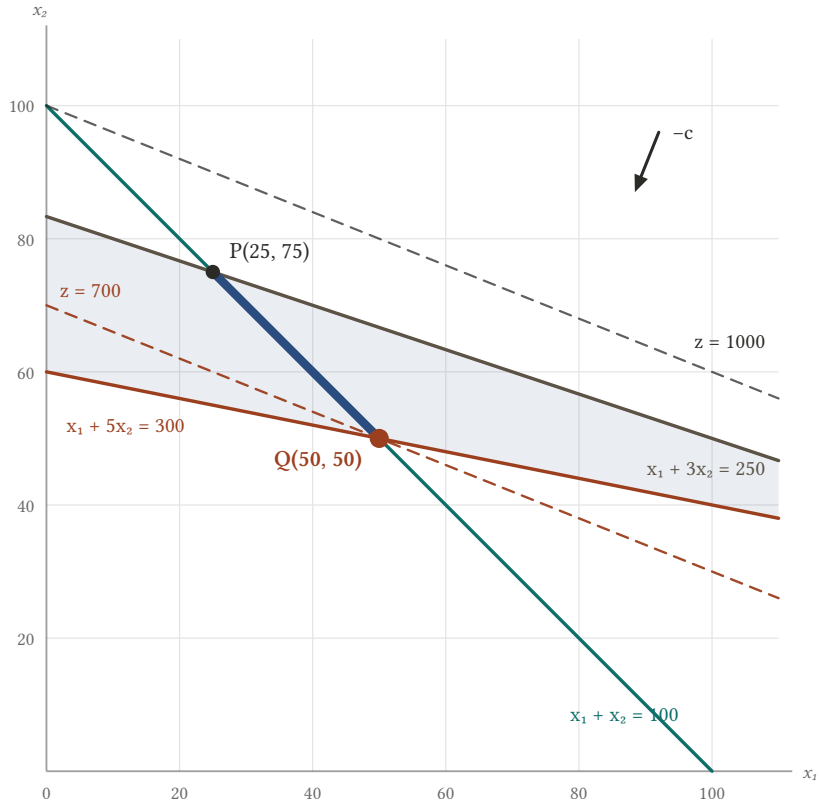
En küçük değer B'dedir: optimal diyet $x_1 = 3$ kg B_1 ve $x_2 = 1$ kg B_2 besinidir, en düşük maliyet $\min z = 9$ TL'dir.
Aynı bölgede amaç **maksimum** yapılmak istenseydi optimum olmazdı: $x_2 = 0$, $x_1 = s \geq 6$ noktaları uygundur ve bu noktalarda $z = 2s$ istenildiği kadar büyür. Köşelerdeki en büyük değer olan 12 o durumda bir anlam taşımazdı.
■

Örnek 3.9 (Eşitlik kısıtlı karışım problemi). Örnek 1.4 yem karışımı modelini grafik yöntemle çözünüz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 100 \\ x_1 + 5x_2 &\geq 300 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 250 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 4x_1 + 10x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.8: Karışım probleminde eşitlik kısıtı yüzünden uygun çözümler $x_1 + x_2 = 100$ doğrusunun kalın çizilen PQ parçasıdır; açık boyalı bant iki eşitsizliğin ortak bölgesidir. Uç noktalar P ve Q'dur. $z = 4x_1 + 10x_2$ seviye doğrusu gradyanın tersi yönünde kaydırıldığında parçadan en son Q(50, 50) noktasında ayrılır: min z = 700.

Eşitlik kısıtı bir yarı düzlem değil, bir doğru verir: uygun çözümler $x_1 + x_2 = 100$ doğrusunun üzerindedir. Diğer iki kısıt bu doğrudan bir parça keser.
Doğru üzerinde $x_2 = 100 - x_1$ yazalım. İkinci kısıt

$$x_1 + 5(100 - x_1) \geq 300 \Leftrightarrow 500 - 4x_1 \geq 300 \Leftrightarrow x_1 \leq 50,$$

üçüncü kısıt

$$x_1 + 3(100 - x_1) \leq 250 \Leftrightarrow 300 - 2x_1 \leq 250 \Leftrightarrow x_1 \geq 25$$

olur. $x_1 \geq 0$ ve $x_2 = 100 - x_1 \geq 0$ koşulları bu aralıkta zaten sağlanır. Demek ki uygun bölge, uç noktaları $P(25, 75)$ ve $Q(50, 50)$ olan PQ doğru parçasıdır. P, eşitlik doğrusu ile $x_1 + 3x_2 = 250$ doğrusunun; Q ise eşitlik doğrusu ile $x_1 + 5x_2 = 300$ doğrusunun kesişimidir.
Uygun bölge sınırlıdır; Sonuç 3.1 gereği iki uç noktaya bakmak yeter:

$$z(P) = 100 + 750 = 850, \qquad z(Q) = 200 + 500 = 700.$$

Minimum Q'dadır: $x_1 = 50$ kg mısır, $x_2 = 50$ kg soya küspesi ve $\min z = 700$ TL. Gradyan $\vec{c} = (4, 10)$'dur; seviye doğrusu $-\vec{c}$ yönünde kaydırılınca parçadan en son Q'da ayrılır. Bunu doğrudan da görebiliriz: doğru üzerinde $z = 4x_1 + 10(100 - x_1)$, yani $z = 1000 - 6x_1$'dir ve x_1 büyüdükçe azalır; x_1'in alabileceği en büyük değer 50 olduğundan en küçük maliyet $1000 - 300 = 700$ TL'dir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

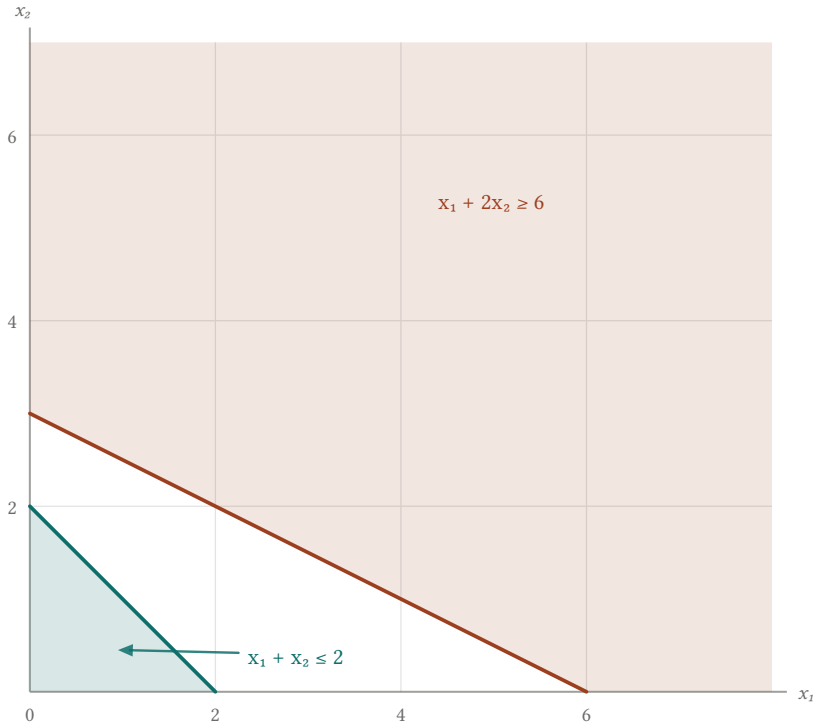
3.4 Özel Durumlar

Şimdiye kadarki örneklerin hepsinde tek bir optimal köşe ya da bir optimal kenar bulduk. Grafik yöntem, bir problemin optimal çözümünün hiç olmayabileceğini ya da sonsuz çok olabileceğini de gözle gösterir. Üç durumu kısaca görelim; bunların simpleks tablosunda nasıl tanındığı Sınırsız çözüm ve alternatif optimal çözüm bölümünün konusudur.

Örnek 3.10 (Uygun çözümü olmayan problem). Aşağıdaki problemi grafik yöntemle inceleyiniz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.



Şekil 3.9: $x_1 + x_2 \leq 2$ kısıtının bölgesi (alttaki üçgen) ile $x_1 + 2x_2 \geq 6$ kısıtının bölgesi birinci bölgede ortak nokta içermez. Uygun çözüm yoktur; bu yüzden optimal çözüm de yoktur.

$x_1 + x_2 = 2$ doğrusu $(2, 0)$ ve $(0, 2)$'den geçer; O birinci kısıtı sağladığı için uygun taraf alttaki üçgendir. $x_1 + 2x_2 = 6$ doğrusu $(6, 0)$ ve $(0, 3)$'ten geçer; O ikinci kısıtı sağlamadığı için uygun taraf doğrunun üstüdür. Birinci bölgede bu iki bölgenin ortak noktası yoktur: üçgenin bütün noktaları ikinci doğrunun altında kalır.

Bunu cebirle de gösterelim. $x_1, x_2 \geq 0$ ve $x_1 + x_2 \leq 2$ ise $x_2 \leq x_1 + x_2 \leq 2$'dir. O halde

$$x_1 + 2x_2 = (x_1 + x_2) + x_2 \leq 2 + 2 = 4 < 6$$

olur ve ikinci kısıt sağlanamaz. Uygun çözümler kümesi boştur: $K = \varnothing$. Uygun çözüm olmadığı için optimal çözüm de yoktur; amaç fonksiyonunun ne olduğu hiç önemli değildir. İki doğru aslında $(-2, 4)$ noktasında kesişir; işaret koşulları olmasaydı uygun çözüm bulunurdu. Demek ki $x_1, x_2 \geq 0$ koşulları da kısıtlar kadar önemlidir.

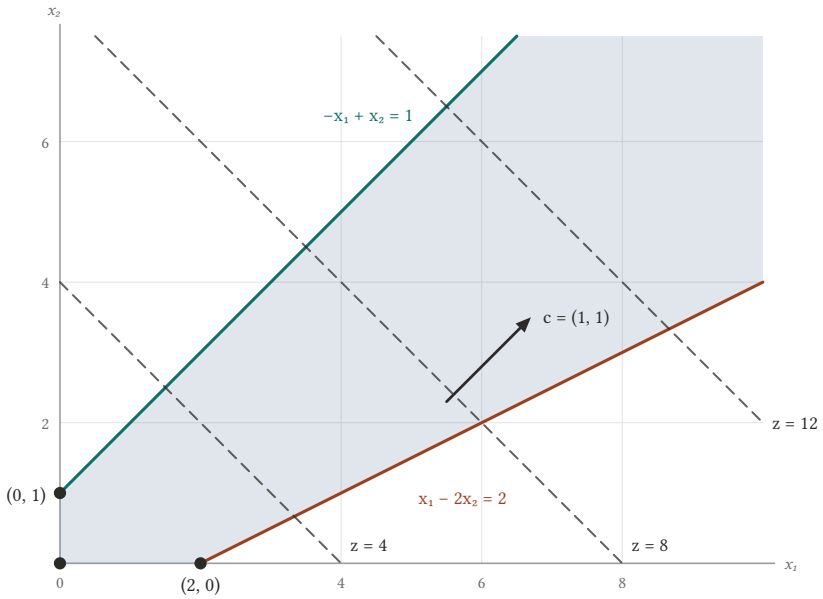
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 3.11 (Sınırsız problem). Aşağıdaki problemi grafik yöntemle inceleyiniz.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.



Şekil 3.10: Uygun bölge sağ yukarı doğru sınırsızdır ve $z = x_1 + x_2$ seviye doğruları gradyan yönünde ne kadar kaydırılırsa kaydırılsın bölgeyi kesmeye devam eder. z istenildiği kadar büyür; maksimum yoktur.

$-x_1 + x_2 = 1$ doğrusu $(0,1)$ ve $(1,2)$'den, $x_1 - 2x_2 = 2$ doğrusu $(2,0)$ ve $(4,1)$'den geçer. $O(0,0)$ iki kısıtı da sağlar; uygun bölge iki doğrunun arasında kalan ve sağ yukarı doğru sınırsız uzanan bölgedir. Köşeleri $(0,0)$, $(0,1)$ ve $(2,0)$'dır.
Gradyan $\vec{c} = (1,1)$'dir. Seviye doğrusunu $\vec{c}$ yönünde ne kadar kaydırırsak kaydıralım bölgeyi kesmeye devam eder. Bunu bir ışın üzerinde görelim: $t \geq 0$ için $(2+2t, t)$ noktası

$$-(2+2t) + t = -2 - t \leq 1, \qquad (2+2t) - 2t = 2 \leq 2$$

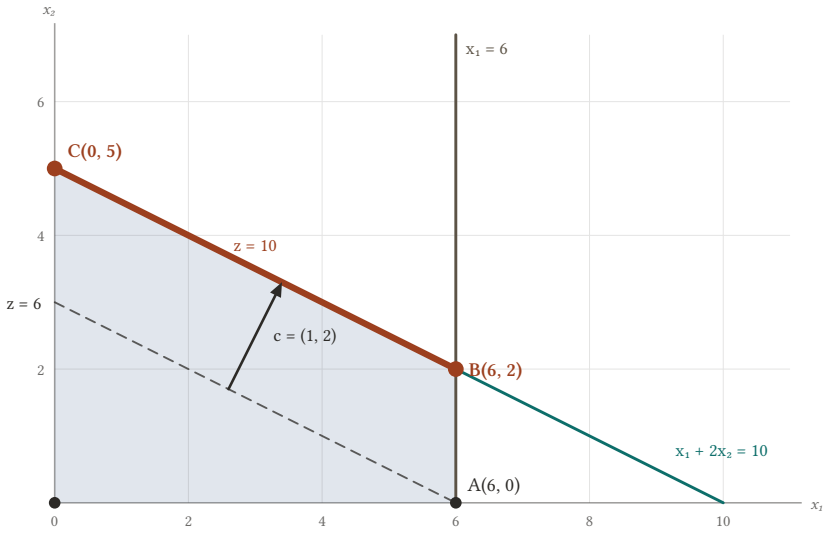
olduğundan uygundur ve bu noktada $z = 2 + 3t$'dir. t büyüdükçe z sınırsız büyür; maksimum yoktur. Bu tür bir probleme **sınırsız problem** denir.
Köşelerdeki değerler 0, 1 ve 2'dir. Köşe tablosuna bakıp "$\max z = 2$" demek yanlış olurdu; çünkü optimum hiç yoktur. Bu yüzden sınırsız bölgelerde köşeleri karşılaştırmadan önce optimumun var olduğunu seviye doğrularıyla görmek gerekir. Aynı bölgede $\min z$ istenseydi ise optimum vardı: her uygun noktada $z = x_1 + x_2 \geq 0$'dır ve $z(0,0) = 0$'dır.
■

Örnek 3.12 (Sonsuz çok optimal çözüm). Aşağıdaki problemi grafik yöntemle çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.



Şekil 3.11: Amaç doğrusu $z = x_1 + 2x_2$, $x_1 + 2x_2 = 10$ kısıtına paraleldir. Seviye doğrusu kaydırıldığında bölgeden bir köşede değil, BC kenarının tamamı boyunca ayrılır; BC üzerindeki her nokta max $z = 10$ veren bir optimal çözümdür.

$x_1 + 2x_2 = 10$ doğrusu $(10, 0)$ ve $(0, 5)$'ten geçer, $x_1 = 6$ düşey doğrudur; O iki kısıtı da sağlar. Uygun bölge köşeleri

$$O(0,0), \quad A(6,0), \quad B(6,2), \quad C(0,5)$$

olan dörtgendir; B, $x_1 = 6$ ile $x_1 + 2x_2 = 10$ doğrularının kesişimidir ($2x_2 = 4$). Köşelerde z değerleri 0, 6, 10, 10'dur.
Gradyan $\vec{c} = (1, 2)$'dir ve seviye doğruları $x_1 + 2x_2 = 10$ kısıt doğrusuna paraleldir. Seviye doğrusu $\vec{c}$ yönünde kaydırılınca bölgeden bir köşede değil, BC kenarının tamamı boyunca ayrılır. Teorem 3.1 teoreminin ikinci kısmına göre B ile C'nin her konveks kombinasyonu optimaldir. Gerçekten $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\lambda B + (1 - \lambda)C = (6\lambda, 5 - 3\lambda)$$

noktasında $z = 6\lambda + 10 - 6\lambda = 10$'dur. Problemin sonsuz çok optimal çözümü vardır ve $\max z = 10$'dur. Optimal değer tektir; tek olmayan, bu değeri veren noktalardır. Böyle çözümlere **alternatif optimal çözümler** denir.
■

Bu bölümde amaç fonksiyonunun optimumunu, varsa, uygun bölgenin bir uç noktasında aldığını; uç noktaların da tam olarak uygun temel çözümler olduğunu gördük. İki değişkende uç noktalar köşelerdir ve grafik yöntemle bulunur. Daha büyük problemlerde ise bütün uygun temel çözümleri taramak çok pahalıdır. Bir sonraki bölümde, Simpleks yöntem bölümünde, bir uygun temel çözümden başlayıp amaç değerini iyileştiren komşu bir uygun temel çözüme geçen ve optimuma sonlu adımda ulaşan yöntemi kuracağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

4. Simpleks Yöntem

Uç noktalar ve grafik yöntem bölümünde iki önemli şey gördük: Optimal çözüm varsa uygun bölgenin bir uç noktasında bulunur, uç noktalar da uygun temel çözümlerdir. O hâlde bütün uygun temel çözümleri tek tek hesaplayıp amaç değerlerini karşılaştırmak ilk akla gelen yoldur. Ne var ki m kısıtlı, n değişkenli bir problemde baz adayı sayısı $\binom{n}{m}$'ye kadar çıkar; 10 kısıt ve 20 değişkenle bile bu 184 756 eder. Grafik yöntem ise yalnız iki değişkende işe yarar.
Simpleks yöntem daha akıllıca davranır. Bir uç noktadan başlar, amaç değerini iyileştiren **komşu** bir uç noktaya geçer ve iyileştirme mümkün olmadığı anda durur. Bu bölümde önce bu geçişin cebirini kuracağız: hangi vektör baza girer, hangisi çıkar, amaç değeri ne kadar değişir, ne zaman durulur. Sonra bütün bu hesapları tek bir tabloda, **simpleks tablosunda** toplayacağız.

4.1 Bir Uç Noktadan Komşu Uç Noktaya

Önce problemi vektör biçiminde yazalım; geçişin bütün cebiri bu yazımda görünür.
Katsayılar matrisinin j. sütununu v_j ile, sağ taraf vektörünü v_0 ile gösterelim. Standart formdaki (Tanım 1.7) bir minimum problemi o zaman şöyle yazılır:

$$\begin{aligned} x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n &= v_0 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,n} \\ \min z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \end{aligned}$$

Burada $j = \overline{1,n}$ yazımı "$j = 1, 2, \ldots, n$" demektir. $v_0, v_1, \ldots, v_n$ vektörlerinin her biri m bileşenlidir (m kısıt sayısı) ve katsayılar matrisinin rankı m'dir.
Bir uygun temel çözüm (Tanım 2.5) seçelim. Gösterimi sade tutmak için değişkenleri, bu çözümün baz vektörleri ilk m sütun olacak şekilde numaralandıralım:

$$B_0 = (v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots, v_m).$$

B_0 lineer bağımsızdır; buna **başlangıç bazı** diyoruz. Baz dışındaki $n - m$ değişken sıfırdır, dolayısıyla çözüm

$$X_0 = \big(\, x_1, x_2, \ldots, x_m, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-m \text{ tane}} \,\big)$$

biçimindedir. Baz değişkenlerinin bu çözümdeki değerlerini de $x_1, \ldots, x_m$ ile yazıyoruz; uygun çözüm olduğu için hepsi ≥ 0'dır. Kısıtlar ve amaç fonksiyonu bu çözümde

$$v_0 = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_mv_m \tag{1}$$

$$z_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m \tag{2}$$

şeklini alır. Uç noktalar uygun temel çözümlerdir; bu yüzden X_0'a **uç nokta çözümü** de diyeceğiz.

Tanım 4.1 (Komşu Uygun Temel Çözümler). Bazları yalnız bir vektörde farklı olan iki uygun temel çözüme **komşu** uygun temel çözümler denir. Yani bir bazdan komşu baza geçmek için bir vektör bazdan çıkarılır, yerine baz dışından bir vektör alınır.

Yani komşu çözümler "tek hamlede" birbirine ulaşılan çözümlerdir. İki değişkenli örneklerde göreceğimiz gibi komşu uç noktalar uygun bölgenin bir kenarının iki ucudur; simpleks yöntem de bölgenin kenarları boyunca köşeden köşeye yürür.

 CC BY-NC-SA 4.0

4.1.1 Baz Dışındaki Vektörlerin Katsayıları

B_0, m boyutlu uzayda m tane lineer bağımsız vektördür, yani uzayın bir tabanıdır. Her vektör bu tabanın vektörleri cinsinden tek bir şekilde yazılır; özellikle baz dışındaki her v_k $(k = m+1, ..., n)$ için

$$v_k = y_{1k}v_1 + y_{2k}v_2 + ... + y_{rk}v_r + ... + y_{mk}v_m \tag{3}$$

olacak şekilde tek türlü belirli $y_{1k}, ..., y_{mk}$ sayıları vardır.

Tanım 4.2 (Baza Göre Katsayılar). $B = (v_1, ..., v_m)$ bir baz olsun. Her $j = 0, 1, ..., n$ için

$$v_j = y_{1j}v_1 + y_{2j}v_2 + ... + y_{mj}v_m$$

eşitliğini sağlayan tek türlü belirli $y_{1j}, ..., y_{mj}$ sayılarına v_j vektörünün B bazına göre **katsayıları** denir. Bunları sütun olarak $\vec{y}_j = (y_{1j}, ..., y_{mj})^T$ ile gösteririz. $j = 0$ için $y_{i0} = x_i$ olur.

Yani y_{ij}, v_j'yi baz vektörlerinden "üretmek" için i. baz vektöründen ne kadar alınacağını söyler. İlk indis baz vektörünü, ikinci indis yazılan vektörü gösterir. $j = 0$ için bu yazım (1) eşitliğinin ta kendisidir; bu yüzden v_0'ın katsayıları uygun temel çözümün baz değişkenleridir.

Tanım 4.3 (z_j Değeri). $B = (v_1, ..., v_m)$ bazındaki değişkenlerin amaç katsayıları $\vec{c}_B = (c_1, ..., c_m)^T$ olsun. Her $j = 0, 1, ..., n$ için

$$z_j = c_1y_{1j} + c_2y_{2j} + ... + c_my_{mj} = \vec{c}_B^T\vec{y}_j$$

sayısına v_j vektörüne karşılık gelen **amaç fonksiyonu değeri** denir.

Yani z_j, v_j'yi baz vektörleriyle ürettiğimizde bu üretimin amaç fonksiyonuna "maliyetidir": v_j için baz vektörlerinden $y_{1j}, ..., y_{mj}$ kadar harcanır ve bunların birim maliyetleri $c_1, ..., c_m$'dir. $j = 0$ için $z_0 = \vec{c}_B^T\vec{y}_0$, (2) eşitliğindeki amaç değeridir.

Tanım 4.4 (Simpleks Kriteri). $z_j - c_j$ farkına v_j vektörünün **simpleks kriteri** denir.

Yani simpleks kriteri iki maliyeti karşılaştırır: v_j'yi baz vektörleriyle üretmenin maliyeti z_j, x_j'yi doğrudan kullanmanın maliyeti c_j. Aşağıda göreceğimiz gibi bu tek sayı, v_j baza alınırsa amaç değerinin hangi yöne ve hangi hızla değişeceğini söyler.

Önerme 4.1 (Baz Vektörlerinin Simpleks Kriteri). *Bir baz vektörünün katsayı sütunu birim vektördür ve simpleks kriteri sıfırdır: v_i bazdaysa $z_i - c_i = 0$.*

> ***İspat.***
> *v_i bazın i. vektörü olsun. $v_i = 1 \cdot v_i$ eşitliği v_i'yi baz vektörleri cinsinden yazar: v_i'nin katsayısı 1, diğer baz vektörlerininki 0'dır. Katsayılar tek türlü belirli olduğundan $\vec{y}_i$, i. bileşeni 1 olan birim vektördür. O hâlde*
>
> $$z_i = c_1 \cdot 0 + ... + c_i \cdot 1 + ... + c_m \cdot 0 = c_i$$
>
> *ve $z_i - c_i = 0$ olur.* ■

Örnek 4.1 (Katsayıların ve Simpleks Kriterlerinin Hesabı).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

problemi için $B = (v_1, v_2)$ bazına karşılık gelen uygun temel çözümü, baz dışındaki vektörlerin y_{ij} katsayılarını ve bütün simpleks kriterlerini bulunuz.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

Önce problemi standart forma (Tanım 1.7) getirelim: iki $\leq$ kısıtına x_3 ve x_4 aylak değişkenlerini ekleriz, amaçtaki katsayıları 0'dır.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6 \\ x_j \geq 0, &\quad j = \overline{1,4} \\ \max z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 & \end{aligned}$$

Sütunlar

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \quad v_0 = \begin{bmatrix}4\\6\end{bmatrix}$$

şeklindedir. v_1 ile v_2 lineer bağımsızdır, çünkü $\det \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = 1 \neq 0$.
v_0'ın katsayıları. $v_0 = y_{10}v_1 + y_{20}v_2$ eşitliği $y_{10} + y_{20} = 4$ ve $y_{10} + 2y_{20} = 6$ sistemini verir. İkinciden birinciyi çıkarınca $y_{20} = 2$, sonra $y_{10} = 2$ bulunur. Yani $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ ve uygun temel çözüm

$$X_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 0, 0).$$

Bileşenler negatif olmadığı için bu gerçekten uygun bir temel çözümdür.
v_3'ün katsayıları. $y_{13} + y_{23} = 1$ ve $y_{13} + 2y_{23} = 0$; buradan $y_{23} = -1$, $y_{13} = 2$. Kontrol: $2v_1 - v_2 = (1, 0)^T = v_3$.
v_4'ün katsayıları. $y_{14} + y_{24} = 0$ ve $y_{14} + 2y_{24} = 1$; buradan $y_{24} = 1$, $y_{14} = -1$. Kontrol: $-v_1 + v_2 = (0, 1)^T = v_4$.
Simpleks kriterleri. Baz maliyetleri $\vec{c}_B = (c_1, c_2)^T = (3, 2)^T$. Önerme 4.1 gereği $z_1 - c_1 = z_2 - c_2 = 0$. Baz dışındakiler için:

$$\begin{aligned} z_3 &= 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4, \quad z_3 - c_3 = 4 - 0 = 4, \\ z_4 &= 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = -1, z_4 - c_4 = -1 - 0 = -1. \end{aligned}$$

Amaç değeri $z_0 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$'dur. ■

4.1.2 Bazdan Bir Vektör Çıkarıp Yerine Yenisini Almak

Şimdi B_0 bazından bir v_r vektörünü çıkarıp yerine baz dışındaki bir v_k vektörünü almak istiyoruz. Fikir basit: (3) eşitliğini bir $\lambda > 0$ sayısıyla çarpıp (1) eşitliğinden çıkarırız:

$$\begin{aligned} (x_1 - \lambda y_{1k})v_1 + (x_2 - \lambda y_{2k})v_2 + \ldots \\ +(x_m - \lambda y_{mk})v_m + \lambda v_k = v_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Sol taraf λ ne olursa olsun v_0'a eşittir; yani (4)'ün katsayıları kısıt denklemlerini sağlar. Bunlardan uygun bir temel çözüm elde etmek için iki şey gerekir: Bütün katsayılar ≥ 0 olmalı ve v_r'nin katsayısı $x_r - \lambda y_{rk}$ sıfır olmalıdır. λ sıfırdan başlayıp büyüdükçe $y_{ik} > 0$ olan katsayılar küçülür; $y_{ik} \leq 0$ olanlar ise hiç küçülmez. İlk sıfıra düşen katsayı hangisiyse o vektör bazdan çıkar.

Tanım 4.5 (Oran Testi). Baza girecek vektör v_k olsun. Yalnız $y_{ik} > 0$ olan satırlar için x_i/y_{ik} oranları hesaplanır ve

$$\lambda = \min_{y_{ik}>0} \left(\frac{x_i}{y_{ik}} \right) = \frac{x_r}{y_{rk}}$$

alınır. En küçük oranı veren v_r vektörü bazdan çıkar. Bu seçime **oran testi** denir.

Yani oran testi, "baza giren değişkeni hiçbir baz değişkenini negatif yapmadan en fazla ne kadar büyütebiliriz?" sorusunun cevabıdır. $y_{ik} \leq 0$ olan satırlar teste girmez, çünkü o satırdaki değişken λ büyüdükçe azalmaz. En küçük oran birden fazla satırda gerçekleşirse bunlardan herhangi biri seçilebilir; o zaman yeni çözümde bir baz değişkeni sıfır olur, yani yeni çözüm dejeneredir (Tanım 2.6).

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 4.1 (Baz Değişimi). *X_0, $B_0 = (v_1, ..., v_m)$ bazına karşılık gelen bir uygun temel çözüm; v_k baz dışındaki bir vektör olsun ve en az bir i için $y_{ik} > 0$ olsun. $\lambda = x_r/y_{rk}$ oran testiyle seçilsin. Bu durumda*

1. *$B_1 = (v_1, ..., v_{r-1}, v_k, v_{r+1}, ..., v_m)$ lineer bağımsızdır, yani bir bazdır;*
2. *$x_i - \lambda y_{ik}$ $(i \neq r)$ değerleri ve $x_k = \lambda$ değeri, B_1 bazına karşılık gelen uygun temel çözümü verir:*

$$X_1 = \big(x_1 - \lambda y_{1k}, ..., x_{r-1} - \lambda y_{(r-1)k}, 0, \\ x_{r+1} - \lambda y_{(r+1)k}, ..., x_m - \lambda y_{mk}, \\ 0, ..., \lambda, ..., 0 \big) .$$

Burada λ, X_1'in k. bileşenidir; baz dışında kalan diğer bileşenler 0'dır.

İspat.
B_1 lineer bağımsızdır. *α_i $(i \neq r)$ ve β sayıları için*

$$\sum_{i \neq r} \alpha_i v_i + \beta v_k = \vec{0}$$

olsun. (3) eşitliğini yerine koyarsak

$$\sum_{i \neq r} (\alpha_i + \beta y_{ik}) v_i + \beta y_{rk} v_r = \vec{0}$$

elde ederiz. B_0 lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfırdır. Özellikle $\beta y_{rk} = 0$ ve $y_{rk} > 0$ olduğundan $\beta = 0$. Bu durumda her $i \neq r$ için $\alpha_i = 0$ kalır. Demek ki B_1'in vektörleri lineer bağımsızdır.
X_1 kısıtları sağlar. *X_1'in bileşenleri (4) eşitliğinin katsayılarıdır; $\lambda = x_r/y_{rk}$ için v_r'nin katsayısı $x_r - \lambda y_{rk} = 0$ olur. (4) de (1)'den (3)'ün λ katı çıkarılarak elde edildiği için doğrudur.*
$X_1 \geq 0$. *$x_k = \lambda \geq 0$'dır, çünkü $x_r \geq 0$ ve $y_{rk} > 0$. $i \neq r$ için iki durum var:*

- *$y_{ik} \leq 0$ ise $x_i - \lambda y_{ik} \geq x_i \geq 0$.*
- *$y_{ik} > 0$ ise λ en küçük oran olduğundan $\lambda \leq x_i/y_{ik}$, yani $\lambda y_{ik} \leq x_i$ ve $x_i - \lambda y_{ik} \geq 0$.*

X_1 temel çözümdür. *X_1'in sıfırdan farklı olabilen bileşenleri yalnız B_1'deki vektörlere aittir ve B_1 bir bazdır. Böylece X_1, B_1 bazına karşılık gelen uygun temel çözümdür.* ■

> **i** Not
>
> **Not.** v_r bazdan çıkıp v_k baza girdiğinde x_r değişkeni $x_r = 0$ değeriyle temel olmayan değişkene, x_k değişkeni de $x_k = \lambda$ değeriyle temel değişkene dönüşür. X_0 dejenere değilse bütün $x_i > 0$ olduğundan $\lambda > 0$'dır.

Baz değişiminde (Teorem 4.1) λ'yı oran testinden daha büyük seçseydik en küçük oranı veren satırdaki $x_r - \lambda y_{rk}$ negatif olurdu; X_0 dejenere değilken daha küçük bir $\lambda > 0$ seçseydik hiçbir katsayı sıfır olmaz, elimizde $m + 1$ pozitif bileşenli, temel olmayan bir çözüm kalırdı. Oran testi tam ortadaki doğru değeri verir.

4.1.3 Amaç Fonksiyonu Ne Kadar Değişir?

Geçişin asıl amacı amaç değerini iyileştirmektir. Aşağıdaki teorem, bu değişimin simpleks kriteriyle ölçüldüğünü söylüyor.

Teorem 4.2 (Amaç Değerinin Değişimi). *Baz değişimi teoreminin (Teorem 4.1) koşullarında X_1 çözümünün amaç değeri*

$$z_1 = z_0 - \lambda(z_k - c_k) \tag{5}$$

olur.

İspat.

X_1'in bileşenlerini amaç fonksiyonunda yerine koyalım. x_r'nin yeni değeri 0'dır; baz dışındaki v_k dışında kalan değişkenler de sıfırdır:

$$\begin{aligned} z_1 = c_1(x_1 - \lambda y_{1k}) + \ldots + c_{r-1}(x_{r-1} - \lambda y_{(r-1)k}) \\ + c_r \cdot 0 + c_{r+1}(x_{r+1} - \lambda y_{(r+1)k}) + \ldots \\ + c_m(x_m - \lambda y_{mk}) + c_k\lambda. \end{aligned}$$

x_i'li ve λ'lı terimleri ayırırsak

$$\begin{aligned} z_1 = \sum_{i \neq r} c_i x_i \\ -\lambda \left(\sum_{i \neq r} c_i y_{ik} - c_k \right) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi eksik $i = r$ terimlerini ekleyelim. $\lambda = x_r / y_{rk}$ seçildiğinden $x_r = \lambda y_{rk}$, dolayısıyla

$$c_r x_r - \lambda c_r y_{rk} = 0.$$

Bu sıfır ifadeyi z_1'in sağ yanına eklersek

$$\begin{aligned} z_1 = \underbrace{c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m}_{z_0} \\ -\lambda \left(\underbrace{c_1 y_{1k} + \ldots + c_m y_{mk}}_{z_k} - c_k \right) \end{aligned}$$

olur. Birinci toplam (2) gereği z_0, ikinci toplam da Tanım 4.3 gereği z_k'dır. Böylece $z_1 = z_0 - \lambda(z_k - c_k)$. ■

Yani x_k'yi sıfırdan λ'ya çıkardığımızda amaç değeri, x_k'nin her birim artışında $z_k - c_k$ kadar azalır. **İyileşme miktarı** $\lambda(z_k - c_k)$'dır.

Sonuç 4.1 (Simpleks Kriteri ve İyileşme). *Baz değişimi teoreminin (Teorem 4.1) koşullarında $\lambda > 0$ olsun.*

1. *$z_k - c_k > 0$ ise $z_1 < z_0$ olur: Minimum probleminde amaç değeri daha küçük bir uygun temel çözüm bulunur.*
2. *$z_k - c_k < 0$ ise $z_1 > z_0$ olur: Maksimum probleminde amaç değeri daha büyük bir uygun temel çözüm bulunur.*

İspat.
(5) eşitliğinde $\lambda > 0$'dır. $z_k - c_k > 0$ ise $\lambda(z_k - c_k) > 0$ ve $z_1 = z_0 - \lambda(z_k - c_k) < z_0$. $z_k - c_k < 0$ ise $\lambda(z_k - c_k) < 0$ ve $z_1 > z_0$. ■

$\lambda = 0$ olabilen tek durum dejenere çözümdür: O zaman baz değişir ama çözüm ve amaç değeri aynı kalır.

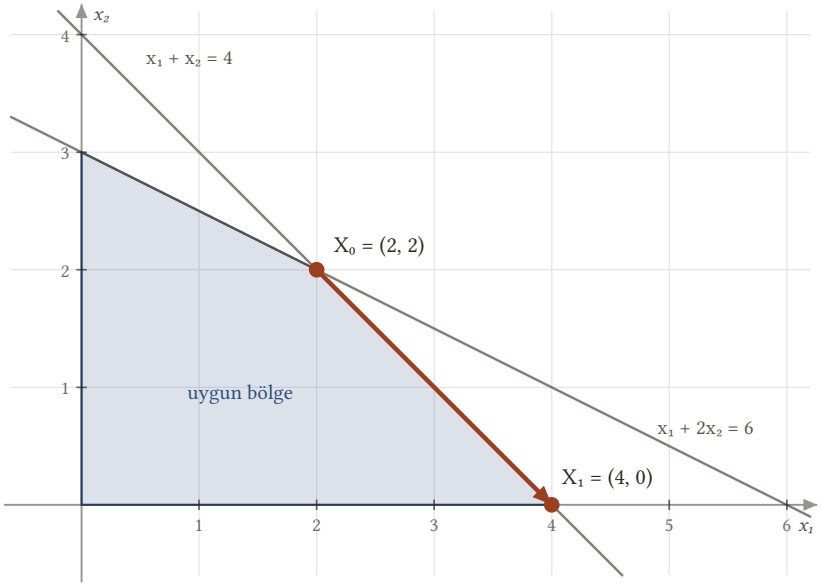
Tanım 4.6 (Simpleks Yöntem). Bir uygun temel çözümden başlayıp Teorem 4.1 ile, amaç değerini iyileştiren komşu uygun temel çözümlere adım adım geçerek lineer programlama problemini çözme yöntemine **simpleks yöntem** denir. Her geçişe bir **iterasyon** denir.

Yani simpleks yöntemin her iterasyonu üç soruya cevap verir: Hangi vektör baza girer (simpleks kriteri), hangi vektör bazdan çıkar (oran testi), yeni çözüm ve amaç değeri nedir (Teorem 4.1 ve Teorem 4.2).

Örnek 4.2 (Komşu Uç Noktaya Bir Geçiş). Önceki örnekteki (Örnek 4.1) $\max z = 3x_1 + 2x_2$ problemini, $x_1 + x_2 \leq 4$ ve $x_1 + 2x_2 \leq 6$ kısıtlarıyla ele alalım. $B_0 = (v_1, v_2)$ bazında $X_0 = (2, 2, 0, 0)$, $z_0 = 10$ bulunmuştu. Amaç değerini artıran komşu uygun temel çözümü bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.1: Baz değişimi uygun bölgenin bir kenarı boyunca yürümektir: x_4 baza girerken $X_0 = (2, 2)$ köşesinden $x_1 + x_2 = 4$ kenarı üzerinde $X_1 = (4, 0)$ köşesine gidilir.

Önceki örneğin (Örnek 4.1) sonuçları:

$$y_{13} = 2, \quad y_{23} = -1, z_3 - c_3 = 4,$$
$$y_{14} = -1, y_{24} = 1, \quad z_4 - c_4 = -1.$$

Baza girecek vektör. Problem maksimum problemidir; Sonuç 4.1 gereği amaç değerini artırmak için simpleks kriteri negatif olan bir vektör baza alınmalıdır. Yalnız $z_4 - c_4 = -1 < 0$ olduğundan v_4 baza girer. (v_3'ü almak amaç değerini 4λ kadar azaltırdı.)
Bazdan çıkacak vektör. v_4 sütununda yalnız $y_{24} = 1$ pozitiftir; $y_{14} = -1$ teste girmez. Oran testi

$$\lambda = \frac{x_2}{y_{24}} = \frac{2}{1} = 2$$

verir, yani v_2 bazdan çıkar.
Yeni çözüm. Teorem 4.1 ile

$$x_1 = x_1 - \lambda y_{14} = 2 - 2 \cdot (-1) = 4,$$
$$x_2 = x_2 - \lambda y_{24} = 2 - 2 \cdot 1 = 0,$$
$$x_4 = \lambda = 2.$$

Yeni baz $B_1 = (v_1, v_4)$, yeni çözüm

$$X_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 0, 2).$$

Kontrol: $4 + 0 + 0 = 4$ ve $4 + 2 \cdot 0 + 2 = 6$.
Yeni amaç değeri. (5) eşitliğinden

$$z_1 = z_0 - \lambda(z_4 - c_4) = 10 - 2 \cdot (-1) = 12,$$

doğrudan hesapla da $3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12$. İyileşme miktarı $12 - 10 = 2$'dir.
Geometrik olarak X_0 ve X_1 uygun bölgenin $(2, 2)$ ve $(4, 0)$ köşeleridir. $x_3 = 0$ kaldığı için hareket boyunca $x_1 + x_2 = 4$ doğrusu üzerinde kalınır; x_4 ise 0'dan 2'ye çıkar, yani ikinci kısıt doğrusundan uzaklaşılır.
Böylece amaç değerini 10'dan 12'ye çıkaran komşu uygun temel çözüm $X_1 = (4, 0, 0, 2)$'dir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

4.2 Optimallik ve Sınırsızlık

Simpleks kriteri iyileşmenin yönünü söylüyor. Peki hiçbir vektör iyileşme sağlamıyorsa? Aşağıdaki teorem, bu durumda elimizdeki çözümün yalnız komşularından değil, **bütün** uygun çözümlerden iyi olduğunu söylüyor.

Teorem 4.3 (Optimallik Koşulu). *X_0, $B_0 = (v_1, ..., v_m)$ bazına karşılık gelen bir uygun temel çözüm olsun.*

1. *Minimum probleminde her j için $z_j - c_j \leq 0$ ise X_0 optimal çözümdür.*
2. *Maksimum probleminde her j için $z_j - c_j \geq 0$ ise X_0 optimal çözümdür.*

İspat.
$\vec{u} = (u_1, ..., u_n)$ herhangi bir uygun çözüm olsun: $u_1 v_1 + ... + u_n v_n = v_0$ ve her $u_j \geq 0$.
Adım 1. *Her v_j'yi baz cinsinden yazalım: $v_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij} v_i$. Baz vektörleri için de bu yazım geçerlidir (Önerme 4.1). Yerine koyarsak*

$$\sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} y_{ij} u_j \Big) v_i = v_0 = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i.$$

Bir vektörün baz cinsinden yazılışı tek olduğundan her i için

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} u_j = x_i.$$

Adım 2 (minimum). *Varsayım gereği her j için $c_j \geq z_j$, ayrıca $u_j \geq 0$. O hâlde $c_j u_j \geq z_j u_j$ ve*

$$\begin{aligned} z(\vec{u}) &= \sum_{j=1}^{n} c_j u_j \geq \sum_{j=1}^{n} z_j u_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_i y_{ij} u_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \Big(\sum_{j=1}^{n} y_{ij} u_j \Big) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = z_0. \end{aligned}$$

Her uygun çözümün amaç değeri z_0'dan küçük olmadığına göre X_0 minimum çözümdür.
Adım 2 (maksimum). *Bu kez her j için $c_j \leq z_j$, dolayısıyla $c_j u_j \leq z_j u_j$. Aynı hesap eşitsizliği ters çevirir: $z(\vec{u}) \leq z_0$. Demek ki X_0 maksimum çözümdür.* ■

Örnek 4.3 (Optimallik Kontrolü). Komşu geçiş örneğinde (Örnek 4.2) $\max z = 3x_1 + 2x_2$ problemi için ($x_1 + x_2 + x_3 = 4$, $x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$) $B_1 = (v_1, v_4)$ bazında $X_1 = (4, 0, 0, 2)$ ve $z = 12$ bulundu. X_1'in optimal olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Baz dışındaki $v_2 = (1, 2)^T$ ve $v_3 = (1, 0)^T$ vektörlerini $v_1 = (1, 1)^T$ ve $v_4 = (0, 1)^T$ cinsinden yazalım.
v_2. $y_{12} v_1 + y_{42} v_4 = v_2$ eşitliği

$$(y_{12}, y_{12} + y_{42})^T = (1, 2)^T$$

verir; buradan $y_{12} = 1$, $y_{42} = 1$. (Satırları baz değişkeninin indisiyle adlandırıyoruz: x_4 satırının katsayısı y_{42}'dir.)
v_3. $(y_{13}, y_{13} + y_{43})^T = (1, 0)^T$; buradan $y_{13} = 1$, $y_{43} = -1$.
Baz maliyetleri $\vec{c}_B = (c_1, c_4)^T = (3, 0)^T$. Buna göre

$$\begin{aligned} z_2 - c_2 &= (3 \cdot 1 + 0 \cdot 1) - 2 = 1, \\ z_3 - c_3 &= (3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)) - 0 = 3. \end{aligned}$$

Baz vektörlerinin kriterleri sıfırdır (Önerme 4.1). Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan Teorem 4.3 gereği X_1 maksimum çözümdür: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$ ve $\max z = 12$.
Grafikle karşılaştıralım. Uygun bölgenin köşeleri $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 2)$ ve $(0, 3)$'tür; bunlarda z sırasıyla 0, 12, 10 ve 6 değerini alır. En büyüğü gerçekten $(4, 0)$'daki 12'dir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Simpleks kriterinin iyileşme gösterdiği ama oran testinin yapılamadığı bir durum daha var: Baza girecek sütunda hiç pozitif y_{ik} yoksa.

Önerme 4.2 (Sınırsızlık Belirtisi). *X_0, B_0 bazına karşılık gelen bir uygun temel çözüm; v_k baz dışındaki bir vektör olsun ve her i için $y_{ik} \leq 0$ olsun.*

1. *Minimum probleminde $z_k - c_k > 0$ ise amaç fonksiyonu uygun bölgede alttan sınırsızdır; minimum yoktur.*
2. *Maksimum probleminde $z_k - c_k < 0$ ise amaç fonksiyonu uygun bölgede üstten sınırsızdır; maksimum yoktur.*

> ***İspat.***
> *Her $\lambda \geq 0$ için (4) eşitliğinin katsayılarını alalım:*
>
> $$X(\lambda) = \big(\; x_1 - \lambda y_{1k}, ..., x_m - \lambda y_{mk}, 0, ..., \lambda, ..., 0 \; \big),$$
>
> *burada λ, k. bileşendir. (4) gereği $X(\lambda)$ kısıtları sağlar. Her $y_{ik} \leq 0$ olduğundan $x_i - \lambda y_{ik} \geq x_i \geq 0$; ayrıca $\lambda \geq 0$. Demek ki her $\lambda \geq 0$ için $X(\lambda)$ uygun bir çözümdür. Amaç değeri*
>
> $$\begin{aligned} z\,\big(\; X(\lambda) \;\big) &= \sum_{i=1}^{m} c_i(x_i - \lambda y_{ik}) + c_k\lambda \\ &= z_0 - \lambda(z_k - c_k) \end{aligned}$$
>
> *olur. Minimum probleminde $z_k - c_k > 0$ olduğundan $\lambda \to \infty$ iken $z\,\big(\; X(\lambda) \;\big) \to -\infty$; maksimum probleminde $z_k - c_k < 0$ olduğundan $z\,\big(\; X(\lambda) \;\big) \to +\infty$. Her iki durumda da amaç değerleri arasında en iyisi yoktur.* ■

Yani bu durumda iyileştiren yönde sonsuza kadar gidilebilir; hiçbir kısıt bizi durdurmaz. Sınırsız çözümün ayrıntıları ve tablodaki görünüşü Sınırsız çözüm ve alternatif optimal çözüm bölümündedir.
Buraya kadar söylenenleri iki kural hâlinde toplayalım.

Sonuç 4.2 (Sonuç: Minimum Problemi). *Amaç fonksiyonunun minimum yapılması isteniyorsa:*

1. *Simpleks kriteri pozitif olan vektörlerden en büyük $z_j - c_j$ değerine sahip v_k baza girer; v_k sütununda pozitif eleman varsa bazdan çıkacak vektör oran testiyle belirlenir. Böylece B_0 bazından amaç fonksiyonunu küçülten (dejenere durumda artırmayan) yeni bir B_1 bazına, yani yeni bir uygun temel çözüme geçilir.*
2. *Simpleks kriteri pozitif olan vektör kalmamışsa, yani her j için $z_j - c_j \leq 0$ ise amaç fonksiyonu daha fazla küçültülemez: Minimum (optimal) çözüme ulaşılmıştır.*

> ***İspat.***
> *(1) Seçilen v_k için $z_k - c_k > 0$'dır. Sütunda pozitif y_{ik} varsa Teorem 4.1 yeni bir uygun temel çözüm verir ve Sonuç 4.1 gereği $\lambda > 0$ iken $z_1 < z_0$ olur. (Sütunda pozitif eleman yoksa Önerme 4.2 gereği problem sınırsızdır.) (2) Optimallik koşulunun (Teorem 4.3) birinci şıkkıdır.* ■

Sonuç 4.3 (Sonuç: Maksimum Problemi). *Amaç fonksiyonunun maksimum yapılması isteniyorsa:*

1. *Simpleks kriteri negatif olan vektörlerden en küçük $z_j - c_j$ değerine sahip v_k baza girer; v_k sütununda pozitif eleman varsa bazdan çıkacak vektör oran testiyle belirlenir. Böylece B_0 bazından amaç fonksiyonunu büyüten (dejenere durumda azaltmayan) yeni bir B_1 bazına, yani yeni bir uygun temel çözüme geçilir.*
2. *Simpleks kriteri negatif olan vektör kalmamışsa, yani her j için $z_j - c_j \geq 0$ ise amaç fonksiyonu daha fazla büyütülemez: Maksimum (optimal) çözüme ulaşılmıştır.*

> ***İspat.***
> *(1) Seçilen v_k için $z_k - c_k < 0$'dır. Sütunda pozitif y_{ik} varsa Teorem 4.1 yeni bir uygun temel çözüm verir ve Sonuç 4.1 gereği $\lambda > 0$ iken $z_1 > z_0$ olur. (Sütunda pozitif eleman yoksa Önerme 4.2 gereği problem sınırsızdır.) (2) Optimallik koşulunun (Teorem 4.3) ikinci şıkkıdır.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani kısaca: **minimumda en büyük pozitif $z_j - c_j$ girer ve bütün $z_j - c_j \leq 0$ olunca durulur; maksimumda en negatif $z_j - c_j$ girer ve bütün $z_j - c_j \geq 0$ olunca durulur.**
"En büyük" seçimi bir kuraldır, zorunluluk değildir. Kriteri iyileşme yönünde olan her vektör amaç değerini iyileştirir; en büyük kriter, x_k'nin birim artışı başına en büyük iyileşmeyi verir. Toplam iyileşme $\lambda(z_k - c_k)$ olduğu için her zaman en büyük toplam iyileşmeyi vermeyebilir, ama pratikte iyi çalışır ve kitap boyunca bu kuralı kullanacağız. Kriterlerde eşitlik olursa indisi küçük olanı seçeriz.

Sonuç 4.4 (Simpleks Yöntemin Sonlu Adımda Bitmesi). *Problemin hiçbir uygun temel çözümü dejenere değilse simpleks yöntem sonlu sayıda iterasyondan sonra ya optimal bir çözümde ya da sınırsızlık belirtisinde durur.*

> ***İspat.***
> *Dejenere çözüm olmadığından her iterasyonda $\lambda > 0$'dır ve Sonuç 4.1 gereği amaç değeri kesin olarak iyileşir (minimumda azalır, maksimumda artar). Bir baz, uygun temel çözümü ve dolayısıyla amaç değerini tek türlü belirler. Amaç değeri kesin olarak iyileştiğine göre aynı baza hiçbir zaman geri dönülmez. n sütundan m tanesini seçmenin en fazla $\binom{n}{m}$ yolu vardır; bu yüzden yöntem sonlu adımda bir yerde durmak zorundadır. Durduğu yerde ya iyileştiren kriter yoktur, o zaman Teorem 4.3 gereği çözüm optimaldir; ya da iyileştiren kriterli sütunda pozitif eleman yoktur, o zaman Önerme 4.2 gereği problem sınırsızdır.* ■

4.3 Başlangıç Tablosunun Kurulması

Bir iterasyonun bütün sayıları (x_i, y_{ij}, $z_j - c_j$, oranlar) tek bir tabloya sığar. Bu tabloya **simpleks tablosu** diyoruz.
Tablonun düzeni şöyledir:

- **En üst satır** amaç katsayılarıdır: c_j başlığının yanında her v_j sütununun üstüne c_j yazılır.
- **İkinci satır** sütun adlarıdır: x_B (baz değişkenleri), c_B (baz maliyetleri), v_0 (sağ taraf), $v_1, \ldots, v_n$ ve Oran.
- **Gövdedeki her satır** bir baz vektörüne aittir. x_B sütununda baz değişkeninin adı, c_B sütununda amaç katsayısı, v_0 sütununda değeri $x_i = y_{i0}$, v_j sütununda y_{ij} yazar. Satırları baz değişkeninin indisiyle adlandırırız: x_3 satırı ile v_1 sütununun kesişimindeki sayı y_{31}'dir.
- **Oran sütununda** baza girecek v_k için y_{i0}/y_{ik} oranları yazılır; $y_{ik} \leq 0$ olan satırlara $-$ konur.
- **En alt satır** $z_j - c_j$ satırıdır. z_j, c_B sütunuyla tablonun v_j sütununun karşılıklı çarpımlarının toplamıdır, yani $z_j = \vec{c}_B^T \vec{y}_j$; ondan c_j çıkarılır. v_0 sütununun altına aynı yolla hesaplanan amaç değeri $z_0 = \vec{c}_B^T \vec{y}_0$ yazılır.

Dikkat: Tabloda v_j başlığının altında v_j vektörünün kendisi değil, o anki baza göre katsayıları $\vec{y}_j$ durur; kısaca "tablonun v_j sütunu" diyeceğiz. İkisi yalnız baz birim matrisken aynıdır. Pivot eleman köşeli parantezle, bazdan çıkan satır $\Rightarrow$ ile, baza giren sütun $\Uparrow$ ile işaretlenir.
Başlangıç tablosu için bir uygun temel çözüm ve onun y_{ij} katsayıları gerekir. Bütün kısıtları $\leq$ olan ve sağ tarafları negatif olmayan problemlerde bunlar hiç hesap yapmadan hazırdır.

Önerme 4.3 (Birim Matrisli Başlangıç Bazı). *$A\vec{x} \leq \vec{b}$, $\vec{x} \geq \vec{0}$ kısıtlı bir problemde $\vec{b} \geq \vec{0}$ olsun ve m kısıta $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ aylak değişkenleri eklensin. Bu durumda aylak değişkenlerin sütunları bir baz oluşturur ve bu bazda*

1. *uygun temel çözüm $x_{n+i} = b_i$ ($i = 1, \ldots, m$), diğer bütün değişkenler 0'dır;*
2. *her $j = 1, \ldots, n$ için $y_{ij} = a_{ij}$'dir, aylak sütunların katsayıları da birim vektörlerdir; yani tablonun gövdesi standart formdaki katsayıların aynısıdır;*
3. *$z_0 = 0$ ve her j için $z_j - c_j = -c_j$'dir.*

> ***İspat.***
> *Aylak değişkenlerin sütunları $m \times m$ birim matrisin sütunları $e_1, \ldots, e_m$'dir; bunlar lineer bağımsızdır, yani bir bazdır. Asıl değişkenlerin $v_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T$ sütunları ($j = 1, \ldots, n$) için*
>
> $$v_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \ldots + a_{mj}e_m$$
>
> *olduğundan katsayılar $y_{ij} = a_{ij}$'dir; aylak sütunlar baz vektörleri olduğundan katsayıları birim vektörlerdir (Önerme 4.1); $j = 0$ için de aynı hesap $y_{i0} = b_i$ verir. $\vec{b} \geq \vec{0}$ olduğundan bu temel çözüm uygundur. Aylak değişkenlerin amaç katsayıları 0 olduğu için $\vec{c}_B = \vec{0}$ ve her j için $z_j = \vec{c}_B^T \vec{y}_j = 0$; dolayısıyla $z_0 = 0$, $z_j - c_j = -c_j$.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani $\leq$ kısıtlı bir problemi standart forma (Tanım 1.7) getirirken eklediğimiz aylak değişkenler katsayılar matrisinde kendiliğinden bir birim matris oluşturur. Bu yüzden böyle bir problemin standart formu zaten simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir (Tanım 1.9) ve başlangıç tablosu doğrudan yazılır.
Bu bölüm yalnız bu tür problemleri çözer. Kısıtlarda $\geq$ ya da $=$ varsa standart form birim matris içermeyebilir; o zaman problem henüz simpleks yöntem ile çözülebilir halde değildir ve önce yapay değişkenler eklenir. Bu durum Büyük M yöntemi bölümünün konusudur.

Başlangıç tablosu dört adımda

1. Her $\leq$ kısıtına bir aylak değişken ekleyerek problemi standart forma getir; aylak değişkenlerin amaç katsayıları 0'dır.
2. Aylak değişkenleri baz değişkenleri olarak x_B sütununa, amaç katsayılarını (hepsi 0) c_B sütununa, sağ tarafları v_0 sütununa yaz.
3. Kısıt katsayılarını olduğu gibi $v_1, \ldots, v_n$ sütunlarına, c_j değerlerini en üst satıra yaz.
4. En alt satıra $z_0 = 0$ ve $z_j - c_j = -c_j$ değerlerini yaz; baz vektörlerininki 0'dır.

Örnek 4.4 (Başlangıç Tablosu ve İlk Pivot).

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_j \geq 0, &\quad j = 1,2 \\ \min z = -4x_1 &- 5x_2 \end{aligned}$$

lineer programlama problemini simpleks yöntemle çözmek için başlangıç tablosunu kurunuz ve baza girecek ile bazdan çıkacak vektörleri belirleyiniz.

Çözüm.
Standart form. Problemi simpleks yöntemle çözebilmek için önce eşitsizlikleri kaldırıp standart forma (Tanım 1.7) getirmeliyiz. Dört kısıta sırasıyla x_3, x_4, x_5, x_6 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_6 &= 2 \\ x_i \geq 0, &\quad i = \overline{1,6} \\ \min z = -4x_1 &- 5x_2 + 0x_3 \\ &+0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \end{aligned}$$

Sağ taraflar negatif değildir ve v_3, v_4, v_5, v_6 sütunları 4×4 birim matrisi oluşturur. Demek ki bu standart form simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir (Tanım 1.9).
Başlangıç bazı ve çözümü. Başlangıç bazı olarak lineer bağımsız $B_0 = (v_3, v_4, v_5, v_6)$ vektörlerini seçeriz. Önerme 4.3 gereği başlangıç çözümü

$$X_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 0, 2, 6, 5, 2)$$

ve amaç değeri

$$\begin{aligned} z_0 = -4(0) - 5(0) + 0(2) \\ +0(6) + 0(5) + 0(2) = 0 \end{aligned}$$

olur. Tablonun gövdesi kısıt katsayılarıdır. Örneğin B_0'da bulunmayan v_1 vektörü baz vektörleri cinsinden

$$\begin{aligned} v_1 &= y_{31}v_3 + y_{41}v_4 + y_{51}v_5 + y_{61}v_6 \\ &= 1 \cdot v_3 + 2 \cdot v_4 + 1 \cdot v_5 - 1 \cdot v_6 \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

biçiminde yazılır; bu katsayılar tablonun v_1 sütunudur.
Simpleks kriterleri. $\vec{c}_B = \vec{0}$ olduğu için $z_j - c_j = -c_j$: $z_1 - c_1 = 0 - (-4) = 4$, $z_2 - c_2 = 0 - (-5) = 5$. Baz vektörlerinin kriterleri sıfırdır (Önerme 4.1).
Baza girecek vektör. Problem minimum problemidir; Sonuç 4.2 gereği simpleks kriteri pozitif olanlardan en büyüğü baza girer. $\max\{4, 5\} = 5$ olduğundan v_2 baza girer.
Bazdan çıkacak vektör. Oran testi yalnız v_2 sütununun pozitif elemanlarıyla yapılır. $y_{32} = -2 < 0$ olduğundan x_3 satırı dikkate alınmaz:

$$\lambda = \min\left(\frac{x_4}{y_{42}}, \frac{x_5}{y_{52}}, \frac{x_6}{y_{62}}\right) = \min\left(\frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{2}{1}\right) = \frac{x_6}{y_{62}} = 2.$$

En küçük oran x_6 satırındadır; v_6 bazdan çıkar. Pivot eleman, v_2 sütunu ile x_6 satırının kesişimindeki $y_{62} = 1$'dir.

Tablo 4.1: Başlangıç tablosu

		c_j	-4	-5	0	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_3	0	2	1	-2	1	0	0	0	$-$
x_4	0	6	2	1	0	1	0	0	$\frac{6}{1}$
x_5	0	5	1	2	0	0	1	0	$\frac{5}{2}$
x_6	0	2	-1	$[1]$	0	0	0	1	$\frac{2}{1} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	4	$5 \Uparrow$	0	0	0	0	

Başlangıç tablosundaki (Tablo 4.1) X_0, uygun bölgenin $(x_1, x_2) = (0, 0)$ köşesidir. Yeni tablo bazdan v_6 çıkarılıp yerine v_2 alınarak düzenlenecek; bunun nasıl yapıldığını bir sonraki kısımda görüyoruz. ■

4.4 Yeni Tablonun Hesaplanması

Baza giren ve bazdan çıkan vektörler belli olunca yeni tablonun bütün sayıları eski tablodan hesaplanır; hiçbir sistemi baştan çözmek gerekmez.

Tanım 4.7 (Pivot Eleman). Baza girecek v_k vektörünün sütunu ile bazdan çıkacak v_r vektörünün satırının kesişimindeki y_{rk} sayısına **pivot eleman** denir. v_k sütununa **pivot sütunu**, v_r satırına **pivot satırı** denir.

Yani pivot, tablodaki "dönüşümün merkezi"dir. Oran testi yalnız pozitif elemanlar arasından seçtiği için pivot eleman her zaman pozitiftir.

Teorem 4.4 (Tablonun Dönüşüm Kuralı). *Pivot eleman y_{rk} olsun ve yeni tablonun elemanlarını y'_{ij} ile gösterelim. Her $j = 0, 1, \ldots, n$ için:*

1. *Pivot satırı (yeni tabloda x_k satırı) pivot elemana bölünür:*

$$y'_{kj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}.$$

2. *Diğer her $i \neq r$ satırı için*

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}\, y_{rj}}{y_{rk}}.$$

3. *$z_j - c_j$ satırı da aynı kuralla güncellenir:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{(z_k - c_k)\, y_{rj}}{y_{rk}},$$

$j = 0$ *için* ($c_0 = 0$ *alınarak*) $z_0' = z_0 - \dfrac{(z_k - c_k)\, y_{r0}}{y_{rk}}$.

İspat.
Satırlar. *(3) eşitliğini v_r için çözelim.* $v_k = \sum_{i \neq r} y_{ik} v_i + y_{rk} v_r$ *ve* $y_{rk} > 0$ *olduğundan*

$$v_r = \frac{1}{y_{rk}}\, v_k - \sum_{i \neq r} \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\, v_i.$$

Herhangi bir v_j için eski yazılışta v_r'yi bununla değiştirelim:

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_{i \neq r} y_{ij} v_i + y_{rj} v_r \\ &= \sum_{i \neq r} \Big(y_{ij} - \frac{y_{ik}\, y_{rj}}{y_{rk}} \Big)\, v_i + \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\, v_k. \end{aligned}$$

Bu, v_j'nin yeni baz B_1 cinsinden yazılışıdır. B_1 bir baz olduğundan (Teorem 4.1) yazılış tektir; parantez içindekiler y'_{ij}, v_k'nın katsayısı da y'_{kj}'dir. $j = 0$ için bu formüller, baz değişimi teoremindeki $x_i - \lambda y_{ik}$ ve λ değerlerini verir.
$z_j - c_j$ satırı. *Yeni bazın maliyetleri c_i ($i \neq r$) ve c_k'dır:*

$$\begin{aligned} z'_j &= \sum_{i \neq r} c_i \Big(y_{ij} - \frac{y_{ik}\, y_{rj}}{y_{rk}} \Big) + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \\ &= \sum_{i \neq r} c_i y_{ij} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \Big(\sum_{i \neq r} c_i y_{ik} - c_k \Big). \end{aligned}$$

Toplamlara eksik $i = r$ terimini ekleyip çıkaralım: $\sum_{i \neq r} c_i y_{ij} = z_j - c_r y_{rj}$ *ve* $\sum_{i \neq r} c_i y_{ik} = z_k - c_r y_{rk}$. *Yerine koyarsak*

$$\begin{aligned} z'_j &= z_j - c_r y_{rj} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left(z_k - c_k \right) + \frac{y_{rj}}{y_{rk}}\, c_r y_{rk} \\ &= z_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left(z_k - c_k \right) \end{aligned}$$

bulunur. İki taraftan c_j çıkarınca iddia elde edilir. $j = 0$ için bu, $z_0' = z_0 - \lambda(z_k - c_k)$ yani (5) eşitliğidir. ■

Bu kural iki farklı yoldan uygulanabilir.
1. yöntem: elemanter satır işlemleri. Yeni tabloda v_k baz vektörü olacağından sütunu, pivotun bulunduğu yerde 1, diğer yerlerde 0 olan birim vektöre dönüşmelidir (Önerme 4.1). Bunun için eski tabloya şu elemanter satır işlemleri uygulanır:

- pivot satırı pivot elemana bölünür;
- diğer her i satırından, yeni pivot satırının y_{ik} katı çıkarılır;
- $z_j - c_j$ satırından, yeni pivot satırının $z_k - c_k$ katı çıkarılır.

Bu işlemler tam olarak dönüşüm kuralının (Teorem 4.4) formüllerini verir: yeni pivot satırının j. elemanı y_{rj}/y_{rk} olduğundan i. satırın yeni elemanı $y_{ij} - y_{ik}\, y_{rj}/y_{rk}$ olur.
2. yöntem: dikdörtgen kuralı. Yeni tablo doğrudan hesaplanır:
a) pivot elemanın bulunduğu satır pivot elemanın değerine bölünür;
b) diğer her eleman basit bir dikdörtgen hesabıyla bulunur.
Değiştirilecek eleman A, pivot eleman P olsun. A ile P bir dikdörtgenin karşılıklı köşeleridir; diğer iki köşe, A'nın satırı ile pivot sütununun kesişimi ve A'nın sütunu ile pivot satırının kesişimidir. Bunlara B ve C diyelim; formül B ile C'nin çarpımını kullandığı için hangisine B dendiği fark etmez. P'nin A'ya göre konumu ne olursa olsun kural aynıdır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{array}{cc} B & A \\ [P] & C \end{array} \qquad \begin{array}{cc} [P] & C \\ B & A \end{array} \qquad \begin{array}{cc} A & C \\ B & [P] \end{array} \qquad \begin{array}{cc} B & [P] \\ A & C \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad A^* = A - \frac{B\,C}{P}.$$

Yani yeni değer, eski değerden "çapraz köşelerin çarpımı bölü pivot" çıkarılarak bulunur. $A = y_{ij}$, $P = y_{rk}$ ve $\{B, C\} = \{y_{ik}, y_{rj}\}$ alınırsa bu, dönüşüm kuralındaki (Teorem 4.4)

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}\, y_{rj}}{y_{rk}}$$

formülünün ta kendisidir. Aynı kural v_0 sütununa ve $z_j - c_j$ satırına da uygulanır.
Formülden hemen çıkan kısayollar hesabı çok kısaltır:

- Pivot sütunu birim vektör olur: pivotun yeri 1, diğerleri 0; $z_k - c_k$ da 0 olur.
- Pivot sütununda 0 bulunan bir satır ($y_{ik} = 0$) değişmeden kalır.
- Pivot satırında 0 bulunan bir sütun ($y_{rj} = 0$) değişmeden kalır. Özellikle bazda kalan vektörlerin birim sütunları değişmez.

Örnek 4.5 (Küçük Bir Tablo Dönüşümü). $\max z = 3x_1 + 2x_2$ problemini $x_1 + x_2 + x_3 = 4$, $x_1 + 2x_2 + x_4 = 6$ standart formuyla ele alalım (Örnek 4.1). $B = (v_1, v_2)$ bazının tablosunu yazınız ve dikdörtgen kuralıyla $B_1 = (v_1, v_4)$ bazının tablosunu hesaplayınız.

Çözüm.
Katsayılar ve kriterler Örnek 4.1 içinde bulunmuştu; tablo şöyledir. Problem maksimum problemi olduğu için en negatif $z_j - c_j$ girer: $z_4 - c_4 = -1$, yani v_4. v_4 sütununda $y_{14} = -1 < 0$ olduğundan yalnız x_2 satırının oranı hesaplanır; v_2 bazdan çıkar ve pivot $y_{24} = 1$'dir.

Tablo 4.2: $B = (v_1, v_2)$ bazının tablosu

		c_j	3	2	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_1	3	2	1	0	2	-1	$-$
x_2	2	2	0	1	-1	$[1]$	$\frac{2}{1} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 10$	0	0	4	$-1 \Uparrow$	

Pivot satırı. Pivot 1 olduğundan x_2 satırı aynen kalır ama adı x_4, maliyeti $c_4 = 0$ olur: $(2 \mid 0, 1, -1, 1)$.
x_1 satırı. Bu satırın pivot sütunundaki elemanı $B = y_{14} = -1$. Dikdörtgen kuralı $A^* = A - (-1) \cdot C/1 = A + C$ verir; C, aynı sütunda pivot satırındaki elemandır:

$$v_0 : 2 + 2 = 4, \qquad v_1 : 1 + 0 = 1, \quad v_2 : 0 + 1 = 1,$$
$$v_3 : 2 + (-1) = 1, v_4 : -1 + 1 = 0.$$

$z_j - c_j$ satırı. Pivot sütunundaki eleman $z_4 - c_4 = -1$; yine $A^* = A + C$:

$$z_0 : 10 + 2 = 12, \quad v_2 : 0 + 1 = 1,$$
$$v_3 : 4 + (-1) = 3, v_4 : -1 + 1 = 0;$$

v_1 sütunu, pivot satırındaki elemanı 0 olduğu için değişmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 4.3: $B_1 = (v_1, v_4)$ bazının tablosu (optimal tablo)

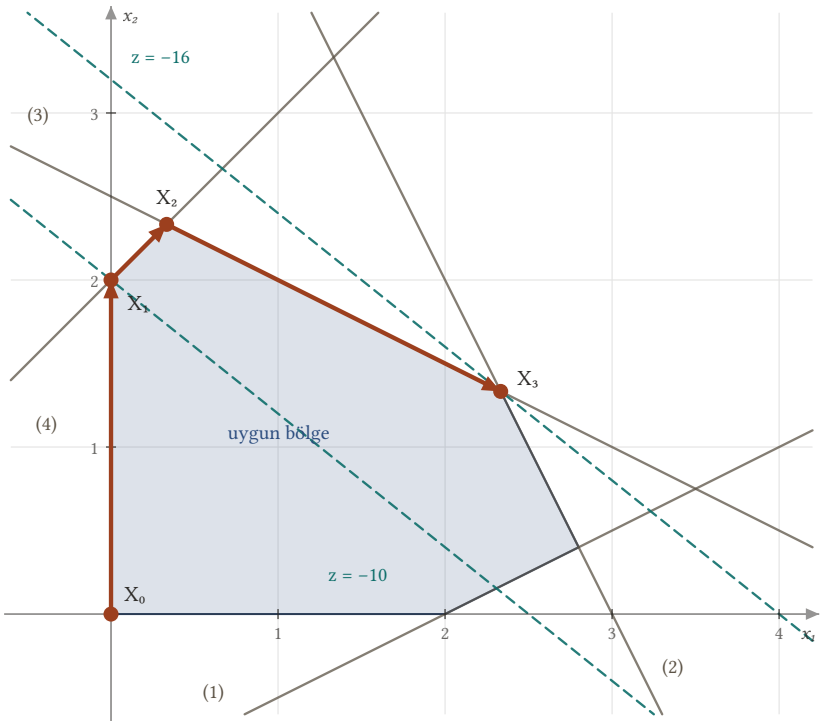
		c_j	3	2	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_1	3	4	1	1	1	0
x_4	0	2	0	1	-1	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 12$	0	1	3	0

Bulunan sayılar, iki önceki örnekte (Örnek 4.2 ve Örnek 4.3) hesaplanan değerlerin aynısıdır: $X_1 = (4, 0, 0, 2)$, $z = 12$, $y_{12} = y_{42} = 1$, $y_{13} = 1$, $y_{43} = -1$, $z_2 - c_2 = 1$, $z_3 - c_3 = 3$. Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan tablo optimaldir. ■

Şimdi başlangıç tablosunu kurduğumuz problemin (Örnek 4.4) çözümünü tamamlayabiliriz.

Örnek 4.6 (Örneğin Optimal Tabloya Kadar Çözümü). $x_1 - 2x_2 \leq 2$, $2x_1 + x_2 \leq 6$, $x_1 + 2x_2 \leq 5$, $-x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1, x_2 \geq 0$ kısıtları altında $\min z = -4x_1 - 5x_2$ problemini, başlangıç tablosundan (Tablo 4.1) başlayarak simpleks yöntemle çözünüz.

Çözüm.



Şekil 4.2: Simpleks yolu: $X_0 = (0, 0) \to X_1 = (0, 2) \to X_2 = (1/3, 7/3) \to X_3 = (7/3, 4/3)$. Her adım komşu köşeye geçer ve z değeri 0, −10, −13, −16 diye azalır; kesikli doğrular z = −10 ve z = −16 seviye doğrularıdır. (1) $x_1 - 2x_2 = 2$, (2) $2x_1 + x_2 = 6$, (3) $x_1 + 2x_2 = 5$, (4) $-x_1 + x_2 = 2$.

Başlangıç tablosunda (Tablo 4.1) v_2 baza giriyor, v_6 bazdan çıkıyordu; pivot $y_{62} = 1$.

Birinci iterasyon, 1. yöntem. $v_2 = (-2, 1, 2, 1)^T$ sütununu $(0, 0, 0, 1)^T$ birim vektörüne dönüştüren elemanter satır işlemlerini uygularız. Satırları baz değişkenleriyle S_3, S_4, S_5, S_6 diye adlandıralım. Pivot 1 olduğundan S_6 aynen kalır ve x_2 satırı olur; diğerleri:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$S_3 \leftarrow S_3 + 2S_6, \qquad S_4 \leftarrow S_4 - S_6,$$
$$S_5 \leftarrow S_5 - 2S_6, (z_j - c_j) \leftarrow (z_j - c_j) - 5S_6.$$

Örneğin $S_3 = (2 \mid 1, -2, 1, 0, 0, 0)$ satırı

$$\begin{aligned} S_3 + 2S_6 &= (2+4 \mid 1-2, -2+2, 1, 0, 0, 0+2) \\ &= (6 \mid -1, 0, 1, 0, 0, 2) \end{aligned}$$

olur.

Birinci iterasyon, 2. yöntem. Aynı sayıları dikdörtgen kuralı da verir. Birkaç eleman:

$$x_3, v_0 : 2 - \frac{(-2)\cdot 2}{1} = 6, x_4, v_0 : 6 - \frac{1\cdot 2}{1} = 4,$$
$$x_5, v_0 : 5 - \frac{2\cdot 2}{1} = 1, \qquad x_3, v_6 : 0 - \frac{(-2)\cdot 1}{1} = 2,$$
$$z_0 : 0 - \frac{5\cdot 2}{1} = -10, \qquad v_1 : 4 - \frac{5\cdot(-1)}{1} = 9.$$

Son satırdaki iki değer $z_j - c_j$ satırına aittir.

Tablo 4.4: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	-4	-5	0	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_3	0	6	-1	0	1	0	0	2	$-$
x_4	0	4	3	0	0	1	0	-1	$\frac{4}{3}$
x_5	0	1	$[3]$	0	0	0	1	-2	$\frac{1}{3} \Rightarrow$
x_2	-5	2	-1	1	0	0	0	1	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = -10$	$9 \Uparrow$	0	0	0	0	-5	

Birinci iterasyon tablosunda (Tablo 4.4) B_0 bazından $B_1 = (v_2, v_3, v_4, v_5)$ bazına, X_0 çözümünden

$$X_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0, 2, 6, 4, 1, 0)$$

uygun temel çözümüne geçildi. Amaç değeri $-4(0) - 5(2) = -10$'dur; bu, (5) eşitliğinin verdiği $0 - 2\cdot 5 = -10$ ile aynıdır. X_1, uygun bölgenin $(0, 2)$ köşesidir: $x_1 = 0$ ve $x_6 = 0$ olduğundan bu nokta x_2 ekseni ile $-x_1 + x_2 = 2$ doğrusunun kesişimidir.

Simpleks kriterleri arasında pozitif olan $z_1 - c_1 = 9$ kaldığından minimuma ulaşılmadı. Minimumda en büyük pozitif kriter girer; tek pozitif kriter 9 olduğu için v_1 baza girer. v_1 sütununda $y_{31} = -1 < 0$ ve $y_{21} = -1 < 0$ olduğundan bu satırlar teste girmez:

$$\lambda = \min\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} = \frac{x_5}{y_{51}}.$$

v_5 bazdan çıkar; pivot $y_{51} = 3$.

İkinci iterasyon. Pivot satırı 3'e bölünür: x_5 satırı $\left(\frac{1}{3} \mid 1, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ olur ve x_1 satırı adını alır. Diğer elemanları dikdörtgen kuralıyla hesaplarız; v_0, v_5, v_6 sütunları ve $z_j - c_j$ satırı:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x_3, v_0 : 6 - \frac{(-1)\cdot 1}{3} = \frac{19}{3}, x_3, v_6 : 2 - \frac{(-1)(-2)}{3} = \frac{4}{3},$$
$$x_4, v_0 : 4 - \frac{3\cdot 1}{3} = 3, \qquad x_4, v_6 : -1 - \frac{3\cdot(-2)}{3} = 1,$$
$$x_2, v_0 : 2 - \frac{(-1)\cdot 1}{3} = \frac{7}{3}, \quad x_2, v_6 : 1 - \frac{(-1)(-2)}{3} = \frac{1}{3},$$
$$x_3, v_5 : 0 - \frac{(-1)\cdot 1}{3} = \frac{1}{3}, \quad x_4, v_5 : 0 - \frac{3\cdot 1}{3} = -1,$$
$$x_2, v_5 : 0 - \frac{(-1)\cdot 1}{3} = \frac{1}{3}, \qquad z_0 : -10 - \frac{9\cdot 1}{3} = -13,$$
$$v_5 : 0 - \frac{9\cdot 1}{3} = -3, \qquad v_6 : -5 - \frac{9\cdot(-2)}{3} = 1.$$

v_2, v_3, v_4 sütunları pivot satırında 0 taşıdığı için değişmez; v_1 birim vektör olur.

Tablo 4.5: İkinci iterasyon tablosu

		c_j	-4	-5	0	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_3	0	$\frac{19}{3}$	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{19/3}{4/3}$
x_4	0	3	0	0	0	1	-1	$[1]$	$\frac{3}{1} \Rightarrow$
x_1	-4	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-$
x_2	-5	$\frac{7}{3}$	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7/3}{1/3}$
$z_j - c_j$		$z_0 = -13$	0	0	0	0	-3	$1 \Uparrow$	

İkinci iterasyon tablosunda (Tablo 4.5) B_1 bazından $B_2 = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ bazına, X_1 çözümünden

$$X_2 = (x_1, ..., x_6) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{19}{3}, 3, 0, 0\right)$$

uygun temel çözümüne geçildi. Amaç değeri

$$-4\cdot\frac{1}{3} - 5\cdot\frac{7}{3} = -\frac{39}{3} = -13$$

olup (5) eşitliğinin verdiği $-10 - \frac{1}{3}\cdot 9 = -13$ ile aynıdır. X_2, uygun bölgenin $(\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$ köşesidir: $x_5 = x_6 = 0$, yani $x_1 + 2x_2 = 5$ ile $-x_1 + x_2 = 2$ doğrularının kesişimi.
Pozitif kriter $z_6 - c_6 = 1$ kaldığından minimuma ulaşılmadı; v_6 baza girer. $y_{16} = -\frac{2}{3} < 0$ olduğundan x_1 satırı teste girmez:

$$\lambda = \min\left(\frac{19/3}{4/3}, \frac{3}{1}, \frac{7/3}{1/3}\right) = \min\left(\frac{19}{4}, 3, 7\right) = 3 = \frac{x_4}{y_{46}}.$$

v_4 bazdan çıkar; pivot $y_{46} = 1$.
Üçüncü iterasyon. Pivot 1 olduğundan x_4 satırı aynen kalır ve x_6 satırı olur. v_6 sütununun diğer elemanları $\frac{4}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ ve 1 olduğundan (1. yöntemle) x_3 satırından pivot satırının $\frac{4}{3}$ katı, x_1 satırından $-\frac{2}{3}$ katı, x_2 satırından $\frac{1}{3}$ katı, $z_j - c_j$ satırından da 1 katı çıkarılır. Pivot satırı $(3 \mid 0, 0, 0, 1, -1, 1)$ olduğundan yalnız v_0, v_4, v_5 sütunları değişir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x_3 : \frac{19}{3} - 4 = \frac{7}{3}, \quad 0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}, \quad \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3},$$
$$x_1 : \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}, \quad 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3},$$
$$x_2 : \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}, \quad 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$
$$z_j - c_j : -13 - 3 = -16, \quad 0 - 1 = -1, \quad -3 + 1 = -2.$$

Tablo 4.6: Üçüncü iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	-4	-5	0	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
x_3	0	$\frac{7}{3}$	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	0
x_6	0	3	0	0	0	1	-1	1
x_1	-4	$\frac{7}{3}$	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
x_2	-5	$\frac{4}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$z_j - c_j$		$z_0 = -16$	0	0	0	-1	-2	0

Optimal tabloda (Tablo 4.6) simpleks kriteri pozitif olan vektör kalmadı: Bütün $z_j - c_j \leq 0$. Sonuç 4.2 gereği optimal çözüme ulaşıldı. Optimal çözüm

$$X_3 = (x_1, \ldots, x_6) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0, 3\right)$$

ve amaç fonksiyonunun minimum değeri

$$\min z = -4 \cdot \frac{7}{3} - 5 \cdot \frac{4}{3} = -\frac{48}{3} = -16$$

dır. X_3, $2x_1 + x_2 = 6$ ile $x_1 + 2x_2 = 5$ doğrularının kesiştiği $(\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$ köşesidir ($x_4 = x_5 = 0$).
Çözümün başındaki şekil yöntemin izlediği yolu gösteriyor. Uygun bölge altı köşeli bir çokgendir; köşelerindeki amaç değerleri $(0,0)$'da 0, $(2,0)$'da -8, $(\frac{14}{5}, \frac{2}{5})$'te $-\frac{66}{5}$, $(\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$'te -16, $(\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$'te -13 ve $(0,2)$'de -10'dur. Simpleks yöntem bunlardan yalnız dördüne uğradı ve her adımda bir komşu köşeye geçerek amaç değerini $0 \to -10 \to -13 \to -16$ diye küçülttü.
Sonuç olarak problemin optimal çözümü $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{4}{3}$ ve $\min z = -16$'dır. ■

4.5 Algoritmanın Adım Adım Özeti

Şimdiye kadar gördüklerimizi tek bir reçetede toplayalım; bundan sonraki bütün simpleks bölümleri bu adımları kullanır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Simpleks yöntem yedi adımda

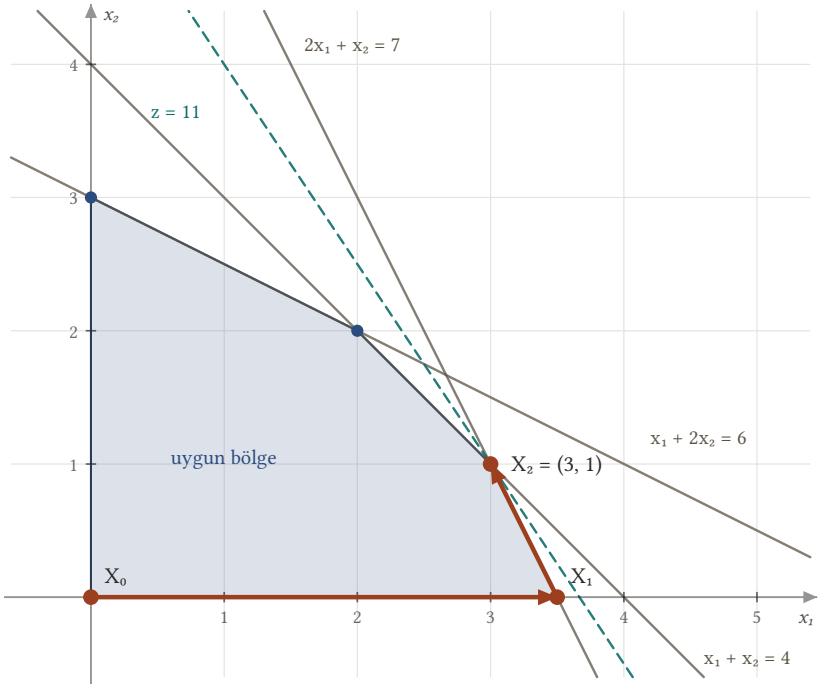
1. Problemi standart forma getir. Birim matris varsa (bütün kısıtlar $\leq$, sağ taraflar ≥ 0) problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir; yoksa önce yapay değişken ekle (Büyük M yöntemi).
2. Başlangıç tablosunu kur (Bölüm 4.3).
3. $z_j - c_j$ satırını incele. Minimumda bütün $z_j - c_j \leq 0$, maksimumda bütün $z_j - c_j \geq 0$ ise dur: tablo optimaldir.
4. Baza girecek v_k'yı seç: minimumda en büyük pozitif, maksimumda en negatif $z_j - c_j$.
5. v_k sütununda pozitif eleman yoksa dur: problem sınırsızdır.
6. Oran testiyle bazdan çıkacak v_r'yi seç; pivot y_{rk}'dır.
7. Dönüşüm kuralıyla yeni tabloyu hesapla (Bölüm 4.4) ve 3. adıma dön.

Örnek 4.7 (İki Değişkenli Bir Maksimum Problemi).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

problemini simpleks yöntemle çözünüz ve sonucu grafik yöntemle karşılaştırınız.

Çözüm.



Şekil 4.3: Maksimum örneğinde simpleks yolu: $X_0 = (0, 0) \longrightarrow X_1 = (7/2, 0) \longrightarrow X_2 = (3, 1)$. Kesikli doğru $z = 3x_1 + 2x_2 = 11$ seviye doğrusudur; uygun bölge bu doğrunun tamamen altında kalır ve ona yalnız X_2 köşesinde değer.

Standart form ve başlangıç tablosu. Kısıtlara x_3, x_4, x_5 aylak değişkenlerini ekleriz:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= 7 \\ x_j \geq 0, &\quad j = \overline{1,5} \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \end{aligned}$$

v_3, v_4, v_5 birim matrisi oluşturduğundan bu standart form simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir. Başlangıç bazı $B_0 = (v_3, v_4, v_5)$, başlangıç çözümü $X_0 = (0, 0, 4, 6, 7)$, $z_0 = 0$; simpleks kriterleri $z_1 - c_1 = -3$, $z_2 - c_2 = -2$.
Problem maksimum problemidir; en negatif $z_j - c_j$ girer. $-3 < -2$ olduğundan v_1 baza girer. Oranlar $\frac{4}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{7}{2}$; en küçüğü $\frac{7}{2}$ olduğundan v_5 bazdan çıkar, pivot $y_{51} = 2$.

Tablo 4.7: Başlangıç tablosu

		c_j	3	2	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_3	0	4	1	1	1	0	0	$\frac{4}{1}$
x_4	0	6	1	2	0	1	0	$\frac{6}{1}$
x_5	0	7	[2]	1	0	0	1	$\frac{7}{2} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	$-3 \Uparrow$	-2	0	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 2'ye bölünür: x_1 satırı $\left(\frac{7}{2} \mid 1, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$. x_3 ve x_4 satırlarının pivot sütunundaki elemanı 1 olduğundan her birinden yeni pivot satırı çıkarılır; $z_j - c_j$ satırına ise yeni pivot satırının 3 katı eklenir. Örneğin

$$x_3, v_0 : 4 - \frac{1 \cdot 7}{2} = \frac{1}{2}, \qquad x_4, v_2 : 2 - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2},$$
$$z_0 : 0 - \frac{(-3) \cdot 7}{2} = \frac{21}{2}, \qquad v_2 : -2 - \frac{(-3) \cdot 1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Tablo 4.8: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	3	2	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	$\left[\frac{1}{2}\right]$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1/2}{1/2} \Rightarrow$
x_4	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5/2}{3/2}$
x_1	3	$\frac{7}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{7/2}{1/2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{21}{2}$	0	$-\frac{1}{2} \Uparrow$	0	0	$\frac{3}{2}$	

Çözüm $X_1 = (\frac{7}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0)$, amaç değeri $\frac{21}{2}$; bu, uygun bölgenin $(\frac{7}{2}, 0)$ köşesidir. $z_2 - c_2 = -\frac{1}{2} < 0$ kaldığından maksimuma ulaşılmadı; v_2 baza girer. Oranlar 1, $\frac{5}{3}$, 7; en küçüğü 1 olduğundan v_3 bazdan çıkar, pivot $y_{32} = \frac{1}{2}$.
İkinci iterasyon. Pivot satırı $\frac{1}{2}$'ye bölünür, yani 2 ile çarpılır: x_2 satırı $(1 \mid 0, 1, 2, 0, -1)$. Sonra x_4 satırından bu satırın $\frac{3}{2}$ katı, x_1 satırından $\frac{1}{2}$ katı çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına $\frac{1}{2}$ katı eklenir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x_4 : \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2} \,\middle|\, 0, 0, 0-3, 1, -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = (1 \mid 0, 0, -3, 1, 1),$$
$$x_1 : \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2} \,\middle|\, 1, 0, 0-1, 0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (3 \mid 1, 0, -1, 0, 1),$$
$$z_j - c_j : \left(\frac{21}{2} + \frac{1}{2} \,\middle|\, 0, 0, 0+1, 0, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = (11 \mid 0, 0, 1, 0, 1).$$

Tablo 4.9: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	3	2	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_2	2	1	0	1	2	0	-1
x_4	0	1	0	0	-3	1	1
x_1	3	3	1	0	-1	0	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 11$	0	0	1	0	1

Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan Sonuç 4.3 gereği tablo optimaldir. Optimal çözüm

$$X_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 1, 0, 1, 0), \qquad \max z = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 11.$$

$x_4 = 1$ olması, ikinci kaynaktan 1 birim artakaldığını söyler: $3 + 2 \cdot 1 = 5 < 6$.
Grafikle karşılaştırma. Uygun bölgenin köşeleri ve amaç değerleri:

Tablo 4.10: Maksimum örneğinde köşelerdeki amaç değerleri

Köşe	$(0,0)$	$(\frac{7}{2}, 0)$	$(3,1)$	$(2,2)$	$(0,3)$
$z = 3x_1 + 2x_2$	0	$\frac{21}{2}$	11	10	6

En büyük değer $(3,1)$ köşesindeki 11'dir; simpleks yöntemin bulduğu sonuçla aynıdır. Yöntem beş köşeden üçüne uğradı: $(0,0) \to (\frac{7}{2}, 0) \to (3,1)$.
Sonuç olarak $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ ve $\max z = 11$'dir. ■

Örnek 4.8 (Üç Değişkenli Bir Maksimum Problemi).

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ 2x_2 + x_3 &\leq 11 \\ x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1,3} \\ \max z &= 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

problemini simpleks yöntemle çözünüz.

Çözüm.
Standart form. x_4, x_5, x_6 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_2 + x_3 + x_5 &= 11 \\ x_1 + x_2 + x_6 &= 6 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,6} \\ \max z = 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 & \\ +0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & \end{aligned}$$

Aylak sütunları birim matris oluşturur; problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir. Başlangıç bazı $B_0 = (v_4, v_5, v_6)$.

Başlangıç tablosu. Maksimumda en negatif $z_j - c_j$ girer: -5, yani v_2. Oranlar $\frac{8}{1}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{6}{1}$; en küçüğü $\frac{11}{2}$ olduğundan v_5 çıkar, pivot $y_{52} = 2$.

Tablo 4.11: Başlangıç tablosu

		c_j	2	5	2	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_4	0	8	2	1	1	1	0	0	$\frac{8}{1}$
x_5	0	11	0	[2]	1	0	1	0	$\frac{11}{2} \Rightarrow$
x_6	0	6	1	1	0	0	0	1	$\frac{6}{1}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-2	$-5 \Uparrow$	-2	0	0	0	

Birinci iterasyon. x_5 satırı 2'ye bölünüp x_2 satırı olur: $\left(\frac{11}{2} \mid 0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0 \right)$. x_4 ve x_6 satırlarından bu satırın 1 katı çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına 5 katı eklenir.

Tablo 4.12: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	2	5	2	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_4	0	$\frac{5}{2}$	2	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5/2}{2}$
x_2	5	$\frac{11}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	—
x_6	0	$\frac{1}{2}$	[1]	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1/2}{1} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{55}{2}$	$-2 \Uparrow$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	0	

Çözüm $X_1 = (0, \frac{11}{2}, 0, \frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2})$, amaç değeri $\frac{55}{2}$. Tek negatif kriter $z_1 - c_1 = -2$ olduğundan v_1 girer. x_2 satırında $y_{21} = 0$ olduğu için oran hesaplanmaz; $\frac{5}{4} > \frac{1}{2}$ olduğundan v_6 çıkar, pivot $y_{61} = 1$.

İkinci iterasyon. Pivot 1 olduğundan x_6 satırı aynen x_1 satırı olur. x_4 satırından bu satırın 2 katı çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına 2 katı eklenir; x_2 satırı pivot sütununda 0 taşıdığı için değişmez. Örneğin

$$x_4, v_3 : \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}, \quad x_4, v_6 : 0 - 2 \cdot 1 = -2,$$

$$z_j - c_j, v_3 : \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}, \qquad z_0 : \frac{55}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{57}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 4.13: İkinci iterasyon tablosu

		c_j	2	5	2	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_4	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\left[\frac{3}{2}\right]$	1	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3/2}{3/2} \Rightarrow$
x_2	5	$\frac{11}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{11/2}{1/2}$
x_1	2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{57}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2} \Uparrow$	0	$\frac{3}{2}$	2	

Dikkat: v_3'ün kriteri bir önceki tabloda $+\frac{1}{2}$ iken şimdi $-\frac{1}{2}$ oldu. Kriterler her tabloda yeniden hesaplanır; bir kez "iyileştirmez" görünen bir vektör sonradan baza girebilir.
Çözüm $X_2 = (\frac{1}{2}, \frac{11}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0)$, amaç değeri $\frac{57}{2}$. v_3 girer; oranlar 1 ve 11 olduğundan v_4 çıkar, pivot $y_{43} = \frac{3}{2}$.
Üçüncü iterasyon. x_4 satırı $\frac{3}{2}$'ye bölünür: x_3 satırı $\left(1 \mid 0, 0, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3} \right)$. Sonra x_2 satırından bu satırın $\frac{1}{2}$ katı çıkarılır, x_1 satırına ve $z_j - c_j$ satırına $\frac{1}{2}$ katı eklenir:

$$x_2 : \left(\frac{11}{2} - \frac{1}{2} \,\middle|\, 0, 1, 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}, 0 + \frac{2}{3} \right) = \left(5 \,\middle|\, 0, 1, 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right),$$
$$x_1 : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \,\middle|\, 1, 0, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}, 1 - \frac{2}{3} \right) = \left(1 \,\middle|\, 1, 0, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right),$$
$$z_j - c_j : \left(\frac{57}{2} + \frac{1}{2} \,\middle|\, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{3}{2} + \frac{1}{6}, 2 - \frac{2}{3} \right) = \left(29 \,\middle|\, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3} \right).$$

Tablo 4.14: Üçüncü iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	2	5	2	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
x_3	2	1	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$
x_2	5	5	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	2	1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 29$	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$

Bütün $z_j - c_j \geq 0$; Sonuç 4.3 gereği tablo optimaldir. Optimal çözüm

$$X_3 = (x_1, \ldots, x_6) = (1, 5, 1, 0, 0, 0), \qquad \max z = 2 + 25 + 2 = 29.$$

Kontrol: $2 + 5 + 1 = 8$, $10 + 1 = 11$, $1 + 5 = 6$; üç kısıt da eşitlikle sağlanır, bu yüzden bütün aylak değişkenler sıfırdır. Amaç değeri her iterasyonda arttı: $0 \to \frac{55}{2} \to \frac{57}{2} \to 29$. ■

Örnek 4.9 (Sınırsızlık Belirtisi Veren Bir Tablo).

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

problemini simpleks yöntemle incelemeye başlayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
x_3 ve x_4 aylak değişkenleriyle standart form $x_1 - x_2 + x_3 = 1$, $x_1 + x_4 = 3$, $\max z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$ olur ve başlangıç bazı $B_0 = (v_3, v_4)$'tür.

Tablo 4.15: Başlangıç tablosu

		c_j	1	2	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	1	1	-1	1	0	–
x_4	0	3	1	0	0	1	–
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-1	$-2 \Uparrow$	0	0	

Maksimumda en negatif kriter girer: $z_2 - c_2 = -2$, yani v_2. Ama v_2 sütununun elemanları $y_{32} = -1$ ve $y_{42} = 0$; hiçbiri pozitif değildir, oran testi yapılamaz. Önerme 4.2 gereği amaç fonksiyonu üstten sınırsızdır.
Bunu doğrudan da görebiliriz. Her $\lambda \geq 0$ için

$$X(\lambda) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, \lambda, 1 + \lambda, 3)$$

uygun bir çözümdür: $0 - \lambda + (1 + \lambda) = 1$ ve $0 + 3 = 3$. Amaç değeri $z = 2\lambda$ olup $\lambda \to \infty$ iken sonsuza gider. Yani $x_1 = 0$ tutulup x_2 istenildiği kadar büyütülebilir; hiçbir kısıt buna engel olmaz. Problemin maksimumu yoktur. ■

Bu bölümde simpleks yöntemi, aylak değişkenlerin kendiliğinden birim matris verdiği problemler için kurduk: Başlangıç tablosu hazırdı, gerisi kriter, oran testi ve pivot dönüşümünden ibaretti. Kısıtlarda $\geq$ ya da $=$ bulunduğunda standart form birim matris içermez ve başlangıç için bir uygun temel çözüm kendiliğinden görünmez. Bir sonraki bölüm Büyük M yöntemi, yapay değişkenlerle bu başlangıcın nasıl kurulduğunu ve aynı tabloların nasıl kullanıldığını gösteriyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

5. Büyük M Yöntemi

Simpleks yöntem bölümünde yalnız bütün kısıtları $\leq$ olan ve sağ tarafları negatif olmayan problemleri çözdük. Böyle bir problemin standart formunda aylak değişkenlerin sütunları kendiliğinden bir birim matris oluşturur; başlangıç bazı ve başlangıç tablosu (Bölüm 4.3) hiç hesap yapmadan yazılır. Kısıtlarda $\geq$ ya da $=$ bulununca bu kolaylık kaybolur. Artık değişkenin sütununda -1 vardır, eşitlik kısıtına ise hiç yeni değişken eklenmez. Standart form birim matris içermediği için problem henüz simpleks yöntem ile çözülebilir halde değildir.
Bu durumda birim sütunu eksik olan denklemlere yapay değişkenler ekleyip başlangıç bazını kendimiz kurarız. Kurulan baz orijinal problemin bir çözümünü vermez, bu yüzden yapay değişkenlerden sonunda kurtulmamız gerekir. Bunun iki yolu vardır: Büyük M yöntemi ve İki faz yöntemi. Bu bölümde birincisini göreceğiz. Büyük M yöntemi simpleks yöntemin bir türüdür: tablolar, oran testi ve dönüşüm kuralı aynen kalır, yalnız amaç fonksiyonuna yapay değişkenler için çok büyük bir ceza eklenir.

5.1 Yapay Değişkenler ve M Problemi

Önce yapay değişkenlerin problemi nasıl değiştirdiğine bakalım.
Yapay değişkeni Lineer programlama problemi bölümünde tanımlamıştık (Tanım 1.10): birim sütunu olmayan bir denkleme, yalnız o denklemde katsayısı 1 ile görünecek biçimde eklenen negatif olmayan değişkendir ve $x_{u_1}, x_{u_2}, \ldots$ ile gösterilir. Yapay değişkenin problemin kendisinde bir anlamı yoktur. Aylak değişken kullanılmayan kaynağı, artık değişken aşılan gereksinimi ölçer; yapay değişken ise yalnız bir başlangıç çözümü kurabilmek için eklenen yardımcı bir değişkendir. Yapay değişkenleri eklenmiş probleme bir ad verelim.

Tanım 5.1 (M problemi). Standart formdaki

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ \vec{x} &\geq 0 \\ \min z &= \vec{c}^T\vec{x} \end{aligned}$$

problemine **orijinal problem** diyelim. Birim sütunu olmayan denklemlere $x_{u_1}, \ldots, x_{u_p}$ yapay değişkenleri eklensin ve R, sütunları bu değişkenlerin $v_{u_1}, \ldots, v_{u_p}$ sütunları olan $m \times p$ matris olsun. M çok büyük bir pozitif sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} A\vec{x} + R\,\vec{x}_u &= \vec{b} \\ \vec{x} \geq 0, \quad \vec{x}_u &\geq 0 \\ \min z &= \vec{c}^T\vec{x} + M(x_{u_1} + \ldots + x_{u_p}) \end{aligned}$$

problemine orijinal problemin **M problemi** denir; burada $\vec{x}_u = (x_{u_1}, \ldots, x_{u_p})$'dir. Orijinal problem maksimum problemiyse M probleminin amacı $\max z = \vec{c}^T\vec{x} - M(x_{u_1} + \ldots + x_{u_p})$ olur.

Yani M problemi, orijinal problemin simpleks yöntem ile çözülebilir hale (Tanım 1.9) getirilmiş biçimidir: kısıtlarına yapay değişkenler, amacına da onların cezası eklenmiştir. Aylak ve artık değişkenler zaten $\vec{x}$'in içindedir, çünkü orijinal problem standart formdadır. R'nin her sütunu, eklendiği denklemde 1, diğer denklemlerde 0 taşır.
İki problem arasındaki bağ, yapay değişkenlerin sıfır olduğu çözümlerden geçer.

Önerme 5.1 (Orijinal problem ile M probleminin uygun çözümleri). *Bir $\vec{x}$ vektörü için şu iki ifade denktir:*

1. *$\vec{x}$ orijinal problemin uygun çözümüdür;*
2. *yapay değişkenlerin hepsi sıfır alınarak elde edilen $(\vec{x}, \vec{0})$, M probleminin uygun çözümüdür.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu durumda M probleminin $(\vec{x}, \vec{0})$ noktasındaki amaç değeri, orijinal problemin $\vec{x}$ noktasındaki değeri olan $\vec{c}^T\vec{x}$'e eşittir.

> ***İspat.***
> *$\vec{x}_u = \vec{0}$ iken $R\,\vec{x}_u = \vec{0}$ olduğundan M probleminin kısıtları $A\vec{x} = \vec{b}$'ye, işaret koşulları da $\vec{x} \geq 0$'a iner. Bunlar tam olarak orijinal problemin kısıtlarıdır; dolayısıyla 1 ile 2 denktir. Amaçtaki ceza terimi $\pm M(x_{u_1} + \ldots + x_{u_p})$ sıfır olduğundan amaç değeri $\vec{c}^T\vec{x}$'tir.*
> ■

Yani orijinal problemin çözümleri, M probleminin yapay değişkenleri sıfır olan çözümleridir. Başlangıç tablosunun çözümü genellikle bunlardan biri değildir: orada yapay değişkenler eklendikleri denklemlerin sağ taraflarını üstlenir ve sağ taraf sıfır olmadıkça pozitiftir. Simpleks yöntemden istediğimiz, yapay değişkenleri sıfıra indirip orijinal problemin bir çözümüne ulaşması ve oradan optimuma devam etmesidir. Amaçtaki ceza tam olarak bunu sağlar. Minimum probleminde her birim yapay değişken maliyete M ekler. M çok büyük olduğundan yapay değişkenlerin toplamını azaltmak, $\vec{c}^T\vec{x}$ üzerindeki her kazançtan daha değerlidir. Maksimum probleminde $-M$ katsayısı aynı işi kârdan düşerek yapar. Böylece simpleks yöntem kendi seçim kuralını izlerken önce yapay değişkenleri bazdan çıkarmaya yönelir.
M için belirli bir sayı seçmeyiz. Seçilen sayı yeterince büyük değilse ceza, amaçtaki gerçek katsayılar karşısında etkisiz kalabilir. Bu yüzden M tabloda bir sembol olarak taşınır ve "karşılaştırıldığı her sayıdan büyük" diye yorumlanır. Bunun hesapta ne anlama geldiğini şimdi görelim.

5.2 M'li Simpleks Kriterleri

M problemi çözülürken tabloya M yalnız amaç katsayılarından girer.
Tablonun gövdesi, yani v_0 sütunu ve bütün y_{ij} değerleri, yalnız kısıtlara ve baza bağlıdır; amaç katsayılarını hiç kullanmaz. Dolayısıyla gövdede M bulunmaz. M yalnız en üstteki c_j satırında ve c_B sütununda görünür. $z_j = \vec{c}_B^T v_j$ çarpımında bazdaki her yapay değişken $\pm M$ katsayısını taşıdığı için her simpleks kriteri ve amaç değeri

$$z_j - c_j = a_j M + b_j, \qquad z_0 = sM + q$$

biçimindedir; a_j, b_j, s, q sıradan sayılardır. Minimum probleminde s, bazdaki yapay değişkenlerin değerlerinin toplamıdır; maksimum probleminde bu toplamın -1 katıdır. Bir tablodan ötekine geçerken hangi kriterin daha büyük olduğuna karar vermemiz gerekir; bunun kuralı şudur.

Önerme 5.2 (M'li sayıların karşılaştırılması). *a, b, a', b' gerçel sayılar olsun. $M > M_0$ olan her M için*

$$aM + b > a'M + b'$$

eşitsizliğini sağlayan bir M_0 sayısının var olması için gerek ve yeter koşul, ya $a > a'$ ya da $a = a'$ ve $b > b'$ olmasıdır. Özel olarak $a' = b' = 0$ alınırsa: $aM + b$ sayısının yeterince büyük her M için pozitif olması için gerek ve yeter koşul, $a > 0$ ya da $a = 0$ ve $b > 0$ olmasıdır.

> ***İspat.***
> *Farkı $d(M) = (a - a')M + (b - b')$ ile gösterelim ve üç durumu ayıralım.*
>
> - *$a > a'$ ise $M > \dfrac{b' - b}{a - a'}$ olan her M için $d(M) > 0$'dır.*
> - *$a = a'$ ise $d(M) = b - b'$ sabittir; her M için pozitif olması $b > b'$ demektir, aksi halde hiçbir M için pozitif değildir.*
> - *$a < a'$ ise $M > \dfrac{b - b'}{a' - a}$ olan her M için $d(M) < 0$'dır; yani eşitsizlik yeterince büyük hiçbir M için sağlanmaz.*
>
> *Böylece $d(M) > 0$ eşitsizliği yeterince büyük her M için tam olarak ifadedeki iki durumda sağlanır. Özel durum, $a' = b' = 0$ yazılarak hemen elde edilir.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani iki M'li sayıyı karşılaştırırken **önce M'nin katsayılarına** bakarız; katsayısı büyük olan büyüktür. Katsayılar eşitse **sabit terimlere** bakarız. Örneğin $2M + 3 > M + 1000$'dir, çünkü $2 > 1$; M büyüdükçe aradaki fark da büyür. Bir çözüm boyunca yalnız sonlu sayıda karşılaştırma yapıldığından hepsine birden yetecek bir M_0 vardır. Dolayısıyla sembolik M ile yapılan her seçim, M_0'dan büyük herhangi bir sayının M yerine konduğu simpleks yöntemin seçimiyle aynıdır.
Optimallik de aynı anlamda okunur. Minimum probleminde bir tablonun her kriteri için ya $a_j < 0$ ya da $a_j = 0$ ve $b_j \leq 0$ ise, yeterince büyük her M için bütün $z_j - c_j \leq 0$ olur. Maksimum probleminde her kriter için ya $a_j > 0$ ya da $a_j = 0$ ve $b_j \geq 0$ istenir. Böyle bir tabloya kısaca **optimal tablo** diyeceğiz. Tablonun gövdesi M'ye bağlı olmadığından, optimal tablonun temel çözümü yeterince büyük her M için M probleminin optimal çözümüdür (Simpleks yöntem bölümündeki optimallik koşulu). Yol boyunca yapay sütunlar atılmışsa bu, atılan yapay değişkenlerin kaldırıldığı küçültülmüş M problemi için geçerlidir; bunun neden yeterli olduğunu aşağıda göreceğiz.

Örnek 5.1 (M'li kriterleri sıralamak). Bir minimum probleminin tablosunda simpleks kriterleri

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= 2M - 5, \quad & z_2 - c_2 &= \frac{1}{3}M - 1, \\ z_3 - c_3 &= 100, & z_4 - c_4 &= 0, \\ z_5 - c_5 &= -M + 50, & z_6 - c_6 &= 2M + 3 \end{aligned}$$

bulunmuş olsun. Bu sayıları yeterince büyük M için büyükten küçüğe sıralayarak baza girecek vektörü belirleyiniz.

Çözüm.
Her sayıyı $aM + b$ biçiminde okuyup M'nin katsayılarını yazalım: sırasıyla 2, $\frac{1}{3}$, 0, 0, -1, 2.

- En büyük katsayı 2'dir ve iki kriterde görünür: $2M - 5$ ve $2M + 3$. Katsayılar eşit olduğu için sabit terimlere bakarız: $3 > -5$, dolayısıyla $2M + 3 > 2M - 5$.
- Sonra katsayısı $\frac{1}{3}$ olan $\frac{1}{3}M - 1$ gelir.
- Katsayısı 0 olan iki sayı 100 ve 0'dır; $100 > 0$.
- En küçüğü, katsayısı -1 olan $-M + 50$'dir.

Sıralama

$$2M + 3 > 2M - 5 > \frac{1}{3}M - 1 > 100 > 0 > -M + 50$$

olur. $\frac{1}{3}M - 1$ sayısının 100'den büyük olduğuna şaşırmamak gerekir: bu yalnız $M > 303$ için doğrudur, ama M zaten karşılaştırıldığı her sayıdan büyük kabul ediliyor. $M = 1000$ alarak sağlayalım: sayılar sırasıyla 2003, 1995, 332,3..., 100, 0 ve -950 olur; sıralama aynıdır.
Minimum probleminde en büyük pozitif kriterin sütunu baza girer. Pozitif kriterler ilk dördüdür ve en büyüğü $z_6 - c_6 = 2M + 3$'tür; v_6 baza girer. (Aynı kriterler bir maksimum probleminde bulunsaydı en negatif kriter, yani $-M + 50$ seçilir ve v_5 baza girerdi.)
■

5.3 Bazdan Çıkan Yapay Değişkenin Sütunu

Simpleks yöntemden farklı olarak Büyük M yönteminde tablolar ilerledikçe daralır. Bir yapay değişken bazdan çıktığında değeri 0 olur. Amacımız zaten onu sıfırda tutmak olduğundan, onu yeniden baza almanın hiçbir yararı yoktur.

> **i** Not
>
> **Not.** Bazdan çıkan bir yapay değişkenin sütunu sonraki tablolarda yazılmaz.

Bu kuralın gerekçesi şudur. Sütunu atmak, o yapay değişkeni kalıcı olarak 0'a sabitlemek demektir. Geriye kalan tablo, bu yapay değişkenin hiç eklenmediği küçültülmüş M probleminin tablosudur: diğer sütunlar baz vektörleri cinsinden aynı biçimde yazılır ve atılan sütun hiçbir hesaba girmez. Orijinal problemin her uygun çözümü $\vec{x}$ için $(\vec{x}, \vec{0})$ bu küçültülmüş M probleminin de uygun çözümüdür (Önerme 5.1); dolayısıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

sütunu atmakla orijinal problemin hiçbir çözümünü kaybetmeyiz. Kazancımız, her tabloda bir sütun daha az hesaplamaktır.

5.4 Yöntemin Sonuçları

Simpleks yöntem M problemini çözüp optimal tabloya ulaşınca yapay değişkenlerin durumuna bakılır. Üç durum vardır: yapay değişkenlerin hepsi bazdan çıkmıştır; bazda pozitif değerli bir yapay değişken kalmıştır; bazda yalnız sıfır değerli yapay değişkenler kalmıştır. Birinci ve üçüncü durum aşağıdaki teoremde birlikte ele alınır.

Teorem 5.1 (Yapay değişkenleri sıfır olan optimal tablo). *M probleminin optimal tablosunda bütün yapay değişkenlerin değeri 0 olsun; yani yapay değişkenler ya bazda değildir ya da bazda 0 değeriyle bulunur. Bu tablonun temel çözümünden yapay değişkenler atılarak elde edilen $\hat{\vec{x}}$ orijinal problemin optimal çözümüdür ve optimal değer $\vec{c}^{\,T}\hat{\vec{x}} = z_0$'dır.*

> ***İspat.***
> *Minimum problemi için yapalım. Tablonun temel çözümü $(\hat{\vec{x}}, \vec{0})$ M probleminin uygun çözümüdür. Önerme 5.1 gereği $\hat{\vec{x}}$ orijinal problemin uygun çözümüdür ve amaç değeri $\vec{c}^{\,T}\hat{\vec{x}}$'tir. Bu değer z_0'a eşittir, çünkü c_B sütunundaki M'ler sıfır değerli yapay değişkenlerle çarpılır ve z_0'da M kalmaz.*
> *Şimdi $\bar{\vec{x}}$ orijinal problemin herhangi bir uygun çözümü olsun. Önerme 5.1 gereği $(\bar{\vec{x}}, \vec{0})$ M probleminin uygun çözümüdür ve amaç değeri $\vec{c}^{\,T}\bar{\vec{x}}$'tir. Tablo optimal olduğundan yeterince büyük her M için $(\hat{\vec{x}}, \vec{0})$ M probleminin (sütunlar atılmışsa küçültülmüş M probleminin; son paragrafa bakınız) optimal çözümüdür; o halde*
>
> $$\vec{c}^{\,T}\hat{\vec{x}} \leq \vec{c}^{\,T}\bar{\vec{x}}$$
>
> *olur. $\bar{\vec{x}}$ keyfi olduğundan $\hat{\vec{x}}$ orijinal problemin optimal çözümüdür. Maksimum probleminde eşitsizlik ters yönde yazılır, gerisi aynıdır.*
> *Yol boyunca bazı yapay sütunlar atılmışsa, tablo bu yapay değişkenlerin kaldırıldığı küçültülmüş M probleminin tablosudur. $(\vec{x}, \vec{0})$ o problemin de uygun çözümü olduğundan akıl yürütme değişmez.*
> ■

Yani optimal tabloda yapay değişkenlerin hepsi sıfırsa iş bitmiştir: tablonun gösterdiği çözüm orijinal problemin optimal çözümüdür. İkinci durum ise tam tersini söyler.

Teorem 5.2 (Bazda pozitif yapay değişken kalması). *M probleminin optimal tablosunda bazda pozitif değerli bir yapay değişken varsa orijinal problemin uygun çözümü yoktur.*

> ***İspat.***
> *Minimum problemi için yapalım. Tablonun temel çözümü $(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{x}}_u)$ olsun. Bu değerler v_0 sütununda durur ve M'ye bağlı değildir. Yapay değişkenlerin değerlerinin toplamını s ile gösterelim; varsayım gereği $s > 0$'dır. Tablonun amaç değeri*
>
> $$z_0 = \vec{c}^{\,T}\hat{\vec{x}} + Ms$$
>
> *dir. Orijinal problemin bir $\bar{\vec{x}}$ uygun çözümü olduğunu varsayalım. Önerme 5.1 gereği $(\bar{\vec{x}}, \vec{0})$, M probleminin amaç değeri $\vec{c}^{\,T}\bar{\vec{x}}$ olan bir uygun çözümüdür. Tablo optimal olduğundan bir M_0'dan büyük her M için*
>
> $$\vec{c}^{\,T}\hat{\vec{x}} + Ms \leq \vec{c}^{\,T}\bar{\vec{x}}, \quad \text{yani} \quad M \leq \frac{\vec{c}^{\,T}\bar{\vec{x}} - \vec{c}^{\,T}\hat{\vec{x}}}{s}$$
>
> *olmalıdır. Sağ taraf M'den bağımsız bir sayıdır; M onu aştığı anda eşitsizlik bozulur. Bu çelişki, orijinal problemin uygun çözümü olmadığını gösterir.*
> *Maksimum probleminde amaç değeri $\vec{c}^{\,T}\hat{\vec{x}} - Ms$'dir ve optimallik $\vec{c}^{\,T}\hat{\vec{x}} - Ms \geq \vec{c}^{\,T}\bar{\vec{x}}$ verir; bu da $M \leq (\vec{c}^{\,T}\hat{\vec{x}} - \vec{c}^{\,T}\bar{\vec{x}})/s$ demektir ve aynı biçimde çelişkiye varılır. Atılmış yapay sütunlar varsa, Teorem 5.1 ispatındaki gibi küçültülmüş M problemiyle aynı akıl yürütme yapılır.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani yöntem, orijinal problemin uygun çözümü olup olmadığını kendiliğinden söyler. Optimal tabloda bazda pozitif bir yapay değişken kaldıysa, M'nin büyük cezasına rağmen yapay değişken sıfıra indirilememiştir; bunun tek nedeni kısıtların birlikte sağlanamamasıdır. Bu durumda en iyi çözümden söz edilemez. Böyle bir sonuçla karşılaşınca modelin kuruluşunu da gözden geçirmek gerekir: çoğu zaman bir kısıtın yönü yanlış yazılmıştır ya da veriler birbiriyle çelişir.
Geriye üçüncü durum kalıyor: yapay değişken bazda, ama değeri 0. Teorem 5.1 bu durumda da çözümün optimal olduğunu söyler; tablonun gösterdiği çözüm dejenere bir temel çözümdür (Tanım 2.6). Aşağıdaki önerme, bazda kalan yapay değişkenden nasıl kurtulunacağını anlatır.

Önerme 5.3 (Bazda sıfır değerli yapay değişken). *Bir tabloda x_u yapay değişkeni r. satırda $y_{r0} = 0$ değeriyle bazda olsun.*

1. *Yapay olmayan bir v_k sütunu için $y_{rk} \neq 0$ ise y_{rk} pivot alınarak x_u bazdan çıkarılabilir. Yeni tablonun v_0 sütunu eskisiyle aynıdır; yani aynı çözüm, x_u'yu içermeyen bir bazla elde edilir.*
2. *Yapay olmayan bütün v_j sütunları için $y_{rj} = 0$ ise orijinal problemin kısıtlarından biri diğerlerinin lineer kombinasyonudur, yani gereksizdir. Yapay değişkenler sıfırken r. satır $0 = 0$ denklemine dönüşür ve tablodan silinebilir.*

> ***İspat.***
> ***1.*** *Pivot sıfırdan farklı olduğu için dönüşüm kuralı (Bölüm 4.4) uygulanabilir. Yeni tabloda x_k satırının değeri $y_{r0}/y_{rk} = 0$ olur. Diğer her i satırının yeni değeri*
>
> $$y_{i0} - \frac{y_{ik}\, y_{r0}}{y_{rk}} = y_{i0} - 0 = y_{i0}$$
>
> *dır. Demek ki bütün değişkenlerin değerleri aynı kalır ve hiçbiri negatif olmaz. Oran testi pivotu pozitif seçiyordu, çünkü değerlerin negatif olmaması gerekiyordu; burada değerler hiç değişmediği için y_{rk} negatif de olabilir.*
> ***2.*** *Simpleks tablosunun her satırı, başlangıç tablosunun satırlarından elemanter satır işlemleriyle elde edilir. Bu yüzden r. satır, başlangıç tablosunun m satırının $w_1, \ldots, w_m$ katsayılı bir lineer kombinasyonudur. Bu katsayıların hepsi sıfır olamaz, çünkü r. satırın x_u sütununda 1 vardır. Başlangıç tablosunun i. satırının yapay olmayan sütunlardaki ve v_0 sütunundaki elemanları, orijinal problemin i. kısıtının katsayıları a_{ij} ve sağ tarafı b_i'dir. r. satırın bu sütunlardaki bütün elemanları sıfır olduğundan*
>
> $$\sum_{i=1}^{m} w_i\, a_{ij} = 0 \ \ (\text{her} \ \ j \ \ \text{için}), \qquad \sum_{i=1}^{m} w_i\, b_i = 0$$
>
> *olur. $w_l \neq 0$ olan bir l seçelim. l. kısıtın iki yanı, diğer kısıtların $-w_i/w_l$ katsayılarıyla toplamına eşittir; yani l. kısıt diğerlerinden kendiliğinden çıkar ve gereksizdir. Son olarak r. satırın yapay olmayan sütunlardaki elemanları ve y_{r0} sıfır olduğundan, yapay değişkenler sıfır alınınca bu satır $0 = 0$ der; silinmesi hiçbir bilgiyi kaybettirmez.*
> ■

Yani bazda sıfır değerle kalan yapay değişken bir sorun değildir: çözüm uygundur ve optimaldir. İstenirse yapay değişken birinci maddedeki pivotla bazdan çıkarılır; bu mümkün değilse problemde gereksiz bir kısıt vardır ve onun satırı atılır. Birinci maddedeki pivot yalnız bazı değiştirir: yeni tablonun $z_j - c_j$ satırı optimallik biçimini korumayabilir, ama gösterdiği çözüm aynı olduğundan bu çözüm optimal kalır.

5.5 Büyük M Yöntemiyle Çözüm

Şimdi yöntemi adım adım toplayalım ve örneklerde uygulayalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

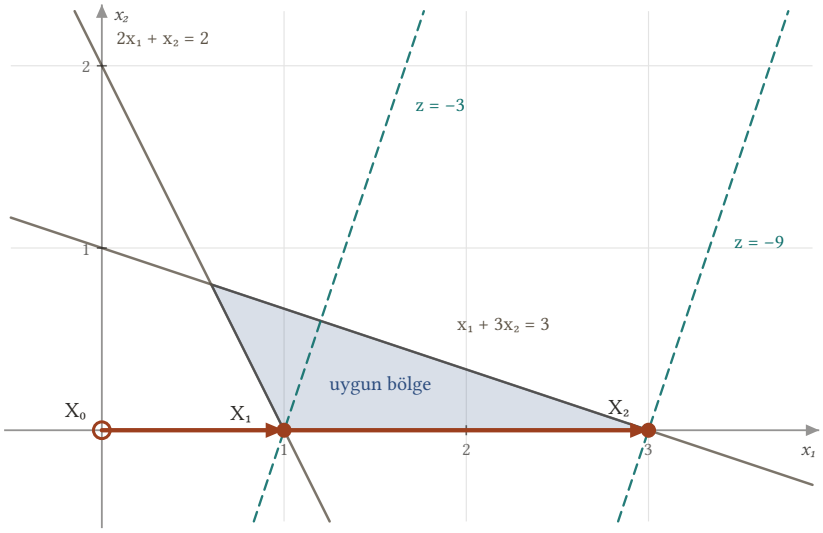
Altı adımda Büyük M yöntemi

1. **Standart form.** Sağ tarafı negatif olan satırları -1 ile çarp. $\leq$ kısıtlara aylak değişken ekle, $\geq$ kısıtlardan artık değişken çıkar (Tanım 1.8); eşitliklere dokunma.
2. **Yapay değişkenler.** Birim sütunu olmayan her denkleme bir yapay değişken ekle; amaç katsayısı minimumda $+M$, maksimumda $-M$'dir. Problem artık simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir.
3. **Başlangıç tablosu.** Birim sütunları veren değişkenler (aylaklar ve yapaylar) başlangıç bazıdır. c_B sütununda $\pm M$ bulunduğu için $z_j - c_j$ satırı artık $-c_j$ değildir: her sütun için $z_j = \vec{c}_B^{\,T} v_j$ hesaplanır ve c_j çıkarılır; ayrıca $z_0 = \vec{c}_B^{\,T} v_0$.
4. **Giren vektör.** Minimum probleminde en büyük pozitif, maksimum probleminde en negatif $z_j - c_j$ girer. $aM + b$ biçimindeki kriterler karşılaştırılırken önce M'nin katsayısına, eşitse sabit terime bakılır (Önerme 5.2).
5. **Çıkan vektör ve yeni tablo.** Oran testi ve dönüşüm kuralı simpleks yöntemdekinin aynısıdır (Bölüm 4.4). Bazdan çıkan yapay değişkenin sütunu yeni tabloda yazılmaz. Giren sütunda pozitif eleman yoksa oran testi yapılamaz; bu durum Sınırsız çözüm ve alternatif optimal çözüm bölümünde incelenir.
6. **Sonuç.** Optimal tabloda yapay değişkenlerin hepsi sıfırsa tablonun çözümü orijinal problemin optimal çözümüdür (Teorem 5.1). Bazda pozitif bir yapay değişken kaldıysa orijinal problemin uygun çözümü yoktur (Teorem 5.2).

Örnek 5.2 (Büyük M yöntemiyle bir minimum problemi). Aşağıdaki problemi Büyük M yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= -3x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.



Şekil 5.1: Örneğin uygun bölgesi (boyalı üçgen) ve Büyük M yönteminin yolu: $X_0 = (0, 0) \longrightarrow X_1 = (1, 0) \longrightarrow X_2 = (3, 0)$. İçi boş çizilen X_0 uygun bölgenin dışındadır; orada $2x_1 + x_2 \geq 2$ kısıtı sağlanmaz ve eksik kalan 2 birimi yapay değişken üstlenir. Kesikli doğrular $z = -3$ ve $z = -9$ seviye doğrularıdır. $x_2 \leq 4$ kısıtı şeklin üstünde kalır ve bölgeyi etkilemez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Standart form. Önce problemi standart forma getirelim. Birinci kısıt $\geq$ olduğundan x_3 artık değişkenini çıkarırız; ikinci ve üçüncü kısıtlar $\leq$ olduğundan x_4 ve x_5 aylak değişkenlerini ekleriz. Sağ taraflar $2, 3, 4$ negatif değildir:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_5 &= 4 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,5} \\ \min z &= -3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \end{aligned}$$

Çözülebilir hal. x_4 yalnız ikinci, x_5 yalnız üçüncü denklemde ve katsayısı 1 ile görünür; bu iki denklemin birim sütunu hazırdır. Birinci denklemde ise x_3'ün katsayısı -1'dir. Standart form birim matris içermediği için henüz simpleks yöntem ile çözülebilir halde değildir. Yalnız birinci denkleme x_{u_1} yapay değişkenini ekleriz; minimum problemi olduğundan amaç katsayısı $+M$'dir:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_{u_1} &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 3 \\ x_2 + x_5 &= 4 \\ x_1, \ldots, x_5, x_{u_1} &\geq 0 \\ \min z &= -3x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ &\quad +0x_5 + Mx_{u_1} \end{aligned}$$

Artık v_{u_1}, v_4, v_5 sütunları 3×3 birim matrisi oluşturur. Başlangıç bazı $B_0 = (v_{u_1}, v_4, v_5)$, başlangıç çözümü $x_{u_1} = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$ ve diğer değişkenler 0'dır.

Simpleks kriterleri. Baz maliyetleri $\vec{c}_B = (M, 0, 0)$'dır. Her sütun için $z_j = \vec{c}_B^{\,T} v_j$ çarpımını, c_B sütunuyla v_j sütununun karşılıklı çarpımlarını toplayarak hesaplar ve c_j'yi çıkarırız:

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= (M \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - (-3) = 2M + 3, \\ z_2 - c_2 &= (M \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 1) - 1 = M - 1, \\ z_3 - c_3 &= (M \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = -M, \\ z_{u_1} - c_{u_1} &= (M \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - M = 0, \\ z_0 &= M \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 = 2M. \end{aligned}$$

v_4 ve v_5 de baz vektörleri olduğundan kriterleri 0'dır. Amaç değerindeki $2M$, bazdaki yapay değişkenin değeri olan 2'nin cezasıdır.

Giren ve çıkan vektör. Minimum probleminde en büyük pozitif $z_j - c_j$ girer. Pozitif kriterler $2M + 3$ ve $M - 1$'dir. M'nin katsayıları $2 > 1$ olduğundan en büyüğü $2M + 3$'tür (Önerme 5.2) ve v_1 baza girer. Oran testi v_1 sütununun pozitif elemanlarıyla yapılır; x_5 satırında eleman 0 olduğundan o satır dikkate alınmaz:

$$\min\left(\frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right) = \min(1, 3) = 1.$$

En küçük oran x_{u_1} satırındadır; v_{u_1} bazdan çıkar ve pivot 2'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 5.1: Başlangıç tablosu

		c_j	-3	1	0	0	0	M	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_{u_1}	Oran
x_{u_1}	M	2	$[2]$	1	-1	0	0	1	$\frac{2}{2} \Rightarrow$
x_4	0	3	1	3	0	1	0	0	$\frac{3}{1}$
x_5	0	4	0	1	0	0	1	0	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = 2M$	$2M + 3 \Uparrow$	$M - 1$	$-M$	0	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 2'ye bölünür ve x_1 satırı olur; c_B değeri $c_1 = -3$'tür:

$$(1 \mid 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0).$$

x_4 satırının v_1 sütunundaki elemanı 1 olduğundan bu satırdan yeni pivot satırı bir kez çıkarılır:

$$\begin{aligned}(3-1 \mid 1-1, 3-\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}, 1, 0)\\ = (2 \mid 0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0).\end{aligned}$$

x_5 satırının v_1 sütunundaki elemanı 0 olduğundan bu satır değişmez. x_{u_1} bazdan çıktığı için v_{u_1} sütunu artık yazılmaz. $z_j - c_j$ satırını yeni $\vec{c}_B = (-3, 0, 0)$ ile yeniden hesaplayalım:

$$\begin{aligned}z_2 - c_2 &= (-3)\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{5}{2} + 0\cdot 1 - 1 = -\frac{5}{2},\\ z_3 - c_3 &= (-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot 0 - 0 = \frac{3}{2},\\ z_0 &= (-3)\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 4 = -3.\end{aligned}$$

Dönüşüm kuralı (Bölüm 4.4) da aynı sayıları verir. Örneğin v_2 sütunu için eski kriterden, pivot sütunundaki $2M+3$ ile yeni pivot satırındaki $\frac{1}{2}$'nin çarpımı çıkarılır: $(M-1) - (2M+3)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$. Bazda yapay değişken kalmadığı için M'ler birbirini götürdü ve satırdan tamamen kayboldu.

Tablo 5.2: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	-3	1	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_1	-3	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-$
x_4	0	2	0	$\frac{5}{2}$	$[\frac{1}{2}]$	1	0	$\frac{2}{1/2} \Rightarrow$
x_5	0	4	0	1	0	0	1	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = -3$	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2} \Uparrow$	0	0	

Birinci iterasyon tablosunda (Tablo 5.2) B_0 bazından $B_1 = (v_1, v_4, v_5)$ bazına geçildi; çözüm $X_1 = (x_1, ..., x_5) = (1, 0, 0, 2, 4)$'tür. Yapay değişken 0 olduğu için bu, orijinal problemin uygun bir çözümüdür: $(x_1, x_2) = (1, 0)$ uygun bölgenin bir köşesidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Pozitif kriter $z_3 - c_3 = \frac{3}{2}$ kaldığı için minimuma ulaşılmadı; en büyük (ve tek) pozitif kriter bu olduğundan v_3 baza girer. v_3 sütununda yalnız x_4 satırının elemanı pozitiftir. Oran $2/\frac{1}{2} = 4$'tür; v_4 bazdan çıkar ve pivot $\frac{1}{2}$'dir.

İkinci iterasyon. Pivot satırı $\frac{1}{2}$'ye bölünür, yani 2 ile çarpılır ve x_3 satırı olur: $(4 \mid 0, 5, 1, 2, 0)$. x_1 satırının v_3 sütunundaki elemanı $-\frac{1}{2}$ olduğundan bu satıra yeni pivot satırının $\frac{1}{2}$ katı eklenir:

$$\begin{aligned}(1+2 \mid 1, \frac{1}{2}+\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, 0+1, 0)\\ = (3 \mid 1, 3, 0, 1, 0).\end{aligned}$$

x_5 satırı yine değişmez. Kriterler $\vec{c}_B = (-3, 0, 0)$ ile:

$$\begin{aligned}z_2 - c_2 &= (-3)\cdot 3 + 0\cdot 5 + 0\cdot 1 - 1 = -10,\\ z_4 - c_4 &= (-3)\cdot 1 + 0\cdot 2 + 0\cdot 0 - 0 = -3,\\ z_0 &= (-3)\cdot 3 + 0\cdot 4 + 0\cdot 4 = -9.\end{aligned}$$

Tablo 5.3: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	-3	1	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_1	-3	3	1	3	0	1	0
x_3	0	4	0	5	1	2	0
x_5	0	4	0	1	0	0	1
$z_j - c_j$		$z_0 = -9$	0	-10	0	-3	0

İkinci iterasyon tablosunda (Tablo 5.3) $B_2 = (v_1, v_3, v_5)$ bazına geçildi. Pozitif kriter kalmadı: bütün $z_j - c_j \le 0$, tablo optimaldir. Bazda yapay değişken bulunmadığından Teorem 5.1 gereği optimal çözüm

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3, 0, 4, 0, 4), \qquad \min z = -3\cdot 3 + 0 = -9$$

olur. Aylak ve artık değişkenler de anlamlıdır: birinci kısıtta $2\cdot 3 + 0 = 6$ olup gereksinim $x_3 = 4$ birim aşılmıştır; ikinci kısıt $3 + 0 = 3$ ile tam sağlanır ($x_4 = 0$); üçüncü kısıtta $x_5 = 4$ birim boşluk vardır.

Çözümün başındaki şekil yöntemin izlediği yolu grafik yöntemle karşılaştırıyor. Başlangıç çözümü $(x_1, x_2) = (0, 0)$ uygun bölgenin dışındadır: $2x_1 + x_2 \ge 2$ kısıtı sağlanmaz ve eksik kalan 2 birimi $x_{u_1} = 2$ üstlenir. Birinci iterasyon yapay değişkeni sıfıra indirip uygun bölgenin $(1, 0)$ köşesine, ikinci iterasyon optimal $(3, 0)$ köşesine gider. Uygun bölge üç köşeli bir üçgendir ve köşelerdeki amaç değerleri $(1, 0)$'da -3, $(3, 0)$'da -9, $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$'te $-\frac{9}{5} + \frac{4}{5} = -1$'dir; en küçüğü gerçekten -9'dur.

■

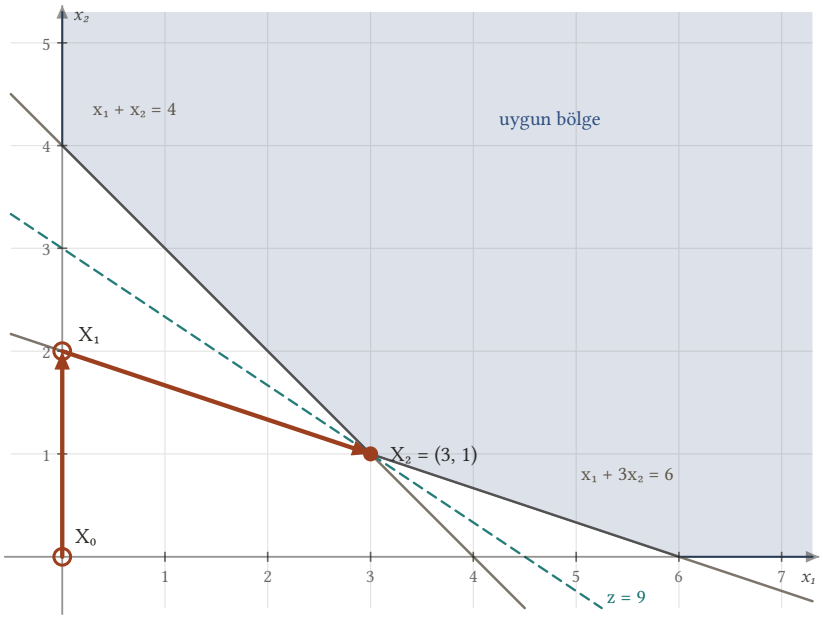
İki yapay değişkenli bir örnekte M'nin katsayısının adım adım nasıl küçüldüğünü daha açık görürüz.

Örnek 5.3 (İki yapay değişkenli bir minimum problemi). Örnek 1.20 diyetinin modelini Büyük M yöntemiyle çözünüz:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\ge 4\\ x_1 + 3x_2 &\ge 6\\ x_1, x_2 &\ge 0\\ \min z &= 2x_1 + 3x_2\end{aligned}$$

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.2: Diyet örneğinde Büyük M yolu: $X_0 = (0, 0) \longrightarrow X_1 = (0, 2) \longrightarrow X_2 = (3, 1)$. İçi boş çizilen ilk iki nokta sınırsız uygun bölgenin (boyalı) dışındadır; yapay değişkenlerin toplamı 10'dan 2'ye, sonra 0'a iner. Kesikli doğru $z = 2x_1 + 3x_2 = 9$ seviye doğrusudur ve uygun bölgeye yalnız (3, 1) köşesinde değer.

Çözülebilir hal. Standart formda iki kısıttan da artık değişken çıkarılır (x_3 ve x_4). Artık değişkenler birim sütun vermediği için iki denkleme de yapay değişken ekleriz; minimum problemi olduğundan katsayıları $+M$'dir (bkz. Örnek 1.20):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_{u_1} &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + x_{u_2} &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1}, x_{u_2} &\geq 0 \\ \min z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 & \\ + Mx_{u_1} + Mx_{u_2} & \end{aligned}$$

Başlangıç bazı $B_0 = (v_{u_1}, v_{u_2})$, $\vec{c}_B = (M, M)$'dir.
Simpleks kriterleri.

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= (M \cdot 1 + M \cdot 1) - 2 = 2M - 2, \\ z_2 - c_2 &= (M \cdot 1 + M \cdot 3) - 3 = 4M - 3, \\ z_3 - c_3 &= (M \cdot (-1) + M \cdot 0) - 0 = -M, \\ z_4 - c_4 &= (M \cdot 0 + M \cdot (-1)) - 0 = -M, \\ z_0 &= M \cdot 4 + M \cdot 6 = 10M. \end{aligned}$$

Minimum probleminde en büyük pozitif kriter girer. Pozitif kriterler $2M - 2$ ve $4M - 3$'tür; $4 > 2$ olduğundan v_2 baza girer. Oranlar $\frac{4}{1} = 4$ ve $\frac{6}{3} = 2$'dir; v_{u_2} bazdan çıkar ve pivot 3'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 5.4: Başlangıç tablosu

		c_j	2	3	0	0	M	M	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	v_{u_2}	Oran
x_{u_1}	M	4	1	1	-1	0	1	0	$\frac{4}{1}$
x_{u_2}	M	6	1	[3]	0	-1	0	1	$\frac{6}{3}\Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 10M$	$2M-2$	$4M-3\Uparrow$	$-M$	$-M$	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 3'e bölünür ve x_2 satırı olur: $\left(\ 2 \mid \frac{1}{3}, 1, 0, -\frac{1}{3}, 0\ \right)$; burada son eleman v_{u_1} sütunundadır. x_{u_1} satırından yeni pivot satırı bir kez çıkarılır:

$$\begin{aligned}(4-2 \mid 1-\frac{1}{3}, 0, -1, 0+\frac{1}{3}, 1)\\ = (2 \mid \frac{2}{3}, 0, -1, \frac{1}{3}, 1).\end{aligned}$$

v_{u_2} sütunu atılır. Yeni $\vec{c}_B = (M, 3)$ ile kriterler:

$$\begin{aligned}z_1 - c_1 &= M\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{1}{3} - 2 = \frac{2}{3}M - 1,\\ z_3 - c_3 &= M\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 0 = -M,\\ z_4 - c_4 &= M\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{3}M - 1,\\ z_0 &= M\cdot 2 + 3\cdot 2 = 2M + 6.\end{aligned}$$

Tablo 5.5: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	2	3	0	0	M	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	Oran
x_{u_1}	M	2	$[\frac{2}{3}]$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{2/3}\Rightarrow$
x_2	3	2	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{1/3}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 2M+6$	$\frac{2}{3}M-1\Uparrow$	0	$-M$	$\frac{1}{3}M-1$	0	

Pozitif kriterler $\frac{2}{3}M - 1$ ve $\frac{1}{3}M - 1$'dir; $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ olduğundan v_1 baza girer. Oranlar $2/\frac{2}{3} = 3$ ve $2/\frac{1}{3} = 6$'dır; v_{u_1} bazdan çıkar ve pivot $\frac{2}{3}$'tür.

İkinci iterasyon. Pivot satırı $\frac{2}{3}$'e bölünür, yani $\frac{3}{2}$ ile çarpılır ve x_1 satırı olur: $\left(\ 3 \mid 1, 0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\ \right)$. x_2 satırından yeni pivot satırının $\frac{1}{3}$ katı çıkarılır:

$$\begin{aligned}(2-1 \mid \frac{1}{3}-\frac{1}{3}, 1, 0+\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}-\frac{1}{6})\\ = (1 \mid 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}).\end{aligned}$$

v_{u_1} sütunu da atılır. $\vec{c}_B = (2, 3)$ ile:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$z_3 - c_3 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 \cdot \frac{1}{2} - 0 = -\frac{3}{2},$$
$$z_4 - c_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 = -\frac{1}{2},$$
$$z_0 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9.$$

Tablo 5.6: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	2	3	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_1	2	3	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	3	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 9$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Bütün $z_j - c_j \leq 0$ olduğundan tablo optimaldir ve bazda yapay değişken yoktur. Optimal diyet $x_1 = 3$ kg B_1 ve $x_2 = 1$ kg B_2'dir; en küçük maliyet $\min z = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$ TL'dir. Artık değişkenler $x_3 = x_4 = 0$ olduğundan iki vitamin gereksinimi de tam karşılanır: $3 + 1 = 4$ ve $3 + 3 = 6$.
Amaç değerindeki M'nin katsayısı $10 \to 2 \to 0$ diye azaldı. Bu katsayı bazdaki yapay değişkenlerin toplamıdır, yani eksik kalan vitamin miktarıdır: başlangıçta $4 + 6 = 10$ birim, birinci iterasyonda yalnız $x_{u_1} = 2$ birim A vitamini eksiktir. Uygun bölgenin köşeleri $(0, 4)$, $(3, 1)$, $(6, 0)$'dır ve amaç değerleri 12, 9, 12'dir; grafik yöntem de aynı sonucu verir.
■

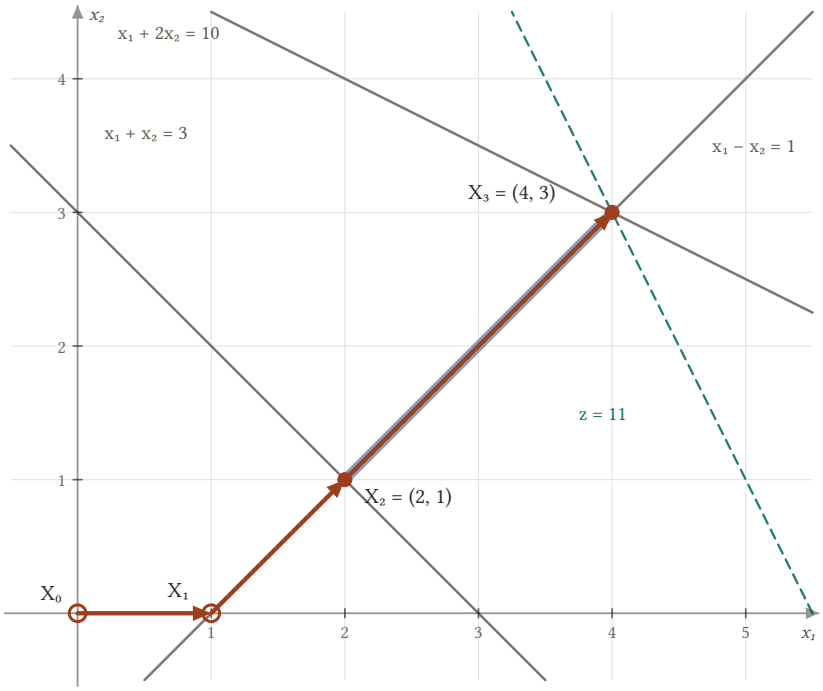
Maksimum probleminde yöntem aynıdır; yalnız yapay değişkenlerin amaç katsayısı $-M$ olur ve seçim kuralı tersine döner.

Örnek 5.4 (Eşitlik ve büyük-eşit kısıtlı bir maksimum problemi). Aşağıdaki problemi Büyük M yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.3: Maksimum örneğinde uygun çözümler kümesi $x_1 - x_2 = 1$ doğrusunun (2, 1) ile (4, 3) arasındaki parçasıdır (kalın). Büyük M yolu: $X_0 = (0, 0) \to X_1 = (1, 0) \to X_2 = (2, 1) \to X_3 = (4, 3)$; içi boş çizilen ilk iki nokta uygun değildir. Kesikli doğru $z = 2x_1 + x_2 = 11$ seviye doğrusudur.

Standart form. Birinci kısıttan x_3 artık değişkenini çıkarır, üçüncü kısıta x_4 aylak değişkenini ekleriz. İkinci kısıt eşitliktir ve sağ tarafı $1 \geq 0$'dır; olduğu gibi kalır:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 10 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,4} \\ \max z &= 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Çözülebilir hal. Üçüncü denklemin birim sütunu x_4'tür. Birinci denklemde x_3'ün katsayısı -1'dir; ikinci denkleme ise hiç yeni değişken eklenmedi. Standart form birim matris içermediği için henüz simpleks yöntem ile çözülebilir halde değildir. Bu iki denkleme x_{u_1} ve x_{u_2} yapay değişkenlerini ekleriz; maksimum problemi olduğundan katsayıları $-M$'dir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_{u_1} &= 3 \\ x_1 - x_2 + x_{u_2} &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 10 \\ x_1, \ldots, x_4, x_{u_1}, x_{u_2} &\geq 0 \\ \max z &= 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ &\quad - Mx_{u_1} - Mx_{u_2} \end{aligned}$$

Başlangıç bazı $B_0 = (v_{u_1}, v_{u_2}, v_4)$, $\vec{c}_B = (-M, -M, 0)$'dır.
Simpleks kriterleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$z_1 - c_1 = (-M \cdot 1 - M \cdot 1 + 0 \cdot 1) - 2 = -2M - 2,$$
$$z_2 - c_2 = (-M \cdot 1 - M \cdot (-1) + 0 \cdot 2) - 1 = -1,$$
$$z_3 - c_3 = (-M \cdot (-1) - M \cdot 0 + 0 \cdot 0) - 0 = M,$$
$$z_0 = -M \cdot 3 - M \cdot 1 + 0 \cdot 10 = -4M.$$

v_2 sütununda iki yapay satırın elemanları 1 ve -1 olduğundan M'ler birbirini götürdü.
Giren ve çıkan vektör. Maksimum probleminde en negatif $z_j - c_j$ girer. Negatif kriterler $-2M-2$ ve -1'dir. M'nin katsayıları $-2 < 0$ olduğundan en negatifi $-2M-2$'dir ve v_1 baza girer. Oranlar $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{10}{1}$'dir; en küçüğü 1 olduğundan v_{u_2} bazdan çıkar ve pivot 1'dir.

Tablo 5.7: Başlangıç tablosu

		c_j	2	1	0	0	$-M$	$-M$	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	v_{u_2}	Oran
x_{u_1}	$-M$	3	1	1	-1	0	1	0	$\frac{3}{1}$
x_{u_2}	$-M$	1	$[1]$	-1	0	0	0	1	$\frac{1}{1} \Rightarrow$
x_4	0	10	1	2	0	1	0	0	$\frac{10}{1}$
$z_j - c_j$		$z_0 = -4M$	$-2M-2 \Uparrow$	-1	M	0	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot 1 olduğundan x_{u_2} satırı aynen kalır ve x_1 satırı olur: $(1 \mid 1, -1, 0, 0, 0)$; son eleman v_{u_1} sütunundadır. x_{u_1} ve x_4 satırlarının v_1 elemanları 1 olduğundan ikisinden de yeni pivot satırı bir kez çıkarılır:

$$x_{u_1} : (3 - 1 \mid 0, 1 + 1, -1, 0, 1) = (2 \mid 0, 2, -1, 0, 1),$$
$$x_4 : (10 - 1 \mid 0, 2 + 1, 0, 1, 0) = (9 \mid 0, 3, 0, 1, 0).$$

v_{u_2} sütunu atılır. $\vec{c}_B = (-M, 2, 0)$ ile:

$$z_2 - c_2 = -M \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 - 1 = -2M - 3,$$
$$z_3 - c_3 = -M \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = M,$$
$$z_0 = -M \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 9 = -2M + 2.$$

Tablo 5.8: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	2	1	0	0	$-M$	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	Oran
x_{u_1}	$-M$	2	0	$[2]$	-1	0	1	$\frac{2}{2} \Rightarrow$
x_1	2	1	1	-1	0	0	0	$-$
x_4	0	9	0	3	0	1	0	$\frac{9}{3}$
$z_j - c_j$		$z_0 = -2M + 2$	0	$-2M-3 \Uparrow$	M	0	0	

Tek negatif kriter $-2M-3$'tür; v_2 baza girer. x_1 satırındaki -1 oran testine girmez; oranlar $\frac{2}{2} = 1$ ve $\frac{9}{3} = 3$'tür. v_{u_1} bazdan çıkar ve pivot 2'dir. Bu tablonun çözümü $(x_1, x_2) = (1, 0)$ henüz uygun değildir: $x_1 - x_2 = 1$ sağlanır ama $x_1 + x_2 = 1 < 3$'tür ve eksik 2 birimi $x_{u_1} = 2$ taşır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci iterasyon. Pivot satırı 2'ye bölünür ve x_2 satırı olur: $\left(\ 1 \mid 0, 1, -\frac{1}{2}, 0\ \right)$. x_1 satırına yeni pivot satırı bir kez eklenir, x_4 satırından üç kez çıkarılır:

$$x_1 : (1+1 \mid 1, 0, 0-\frac{1}{2}, 0) = (2 \mid 1, 0, -\frac{1}{2}, 0),$$
$$x_4 : (9-3 \mid 0, 0, 0+\frac{3}{2}, 1) = (6 \mid 0, 0, \frac{3}{2}, 1).$$

v_{u_1} sütunu da atılır. $\vec{c}_B = (1, 2, 0)$ ile:

$$z_3 - c_3 = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{3}{2} - 0 = -\frac{3}{2},$$
$$z_0 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 6 = 5.$$

Tablo 5.9: İkinci iterasyon tablosu

		c_j	2	1	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_2	1	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	—
x_1	2	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	—
x_4	0	6	0	0	$[\frac{3}{2}]$	1	$\frac{6}{3/2} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 5$	0	0	$-\frac{3}{2} \Uparrow$	0	

Yapay değişkenlerin hepsi bazdan çıktı; $(x_1, x_2) = (2, 1)$ orijinal problemin uygun bir çözümüdür ve $z = 5$'tir. Ama $z_3 - c_3 = -\frac{3}{2} < 0$ olduğundan maksimuma ulaşılmadı; v_3 baza girer. v_3 sütununda yalnız x_4 satırının elemanı pozitiftir: oran $6/\frac{3}{2} = 4$, v_4 bazdan çıkar ve pivot $\frac{3}{2}$'dir.

Üçüncü iterasyon. Pivot satırı $\frac{2}{3}$ ile çarpılır ve x_3 satırı olur: $\left(\ 4 \mid 0, 0, 1, \frac{2}{3}\ \right)$. x_2 ve x_1 satırlarının v_3 elemanları $-\frac{1}{2}$ olduğundan ikisine de yeni pivot satırının $\frac{1}{2}$ katı eklenir:

$$x_2 : (1+2 \mid 0, 1, 0, 0+\frac{1}{3}) = (3 \mid 0, 1, 0, \frac{1}{3}),$$
$$x_1 : (2+2 \mid 1, 0, 0, 0+\frac{1}{3}) = (4 \mid 1, 0, 0, \frac{1}{3}).$$

$\vec{c}_B = (1, 2, 0)$ ile:

$$z_4 - c_4 = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} - 0 = 1,$$
$$z_0 = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 4 = 11.$$

Tablo 5.10: Üçüncü iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	2	1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_2	1	3	0	1	0	$\frac{1}{3}$
x_1	2	4	1	0	0	$\frac{1}{3}$
x_3	0	4	0	0	1	$\frac{2}{3}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 11$	0	0	0	1

 CC BY-NC-SA 4.0

Maksimum probleminde bütün $z_j - c_j \geq 0$ olunca tablo optimaldir; bu tabloda öyledir. Bazda yapay değişken olmadığından optimal çözüm

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 3, 4, 0), \qquad \max z = 2 \cdot 4 + 3 = 11$$

dir. Sağlama: $4 + 3 = 7 \geq 3$ (fazla $x_3 = 4$), $4 - 3 = 1$ ve $4 + 6 = 10$ ($x_4 = 0$).
Eşitlik kısıtı yüzünden uygun çözümler bir doğru parçası oluşturur: $x_1 = x_2 + 1$ yazılırsa birinci kısıt $x_2 \geq 1$, üçüncü kısıt $x_2 \leq 3$ verir. Parçanın uç noktaları $(2, 1)$ ve $(4, 3)$'tür ve amaç değerleri 5 ile 11'dir. Yöntem uygun olmayan iki noktadan geçip önce $(2, 1)$ ucuna, sonra optimal $(4, 3)$ ucuna ulaştı. ■

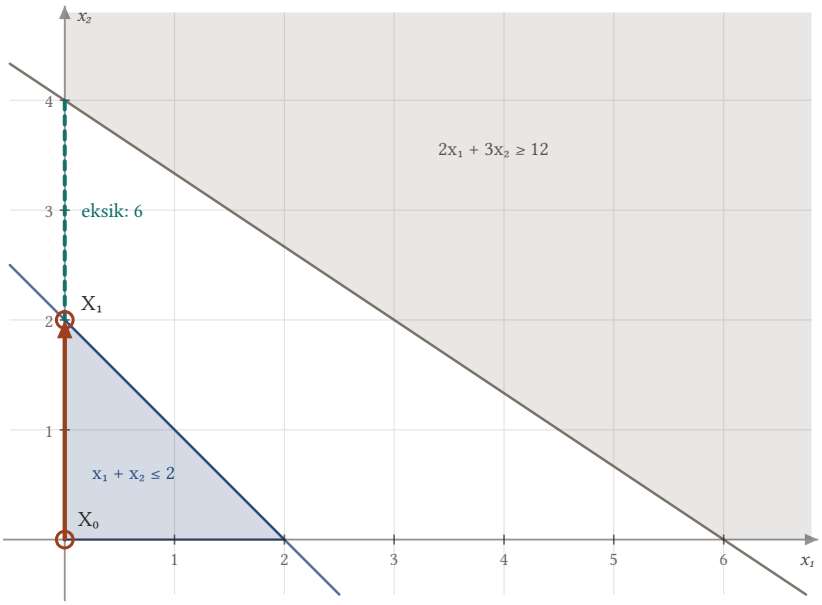
5.6 Uygun Çözümü Olmayan Problem

Şimdi Teorem 5.2 teoreminin öngördüğü durumu bir örnekte görelim.

Örnek 5.5 (Uygun çözümü olmayan bir maksimum problemi). Aşağıdaki problemi Büyük M yöntemiyle çözmeye çalışınız.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.



Şekil 5.4: Kısıtların ikisini birden sağlayan nokta yoktur: $x_1 + x_2 \leq 2$ üçgeni ile $2x_1 + 3x_2 \geq 12$ yarı düzlemi (ikisi de boyalı) kesişmez. Yöntem $X_0 = (0, 0)$ noktasından üçgenin $X_1 = (0, 2)$ köşesine gider ve durur; orada $2x_1 + 3x_2 = 6$'dır ve eksik kalan $12 - 6 = 6$ birimi (kesikli parça) yapay değişken taşır.

Standart form ve çözülebilir hal. Birinci kısıta x_3 aylak değişkenini ekler, ikinci kısıttan x_4 artık değişkenini çıkarırız. İkinci denklemin birim sütunu olmadığı için ona x_{u_1} yapay değişkenini ekleriz; maksimum problemi olduğundan katsayısı $-M$'dir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
2x_1 + 3x_2 - x_4 + x_{u_1} &= 12 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1} &\geq 0 \\
\max z &= 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_{u_1}
\end{aligned}
$$

Başlangıç bazı $B_0 = (v_3, v_{u_1})$, $\vec{c}_B = (0, -M)$'dir.
Simpleks kriterleri.

$$
\begin{aligned}
z_1 - c_1 &= (0 \cdot 1 - M \cdot 2) - 3 = -2M - 3, \\
z_2 - c_2 &= (0 \cdot 1 - M \cdot 3) - 2 = -3M - 2, \\
z_4 - c_4 &= (0 \cdot 0 - M \cdot (-1)) - 0 = M, \\
z_0 &= 0 \cdot 2 - M \cdot 12 = -12M.
\end{aligned}
$$

Maksimum probleminde en negatif kriter girer. M'nin katsayıları $-3 < -2$ olduğundan en negatifi $-3M - 2$'dir ve v_2 baza girer. Oranlar $\frac{2}{1} = 2$ ve $\frac{12}{3} = 4$'tür; v_3 bazdan çıkar ve pivot 1'dir.

Tablo 5.11: Başlangıç tablosu

		c_j	3	2	0	0	$-M$	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	Oran
x_3	0	2	1	[1]	1	0	0	$\frac{2}{1} \Rightarrow$
x_{u_1}	$-M$	12	2	3	0	-1	1	$\frac{12}{3}$
$z_j - c_j$		$z_0 = -12M$	$-2M - 3$	$-3M - 2 \Uparrow$	0	M	0	

Birinci iterasyon. Pivot 1 olduğundan x_3 satırı aynen kalır ve x_2 satırı olur: $(2 \mid 1, 1, 1, 0, 0)$. x_{u_1} satırından yeni pivot satırının 3 katı çıkarılır:

$$
\begin{aligned}
&(12 - 6 \mid 2 - 3, 3 - 3, 0 - 3, -1 - 0, 1 - 0) \\
&\quad = (6 \mid -1, 0, -3, -1, 1).
\end{aligned}
$$

$\vec{c}_B = (2, -M)$ ile:

$$
\begin{aligned}
z_1 - c_1 &= 2 \cdot 1 - M \cdot (-1) - 3 = M - 1, \\
z_3 - c_3 &= 2 \cdot 1 - M \cdot (-3) - 0 = 3M + 2, \\
z_4 - c_4 &= 2 \cdot 0 - M \cdot (-1) - 0 = M, \\
z_0 &= 2 \cdot 2 - M \cdot 6 = -6M + 4.
\end{aligned}
$$

Tablo 5.12: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	3	2	0	0	$-M$
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}
x_2	2	2	1	1	1	0	0
x_{u_1}	$-M$	6	-1	0	-3	-1	1
$z_j - c_j$		$z_0 = -6M + 4$	$M - 1$	0	$3M + 2$	M	0

Kriterlerde M'nin katsayıları 1, 3, 1 pozitiftir; yeterince büyük M için bütün $z_j - c_j \geq 0$'dır ve tablo optimaldir. Ama bazda $x_{u_1} = 6 > 0$ yapay değişkeni kaldı. Teorem 5.2 gereği **problemin uygun çözümü yoktur**; dolayısıyla optimal çözümden de söz edilemez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bunu doğrudan da görebiliriz. $x_1, x_2 \geq 0$ iken birinci kısıttan

$$2x_1 + 3x_2 \leq 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2) \leq 3 \cdot 2 = 6$$

çıkar; oysa ikinci kısıt $2x_1 + 3x_2 \geq 12$ istiyor. Tablonun gösterdiği $(x_1, x_2) = (0, 2)$ noktasında $2x_1 + 3x_2 = 6$'dır ve eksik kalan $12 - 6 = 6$ birimi yapay değişken taşır. Yukarıdaki eşitsizlik bu eksiğin 6'dan aşağı inemeyeceğini gösteriyor: yöntem, eksiği olabildiğince küçültüp durmuştur.
■

Lineer programlama problemi bölümündeki diyet problemi (Örnek 1.2) de böyledir. Orada kolesterol sınırı yüzünden C vitamini gereksiniminin karşılanamayacağını elle göstermiştik. Büyük M yöntemi bunu kendiliğinden fark eder. A, C ve D vitamini kısıtları $\geq$ biçiminde olduğu için bu üç denkleme birer yapay değişken eklenir; kolesterol kısıtının aylak değişkeni ise hazır bir birim sütun verir. Üç iterasyon sonunda ulaşılan optimal tabloda $x_2 = \frac{8}{5}$ kg et bulunur ve A ile C vitamini satırlarının yapay değişkenleri $x_{u_1} = \frac{67}{5}$ ve $x_{u_2} = 14$ değerleriyle bazda kalır. Teorem 5.2 gereği diyetin uygun çözümü yoktur. Yapay değişkenler burada da eksik kalan vitamini ölçer: kolesterol sınırının izin verdiği 1,6 kg et 1,6 mg A ve 16 mg C vitamini verir; A vitamininden $15 - 1{,}6 = 13{,}4$ mg, C vitamininden $30 - 16 = 14$ mg eksik kalır.

5.7 Bazda Sıfır Değerli Yapay Değişken

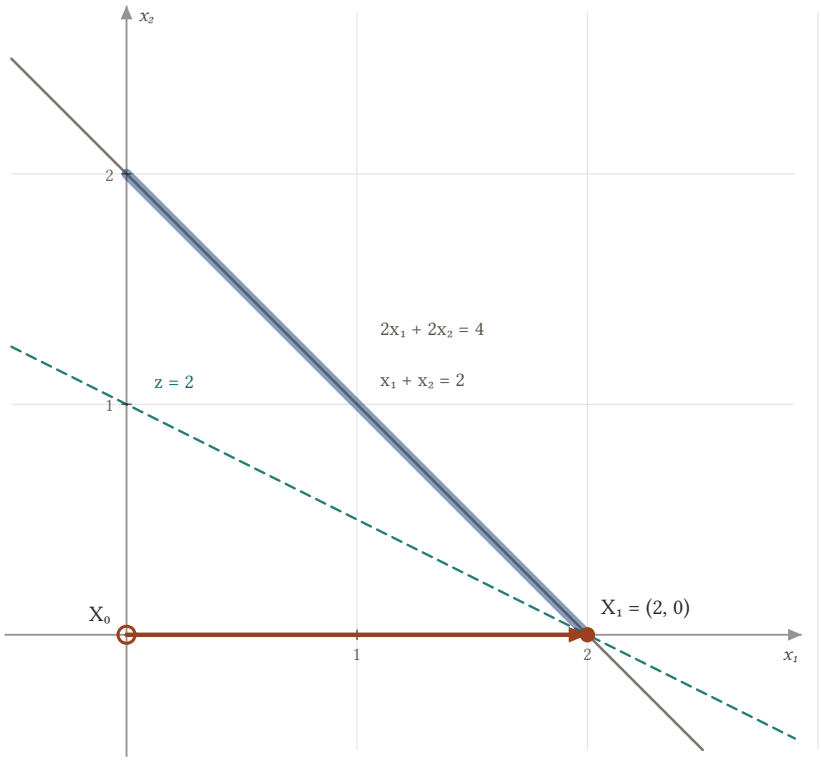
Son olarak Önerme 5.3 önermesinin ikinci maddesini, yani gereksiz bir kısıt yüzünden yapay değişkenin bazda sıfır değerle kaldığı durumu görelim.

Örnek 5.6 (Gereksiz kısıtlı bir problem). Aşağıdaki problemi Büyük M yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.5: İki kısıt aynı doğruyu verir; uygun çözümler kümesi (0, 2) ile (2, 0) arasındaki kalın parçadır. Yöntem uygun olmayan $X_0 = (0, 0)$ noktasından tek adımda optimal $X_1 = (2, 0)$ köşesine gider. Kesikli doğru $z = x_1 + 2x_2 = 2$ seviye doğrusudur.

Çözülebilir hal. İki kısıt da eşitliktir ve sağ tarafları negatif değildir; problem standart formdadır. Hiçbir denklemde birim sütun olmadığı için ikisine de yapay değişken ekleriz; minimum problemi olduğundan katsayıları $+M$'dir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_{u_1} &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_{u_2} &= 4 \\ x_1, x_2, x_{u_1}, x_{u_2} &\geq 0 \\ \min z &= x_1 + 2x_2 + Mx_{u_1} + Mx_{u_2} \end{aligned}$$

Simpleks kriterleri. $\vec{c}_B = (M, M)$ ile

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= (M \cdot 1 + M \cdot 2) - 1 = 3M - 1, \\ z_2 - c_2 &= (M \cdot 1 + M \cdot 2) - 2 = 3M - 2, \\ z_0 &= M \cdot 2 + M \cdot 4 = 6M. \end{aligned}$$

Minimum probleminde en büyük pozitif kriter girer. İki kriterde de M'nin katsayısı 3'tür; sabit terimlerde $-1 > -2$ olduğundan $3M - 1$ daha büyüktür ve v_1 baza girer. Oranlar $\frac{2}{1} = 2$ ve $\frac{4}{2} = 2$ eşittir. Eşitlik durumunda iki satırdan biri seçilebilir; birinci satırı seçelim. v_{u_1} bazdan çıkar ve pivot 1'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 5.13: Başlangıç tablosu

		c_j	1	2	M	M	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_{u_1}	v_{u_2}	Oran
x_{u_1}	M	2	[1]	1	1	0	$\frac{2}{1} \Rightarrow$
x_{u_2}	M	4	2	2	0	1	$\frac{4}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 6M$	$3M - 1 \Uparrow$	$3M - 2$	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot 1 olduğundan x_{u_1} satırı aynen kalır ve x_1 satırı olur: $(2 \mid 1, 1, 0)$; son eleman v_{u_2} sütunundadır. x_{u_2} satırından yeni pivot satırının 2 katı çıkarılır:

$$(4 - 4 \mid 2 - 2, 2 - 2, 1 - 0) = (0 \mid 0, 0, 1).$$

v_{u_1} sütunu atılır. $\vec{c}_B = (1, M)$ ile

$$z_2 - c_2 = 1 \cdot 1 + M \cdot 0 - 2 = -1,$$
$$z_0 = 1 \cdot 2 + M \cdot 0 = 2.$$

Tablo 5.14: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	1	2	M
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_{u_2}
x_1	1	2	1	1	0
x_{u_2}	M	0	0	0	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 2$	0	-1	0

Bütün $z_j - c_j \leq 0$ olduğundan tablo optimaldir. Bazda x_{u_2} yapay değişkeni kaldı, ama değeri 0'dır. Teorem 5.1 gereği optimal çözüm $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ ve $\min z = 2$'dir.
x_{u_2} satırının yapay olmayan v_1 ve v_2 sütunlarındaki elemanları sıfırdır; Önerme 5.3 önermesinin ikinci maddesi gereği kısıtlardan biri gereksizdir. Gerçekten ikinci kısıt birincinin 2 katıdır: $2(x_1 + x_2) = 2 \cdot 2$. Önermenin ispatındaki katsayılar da görünür: tablonun x_{u_2} satırı, başlangıç tablosunun ikinci satırından birinci satırın 2 katı çıkarılarak elde edildi, yani $w_1 = -2$, $w_2 = 1$'dir. x_{u_2} satırı yapay değişkenler sıfırken $0 = 0$ der ve silinebilir; geriye tek denklemli $x_1 + x_2 = 2$ problemi kalır.
Sonucu doğrudan da sağlayabiliriz: $x_1 + x_2 = 2$ üzerinde $z = x_1 + 2x_2 = 2 + x_2 \geq 2$'dir ve eşitlik yalnız $x_2 = 0$ için sağlanır. Oran testinde ikinci satırı seçseydik bu kez x_{u_1} bazda 0 değeriyle kalırdı; sonuç değişmezdi.
■

Bu bölümde Büyük M yöntemiyle, standart formu birim matris içermeyen problemleri simpleks tablosunda çözmeyi öğrendik. Yöntem yapay değişkenleri büyük bir cezayla bazdan çıkarır; optimal tabloda yapay değişken kalıp kalmadığına bakarak da problemin uygun çözümü olup olmadığını söyler. Yöntemin bir zorluğu, her kriteri $aM + b$ biçiminde iki parçalı taşımaktır; M için büyük bir sayı seçip hesabı sayısal yapmak ise yuvarlama hatalarına yol açabilir. Bir sonraki bölümde, İki faz yöntemi bölümünde, aynı işi M kullanmadan iki ayrı aşamada yapmayı göreceğiz: önce yalnız yapay değişkenlerin toplamı sıfıra indirilir, sonra orijinal amaç fonksiyonuyla devam edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

6. İki Faz Yöntemi

Bir lineer programlama problemi $\geq$ ya da $=$ biçiminde kısıtlar içerdiğinde standart formu çoğunlukla birim matris taşımaz; problemi simpleks yöntem ile çözülebilir hale (Tanım 1.9) getirmek için bu kısıtlara yapay değişken (Tanım 1.10) ekleriz. Büyük M yöntemi bölümünde yapay değişkenleri amaç fonksiyonuna çok büyük bir M cezasıyla koyup tek bir simpleks çözümünde sıfıra indirmiştik. Bu yöntemin iki zayıf yanı vardır: her tablo hücresinde $aM + b$ biçiminde iki parçalı ifadeler taşınır ve M'nin "yeterince büyük" bir sayı olarak seçilmesi gerekir.
İki faz yöntemi aynı işi iki ayrı adımda, M kullanmadan yapar. **Birinci fazda** gerçek amaç fonksiyonu bir kenara bırakılır ve yalnız yapay değişkenlerin toplamı küçültülür. Bu toplam sıfıra inerse problemin bir uygun temel çözümü elde edilmiş olur; inmezse problemin uygun çözümü yoktur. **İkinci fazda** birinci fazın son tablosu gerçek amaç fonksiyonuyla birleştirilir ve simpleks yöntem olağan biçimde sürdürülür. Bu bölümde yöntemin gerekçesini, adımlarını ve birinci fazın sonunda karşılaşılabilecek bütün durumları örneklerle göreceğiz.

6.1 Yöntemin Fikri

Önce birinci fazda çözülen yardımcı problemi tanımlayalım ve neden işe yaradığını görelim.
Problemi standart forma getirdikten sonra, birim sütunu olmayan denklemlere $x_{u_1}, \ldots, x_{u_k}$ yapay değişkenlerini ekleriz. Yapay değişkenler dışındaki bütün değişkenlere (orijinal değişkenler ile aylak ve artık değişkenler) bu bölümde **gerçek değişkenler**, sütunlarına da **gerçek sütunlar** diyeceğiz.

Tanım 6.1 (Yardımcı problem). Simpleks yöntem ile çözülebilir hale getirilmiş bir problemde kısıtlar ve işaret koşulları aynen korunup amaç fonksiyonu yerine

$$\min g = x_{u_1} + x_{u_2} + \ldots + x_{u_k}$$

yazılarak elde edilen probleme **yardımcı problem**, g fonksiyonuna **yardımcı amaç fonksiyonu** denir. g'de yapay değişkenlerin katsayısı 1, gerçek değişkenlerin katsayısı 0'dır. Orijinal problem maksimum problemiyse yardımcı amaç, aynı anlamda olmak üzere

$$\max g = -x_{u_1} - x_{u_2} - \ldots - x_{u_k}$$

biçiminde yazılır; bu durumda yapay değişkenlerin katsayısı -1'dir.

Yani yardımcı problem "gerçek amacı unut, yalnız yapay değişkenlerden kurtul" der. Yapay değişkenler negatif olamadığı için toplamları da negatif olamaz; toplamın en küçük değeri ancak bütün yapay değişkenler sıfırken 0 olur. İki yazılış arasındaki fark yalnız işarettir: Önerme 1.3 gereği

$$\max\left(-x_{u_1} - \ldots - x_{u_k}\right) = -\min\left(x_{u_1} + \ldots + x_{u_k}\right)$$

olur. Orijinal problem maksimumsa yardımcı problemi de maksimum olarak yazarız, böylece iki fazda aynı seçim kuralını kullanırız: maksimumda en negatif $z_j - c_j$ girer, minimumda en büyük pozitif $z_j - c_j$ girer. Büyük M yöntemindeki $\pm M$ katsayılarının yerini burada ± 1 almıştır.

Önerme 6.1 (Yardımcı problem ve uygunluk). *Standart formdaki kısıtlar $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$, $\vec{b} \geq 0$ olsun ve yapay değişkenler eklenmiş kısıtlar $A\vec{x} + E\vec{x}_u = \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$, $\vec{x}_u \geq 0$ biçiminde yazılsın. Burada $\vec{x}_u = (x_{u_1}, \ldots, x_{u_k})$ yapay değişkenlerin vektörü, E ise sütunları yapay değişkenlerin birim sütunları olan $m \times k$ matristir. $\min g = x_{u_1} + \ldots + x_{u_k}$ yardımcı problemi için:*

1. *Yardımcı problemin uygun çözümü vardır ve her uygun çözümde $g \geq 0$'dır; bu yüzden birinci faz sınırsız çözümle bitemez.*
2. *Orijinal problemin uygun çözümü vardır $\Leftrightarrow$ yardımcı problemin minimum değeri 0'dır.*
3. *$\min g = 0$ ise yardımcı problemin optimal çözümünde $\vec{x}_u = \vec{0}$'dır ve $\vec{x}$ kısmı orijinal problemin bir uygun çözümüdür.*

 CC BY-NC-SA 4.0

> ***İspat.***
> ***1.*** *Yapay değişkeni olmayan her denklemde, yalnız o denklemde katsayısı* 1 *ile görünen bir gerçek değişken vardır (çoğunlukla bir aylak değişken). Bu değişkenlere ve yapay değişkenlere kendi denklemlerinin* b_i *değerini, geri kalan bütün değişkenlere* 0 *verelim. Bu, başlangıç tablosunun temel çözümüdür;* $\vec{b} \geq 0$ *olduğundan bütün değişkenler negatif değildir ve çözüm uygundur. Her uygun çözümde* $x_{u_i} \geq 0$ *olduğundan* $g = x_{u_1} + \ldots + x_{u_k} \geq 0$*'dır.* g *alttan* 0 *ile sınırlı olduğu için yardımcı problem sınırsız olamaz.*
> ***2.*** *(⇒)* $\vec{x}$ *orijinal problemin bir uygun çözümü olsun.* $A\vec{x} = \vec{b}$ *ve* $\vec{x} \geq 0$ *olduğundan* $(\vec{x}, \vec{x}_u) = (\vec{x}, \vec{0})$ *yardımcı problemin kısıtlarını sağlar ve bu noktada* $g = 0$*'dır. 1. maddeye göre* g *hiçbir uygun çözümde* 0*'dan küçük olamaz; o halde yardımcı problemin minimum değeri* 0*'dır.*
> *(⇐) Yardımcı problemin minimum değeri* 0 *olsun ve minimum* $(\vec{x}^*, \vec{x}_u^*)$ *noktasında alınsın.* $x_{u_1}^* + \ldots + x_{u_k}^* = 0$ *ve her terim negatif olmadığından her* $x_{u_i}^* = 0$*'dır. Kısıta yerine koyarsak* $A\vec{x}^* + E\vec{0} = A\vec{x}^* = \vec{b}$ *ve* $\vec{x}^* \geq 0$ *olur; yani* $\vec{x}^*$ *orijinal problemin bir uygun çözümüdür.*
> ***3.*** *Bu, bir önceki paragrafta gösterildi.*
> $\max g = -x_{u_1} - \ldots - x_{u_k}$ *yazılışında her şey işaret değiştirerek aynen geçerlidir:* $g \leq 0$ *olur ve koşul* $\max g = 0$ *biçimini alır.*
> ■

Önerme yöntemin bütün mantığını taşır. Birinci faz yardımcı problemi simpleks yöntemle çözer. Sonuçta $g \neq 0$ çıkarsa orijinal problemin hiç uygun çözümü yoktur; $g = 0$ çıkarsa birinci fazın son tablosu, orijinal problemin bir uygun temel çözümünü gösterir ve ikinci faz oradan başlar.
Hesaplarda bir kısaltma daha yapacağız. Birinci fazda bir yapay vektör bazdan çıkınca onun değişkeni 0 olur. Bu değişkeni bir daha baza sokmayız ve sütununu tablodan atarız. Bu, o yapay değişkeni kalıcı olarak 0'a eşitlemek demektir. Önermedeki akıl yürütme bu küçülmüş yardımcı problem için de aynen geçerlidir: orijinal problemin her uygun çözümü, bütün yapay değişkenleri 0 olan bir nokta olarak küçülmüş problemde de bulunur. Böylece her iterasyonda tablo biraz daralır.

6.2 Birinci Fazın Sonu: Üç Durum

Birinci faz, yardımcı problemin optimal tablosuyla biter. Bu tabloda bakacağımız şey g'nin değeri ve yapay değişkenlerin bazda olup olmadığıdır.

6.2.1 Durum 1: $g \neq 0$

Yardımcı amaç sıfıra inmemişse, Önerme 6.1 gereği **orijinal problemin uygun çözümü yoktur** ve ikinci faza geçilmez. Bu durumda en az bir yapay vektör bazdadır ve değişkeni pozitif bir değerle çözümde kalmıştır: simpleks yöntem, o yapay değişkenin karşıladığı kısıtı gerçek değişkenlerle sağlamanın bir yolunu bulamamıştır. Gerçek bir uygulamada bu, modelin kısıtlarının birbiriyle çeliştiğini gösterir; model kurulurken bir kısıt yanlış yazılmış olabilir.

6.2.2 Durum 2: $g = 0$ ve bazda yapay vektör yok

En sık karşılaşılan durum budur. Bütün yapay vektörler bazdan çıkmıştır, dolayısıyla tablonun temel çözümü yalnız gerçek değişkenlerden oluşur ve orijinal problemin bir uygun temel çözümüdür. İkinci faza şöyle geçilir:

1. Birinci fazın optimal tablosunda hâlâ duran (temel dışı) yapay değişkenlerin sütunları atılır.
2. Orijinal amaç fonksiyonu ile birinci fazın optimal tablosu birleştirilerek ikinci fazın başlangıç tablosu kurulur: c_j satırına orijinal amaç katsayıları, c_B sütununa baz değişkenlerinin orijinal amaç katsayıları yazılır ve $z_j - c_j$ satırı ile z_0 yeniden hesaplanır.
3. Simpleks yöntemin adımlarıyla devam edilir.

Tablonun gövdesinin neden aynen kaldığını hatırlayalım. y_{ij} sayıları, v_j vektörünün baz vektörleri cinsinden yazılışındaki katsayılardır; v_0 sütunu da temel çözümdür (Bölüm 4.3). Bunlar yalnız kısıtlara ve baza bağlıdır, amaç katsayılarına bağlı değildir. Amaç fonksiyonu değişince yalnız c_j, c_B ve bunlardan hesaplanan $z_j = \vec{c}_B^T v_j$, $z_0 = \vec{c}_B^T v_0$ değerleri değişir.

 CC BY-NC-SA 4.0

6.2.3 Durum 3: $g = 0$ ama bir yapay vektör sıfır değerle bazda

Bu durum dejenere (Tanım 2.6) tablolarda ortaya çıkar: $g = 0$ olduğu için bütün yapay değişkenler sıfırdır, ama bunlardan biri, örneğin x_u, r. satırda $y_{r0} = 0$ değeriyle hâlâ bazdadır. Yukarıdaki 1. adım yalnız temel **dışı** yapay sütunları atar; bazdaki x_u'nun sütunu atılamaz, çünkü o sütun baz matrisinin bir parçasıdır. Onu bazda bırakıp ikinci faza geçmek de güvenli değildir: ikinci fazda baza pozitif bir değerle giren bir vektörün r. satırdaki elemanı negatifse, dönüşüm sonrası x_u pozitif bir değer alır ve bulunan nokta orijinal kısıtları sağlamaz. Bu yüzden ikinci faza geçmeden önce x_u'yu bazdan çıkarırız. Bunu iki önerme mümkün kılar.

Önerme 6.2 (Sıfır değerli yapay değişkeni bazdan çıkarma). *Birinci fazın optimal tablosunda x_u yapay değişkeni r. satırda $y_{r0} = 0$ değeriyle bazda olsun ve bir v_k gerçek sütununda $y_{rk} \neq 0$ olsun. y_{rk} pivot eleman alınarak (işareti ne olursa olsun) dönüşüm kuralı uygulanırsa v_k baza, $x_k = 0$ değeriyle girer, x_u bazdan çıkar ve v_0 sütunu değişmez. Yeni tablonun temel çözümü eskisiyle aynı noktadır; özellikle uygundur ve $g = 0$'dır.*

> ***İspat.***
> *v_k sütununun baz vektörleri cinsinden yazılışında v_r'nin (yani x_u'nun sütununun) katsayısı $y_{rk} \neq 0$'dır. Bu yüzden v_r yerine v_k konunca vektörler yine lineer bağımsız kalır ve yeni bir baz elde edilir; dönüşüm kuralı (Bölüm 4.4) bu bazın tablosunu verir. Kuralı v_0 sütununa uygulayalım. Pivot satırı için*
>
> $$y'_{k0} = \frac{y_{r0}}{y_{rk}} = \frac{0}{y_{rk}} = 0,$$
>
> *diğer her i satırı için*
>
> $$y'_{i0} = y_{i0} - \frac{y_{ik}\, y_{r0}}{y_{rk}} = y_{i0} - 0 = y_{i0}$$
>
> *bulunur. Demek ki bazda kalan değişkenlerin değerleri değişmez ve yeni giren x_k değişkeni 0 değerini alır. Değişkenlerin değerleri aynı kaldığı için nokta aynıdır; bütün değerler negatif olmadığından çözüm uygundur ve yapay değişkenlerin hepsi hâlâ sıfır olduğundan $g = 0$'dır.*
> *Simpleks yöntemde pivot elemanın pozitif olması, yeni v_0 sütununun negatif olmaması için gerekiyordu. Burada $y_{r0} = 0$ olduğu için v_0 sütunu hiç değişmez; bu yüzden negatif bir pivot da kullanılabilir.*
> ■

Yani sıfır değerli yapay değişken, aynı noktada kalınarak yerini bir gerçek değişkene bırakır. Bu pivot, amaç fonksiyonunu iyileştirmek için değil, yalnız bazı temizlemek için yapılır; bu yüzden giren sütun $z_j - c_j$ değerine bakılmadan, r. satırda sıfırdan farklı elemanı olan herhangi bir gerçek sütun arasından seçilir.
Geriye r. satırın bütün gerçek sütunlardaki elemanlarının sıfır olduğu durum kalıyor.

Önerme 6.3 (Gereksiz kısıt). *Birinci fazın optimal tablosunda x_u yapay değişkeni r. satırda $y_{r0} = 0$ değeriyle bazda olsun ve her gerçek v_j sütunu için $y_{rj} = 0$ olsun. O zaman orijinal kısıtlardan biri diğerlerinin lineer birleşimidir ve tablonun r. satırı ile x_u değişkeni atılabilir; kalan tablo, orijinal problemin kısıtlarıyla aynı çözüm kümesini tanımlar.*

> ***İspat.***
> *Tablo, yapay değişkenler eklenmiş $A\vec{x} + E\vec{x}_u = \vec{b}$ sisteminden elemanter satır işlemleriyle elde edilmiştir. Elemanter satır işlemleri tersinir olduğundan tablonun satırlarının belirttiği denklem sistemi bu sistemle aynı çözümlere sahiptir.*
> *Orijinal problemin çözümleri yapay değişkenlerin hepsinin sıfır olduğu çözümlerdir. $\vec{x}_u = \vec{0}$ yazınca tablonun r. satırı, bütün gerçek katsayıları ve sağ tarafı sıfır olduğundan*
>
> $$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots = 0$$
>
> *denklemine dönüşür. Bu denklemi her nokta sağlar; atılması çözüm kümesini değiştirmez. Öte yandan tablonun r. satırı, orijinal denklemlerin $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ katsayılı bir lineer birleşimidir ve satır işlemleri tersinir olduğundan bu katsayıların hepsi birden sıfır olamaz. Gerçek sütunlarda ve sağ tarafta sıfır verdiğine göre, orijinal denklemlerin sıfır olmayan bir lineer birleşimi $0 = 0$ özdeşliğini verir. Katsayısı sıfırdan farklı olan*

 CC BY-NC-SA 4.0

> *denklemlerden biri, bu eşitlikten diğerleri cinsinden çözülebilir; yani o kısıt diğerlerinin lineer birleşimidir ve bilgi taşımaz.*
> ■

Yani bu durumda kısıtlardan biri **gereksizdir** (fazladır): diğerleri sağlanınca kendiliğinden sağlanır. Örneğin üçüncü kısıt ilk iki kısıtın toplamıysa, birinci faz bunu bizim yerimize fark eder ve o satırı bütünüyle sıfırlar.
Özetle Durum 3'te, sıfır değerle bazda kalan her yapay değişken ya Önerme 6.2 ile bazdan çıkarılır ya da Önerme 6.3 ile satırıyla birlikte atılır. Bundan sonra bazda yapay vektör kalmaz ve Durum 2'deki adımlarla ikinci faza geçilir.

6.3 Yöntemin Adımları

Şimdi yöntemi baştan sona bir reçete olarak toplayalım.

Altı adımda iki faz yöntemi

1. **Sağ tarafları düzenle.** Sağ tarafı negatif olan kısıtları -1 ile çarp; eşitsizliğin yönü döner.
2. **Standart forma getir.** $\leq$ kısıtlara aylak değişken ekle, $\geq$ kısıtlardan artık değişken çıkar; amaçtaki katsayıları 0'dır.
3. **Yapay değişken ekle.** Birim sütunu olmayan her denkleme (çoğunlukla $\geq$ ve $=$ kısıtlarına) bir $x_{u_i} \geq 0$ yapay değişkeni ekle; problem artık simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir.
4. **Birinci faz.** Amaç fonksiyonunu yardımcı amaçla değiştir: minimumda $\min g = x_{u_1} + \ldots + x_{u_k}$, maksimumda $\max g = -x_{u_1} - \ldots - x_{u_k}$; gerçek değişkenlerin katsayısı 0'dır. Bu problemi simpleks yöntemle çöz; bazdan çıkan yapay vektörün sütununu at.
5. **Birinci fazın sonu.** $g \neq 0$ ise uygun çözüm yoktur, dur. $g = 0$ ise sıfır değerle bazda kalan yapay değişkenleri pivotla bazdan çıkar ya da gereksiz satırlarıyla birlikte at; sonra temel dışı yapay sütunları at.
6. **İkinci faz.** c_j satırına ve c_B sütununa orijinal amaç katsayılarını yaz, $z_j - c_j$ ve z_0 değerlerini yeniden hesapla ve simpleks yöntemle optimal tabloya kadar devam et.

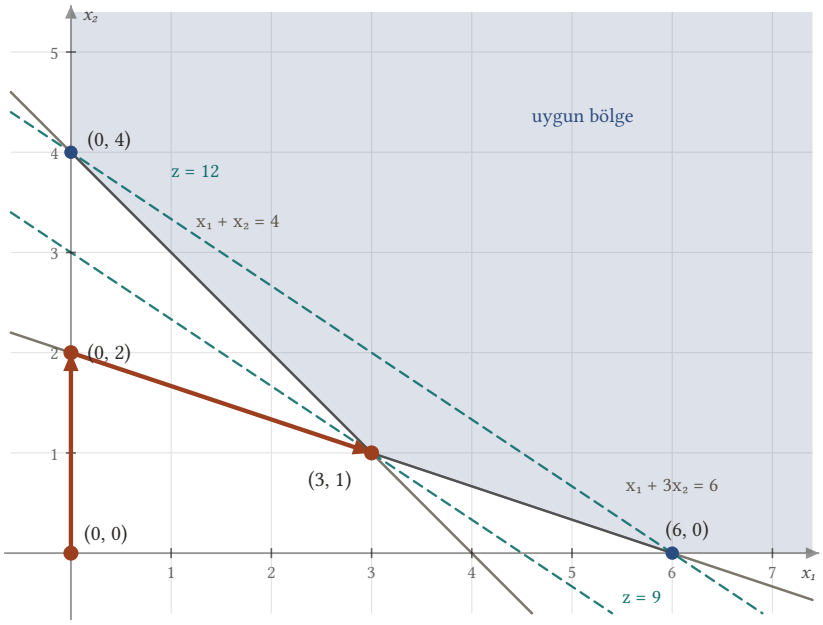
6.4 Uygun Çözümü Olan Problemler

Reçeteyi önce küçük bir minimum probleminde, sonra üç değişkenli bir maksimum probleminde uygulayalım. İki örnekte de birinci faz Durum 2 ile biter.

Örnek 6.1 (İki değişkenli bir minimum problemi). Aşağıdaki problemi iki faz yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.



Şekil 6.1: Birinci fazın izlediği yol: (0, 0) ⟶ (0, 2) ⟶ (3, 1). İlk iki nokta uygun bölgenin dışındadır (yapay değişkenler pozitiftir); (3, 1) köşesine gelindiğinde g = 0 olur. İkinci faz bu köşeden başlar ve kesikli z = 9 seviye doğrusu onun optimal olduğunu gösterir.

1–3. adımlar. Sağ taraflar 4 ve 6 negatif değildir. Önce problemi standart forma getirelim: iki $\geq$ kısıttan x_3 ve x_4 artık değişkenlerini çıkarırız. Artık değişkenlerin sütunları -1 içerdiğinden standart form birim matris taşımaz; henüz simpleks yöntem ile çözülebilir halde değildir. İki denkleme de birer yapay değişken ekleriz (bu problemin çözülebilir hale getirilişini Örnek 1.20 içinde görmüştük):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_{u_1} &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 + x_{u_2} &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1}, x_{u_2} &\geq 0 \end{aligned}$$

Birinci faz. Problem minimum problemi olduğundan yardımcı amaç $\min g = x_{u_1} + x_{u_2}$'dir: c_j satırında yapay sütunların altına 1, diğerlerinin altına 0 yazılır. Başlangıç tablosunda $\vec{c}_B = (1, 1)$ olduğundan her sütunun kriteri iki satırın toplamı eksi c_j'dir; örneğin $g_2 - c_2 = 1 + 3 - 0 = 4$ ve $g_0 = 4 + 6 = 10$. Minimum probleminde en büyük pozitif kriter girer. $\max\{2, 4\} = 4$ olduğundan v_2 baza girer. Oranlar $\frac{4}{1} = 4$ ve $\frac{6}{3} = 2$'dir; en küçüğü x_{u_2} satırındadır. v_{u_2} bazdan çıkar ve pivot 3'tür.

Tablo 6.1: Başlangıç tablosu — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	1	1	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	v_{u_2}	Oran
x_{u_1}	1	4	1	1	-1	0	1	0	$\frac{4}{1}$
x_{u_2}	1	6	1	[3]	0	-1	0	1	$\frac{6}{3}\Rightarrow$
$g_j - c_j$		$g_0 = 10$	2	$4\Uparrow$	-1	-1	0	0	

Pivot satırı 3'e bölünür ve x_2 satırı olur: $\left(\ 2 \mid \frac{1}{3}, 1, 0, -\frac{1}{3}\ \right)$. x_{u_1} satırından bu yeni satır bir kez, $g_j - c_j$ satırından 4 kez çıkarılır. Örneğin x_{u_1} satırının v_0 elemanı $4 - 2 = 2$, v_1 elemanı $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $g_0 = 10 - 4 \cdot 2 = 2$ ve $g_1 - c_1 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ olur. Bazdan çıkan v_{u_2} sütununu tablodan atıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Pozitif kriterler $\frac{2}{3}$ ve $\frac{1}{3}$'tür; en büyüğü v_1'inkidir ve v_1 baza girer. Oranlar $\frac{2}{2/3} = 3$ ve $\frac{2}{1/3} = 6$ olduğundan v_{u_1} bazdan çıkar; pivot $\frac{2}{3}$'tür.

Tablo 6.2: Birinci iterasyon tablosu — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	1	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	Oran
x_{u_1}	1	2	$[\frac{2}{3}]$	0	-1	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{2/3} \Rightarrow$
x_2	0	2	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{1/3}$
$g_j - c_j$		$g_0 = 2$	$\frac{2}{3} \Uparrow$	0	-1	$\frac{1}{3}$	0	

Pivot satırı $\frac{2}{3}$'e bölünür (yani $\frac{3}{2}$ ile çarpılır) ve x_1 satırı olur: $\left(\ 3 \mid 1, 0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\ \right)$. x_2 satırından bu satırın $\frac{1}{3}$ katı çıkarılır: v_0 elemanı $2 - 1 = 1$, v_3 elemanı $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, v_4 elemanı $-\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2}$. $g_j - c_j$ satırından da $\frac{2}{3}$ katı çıkarılır; bütün kriterler ve g_0 sıfır olur. v_{u_1} sütununu da atıyoruz.

Tablo 6.3: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 1

		c_j	0	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_1	0	3	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$g_j - c_j$		$g_0 = 0$	0	0	0	0

Pozitif kriter kalmadı; yardımcı problemin optimumuna ulaşıldı ve $\min g = 0$'dır. Bazda yapay vektör yoktur (Durum 2). Temel çözüm $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = x_4 = 0$'dır; bu nokta iki kısıtı da eşitlikle sağlar: $3 + 1 = 4$, $3 + 3 = 6$.

İkinci faz. c_j satırına orijinal katsayıları $(2, 3, 0, 0)$, c_B sütununa baz değişkenlerinin katsayılarını $(c_1 = 2, c_2 = 3)$ yazıp kriterleri yeniden hesaplarız:

$$z_3 - c_3 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 3 \cdot \frac{1}{2} - 0 = -\frac{3}{2},$$

$$z_4 - c_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 = -\frac{1}{2},$$

$$z_0 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9.$$

Baz vektörlerinin kriterleri yine sıfırdır.

Tablo 6.4: Başlangıç tablosu (optimal tablo) — Faz 2

		c_j	2	3	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_1	2	3	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	3	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 9$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

 CC BY-NC-SA 4.0

Minimum probleminde bütün $z_j - c_j \leq 0$ olunca tablo optimaldir; ikinci fazın başlangıç tablosu zaten optimal çıktı. Optimal çözüm $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ ve $\min z = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$'dur.
Sağlama için uygun bölgenin köşelerine bakalım: $(0,4)$'te $z = 12$, $(3,1)$'de $z = 9$, $(6,0)$'da $z = 12$. En küçük değer gerçekten $(3,1)$'dedir. Çözümün başındaki şekilde birinci fazın izlediği yol görülüyor: ilk iki temel çözüm uygun bölgenin dışındadır, çünkü o noktalarda yapay değişkenler pozitiftir.
■

Örnek 6.2 (Üç değişkenli bir maksimum problemi). Aşağıdaki problemi iki faz yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_3 &\geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

Çözüm.
Standart form. Sağ taraflar $2, 3, 3$ negatif değildir. İkinci kısıta x_4 aylak değişkenini ekler, üçüncü kısıttan x_5 artık değişkenini çıkarırız; birinci kısıt zaten eşitliktir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 + 0x_4 - x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 \end{aligned}$$

Simpleks yöntem ile çözülebilir hal. İkinci denklemin birim sütunu x_4'tür. Birinci denklemde (eşitlik) ve üçüncü denklemde (x_5'in katsayısı -1) birim sütun yoktur; bu iki denkleme x_{u_1} ve x_{u_2} yapay değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_{u_1} &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_3 - x_5 + x_{u_2} &= 3 \\ x_1, \ldots, x_5, x_{u_1}, x_{u_2} &\geq 0 \end{aligned}$$

Bu sistemle Büyük M yönteminde amaç

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - Mx_{u_1} - Mx_{u_2}$$

olurdu. İki faz yönteminde ise önce yardımcı problemi çözeriz.
Birinci faz. Orijinal problem maksimum problemi olduğundan yardımcı amaç

$$\max g = -x_{u_1} - x_{u_2}$$

biçimindedir: yapay sütunların c_j değeri -1, diğerlerininki 0'dır. Başlangıç tablosunda $\vec{c}_B = (-1, 0, -1)$ olduğundan her kriter, birinci ve üçüncü satırların toplamının eksisi eksi c_j'dir; örneğin $g_3 - c_3 = -(1+2) - 0 = -3$, $g_5 - c_5 = -(0-1) = 1$ ve $g_0 = -(2+3) = -5$.
Maksimum probleminde en negatif kriter girer. $\min\{-2, -1, -3\} = -3$ olduğundan v_3 baza girer. Oranlar $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{3}{2}$ ve $\frac{3}{2}$'dir. En küçük oran x_4 ve x_{u_2} satırlarında eşittir; eşitlikte yapay değişkenin satırını seçeriz, çünkü amacımız yapay değişkenleri bir an önce bazdan çıkarmaktır. v_{u_2} bazdan çıkar ve pivot 2'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 6.5: Başlangıç tablosu — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	0	-1	-1	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_{u_1}	v_{u_2}	Oran
x_{u_1}	-1	2	1	1	1	0	0	1	0	$\frac{2}{1}$
x_4	0	3	3	-2	2	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$
x_{u_2}	-1	3	1	0	[2]	0	-1	0	1	$\frac{3}{2}\Rightarrow$
$g_j - c_j$		$g_0 = -5$	-2	-1	$-3\Uparrow$	0	1	0	0	

Pivot satırı 2'ye bölünür ve x_3 satırı olur: $\left(\frac{3}{2} \mid \frac{1}{2}, 0, 1, 0, -\frac{1}{2}\right)$. x_{u_1} satırından bu satır bir kez, x_4 satırından iki kez çıkarılır; $g_j - c_j$ satırına ise üç katı eklenir (kriter -3 olduğu için). Örneğin x_4 satırının v_0 elemanı $3 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0$, v_5 elemanı $0 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$; $g_0 = -5 + 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ olur. Bazdan çıkan v_{u_2} sütununu atıyoruz.

Yeni tabloda $x_4 = 0$ olduğuna dikkat edelim: oran testindeki eşitlik yüzünden temel çözüm dejenere oldu. En negatif kriter -1'dir ve v_2 baza girer. v_2 sütununda yalnız x_{u_1} satırının elemanı pozitiftir (x_4 satırında -2, x_3 satırında 0); oran $\frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$ ve v_{u_1} bazdan çıkar. Pivot 1'dir.

Tablo 6.6: Birinci iterasyon tablosu — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	0	-1	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_{u_1}	Oran
x_{u_1}	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	[1]	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1/2}{1}\Rightarrow$
x_4	0	0	2	-2	0	1	1	0	—
x_3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	—
$g_j - c_j$		$g_0 = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-1\Uparrow$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	

Pivot 1 olduğundan x_{u_1} satırı aynen kalır ve x_2 satırı olur. x_4 satırına bu satırın iki katı, $g_j - c_j$ satırına bir katı eklenir; x_3 satırının v_2 elemanı 0 olduğundan o satır değişmez. Örneğin x_4 satırında v_0 elemanı $0 + 1 = 1$, v_1 elemanı $2 + 1 = 3$, v_5 elemanı $1 + 1 = 2$ olur ve satır $(1 \mid 3, 0, 0, 1, 2)$ biçimini alır. v_{u_1} sütununu da atıyoruz.

Tablo 6.7: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$
x_4	0	1	3	0	0	1	2
x_3	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$
$g_j - c_j$		$g_0 = 0$	0	0	0	0	0

 CC BY-NC-SA 4.0

Simpleks kriterleri arasında negatif olan kalmadı; yardımcı problemin maksimumuna ulaşıldı ve $\max g = 0$'dır. Bazda yapay vektör yoktur (Durum 2); birinci faz sona erer. Bulunan uygun temel çözüm $(x_1, \ldots, x_5) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0\right)$'dır.

İkinci faz. c_j satırına $1, 2, 3, 0, 0$; c_B sütununa x_2, x_4, x_3 için $2, 0, 3$ yazılır. Kriterler $z_j = \vec{c}_B^{\,T} v_j$ ile yeniden hesaplanır:

$$z_1 - c_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2},$$
$$z_5 - c_5 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 = -\frac{1}{2},$$
$$z_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

Maksimum probleminde en negatif kriter girer; tek negatif kriter $-\frac{1}{2}$ olduğundan v_5 baza girer. v_5 sütununda x_3 satırının elemanı $-\frac{1}{2} < 0$ olduğundan o satır teste girmez. Oranlar $\frac{1/2}{1/2} = 1$ ve $\frac{1}{2}$'dir; x_4 bazdan çıkar ve pivot 2'dir.

Tablo 6.8: Başlangıç tablosu — Faz 2

		c_j	1	2	3	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1/2}{1/2}$
x_4	0	1	3	0	0	1	[2]	$\frac{1}{2} \Rightarrow$
x_3	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	—
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{11}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2} \Uparrow$	

Pivot satırı 2'ye bölünür ve x_5 satırı olur: $\left(\frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 1 \right)$. x_2 satırından bu satırın $\frac{1}{2}$ katı çıkarılır, x_3 satırına ve $z_j - c_j$ satırına $\frac{1}{2}$ katı eklenir. Örneğin x_3 satırının v_0 elemanı $\frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ ve $z_0 = \frac{11}{2} + \frac{1}{4} = \frac{23}{4}$ olur.

Tablo 6.9: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 2

		c_j	1	2	3	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_2	2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0
x_5	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
x_3	3	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	0
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{23}{4}$	$\frac{9}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	0

Simpleks kriterlerinde negatif olan kalmadı; optimal çözüme ulaşıldı:

$$X^* = (x_1, \ldots, x_5) = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}, 0, \frac{1}{2}\right), \qquad z^* = \frac{23}{4}.$$

Sağlama: $0 + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2$; $0 - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 3 \le 3$; $0 + \frac{7}{2} = \frac{7}{2} \ge 3$ (artık $x_5 = \frac{1}{2}$); amaç $\frac{2}{4} + \frac{21}{4} = \frac{23}{4}$. Bu problemin uygun temel çözümleri yalnız üç tanedir: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ noktasında $z = 5$, birinci fazın bulduğu $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ noktasında $z = \frac{11}{2}$ ve optimal noktada $z = \frac{23}{4}$. İkinci faz, birinci fazın bıraktığı köşeden tek adımda en iyi köşeye geçti.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

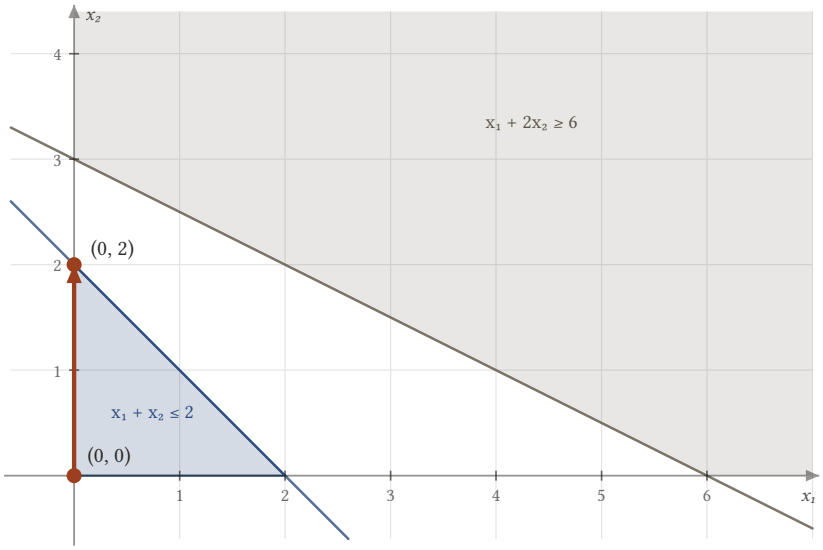
6.5 Uygun Çözümü Olmayan Problemler

Birinci fazın asıl gücü, uygun çözümü olmayan bir problemi kendiliğinden fark etmesidir (Durum 1). Önce bunu şekille izleyebileceğimiz iki değişkenli bir problemde görelim.

Örnek 6.3 (Kısıtları çelişen iki değişkenli problem). Aşağıdaki problemi iki faz yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.



Şekil 6.2: $x_1 + x_2 \le 2$ üçgeni ile $x_1 + 2x_2 \ge 6$ yarı düzlemi birinci bölgede kesişmez; uygun çözüm yoktur. Birinci faz (0, 0) noktasından (0, 2) köşesine gider ve orada durur: bu noktada $x_1 + 2x_2 = 4$ olup 6'ya 2 birim eksiktir, yani yapay değişken 2 değerinde kalır.

Önce problemi standart forma getirelim: birinci kısıta x_3 aylak değişkenini ekler, ikinci kısıttan x_4 artık değişkenini çıkarırız. Birinci denklemin birim sütunu x_3'tür; ikinci denklemde birim sütun olmadığı için yalnız ona x_{u_1} yapay değişkenini ekleriz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + x_{u_1} &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1} &\ge 0 \end{aligned}$$

Birinci faz. Problem maksimum problemi olduğundan yardımcı amaç $\max g = -x_{u_1}$'dir. $\vec{c}_B = (0, -1)$ olduğundan kriterler ikinci satırın eksisi eksi c_j'dir: $g_1 - c_1 = -1$, $g_2 - c_2 = -2$, $g_4 - c_4 = 1$, $g_0 = -6$.
Maksimum probleminde en negatif kriter girer; v_2 baza girer. Oranlar $\frac{2}{1} = 2$ ve $\frac{6}{2} = 3$ olduğundan x_3 bazdan çıkar; pivot 1'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 6.10: Başlangıç tablosu — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	-1	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	Oran
x_3	0	2	1	[1]	1	0	0	$\frac{2}{1} \Rightarrow$
x_{u_1}	-1	6	1	2	0	-1	1	$\frac{6}{2}$
$g_j - c_j$		$g_0 = -6$	-1	$-2 \Uparrow$	0	1	0	

Pivot satırı aynen kalır ve x_2 satırı olur. x_{u_1} satırından bu satırın iki katı çıkarılır:

$$\big(\ 6-4 \mid 1-2, 0, 0-2, -1, 1\ \big) = (2 \mid -1, 0, -2, -1, 1).$$

$g_j - c_j$ satırına iki katı eklenir: $g_0 = -6+4 = -2$, $g_1 - c_1 = -1+2 = 1$, $g_3 - c_3 = 0+2 = 2$.

Tablo 6.11: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	-1
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}
x_2	0	2	1	1	1	0	0
x_{u_1}	-1	2	-1	0	-2	-1	1
$g_j - c_j$		$g_0 = -2$	1	0	2	1	0

Bütün kriterler negatif olmadığından yardımcı problemin optimumuna ulaşıldı. Ancak $\max g = -2 \neq 0$'dır: x_{u_1} yapay vektörü bazdadır ve değişkeni 2 değerindedir (Durum 1). Önerme 6.1 gereği problemin uygun çözümü yoktur; ikinci faza geçilmez.
Sonucu doğrudan da görebiliriz. Değişkenler negatif olmadığından

$$x_1 + 2x_2 \leq 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) \leq 4$$

tür; yani ikinci kısıtın sol tarafı hiçbir zaman 6'ya ulaşamaz. Birinci fazın durduğu $(0, 2)$ noktasında sol taraf 4'tür ve 6'ya $x_{u_1} = 2$ birim eksiktir. Birinci faz, yapay değişkeni küçültebildiği kadar küçültmüş ve bu eksikten daha azına inememiştir.
■

Şimdi aynı durumu üç değişkenli, eşitlik kısıtı da içeren bir minimum probleminde görelim.

Örnek 6.4 (Uygun çözümü olmayan üç değişkenli problem). Aşağıdaki problemi iki faz yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 30 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 18 \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 &\leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \min z &= 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \end{aligned}$$

Çözüm.
Sağ taraflar negatif değildir. Birinci kısıttan x_4 artık değişkenini çıkarır, üçüncü kısıta x_5 aylak değişkenini ekleriz. Birim sütun yalnız üçüncü denklemde (x_5) vardır; birinci denkleme x_{u_1}, ikinci denkleme (eşitlik) x_{u_2} yapay değişkenini ekleriz. Böylece simpleks yöntem ile çözülebilir hal

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_{u_1} &= 30 \\
x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_{u_2} &= 18 \\
6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + x_5 &= 50 \\
x_1, \ldots, x_5, x_{u_1}, x_{u_2} &\geq 0 \\
\min z = 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 & \\
+ Mx_{u_1} + Mx_{u_2} &
\end{aligned}
$$

olur. Bu, Büyük M yöntemiyle çözülecek esas problemdir. İki faz yönteminde amaç fonksiyonunu değiştirerek yardımcı problemi kurarız.

Birinci faz. Problem minimum problemi olduğundan yardımcı amaç $\min g = x_{u_1} + x_{u_2}$'dir. $\vec{c}_B = (1, 1, 0)$ olduğundan kriterler ilk iki satırın toplamı eksi c_j'dir: örneğin $g_2 - c_2 = 3 + 2 = 5$, $g_3 - c_3 = 1 - 4 = -3$ ve $g_0 = 30 + 18 = 48$.

Minimum probleminde en büyük pozitif kriter girer. Pozitif kriterler 2 ve 5'tir; v_2 baza girer. Oranlar $\frac{30}{3} = 10$, $\frac{18}{2} = 9$ ve $\frac{50}{9} \approx 5{,}56$'dır; en küçüğü x_5 satırındadır. v_5 bazdan çıkar ve pivot 9'dur.

Tablo 6.12: Başlangıç tablosu — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	0	1	1	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_{u_1}	v_{u_2}	Oran
x_{u_1}	1	30	1	3	1	-1	0	1	0	$\frac{30}{3}$
x_{u_2}	1	18	1	2	-4	0	0	0	1	$\frac{18}{2}$
x_5	0	50	6	[9]	3	0	1	0	0	$\frac{50}{9} \Rightarrow$
$g_j - c_j$		$g_0 = 48$	2	$5 \Uparrow$	-3	-1	0	0	0	

Pivot satırı 9'a bölünür ve x_2 satırı olur: $\left(\frac{50}{9} \mid \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{9}, 0, 0 \right)$. x_{u_1} satırından bu satırın 3 katı, x_{u_2} satırından 2 katı, $g_j - c_j$ satırından 5 katı çıkarılır. Örneğin:

$$
\begin{aligned}
x_{u_1}, v_0 &: 30 - 3 \cdot \frac{50}{9} = \frac{40}{3}, \quad x_{u_2}, v_0 : 18 - 2 \cdot \frac{50}{9} = \frac{62}{9}, \\
x_{u_2}, v_3 &: -4 - 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{14}{3}, \qquad g_0 : 48 - 5 \cdot \frac{50}{9} = \frac{182}{9}.
\end{aligned}
$$

Burada iki yapay vektör de bazda kaldığı için atılan sütun yoktur.

Tablo 6.13: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	0	1	1
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_{u_1}	v_{u_2}
x_{u_1}	1	$\frac{40}{3}$	-1	0	0	-1	$-\frac{1}{3}$	1	0
x_{u_2}	1	$\frac{62}{9}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{14}{3}$	0	$-\frac{2}{9}$	0	1
x_2	0	$\frac{50}{9}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{9}$	0	0
$g_j - c_j$		$g_0 = \frac{182}{9}$	$-\frac{4}{3}$	0	$-\frac{14}{3}$	-1	$-\frac{5}{9}$	0	0

Simpleks kriterleri içinde pozitif olan kalmadı; yardımcı problem için optimallik koşulu sağlandı. Fakat $\min g = \frac{182}{9} \neq 0$'dır ve iki yapay değişken de pozitif değerle bazdadır: $x_{u_1} = \frac{40}{3}$, $x_{u_2} = \frac{62}{9}$. Önerme 6.1 gereği esas problemin uygun çözümü yoktur (Durum 1).

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu sonucun sebebi birinci ve üçüncü kısıtların çelişmesidir. Değişkenler negatif olmadığından

$$6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \geq 3x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 3(x_1 + 3x_2 + x_3)$$

dir. Birinci kısıt sağlanırsa sağ taraf en az $3 \cdot 30 = 90$ olur; bu durumda üçüncü kısıtın sol tarafı da en az 90'dır ve 50'yi aşar. İki kısıt aynı anda sağlanamaz; ikinci kısıta bakmaya bile gerek yoktur.
■

6.6 Bazda Sıfır Değerli Yapay Değişken Kalması

Durum 3'ü iki küçük örnekte görelim. Birincisinde yapay değişken bir pivotla bazdan çıkarılır (Önerme 6.2), ikincisinde satırı gereksiz çıkar ve atılır (Önerme 6.3).

Örnek 6.5 (Yapay değişkeni pivotla bazdan çıkarmak). Aşağıdaki problemi iki faz yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

Çözüm.
İkinci kısıttan x_4 artık değişkenini çıkarırız. İki denklemde de birim sütun yoktur (birincisi eşitlik, ikincisinde x_4'ün katsayısı -1); ikisine de yapay değişken ekleriz:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_{u_1} &= 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_{u_2} &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1}, x_{u_2} &\geq 0 \end{aligned}$$

Birinci faz. Problem maksimum problemi olduğundan yardımcı amaç $\max g = -x_{u_1} - x_{u_2}$'dir. $\vec{c}_B = (-1, -1)$ olduğundan kriterler iki satırın toplamının eksisi eksi c_j'dir; örneğin $g_1 - c_1 = -(2+4) = -6$ ve $g_0 = -(4+8) = -12$.
Maksimum probleminde en negatif kriter girer; -6 ile v_1 baza girer. Oranlar $\frac{4}{2} = 2$ ve $\frac{8}{4} = 2$ eşittir ve iki satır da yapay değişkene aittir; üstteki x_{u_1} satırını seçeriz. v_{u_1} bazdan çıkar ve pivot 2'dir.

Tablo 6.14: Başlangıç tablosu — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	-1	-1	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	v_{u_2}	Oran
x_{u_1}	-1	4	[2]	1	1	0	1	0	$\frac{4}{2} \Rightarrow$
x_{u_2}	-1	8	4	1	2	-1	0	1	$\frac{8}{4}$
$g_j - c_j$		$g_0 = -12$	$-6 \Uparrow$	-2	-3	1	0	0	

Pivot satırı 2'ye bölünür ve x_1 satırı olur: $\left(\ 2 \mid 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\ \right)$. x_{u_2} satırından bu satırın 4 katı çıkarılır:

$$\left(\ 8-8 \mid 0, 1-2, 2-2, -1\ \right) = (0 \mid 0, -1, 0, -1).$$

$g_j - c_j$ satırına 6 katı eklenir: $g_0 = -12 + 12 = 0$, $g_2 - c_2 = -2 + 3 = 1$, $g_3 - c_3 = -3 + 3 = 0$, $g_4 - c_4 = 1$. v_{u_1} sütununu atıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 6.15: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	-1
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_2}
x_1	0	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
x_{u_2}	-1	0	0	-1	0	$[-1]$	1
$g_j - c_j$		$g_0 = 0$	0	1	0	1	0

Bütün kriterler negatif olmadığından birinci fazın optimumuna ulaşıldı ve $\max g = 0$'dır; problemin uygun çözümü vardır. Ancak x_{u_2} sıfır değerle bazdadır (Durum 3). Onu bazdan çıkarmak için satırında sıfırdan farklı bir gerçek eleman ararız: v_2 ve v_4 sütunlarında -1 vardır. Herhangi biri seçilebilir; v_4'ü seçelim. Tabloda köşeli parantezle gösterilen pivot -1'dir ve negatiftir, ama Önerme 6.2 gereği bu bir sakınca oluşturmaz, çünkü satırın sağ tarafı 0'dır.

Pivot satırı -1'e bölünür ve x_4 satırı olur: $(0 \mid 0, 1, 0, 1)$. x_1 satırının v_4 elemanı 0 olduğundan o satır değişmez. Değişkenlerin değerleri aynı kaldı: $x_1 = 2$, geri kalanlar 0. Artık bazda yapay vektör yoktur; v_{u_2} sütununu atıp ikinci faza geçeriz.

Bu adımı atlayıp x_{u_2}'yu bazda bırakmak neden güvenli değildir, onu da görelim. x_{u_2} satırının v_2 sütunundaki elemanı -1'dir. İkinci fazda v_2 baza pozitif bir λ değeriyle girseydi, dönüşüm kuralı x_{u_2}'nun yeni değerini $0 - \lambda \cdot (-1) = \lambda > 0$ yapardı; bulunan nokta orijinal ikinci kısıtı sağlamazdı.

İkinci faz. c_j satırına $1, 2, 3, 0$ yazılır; c_B sütununda x_1 için 1, x_4 için 0 bulunur. Kriterler: $z_2 - c_2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$, $z_3 - c_3 = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$, $z_0 = 1 \cdot 2 = 2$.

Maksimum probleminde en negatif kriter girer; v_3 baza girer. v_3 sütununda x_4 satırının elemanı 0 olduğundan yalnız x_1 satırının oranı hesaplanır: $\frac{2}{1/2} = 4$. x_1 bazdan çıkar ve pivot $\frac{1}{2}$'dir.

Tablo 6.16: Başlangıç tablosu — Faz 2

		c_j	1	2	3	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_1	1	2	1	$\frac{1}{2}$	$[\frac{1}{2}]$	0	$\frac{2}{1/2} \Rightarrow$
x_4	0	0	0	1	0	1	—
$z_j - c_j$		$z_0 = 2$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2} \Uparrow$	0	

Pivot satırı $\frac{1}{2}$'ye bölünür (iki ile çarpılır) ve x_3 satırı olur: $(4 \mid 2, 1, 1, 0)$. x_4 satırı değişmez. $z_j - c_j$ satırına bu satırın $\frac{5}{2}$ katı eklenir: $z_0 = 2 + 10 = 12$, $z_1 - c_1 = 0 + 5 = 5$, $z_2 - c_2 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$.

Tablo 6.17: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 2

		c_j	1	2	3	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_3	3	4	2	1	1	0
x_4	0	0	0	1	0	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 12$	5	1	0	0

Negatif kriter kalmadı; optimal çözüm $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 4$ ve $\max z = 12$'dir. Sağlama: $0 + 0 + 4 = 4$ ve $0 + 0 + 8 = 8 \geq 8$.

Problemin yapısı da bunu doğrular. Birinci kısıttan $x_3 = 4 - 2x_1 - x_2$ yazıp ikincide yerine koyarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$4x_1 + x_2 + 2(4 - 2x_1 - x_2) = 8 - x_2 \geq 8,$$

yani $x_2 = 0$ çıkar. Uygun çözümler $2x_1 + x_3 = 4$ doğru parçasıdır; uç noktaları $(2, 0, 0)$ ($z = 2$) ve $(0, 0, 4)$ ($z = 12$) olup en büyük değer ikincisindedir.
■

Örnek 6.6 (Gereksiz kısıtı içeren problem). Aşağıdaki problemi iki faz yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 \end{aligned}$$

Çözüm.
Üç kısıt da eşitliktir ve sağ tarafları negatif değildir; problem standart formdadır ama birim sütun yoktur. Üç denkleme de yapay değişken ekleriz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_{u_1} &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_{u_2} &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_{u_3} &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_{u_1}, x_{u_2}, x_{u_3} &\geq 0 \end{aligned}$$

Birinci faz. Minimum problemi olduğundan $\min g = x_{u_1} + x_{u_2} + x_{u_3}$'tür. $\vec{c}_B = (1, 1, 1)$ olduğundan her kriter, sütunun üç elemanının toplamıdır: 4, 6, 8 ve $g_0 = 20$.
Minimum probleminde en büyük pozitif kriter girer; 8 ile v_3 baza girer. Oranlar $\frac{4}{1} = 4$, $\frac{6}{3} = 2$ ve $\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$'dir; v_{u_2} bazdan çıkar ve pivot 3'tür.

Tablo 6.18: Başlangıç tablosu — Faz 1

		c_j	0	0	0	1	1	1	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_{u_1}	v_{u_2}	v_{u_3}	Oran
x_{u_1}	1	4	1	1	1	1	0	0	$\frac{4}{1}$
x_{u_2}	1	6	1	2	[3]	0	1	0	$\frac{6}{3} \Rightarrow$
x_{u_3}	1	10	2	3	4	0	0	1	$\frac{10}{4}$
$g_j - c_j$		$g_0 = 20$	4	6	8 ⇑	0	0	0	

Pivot satırı 3'e bölünür ve x_3 satırı olur: $\left(2 \mid \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right)$. x_{u_1} satırından bu satır bir kez, x_{u_3} satırından 4 kez, $g_j - c_j$ satırından 8 kez çıkarılır. Örneğin x_{u_3} satırı

$$\left(10 - 8 \mid 2 - \frac{4}{3}, 3 - \frac{8}{3}, 4 - 4 \right) = \left(2 \mid \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)$$

olur. v_{u_2} sütununu atıyoruz.
En büyük pozitif kriter $\frac{4}{3}$'tür ve v_1 baza girer. Oranlar $\frac{2}{2/3} = 3$, $\frac{2}{1/3} = 6$ ve $\frac{2}{2/3} = 3$'tür. En küçük oran iki yapay satırda eşittir; üstteki x_{u_1} satırını seçeriz. Pivot $\frac{2}{3}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 6.19: Birinci iterasyon tablosu — Faz 1

		c_j	0	0	0	1	1	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_{u_1}	v_{u_3}	Oran
x_{u_1}	1	2	$[\frac{2}{3}]$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{2/3}\Rightarrow$
x_3	0	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{2}{1/3}$
x_{u_3}	1	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1	$\frac{2}{2/3}$
$g_j - c_j$		$g_0 = 4$	$\frac{4}{3}\Uparrow$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	

Pivot satırı $\frac{2}{3}$'e bölünür ve x_1 satırı olur: $(\ 3 \mid 1, \frac{1}{2}, 0\ )$. x_3 satırından bu satırın $\frac{1}{3}$ katı çıkarılır: $(\ 2-1 \mid 0, \frac{2}{3}-\frac{1}{6}, 1\ ) = (\ 1 \mid 0, \frac{1}{2}, 1\ )$. x_{u_3} satırından ve $g_j - c_j$ satırından sırasıyla $\frac{2}{3}$ ve $\frac{4}{3}$ katı çıkarılır; ikisi de gerçek sütunlarda tamamen sıfırlanır. v_{u_1} sütununu atıyoruz.

Tablo 6.20: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 1

		c_j	0	0	0	1
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_{u_3}
x_1	0	3	1	$\frac{1}{2}$	0	0
x_3	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0
x_{u_3}	1	0	0	0	0	1
$g_j - c_j$		$g_0 = 0$	0	0	0	0

Pozitif kriter kalmadı ve $\min g = 0$'dır; problemin uygun çözümü vardır. x_{u_3} sıfır değerle bazdadır (Durum 3), ama satırının bütün gerçek elemanları sıfırdır; pivotla çıkarılamaz. Önerme 6.3 gereği kısıtlardan biri gereksizdir. Gerçekten de üçüncü kısıt ilk iki kısıtın toplamıdır:

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (x_1 + 2x_2 + 3x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3, \qquad 4 + 6 = 10.$$

x_{u_3} satırını ve sütununu atarız.

İkinci faz. Kalan tabloda baz x_1, x_3'tür. c_j satırına $2, 1, 3$, c_B sütununa 2 ve 3 yazılır. Kriter $z_2 - c_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}$ ve $z_0 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$'dur.
Minimum probleminde en büyük pozitif kriter girer; v_2 baza girer. Oranlar $\frac{3}{1/2} = 6$ ve $\frac{1}{1/2} = 2$ olduğundan x_3 bazdan çıkar; pivot $\frac{1}{2}$'dir.

Tablo 6.21: Başlangıç tablosu — Faz 2

		c_j	2	1	3	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	Oran
x_1	2	3	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{1/2}$
x_3	3	1	0	$[\frac{1}{2}]$	1	$\frac{1}{1/2}\Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 9$	0	$\frac{3}{2}\Uparrow$	0	

Pivot satırı iki ile çarpılır ve x_2 satırı olur: $(2 \mid 0, 1, 2)$. x_1 satırından bu satırın $\frac{1}{2}$ katı çıkarılır: $(3-1 \mid 1, 0, 0-1) = (2 \mid 1, 0, -1)$. $z_j - c_j$ satırından $\frac{3}{2}$ katı çıkarılır: $z_0 = 9 - 3 = 6$, $z_3 - c_3 = 0 - 3 = -3$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 6.22: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 2

		c_j	2	1	3
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3
x_1	2	2	1	0	-1
x_2	1	2	0	1	2
$z_j - c_j$		$z_0 = 6$	0	0	-3

Bütün $z_j - c_j \le 0$ olduğundan tablo optimaldir: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ ve $\min z = 2 \cdot 2 + 2 = 6$. Sağlama: $2 + 2 + 0 = 4$, $2 + 4 + 0 = 6$, $4 + 6 + 0 = 10$. Uygun çözümler $(3, 0, 1)$ ile $(2, 2, 0)$ arasındaki doğru parçasıdır; uç noktalardaki amaç değerleri 9 ve 6 olduğundan minimum gerçekten 6'dır. ■

6.7 Büyük M Yöntemiyle Karşılaştırma

İki yöntem aynı yapay değişkenleri kullanır; fark yalnız bu değişkenlerin amaçta nasıl cezalandırıldığındadır. Bu yüzden iki yöntemin izlediği yolların çoğu zaman aynı çıkması şaşırtıcı değildir. Bunun nedenini simpleks kriterinin amaç katsayılarına doğrusal olarak bağlı olmasında görürüz.

Önerme 6.4 (Büyük M kriteri ile iki faz kriterinin bağı). *Minimum probleminde Büyük M yönteminin amaç katsayıları $c_j^M = c_j + M d_j$ olsun; burada d_j, yapay değişkenler için 1, gerçek değişkenler için 0'dır (yani d_j, birinci fazın katsayılarıdır). Aynı baz için*

$$z_j^M - c_j^M = (z_j - c_j) + M\,(g_j - d_j), \qquad z_0^M = z_0 + M g_0$$

dir. Burada $z_j - c_j$, yapay sütunlara $c_j = 0$ verilerek orijinal katsayılarla hesaplanan kriter; $g_j - d_j$ ise birinci fazın katsayılarıyla hesaplanan kriterdir. Maksimum probleminde yapay değişkenlerin Büyük M katsayısı $-M$, birinci fazdaki katsayısı -1'dir; yapaylar için $d_j = -1$ alınınca aynı eşitlik geçerlidir.

İspat.
Aynı baz için tablonun gövdesi (y_{ij} ve v_0) amaç katsayılarına bağlı değildir. Baz değişkenlerinin Büyük M katsayıları $\vec{c}_B^{\,M} = \vec{c}_B + M\vec{d}_B$ olduğundan

$$\begin{aligned} z_j^M - c_j^M &= (\vec{c}_B + M\vec{d}_B)^T v_j - (c_j + M d_j) \\ &= (\vec{c}_B^{\,T} v_j - c_j) + M\,(\vec{d}_B^{\,T} v_j - d_j) \end{aligned}$$

bulunur. Parantezlerin ilki $z_j - c_j$, ikincisi $g_j - d_j$'dir. $j = 0$ için ($c_0 = d_0 = 0$ alınarak) aynı hesap $z_0^M = z_0 + M g_0$ verir. Maksimum probleminde yapaylar için $d_j = -1$ alınınca $c_j^M = c_j + M d_j$ yazılışı yine geçerlidir ve hesap aynen tekrarlanır.
■

Yani Büyük M tablosunun her kriteri iki parçadır: M'nin katsayısı, birinci fazın kriteridir; sabit kısım, orijinal amaç için hesaplanan kriterdir. M çok büyük olduğundan M'nin katsayısı sıfırdan farklı olan her yerde işareti ve büyüklüğü o katsayı belirler. Oran testi ise amaç katsayılarına hiç bağlı değildir. Dolayısıyla birinci fazın kriterleri bir seçimi kesin olarak belirlediği sürece Büyük M aynı vektörü baza sokar ve aynı vektörü bazdan çıkarır: iki yöntem aynı köşelerden geçer. Uygun çözümü olan ve birinci fazı Durum 2 ile biten bir problemde ayrılık ancak birinci fazın kriterleri iki sütun arasında eşit çıktığında olabilir; Büyük M bu eşitliği sabit kısımla bozar. Yapay değişkenler bazdan çıktıktan sonra M'li kısımlar sıfırlanır ve Büyük M tablosunun kriterleri ikinci fazın kriterleriyle aynı olur.

Örnek 6.7 (İki yöntemin yollarını karşılaştırmak). Örnek 6.1 problemini ($x_1 + x_2 \ge 4$, $x_1 + 3x_2 \ge 6$, $x_1, x_2 \ge 0$, $\min z = 2x_1 + 3x_2$) Büyük M yöntemiyle çözdüğümüzde hangi temel çözümlerden geçeriz? İki fazın yoluyla karşılaştırınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Büyük M'de amaç $\min z = 2x_1 + 3x_2 + Mx_{u_1} + Mx_{u_2}$'dir. Başlangıç tablosunun gövdesi birinci fazın başlangıç tablosuyla (Tablo 6.1) aynıdır. Önerme 6.4 gereği kriterler, birinci fazın kriterleri $(2, 4, -1, -1)$ M ile çarpılıp orijinal kriterlere $(-2, -3, 0, 0)$ eklenerek bulunur:

$$z_1^M - c_1^M = 2M - 2, \quad z_2^M - c_2^M = 4M - 3, \quad z_3^M - c_3^M = z_4^M - c_4^M = -M.$$

Minimum probleminde en büyük pozitif kriter girer. M çok büyük olduğundan $4M - 3 > 2M - 2$'dir ve v_2 girer; oran testi aynı olduğundan v_{u_2} çıkar. Bir sonraki tabloda kriterler $\left(\frac{2}{3}M - 1\right)$, 0, $-M$, $\left(\frac{1}{3}M - 1\right)$ olur; M'nin katsayıları yine birinci fazın kriterleridir (Tablo 6.2). En büyüğü $\frac{2}{3}M - 1$ olduğundan v_1 girer ve v_{u_1} çıkar. Bu tabloda M'li kısımlar yapay sütunlar dışında sıfırlanır ve kriterler $0, 0, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ olur; bunlar ikinci fazın kriterleridir (Tablo 6.4). İki yöntemin yolu şöyledir:

Tablo 6.23: İki faz yöntemi ile Büyük M yönteminin aynı problemde izlediği yol

Tablo	Baz	(x_1, x_2)	İki faz: g	Büyük M: z
Başlangıç	x_{u_1}, x_{u_2}	$(0, 0)$	10	$10M$
Birinci iterasyon	x_{u_1}, x_2	$(0, 2)$	2	$2M + 6$
İkinci iterasyon	x_1, x_2	$(3, 1)$	0	9

Tabloda (Tablo 6.23) görüldüğü gibi iki yöntem aynı üç temel çözümden geçer. Büyük M'nin amaç değeri her adımda $z_0 + Mg_0$'dır: örneğin birinci iterasyonda $x_2 = 2$, $x_{u_1} = 2$ olduğundan $z = 3 \cdot 2 + M \cdot 2 = 2M + 6$. İki fazda aynı yol ikiye bölünmüştür: ilk iki adım birinci fazdır, son tablo ikinci fazın başlangıç (ve optimal) tablosudur.
Örnek 6.2 probleminde de durum aynıdır. Büyük M'nin başlangıç kriterleri $-2M - 1$, $-M - 2$, $-3M - 3$, 0, M olur; en negatifi $-3M - 3$ olduğundan v_3 girer. Sonraki tabloda en negatif kriter $-M - 2$ olur ve v_2 girer; ardından M'li kısımlar sıfırlanır ve kriterler ikinci fazın başlangıç kriterleridir $(\frac{3}{2}, 0, 0, 0, -\frac{1}{2})$. Büyük M de $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ve $\left(0, \frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$ köşelerinden geçerek $z^* = \frac{23}{4}$ değerine ulaşır.
■

İki yöntem aynı köşelerden geçse de hesap yükleri ve güvenilirlikleri farklıdır.

> **i** Not
>
> **Büyük M yöntemi** tek bir simpleks çözümüyle biter, ama her kriteri $aM + b$ biçiminde iki parçalı taşır. Daha önemlisi M bir sayı olarak seçilmek zorundadır ve ne kadar büyük olması gerektiği önceden bilinmez. Örnek 6.1 probleminde $M = 1$ alınırsa $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_{u_1} = 2$ noktasında amaç $3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 8$ olur. Bu değer gerçek optimum olan 9'dan küçük olduğundan yöntem, yapay değişkeni pozitif kalan ve orijinal kısıtı sağlamayan bir "çözümle" biterdi. Bilgisayarda ise M'yi 10^6 gibi çok büyük almak, M'nin yanında küçük kalan gerçek katsayıların yuvarlama hatalarında kaybolmasına yol açar.
> **İki faz yöntemi** M kullanmaz; her hücre tek bir sayıdır ve birinci faz, uygun çözüm olup olmadığı sorusunu tek başına ve kesin olarak yanıtlar ($g = 0$ mı, değil mi). Bunun karşılığında kriterler iki kez hesaplanır ve birinci fazın sonunda sıfır değerle bazda kalan yapay değişkenlere dikkat etmek gerekir.

Bu bölümde yapay değişkenli problemleri iki aşamada çözmeyi öğrendik: birinci faz uygun bir başlangıç köşesi bulur ya da böyle bir köşenin olmadığını gösterir, ikinci faz o köşeden optimuma gider. Şu ana kadar çözdüğümüz problemlerin hep tek bir optimal çözümü vardı. Simpleks tablosu, amaç fonksiyonunun sınırsız büyüyebildiği ya da optimal değerin birden fazla noktada alındığı durumları da kendi işaretleriyle gösterir. Bu durumları bir sonraki bölümde, Sınırsız çözüm ve alternatif optimal çözüm bölümünde inceleyeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

7. Sınırsız Çözüm ve Alternatif Optimal Çözüm

Simpleks yöntem her iterasyonda iki soru sorar: Amacı iyileştiren bir vektör var mı, varsa onu baza alırken hangi vektör bazdan çıkar? Simpleks yöntem, Büyük M yöntemi ve İki faz yöntemi bölümlerindeki örneklerde bu soruların cevabı hep sonunda tek bir optimal çözüme götürdü. Ama iki şey ters gidebilir. Birincisi, iyileştiren bir vektör bulunur ama oran testi yapılamaz, çünkü sütununda hiç pozitif eleman yoktur. İkincisi, optimal tabloya ulaşılır ama baz dışındaki bir vektörün simpleks kriteri sıfırdır.
Bu bölümde bu iki durumu inceleyeceğiz. Birincisi **sınırsız çözüm** demektir: amaç fonksiyonu istenildiği kadar iyileştirilebilir ve optimal çözüm yoktur. İkincisi **alternatif optimal çözüm** demektir: aynı optimal değeri veren birden fazla, hatta sonsuz çok çözüm vardır. Her ikisini de önce tabloda nasıl tanıyacağımızı söyleyip sonra nedenini ispatlayacak, sonra da uygun bölgenin şekli üzerinde göreceğiz.

7.1 Tablodan Okunan İki Eşitlik

İki durumun ispatında da aynı araç işimize yarayacak: Bir simpleks tablosu, yalnız o anki uygun temel çözümü değil, kısıtları sağlayan **her** çözümü baz dışındaki değişkenler cinsinden yazmamızı sağlar.
Simpleks yöntem bölümündeki gibi standart formdaki (Tanım 1.7) problemi $x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = v_0$, $x_j \geq 0$ biçiminde yazalım ve değişkenleri, bazın vektörleri ilk m sütun olacak şekilde numaralandıralım: $B_0 = (v_1, \ldots, v_m)$. Bu bazın uygun temel çözümü X_0, baz değişkenlerinin değerleri $x_i = y_{i0}$, amaç değeri z_0 olsun. Tablonun v_j sütununda v_j'nin bu baza göre $y_{1j}, \ldots, y_{mj}$ katsayıları, en alt satırda da $z_j - c_j$ simpleks kriteri durur.

Lemma 7.1 (Tablodan okunan eşitlikler). *$\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $u_1v_1 + \ldots + u_nv_n = v_0$ eşitliğini sağlayan herhangi bir vektör olsun. Bu durumda her $i = \overline{1,m}$ için*

$$u_i = x_i - \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij}\, u_j \tag{1}$$

ve

$$z(\vec{u}) = z_0 - \sum_{j=m+1}^{n} (z_j - c_j)\, u_j \tag{2}$$

olur. Toplamlar yalnız baz dışındaki değişkenler üzerindendir.

> ***İspat.***
> ***(1) eşitliği.*** *Her v_j'yi baz cinsinden yazalım: $v_j = \sum_{i=1}^{m} y_{ij}v_i$. Baz vektörleri için bu yazım $v_i = 1 \cdot v_i$ yazılışıdır, yani $j \leq m$ ise $y_{jj} = 1$ ve $i \neq j$ için $y_{ij} = 0$'dır. Yerine koyarsak*
>
> $$v_0 = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\, u_j \Big)\, v_i$$
>
> *bulunur. Öte yandan $v_0 = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i$'dir. Baz vektörleri lineer bağımsız olduğundan bir vektörün baz cinsinden yazılışı tektir; katsayıları eşitleriz:*
>
> $$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\, u_j = x_i, \qquad i = \overline{1,m}.$$
>
> *Soldaki toplamda $j \leq m$ terimlerinden yalnız $j = i$ terimi kalır ve u_i'ye eşittir. Böylece $u_i + \sum_{j=m+1}^{n} y_{ij}u_j = x_i$, yani (1) elde edilir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

(2) eşitliği. *Amaç fonksiyonunu baz değişkenleri ve baz dışındaki değişkenler diye ikiye ayıralım, baz değişkenlerine (1)'i koyalım:*

$$\begin{aligned} z(\vec{u}) &= \sum_{i=1}^{m} c_i u_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j u_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i - \sum_{j=m+1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} c_i y_{ij} \Big) u_j \\ &\quad + \sum_{j=m+1}^{n} c_j u_j. \end{aligned}$$

İlk toplam z_0, parantez içindeki toplam da $z_j = \vec{c}_B^{\,T} \vec{y}_j$'dir. Son iki toplamı birleştirince (2) eşitliği elde edilir.
■

Yani tablonun her satırı bir baz değişkenini, en alt satırı da amaç fonksiyonunu baz dışındaki değişkenler cinsinden verir. Baz dışındaki değişkenlerin hepsi sıfırken (1) ve (2) eşitlikleri X_0'ı ve z_0'ı geri verir. Baz dışındaki x_j bir birim artırılırsa baz değişkeni x_i, y_{ij} kadar azalır, amaç değeri de $z_j - c_j$ kadar azalır. Bu okuma bu bölümün bütün sonuçlarının anahtarıdır.

7.2 Sınırsız Çözüm

Önce amaç fonksiyonunun hiçbir sınır tanımadığı durumu tanımlayalım.

Tanım 7.1 (Sınırsız çözüm). Uygun çözümü olan bir minimum probleminde amaç fonksiyonu alttan sınırlı değilse, yani her K sayısı için $z(\vec{x}) < K$ olan bir uygun çözüm $\vec{x}$ varsa, problemin **sınırsız çözümü vardır** denir. Maksimum probleminde her K için $z(\vec{x}) > K$ olan bir uygun çözüm varsa, yani amaç fonksiyonu üstten sınırlı değilse, yine problemin **sınırsız çözümü vardır** denir.

Yani sınırsız çözümlü bir problemde uygun çözüm bol bol vardır, ama "en iyisi" yoktur: hangi uygun çözümü alırsak alalım, ondan daha iyi bir uygun çözüm bulunur. Bu yüzden sınırsız çözümlü problemin optimal çözümü yoktur. Uygun çözümü hiç olmayan problemle karıştırmamak gerekir; orada optimal çözümün yokluğu, aday bulunmamasından kaynaklanır.
Amaç fonksiyonunu sınırsız iyileştirmek için uygun bölgede sonsuza kadar gidebilmek gerekir. Bunu bir vektörle ifade edelim.

Tanım 7.2 (Uygun bölgenin yön vektörü). $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$ uygun bölgesi için

$$\vec{d} \neq \vec{0}, \qquad \vec{d} \geq 0, \qquad A\vec{d} = \vec{0}$$

koşullarını sağlayan $\vec{d}$ vektörüne uygun bölgenin bir **yön vektörü** denir.

Yani $\vec{d}$ bir yön vektörüyse, herhangi bir uygun $\vec{x}$ çözümünden $\vec{d}$ yönünde ne kadar gidersek gidelim uygun bölgede kalırız: her $\lambda \geq 0$ için $A(\vec{x} + \lambda\vec{d}) = A\vec{x} + \lambda A\vec{d} = \vec{b}$ ve $\vec{x} + \lambda\vec{d} \geq 0$'dır. Özellikle yön vektörü olan boş olmayan bir uygun bölge sınırsızdır. Amaç değeri bu yarı doğru boyunca $z(\vec{x} + \lambda\vec{d}) = z(\vec{x}) + \lambda\, \vec{c}^{\,T}\vec{d}$ biçiminde değişir; $\vec{c}^{\,T}\vec{d}$'nin işareti, bu yönde gidince amacın arttığını mı azaldığını mı söyler.
Simpleks yöntem bölümünde, baza girecek sütunda pozitif eleman yoksa oran testinin yapılamadığını ve problemin sınırsız olduğunu kısaca görmüştük. Aşağıdaki teorem bu durumu yön vektörüyle ifade ediyor ve tablodan gidilecek yönü doğrudan okumayı sağlıyor.

Teorem 7.1 (Sınırsız çözüm teoremi). *X_0, $B_0 = (v_1, ..., v_m)$ bazına karşılık gelen bir uygun temel çözüm olsun. Baz dışındaki bir v_k vektörünün sütununda hiç pozitif eleman bulunmasın: her $i = \overline{1,m}$ için $y_{ik} \leq 0$. $\vec{d}$ vektörünün bileşenleri*

$$d_i = -y_{ik}\ (i = \overline{1,m}), \qquad d_k = 1,$$

diğerleri 0 olsun. Bu durumda:

1. *$\vec{d}$ uygun bölgenin bir yön vektörüdür ve her $\lambda \geq 0$ için $X(\lambda) = X_0 + \lambda\vec{d}$ uygun bir çözümdür. Bileşen bileşen $X(\lambda)$'da $x_k = \lambda$, her baz değişkeni $x_i - \lambda y_{ik}$, diğer değişkenler 0'dır.*
2. *$X(\lambda)$'nın amaç değeri $z_0 - \lambda(z_k - c_k)$'dır.*
3. *Minimum probleminde $z_k - c_k > 0$ ise, maksimum probleminde $z_k - c_k < 0$ ise problemin sınırsız çözümü vardır.*
4. *X_0 dejenere değilse her $\lambda > 0$ için $X(\lambda)$'nın tam $m+1$ bileşeni pozitiftir; dolayısıyla $X(\lambda)$ bir temel çözüm değildir.*

> ***İspat.***
> ***1.*** *$\vec{d} \neq \vec{0}$'dır, çünkü $d_k = 1$. Her $y_{ik} \leq 0$ olduğundan $d_i = -y_{ik} \geq 0$; yani $\vec{d} \geq 0$. $A\vec{d}$, A'nın sütunlarının $\vec{d}$'nin bileşenleriyle ağırlıklı toplamıdır:*
>
> $$A\vec{d} = \sum_{i=1}^{m}(-y_{ik})\,v_i + 1 \cdot v_k = v_k - \sum_{i=1}^{m} y_{ik}\,v_i = \vec{0},$$
>
> *çünkü y_{ik} sayıları tam olarak $v_k = \sum_{i=1}^{m} y_{ik}v_i$ eşitliğini sağlayan katsayılardır. Böylece $\vec{d}$ bir yön vektörüdür ve Tanım 7.2 altındaki açıklama gereği her $\lambda \geq 0$ için $X(\lambda)$ uygundur. X_0'ın baz dışı bileşenleri 0 olduğundan $X(\lambda)$'nın bileşenleri iddia edildiği gibidir.*
> ***2.*** *$X(\lambda)$'da baz dışındaki değişkenlerden yalnız $x_k = \lambda$ sıfırdan farklıdır. Lemma 7.1 içindeki (2) eşitliğinde toplamdan yalnız $j = k$ terimi kalır: $z\left(\ X(\lambda)\ \right) = z_0 - \lambda(z_k - c_k)$.*
> ***3.*** *Minimum probleminde $z_k - c_k > 0$ olsun ve K herhangi bir sayı olsun. $\lambda > (z_0 - K)/(z_k - c_k)$ ve $\lambda \geq 0$ seçersek $\lambda(z_k - c_k) > z_0 - K$, yani $z\left(\ X(\lambda)\ \right) < K$ olur. Amaç fonksiyonu alttan sınırlı değildir. Maksimumda $z_k - c_k < 0$ ise aynı hesap $-\lambda(z_k - c_k) = \lambda\,|\,z_k - c_k\,|$ terimini istenildiği kadar büyütür; amaç fonksiyonu üstten sınırlı değildir. İki durumda da Tanım 7.1 gereği problemin sınırsız çözümü vardır.*
> ***4.*** *X_0 dejenere değilse her $x_i > 0$'dır. $\lambda > 0$ için $x_i - \lambda y_{ik} \geq x_i > 0$ ve $x_k = \lambda > 0$; bunlar $m+1$ tane pozitif bileşendir, geri kalan bileşenler 0'dır. Bir temel çözümün sıfırdan farklı bileşenleri bir baza ait olduğu için en fazla m tanedir (Tanım 2.3). Demek ki $X(\lambda)$ temel çözüm değildir.*
> ■

Yani iyileştiren bir v_k baza alınmak istendiğinde oran testi "x_k en fazla ne kadar büyüyebilir?" sorusuna cevap verir. Sütunda pozitif eleman yoksa hiçbir baz değişkeni x_k büyüdükçe azalmaz, hiçbiri sıfıra düşmez; x_k sınırsız artırılabilir. Bu sırada amaç değeri, Lemma 7.1 altında söylediğimiz gibi, x_k'nın her birim artışında $|\,z_k - c_k\,|$ kadar iyileşir. Geometrik olarak X_0 köşesinden uygun bölgenin sınırsız bir kenarı boyunca sonsuza gidilir. X_0 dejenere değilse bu kenar üzerindeki noktalar $m+1$ pozitif bileşenli oldukları için köşe değildir; kenarın öbür ucunda bir köşe yoktur, simpleks yöntem de bu yüzden yeni bir tablo kuramaz.

> **Sınırsız çözümü tabloda üç adımda tanıma**
>
> 1. Baza girecek v_k vektörünü her zamanki gibi seç: minimumda en büyük pozitif $z_j - c_j$, maksimumda en negatif $z_j - c_j$.
> 2. Oran testinden önce v_k sütununa bak. Hiç pozitif eleman yoksa dur: problemin sınırsız çözümü vardır (Teorem 7.1).
> 3. Sınırsızlığı göstermek için $x_k = \lambda$ al, baz değişkenlerini $x_i - \lambda y_{ik}$ olarak, amaç değerini $z_0 - \lambda(z_k - c_k)$ olarak yaz ve $\lambda \to \infty$ iken amacın $+\infty$ ya da $-\infty$'a gittiğini göster.

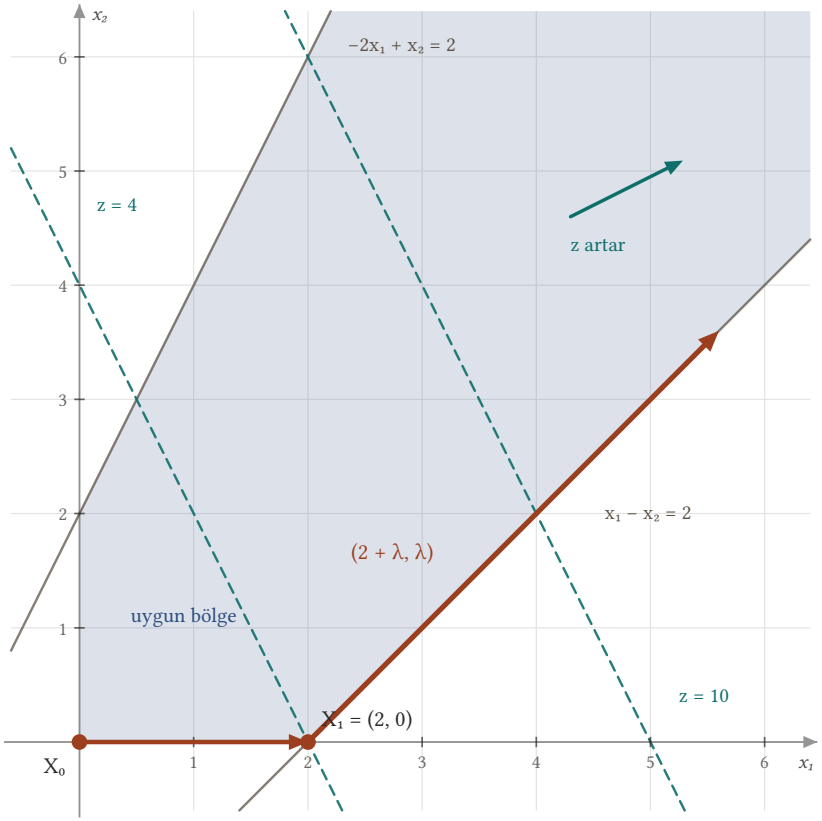
Örnek 7.1 (İki değişkenli bir sınırsız çözüm).

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

problemini simpleks yöntemle çözünüz.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.1: Uygun bölge sağa ve yukarı doğru sınırsızdır. Simpleks $X_0 = (0, 0)$ köşesinden $X_1 = (2, 0)$ köşesine geçer; oradan $x_1 - x_2 = 2$ kenarı boyunca $(2 + \lambda, \lambda)$ yönünde sonsuza kadar gidilebilir. Kesikli doğrular $z = 4$ ve $z = 10$ seviye doğrularıdır; bu yönde $z = 4 + 3\lambda$ sınırsız büyür.

Standart form. İki kısıt da $\leq$ biçimindedir ve sağ tarafları negatif değildir. Problemi standart forma (Tanım 1.7) getirmek için x_3 ve x_4 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \max z &= 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

v_3 ve v_4 sütunları 2×2 birim matrisi oluşturduğu için bu standart form simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir (Tanım 1.9). Başlangıç bazı $B_0 = (v_3, v_4)$'tür.

Başlangıç tablosu. Maksimumda en negatif $z_j - c_j$ baza girer ve bütün $z_j - c_j \geq 0$ olunca durulur. Kriterler $z_1 - c_1 = -2$ ve $z_2 - c_2 = -1$'dir; v_1 baza girer. v_1 sütununda x_4 satırının elemanı $-2 < 0$ olduğundan oran yalnız x_3 satırında hesaplanır: $2/1 = 2$. v_3 bazdan çıkar, pivot 1'dir.

Tablo 7.1: Başlangıç tablosu

		c_j	2	1	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	2	[1]	-1	1	0	$\frac{2}{1} \Rightarrow$
x_4	0	2	-2	1	0	1	—
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	$-2 \Uparrow$	-1	0	0	

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci iterasyon. Pivot 1 olduğundan x_3 satırı aynen kalır ve x_1 satırı olur: $(2 \mid 1, -1, 1, 0)$. x_4 satırına bu satırın 2 katını, $z_j - c_j$ satırına da 2 katını ekleriz (Bölüm 4.4):

$$x_4 : (2+4 \mid -2+2, 1-2, 0+2, 1) = (6 \mid 0, -1, 2, 1),$$
$$z_j - c_j : (0+4 \mid -2+2, -1-2, 0+2, 0) = (4 \mid 0, -3, 2, 0).$$

Tablo 7.2: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	2	1	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_1	2	2	1	-1	1	0	—
x_4	0	6	0	-1	2	1	—
$z_j - c_j$		$z_0 = 4$	0	$-3 \Uparrow$	2	0	

Birinci iterasyon tablosunda (Tablo 7.2) $X_1 = (2, 0, 0, 6)$ ve $z = 4$'tür. Negatif kriter $z_2 - c_2 = -3$ kaldığı için optimal değiliz ve v_2 baza girmelidir. Ama v_2 sütununun elemanları -1 ve -1'dir; hiçbiri pozitif değildir ve oran testi yapılamaz. Teorem 7.1 gereği problemin sınırsız çözümü vardır.
Sınırsızlığın gösterilmesi. $x_2 = \lambda \geq 0$ alalım; x_3 baz dışında 0 kalır. Tablonun satırları (Lemma 7.1)

$$x_1 = 2 - (-1)\lambda = 2 + \lambda, \qquad x_4 = 6 - (-1)\lambda = 6 + \lambda$$

verir. Kontrol: $(2+\lambda) - \lambda = 2$ ve $-2(2+\lambda) + \lambda + (6+\lambda) = 2$. Amaç değeri

$$z = 2(2+\lambda) + \lambda = 4 + 3\lambda$$

olur; bu, $z_0 - \lambda(z_2 - c_2) = 4 - \lambda(-3)$ ile aynıdır. $\lambda \to \infty$ iken $z \to +\infty$; maksimum yoktur. Yön vektörü $\vec{d} = (1, 1, 0, 1)$'dir: x_1 ile x_2 aynı hızla artarken birinci kısıt hep eşitlikle sağlanır.
Çözümün başındaki şekilde uygun bölge ve bu yarı doğru görülüyor.
■

Şimdi yapay değişken gerektiren bir problemde aynı durumu, iki faz yöntemiyle çözerken görelim.

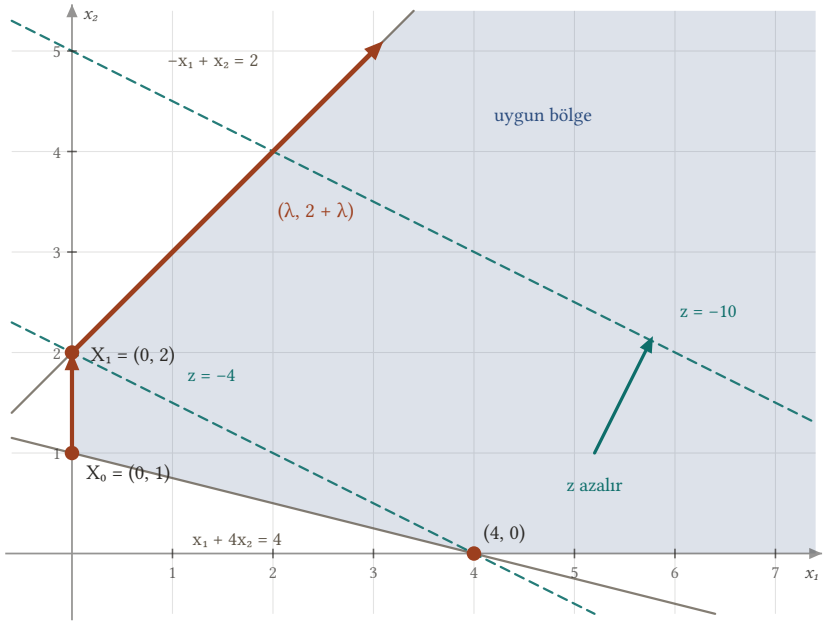
Örnek 7.2 (İki faz yöntemiyle çözülen sınırsız bir problem).

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= -x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

problemini iki faz yöntemi ile çözünüz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.2: $-x_1 + x_2 \le 2$, $x_1 + 4x_2 \ge 4$ bölgesi sınırsızdır. Faz 2 $X_0 = (0, 1)$ köşesinden $X_1 = (0, 2)$ köşesine geçer; oradan $-x_1 + x_2 = 2$ kenarı boyunca $(\lambda, 2 + \lambda)$ noktalarına gidildikçe $z = -4 - 3\lambda$ sınırsız azalır. Kesikli doğrular $z = -4$ ve $z = -10$ seviye doğrularıdır, ok z'nin azaldığı yönü gösterir.

Standart form. Birinci kısıta x_3 aylak değişkenini ekler, ikinci kısıttan x_4 artık değişkenini çıkarırız:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \\ \min z = -x_1 - 2x_2 &+ 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Birinci denklemin birim sütunu x_3'tür, ama ikinci denklemde x_4'ün katsayısı -1'dir. Standart form birim matris içermediği için henüz simpleks yöntem ile çözülebilir halde değildir.
Çözülebilir hal. İkinci denkleme x_{u_1} yapay değişkenini ekleriz (Tanım 1.10):

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_{u_1} &= 2 \\ x_1 + 4x_2 + 0x_3 - x_4 + x_{u_1} &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1} &\ge 0 \\ \min z = -x_1 - 2x_2 &+ 0(x_3 + x_4) \\ &+ Mx_{u_1} \end{aligned}$$

v_3 ve v_{u_1} sütunları birim matrisi oluşturur. İki faz yönteminde M ile hesap yapmayız: Faz 1'de yapay değişkeni sıfıra indirecek yardımcı problemi, Faz 2'de asıl amaç fonksiyonunu çözeriz (İki faz yöntemi).
Faz 1. Yardımcı problemin amaç fonksiyonu $\min g = x_{u_1}$'dir; tablonun en üst satırına bu fonksiyonun katsayıları, en alt satırına $g_j - c_j$ yazılır. Başlangıç bazı (v_3, v_{u_1}), maliyetleri 0 ve 1'dir. Kriterler, x_{u_1} satırının 1 katından ilgili c_j çıkarılarak bulunur: örneğin $g_2 - c_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 - 0 = 4$. Minimumda en büyük pozitif kriter girer: v_2. Oranlar $2/1 = 2$ ve $4/4 = 1$'dir; en küçüğü x_{u_1} satırındadır, v_{u_1} bazdan çıkar ve pivot 4'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 7.3: Başlangıç tablosu — Faz 1

		c_j	0	0	0	0	1	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	Oran
x_3	0	2	-1	1	1	0	0	$\frac{2}{1}$
x_{u_1}	1	4	1	[4]	0	-1	1	$\frac{4}{4} \Rightarrow$
$g_j - c_j$		$g_0 = 4$	1	$4 \Uparrow$	0	-1	0	

Pivot satırını 4'e böleriz: x_2 satırı $\left(1 \mid \frac{1}{4}, 1, 0, -\frac{1}{4} \right)$ olur. x_3 satırından bu satırı çıkarırız, $g_j - c_j$ satırından da 4 katını:

$$x_3 : \left(2 - 1 \mid -1 - \frac{1}{4}, 0, 1, 0 + \frac{1}{4} \right) = \left(1 \mid -\frac{5}{4}, 0, 1, \frac{1}{4} \right),$$
$$g_j - c_j : (4 - 4 \mid 1 - 1, 0, 0, -1 + 1) = (0 \mid 0, 0, 0, 0).$$

Yapay değişken bazdan çıktığı için onun sütununu artık yazmıyoruz.

Tablo 7.4: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 1

		c_j	0	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_3	0	1	$-\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$
$g_j - c_j$		$g_0 = 0$	0	0	0	0

Bütün $g_j - c_j \leq 0$ ve $\min g = 0$'dır: yapay değişken sıfıra indi. Elimizde asıl problemin $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 1, 0)$ uygun temel çözümü vardır.

Faz 2. Aynı tabloyu asıl amaç katsayılarıyla yeniden yazarız: en üst satır $-1, -2, 0, 0$; c_B sütunu x_3 için 0, x_2 için -2 olur. Kriterler:

$$z_1 - c_1 = 0 \cdot \left(-\frac{5}{4} \right) + (-2) \cdot \frac{1}{4} - (-1) = \frac{1}{2},$$
$$z_4 - c_4 = 0 \cdot \frac{1}{4} + (-2) \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) - 0 = \frac{1}{2},$$

$z_0 = (-2) \cdot 1 = -2$; baz vektörlerinin kriterleri 0'dır.
Minimumda en büyük pozitif kriter girer ve bütün $z_j - c_j \leq 0$ olunca durulur. Burada iki kriter eşittir. Eşitlikte küçük indisli vektörü seçme alışkanlığımız v_1'i seçtirirdi, ama eşitlikte seçim serbesttir; ikisi de amacı iyileştirir. Önce v_4'ü seçelim, çözümün sonunda v_1'i seçmenin de aynı sonuca götürdüğünü göreceğiz. v_4 sütununda yalnız x_3 satırının elemanı pozitiftir; oran $\frac{1}{1/4} = 4$, v_3 bazdan çıkar ve pivot $\frac{1}{4}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 7.5: Başlangıç tablosu — Faz 2

		c_j	-1	-2	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	1	$-\frac{5}{4}$	0	1	$[\frac{1}{4}]$	$\frac{1}{1/4} \Rightarrow$
x_2	-2	1	$\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = -2$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2} \Uparrow$	

Pivot satırını $\frac{1}{4}$'e bölmek 4 ile çarpmaktır: x_4 satırı $(4 \mid -5, 0, 4, 1)$ olur. x_2 satırına bu satırın $\frac{1}{4}$ katını ekleriz, $z_j - c_j$ satırından $\frac{1}{2}$ katını çıkarırız:

$$x_2 : \big(\, 1 + 1 \mid \frac{1}{4} - \frac{5}{4}, 1, 0 + 1, 0 \, \big) = (2 \mid -1, 1, 1, 0),$$

$$z_j - c_j : \big(-2 - 2 \mid \frac{1}{2} + \frac{5}{2}, 0, 0 - 2, 0 \, \big) = (-4 \mid 3, 0, -2, 0).$$

Tablo 7.6: Birinci iterasyon tablosu — Faz 2

		c_j	-1	-2	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_4	0	4	-5	0	4	1	$-$
x_2	-2	2	-1	1	1	0	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = -4$	$3 \Uparrow$	0	-2	0	

Sınırsızlık. Birinci iterasyon tablosunda (Tablo 7.6) v_1'in simpleks kriteri $3 > 0$'dır; v_1 baza girebilir. Fakat v_1 sütununun bileşenleri -5 ve -1'dir, hepsi negatiftir. Oran testi yapılamaz ve Teorem 7.1 gereği problemin sınırsız çözümü vardır.
Bunu açıkça görelim. $x_1 = \lambda \geq 0$ değeriyle çözüme girer, $x_3 = 0$ kalır. Kısıtlardan

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 + \lambda,$$
$$x_1 + 4x_2 - x_4 = 4 \Rightarrow x_4 = 4 + 5\lambda$$

bulunur; bunlar tablonun satırlarının söylediği $x_2 = 2 - (-1)\lambda$ ve $x_4 = 4 - (-5)\lambda$ değerleridir. $\lambda > 0$ için üç değişkeni pozitif olan bir uygun çözüm elde ederiz:

$$X(\lambda) = (\lambda, 2 + \lambda, 0, 4 + 5\lambda),$$

$$z = -\lambda - 2(2 + \lambda) = -4 - 3\lambda.$$

$\lambda > 0$ sayısı istenildiği kadar büyük seçilebildiğinden $z = -4 - 3\lambda$ istenildiği kadar küçük yapılabilir; amaç fonksiyonu alttan sınırlı değildir. Yön vektörü $\vec{d} = (1, 1, 0, 5)$'tir. $x_3 = 0$ kaldığı için bu yarı doğru $-x_1 + x_2 = 2$ doğrusu üzerindedir.
Eşitlikte v_1 seçilseydi. Faz 2 başlangıç tablosunda (Tablo 7.5) v_1'i baza alalım. v_1 sütununda yalnız x_2 satırının elemanı $\frac{1}{4}$ pozitiftir; oran $\frac{1}{1/4} = 4$, v_2 bazdan çıkar. Pivot satırı 4 ile çarpılınca x_1 satırı $(4 \mid 1, 4, 0, -1)$ olur; x_3 satırına bunun $\frac{5}{4}$ katı eklenir, $z_j - c_j$ satırından $\frac{1}{2}$ katı çıkarılır:

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 7.7: Birinci iterasyon tablosu — Faz 2, eşitlikte v_1 seçilirse

		c_j	-1	-2	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	6	0	5	1	-1	$-$
x_1	-1	4	1	4	0	-1	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = -4$	0	-2	0	$1 \Uparrow$	

Bu kez $z_4 - c_4 = 1 > 0$ ile v_4 baza girmek ister, ama sütunu $(-1, -1)$'dir. Yine sınırsız çözüm vardır: $x_4 = \lambda$ alınırsa $x_3 = 6 + \lambda$, $x_1 = 4 + \lambda$, $x_2 = 0$ ve $z = -4 - \lambda$ olur. Bu da uygun bölgenin öbür sınırsız kenarıdır: $(4, 0)$ köşesinden x_1 ekseni boyunca sağa gidilir. Hangi yoldan gidilirse gidilsin problemin minimumu yoktur.

■

7.3 Sınırsız Bölge ile Sınırsız Çözüm Aynı Şey Değildir

Son örnekte uygun bölge sınırsızdı ve amaç fonksiyonu da sınırsızdı. Bu ikisinin arasındaki bağ tek yönlüdür.

Önerme 7.1 (Sınırlı bölgede sınırsız çözüm olmaz). *Bir lineer programlama probleminin uygun bölgesi sınırlıysa, yani bütün uygun çözümler için $0 \le x_j \le K$ $(j = \overline{1, n})$ olacak şekilde bir K sayısı varsa, problemin sınırsız çözümü yoktur. Başka bir deyişle, sınırsız çözümü olan bir problemin uygun bölgesi sınırsızdır.*

İspat.
Her uygun çözüm için üçgen eşitsizliğiyle

$$\mid z(\vec{x}) \mid = \left| \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right| \le \sum_{j=1}^{n} \mid c_j \mid x_j \le K \sum_{j=1}^{n} \mid c_j \mid$$

olur. Amaç fonksiyonu uygun bölgede hem alttan hem üstten $K \sum_j \mid c_j \mid$ ile sınırlıdır; dolayısıyla Tanım 7.1 koşulu sağlanamaz. İkinci cümle birincinin karşıt tersidir.

■

Yani sınırsız çözüm için sınırsız bölge gereklidir, ama yeterli değildir. Bölge sonsuza uzansa bile amaç fonksiyonu o yönde kötüleşiyorsa, bölgenin sınırsızlığı optimumu etkilemez. Aşağıdaki örnekte bir önceki örneğin bölgesini değiştirmeden yalnız amaç fonksiyonunu değiştiriyoruz.

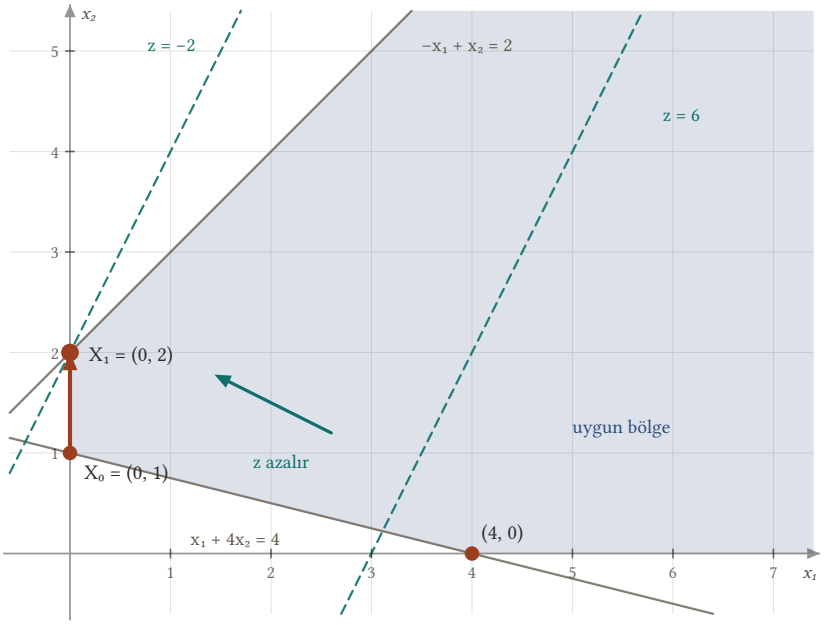
Örnek 7.3 (Sınırsız bölgede sonlu optimum).

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1 + 4x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \min z &= 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

problemini iki faz yöntemi ile çözünüz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.3: Aynı sınırsız bölgede min z = 2x₁ − x₂. Ok z'nin azaldığı yönü gösterir; bu yönde bölge sınırlıdır. Kesikli z = −2 doğrusu bölgeye yalnız X₁ = (0, 2) köşesinde değer, bölgenin geri kalanı z > −2 tarafındadır. Minimum −2'dir.

Kısıtlar bir önceki örnektekilerle (Örnek 7.2) aynıdır; standart form ve çözülebilir hal de aynıdır. Faz 1 amaç fonksiyonuna hiç bakmaz, bu yüzden Faz 1 tabloları da aynen geçerlidir: Faz 1 optimal tablosunda (Tablo 7.4) baz (v_3, v_2) ve uygun temel çözüm $(0, 1, 1, 0)$'dır.

Faz 2. Tabloyu yeni amaç katsayılarıyla yazarız: en üst satır $2, -1, 0, 0$; c_B sütunu x_3 için 0, x_2 için -1. Kriterler:

$$z_1 - c_1 = (-1)\cdot\frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4},$$
$$z_4 - c_4 = (-1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{4},$$

$z_0 = (-1)\cdot 1 = -1$. Minimumda en büyük pozitif kriter girer; tek pozitif kriter $\frac{1}{4}$ olduğundan v_4 girer. Oran yalnız x_3 satırında hesaplanır: $\frac{1}{1/4} = 4$; v_3 çıkar, pivot $\frac{1}{4}$'tür.

Tablo 7.8: Başlangıç tablosu — Faz 2

		c_j	2	−1	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	1	$-\frac{5}{4}$	0	1	$[\frac{1}{4}]$	$\frac{1}{1/4} \Rightarrow$
x_2	−1	1	$\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	—
$z_j - c_j$		$z_0 = -1$	$-\frac{9}{4}$	0	0	$\frac{1}{4} \Uparrow$	

Tablonun gövdesi bir önceki örnektekiyle aynı biçimde dönüşür: x_4 satırı $(4 \mid -5, 0, 4, 1)$, x_2 satırı $(2 \mid -1, 1, 1, 0)$ olur. $z_j - c_j$ satırından yeni x_4 satırının $\frac{1}{4}$ katını çıkarırız:

$$\left(-1-1 \mid -\frac{9}{4}+\frac{5}{4}, 0, 0-1, 0\right) = (-2 \mid -1, 0, -1, 0).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 7.9: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo) — Faz 2

		c_j	2	-1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_4	0	4	-5	0	4	1
x_2	-1	2	-1	1	1	0
$z_j - c_j$		$z_0 = -2$	-1	0	-1	0

Bütün $z_j - c_j \leq 0$; tablo optimaldir. Optimal çözüm $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ ve $\min z = -2$'dir.
Bu tablonun gövdesi, sınırsız çözümlü örneğin birinci iterasyon tablosunun (Tablo 7.6) gövdesinin aynısıdır. v_1 sütunu yine $(-5, -1)$'dir, yani Teorem 7.1 içindeki $\vec{d} = (1, 1, 0, 5)$ yine bir yön vektörüdür ve bölge yine sınırsızdır. Fark en alt satırdadır: $z_1 - c_1 = -1 < 0$. Bu yönde gidersek amaç değeri $z_0 - \lambda(z_1 - c_1) = -2 + \lambda$ olur, yani artar. Minimum probleminde bu yön işimize yaramaz. Sınırsız çözüm için "sütunda pozitif eleman yok" koşulu tek başına yetmez; o sütunun kriteri de iyileştiren yönde olmalıdır.
Grafik bunu doğrular. Köşeler $(0, 1)$, $(0, 2)$ ve $(4, 0)$'dır; bunlarda z sırasıyla -1, -2 ve 8'dir. Bölgenin sınırsız iki kenarı boyunca, $(0, 2)$'den $(1, 1)$ yönünde ve $(4, 0)$'dan $(1, 0)$ yönünde, z sırasıyla 1 ve 2 hızıyla artar.
■

7.4 Alternatif Optimal Çözüm

Şimdi ikinci durumu, optimal tabloda baz dışındaki bir vektörün simpleks kriterinin sıfır olduğu durumu ele alalım.

Tanım 7.3 (Alternatif optimal çözüm). Bir lineer programlama probleminin birden fazla optimal çözümü varsa, bulunan bir optimal çözümden farklı her optimal çözüme bir **alternatif optimal çözüm** denir.

Yani alternatif optimal çözümler aynı optimal değeri veren farklı çözümlerdir. Karar verici açısından bu iyi bir haberdir: amacı feda etmeden, modelde yer almayan başka ölçütlere (kolaylık, güvenlik, alışkanlık) göre bir seçim yapma serbestliği vardır.
Optimal tablodaki simpleks kriterleri, Lemma 7.1 içindeki (2) eşitliği sayesinde, optimal çözümün tek olup olmadığını söyler.

Teorem 7.2 (Alternatif optimal çözüm teoremi). *Bir minimum probleminin tablosunda bütün $z_j - c_j \leq 0$ (maksimum probleminde bütün $z_j - c_j \geq 0$) olsun; yani tablo optimal olsun. Baz dışındaki bir v_k vektörü için $z_k - c_k = 0$ olsun ve v_k sütununda en az bir pozitif eleman bulunsun. v_k baza alınır ve bazdan çıkacak vektör oran testiyle seçilirse:*

1. *yeni tablonun $z_j - c_j$ satırı eskisinin aynısıdır, dolayısıyla yeni tablo da optimaldir;*
2. *yeni uygun temel çözümün amaç değeri eskisine eşittir;*
3. *oran testinin verdiği λ pozitifse (özellikle X_0 dejenere değilse) yeni çözüm eskisinden farklıdır; yani problemin alternatif optimal çözümü vardır.*

İspat.
Optimallik. *Önce, bütün kriterleri ≤ 0 olan bir tablonun gerçekten optimal olduğunu Lemma 7.1 ile görelim. Her uygun $\vec{u}$ için $u_j \geq 0$ ve $z_j - c_j \leq 0$ olduğundan (2) eşitliğindeki toplam ≤ 0'dır, yani $z(\vec{u}) \geq z_0$. Maksimumda eşitsizlikler döner ve $z(\vec{u}) \leq z_0$ olur.*
1 ve 2. *Pivot y_{rk} olsun. Tablonun dönüşüm kuralına (Bölüm 4.4) göre yeni kriterler ve yeni amaç değeri*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \frac{(z_k - c_k)\, y_{rj}}{y_{rk}},$$
$$z_0' = z_0 - \frac{(z_k - c_k)\, y_{r0}}{y_{rk}}$$

olur. $z_k - c_k = 0$ *olduğundan çıkarılan terimler sıfırdır:* $(z_j - c_j)' = z_j - c_j$ *ve* $z_0' = z_0$*. Kriter satırı değişmediği için bütün kriterler yine* ≤ 0 *(maksimumda* ≥ 0*) kalır ve yukarıdaki gözlem gereği yeni çözüm de optimaldir.*
3. *Eski çözümde* x_k *baz dışında olduğundan* $x_k = 0$*'dır. Yeni çözümde* $x_k = \lambda = y_{r0}/y_{rk}$*'dır.* $\lambda > 0$ *ise iki çözümün k. bileşenleri farklıdır.* X_0 *dejenere değilse* $y_{r0} = x_r > 0$ *ve* $y_{rk} > 0$ *olduğundan* $\lambda > 0$*'dır.*
■

Yani optimal tabloda sıfır kriterli bir baz dışı vektör, "bu vektörü baza alırsan amaç değeri ne iyileşir ne kötüleşir" demektir. Onu baza almak bizi aynı amaç değerli yeni bir optimal uç noktaya götürür. Yeni tabloda bu kez bazdan çıkan v_r'nin kriteri sıfırdır, çünkü eski tabloda v_r baz vektörüydü ve kriter satırı değişmedi. X_0 dejenere değilse, v_r yeniden baza alındığında oran testi v_k'yı çıkarır ve ilk optimal uç noktaya geri dönülür.
Tersine, baz dışındaki bütün kriterler sıfırdan farklıysa başka optimal çözüm aranmaz.

Sonuç 7.1 (Optimal çözümün tekliği). *Bir minimum probleminin optimal tablosunda baz dışındaki bütün vektörler için* $z_j - c_j < 0$ *ise (maksimum probleminde* $z_j - c_j > 0$ *ise) optimal çözüm tektir.*

İspat.
Minimum durumunu ele alalım. $\vec{u}$ *optimal bir çözüm olsun:* $z(\vec{u}) = z_0$*. Lemma 7.1 içindeki (2) eşitliğinden*

$$\sum_{j=m+1}^{n} (z_j - c_j)\, u_j = 0$$

çıkar. Toplamın her terimi ≤ 0*'dır, çünkü* $z_j - c_j < 0$ *ve* $u_j \geq 0$*. Terimleri pozitif olmayan bir toplam ancak her terimi sıfırsa sıfırdır;* $z_j - c_j \neq 0$ *olduğundan baz dışındaki her* j *için* $u_j = 0$ *olur. Bu durumda (1) eşitliği* $u_i = x_i$ *verir. Demek ki* $\vec{u} = X_0$*'dır. Maksimum durumu aynı biçimde ispatlanır.*
■

İki optimal çözüm bulduktan sonra aralarında kalan her noktanın da optimal olduğunu görelim. Hatırlatalım: $X^{(1)}, ..., X^{(p)}$ noktalarının bir **konveks kombinasyonu**, $t_i \geq 0$ ve $t_1 + ... + t_p = 1$ olmak üzere $t_1 X^{(1)} + ... + t_p X^{(p)}$ biçimindeki bir noktadır (bkz. Temel çözümler ve konveks kümeler). İki nokta için bunlar $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $tX^{(1)} + (1-t)X^{(2)}$ noktalarıdır, yani iki noktayı birleştiren doğru parçası.

Önerme 7.2 (Optimal çözümlerin konveks kombinasyonları). $X^{(1)}, ..., X^{(p)}$ *bir lineer programlama probleminin optimal çözümleri,* z^* *optimal değer olsun.* $t_1, ..., t_p \geq 0$ *ve* $t_1 + ... + t_p = 1$ *ise*

$$X = t_1 X^{(1)} + t_2 X^{(2)} + ... + t_p X^{(p)}$$

de bir optimal çözümdür. Özel olarak iki farklı optimal çözüm varsa sonsuz çok optimal çözüm vardır.

İspat.
X uygundur. *Her* $X^{(i)}$ *uygun olduğundan* $AX^{(i)} = \vec{b}$ *ve* $X^{(i)} \geq 0$*'dır. Buna göre*

$$AX = \sum_{i=1}^{p} t_i\, AX^{(i)} = \Big(\sum_{i=1}^{p} t_i\Big)\, \vec{b} = \vec{b}$$

olur. Negatif olmayan sayıların negatif olmayan katsayılarla toplamı da negatif değildir: $X \geq 0$*.*
X optimaldir. *Amaç fonksiyonu lineer olduğundan*

$$z(X) = \sum_{i=1}^{p} t_i\, z(X^{(i)}) = \Big(\sum_{i=1}^{p} t_i\Big)\, z^* = z^*.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Uygun bir çözüm optimal değeri veriyorsa optimaldir.
Sonsuz çok çözüm. *$X^{(1)} \neq X^{(2)}$ ise $X(t) = tX^{(1)} + (1-t)X^{(2)}$ noktaları, $0 \leq t \leq 1$ için, yukarıdakine göre optimaldir. $t \neq s$ ise*

$$X(t) - X(s) = (t-s)\left(X^{(1)} - X^{(2)}\right) \neq \vec{0};$$

farklı t değerleri farklı çözümler verir.
■

Yani optimal çözümler kümesi konvekstir. Simpleks yöntemle $X^{(1)}, \ldots, X^{(p)}$ optimal uç noktaları bulunca, bunların bütün konveks kombinasyonlarını tek bir formülde toplayan

$$X = \sum_{i=1}^{p} t_i X^{(i)}, \qquad t_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p} t_i = 1$$

ifadesine problemin **genel optimal çözümü** denir. Uygulamada en sık karşılaşılan durum iki optimal uç noktadır; o zaman genel optimal çözüm $X = tX^* + (1-t)X^{**}$, $0 \leq t \leq 1$ olur. Önerme bu noktaların optimal olduğunu söyler; optimal çözümlerin bunlardan ibaret olup olmadığını ise ayrıca kontrol etmek gerekir. Optimal çözümler kümesi sınırsız olabilir (Bölüm 7.5), o zaman hiçbir sonlu konveks kombinasyon onu tüketmez. Aşağıdaki örneklerde bu kontrolü Lemma 7.1 içindeki (2) eşitliğiyle yapacağız.

Alternatif optimal çözümü dört adımda bulma

1. Simpleks yöntemle optimal tabloya ulaş (minimumda bütün $z_j - c_j \leq 0$, maksimumda bütün $z_j - c_j \geq 0$).
2. Baz dışındaki vektörlerin kriterlerine bak. Hiçbiri sıfır değilse optimal çözüm tektir (Sonuç 7.1).
3. Kriteri sıfır olan baz dışı bir v_k varsa sütununa bak. Pozitif eleman varsa v_k'yı baza al, bazdan çıkacak vektörü oran testiyle seç ve pivot yap; yeni tablo aynı amaç değerli bir optimal uç nokta verir (Teorem 7.2). Pozitif eleman yoksa optimal çözümler sınırsız bir ışın boyunca uzanır (Önerme 7.3).
4. Bulunan optimal uç noktaların konveks kombinasyonunu yazarak genel optimal çözümü ver (Önerme 7.2).

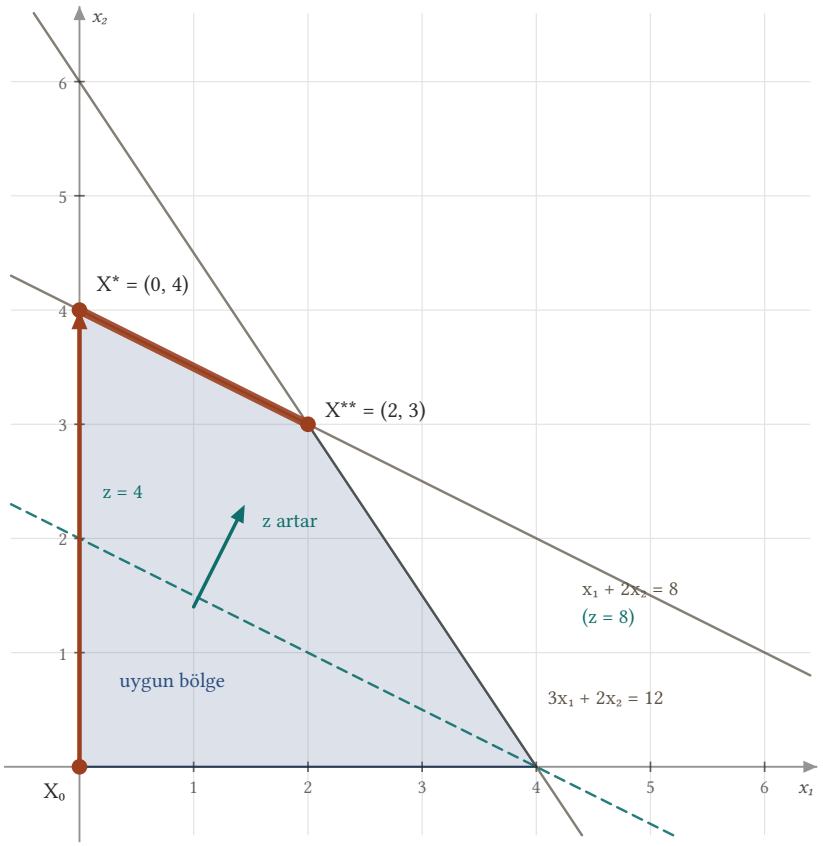
Örnek 7.4 (İki değişkenli bir alternatif optimal çözüm).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

problemini simpleks yöntemle çözünüz ve varsa alternatif optimal çözümleri bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.4: Amaç doğrusu $z = x_1 + 2x_2$, $x_1 + 2x_2 \le 8$ kısıtının doğrusuna paraleldir. z artırıldıkça seviye doğrusu bölgeyi tek bir köşede değil, $X^* = (0, 4)$ ile $X^{**} = (2, 3)$ arasındaki kalın kenar boyunca terk eder; bu kenarın her noktası $z = 8$ verir.

Standart form. İki $\le$ kısıtına x_3 ve x_4 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \\ \max z &= x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

v_3 ve v_4 birim matrisi oluşturur; problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir.
Başlangıç tablosu. Maksimumda en negatif kriter girer: $z_1 - c_1 = -1$, $z_2 - c_2 = -2$; v_2 girer. Oranlar $8/2 = 4$ ve $12/2 = 6$; en küçüğü x_3 satırındadır, v_3 çıkar, pivot 2'dir.

Tablo 7.10: Başlangıç tablosu

		c_j	1	2	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	8	1	[2]	1	0	$\frac{8}{2} \Rightarrow$
x_4	0	12	3	2	0	1	$\frac{12}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-1	$-2 \Uparrow$	0	0	

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci iterasyon. Pivot satırını 2'ye böleriz: x_2 satırı $\left(\ 4 \mid \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0\ \right)$. x_4 satırından bunun 2 katını çıkarır, $z_j - c_j$ satırına 2 katını ekleriz:

$$x_4 : \left(\ 12 - 8 \mid 3 - 1, 0, 0 - 1, 1\ \right) = (4 \mid 2, 0, -1, 1),$$
$$z_j - c_j : \left(\ 0 + 8 \mid -1 + 1, 0, 0 + 1, 0\ \right) = (8 \mid 0, 0, 1, 0).$$

Tablo 7.11: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	1	2	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_2	2	4	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{1/2}$
x_4	0	4	[2]	0	-1	1	$\frac{4}{2} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 8$	$0 \Uparrow$	0	1	0	

Bütün $z_j - c_j \geq 0$; tablo optimaldir. Optimal çözüm $X^* = (0, 4, 0, 4)$, yani $x_1 = 0, x_2 = 4$ ve $\max z = 8$'dir.

Alternatif çözüm. Baz dışındaki v_1'in kriteri $z_1 - c_1 = 0$'dır ve sütununda pozitif elemanlar vardır. Teorem 7.2 gereği v_1'i baza almak yeni bir optimal çözüm verir. Oranlar $\frac{4}{1/2} = 8$ ve $\frac{4}{2} = 2$; v_4 çıkar, pivot 2'dir. Pivot satırını 2'ye böleriz: x_1 satırı $\left(\ 2 \mid 1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\ \right)$. x_2 satırından bunun $\frac{1}{2}$ katını çıkarırız:

$$\left(\ 4 - 1 \mid 0, 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, 0 - \frac{1}{4}\ \right) = \left(\ 3 \mid 0, 1, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\ \right).$$

$z_j - c_j$ satırının pivot sütunundaki elemanı 0 olduğundan bu satır değişmez.

Tablo 7.12: İkinci iterasyon tablosu (alternatif optimal tablo)

		c_j	1	2	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_2	2	3	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	1	2	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 8$	0	0	1	0

Alternatif optimal çözüm $X^{**} = (2, 3, 0, 0)$, yani $x_1 = 2, x_2 = 3$; amaç değeri $2 + 2 \cdot 3 = 8$. Bu tabloda bu kez baz dışındaki v_4'ün kriteri sıfırdır; onu baza almak (oran $\frac{2}{1/2} = 4$, v_1 çıkar) bizi X^*'a geri götürür.

Genel optimal çözüm. Önerme 7.2 gereği $0 \leq t \leq 1$ için

$$X = t\,(0, 4) + (1 - t)(2, 3) = (2 - 2t, 3 + t)$$

noktalarının hepsi optimaldir: $z = (2 - 2t) + 2(3 + t) = 8$. Bu formül bütün optimal çözümleri verir. Gerçekten, optimal tabloda (Tablo 7.11) Lemma 7.1 içindeki (2) eşitliği $z = 8 - 0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_3 = 8 - x_3$ verir; bir uygun çözüm ancak $x_3 = 0$ ise, yani $x_1 + 2x_2 = 8$ doğrusu üzerindeyse optimaldir. Bu doğrunun uygun bölgede kalan parçası tam olarak X^* ile X^{**} arasındaki kenardır.

Geometrik olarak amaç fonksiyonunun seviye doğruları $x_1 + 2x_2 =$ sabit, birinci kısıtın doğrusuna paraleldir. Seviye doğrusu z artırılarak kaydırıldığında bölgeyi bir köşede değil, bütün bir kenar boyunca terk eder.

■

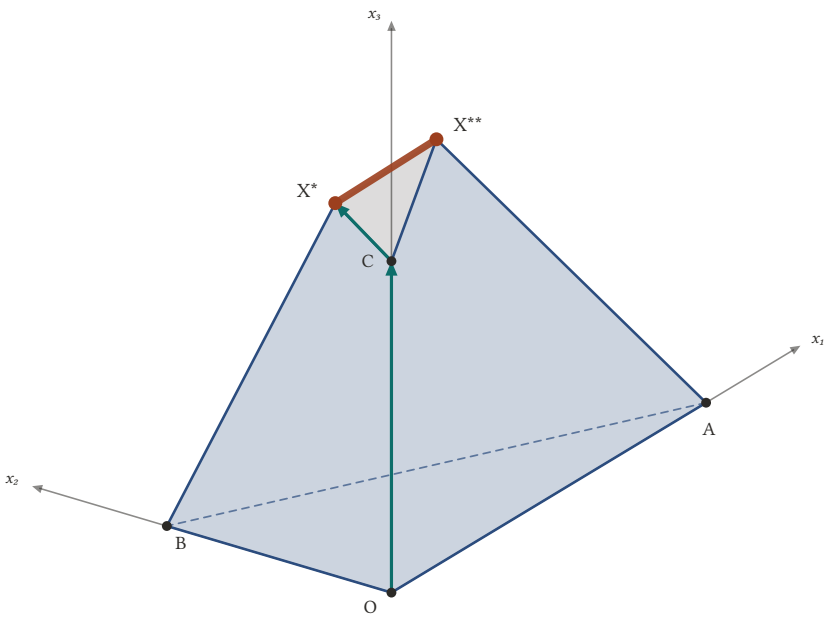
Örnek 7.5 (Üç değişkenli bir alternatif optimal çözüm).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 1 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \min z &= 14x_1 + 4x_2 - 14x_3 \end{aligned}$$

lineer programlama problemini çözünüz ve varsa alternatif optimal çözümü bulunuz.

Çözüm.



Şekil 7.5: Uygun bölge köşeleri O, A(1, 0, 0), B(0, 1/2, 0), C(0, 0, 2/3), X*(0, 1/8, 3/4) ve X**(1/7, 0, 6/7) olan bir çokyüzlüdür. Simpleks O ⟶ C ⟶ X* yolunu izler (oklar). Amaç düzlemi $14x_1 + 4x_2 - 14x_3 = -10$ bölgeye tek bir köşede değil, X*X** kenarı (kalın) boyunca değer: bu kenarın her noktası optimaldir. Köşelerdeki z değerleri O: 0, A: 14, B: 2, C: −28/3, X* ve X**: −10.

Standart form ve çözülebilir hal. Önce problemi simpleks yöntem ile çözülebilir hale getirelim. İki kısıt da $\leq$ biçiminde ve sağ tarafları negatif olmadığından x_4 ve x_5 aylak değişkenlerini eklemek yeter:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 0x_5 &= 1 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \\ \min z &= 14x_1 + 4x_2 - 14x_3 \\ &\quad +0(x_4 + x_5) \end{aligned}$$

v_4 ve v_5 birim matrisi oluşturur; başlangıç bazı (v_4, v_5)'tir.
Başlangıç tablosu. $\vec{c}_B = \vec{0}$ olduğundan $z_j - c_j = -c_j$: kriterler -14, -4, 14, 0, 0. Minimumda en büyük pozitif kriter girer ve bütün $z_j - c_j \leq 0$ olunca durulur; tek pozitif kriter 14 olduğundan v_3 girer. Oranlar $1/1 = 1$ ve $2/3$; en küçüğü x_5 satırındadır, v_5 çıkar, pivot 3'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 7.13: Başlangıç tablosu

		c_j	14	4	-14	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_4	0	1	1	2	1	1	0	$\frac{1}{1}$
x_5	0	2	-4	-2	[3]	0	1	$\frac{2}{3}\Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-14	-4	$14\Uparrow$	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırını 3'e böleriz: x_3 satırı $\left(\ \frac{2}{3} \mid -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 0, \frac{1}{3}\ \right)$. x_4 satırından bu satırı çıkarırız, $z_j - c_j$ satırından da 14 katını:

$$\begin{aligned} x_4 &: \left(\ 1 - \frac{2}{3} \mid 1 + \frac{4}{3}, 2 + \frac{2}{3}, 0, 1, -\frac{1}{3}\ \right) \\ &= \left(\ \frac{1}{3} \mid \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 0, 1, -\frac{1}{3}\ \right), \\ z_j - c_j &: \left(\ 0 - \frac{28}{3} \mid -14 + \frac{56}{3}, -4 + \frac{28}{3}, 0, 0, -\frac{14}{3}\ \right) \\ &= \left(\ -\frac{28}{3} \mid \frac{14}{3}, \frac{16}{3}, 0, 0, -\frac{14}{3}\ \right). \end{aligned}$$

En büyük pozitif kriter $\frac{16}{3}$ olduğundan v_2 girer. v_2 sütununda yalnız x_4 satırının elemanı pozitiftir; oran $\frac{1/3}{8/3} = \frac{1}{8}$, v_4 çıkar, pivot $\frac{8}{3}$'tür.

Tablo 7.14: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	14	4	-14	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_4	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$[\frac{8}{3}]$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}\Rightarrow$
x_3	-14	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = -\frac{28}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{16}{3}\Uparrow$	0	0	$-\frac{14}{3}$	

İkinci iterasyon. Pivot satırını $\frac{8}{3}$'e bölmek $\frac{3}{8}$ ile çarpmaktır: x_2 satırı $\left(\ \frac{1}{8} \mid \frac{7}{8}, 1, 0, \frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\ \right)$. x_3 satırına bunun $\frac{2}{3}$ katını ekleriz, $z_j - c_j$ satırından $\frac{16}{3}$ katını çıkarırız:

$$\begin{aligned} x_3 &: \left(\ \frac{2}{3} + \frac{1}{12} \mid -\frac{4}{3} + \frac{7}{12}, 0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\ \right) \\ &= \left(\ \frac{3}{4} \mid -\frac{3}{4}, 0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\ \right), \\ z_j - c_j &: \left(\ -\frac{28}{3} - \frac{2}{3} \mid \frac{14}{3} - \frac{14}{3}, 0, 0, -2, -\frac{14}{3} + \frac{2}{3}\ \right) \\ &= (-10 \mid 0, 0, 0, -2, -4). \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 7.15: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	14	4	-14	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_2	4	$\frac{1}{8}$	$[\frac{7}{8}]$	1	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1/8}{7/8} \Rightarrow$
x_3	-14	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	–
$z_j - c_j$		$z_0 = -10$	$0 \Uparrow$	0	0	-2	-4	

Simpleks kriterleri arasında pozitif olan kalmadığından optimal çözüme ulaşılmıştır:

$$X^* = \left(0, \frac{1}{8}, \frac{3}{4}, 0, 0 \right), \qquad z^* = -10.$$

Kontrol:

$$14 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{8} - 14 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} - \frac{21}{2} = -10.$$

Alternatif çözüm. İkinci iterasyon tablosunda (Tablo 7.15) baz dışındaki x_1 değişkeninin simpleks kriteri 0'dır ve v_1 sütununda pozitif bir eleman ($\frac{7}{8}$) vardır. Teorem 7.2 gereği v_1 vektörünü baza alırsak, yani x_1'i temel değişken yaparsak yeni bir optimal çözüme geçeriz. Oran yalnız x_2 satırında hesaplanır: $\frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$; v_2 çıkar, pivot $\frac{7}{8}$'dir.
Pivot satırını $\frac{8}{7}$ ile çarparız: x_1 satırı $\left(\frac{1}{7} \mid 1, \frac{8}{7}, 0, \frac{3}{7}, -\frac{1}{7} \right)$. x_3 satırına bunun $\frac{3}{4}$ katını ekleriz:

$$\begin{aligned} x_3 : \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{28} \mid 0, \frac{6}{7}, 1, \frac{1}{4} + \frac{9}{28}, \frac{1}{4} - \frac{3}{28} \right) \\ = \left(\frac{6}{7} \mid 0, \frac{6}{7}, 1, \frac{4}{7}, \frac{1}{7} \right). \end{aligned}$$

$z_j - c_j$ satırı değişmez, çünkü pivot sütunundaki elemanı 0'dır.

Tablo 7.16: Üçüncü iterasyon tablosu (alternatif optimal tablo)

		c_j	14	4	-14	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_1	14	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{8}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$
x_3	-14	$\frac{6}{7}$	0	$\frac{6}{7}$	1	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$
$z_j - c_j$		$z_0 = -10$	0	0	0	-2	-4

Yeni optimal çözüm

$$X^{**} = \left(\frac{1}{7}, 0, \frac{6}{7}, 0, 0 \right), \qquad z^{**} = -10$$

olarak bulunur. Kontrol: $14 \cdot \frac{1}{7} - 14 \cdot \frac{6}{7} = 2 - 12 = -10$. Buradaki X^{**} çözümüne **alternatif** optimal çözüm denir.
Genel optimal çözüm. Önerme 7.2 gereği X^* ve X^{**} optimal çözümlerinin konveks kombinasyonlarının her biri de amaç fonksiyonunu minimum yapar. $0 \le t \le 1$ olmak üzere

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} X &= tX^* + (1-t)X^{**} \\ &= t\left(0, \frac{1}{8}, \frac{3}{4}, 0, 0\right) + (1-t)\left(\frac{1}{7}, 0, \frac{6}{7}, 0, 0\right) \\ &= \left(\frac{1-t}{7}, \frac{t}{8}, \frac{24-3t}{28}, 0, 0\right). \end{aligned}$$

Üçüncü bileşen $\frac{3t}{4} + \frac{6(1-t)}{7} = \frac{21t+24-24t}{28}$ hesabından gelir. Bu çözümlerin her birinde amaç fonksiyonu aynı değeri alır:

$$\begin{aligned} \min z &= 14 \cdot \frac{1-t}{7} + 4 \cdot \frac{t}{8} - 14 \cdot \frac{24-3t}{28} \\ &= (2-2t) + \frac{t}{2} - \left(12 - \frac{3t}{2}\right) = -10. \end{aligned}$$

Bu formül bütün optimal çözümleri verir. Optimal tabloda (Tablo 7.15) Lemma 7.1 içindeki (2) eşitliği

$$z = -10 - 0 \cdot x_1 - (-2)\, x_4 - (-4)\, x_5 = -10 + 2x_4 + 4x_5$$

verir. Demek ki bir uygun çözüm ancak $x_4 = x_5 = 0$ ise optimaldir. O zaman (1) eşitlikleri $x_2 = \frac{1}{8} - \frac{7}{8}x_1$ ve $x_3 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}x_1$ verir; $x_2 \geq 0$ koşulu $0 \leq x_1 \leq \frac{1}{7}$ demektir. $x_1 = \frac{1-t}{7}$ yazınca tam olarak yukarıdaki X çıkar.
Uygun bölge $\mathbb{R}^3$'te altı köşeli bir çokyüzlüdür. Simpleks O köşesinden $C = (0, 0, \frac{2}{3})$ köşesine (birinci iterasyon), oradan X^*'a (ikinci iterasyon) gitmiştir. Amaç fonksiyonunun $14x_1 + 4x_2 - 14x_3 = -10$ seviye düzlemi bölgeye X^*X^{**} kenarı boyunca değer.
■

7.5 Optimal Çözümlerin Sınırsız Olduğu Durum

Alternatif optimal çözüm teoreminde (Teorem 7.2) sıfır kriterli sütunda pozitif bir eleman olduğunu varsaydık. Pozitif eleman yoksa pivot yapılamaz; ama bu durumda alternatif optimal çözümler yine vardır, üstelik sonsuza uzanırlar.

Önerme 7.3 (Optimal ışın). *Bir problemin optimal tablosunda baz dışındaki bir v_k için $z_k - c_k = 0$ olsun ve v_k sütununda hiç pozitif eleman bulunmasın: her i için $y_{ik} \leq 0$. Bu durumda her $\lambda \geq 0$ için $x_k = \lambda$, her baz değişkeni $x_i - \lambda y_{ik}$ ($i = \overline{1,m}$) ve diğer değişkenler 0 olan $X(\lambda)$ çözümü optimaldir. Optimal değer z_0 sonludur, ama optimal çözümler kümesi sınırsızdır.*

İspat.
v_k sütununda pozitif eleman olmadığı için Teorem 7.1 içindeki $\vec{d}$ vektörü bir yön vektörüdür ve her $\lambda \geq 0$ için $X(\lambda) = X_0 + \lambda\vec{d}$ uygundur. Aynı teoremin 2. maddesine göre amaç değeri

$$z\left(X(\lambda)\right) = z_0 - \lambda(z_k - c_k) = z_0 - \lambda \cdot 0 = z_0$$

olur. Tablo optimal olduğundan z_0 optimal değerdir; demek ki her $X(\lambda)$ optimaldir. $X(\lambda)$'nın k. bileşeni λ olduğundan bu çözümler λ büyüdükçe sınırsız büyür; optimal çözümler kümesi sınırlı değildir.
■

Yani optimalde temel olmayan bir değişkenin simpleks kriteri sıfırsa ve bu değişkene ait sütunda pozitif eleman yoksa, optimal çözümler sınırsızdır: X_0 köşesinden başlayan bir ışının bütün noktaları optimaldir. Burada sınırsız olan amaç fonksiyonu **değildir**; optimal değer sonlu bir sayıdır ve bu yüzden bu durum sınırsız çözümden (Tanım 7.1) farklıdır. v_k pivot yapılamadığı için yeni bir optimal uç nokta vermez, ama sonsuz çok alternatif optimal çözüm vardır. Baz dışında sıfır kriterli başka bir sütun yoksa, (2) eşitliği gereği optimal çözümler kümesi tam olarak bu ışındır.

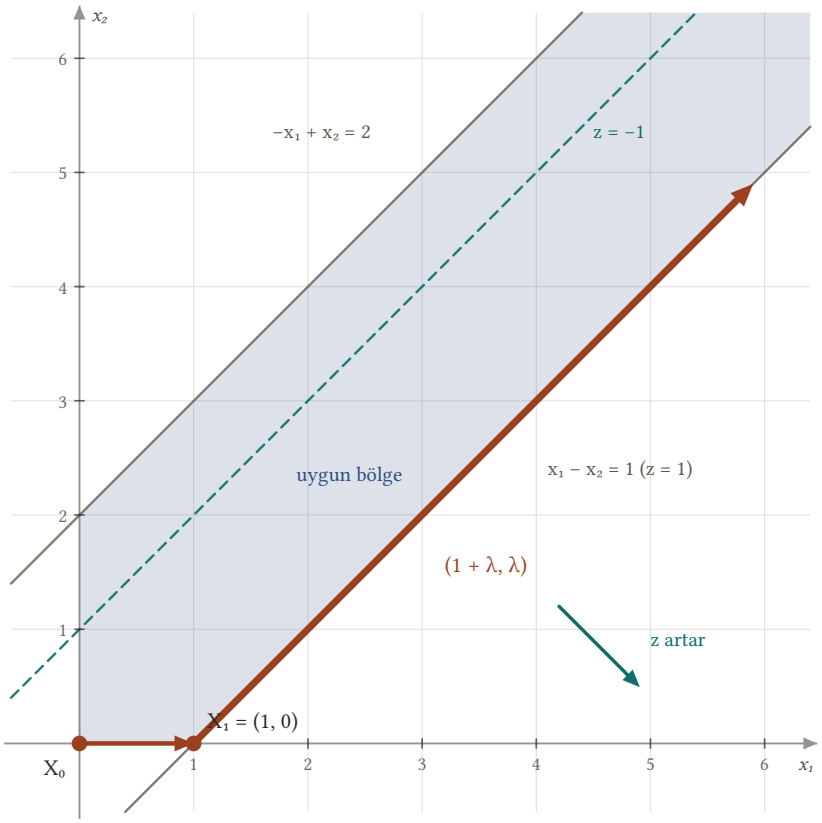
Örnek 7.6 (Optimal çözümleri bir ışın oluşturan problem).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

problemini simpleks yöntemle çözünüz ve bütün optimal çözümleri bulunuz.

Çözüm.



Şekil 7.6: İki paralel doğru arasındaki sınırsız şerit. Amaç $z = x_1 - x_2$ alttaki kenara paraleldir: bu kenar üzerindeki bütün $(1 + \lambda, \lambda)$ noktaları $z = 1$ verir. Optimal değer sonludur, ama optimal çözümler $X_1 = (1, 0)$ köşesinden başlayan sınırsız bir ışın oluşturur.

Standart form. x_3 ve x_4 aylak değişkenleriyle

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 - x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

olur; v_3 ve v_4 birim matrisi oluşturur ve problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir.
Başlangıç tablosu. Maksimumda en negatif kriter girer: $z_1 - c_1 = -1$, $z_2 - c_2 = 1$; v_1 girer. v_1 sütununda yalnız x_3 satırının elemanı pozitiftir; oran $1/1$, v_3 çıkar, pivot 1'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 7.17: Başlangıç tablosu

		c_j	1	-1	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	1	[1]	-1	1	0	$\frac{1}{1} \Rightarrow$
x_4	0	2	-1	1	0	1	–
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	$-1 \Uparrow$	1	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı aynen kalır ve x_1 satırı olur: $(1 \mid 1, -1, 1, 0)$. Bu satırı x_4 satırına da $z_j - c_j$ satırına da ekleriz:

$$x_4 : (2+1 \mid -1+1, 1-1, 0+1, 1) = (3 \mid 0, 0, 1, 1),$$
$$z_j - c_j : (0+1 \mid -1+1, 1-1, 0+1, 0) = (1 \mid 0, 0, 1, 0).$$

Tablo 7.18: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	1	-1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_1	1	1	1	-1	1	0
x_4	0	3	0	0	1	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 1$	0	0	1	0

Bütün $z_j - c_j \geq 0$; tablo optimaldir: $X_1 = (1, 0, 0, 3)$ ve $\max z = 1$.
Alternatif çözümler. Baz dışındaki v_2'nin kriteri $z_2 - c_2 = 0$'dır, ama sütunu $(-1, 0)$'dır; pozitif eleman yoktur ve pivot yapılamaz. Önerme 7.3 gereği her $\lambda \geq 0$ için $x_2 = \lambda$ ve

$$x_1 = 1 - (-1)\lambda = 1 + \lambda, \qquad x_4 = 3 - 0 \cdot \lambda = 3$$

olan çözüm optimaldir. Kontrol: $(1+\lambda) - \lambda = 1$, $-(1+\lambda) + \lambda + 3 = 2$ ve $z = (1+\lambda) - \lambda = 1$.
Başka optimal çözüm de yoktur. Optimal tabloda (2) eşitliği (Lemma 7.1) $z = 1 - 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = 1 - x_3$ verir; bir uygun çözüm ancak $x_3 = 0$ ise optimaldir. $x_3 = 0$ iken (1) eşitlikleri $x_1 = 1 + x_2$ ve $x_4 = 3$ verir. Böylece bütün optimal çözümler

$$(x_1, x_2) = (1 + \lambda, \lambda), \qquad \lambda \geq 0$$

noktalarıdır. Bunlar $(1, 0)$ köşesinden başlayıp $x_1 - x_2 = 1$ doğrusu boyunca sonsuza uzanan bir ışın oluşturur. Amacın seviye doğruları $x_1 - x_2 =$ sabit bu kenara paraleldir; en büyük değer 1 bu kenarın tamamında alınır. Optimal değer sonludur, optimal çözümler kümesi ise sınırsızdır.
■

Bu bölümde gördüklerimizi, simpleks yöntemin son tablosunda karşılaşılabilecek durumlar olarak özetleyelim. Aşağıdaki tabloda "iyileştiren kriter" minimumda pozitif, maksimumda negatif $z_j - c_j$ demektir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 7.19: Son simpleks tablosunun okunuşu

Son tablodaki belirti	Sonuç
İyileştiren kriterli bir v_k var ve sütununda pozitif eleman yok	Sınırsız çözüm; optimal çözüm yok
Tablo optimal, baz dışındaki bütün kriterler sıfırdan farklı	Optimal çözüm tek
Tablo optimal, baz dışı bir v_k için $z_k - c_k = 0$ ve sütununda pozitif eleman var	Alternatif optimal uç nokta (dejenere değilse); aradaki bütün noktalar optimal
Tablo optimal, baz dışı bir v_k için $z_k - c_k = 0$ ve sütununda pozitif eleman yok	Optimal çözümler bir ışın içerir (başka sıfır kriter yoksa tam olarak bu ışındır); optimal değer sonlu

Şimdiye kadar bütün değişkenlerin negatif olmadığını varsaydık; simpleks yöntem de bu varsayıma dayanıyor. Oysa bazı problemlerde bir değişken negatif değerler de alabilir. Bir sonraki bölümde, İşaret kısıtlaması olmayan değişkenler bölümünde, böyle değişkenleri negatif olmayan değişkenlerin farkı olarak yazıp problemi yine simpleks yöntemle çözmeyi göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

8. İşaret Kısıtlaması Olmayan Değişkenler

Şimdiye kadar çözdüğümüz bütün problemlerde değişkenlerin negatif olmaması istendi ve simpleks yöntem de bu koşula dayanıyor: başlangıç çözümü $b_i \geq 0$ değerlerinden okunuyor, oran testi de hiçbir baz değişkeninin negatife düşmeyeceği adımı seçiyor. Oysa bazı büyüklükler doğal olarak negatif de olabilir. Bir deponun stok değişimi, bir yatırımın net kâr ya da zararı, bir fiyatın önceki döneme göre farkı bunlara örnektir. Böyle bir değişkene ≥ 0 koşulunu zorla eklemek problemi değiştirir ve gerçek optimumu kaçırmamıza yol açabilir.
İlk bölümdeki dönüştürme kuralları arasında (bkz. Bölüm 1.6) böyle bir değişkeni iki negatif olmayan değişkenin farkı olarak yazmayı görmüştük. Bu bölümde o kuralın problemi neden değiştirmediğini kanıtlayacak, iki yeni değişkenin simpleks tablosunda nasıl davrandığını inceleyecek ve üç örneği bütün tablolarıyla çözeceğiz. Örneklerin ikisinde optimum negatif koordinatlı bir noktada çıkacak, birinde ise problemin sınırsız olduğu ortaya çıkacak.

8.1 Dönüşüm ve Eşdeğerlik

Önce kuralı hatırlayalım, sonra onun problemi gerçekten değiştirmediğini kesin olarak gösterelim.
Lineer programlama problemindeki $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerinin negatif olmama koşulu, yani $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ koşulu, bazı değişkenler için kaldırılmış olabilir. Örneğin x_r için işaret kısıtlaması kaldırılmışsa, yani x_r negatif değerler de alabiliyorsa

$$x_r = x_r' - x_r'', \qquad x_r', x_r'' \geq 0$$

dönüşümü yapılır: x_r kısıtlarda ve amaç fonksiyonunda geçtiği her yerde $x_r' - x_r''$ ile değiştirilir. Böylece x_r yerine negatif olmayan iki değişken gelir ve problem **işaretçe kısıtlı** hale, yani bütün değişkenleri ≥ 0 olan bir probleme dönüşür. Birden çok değişken işaretsizse her birine ayrı bir çift ayrılır. (Bir değişken için $x_r \leq 0$ biliniyorsa tek bir yeni değişken yeter: $x_r = -x_r'$. Bu bölüm işaretin hiç bilinmediği durumla ilgileniyor.)
Dönüşümün katsayılara etkisi basittir. i. kısıttaki $a_{ir}x_r$ terimi ve amaçtaki $c_r x_r$ terimi

$$a_{ir}x_r = a_{ir}x_r' + (-a_{ir})x_r'', \qquad c_r x_r = c_r x_r' + (-c_r)x_r''$$

olur. Demek ki x_r''nün kısıtlardaki sütunu $v_r' = v_r$, amaç katsayısı $c_r' = c_r$; x_r'''nün sütunu $v_r'' = -v_r$, amaç katsayısı $c_r'' = -c_r$'dir. Katsayılar matrisinde v_r sütununun yerini, biri ötekinin negatifi olan iki sütun alır.

Önerme 8.1 (Dönüşüm problemi değiştirmez). *(P), x_r değişkeni işaretsiz, diğer değişkenleri ≥ 0 olan bir lineer programlama problemi; (P') de (P)'de $x_r = x_r' - x_r''$ dönüşümü yapılarak elde edilen işaretçe kısıtlı problem olsun.*

1. *(P')'nün her uygun çözümünden, $x_r = x_r' - x_r''$ alınarak, (P)'nin amaç değeri aynı olan bir uygun çözümü elde edilir.*
2. *(P)'nin her uygun çözümü, $x_r' = \max\{x_r, 0\}$ ve $x_r'' = \max\{-x_r, 0\}$ alınarak, (P')'nün amaç değeri aynı olan bir uygun çözümüne dönüşür.*

Dolayısıyla iki problemin optimal değerleri aynıdır, (P')'nün bir optimal çözümü 1. maddeyle (P)'nin bir optimal çözümünü verir ve problemlerden biri sınırsızsa öteki de sınırsızdır.

> ***İspat.***
> *Kısıtlar ve amaç fonksiyonu x_r'ye yalnız $a_{ir}x_r$ ($i = \overline{1,m}$) ve $c_r x_r$ terimleriyle bağlıdır; (P')'de bu terimlerin yerini $a_{ir}(x_r' - x_r'')$ ve $c_r(x_r' - x_r'')$ alır. Diğer bütün terimler iki problemde aynıdır.*
> *Birinci madde. (P')'nün bir uygun çözümünde $x_r = x_r' - x_r''$ sayısını alalım. Her kısıtın sol tarafı ve amaç fonksiyonu (P)'de, (P')'deki değerlerin aynısını verir; çünkü $a_{ir}x_r = a_{ir}(x_r' - x_r'')$ ve $c_r x_r = c_r(x_r' - x_r'')$'dir. Diğer değişkenler aynen kalır ve ≥ 0'dır; x_r için ise bir işaret koşulu yoktur. Yani elde edilen nokta (P)'nin uygun bir çözümüdür ve amaç değeri aynıdır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci madde. $x_r' = \max\{x_r, 0\} \geq 0$ *ve* $x_r'' = \max\{-x_r, 0\} \geq 0$*'dır.* $x_r \geq 0$ *ise* $x_r' - x_r'' = x_r - 0 = x_r$*;* $x_r < 0$ *ise* $x_r' - x_r'' = 0 - (-x_r) = x_r$ *olur. Her iki durumda da* $x_r' - x_r'' = x_r$ *olduğundan kısıtların sol tarafları ve amaç değeri değişmez; diğer değişkenler aynen kalır. Yani elde edilen nokta* (P')*'nün uygun bir çözümüdür ve amaç değeri aynıdır.*
Sonuç. İki madde birlikte şunu söyler: (P)*'nin uygun çözümlerinde amaç fonksiyonunun aldığı değerlerin kümesi,* (P')*'nünkiyle aynıdır. Aynı kümenin en küçük (ya da en büyük) elemanı da aynıdır; küme alttan (ya da üstten) sınırsızsa bu, iki problem için birlikte geçerlidir.* (P')*'nün bir optimal çözümü birinci maddeyle* (P)*'nin aynı değerli bir uygun çözümüne gider; bu değer* (P)*'nin de optimal değeri olduğundan o çözüm* (P)*'nin optimal çözümüdür.*
■

İspat diğer değişkenlerin işaret koşulunu hiç kullanmıyor. Bu yüzden birden çok işaretsiz değişken varsa önerme her birine sırayla uygulanır ve sonuç yine geçerlidir.
Yani dönüşümün dayandığı gerçek şudur: **her gerçel sayı iki negatif olmayan sayının farkıdır.** Ama bu yazılış tek değildir: $-6 = 0 - 6 = 1 - 7 = 2{,}5 - 8{,}5$. Genel olarak her $t \geq 0$ için $(x_r' + t) - (x_r'' + t)$ farkı da aynı x_r'yi verir. Bu çokluk simpleks yöntemde sorun çıkarmaz, çünkü yöntem yalnız temel çözümler arasında dolaşır ve birazdan göreceğimiz gibi bir temel çözümde x_r' ile x_r'''den en az biri sıfırdır. Bu yüzden simpleks yöntemin bulduğu çözümde x_r pozitifse x_r' değişkeninde, negatifse x_r'' değişkeninde görünür.

8.2 Simpleks Yöntemle Çözüm

Dönüşümden sonra elimizde bütün değişkenleri ≥ 0 olan sıradan bir problem vardır; onu şimdiye kadar öğrendiğimiz gibi çözeriz. Aşağıdaki reçete yalnız başa ve sona iki küçük adım ekler.

Üç adımda işaretsiz değişkenli problemi çözme

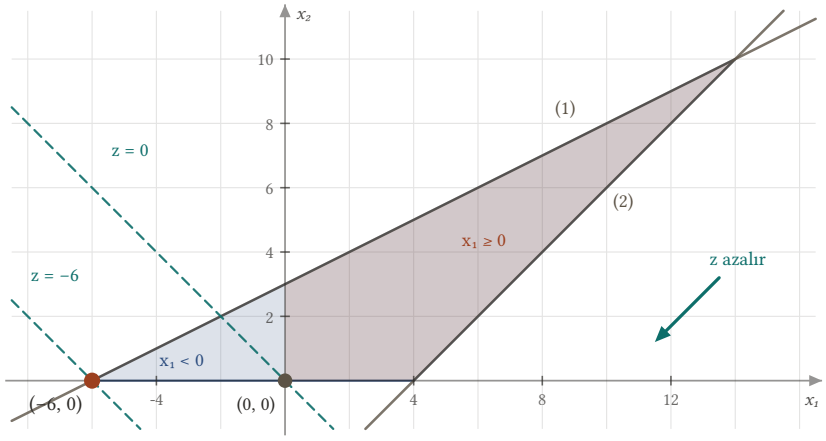
1. **Dönüşüm.** Her işaretsiz x_r için $x_r = x_r' - x_r''$ yaz. Katsayılar matrisinde v_r sütununun yerine $v_r' = v_r$ ve $v_r'' = -v_r$ sütunları, amaçta c_r yerine c_r ve $-c_r$ katsayıları gelir. Diğer değişkenlerin numaraları değişmez; aylak ve artık değişkenler yine $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ indislerini alır.
2. **Simpleks.** İşaretçe kısıtlı problemi standart forma, gerekirse yapay değişkenlerle simpleks yöntem ile çözülebilir hale getir ve simpleks yöntemle çöz. Tabloda v_r' ve v_r'' sütunları yan yana, v_r'nin yerine yazılır.
3. **Geri dönüş.** Son tablodan x_r' ve x_r'' değerlerini oku, $x_r = x_r' - x_r''$ hesapla ve sonucu orijinal değişkenlerle yaz.

Örnek 8.1 (Bir işaretsiz değişkenli minimum problemi). Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz. (x_1 için işaret koşulu verilmemiştir.)

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\geq 0 \\ \min z &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.1: Uygun bölge (−6, 0), (4, 0), (14, 10) köşeli üçgendir ve x_1 ekseninin soluna taşar. Kesikli doğrular $z = x_1 + x_2 = -6$ ve $z = 0$ seviye doğrularıdır; ok z'nin azaldığı yönü gösterir. Minimum (−6, 0) köşesinde alınır. $x_1 \geq 0$ da istenseydi yalnız koyu renkli kısım kalır ve minimum (0, 0) noktasında $z = 0$ olurdu. (1) $-x_1 + 2x_2 = 6$, (2) $x_1 - x_2 = 4$.

Dönüşüm. İşaret koşulu yalnız x_2 için verilmiş; x_1 değişkeninin işaret kısıtlaması yoktur. Bu nedenle $x_1 = x_1' - x_1''$, $x_1', x_1'' \geq 0$ dönüşümünü yaparız. Kısıtlarda ve amaçta yerine koyunca problem

$$\begin{aligned} -(x_1' - x_1'') + 2x_2 &\leq 6 \\ x_1' - x_1'' - x_2 &\leq 4 \\ x_1', x_1'', x_2 &\geq 0 \\ \min z &= x_1' - x_1'' + x_2 \end{aligned}$$

işaretçe kısıtlı problemine dönüşür. Birinci kısıtta parantezi açınca $-x_1' + x_1'' + 2x_2 \leq 6$ olur.
Standart form. Bu bir minimum problemidir ve kısıtları $\leq$ biçimindedir; yani kanonik formda değildir, ama simpleks yöntem için kanonik form gerekmez. İki $\leq$ kısıta sırasıyla x_3 ve x_4 aylak değişkenlerini ekleriz. Orijinal problemde iki değişken olduğu için aylak değişkenler x_3 ile başlar; x_1' ve x_1'' yeni numara almaz:

$$\begin{aligned} -x_1' + x_1'' + 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1' - x_1'' - x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \min z &= x_1' - x_1'' + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Bütün kısıtlar eşitlik, sağ taraflar 6 ve 4 negatif değil, bütün değişkenler ≥ 0; problem standart formdadır.
Çözülebilir hal. Sütunları sırasıyla v_1', v_1'', v_2, v_3, v_4 olan katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. v_3 ve v_4 sütunları 2×2 birim matrisi oluşturur. Demek ki standart form zaten simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir (Tanım 1.9); yapay değişken gerekmez. İlk iki sütunun birbirinin negatifi olduğuna, yani $v_1'' = -v_1'$ olduğuna dikkat edelim.
Başlangıç tablosu. Başlangıç bazı $B_0 = (v_3, v_4)$, başlangıç çözümü $x_3 = 6, x_4 = 4$ ve $z_0 = 0$'dır. $\vec{c}_B = \vec{0}$ olduğundan her j için $z_j - c_j = -c_j$'dir (Önerme 4.3): v_1' için -1, v_1'' için 1, v_2 için -1.
Minimum probleminde simpleks kriteri pozitif olanlardan en büyüğü baza girer; bütün $z_j - c_j \leq 0$ olunca optimal çözüme ulaşılmıştır. Tek pozitif kriter 1 olduğundan v_1'' baza girer. v_1'' sütununda yalnız x_3 satırının elemanı pozitiftir; x_4 satırında -1 bulunduğundan bu satır oran testine girmez. Oran $6/1 = 6$ olur, v_3 bazdan çıkar ve pivot, x_3 satırı ile v_1'' sütununun kesişimindeki 1'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 8.1: Başlangıç tablosu

		c_j	1	-1	1	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_1''	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	6	-1	$[1]$	2	1	0	$\frac{6}{1} \Rightarrow$
x_4	0	4	1	-1	-1	0	1	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-1	$1 \Uparrow$	-1	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot 1 olduğundan x_3 satırı aynen kalır ve $c_B = -1$ ile x_1'' satırı olur. x_4 satırının pivot sütunundaki elemanı -1 olduğundan bu satıra pivot satırı eklenir; $z_j - c_j$ satırının pivot sütunundaki elemanı 1 olduğundan ondan pivot satırı çıkarılır:

$$\begin{aligned} x_4 &: (4+6 \mid 1-1, -1+1, -1+2, 0+1, 1+0) \\ &= (10 \mid 0, 0, 1, 1, 1), \\ z_j - c_j &: (0-6 \mid -1+1, 1-1, -1-2, 0-1, 0-0) \\ &= (-6 \mid 0, 0, -3, -1, 0). \end{aligned}$$

Tablo 8.2: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	1	-1	1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_1''	v_2	v_3	v_4
x_1''	-1	6	-1	1	2	1	0
x_4	0	10	0	0	1	1	1
$z_j - c_j$		$z_0 = -6$	0	0	-3	-1	0

Simpleks kriterleri arasında pozitif olan kalmadı; bütün $z_j - c_j \le 0$ olduğundan Sonuç 4.2 gereği optimal çözüme ulaşıldı (Tablo 8.2).
Geri dönüş. Tablodan $x_1'' = 6$ ve $x_4 = 10$ okunur; baz dışındaki x_1', x_2, x_3 sıfırdır. Orijinal değişkene dönersek

$$x_1 = x_1' - x_1'' = 0 - 6 = -6$$

olur. Böylece optimal çözüm

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-6, 0, 0, 10), \qquad \min z = -6 + 0 = -6$$

olarak bulunur. Sağlama: $-(-6) + 2 \cdot 0 = 6 \le 6$ olduğundan birinci kısıt eşitlikle sağlanır ($x_3 = 0$); $-6 - 0 = -6 \le 4$ olduğundan ikinci kısıtta $4 - (-6) = 10 = x_4$ birim boşluk kalır. Optimalliği doğrudan da görebiliriz: birinci kısıttan $x_1 \ge 2x_2 - 6$ çıkar, dolayısıyla her uygun noktada $z = x_1 + x_2 \ge 3x_2 - 6 \ge -6$'dır.
Grafikle karşılaştırma. Uygun bölge $x_2 \ge 0$ yarı düzleminde $(-6, 0)$, $(4, 0)$ ve $(14, 10)$ köşeli üçgendir; köşelerdeki amaç değerleri sırasıyla -6, 4 ve 24'tür. Bölgenin bir kısmı $x_1 < 0$ tarafındadır ve minimum tam orada, $(-6, 0)$ köşesinde alınır. Yanlışlıkla $x_1 \ge 0$ koşulu da eklenseydi uygun bölge $(0, 0), (4, 0), (14, 10), (0, 3)$ köşeli dörtgene küçülür ve minimum $(0, 0)$ noktasında $z = 0$ çıkardı. İşaret koşulunu doğru okumak sonucu değiştirir.
Optimal tabloda v_1' ve v_1'' sütunlarının kriterlerinin ikisinin de 0 olduğuna dikkat edelim; bunun nedenini bir sonraki kısımda göreceğiz.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

8.3 Tabloda Birbirinin Negatifi Olan Sütunlar

Örneğin tablolarına dikkatle bakınca v_1'' sütununun her tabloda v_1' sütununun negatifi olduğu görülür. Başlangıç tablosunda (Tablo 8.1) bu sütunlar $(-1, 1)$ ve $(1, -1)$, kriterleri -1 ve 1'dir; optimal tabloda sütunlar $(-1, 0)$ ve $(1, 0)$, kriterlerin ikisi de 0'dır. Bu bir rastlantı değildir.

Önerme 8.2 (Zıt sütunlar). *$x_r = x_r' - x_r''$ dönüşümü yapılmış bir problemde B herhangi bir baz olsun. v_r' ve v_r'' vektörlerinin B bazına göre katsayıları (Tanım 4.2) $\vec{y}\,' = (y_1', ..., y_m')^T$ ve $\vec{y}\,'' = (y_1'', ..., y_m'')^T$, bunlara karşılık gelen amaç fonksiyonu değerleri (Tanım 4.3) de z' ve z'' olsun. Bu durumda:*

1. *v_r'''nün tablodaki sütunu v_r''nünkinin negatifidir: $\vec{y}\,'' = -\vec{y}\,'$.*
2. *Simpleks kriterleri de birbirinin negatifidir: $z'' - c_r'' = -(z' - c_r')$.*
3. *v_r' ve v_r'' aynı anda bazda bulunamaz. Dolayısıyla her temel çözümde x_r' ile x_r'''den en az biri sıfırdır.*

> ***İspat.***
> *Dönüşümden $v_r'' = -v_r'$ ve $c_r'' = -c_r'$ olduğunu biliyoruz. B bazının vektörleri $w_1, ..., w_m$ ve amaç katsayıları $\vec{c}_B$ olsun.*
> *Birinci madde. Tanım gereği $v_r' = y_1' w_1 + ... + y_m' w_m$'dir. İki yanı -1 ile çarparsak*
>
> $$v_r'' = -v_r' = (-y_1')w_1 + ... + (-y_m')w_m$$
>
> *olur. Bir vektörün baz cinsinden yazılışı tek olduğundan v_r'''nün katsayıları $y_i'' = -y_i'$, yani $\vec{y}\,'' = -\vec{y}\,'$'dür.*
> *İkinci madde. Birinci maddeyi kullanarak $z'' = \vec{c}_B^T \vec{y}\,'' = -\vec{c}_B^T \vec{y}\,' = -z'$ buluruz. Buradan*
>
> $$z'' - c_r'' = -z' + c_r' = -(z' - c_r')$$
>
> *çıkar.*
> *Üçüncü madde. Bir bazın vektörleri lineer bağımsızdır. Oysa $1 \cdot v_r' + 1 \cdot v_r'' = 0$ eşitliği, katsayıları sıfır olmayan bir lineer bileşimin sıfır vektörünü verdiğini söyler; yani v_r' ile v_r'' lineer bağımlıdır ve aynı bazda bulunamaz. Bir temel çözümde baz dışındaki değişkenler sıfırdır (Tanım 2.3). Çiftten en az biri baz dışında olduğu için en az biri sıfırdır.*
> ■

Yani iki sütun tablodan tabloya birlikte değişir ve her zaman birbirinin "ayna görüntüsü" olarak kalır; bu yüzden tabloyu hesaplarken v_r'' sütununu ayrıca hesaplamak gerekmez, v_r' sütununun işaretini değiştirmek yeter. Önermenin üç önemli sonucu var.

Sonuç 8.1 (Zıt sütunların sonuçları). *$x_r = x_r' - x_r''$ dönüşümü yapılmış bir problemde:*

1. *Her uygun temel çözümde $x_r' = \max\{x_r, 0\}$ ve $x_r'' = \max\{-x_r, 0\}$'dır. Yani simpleks yöntem x_r'yi pozitifse x_r', negatifse x_r'' değişkeninde taşır.*
2. *Bir tabloda çiftten en çok biri baza girmeye aday olabilir.*
3. *Optimal tabloda iki kriter de sıfırdır: $z' - c_r' = z'' - c_r'' = 0$.*

> ***İspat.***
> *Birinci madde. Önerme 8.2 gereği temel çözümde çiftin en az biri sıfırdır; çözüm uygun olduğundan ikisi de ≥ 0'dır. $x_r'' = 0$ ise $x_r = x_r' \geq 0$ olur; bu durumda $x_r' = x_r = \max\{x_r, 0\}$ ve $x_r'' = 0 = \max\{-x_r, 0\}$'dır. $x_r' = 0$ ise $x_r = -x_r'' \leq 0$ olur; bu durumda $x_r'' = -x_r = \max\{-x_r, 0\}$ ve $x_r' = 0 = \max\{x_r, 0\}$'dır.*
> *İkinci madde. Minimum probleminde baza ancak kriteri pozitif olan vektör girer. $z' - c_r' > 0$ ise $z'' - c_r'' = -(z' - c_r') < 0$'dır; yani ikisinin kriteri aynı anda pozitif olamaz. Maksimum probleminde baza ancak kriteri negatif olan vektör girer ve aynı akıl yürütme ikisinin kriterinin aynı anda negatif olamayacağını gösterir. Kriterler sıfırsa ikisi de aday değildir.*
> *Üçüncü madde. Kısaca $d = z' - c_r'$ yazalım; Önerme 8.2 gereği $z'' - c_r'' = -d$'dir. Minimum probleminin optimal tablosunda bütün kriterler ≤ 0 olduğundan $d \leq 0$ ve $-d \leq 0$, yani $d = 0$'dır. Maksimum probleminin optimal tablosunda bütün kriterler ≥ 0 olduğundan yine $d \geq 0$ ve $-d \geq 0$, yani $d = 0$ çıkar.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Üçüncü madde bir yanılgıya karşı da uyarır. Baz dışında kalıp kriteri sıfır olan bir vektör genellikle alternatif optimal çözümün belirtisidir (Sınırsız çözüm ve alternatif optimal çözüm). Ama çiftten biri bazdaysa, baz dışındaki eşinin sıfır kriteri böyle bir anlam taşımaz. Örneğin Örnek 8.1 optimal tablosunda (Tablo 8.2) x_1'' bazda ve v_1' baz dışında, kriteri 0'dır. v_1' sütunu $(-1, 0)$'dır ve pozitif elemanı yoktur, dolayısıyla baza alınamaz. x_1''yü $\lambda \geq 0$ kadar artırırsak birinci denklemden $x_1'' = 6 + \lambda$ olur ve $x_1 = \lambda - (6 + \lambda) = -6$ değişmez. Yani orijinal değişkenlerde yeni bir çözüm çıkmaz, yalnız aynı $x_1 = -6$ sayısının başka bir fark olarak yazılışı ortaya çıkar. Genel olarak da v_r'' bazda iken tablodaki sütunu bir birim vektördür ve Önerme 8.2 gereği v_r''nün sütunu o birim vektörün negatifidir; pozitif elemanı olmadığı için baza giremez. v_r' bazdayken de durum aynıdır.

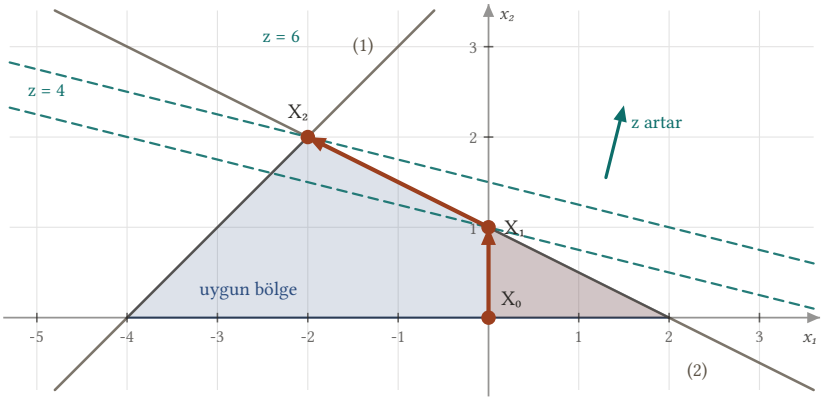
Şimdi önermeyi birkaç iterasyon süren bir örnekte izleyelim. Bu örnekte optimum yine negatif koordinatlı bir noktada çıkacak ve $x_1 \geq 0$ koşulu yanlışlıkla eklenseydi simpleks yöntemin daha erken, yanlış bir noktada duracağını göreceğiz.

Örnek 8.2 (Optimumu negatif koordinatlı bir maksimum problemi). x_1 işaretsiz olmak üzere

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_2 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

problemini simpleks yöntemle çözünüz. Sonucu grafik yöntemle ve $x_1 \geq 0$ varsayılsaydı bulunacak sonuçla karşılaştırınız.

Çözüm.



Şekil 8.2: Uygun bölge (−4, 0), (2, 0), (−2, 2) köşeli üçgendir; koyu renkli (0, 0), (2, 0), (0, 1) üçgeni onun $x_1 \geq 0$ olan kısmıdır. Simpleks yöntem $X_0 = (0, 0) \longrightarrow X_1 = (0, 1) \longrightarrow X_2 = (-2, 2)$ yolunu izler. X_1'de $z = 4$ ile koyu üçgenin en iyisine ulaşılır; x_1 negatif olabildiği için yöntem durmaz ve $z = 6$ değerini veren X_2'ye geçer. (1) $-x_1 + x_2 = 4$, (2) $x_1 + 2x_2 = 2$.

Dönüşüm ve standart form. $x_1 = x_1' - x_1'', x_1', x_1'' \geq 0$ yazarız. Kısıtlar $-x_1' + x_1'' + x_2 \leq 4$ ve $x_1' - x_1'' + 2x_2 \leq 2$, amaç $z = x_1' - x_1'' + 4x_2$ olur. İki $\leq$ kısıta x_3 ve x_4 aylak değişkenlerini ekleyerek standart formu elde ederiz:

$$\begin{aligned} -x_1' + x_1'' + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1' - x_1'' + 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \max z &= x_1' - x_1'' + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Sağ taraflar negatif değildir ve v_3, v_4 sütunları birim matrisi oluşturur; problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir.

Başlangıç tablosu. $B_0 = (v_3, v_4)$, $z_0 = 0$ ve $z_j - c_j = -c_j$'dir: v_1' için -1, v_1'' için 1, v_2 için -4. Maksimum probleminde en negatif $z_j - c_j$ baza girer; bütün $z_j - c_j \geq 0$ olunca optimal çözüme

 CC BY-NC-SA 4.0

ulaşılmıştır. En negatif kriter -4 olduğundan v_2 baza girer. Oranlar $4/1 = 4$ ve $2/2 = 1$'dir; en küçüğü x_4 satırında olduğundan v_4 bazdan çıkar, pivot 2'dir.

Tablo 8.3: Başlangıç tablosu

		c_j	1	-1	4	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_1''	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	4	-1	1	1	1	0	$\frac{4}{1}$
x_4	0	2	1	-1	[2]	0	1	$\frac{2}{2} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-1	1	$-4 \Uparrow$	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 2'ye bölünür ve $c_B = 4$ ile x_2 satırı olur: $\left(1 \mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2} \right)$. x_3 satırından bu satır çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına bu satırın 4 katı eklenir:

$$\begin{aligned} x_3 &: \left(4-1 \,\middle|\, -1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2} \right) \\ &= \left(3 \,\middle|\, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 1, -\frac{1}{2} \right), \\ z_j - c_j &: (0+4 \mid -1+2, 1-2, 0, 0, 0+2) \\ &= (4 \mid 1, -1, 0, 0, 2). \end{aligned}$$

Tablo 8.4: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	1	-1	4	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_1''	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	3	$-\frac{3}{2}$	$\left[\frac{3}{2}\right]$	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{3/2} \Rightarrow$
x_2	4	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = 4$	1	$-1 \Uparrow$	0	0	2	

Bu tablonun çözümü $x_1' = x_1'' = 0$, $x_2 = 1$, yani $(x_1, x_2) = (0, 1)$ ve $z = 4$'tür. Önerme 8.2 burada da görülüyor: v_1' ve v_1'' sütunları $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right)$ ve $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right)$, kriterleri 1 ve -1'dir.

Şimdi bir an $x_1 \geq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman x_1 dönüşüme uğramaz ve tabloda v_1'' sütunu hiç bulunmaz; v_1' sütunu v_1'in kendisi olur. Kalan kriterler $1, 0, 0, 2$'nin hepsi ≥ 0 olduğundan yöntem burada durur ve $x_1 = 0, x_2 = 1, \max z = 4$ sonucunu verirdi. İşaretsiz x_1 için ise v_1'''nün kriteri $-1 < 0$'dır; amaç daha da büyütülebilir.

Maksimumda en negatif kriter girer; tek negatif kriter -1 olduğundan v_1'' baza girer. v_1'' sütununda x_2 satırının elemanı $-\frac{1}{2} < 0$ olduğundan bu satır teste girmez; tek oran $3/\frac{3}{2} = 2$'dir. v_3 bazdan çıkar, pivot $\frac{3}{2}$'dir.

İkinci iterasyon. Pivot satırı $\frac{3}{2}$'ye bölünür, yani $\frac{2}{3}$ ile çarpılır ve $c_B = -1$ ile x_1'' satırı olur: $\left(2 \mid -1, 1, 0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$. x_2 satırına bu satırın $\frac{1}{2}$ katı, $z_j - c_j$ satırına da 1 katı eklenir:

$$\begin{aligned} x_2 &: \left(1+1 \,\middle|\, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, 1, 0+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}-\frac{1}{6} \right) \\ &= \left(2 \,\middle|\, 0, 0, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \\ z_j - c_j &: \left(4+2 \,\middle|\, 1-1, -1+1, 0, 0+\frac{2}{3}, 2-\frac{1}{3} \right) \\ &= \left(6 \,\middle|\, 0, 0, 0, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right). \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 8.5: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	1	-1	4	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_1''	v_2	v_3	v_4
x_1''	-1	2	-1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	4	2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 6$	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$

Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan Sonuç 4.3 gereği tablo optimaldir (Tablo 8.5). v_1' ile v_1'''nün kriterleri, sonucun (Sonuç 8.1) üçüncü maddesinin söylediği gibi, ikisi de 0'dır.
Geri dönüş. Tablodan $x_1'' = 2, x_2 = 2$ okunur; $x_1' = x_3 = x_4 = 0$'dır. Orijinal değişken $x_1 = 0 - 2 = -2$ olur ve optimal çözüm

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2, 2, 0, 0), \qquad \max z = -2 + 4 \cdot 2 = 6$$

olarak bulunur. Sağlama: $-(-2) + 2 = 4$ ve $-2 + 2 \cdot 2 = 2$; iki kısıt da eşitlikle sağlanır, bu yüzden iki aylak değişken de sıfırdır.
Grafikle karşılaştırma. $x_2 \geq 0$ yarı düzleminde uygun bölge $(-4, 0)$, $(2, 0)$ ve $(-2, 2)$ köşeli üçgendir. Köşelerdeki amaç değerleri $z(-4, 0) = -4$, $z(2, 0) = 2$ ve $z(-2, 2) = 6$'dır; en büyüğü simpleks yöntemin bulduğu 6'dır. $x_1 \geq 0$ da istenseydi uygun bölge $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 1)$ köşeli küçük üçgene iner; köşe değerleri 0, 2 ve 4 olduğundan maksimum $(0, 1)$ noktasında $z = 4$ çıkardı. Bu, simpleks yöntemin birinci iterasyon tablosunda bulduğu noktanın ta kendisidir.
■

8.4 Sınırsız Çıkan Bir Örnek

Dönüşüm, birden çok işaretsiz değişkende de aynı biçimde uygulanır. Aşağıdaki örnekte iki değişken işaretsizdir ve problemin sınırsız olduğu ortaya çıkar; sınırsızlık belirtisi bu kez bir işaretsiz değişkenin sütununda görünür.

Örnek 8.3 (İki işaretsiz değişkenli bir minimum problemi). Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz. (x_3 ve x_5 için işaret koşulu verilmemiştir.)

$$\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 - 9x_3 + x_4 - 2x_5 &\leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + x_5 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 11x_5 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_4 &\geq 0 \\ \min z = 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 9x_5 & \end{aligned}$$

Çözüm.
Dönüşüm. x_3 ve x_5 değişkenlerinin işaret kısıtlaması yoktur. Bu nedenle $x_3 = x_3' - x_3''$, $x_3', x_3'' \geq 0$ ve $x_5 = x_5' - x_5''$, $x_5', x_5'' \geq 0$ dönüşümlerini yaparız. Bu dönüşümler altında problem

$$\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 - 9(x_3' - x_3'') + x_4 - 2(x_5' - x_5'') &\leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4(x_3' - x_3'') - 5x_4 + (x_5' - x_5'') &\leq 9 \\ x_1 + x_2 - 5(x_3' - x_3'') - 7x_4 + 11(x_5' - x_5'') &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5', x_5'' &\geq 0 \\ \min z = 3x_1 + x_2 - 4(x_3' - x_3'') & \\ +5x_4 + 9(x_5' - x_5'') & \end{aligned}$$

işaretçe kısıtlı problemine dönüşür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Standart form ve çözülebilir hal. Parantezleri açıp üç $\leq$ kısıta sırasıyla x_6, x_7, x_8 aylak değişkenlerini ekleriz. Orijinal problemde beş değişken olduğu için aylak değişkenler x_6 ile başlar:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 - 9x_3' + 9x_3'' + x_4 - 2x_5' + 2x_5'' + x_6 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3' - 4x_3'' - 5x_4 + x_5' - x_5'' + x_7 &= 9 \\ x_1 + x_2 - 5x_3' + 5x_3'' - 7x_4 + 11x_5' - 11x_5'' + x_8 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5', x_5'', x_6, x_7, x_8 &\geq 0 \\ \min z = 3x_1 + x_2 - 4x_3' + 4x_3'' + 5x_4 & \\ +9x_5' - 9x_5'' + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 & \end{aligned}$$

Bütün kısıtlar eşitlik, sağ taraflar 6, 9, 10 negatif değil ve bütün değişkenler ≥ 0; problem standart formdadır. v_6, v_7, v_8 sütunları 3×3 birim matrisi oluşturduğundan standart form simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir; yapay değişken gerekmez.

Başlangıç tablosu. $B_0 = (v_6, v_7, v_8)$, başlangıç çözümü $x_6 = 6$, $x_7 = 9$, $x_8 = 10$ ve $z_0 = 0$'dır. Kriterler $z_j - c_j = -c_j$'dir. İki çiftin kriterleri beklendiği gibi zıt işaretlidir: v_3' ve v_3'' için 4 ve -4, v_5' ve v_5'' için -9 ve 9.

Minimum probleminde simpleks kriteri pozitif olanlardan en büyüğü girer; bütün $z_j - c_j \leq 0$ olunca optimal çözüme ulaşılmıştır. Pozitif kriterler 4 ve 9'dur; en büyüğü 9 olduğundan v_5'' baza girer. v_5'' sütununun elemanları 2, -1, -11'dir; yalnız x_6 satırının elemanı pozitif olduğundan tek oran $6/2 = 3$'tür. v_6 bazdan çıkar, pivot 2'dir.

Tablo 8.6: Başlangıç tablosu

		c_j	3	1	-4	4	5	9	-9	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3'	v_3''	v_4	v_5'	v_5''	v_6	v_7	v_8	Oran
x_6	0	6	4	-5	-9	9	1	-2	[2]	1	0	0	$\frac{6}{2} \Rightarrow$
x_7	0	9	2	3	4	-4	-5	1	-1	0	1	0	–
x_8	0	10	1	1	-5	5	-7	11	-11	0	0	1	–
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-3	-1	4	-4	-5	-9	$9 \Uparrow$	0	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 2'ye bölünür ve $c_B = -9$ ile x_5'' satırı olur:

$$\left(3 \,\middle|\, 2, -\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1, \frac{1}{2}, 0, 0 \right).$$

v_5'' sütunundaki elemanlar x_7 satırında -1, x_8 satırında -11, $z_j - c_j$ satırında 9 olduğundan x_7 satırına yeni satırın 1 katı, x_8 satırına 11 katı eklenir; $z_j - c_j$ satırından ise 9 katı çıkarılır. Birkaç eleman:

$$\begin{aligned} x_7, v_0 &: 9 + 3 = 12, & x_7, v_4 &: -5 + \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}, \\ x_8, v_0 &: 10 + 11 \cdot 3 = 43, & x_8, v_3' &: -5 + 11 \cdot \left(-\frac{9}{2} \right) = -\frac{109}{2}, \\ z_0 &: 0 - 9 \cdot 3 = -27, & v_3' &: 4 - 9 \cdot \left(-\frac{9}{2} \right) = \frac{89}{2}, \\ v_2 &: -1 - 9 \cdot \left(-\frac{5}{2} \right) = \frac{43}{2}, & v_6 &: 0 - 9 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Son iki satırdaki z_0, v_3', v_2, v_6 değerleri $z_j - c_j$ satırına aittir. v_3'' sütununu ayrıca hesaplamaya gerek yoktur: Önerme 8.2 gereği v_3' sütununun negatifidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 8.7: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	3	1	-4	4	5	9	-9	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3'	v_3''	v_4	v_5'	v_5''	v_6	v_7	v_8	Oran
x_5''	-9	3	2	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	–
x_7	0	12	4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	–
x_8	0	43	23	$-\frac{53}{2}$	$-\frac{109}{2}$	$\frac{109}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{11}{2}$	0	1	–
$z_j - c_j$		$z_0 = -27$	-21	$\frac{43}{2}$	$\frac{89}{2} \Uparrow$	$-\frac{89}{2}$	$-\frac{19}{2}$	0	0	$-\frac{9}{2}$	0	0	

Bu tablonun temel çözümünde $x_5'' = 3$, $x_7 = 12$, $x_8 = 43$ ve diğer değişkenler sıfırdır. Orijinal değişkenlerle $x_5 = x_5' - x_5'' = 0 - 3 = -3$, yani

$$(x_1, x_2, \ldots, x_8) = (0, 0, 0, 0, -3, 0, 12, 43), \qquad z = 9 \cdot (-3) = -27$$

olur. Bir temel çözümde orijinal bir değişkenin negatif çıkması, dönüşümün tam da izin verdiği şeydir.
Sınırsızlık. Pozitif kriterler $\frac{43}{2}$ (v_2) ve $\frac{89}{2}$ (v_3')'dir; en büyüğü $\frac{89}{2}$ olduğundan v_3' baza girmelidir. Ama v_3' sütununun elemanları $-\frac{9}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{109}{2}$'nin hiçbiri pozitif değildir; oran testi yapılamaz. Simpleks kriteri pozitif olan v_3' vektörünün elemanlarının her biri negatif olduğundan, Önerme 4.2 gereği amaç fonksiyonu alttan sınırsızdır: problemin sınırsız çözümü vardır, minimumu yoktur (Sınırsız çözüm ve alternatif optimal çözüm). v_2 sütununda pozitif eleman bulunması bu sonucu değiştirmez; kriteri iyileşme gösteren tek bir sütunda pozitif eleman olmaması sınırsızlık için yeter.
Sınırsız çözümü açıkça yazalım. $\lambda \geq 0$ olmak üzere $x_3' = \lambda$ alıp baz dışındaki diğer değişkenleri (x_1, x_2, x_3'', x_4, x_5', x_6) sıfır bırakırız. Baz değişkenleri v_3' sütununa göre değişir:

$$\begin{aligned} x_5'' &= 3 - \lambda\left(-\frac{9}{2}\right) = 3 + \frac{9}{2}\lambda, \\ x_7 &= 12 - \lambda\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 + \frac{1}{2}\lambda, \\ x_8 &= 43 - \lambda\left(-\frac{109}{2}\right) = 43 + \frac{109}{2}\lambda. \end{aligned}$$

Bunların hepsi $\lambda \geq 0$ iken pozitiftir. Orijinal değişkenlere dönersek $x_3 = x_3' - x_3'' = \lambda$ ve $x_5 = x_5' - x_5'' = -3 - \frac{9}{2}\lambda$ olur. Böylece her $\lambda \geq 0$ için

$$\begin{aligned} X(\lambda) = \Big(& 0, 0, \lambda, 0, -3 - \frac{9}{2}\lambda, 0, \\ & 12 + \frac{1}{2}\lambda, 43 + \frac{109}{2}\lambda \Big) \end{aligned}$$

uygun bir çözümdür. Sağlama için $x_3 = \lambda$ ve $x_5 = -3 - \frac{9}{2}\lambda$ değerlerini orijinal kısıtların sol taraflarına koyalım ($x_1 = x_2 = x_4 = 0$):

$$\begin{aligned} -9\lambda - 2\left(-3 - \frac{9}{2}\lambda\right) &= 6, \\ 4\lambda + \left(-3 - \frac{9}{2}\lambda\right) &= -3 - \frac{1}{2}\lambda \leq 9, \\ -5\lambda + 11\left(-3 - \frac{9}{2}\lambda\right) &= -33 - \frac{109}{2}\lambda \leq 10. \end{aligned}$$

Birinci kısıt eşitlikle sağlanır ($x_6 = 0$). İkinci ve üçüncü kısıtta sağ tarafa kalan boşluklar $9 - \left(-3 - \frac{1}{2}\lambda\right) = x_7$ ve $10 - \left(-33 - \frac{109}{2}\lambda\right) = x_8$'dir. Bu çözümde amaç fonksiyonunun değeri

$$z = -4\lambda + 9\left(-3 - \frac{9}{2}\lambda\right) = -27 - \frac{89}{2}\lambda$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olarak bulunur. Bu, Önerme 4.2 ispatındaki $z_0 - \lambda(z_k - c_k) = -27 - \frac{89}{2}\lambda$ formülüyle aynıdır ve $\lambda \to \infty$ iken $-\infty$'a gider. Yani x_3 büyüdükçe x_5 negatif yönde büyür; amaçta katsayısı 9 olan x_5 negatife gittikçe z sınırsızca küçülür.
Son olarak birinci iterasyon tablosunda iki çifte bakalım. v_3' ve v_3'' sütunları birbirinin negatifidir, kriterleri $\frac{89}{2}$ ve $-\frac{89}{2}$'dir. x_5'' bazda olduğundan sütunu birim vektör $(1, 0, 0)$, eşi v_5''nün sütunu ise $(-1, 0, 0)$'dır ve ikisinin de kriteri 0'dır (Önerme 8.2).
■

Bu bölümde işaret kısıtlaması olmayan bir değişkeni $x_r = x_r' - x_r''$ ile iki negatif olmayan değişkene ayırmanın problemi değiştirmediğini, simpleks tablosunda bu iki değişkenin sütunlarının ve kriterlerinin her zaman birbirinin negatifi olduğunu ve bu yüzden ikisinin aynı anda bazda bulunamadığını gördük. Sonucu okurken $x_r = x_r' - x_r''$ farkını almayı unutmamak yeter. Bir sonraki bölümde, Sınırlı değişkenler bölümünde, değişkenlerin yalnız işaretinin değil, alabileceği değerlerin de alttan ve üstten sınırlandığı problemleri ele alacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

9. Sınırlı Değişkenler

Simpleks yöntem her değişkenin negatif olmamasını, yani alttan 0 ile sınırlı olmasını ister. İşaret kısıtlaması olmayan değişkenler bölümünde bu koşulun hiç verilmediği durumu gördük. Uygulamada daha sık karşılaşılan durum ise değişkenin belli bir aralıkta kalmasının istenmesidir: bir makine haftada en çok 40 saat çalışabilir, bir üründen sözleşme gereği en az 5 ton üretilmelidir, bir sıcaklık -4 ile 10 derece arasında tutulmalıdır. Böyle koşullara **sınır** diyeceğiz.
Bir sınır da bir eşitsizliktir; onu kısıtlar arasına bir satır olarak yazıp problemi olduğu gibi çözebiliriz. Ama her yeni satır tabloya bir satır ve bir sütun ekler, $x_j \geq 5$ gibi bir alt sınır da artık ve yapay değişken gerektirir. Çoğu zaman daha iyisi, değişkeni kaydırarak ya da ters çevirerek sınırı sıradan bir $x'_j \geq 0$ koşuluna dönüştürmektir. Bu bölümde dört tür sınırı ve her biri için kullanılan yolu göreceğiz, dönüşümlerin problemi neden değiştirmediğini kanıtlayacak ve beş örneği bütün tablolarıyla çözeceğiz.

9.1 Sınırlı Değişken Türleri

Önce sınırları adlandıralım. Aşağıda x_j bir lineer programlama probleminin değişkeni, d_j ve s_j de verilmiş gerçel sayılardır.

Tanım 9.1 (Alttan sınırlı değişken). Problemde $x_j \geq d_j$ koşulu varsa x_j değişkenine **alttan sınırlı** değişken, d_j sayısına da x_j'nin **alt sınırı** denir.

Tanım 9.2 (Üstten sınırlı değişken). Problemde $x_j \leq s_j$ koşulu varsa x_j değişkenine **üstten sınırlı** değişken, s_j sayısına da x_j'nin **üst sınırı** denir.

Tanım 9.3 (İki yanlı sınırlı değişken). Problemde $d_j \leq s_j$ olmak üzere $d_j \leq x_j \leq s_j$ koşulu varsa x_j değişkenine **iki yanlı sınırlı** değişken denir.

Yani bir sınır, tek bir değişkenin alabileceği değerleri kısıtlayan bir eşitsizliktir. Alışık olduğumuz $x_j \geq 0$ koşulu, alt sınırı $d_j = 0$ olan bir sınırdır. İki yanlı sınırlı bir değişken hem alttan hem üstten sınırlıdır; $d_j \leq s_j$ koşulu, aralığın boş olmaması içindir.
Bir lineer programlama probleminde sınırlı değişkenle başlıca dört biçimde karşılaşılır:

1. $x_j \leq s_j$: yalnız üstten sınırlı, işaret koşulu yok.
2. $0 \leq x_j \leq s_j$: negatif olmayan ve üstten sınırlı.
3. $d_j \leq x_j \leq s_j$: iki yanlı sınırlı, alt sınır herhangi bir sayı.
4. $x_j \geq d_j$: yalnız alttan sınırlı.

Her durumda yapılacak iş Tablo 9.1 tablosunda özetlenmiştir; gerekçeleri ve örnekleri bölümün geri kalanında tek tek göreceğiz.

Tablo 9.1: Sınırlı değişkenler için dönüşümler

Sınır	Dönüşüm	İşaret koşulu	Kısıtlara eklenen satır
$x_j \leq s_j$	$x_j = -x'_j + s_j$	$x'_j \geq 0$	yok
$0 \leq x_j \leq s_j$	yok	$x_j \geq 0$	$x_j \leq s_j$
$d_j \leq x_j \leq s_j$	$x_j = x'_j + d_j$	$x'_j \geq 0$	$x'_j \leq s_j - d_j$
$x_j \geq d_j$	$x_j = x'_j + d_j$	$x'_j \geq 0$	yok

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablodaki iki dönüşüm de $x_j = t + \sigma x'_j$ biçimindedir: t bir sabit, σ ise 1 ya da -1'dir. $\sigma = 1$ olduğunda sayı doğrusu t kadar kaydırılır (**öteleme**), $\sigma = -1$ olduğunda ayrıca ters çevrilir (**yansıtma**). İkisi de negatif olmama koşulunu ortaya çıkarmak içindir: öteleme alt sınırı 0'a taşır, yansıtma üst sınırı alt sınıra çevirir.

9.2 Dönüşümün Doğruluğu

Bir değişkeni başka bir değişkenle değiştirmek problemin kendisini değiştirmemelidir. Bunu genel biçimde kanıtlayalım; ispat, İşaret kısıtlaması olmayan değişkenler bölümündeki eşdeğerlik önermesinin (Önerme 8.1) ispatına benzer, ama bu kez amaç değeri bir sabit kadar kayar.

Önerme 9.1 (Öteleme ve yansıtma problemi değiştirmez). *(P) bir lineer programlama problemi, x_r onun bir değişkeni, t bir sabit ve $\sigma \in \{1, -1\}$ olsun. (P)'de x_r geçtiği her yerde, yani kısıtlarda, amaç fonksiyonunda ve x_r'nin sınır koşullarında,*

$$x_r = t + \sigma x'_r$$

yazılarak (P') problemi elde edilsin. (P')'nün amaç fonksiyonu $z = z' + c_r t$ biçimindedir; burada z', amacın değişkenli kısmıdır ve $c_r t$ bir sabittir. Bu durumda:

1. *(P)'nin her uygun çözümü, diğer değişkenler aynen bırakılıp $x'_r = \sigma(x_r - t)$ alınarak (P')'nün bir uygun çözümüne gider. (P')'nün her uygun çözümü de $x_r = t + \sigma x'_r$ alınarak (P)'nin bir uygun çözümüne gider. Bu iki eşleme birbirinin tersidir.*
2. *Eşlenen iki çözümde (P)'nin amaç değeri, (P')'deki z' değerinin $c_r t$ fazlasıdır.*

Dolayısıyla (P')'de z''yü optimum yapan çözüm, 1. maddeyle geri çevrilince (P)'nin optimal çözümünü verir ve optimal değerler arasında $z^* = z'^* + c_r t$ bağıntısı vardır. Problemlerden birinin uygun çözümü yoksa ötekinin de yoktur; biri sınırsızsa öteki de sınırsızdır.

İspat.
(P)'nin kısıtları ve x_r'nin sınır koşulları, ρ işareti $\leq$, $=$ ya da $\geq$ olmak üzere

$$\sum_{j \neq r} a_j x_j + a_r x_r \;\rho\; b$$

biçimindeki koşullardır (x_r'nin sınırında $a_r = 1$ ve diğer a_j'ler 0'dır). $x_r = t + \sigma x'_r$ yazıp sabiti sağa atınca bu koşul

$$\sum_{j \neq r} a_j x_j + \sigma a_r x'_r \;\rho\; b - a_r t$$

olur; (P')'nün koşulları tam olarak bunlardır. Diğer değişkenlerin işaret koşulları iki problemde aynıdır. Birinci madde. x_r verilmişken $x'_r = \sigma(x_r - t)$ alalım. $\sigma^2 = 1$ olduğundan $t + \sigma x'_r = t + \sigma^2(x_r - t) = x_r$'dir. Bu yüzden her koşulun sol tarafı için

$$\sum_{j \neq r} a_j x_j + a_r x_r = \Big(\sum_{j \neq r} a_j x_j + \sigma a_r x'_r\Big) + a_r t$$

eşitliği geçerlidir. Soldaki toplam $\rho\, b$ koşulunu ancak ve ancak parantez içindeki toplam $\rho\,(b - a_r t)$ koşulunu sağladığında sağlar; çünkü bir eşitsizliğin iki yanından aynı $a_r t$ sayısını çıkarmak eşitsizliği korur. Demek ki (P)'nin uygun bir çözümü (P')'nün uygun bir çözümüne gider. Tersine, (P')'nün uygun bir çözümünde $x_r = t + \sigma x'_r$ alınırsa $\sigma(x_r - t) = \sigma^2 x'_r = x'_r$ olur ve aynı eşitlik bu kez öteki yönde kullanılarak (P)'nin koşullarının sağlandığı görülür. İki eşleme birbirini geri aldığından birbirinin tersidir. İkinci madde. Amaç fonksiyonunda $x_r = t + \sigma x'_r$ yazılırsa

$$\sum_{j} c_j x_j = \Big(\sum_{j \neq r} c_j x_j + \sigma c_r x'_r\Big) + c_r t = z' + c_r t$$

bulunur. Yani eşlenen iki çözümde (P)'nin amaç değeri, (P')'deki z' değerine $c_r t$ eklenerek elde edilir. Sonuç. İki madde birlikte, (P)'nin uygun çözümlerinde amacın aldığı değerler kümesinin, (P')'nün uygun çözümlerinde z''nün aldığı değerler kümesinin her elemanına $c_r t$ eklenerek elde edildiğini söyler. Bir kümenin bütün elemanlarına aynı sayıyı eklemek en büyük ve en küçük elemanın yerini değiştirmez,

 CC BY-NC-SA 4.0

> *onları da aynı sayı kadar kaydırır. Küme boşsa ya da alttan (üstten) sınırsızsa kaydırılmış küme de öyledir. (P')'de z''yü optimum yapan çözüm birinci maddeyle (P)'nin, amaç değeri $z'^* + c_r t$ olan bir uygun çözümüne gider; bu değer (P)'nin optimal değeri olduğundan o çözüm (P)'nin optimal çözümüdür.*
> ■

İspat diğer değişkenlerin koşullarını hiç kullanmıyor. Bu yüzden birden çok sınırlı değişken varsa önerme her birine sırayla uygulanır; amaç değeri her dönüşümde kendi sabiti kadar kayar ve bu sabitler toplanır. Yani dönüşüm uygun bölgeyi kaydırır ya da ters çevirir, ama şeklini ve köşelerini korur; amaç fonksiyonu da bütün noktalarda aynı sabit kadar değiştiği için en iyi nokta yine en iyi noktadır. Uygulamada bunun iki sonucu vardır:

- **Sağ taraflar değişir.** i. kısıtın sağ tarafı b_i'den $b_i - a_{ir}t$'ye geçer. Bu sayı negatif çıkarsa kısıt, standart forma geçmeden önce -1 ile çarpılır ve eşitsizliğin yönü döner (bkz. Bölüm 1.6); bunun bir örneğini bölümün sonunda göreceğiz.
- **Amaçta bir sabit terim belirir.** Sabit terim hangi noktanın optimal olduğunu etkilemez. Simpleks tablosunun c_j satırına yalnız z''nün katsayıları yazılır; tablonun verdiği z_0 değeri z''nün değeridir ve asıl optimal değer sonunda $z_0 + c_r t$ olarak hesaplanır.

9.3 Çözüm Yöntemi

Sınırlar dönüştürüldükten sonra elimizde bütün değişkenleri ≥ 0 olan sıradan bir problem kalır. Aşağıdaki reçete, simpleks yöntemin başına ve sonuna birer adım ekler.

Dört adımda sınırlı değişkenli problemi çözme

1. **Sınırları oku.** Her sınırlı değişkenin, Tablo 9.1 tablosundaki dört durumdan hangisine girdiğini belirle.
2. **Dönüştür.** Dönüşümü kısıtlarda, amaçta ve sınırda yerine koy; sabitleri sağ tarafa at. Sağ tarafı negatif çıkan kısıtı -1 ile çarp. Üst sınır satır olarak kalıyorsa onu kısıtlara ekle. Amaçtaki sabiti ayrı yaz: $z = z' + k$.
3. **Simpleks.** Problemi standart forma, gerekirse yapay değişkenlerle simpleks yöntem ile çözülebilir hale getir ve z''yü simpleks yöntemle optimum yap. Sabit k tabloya girmez.
4. **Geri dönüş.** Son tablodan yeni değişkenlerin değerlerini oku, dönüşümü tersine çevirerek orijinal değişkenleri bul ve optimal değeri $z_0 + k$ olarak hesapla.

Şimdi dört durumu kendi örnekleriyle sırayla ele alalım.

9.4 Üstten Sınırlı Değişken

İlk durumda değişkenin yalnız bir üst sınırı vardır, işaret koşulu yoktur. x_j negatif değerler de alabildiği için onu doğrudan tabloya koyamayız. Sınırı satır olarak yazarsak İşaret kısıtlaması olmayan değişkenler bölümündeki gibi $x_j = x_j' - x_j''$ dönüşümü de gerekir; iki yeni değişken ve bir yeni satır. Oysa üst sınırı kullanan tek bir yansıtma ikisinden de kurtarır:

$$x_j \leq s_j \Rightarrow 0 \leq s_j - x_j = x_j' \Rightarrow x_j = -x_j' + s_j.$$

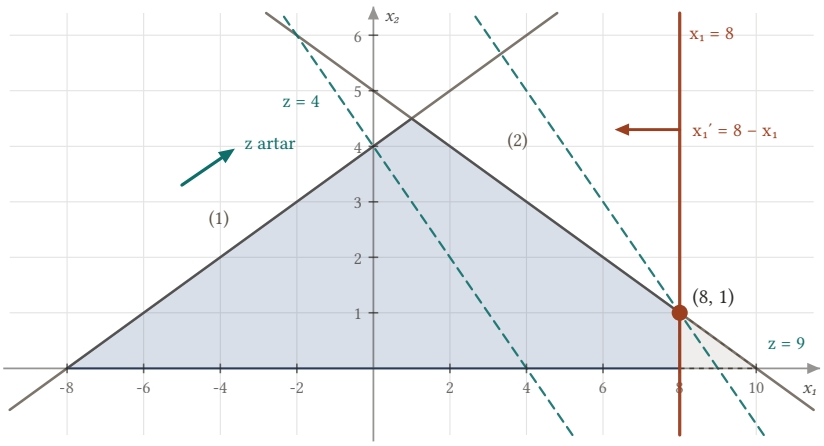
Bu, Önerme 9.1 önermesinin $t = s_j, \sigma = -1$ halidir. $x_j \leq s_j$ sınırı $s_j - x_j' \leq s_j$, yani $x_j' \geq 0$ olur ve işaret koşullarına eklenir; kısıtlara yeni satır eklenmez. x_j' sayısı, x_j'nin üst sınırına ne kadar uzak olduğunu ölçer. Özel olarak $x_j \leq 0$ biliniyorsa $s_j = 0$ alınır ve dönüşüm $x_j = -x_j'$ olur.

Örnek 9.1 (Üstten sınırlı bir değişken). Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz. (x_1 için yalnız üst sınır verilmiştir.)

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1 \leq 8, \quad x_2 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.



Şekil 9.1: Uygun bölge (−8, 0), (8, 0), (8, 1), (1, 4,5) köşeli dörtgendir. $x_1 \le 8$ sınırı, (1) $-x_1 + 2x_2 = 8$, (2) $x_1 + 2x_2 = 10$ doğrularının $x_2 = 0$ ile oluşturduğu üçgenden sağdaki küçük üçgeni (kesikli) atar. Yeni değişken $x_1' = 8 - x_1$, $x_1 = 8$ doğrusunda sıfırdır ve sola doğru artar. Kesikli doğrular $z = x_1 + x_2 = 4$ ve $z = 9$ seviye doğrularıdır; maksimum (8, 1) köşesinde, sınırın üstünde alınır.

Dönüşüm. x_1 değişkeni $x_1 \le 8$ biçiminde pozitif bir sayıyla üstten sınırlıdır ve işaret koşulu yoktur. Bu nedenle

$$x_1 \le 8 \Rightarrow 0 \le 8 - x_1 = x_1' \Rightarrow x_1 = -x_1' + 8$$

dönüşümünü yapar, $x_1' \ge 0$ koşulunu işaret koşullarına ekleriz. x_1 yerine $-x_1' + 8$ yazınca problem

$$\begin{aligned} -(-x_1' + 8) + 2x_2 &\le 8 \\ -x_1' + 8 + 2x_2 &\le 10 \\ x_1', x_2 &\ge 0 \\ \max z &= -x_1' + 8 + x_2 \end{aligned}$$

olur. Parantezi açıp sabitleri sağa atarsak

$$\begin{aligned} x_1' + 2x_2 &\le 16 \\ -x_1' + 2x_2 &\le 2 \\ x_1', x_2 &\ge 0 \\ \max z &= -x_1' + x_2 + 8 \end{aligned}$$

problemine ulaşırız. $x_1 \le 8$ sınırı artık $x_1' \ge 0$ koşulunun içindedir; ayrı bir satır gerekmez. Amaçtaki 8 sabittir; simpleks yöntemle $z' = -x_1' + x_2$'yi maksimum yapacağız.

Standart form. İki $\le$ kısıta x_3 ve x_4 aylak değişkenlerini ekleriz. Orijinal problemde iki değişken olduğu için aylak değişkenler x_3 ile başlar; x_1' yeni numara almaz:

$$\begin{aligned} x_1' + 2x_2 + x_3 &= 16 \\ -x_1' + 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1', x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \\ \max z &= -x_1' + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 8 \end{aligned}$$

Bütün kısıtlar eşitlik, sağ taraflar 16 ve 2 negatif değil, bütün değişkenler ≥ 0; problem standart formdadır.

Çözülebilir hal. v_3 ve v_4 sütunları 2×2 birim matrisi oluşturur. Demek ki standart form zaten simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir (Tanım 1.9); yapay değişken gerekmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Başlangıç tablosu. Başlangıç bazı $B_0 = (v_3, v_4)$, başlangıç çözümü $x_3 = 16$, $x_4 = 2$ ve $z_0 = 0$'dır. $\vec{c}_B = \vec{0}$ olduğundan $z_j - c_j = -c_j$'dir (Önerme 4.3): v_1' için 1, v_2 için -1.
Maksimum probleminde en negatif $z_j - c_j$ baza girer; bütün $z_j - c_j \geq 0$ olunca optimal çözüme ulaşılmıştır. Tek negatif kriter -1 olduğundan v_2 baza girer. Oranlar $16/2 = 8$ ve $2/2 = 1$'dir; en küçüğü x_4 satırında olduğundan v_4 bazdan çıkar ve pivot 2'dir.

Tablo 9.2: Başlangıç tablosu

		c_j	-1	1	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	16	1	2	1	0	$\frac{16}{2}$
x_4	0	2	-1	$[2]$	0	1	$\frac{2}{2} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	1	$-1 \Uparrow$	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 2'ye bölünür ve $c_B = 1$ ile x_2 satırı olur: $\left(1 \mid -\frac{1}{2}, 1, 0, \frac{1}{2} \right)$. x_3 satırından bu satırın 2 katı çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına bu satır bir kez eklenir:

$$x_3 : (16 - 2 \mid 1 + 1, 0, 1, 0 - 1) = (14 \mid 2, 0, 1, -1),$$
$$z_j - c_j : \left(0 + 1 \,\middle|\, 1 - \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2} \right) = \left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2} \right).$$

Tablo 9.3: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	-1	1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_2	v_3	v_4
x_3	0	14	2	0	1	-1
x_2	1	1	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 1$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$

Simpleks kriterleri arasında negatif olan kalmadı; bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan Sonuç 4.3 gereği optimal çözüme ulaşıldı (Tablo 9.3).
Geri dönüş. Tablodan $x_3 = 14$, $x_2 = 1$ okunur; baz dışındaki x_1' ve x_4 sıfırdır. Orijinal değişkene dönersek $x_1' = 8 - x_1 = 0$, yani $x_1 = 8$ olur. Tablodaki $z_0 = 1$ değeri z''nün değeridir; ayrı tuttuğumuz sabiti ekleriz:

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8, 1, 14, 0), \qquad \max z = 1 + 8 = 9.$$

Sağlama: $-8 + 2 \cdot 1 = -6 \leq 8$ olup birinci kısıtta $8 - (-6) = 14 = x_3$ birim boşluk kalır; $8 + 2 \cdot 1 = 10$ olduğundan ikinci kısıt eşitlikle sağlanır ($x_4 = 0$); amaç değeri $8 + 1 = 9$'dur. Dönüşüm kısıtların sol tarafını yalnız bir sabit kadar kaydırdığından aylak değişkenlerin değeri iki problemde aynıdır.
$x_1' = 0$ olması, optimumda x_1'in tam üst sınırında durduğunu söyler: sınır **etkindir**. Uygun bölgenin köşeleri $(-8, 0)$, $(8, 0)$, $(8, 1)$ ve $(1, \frac{9}{2})$'dir; amaç değerleri sırasıyla $-8, 8, 9$ ve $\frac{11}{2}$ olduğundan en büyüğü gerçekten $(8, 1)$ köşesindeki 9'dur.
■

9.5 Negatif Olmayan ve Üstten Sınırlı Değişken

İkinci durumda değişken hem negatif değildir hem de üstten sınırlıdır: $0 \leq x_j \leq s_j$. Burada dönüşüm yapılmaz. $x_j \leq s_j$ eşitsizliği bir satır olarak kısıtlara, $x_j \geq 0$ eşitsizliği ise işaret koşullarına yazılır.

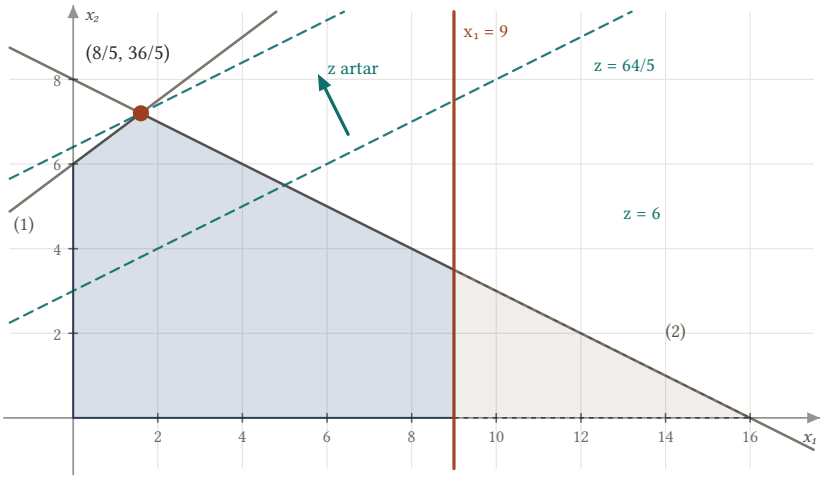
 CC BY-NC-SA 4.0

Neden dönüşüm yapmıyoruz? $x_j = -x'_j + s_j$ yansıtmasını yapsaydık $x_j \le s_j$ sınırı $x'_j \ge 0$ olurdu, ama bu kez $x_j \ge 0$ koşulu $x'_j \le s_j$ satırına dönüşürdü. İki sınırdan biri her halükârda satır olarak kalır; dönüşüm yalnız işi uzatır. Üstelik $s_j \ge 0$ olduğundan $x_j \le s_j$ satırı sağ tarafı negatif olmayan bir $\le$ kısıtıdır; ona eklenen aylak değişken başlangıç bazına kendiliğinden girer ve yapay değişken gerekmez.

Örnek 9.2 (Negatif olmayan ve üstten sınırlı bir değişken). Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz.

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ x_1 + 2x_2 &\le 16 \\ 0 \le x_1 \le 9, \quad x_2 &\ge 0 \\ \max z &= -x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.



Şekil 9.2: Uygun bölge (0, 0), (9, 0), (9, 7/2), (8/5, 36/5), (0, 6) köşeli beşgendir. $x_1 \le 9$ sınırı, sınır olmasaydı bölgeye katılacak (9, 0), (16, 0), (9, 7/2) üçgenini (kesikli) atar. Kesikli doğrular $z = -x_1 + 2x_2 = 6$ ve $z = 64/5$ seviye doğrularıdır; maksimum (8/5, 36/5) köşesinde alınır ve orada sınır etkin değildir. (1) $-3x_1 + 4x_2 = 24$, (2) $x_1 + 2x_2 = 16$.

Sınır satırı. x_1 değişkeni $0 \le x_1 \le 9$ biçiminde sınırlıdır. $x_1 \le 9$ eşitsizliğini üçüncü kısıt olarak yazar, $x_1 \ge 0$ eşitsizliğini işaret koşullarında bırakırız:

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ x_1 + 2x_2 &\le 16 \\ x_1 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max z &= -x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Değişken değiştirmediğimiz için amaçta sabit terim yoktur.
Standart form. Üç $\le$ kısıta sırasıyla x_3, x_4, x_5 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 24 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 16 \\ x_1 + x_5 &= 9 \\ x_j \ge 0, \quad j &= \overline{1,5} \\ \max z &= -x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \end{aligned}$$

Bütün kısıtlar eşitlik, sağ taraflar negatif değil, bütün değişkenler ≥ 0; problem standart formdadır. x_5, sınırın aylak değişkenidir: x_1'in üst sınırına ne kadar uzak olduğunu ölçer.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözülebilir hal. v_3, v_4, v_5 sütunları 3×3 birim matrisi oluşturur; standart form simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir.
Başlangıç tablosu. $B_0 = (v_3, v_4, v_5)$, $z_0 = 0$ ve $z_j - c_j = -c_j$'dir: v_1 için 1, v_2 için -2. Maksimum probleminde en negatif kriter girer; tek negatif kriter -2 olduğundan v_2 baza girer. x_5 satırının v_2 sütunundaki elemanı 0 olduğundan bu satır oran testine girmez. Oranlar $24/4 = 6$ ve $16/2 = 8$'dir; v_3 bazdan çıkar ve pivot 4'tür.

Tablo 9.4: Başlangıç tablosu

		c_j	-1	2	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_3	0	24	-3	$[4]$	1	0	0	$\frac{24}{4} \Rightarrow$
x_4	0	16	1	2	0	1	0	$\frac{16}{2}$
x_5	0	9	1	0	0	0	1	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	1	$-2 \Uparrow$	0	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 4'e bölünür ve $c_B = 2$ ile x_2 satırı olur: $\left(\, 6 \mid -\frac{3}{4}, 1, \frac{1}{4}, 0, 0 \, \right)$. x_4 satırından bu satırın 2 katı çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına 2 katı eklenir; x_5 satırı değişmez:

$$\begin{aligned} x_4 : &\left(\, 16 - 12 \,\middle|\, 1 + \frac{3}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1, 0 \, \right) \\ &= \left(\, 4 \,\middle|\, \frac{5}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1, 0 \, \right), \\ z_j - c_j : &\left(\, 0 + 12 \,\middle|\, 1 - \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0 \, \right) \\ &= \left(\, 12 \,\middle|\, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0 \, \right). \end{aligned}$$

Tek negatif kriter $-\frac{1}{2}$ olduğundan v_1 baza girer. x_2 satırının elemanı $-\frac{3}{4} < 0$ olduğundan bu satır teste girmez. Oranlar $4/\frac{5}{2} = \frac{8}{5}$ ve $9/1 = 9$'dur; v_4 bazdan çıkar ve pivot $\frac{5}{2}$'dir.

Tablo 9.5: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	-1	2	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_2	2	6	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$-$
x_4	0	4	$\left[\frac{5}{2}\right]$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{4}{5/2} \Rightarrow$
x_5	0	9	1	0	0	0	1	$\frac{9}{1}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 12$	$-\frac{1}{2} \Uparrow$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	

İkinci iterasyon. Pivot satırı $\frac{5}{2}$'ye bölünür, yani $\frac{2}{5}$ ile çarpılır ve $c_B = -1$ ile x_1 satırı olur: $\left(\, \frac{8}{5} \mid 1, 0, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0 \, \right)$. x_2 satırına bu satırın $\frac{3}{4}$ katı, $z_j - c_j$ satırına $\frac{1}{2}$ katı eklenir; x_5 satırından bir kez çıkarılır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
x_2 &: \Big(6 + \frac{6}{5} \,\Big|\, 0, 1, \frac{1}{4} - \frac{3}{20}, \frac{3}{10}, 0 \Big) \\
&= \Big(\frac{36}{5} \,\Big|\, 0, 1, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, 0 \Big), \\
x_5 &: \Big(9 - \frac{8}{5} \,\Big|\, 0, 0, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1 \Big) = \Big(\frac{37}{5} \,\Big|\, 0, 0, \frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1 \Big), \\
z_j - c_j &: \Big(12 + \frac{4}{5} \,\Big|\, 0, 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 0 \Big) \\
&= \Big(\frac{64}{5} \,\Big|\, 0, 0, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, 0 \Big) .
\end{aligned}
$$

Tablo 9.6: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	-1	2	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_2	2	$\frac{36}{5}$	0	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0
x_1	-1	$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
x_5	0	$\frac{37}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{64}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0

Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan tablo optimaldir (Tablo 9.6). Optimal çözüm

$$X^* = (x_1, \ldots, x_5) = \Big(\frac{8}{5}, \frac{36}{5}, 0, 0, \frac{37}{5} \Big), \qquad \max z = \frac{64}{5}$$

olarak bulunur. Sağlama: $-3 \cdot \frac{8}{5} + 4 \cdot \frac{36}{5} = \frac{120}{5} = 24$ ve $\frac{8}{5} + 2 \cdot \frac{36}{5} = \frac{80}{5} = 16$; iki kısıt da eşitlikle sağlanır. Amaç değeri $-\frac{8}{5} + \frac{72}{5} = \frac{64}{5}$'tir.
Bu kez sınır **etkin değildir**: sınırın aylak değişkeni $x_5 = \frac{37}{5}$ bazdadır ve pozitiftir, yani $x_1 = \frac{8}{5}$ üst sınır 9'a $\frac{37}{5}$ birim uzaktır. Sınır satırı tabloyu bir satır ve bir sütun büyüttü ama optimumu etkilemedi; hangi sınırın etkin olacağı ise çözmeden önce bilinemez. Uygun bölgenin köşeleri $(0,0)$, $(9,0)$, $(9, \frac{7}{2})$, $(\frac{8}{5}, \frac{36}{5})$, $(0,6)$'dır ve amaç değerleri 0, -9, -2, $\frac{64}{5}$, 12 olduğundan en büyüğü simpleks yöntemin bulduğu değerdir.
■

9.6 İki Yanlı Sınırlı Değişken

Üçüncü durumda alt sınır sıfır olmak zorunda değildir: $d_j \leq x_j \leq s_j$. Önce alt sınırı 0'a ötelemek, sonra kalan üst sınırı ikinci durumdaki gibi satır olarak yazmak gerekir:

$$d_j \leq x_j \leq s_j \Rightarrow 0 \leq x_j - d_j = x'_j \leq s_j - d_j \Rightarrow x_j = x'_j + d_j.$$

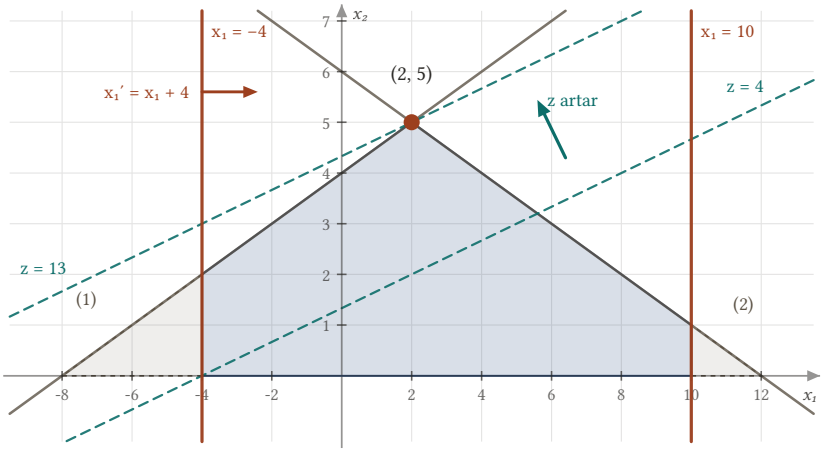
Bu, Önerme 9.1 önermesinin $t = d_j$, $\sigma = 1$ halidir. İki yanlı sınır $0 \leq x'_j \leq s_j - d_j$ olur: $x'_j \leq s_j - d_j$ bir satır olarak kısıtlara, $x'_j \geq 0$ ise işaret koşullarına eklenir. $d_j \leq s_j$ olduğundan yeni satırın sağ tarafı negatif değildir. x'_j sayısı, x_j'nin alt sınırından ne kadar yukarıda olduğunu ölçer.

Örnek 9.3 (İki yanlı sınırlı bir değişken). Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz.

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\
-4 \leq x_1 \leq 10, \quad x_2 &\geq 0 \\
\max z &= -x_1 + 3x_2
\end{aligned}
$$

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.3: Uygun bölge (−4, 0), (10, 0), (10, 1), (2, 5), (−4, 2) köşeli beşgendir. $-4 \le x_1 \le 10$ sınırları, (1) $-x_1 + 2x_2 = 8$ ve (2) $x_1 + 2x_2 = 12$ doğrularıyla $x_2 = 0$'ın oluşturduğu üçgenin iki ucundan birer küçük üçgen (kesikli) atar. Yeni değişken $x_1' = x_1 + 4$, $x_1 = -4$ doğrusundan başlayarak ölçülür. Kesikli doğrular $z = -x_1 + 3x_2 = 4$ ve $z = 13$ seviye doğrularıdır; maksimum (2, 5) köşesinde alınır.

Dönüşüm. x_1 değişkeni $-4 \le x_1 \le 10$ biçiminde iki yanlı sınırlıdır. Alt sınırı 0'a ötelemek için

$$-4 \le x_1 \le 10 \Rightarrow 0 \le x_1 + 4 = x_1' \le 10 + 4 \Rightarrow x_1 = x_1' - 4$$

dönüşümünü yaparız. x_1 yerine $x_1' - 4$ yazınca problem

$$\begin{aligned} -(x_1' - 4) + 2x_2 &\le 8 \\ x_1' - 4 + 2x_2 &\le 12 \\ x_1' &\le 14 \\ x_1', x_2 &\ge 0 \\ \max z &= -(x_1' - 4) + 3x_2 \end{aligned}$$

olur; üçüncü satır, sınırın kalan yarısıdır. Parantezleri açıp sabitleri sağa atarsak

$$\begin{aligned} -x_1' + 2x_2 &\le 4 \\ x_1' + 2x_2 &\le 16 \\ x_1' &\le 14 \\ x_1', x_2 &\ge 0 \\ \max z &= -x_1' + 3x_2 + 4 \end{aligned}$$

problemine ulaşırız. Amaçtaki 4 sabittir; $z' = -x_1' + 3x_2$'yi maksimum yapacağız.
Standart form. Üç $\le$ kısıta sırasıyla x_3, x_4, x_5 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} -x_1' + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1' + 2x_2 + x_4 &= 16 \\ x_1' + x_5 &= 14 \\ x_1', x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \\ \max z &= -x_1' + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 4 \end{aligned}$$

Sağ taraflar 4, 16, 14 negatif değildir; problem standart formdadır.
Çözülebilir hal. v_3, v_4, v_5 sütunları 3×3 birim matrisi oluşturur; standart form simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir.

Başlangıç tablosu. $B_0 = (v_3, v_4, v_5)$, $z_0 = 0$ ve $z_j - c_j = -c_j$'dir: v_1' için 1, v_2 için -3. Maksimum probleminde en negatif kriter girer; bütün kriterler ≥ 0 olunca durulur. v_2 baza girer. x_5 satırının elemanı 0 olduğundan oranlar yalnız $4/2 = 2$ ve $16/2 = 8$'dir; v_3 bazdan çıkar ve pivot 2'dir.

Tablo 9.7: Başlangıç tablosu

		c_j	-1	3	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_3	0	4	-1	$[2]$	1	0	0	$\frac{4}{2} \Rightarrow$
x_4	0	16	1	2	0	1	0	$\frac{16}{2}$
x_5	0	14	1	0	0	0	1	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	1	$-3 \Uparrow$	0	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 2'ye bölünür ve $c_B = 3$ ile x_2 satırı olur: $\left(2 \mid -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, 0 \right)$. x_4 satırından bu satırın 2 katı çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına 3 katı eklenir; x_5 satırı değişmez:

$$\begin{aligned} x_4 &: (16 - 4 \mid 1 + 1, 0, -1, 1, 0) = (12 \mid 2, 0, -1, 1, 0), \\ z_j - c_j &: \left(0 + 6 \,\middle|\, 1 - \frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0 \right) \\ &= \left(6 \,\middle|\, -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

Tek negatif kriter $-\frac{1}{2}$ olduğundan v_1' baza girer. x_2 satırının elemanı negatif olduğundan oranlar $12/2 = 6$ ve $14/1 = 14$'tür; v_4 bazdan çıkar ve pivot 2'dir.

Tablo 9.8: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	-1	3	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_2	3	2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-$
x_4	0	12	$[2]$	0	-1	1	0	$\frac{12}{2} \Rightarrow$
x_5	0	14	1	0	0	0	1	$\frac{14}{1}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 6$	$-\frac{1}{2} \Uparrow$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	

İkinci iterasyon. Pivot satırı 2'ye bölünür ve $c_B = -1$ ile x_1' satırı olur: $\left(6 \mid 1, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$. x_2 satırına bu satırın $\frac{1}{2}$ katı, $z_j - c_j$ satırına $\frac{1}{2}$ katı eklenir; x_5 satırından bir kez çıkarılır:

$$\begin{aligned} x_2 &: \left(2 + 3 \,\middle|\, 0, 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right) = \left(5 \,\middle|\, 0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right), \\ x_5 &: \left(14 - 6 \,\middle|\, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) = \left(8 \,\middle|\, 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right), \\ z_j - c_j &: \left(6 + 3 \,\middle|\, 0, 0, \frac{3}{2} - \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right) = \left(9 \,\middle|\, 0, 0, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right). \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 9.9: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	-1	3	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_2	v_3	v_4	v_5
x_2	3	5	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
x_1'	-1	6	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_5	0	8	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 9$	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan tablo optimaldir (Tablo 9.9).
Geri dönüş. Tablodan $x_2 = 5$, $x_1' = 6$, $x_5 = 8$ okunur; $x_3 = x_4 = 0$'dır. $x_1' = x_1 + 4$ bağıntısından $6 = x_1 + 4$, yani $x_1 = 2$ bulunur. Tablodaki $z_0 = 9$'a ayrı tuttuğumuz sabiti ekleriz:

$$X^* = (x_1, \ldots, x_5) = (2, 5, 0, 0, 8), \qquad \max z = 9 + 4 = 13.$$

Sağlama: $-2 + 2 \cdot 5 = 8$ ve $2 + 2 \cdot 5 = 12$; iki kısıt da eşitlikle sağlanır. $-4 \leq 2 \leq 10$ olduğundan sınır da sağlanır ve amaç değeri $-2 + 15 = 13$'tür. $x_1' = 6$, x_1'in alt sınırından 6 birim yukarıda; $x_5 = 8$ de üst sınırından 8 birim aşağıda olduğunu söyler. Sınırın iki yanı da etkin değildir.
Uygun bölgenin köşeleri $(-4, 0)$, $(10, 0)$, $(10, 1)$, $(2, 5)$, $(-4, 2)$'dir; amaç değerleri 4, -10, -7, 13, 10 olduğundan en büyüğü $(2, 5)$ köşesindeki 13'tür.
■

9.7 Alttan Sınırlı Değişken

Son durumda değişkenin yalnız bir alt sınırı vardır: $x_j \geq d_j$. Öteleme bu sınırı doğrudan negatif olmama koşuluna çevirir:

$$x_j \geq d_j \Rightarrow 0 \leq x_j - d_j = x_j' \Rightarrow x_j = x_j' + d_j.$$

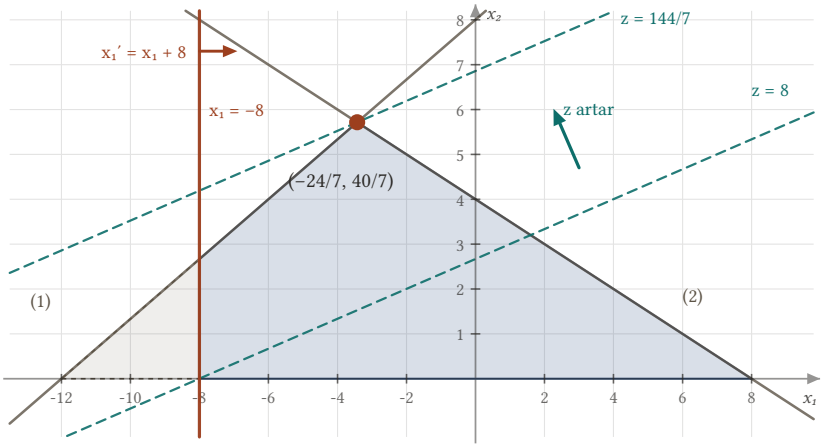
$x_j' \geq 0$ işaret koşullarına eklenir; üst sınır olmadığı için satır eklenmez. $d_j = 0$ ise hiçbir şey yapmaya gerek yoktur. $d_j < 0$ olduğunda x_j negatif değerler de alabilir, ama işaret kısıtlaması olmayan bir değişkenin aksine tek bir yeni değişken yeter. $d_j > 0$ olduğunda ise öteleme, satır olarak yazılsa artık ve yapay değişken isteyecek bir $\geq$ kısıtından bizi kurtarır.

Örnek 9.4 (Alttan sınırlı bir değişken). Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1 \geq -8, \quad x_2 &\geq 0 \\ \max z &= -x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.4: Uygun bölge (−8, 0), (8, 0), (−24/7, 40/7), (−8, 8/3) köşeli dörtgendir. $x_1 \geq -8$ sınırı, sınır olmasaydı bölgeye katılacak (−12, 0), (−8, 0), (−8, 8/3) üçgenini (kesikli) atar. Yeni değişken $x_1' = x_1 + 8$, $x_1 = -8$ doğrusundan başlayarak ölçülür. Kesikli doğrular $z = -x_1 + 3x_2 = 8$ ve $z = 144/7$ seviye doğrularıdır; maksimum (−24/7, 40/7) köşesinde alınır. (1) $-2x_1 + 3x_2 = 24$, (2) $x_1 + 2x_2 = 8$.

Dönüşüm. x_1 değişkeni $x_1 \geq -8$ biçiminde alttan sınırlıdır. Bu nedenle

$$x_1 \geq -8 \Rightarrow 0 \leq x_1 + 8 = x_1' \Rightarrow x_1 = x_1' - 8$$

dönüşümünü yaparız. x_1 yerine $x_1' - 8$ yazınca problem

$$\begin{aligned} -2(x_1' - 8) + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1' - 8 + 2x_2 &\leq 8 \\ x_1', x_2 &\geq 0 \\ \max z &= -(x_1' - 8) + 3x_2 \end{aligned}$$

olur. Parantezleri açıp sabitleri sağa atarsak

$$\begin{aligned} -2x_1' + 3x_2 &\leq 8 \\ x_1' + 2x_2 &\leq 16 \\ x_1', x_2 &\geq 0 \\ \max z &= -x_1' + 3x_2 + 8 \end{aligned}$$

problemine ulaşırız. Amaçtaki 8 sabittir; $z' = -x_1' + 3x_2$'yi maksimum yapacağız.
Standart form. İki $\leq$ kısıta x_3 ve x_4 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} -2x_1' + 3x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1' + 2x_2 + x_4 &= 16 \\ x_1', x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \max z &= -x_1' + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 8 \end{aligned}$$

Sağ taraflar 8 ve 16 negatif değildir; problem standart formdadır.
Çözülebilir hal. v_3 ve v_4 sütunları 2×2 birim matrisi oluşturur; standart form simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir.
Başlangıç tablosu. $B_0 = (v_3, v_4)$, $z_0 = 0$ ve $z_j - c_j = -c_j$'dir: v_1' için 1, v_2 için -3. Maksimum probleminde en negatif kriter girer; v_2 baza girer. Oranlar $8/3$ ve $16/2 = 8$'dir; $\frac{8}{3} < 8$ olduğundan v_3 bazdan çıkar ve pivot 3'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 9.10: Başlangıç tablosu

		c_j	-1	3	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	8	-2	$[3]$	1	0	$\frac{8}{3} \Rightarrow$
x_4	0	16	1	2	0	1	$\frac{16}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	1	$-3 \Uparrow$	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 3'e bölünür ve $c_B = 3$ ile x_2 satırı olur: $\left(\frac{8}{3} \mid -\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0 \right)$. x_4 satırından bu satırın 2 katı çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına 3 katı eklenir:

$$x_4 : \left(16 - \frac{16}{3} \,\middle|\, 1 + \frac{4}{3}, 0, -\frac{2}{3}, 1 \right) = \left(\frac{32}{3} \,\middle|\, \frac{7}{3}, 0, -\frac{2}{3}, 1 \right),$$
$$z_j - c_j : (0 + 8 \mid 1 - 2, 0, 1, 0) = (8 \mid -1, 0, 1, 0).$$

Tek negatif kriter -1 olduğundan v_1' baza girer. x_2 satırının elemanı $-\frac{2}{3} < 0$ olduğundan tek oran

$$\frac{32/3}{7/3} = \frac{32}{7}$$

olur; v_4 bazdan çıkar ve pivot $\frac{7}{3}$'tür.

Tablo 9.11: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	-1	3	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_2	v_3	v_4	Oran
x_2	3	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$-$
x_4	0	$\frac{32}{3}$	$\left[\frac{7}{3}\right]$	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{32/3}{7/3} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 8$	$-1 \Uparrow$	0	1	0	

İkinci iterasyon. Pivot satırı $\frac{7}{3}$'e bölünür, yani $\frac{3}{7}$ ile çarpılır ve $c_B = -1$ ile x_1' satırı olur: $\left(\frac{32}{7} \mid 1, 0, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7} \right)$. x_2 satırına bu satırın $\frac{2}{3}$ katı, $z_j - c_j$ satırına bir katı eklenir:

$$x_2 : \left(\frac{8}{3} + \frac{64}{21} \,\middle|\, 0, 1, \frac{1}{3} - \frac{4}{21}, \frac{2}{7} \right) = \left(\frac{40}{7} \,\middle|\, 0, 1, \frac{1}{7}, \frac{2}{7} \right),$$
$$z_j - c_j : \left(8 + \frac{32}{7} \,\middle|\, 0, 0, 1 - \frac{2}{7}, \frac{3}{7} \right) = \left(\frac{88}{7} \,\middle|\, 0, 0, \frac{5}{7}, \frac{3}{7} \right).$$

Tablo 9.12: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	-1	3	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_2	v_3	v_4
x_2	3	$\frac{40}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$
x_1'	-1	$\frac{32}{7}$	1	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{88}{7}$	0	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{7}$

Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan tablo optimaldir (Tablo 9.12).

 CC BY-NC-SA 4.0

Geri dönüş. Tablodan $x_2 = \frac{40}{7}$, $x_1' = \frac{32}{7}$ okunur; $x_3 = x_4 = 0$'dır. Orijinal değişkene dönersek

$$x_1 = x_1' - 8 = \frac{32}{7} - 8 = -\frac{24}{7}$$

olur. Tablodaki $z_0 = \frac{88}{7}$'ye ayrı tuttuğumuz sabiti ekleriz:

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \Big(-\frac{24}{7}, \frac{40}{7}, 0, 0\Big), \qquad \max z = \frac{88}{7} + 8 = \frac{144}{7}.$$

Sağlama: birinci kısıtın sol tarafı $\frac{48}{7} + \frac{120}{7} = 24$, ikincisininki $-\frac{24}{7} + \frac{80}{7} = 8$'dir; iki kısıt da eşitlikle sağlanır. $-\frac{24}{7} \geq -8$ olduğundan sınır da sağlanır ve amaç değeri $\frac{24}{7} + \frac{120}{7} = \frac{144}{7}$'dir. Optimumda x_1 negatiftir; alt sınır -8 bu değere izin verdiği için sorun yoktur.
Uygun bölgenin köşeleri $(-8, 0)$, $(8, 0)$, $\big(-\frac{24}{7}, \frac{40}{7}\big)$, $\big(-8, \frac{8}{3}\big)$'tür; amaç değerleri 8, -8, $\frac{144}{7}$, 16 olduğundan en büyüğü $\frac{144}{7}$'dir.
■

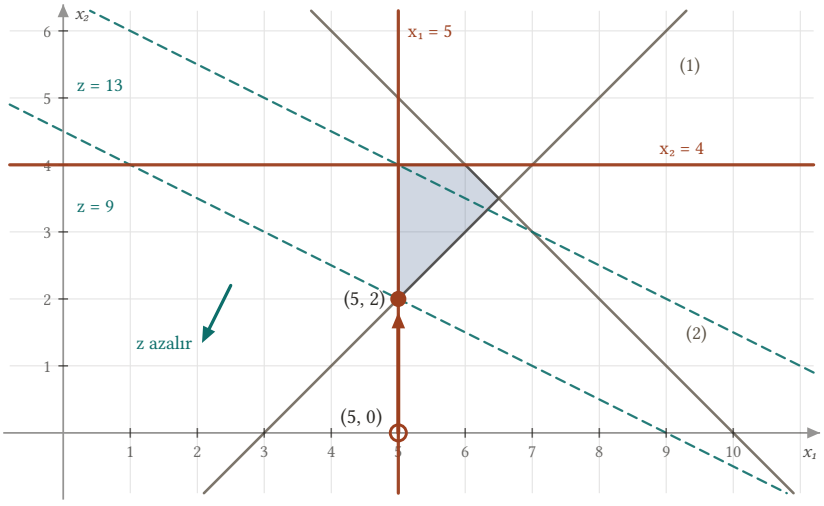
9.8 Birden Çok Sınırlı Değişken

Dönüşümler birbirinden bağımsızdır; bir problemde farklı türden birkaç sınırlı değişken bulunabilir. Aşağıdaki örnekte bir değişken alttan sınırlı, öteki ise negatif olmayan ve üstten sınırlıdır. Ötelemeden sonra bir kısıtın sağ tarafı negatif çıkacak ve bu yüzden yapay değişken gerekecek.

Örnek 9.5 (İki sınırlı değişkenli bir minimum problemi). Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 \geq 5, \quad 0 \leq x_2 &\leq 4 \\ \min z &= x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.



Şekil 9.5: Uygun bölge (5, 2), (5, 4), (6, 4), (13/2, 7/2) köşeli küçük dörtgendir; $x_1 \geq 5$ ve $x_2 \leq 4$ sınırları onun iki kenarını oluşturur. Başlangıç tablosunun çözümü $x_1' = x_2 = 0$, yani (5, 0) noktasıdır ve bölgenin dışındadır: (1) $x_1 - x_2 = 3$ kısıtı sağlanmaz, eksik kalan 2 birimi yapay değişken üstlenir. Tek iterasyon optimal (5, 2) köşesine gider. Kesikli doğrular $z = x_1 + 2x_2 = 9$ ve $z = 13$ seviye doğrularıdır. (2) $x_1 + x_2 = 10$.

Dönüşüm. x_1 alttan sınırlıdır: $x_1 \geq 5 \Rightarrow 0 \leq x_1 - 5 = x_1'$, yani $x_1 = x_1' + 5$. x_2 negatif olmayan ve üstten sınırlıdır; $x_2 \leq 4$ satır olarak kısıtlara eklenir. x_1 yerine $x_1' + 5$ yazınca

$$\begin{aligned} x_1' + 5 - x_2 &\leq 3 \\ x_1' + 5 + x_2 &\leq 10 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1', x_2 &\geq 0 \\ \min z &= x_1' + 5 + 2x_2 \end{aligned}$$

olur. Sabitleri sağa atınca birinci kısıt $x_1' - x_2 \leq -2$ olur ve sağ tarafı negatiftir. Standart form $b_i \geq 0$ istediği için bu kısıtı -1 ile çarparız; eşitsizliğin yönü döner:

$$\begin{aligned} -x_1' + x_2 &\geq 2 \\ x_1' + x_2 &\leq 5 \\ x_2 &\leq 4 \\ x_1', x_2 &\geq 0 \\ \min z &= x_1' + 2x_2 + 5 \end{aligned}$$

Amaçtaki 5 sabittir; $z' = x_1' + 2x_2$'yi minimum yapacağız.
Standart form. Birinci kısıt $\geq$ olduğundan x_3 artık değişkenini çıkarır, diğer iki $\leq$ kısıta x_4 ve x_5 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} -x_1' + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1' + x_2 + x_4 &= 5 \\ x_2 + x_5 &= 4 \\ x_1', x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \\ \min z &= x_1' + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 5 \end{aligned}$$

Çözülebilir hal. v_4 ve v_5 ikinci ve üçüncü denklemin birim sütunlarıdır. Birinci denklemde ise x_3'ün katsayısı -1'dir. Standart form birim matris içermediği için henüz simpleks yöntem ile çözülebilir halde değildir. Birinci denkleme x_{u_1} yapay değişkenini (Tanım 1.10) ekleriz; minimum problemi olduğundan amaç katsayısı $+M$'dir:

$$\begin{aligned} -x_1' + x_2 - x_3 + x_{u_1} &= 2 \\ x_1' + x_2 + x_4 &= 5 \\ x_2 + x_5 &= 4 \\ x_1', x_2, x_3, x_4, x_5, x_{u_1} &\geq 0 \\ \min z &= x_1' + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ &\quad + 0x_5 + Mx_{u_1} + 5 \end{aligned}$$

Artık v_{u_1}, v_4, v_5 sütunları 3×3 birim matrisi oluşturur ve problemi Büyük M yöntemi ile çözeriz.
Başlangıç tablosu. $B_0 = (v_{u_1}, v_4, v_5)$, $\vec{c}_B = (M, 0, 0)$ ve başlangıç çözümü $x_{u_1} = 2$, $x_4 = 5$, $x_5 = 4$'tür. Her sütun için c_B sütunuyla karşılıklı çarpımları toplayıp c_j'yi çıkarırız:

$$\begin{aligned} v_1' &: M \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1 = -M - 1, \\ v_2 &: M \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 2 = M - 2, \\ v_3 &: M \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = -M, \\ z_0 &: M \cdot 2 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 4 = 2M. \end{aligned}$$

Minimum probleminde en büyük pozitif $z_j - c_j$ baza girer; bütün $z_j - c_j \leq 0$ olunca optimal çözüme ulaşılmıştır. M çok büyük olduğundan (Önerme 5.2) tek pozitif kriter $M - 2$'dir ve v_2 baza girer. Oranlar $2/1$, $5/1$, $4/1$'dir; en küçüğü x_{u_1} satırındadır, v_{u_1} bazdan çıkar ve pivot 1'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 9.13: Başlangıç tablosu

		c_j	1	2	0	0	0	M	
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_2	v_3	v_4	v_5	v_{u_1}	Oran
x_{u_1}	M	2	-1	[1]	-1	0	0	1	$\frac{2}{1} \Rightarrow$
x_4	0	5	1	1	0	1	0	0	$\frac{5}{1}$
x_5	0	4	0	1	0	0	1	0	$\frac{4}{1}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 2M$	$-M - 1$	$M - 2 \Uparrow$	$-M$	0	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot 1 olduğundan pivot satırı aynen kalır ve $c_B = 2$ ile x_2 satırı olur: $(2 \mid -1, 1, -1, 0, 0)$. x_{u_1} bazdan çıktığı için v_{u_1} sütunu artık yazılmaz. x_4 ve x_5 satırlarının pivot sütunundaki elemanları 1 olduğundan ikisinden de yeni satır bir kez çıkarılır:

$$x_4 : (5 - 2 \mid 1 + 1, 0, 0 + 1, 1, 0) = (3 \mid 2, 0, 1, 1, 0),$$
$$x_5 : (4 - 2 \mid 0 + 1, 0, 0 + 1, 0, 1) = (2 \mid 1, 0, 1, 0, 1).$$

Kriterleri yeni $\vec{c}_B = (2, 0, 0)$ ile hesaplayalım:

$$v_1' : 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 - 1 = -3,$$
$$v_3 : 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 - 0 = -2,$$
$$z_0 : 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 4.$$

Baz vektörleri v_2, v_4, v_5'in kriterleri 0'dır.

Tablo 9.14: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	1	2	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1'	v_2	v_3	v_4	v_5
x_2	2	2	-1	1	-1	0	0
x_4	0	3	2	0	1	1	0
x_5	0	2	1	0	1	0	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 4$	-3	0	-2	0	0

Pozitif kriter kalmadı ve bazda yapay değişken yok; Teorem 5.1 gereği tablo optimaldir (Tablo 9.14).
Geri dönüş. Tablodan $x_2 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 2$ okunur; $x_1' = x_3 = 0$'dır. $x_1 = x_1' + 5 = 5$ olur. Tablodaki $z_0 = 4$'e sabiti ekleriz:

$$X^* = (x_1, \ldots, x_5) = (5, 2, 0, 3, 2), \qquad \min z = 4 + 5 = 9.$$

Sağlama: $5 - 2 = 3$ olduğundan birinci kısıt eşitlikle sağlanır; $5 + 2 = 7 \le 10$ olup ikinci kısıtta $x_4 = 3$ birim, $x_2 = 2 \le 4$ olup sınır satırında $x_5 = 2$ birim boşluk kalır. Amaç değeri $5 + 2 \cdot 2 = 9$'dur. $x_1' = 0$ olduğundan x_1 alt sınırındadır: alt sınır etkindir.
Dönüşüm burada da işi kısalttı. $x_1 \ge 5$ sınırını satır olarak yazsaydık dört kısıtlı bir problem elde eder, o satır için de artık ve yapay değişken gerekirdi. Öteleme o satırı kaldırdı; bedeli, birinci kısıtın yön değiştirip yapay değişken istemesi oldu. Uygun bölgenin köşeleri $(5, 2)$, $(5, 4)$, $(6, 4)$, $\left(\frac{13}{2}, \frac{7}{2}\right)$'dir ve amaç değerleri 9, 13, 14, $\frac{27}{2}$ olduğundan en küçüğü gerçekten 9'dur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu bölümde değişkenlerin alt ve üst sınırlarını iki yolla ele aldık: alt sınırı ötelemeyle, yalnız üst sınırı yansıtmayla $x'_j \geq 0$ koşuluna çevirdik; hem alt hem üst sınır olduğunda ise sınırın bir yanını satır olarak kısıtlara ekledik. Önerme 9.1 bu dönüşümlerin uygun çözümleri birebir eşlediğini ve amacı yalnız bir sabit kadar kaydırdığını gösterdi; bu yüzden sonucu okurken dönüşümü tersine çevirmeyi ve amaçtaki sabiti eklemeyi unutmamak yeter. Bir sonraki bölümde, Duyarlılık analizi bölümünde, optimal çözümün problemin verilerindeki değişikliklere nasıl tepki verdiğini inceleyeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

10. Duyarlılık Analizi

Buraya kadar bir lineer programlama problemini hep sabit verilerle çözdük: amaç katsayıları c_j, kısıt katsayıları a_{ij} ve sağ taraflar b_i kesin olarak biliniyordu. Gerçek bir modelde bu sayılar çoğu zaman tahmindir. Bir ürünün kârı piyasaya göre değişir, eldeki hammadde miktarı bir sonraki ay farklı olabilir. O zaman doğal bir soru ortaya çıkar: Bulduğumuz optimal çözüm bu sayılardaki değişimlere ne kadar dayanıklıdır? Kâr biraz artarsa aynı üretim planı yine en iyisi midir? Hammadde azalırsa hangi değişkenler üretilmeye devam eder?
Bu soruları her seferinde problemi baştan çözerek cevaplamak gerekmez. Optimal tablo, değişimin etkisini okumak için gereken her şeyi zaten içerir. Bu bölümde önce optimal tablonun optimal bazın tersiyle nasıl doğrudan yazıldığını göreceğiz. Sonra amaç katsayılarındaki ve sağ taraf sabitlerindeki değişimlerin tabloda hangi sayıları etkilediğini bulup optimumluğu bozmayan değişim aralıklarını hesaplayacağız. Önceki bölümlerdeki simpleks yöntem (Simpleks yöntem, Büyük M yöntemi) burada başlangıç noktasıdır: duyarlılık analizi problem çözüldükten sonra yapılır.

10.1 Duyarlılık Analizi Nedir?

Önce neyi incelediğimizi kesinleştirelim.

Tanım 10.1 (Duyarlılık analizi). Bir lineer programlama probleminin optimal çözümünün, sağ taraf sabitlerinde (b_i) ve amaç fonksiyonu katsayılarında (c_j) meydana gelebilecek değişimler göz önüne alınarak incelenmesine **duyarlılık analizi** denir.

Yani duyarlılık analizinde problemi çözdükten sonra verilerden birini değiştiririz ve "optimal tablo ne kadar değişir?" diye sorarız. En sık sorulan soru bir aralık sorusudur: Bir c_j ya da bir b_i hangi aralıkta değişirse **optimumluk bozulmaz**, yani optimal tablonun bazı (temeldeki değişkenler) aynı kalır? Bu aralığa o sayının **değişim aralığı** diyeceğiz.
Bu bölümde iki tür değişimi inceleyeceğiz:

1. **Amaç fonksiyonu katsayılarındaki (c_j) değişim.** Burada da iki durum ayrılır: değişen katsayı temel dışı (bazda olmayan) bir değişkene ya da temelde olan (bazdaki) bir değişkene ait olabilir.
2. **Sağ taraf sabitlerindeki (b_i) değişim.**

Değişimlerin her birinde yalnız bir sayının değiştiğini, diğer bütün verilerin sabit kaldığını varsayacağız.

10.2 Optimal Tablonun B^{-1} ile Yazılması

Duyarlılık analizinin anahtarı şu gözlemdir: bir baz seçildiği anda o baza ait simpleks tablosunun her sayısı, bazın sütunlarından kurulan matrisin tersiyle hesaplanabilir. Simpleks iterasyonlarını tekrar yapmaya gerek kalmaz.
Problemin standart formu (Tanım 1.7)

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \vec{b} \\ \vec{x} &\geq 0 \\ \max \text{ (ya da } \min) \; z &= \vec{c}^{\,T}\vec{x} \end{aligned}$$

olsun. A'nın sütunları $v_1, \ldots, v_n$, sağ taraf vektörü $v_0 = \vec{b}$'dir.

Tanım 10.2 (Baz matrisi). Bir simpleks tablosunun x_B sütununda yukarıdan aşağı $x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{B_m}$ değişkenleri bulunsun. Standart formun bu değişkenlere ait $v_{B_1}, \ldots, v_{B_m}$ sütunlarını **aynı sırayla** yan yana yazarak elde edilen $m \times m$ matrise tablonun **baz matrisi** denir ve B ile gösterilir:

$$B = \begin{bmatrix} v_{B_1} & v_{B_2} & \cdots & v_{B_m} \end{bmatrix}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Baz maliyetleri de aynı sırayla $\vec{c}_B = (c_{B_1}, ..., c_{B_m})^T$ vektörünü oluşturur.

Yani B, temel değişkenlerin **ilk baştaki** (standart formdaki) katsayılar matrisidir. Tablodaki y_{ij} değerlerinden değil, problemin kendi katsayılarından kurulur. Baz vektörleri lineer bağımsız olduğundan B'nin tersi vardır. Sütunların sırası tablonun satır sırasını izler; sıra değişirse B^{-1}'in satırları da aynı biçimde yer değiştirir.

Teorem 10.1 (Tablonun B^{-1} ile hesabı). *Baz matrisi B olan simpleks tablosunda*

1. *tablonun v_j sütunu $\vec{y}_j = B^{-1}v_j$ $(j = 1, ..., n)$ ve v_0 sütunu $B^{-1}\vec{b}$'dir;*
2. *simpleks kriterleri $z_j - c_j = \vec{c}_B^T B^{-1} v_j - c_j$, amaç değeri $z_0 = \vec{c}_B^T B^{-1}\vec{b}$'dir.*

> ***İspat.***
> ***1.*** *Tablonun v_j sütunundaki $y_{1j}, ..., y_{mj}$ sayıları, v_j'nin baz vektörleri cinsinden yazılışının katsayılarıdır (Simpleks yöntem bölümündeki tanım):*
>
> $$v_j = y_{1j}v_{B_1} + y_{2j}v_{B_2} + ... + y_{mj}v_{B_m}.$$
>
> *Sağ taraf, sütunları v_{B_i} olan B matrisinin $\vec{y}_j = (y_{1j}, ..., y_{mj})^T$ vektörüyle çarpımıdır; yani eşitlik $v_j = B\vec{y}_j$ demektir. B tersinir olduğundan iki yanı soldan B^{-1} ile çarparak $\vec{y}_j = B^{-1}v_j$ buluruz. Aynı akıl yürütme $j = 0$ için $v_0 = \vec{b}$'ye uygulanır ve v_0 sütunu $B^{-1}\vec{b}$ olur.*
> ***2.*** *Tanım gereği $z_j = \vec{c}_B^T\vec{y}_j$ ve $z_0 = \vec{c}_B^T\vec{y}_0$'dır. Birinci kısımdaki ifadeleri yerine koymak yeter.* ■

Yani optimal baz bir kez bilindiğinde tablonun **gövdesi** (v_0 sütunu ve bütün y_{ij}'ler) yalnız B^{-1}, A ve $\vec{b}$'ye; **son satırı** ise bunlara ek olarak amaç katsayılarına bağlıdır. Duyarlılık analizinin bütün hesapları bu ayrıma dayanır.
B^{-1}'i her seferinde ayrıca hesaplamak da gerekmeyebilir; çoğu zaman tablonun içinde hazır durur.

Önerme 10.1 (B^{-1} tablonun içinde). *Standart formda $v_{k_1}, ..., v_{k_m}$ sütunları sırasıyla $m \times m$ birim matrisin $e_1, ..., e_m$ sütunları olsun (örneğin $\leq$ kısıtların aylak değişkenlerinin sütunları). Bu durumda herhangi bir tabloda $v_{k_1}, ..., v_{k_m}$ sütunları, sırasıyla, o tablonun baz matrisinin tersi B^{-1}'in sütunlarıdır. Bir $\geq$ kısıtın artık değişkeninin sütunu $-e_i$ ise o tablodaki sütununun -1 katı B^{-1}'in i. sütunudur.*

> ***İspat.***
> *Teorem 10.1 gereği tablonun v_{k_i} sütunu $B^{-1}v_{k_i} = B^{-1}e_i$'dir. Bir matrisi e_i ile çarpmak onun i. sütununu verir; o hâlde bu sütun B^{-1}'in i. sütunudur. Artık değişken için tablonun sütunu $B^{-1}(-e_i) = -B^{-1}e_i$ olur; -1 ile çarpınca yine B^{-1}'in i. sütunu elde edilir.* ■

Yani bütün kısıtları $\leq$ olan bir problemde B^{-1}, optimal tablonun aylak değişken sütunlarında okunur. $\geq$ kısıtlı bir problemde yapay değişkenin sütunu bazdan çıkınca atıldığı için (Büyük M yöntemi) o kısıtın birim sütunu tabloda kalmaz; bu durumda B^{-1} ya artık değişkenin sütunundan işaret değiştirilerek okunur ya da B'nin tersi doğrudan alınır. 2×2 bir matrisin tersi

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad ad - bc \neq 0$$

formülüyle bulunur (bkz. Lineer Cebir, tersin ek matrisle formülü).

> **Optimal tablo dört adımda**
>
> 1. **Standart form.** Problemi standart forma getir; A'nın v_j sütunlarını, $\vec{b}$'yi ve c_j'leri yaz. Yapay değişkenlere gerek yoktur.
> 2. **Baz matrisi.** Optimal bazdaki değişkenlerin standart formdaki sütunlarını, tablonun satır sırasıyla yan yana yazarak B'yi kur ve B^{-1}'i hesapla.
> 3. **Gövde.** v_0 sütunu $B^{-1}\vec{b}$, her v_j sütunu $B^{-1}v_j$'dir. Baz vektörlerinin sütunları birim vektördür.
> 4. **Son satır.** $z_j - c_j = \vec{c}_B^T\vec{y}_j - c_j$ ve $z_0 = \vec{c}_B^T B^{-1}\vec{b}$. Minimumda bütün $z_j - c_j \leq 0$, maksimumda bütün $z_j - c_j \geq 0$ ise tablo optimaldir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bölüm boyunca kullanacağımız problemi önce simpleks yöntemle çözelim, sonra optimal tablosunu B^{-1} ile doğrudan yazalım.

Örnek 10.1 (Duyarlılık örneğinin simpleks çözümü).

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &\le 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \\ \max z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{aligned}$$

problemini simpleks yöntemle çözünüz.

Çözüm.
Standart form. İki $\le$ kısıtına x_4 ve x_5 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 &= 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + x_5 &= 3 \\ x_j \ge 0, \quad j &= \overline{1,5} \\ \max z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 \end{aligned}$$

Sağ taraflar negatif değildir ve v_4, v_5 birim matrisi oluşturur; standart form simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir (Tanım 1.9). Başlangıç bazı (v_4, v_5)'tir ve $z_j - c_j = -c_j$ olur.
Başlangıç tablosu. Maksimum probleminde en negatif $z_j - c_j$ girer, bütün $z_j - c_j \ge 0$ olunca optimal tabloya ulaşılır. En negatif kriter -3 olduğundan v_2 baza girer. Oranlar $1/\frac{1}{3} = 3$ ve $3/\frac{4}{3} = \frac{9}{4}$; en küçüğü x_5 satırındadır, v_5 bazdan çıkar ve pivot $\frac{4}{3}$'tür.

Tablo 10.1: Başlangıç tablosu

		c_j	2	3	1	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_4	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{1/3} = 3$
x_5	0	3	$\frac{1}{3}$	$[\frac{4}{3}]$	$\frac{7}{3}$	0	1	$\frac{3}{4/3} = \frac{9}{4} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-2	$-3 \Uparrow$	-1	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı $\frac{4}{3}$'e bölünür, yani $\frac{3}{4}$ ile çarpılır ve x_2 satırı olur:

$$\left(3 \mid \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, 0, 1 \right) \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{9}{4} \mid \frac{1}{4}, 1, \frac{7}{4}, 0, \frac{3}{4} \right).$$

x_4 satırından yeni satırın $\frac{1}{3}$ katını çıkarırız; $z_j - c_j$ satırına yeni satırın 3 katını ekleriz. Örneğin x_4 satırının v_0 değeri $1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$, v_3 sütununun kriteri $-1 + 3 \cdot \frac{7}{4} = \frac{17}{4}$ olur.
Tek negatif kriter $-\frac{5}{4}$ olduğundan v_1 baza girer. Oranlar $\frac{1}{4}/\frac{1}{4} = 1$ ve $\frac{9}{4}/\frac{1}{4} = 9$; v_4 bazdan çıkar, pivot $\frac{1}{4}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 10.2: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	2	3	1	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_4	0	$\frac{1}{4}$	$[\frac{1}{4}]$	0	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1/4}{1/4} = 1 \Rightarrow$
x_2	3	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{7}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{9/4}{1/4} = 9$
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{27}{4}$	$-\frac{5}{4} \Uparrow$	0	$\frac{17}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	

İkinci iterasyon. Pivot satırı 4 ile çarpılır ve x_1 satırı olur: $(1 \mid 1, 0, -1, 4, -1)$. x_2 satırından bu satırın $\frac{1}{4}$ katını çıkarırız:

$$\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4} \mid 0, 1, \frac{7}{4} + \frac{1}{4}, -1, \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) = (2 \mid 0, 1, 2, -1, 1).$$

$z_j - c_j$ satırına bu satırın $\frac{5}{4}$ katını ekleriz: $z_0 = \frac{27}{4} + \frac{5}{4} = 8$, v_3 için $\frac{17}{4} - \frac{5}{4} = 3$, v_4 için $0 + 5 = 5$, v_5 için $\frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$.

Tablo 10.3: Optimal tablo

		c_j	2	3	1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_1	2	1	1	0	-1	4	-1
x_2	3	2	0	1	2	-1	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 8$	0	0	3	5	1

Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan tablo optimaldir. Optimal çözüm $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ve $\max z = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$'dir. Temel değişkenler x_1 ve x_2, temel dışı değişkenler x_3, x_4 ve x_5'tir. ■

Örnek 10.2 (Optimal tablonun doğrudan yazılması). Önceki örnekteki (Örnek 10.1) problemin optimal bazının (v_1, v_2) olduğu, x_1 satırının üstte, x_2 satırının altta yazıldığı biliniyor. Optimal tabloyu simpleks iterasyonları yapmadan, B^{-1} ile yazınız.

Çözüm.
Baz matrisi. Temel değişkenler x_1 ve x_2'dir; standart formdaki sütunları $v_1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T$ ve $v_2 = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3})^T$'tür. Tablonun satır sırasıyla

$$B = [v_1 \;\; v_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

$\det B = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} \neq 0$ olduğundan

$$B^{-1} = 3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kontrol: BB^{-1}'in ilk satırı $\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = (1, 0)$, ikinci satırı $\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \right) = (0, 1)$.
Gövde. Teorem 10.1 gereği:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$B^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$B^{-1}v_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$B^{-1}v_4 = B^{-1}e_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1}v_5 = B^{-1}e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Örneğin $B^{-1}v_3$'ün ilk bileşeni $4\cdot\frac{1}{3} - \frac{7}{3} = -1$, ikincisi $-\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = 2$'dir. v_1 ve v_2 baz vektörleri olduğundan sütunları $(1,0)^T$ ve $(0,1)^T$'dir.
Son satır. $\vec{c}_B = (2,3)^T$ ile

$$z_3 - c_3 = (2,3)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 = 4 - 1 = 3,$$
$$z_4 - c_4 = (2,3)\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = 5,$$
$$z_5 - c_5 = (2,3)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 1,$$
$$z_0 = (2,3)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 8.$$

Bulunan sayılar optimal tablodaki (Tablo 10.3) sayıların aynısıdır. Tabloya bakınca Önerme 10.1 da doğrulanır: aylak değişkenlerin v_4 ve v_5 sütunları yan yana B^{-1}'i verir. Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan bu tablonun optimal olduğunu iterasyonlara bakmadan da söyleyebiliriz. ■

Aynı yolu biri maksimum, biri minimum olan iki küçük problemde deneyelim.

Örnek 10.3 (İki değişkenli bir maksimum probleminin optimal tablosu).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

probleminin optimumu $(2,2)$ köşesindedir. Optimal tabloyu B^{-1} ile yazınız ve optimal olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Standart form. x_3, x_4 aylak değişkenleriyle

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1,4} \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

$(2,2)$ köşesinde $x_1 = x_2 = 2$ ve iki kısıt da eşitlikle sağlanır ($2+2=4$, $4+2=6$), yani $x_3 = x_4 = 0$. Temel değişkenler x_1 ve x_2'dir.
Baz matrisi. Satırları x_1, x_2 sırasıyla yazalım:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det B = 1 - 2 = -1, \quad B^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gövde. $B^{-1}\vec{b} = (2,2)^T$ ($-4+6=2$ ve $8-6=2$). Aylak sütunlar e_1 ve e_2 olduğundan $B^{-1}v_3 = (-1,2)^T$ ve $B^{-1}v_4 = (1,-1)^T$, yani B^{-1}'in sütunlarıdır (Önerme 10.1).
Son satır. $\vec{c}_B = (3,2)^T$:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$z_3 - c_3 = (3,2)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - 0 = 1,\ z_4 - c_4 = (3,2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - 0 = 1,$$

$z_0 = 3\cdot 2 + 2\cdot 2 = 10$.

Tablo 10.4: Optimal tablo

		c_j	3	2	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_1	3	2	1	0	-1	1
x_2	2	2	0	1	2	-1
$z_j - c_j$		$z_0 = 10$	0	0	1	1

Maksimum probleminde bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan tablo optimaldir: $x_1 = x_2 = 2$, $\max z = 10$. Köşelerle karşılaştıralım: uygun bölgenin köşeleri $(0,0)$, $(3,0)$, $(2,2)$, $(0,4)$'tür ve z bunlarda sırasıyla 0, 9, 10, 8 değerini alır. ■

Örnek 10.4 (Artık değişkenli bir minimum probleminin optimal tablosu).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4\\ x_1 + 3x_2 &\geq 6\\ x_1, x_2 &\geq 0\\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

probleminin optimumu $(3,1)$ köşesindedir (Örnek 3.8). Optimal tabloyu B^{-1} ile yazınız ve B^{-1}'in tabloda nerede göründüğünü belirtiniz.

Çözüm.
Standart form. $\geq$ kısıtlardan x_3, x_4 artık değişkenlerini çıkarırız:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4\\ x_1 + 3x_2 - x_4 &= 6\\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1,4}\\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Bu standart form birim matris içermez; simpleks yöntemle çözerken yapay değişken gerekirdi. Optimal tabloyu B^{-1} ile yazarken ise yapay değişkene hiç ihtiyaç yoktur. $(3,1)$'de iki kısıt da eşitlikle sağlanır, $x_3 = x_4 = 0$; temel değişkenler x_1, x_2'dir.
Baz matrisi.

$$B = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix},\quad \det B = 3 - 1 = 2,\quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Gövde. $B^{-1}\vec{b} = (3,1)^T$ ($6-3=3$ ve $-2+3=1$). Artık sütunları $v_3 = -e_1$, $v_4 = -e_2$ olduğundan

$$B^{-1}v_3 = -B^{-1}e_1 = \begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},\qquad B^{-1}v_4 = -B^{-1}e_2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Son satır. $\vec{c}_B = (2,3)^T$:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$z_3 - c_3 = (2,3)\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 0 = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2},$$
$$z_4 - c_4 = (2,3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - 0 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2},$$

$z_0 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$.

Tablo 10.5: Optimal tablo

		c_j	2	3	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_1	2	3	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	3	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 9$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Minimum probleminde bütün $z_j - c_j \leq 0$ olduğundan tablo optimaldir: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $\min z = 9$. Tabloda B^{-1}'in sütunları doğrudan görünmez; artık değişkenlerin v_3 ve v_4 sütunlarının -1 katları B^{-1}'i verir (Önerme 10.1). ■

Teorem 10.1'nun en önemli sonucu, hangi verinin tablonun hangi kısmını etkilediğini söylemesidir.

Sonuç 10.1 (Değişimin tablodaki etkisi). *Bir optimal tabloda bazı değiştirmeden:*

1. *Amaç katsayıları c_j değişirse tablonun gövdesi (v_0 sütunu ve bütün y_{ij}'ler) aynı kalır; yalnız $z_j - c_j$ satırı ve z_0 değişir.*
2. *Sağ taraf $\vec{b}$ değişirse bütün y_{ij}'ler ve bütün $z_j - c_j$ ($j \geq 1$) değerleri aynı kalır; yalnız v_0 sütunu ve z_0 değişir.*

İspat.
Teorem 10.1 gereği y_{ij}'ler $B^{-1}v_j$'den, v_0 sütunu $B^{-1}\vec{b}$'den gelir. Birincisinde $\vec{c}$ yoktur; ikincisinde yalnız $\vec{b}$ vardır. $z_j - c_j = \vec{c}_B^{\,T} B^{-1} v_j - c_j$ ifadesinde $\vec{b}$ bulunmaz, amaç katsayıları bulunur. $z_0 = \vec{c}_B^{\,T} B^{-1}\vec{b}$ ise ikisine de bağlıdır. ■

Yani:

- c_j değişince **uygunluk** ($v_0 \geq 0$) bozulmaz, yalnız **optimallik** koşulu yeniden kontrol edilir.
- b_i değişince optimallik koşulu bozulmaz, yalnız **uygunluk** koşulu yeniden kontrol edilir.

Bölümün geri kalanı bu iki kontrolden ibarettir.

10.3 Amaç Fonksiyonu Katsayılarındaki Değişim

Bir c_j değişince tablonun gövdesi aynı kaldığı için optimal çözümün değişkenleri de aynı kalır; bu çözümün optimal olmaya devam edip etmediği yalnız son satıra bağlıdır. Değişen katsayının temel dışı ya da temelde olan bir değişkene ait olmasına göre son satırın ne kadarının değiştiği farklıdır.

10.3.1 Temel Dışı Değişkenlerin Katsayılarındaki Değişim

Temel dışı bir değişkenin katsayısı c_B vektöründe görünmez. Bu yüzden değişim yalnız kendi sütununa dokunur.

Önerme 10.2 (Temel dışı değişkenin katsayısı). *Optimal tabloda x_k temel dışı bir değişken olsun ve c_k yerine c_k' gelsin. Bu durumda yalnız v_k sütununun simpleks kriteri değişir ve $z_k - c_k'$ olur; z_0 ve diğer bütün $z_j - c_j$ değerleri aynı kalır. Tablo*

 CC BY-NC-SA 4.0

1. *maksimum probleminde $c'_k \le z_k$ iken,*
2. *minimum probleminde $c'_k \ge z_k$ iken*

optimal kalır. Bu aralıkta optimal çözüm ve optimal değer değişmez.

> ***İspat.***
> *c_k, x_k temel dışı olduğu için $\vec{c}_B$'nin bileşeni değildir. $z_j = \vec{c}_B^T \vec{y}_j$ değerleri ve $z_0 = \vec{c}_B^T B^{-1}\vec{b}$ yalnız $\vec{c}_B$'ye bağlı olduğundan hiçbiri değişmez. $z_j - c_j$ farkları arasında c_k'yı içeren tek fark $j = k$ olanıdır; o da $z_k - c'_k$ olur. Tablonun gövdesi zaten değişmez (Sonuç 10.1).*
> *Maksimum probleminde optimallik koşulu bütün $z_j - c_j \ge 0$'dır. Diğer kriterler optimal tablodakilerle aynı olduğundan zaten ≥ 0'dır; geriye $z_k - c'_k \ge 0$, yani $c'_k \le z_k$ kalır. Minimumda koşul $z_k - c'_k \le 0$, yani $c'_k \ge z_k$'dır. Bu durumda tablonun temel çözümü Teorem 4.3 gereği optimaldir; çözüm ve z_0 değişmediği için optimal değer de aynıdır.* ■

Yani temel dışı bir değişkenin katsayısının sınırı, o sütunun z_k değeridir. Maksimum probleminde c_k, z_k'yı aşarsa x_k'yı üretmek kârlı hâle gelir ve v_k baza girmek ister; minimumda c_k, z_k'nın altına inerse aynı şey olur. Sınırın tam üstünde $z_k - c_k = 0$'dır; bulunan çözüm yine optimaldir; v_k sütununda pozitif eleman varsa ve çözüm dejenere değilse alternatif optimal çözüm de vardır (Teorem 7.2).

> **Temel dışı değişkenin değişim aralığı üç adımda**
>
> 1. Optimal tablonun c_j satırında c_k yerine sembol olarak c_k yaz; tablonun geri kalanı aynen kalır.
> 2. Yalnız v_k sütununun kriterini hesapla: $z_k - c_k = \vec{c}_B^T \vec{y}_k - c_k$.
> 3. Maksimumda $z_k - c_k \ge 0$, minimumda $z_k - c_k \le 0$ eşitsizliğini c_k için çöz.

Örnek 10.5 (Temel dışı x_3'ün katsayısının değişim aralığı). Optimal tablosu Tablo 10.3 olan

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{1}{3}x_3 &\le 1 \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{4}{3}x_2 + \tfrac{7}{3}x_3 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \\ \max z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{aligned}$$

probleminde c_3 hangi aralıkta değişirse optimumluk bozulmaz, yani optimal çözümdeki temel değişkenlerin değerleri değişmez?

> **Çözüm.**
> Optimal tabloda temel dışı değişkenler x_3, x_4, x_5'tir; soru temel dışı x_3'ün c_3 katsayısıyla ilgilidir. c_3'ü artık 1 olarak almayız, bir değişken olarak tabloya yazarız. Gövde değişmez; son satırda yalnız v_3'ün kriteri değişir:

Tablo 10.6: Temel dışı bir değişkenin değişim aralığı

		c_j	2	3	c_3	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_1	2	1	1	0	-1	4	-1
x_2	3	2	0	1	2	-1	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 8$	0	0	$4 - c_3$	5	1

Problem maksimum problemi olduğu için optimal tabloda bütün $z_j - c_j \ge 0$ olmalıdır:

$$z_3 - c_3 = (2, 3)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - c_3 = 4 - c_3 \ge 0 \Rightarrow c_3 \le 4.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

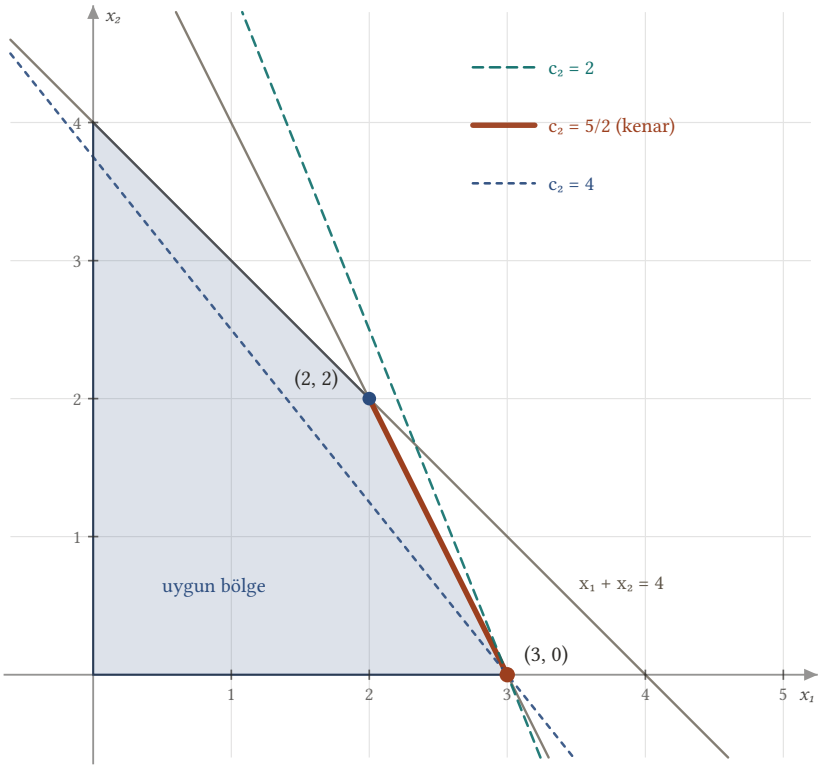
Diğer kriterler $0, 0, 5, 1$'dir ve c_3'e bağlı değildir. Demek ki $c_3 \leq 4$ olduğu sürece optimumluk bozulmaz: optimal çözüm $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ ve $\max z = 8$ olarak kalır. $c_3 = 4$ iken $z_3 - c_3 = 0$ olur ve v_3 baza alınarak aynı $z = 8$ değerli alternatif bir optimal çözüm bulunur. $c_3 > 4$ olursa $z_3 - c_3 < 0$ olur, v_3 baza girer ve simpleks yöntem bu tablodan devam ettirilerek yeni optimum bulunur. ■

Örnek 10.6 (Temel dışı bir değişkenin katsayısı ve amaç doğrusunun eğimi).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 5x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

probleminin optimal tablosunu B^{-1} ile yazınız ve c_2'nin optimumluğu bozmayan değişim aralığını bulup grafik üzerinde yorumlayınız.

Çözüm.



Şekil 10.1: $z = 5x_1 + c_2x_2$ amaç fonksiyonunun $(3, 0)$ köşesinden geçen seviye doğruları. $c_2 = 2$ iken doğru bölgenin dışından geçer ve $(3, 0)$ tek optimal köşedir. c_2 büyüdükçe doğru yatıklaşır; $c_2 = 5/2$ olunca $2x_1 + x_2 = 6$ kenarının üzerine oturur (kalın kenar). $c_2 = 4$ iken doğru bölgeyi keser ve $(2, 2)$ köşesi daha büyük z verir.

Optimal tablo. Standart formda aylak değişkenler x_3, x_4'tür ($x_1 + x_2 + x_3 = 4$, $2x_1 + x_2 + x_4 = 6$). Köşelerdeki değerler $(0,0)$: 0, $(3,0)$: 15, $(2,2)$: 14, $(0,4)$: 8 olduğundan optimum $(3,0)$'dadır. Burada $x_1 = 3$ ve birinci kısıtta $4 - 3 = 1$ birim boşluk kalır: $x_3 = 1$. Temel değişkenler x_3 ve x_1'dir. Satırları bu sırayla yazarsak

$$B = [v_3 \;\; v_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$B^{-1}\vec{b} = (4-3, 3)^T = (1,3)^T$, $B^{-1}v_2 = \left(1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ ve $B^{-1}v_4 = B^{-1}e_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ bulunur.

Sembolik tablo. c_2'yi sembol olarak yazalım; $\vec{c}_B = (0,5)^T$ ve x_2 temel dışıdır:

$$z_2 - c_2 = (0,5)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} - c_2 = \frac{5}{2} - c_2,$$

$$z_4 - c_4 = (0,5)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} - 0 = \frac{5}{2}.$$

Tablo 10.7: Temel dışı bir değişkenin değişim aralığı

		c_j	5	c_2	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_3	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
x_1	5	3	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 15$	0	$\frac{5}{2} - c_2$	0	$\frac{5}{2}$

$c_2 = 2$ için $z_2 - c_2 = \frac{1}{2} \geq 0$ ve tablo optimaldir. Maksimum problemi olduğundan koşul

$$\frac{5}{2} - c_2 \geq 0 \Rightarrow c_2 \leq \frac{5}{2}$$

olur. $c_2 \leq \frac{5}{2}$ iken optimal çözüm $(3,0)$ ve $\max z = 15$ olarak kalır.

Geometrik yorum. $(3,0)$ köşesinden geçen seviye doğrusu $5x_1 + c_2x_2 = 15$'tir. c_2 büyüdükçe bu doğru $(3,0)$ etrafında dönerek yatıklaşır. $c_2 = \frac{5}{2}$ olunca doğru $5x_1 + \frac{5}{2}x_2 = 15$, yani $2x_1 + x_2 = 6$ olur ve bölgenin $(3,0)$–$(2,2)$ kenarının üzerine oturur. Bu kenarın her noktası optimaldir. $c_2 > \frac{5}{2}$ olunca $(2,2)$ köşesinde $z = 10 + 2c_2$ olur ve bu değer 15'i aşar; optimum $(2,2)$'ye geçer ($c_2 > 5$ olunca da $(0,4)$'e).

Böylece $c_2 > 0$ için c_2'nin değişim aralığı, amaç doğrusunun eğiminin $-5/c_2 \leq -2$ kaldığı, yani doğrunun $2x_1 + x_2 = 6$ kenarından daha dik olduğu aralıktır. ■

10.3.2 Temel Değişkenlerin Katsayılarındaki Değişim

Temelde olan bir değişkenin katsayısı c_B sütununda da görünür. $z_j = \vec{c}_B^T\vec{y}_j$ her sütunda c_B'yi kullandığı için değişim bu kez bütün temel dışı sütunlara yayılır.

Önerme 10.3 (Temelde olan değişkenin katsayısı). *Optimal tabloda x_r temelde olan bir değişken olsun, r. satırda bulunsun ve katsayısı c_r yerine $c_r + \Delta$ olsun. Bu durumda*

1. *temel değişkenlerin kriterleri 0 kalır;*
2. *temel dışı her v_j için yeni kriter $(z_j - c_j) + \Delta\, y_{rj}$ olur;*
3. *amaç değeri $z_0 + \Delta\, y_{r0}$ olur; burada y_{r0}, x_r'nin değeridir.*

Tablo maksimum probleminde temel dışı her j için $(z_j - c_j) + \Delta\, y_{rj} \geq 0$ iken, minimum probleminde temel dışı her j için $(z_j - c_j) + \Delta\, y_{rj} \leq 0$ iken optimal kalır.

İspat.
Yeni baz maliyet vektörü $\vec{c}_B + \Delta\, e_r$'dir; e_r, r. bileşeni 1 olan birim vektördür. Her $j = 0, 1, \ldots, n$ için

$$z'_j = (\vec{c}_B + \Delta e_r)^T\vec{y}_j = \vec{c}_B^T\vec{y}_j + \Delta\, e_r^T\vec{y}_j = z_j + \Delta\, y_{rj}.$$

$j = 0$ için bu 3. maddedir. $j \neq r$ iken c_j değişmediğinden yeni kriter $(z_j - c_j) + \Delta\, y_{rj}$ olur; bu 2. maddedir. Başka bir temel değişkenin sütunu, r. bileşeni 0 olan bir birim vektördür, dolayısıyla $y_{rj} = 0$ ve

 CC BY-NC-SA 4.0

kriteri 0 *kalır.* $j = r$ *için* $y_{rr} = 1$*'dir ve* c_r *de* Δ *kadar artar:* $(z_r + \Delta) - (c_r + \Delta) = 0$*. Böylece 1. madde de gösterilmiş olur.*
Tablonun gövdesi değişmediğinden (Sonuç 10.1) temel çözüm uygun kalır. Temel değişkenlerin kriterleri sıfırdır; optimallik koşulu (Teorem 4.3) yalnız temel dışı sütunlar için kontrol edilir ve ifadedeki eşitsizlikler elde edilir. ■

Yani temelde olan bir değişkenin katsayısı değişince her temel dışı kriter, o değişkenin satırındaki y_{rj} ile orantılı olarak kayar. Her temel dışı sütun Δ için bir eşitsizlik verir; değişim aralığı bu eşitsizliklerin hepsini birden sağlayan, yani bu eşitsizliklerin ortak kısmı olan aralıktır. Maksimum probleminde $y_{rj} > 0$ olan sütunlar Δ'ya alt sınır, $y_{rj} < 0$ olanlar üst sınır koyar; $y_{rj} = 0$ olan sütun hiçbir sınır koymaz. Pratikte Δ yerine doğrudan c_r sembolüyle çalışmak daha kolaydır: c_B sütununa ve c_j satırına c_r yazılır, son satır c_r cinsinden hesaplanır. İki yazım aynı aralığı verir, çünkü c_r sembolü, eski değer artı Δ'dır.

Temelde olan değişkenin değişim aralığı dört adımda

1. Optimal tabloda c_r'yi hem c_j satırına hem x_r satırının c_B hücresine sembol olarak yaz.
2. Temel dışı her v_j için $z_j - c_j = \vec{c}_B^{\,T}\vec{y}_j - c_j$'yi c_r cinsinden hesapla; temel sütunların kriteri 0'dır.
3. Maksimumda her birinin ≥ 0, minimumda ≤ 0 olmasını iste ve her eşitsizliği c_r için çöz.
4. Bulunan aralıkların kesişimini al. Amaç değeri $z_0 = \vec{c}_B^{\,T} B^{-1}\vec{b}$ de c_r'ye bağlı olarak yazılır.

Örnek 10.7 (Temelde olan x_1'in katsayısının değişim aralığı). Optimal tablosu Tablo 10.3 olan problemde $(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 1,\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \leq 3,\ x_j \geq 0,\ \max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3)$ temelde olan x_1 değişkeninin katsayısı c_1 hangi aralıkta değişirse optimumluk bozulmaz?

Çözüm.
Optimal tabloda temel değişkenler x_1 ve x_2'dir. x_1 temelde olduğu için c_1 hem c_j satırına hem c_B sütununa yazılır ve bütün temel dışı kriterleri etkiler; bu yüzden her bir $z_j - c_j$ değerine bakmak gerekir. $\vec{c}_B = (c_1, 3)^T$:

$$z_1 - c_1 = (c_1, 3)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - c_1 = c_1 - c_1 = 0,$$

$$z_2 - c_2 = (c_1, 3)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 3 = 3 - 3 = 0,$$

$$z_3 - c_3 = (c_1, 3)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - 1 = -c_1 + 5 \geq 0 \Rightarrow c_1 \leq 5,$$

$$z_4 - c_4 = (c_1, 3)\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} - 0 = 4c_1 - 3 \geq 0 \Rightarrow c_1 \geq \frac{3}{4},$$

$$z_5 - c_5 = (c_1, 3)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - 0 = -c_1 + 3 \geq 0 \Rightarrow c_1 \leq 3.$$

Amaç değeri $z_0 = (c_1, 3)(1, 2)^T = c_1 + 6$'dır.

Tablo 10.8: Temelde olan x_1 değişkeninin değişim aralığı

		c_j	c_1	3	1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_1	c_1	1	1	0	-1	4	-1
x_2	3	2	0	1	2	-1	1
$z_j - c_j$		$z_0 = c_1 + 6$	0	0	$5 - c_1$	$4c_1 - 3$	$3 - c_1$

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç koşulu birden sağlayan aralık

$$\frac{3}{4} \le c_1 \le 3$$

olarak bulunur. Yani c_1, $\frac{3}{4}$ ile 3 arasında değişirse optimumluk bozulmaz: temel değişkenler ve değerleri ($x_1 = 1$, $x_2 = 2$) aynı kalır, optimal değer $c_1 + 6$ olur. $c_1 \le 5$ koşulu $c_1 \le 3$'ün içinde kaldığı için aralığa bir şey eklemez.
Aynı sonucu Önerme 10.3 ile de bulalım. $c_1 = 2 + \Delta$ yazalım. x_1 satırında temel dışı sütunların elemanları $y_{13} = -1$, $y_{14} = 4$, $y_{15} = -1$, kriterleri 3, 5, 1'dir. Koşullar $3 - \Delta \ge 0$, $5 + 4\Delta \ge 0$ ve $1 - \Delta \ge 0$, yani $-\frac{5}{4} \le \Delta \le 1$'dir. $c_1 = 2 + \Delta$ olduğundan yine $\frac{3}{4} \le c_1 \le 3$ bulunur. ■

Örnek 10.8 (Temelde olan x_2'nin katsayısının değişim aralığı). Aynı problemde ($\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \le 1$, $\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \le 3$, $x_j \ge 0$, $\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$; optimal tablo Tablo 10.3) temelde olan x_2 değişkeninin katsayısı c_2 hangi aralıkta değişirse optimumluk bozulmaz?

Çözüm.
Bu kez c_2 sembolü c_j satırına ve x_2 satırının c_B hücresine yazılır; $\vec{c}_B = (2, c_2)^T$:

$$z_1 - c_1 = (2, c_2)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2 = 2 - 2 = 0,$$

$$z_2 - c_2 = (2, c_2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - c_2 = c_2 - c_2 = 0,$$

$$z_3 - c_3 = (2, c_2)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - 1 = -2 + 2c_2 - 1 \ge 0 \Rightarrow c_2 \ge \frac{3}{2},$$

$$z_4 - c_4 = (2, c_2)\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} - 0 = 8 - c_2 \ge 0 \Rightarrow c_2 \le 8,$$

$$z_5 - c_5 = (2, c_2)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} - 0 = -2 + c_2 \ge 0 \Rightarrow c_2 \ge 2.$$

Amaç değeri $z_0 = (2, c_2)(1, 2)^T = 2 + 2c_2$'dir.

Tablo 10.9: Temelde olan x_2 değişkeninin değişim aralığı

		c_j	2	c_2	1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_1	2	1	1	0	-1	4	-1
x_2	c_2	2	0	1	2	-1	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 2 + 2c_2$	0	0	$2c_2 - 3$	$8 - c_2$	$c_2 - 2$

Üç koşulu birden sağlayan aralık

$$2 \le c_2 \le 8$$

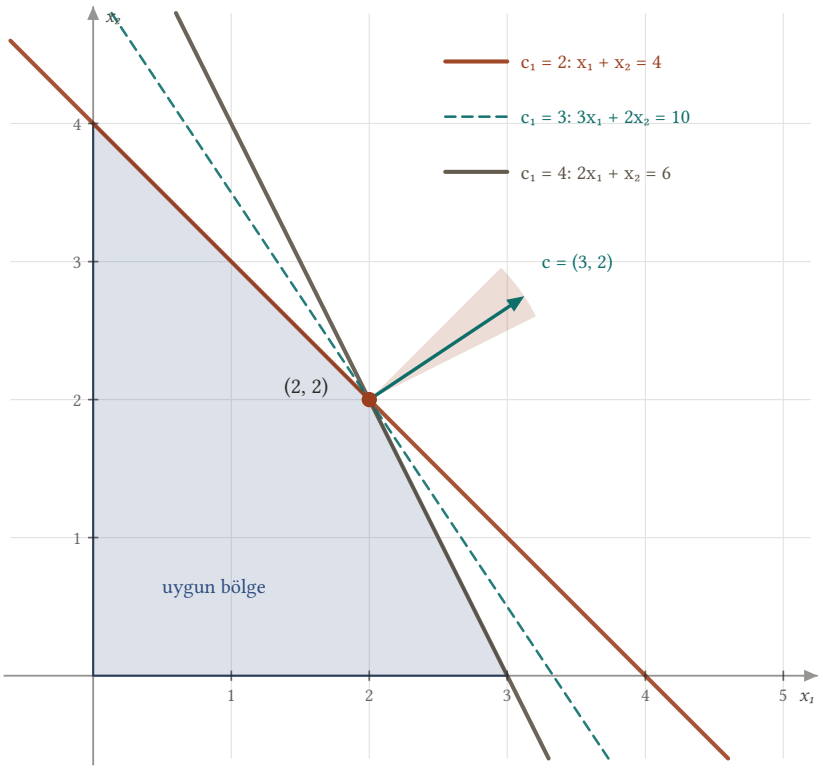
olarak bulunur. Yani c_2, 2 ile 8 arasında değişirse optimumluk bozulmaz; optimal çözüm $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ kalır ve optimal değer $2 + 2c_2$ olur. $c_2 \ge \frac{3}{2}$ koşulu $c_2 \ge 2$'nin içinde kalır. ■

İki değişkenli bir problemde bu aralığın geometrik anlamı açıktır: optimal köşe, amaç doğrusunun eğimi o köşede birleşen iki kenarın eğimleri arasında kaldıkça optimal kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 10.9 (Temelde olan bir değişkenin katsayısı ve köşedeki yelpaze). $x_1 + x_2 \leq 4$, $2x_1 + x_2 \leq 6$, $x_1, x_2 \geq 0$, $\max z = 3x_1 + 2x_2$ probleminin optimal tablosu Tablo 10.4'tır. Temelde olan x_1'in katsayısı c_1 hangi aralıkta değişirse optimumluk bozulmaz? Sonucu grafik üzerinde yorumlayınız.

Çözüm.



Şekil 10.2: $z = c_1x_1 + 2x_2$ için (2, 2) köşesi. $c_1 = 3$ iken kesikli seviye doğrusu bölgeye yalnız bu köşede değer. $c_1 = 2$ olunca seviye doğrusu $x_1 + x_2 = 4$ kenarına, $c_1 = 4$ olunca $2x_1 + x_2 = 6$ kenarına oturur. Gradyan $c = (c_1, 2)$ açık boyalı açının içinde kaldıkça, yani $2 \leq c_1 \leq 4$ iken, (2, 2) optimal kalır.

$\vec{c}_B = (c_1, 2)^T$ alıp temel dışı v_3 ve v_4 sütunlarının kriterlerini hesaplarız:

$$z_3 - c_3 = (c_1, 2)\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 4 - c_1 \geq 0 \Rightarrow c_1 \leq 4,$$

$$z_4 - c_4 = (c_1, 2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = c_1 - 2 \geq 0 \Rightarrow c_1 \geq 2.$$

Amaç değeri $z_0 = 2c_1 + 2 \cdot 2 = 2c_1 + 4$'tür.

Tablo 10.10: Temelde olan x_1 değişkeninin değişim aralığı

		c_j	c_1	2	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_1	c_1	2	1	0	-1	1
x_2	2	2	0	1	2	-1
$z_j - c_j$		$z_0 = 2c_1 + 4$	0	0	$4 - c_1$	$c_1 - 2$

 CC BY-NC-SA 4.0

İki koşulu birden sağlayan aralık $2 \le c_1 \le 4$'tür. Bu aralıkta optimal çözüm $(2,2)$ kalır ve optimal değer $2c_1 + 4$ olur.
Geometrik yorum. $(2,2)$ köşesinde $x_1 + x_2 = 4$ ve $2x_1 + x_2 = 6$ kenarları birleşir; eğimleri -1 ve -2'dir. $c_1 x_1 + 2x_2 = k$ seviye doğrusunun eğimi $-c_1/2$'dir. $c_1 = 2$ iken eğim -1 olur ve seviye doğrusu birinci kenara, $c_1 = 4$ iken eğim -2 olur ve ikinci kenara oturur. Aradaki her c_1 için seviye doğrusu bölgeye yalnız $(2,2)$'de değer. Aynı şeyi gradyanla da söyleyebiliriz: gradyan $\vec{c} = (c_1, 2)$, iki kenarın dik vektörleri $(1,1)$ ve $(2,1)$ arasında kaldıkça $(2,2)$ optimaldir.
Uç değerlerde alternatif optimal çözüm ortaya çıkar: $c_1 = 2$ iken $(0,4)$–$(2,2)$ kenarının, $c_1 = 4$ iken $(2,2)$–$(3,0)$ kenarının her noktası optimaldir. ■

Temelde olan değişken bir aylak ya da artık değişken de olabilir. Bu değişkenlerin amaç katsayısı 0'dır, ama aynı soru onlar için de sorulabilir: Kullanılmayan kaynağın birimine bir değer (ya da maliyet) biçilirse çözüm değişir mi?

Örnek 10.10 (Temelde olan bir aylak değişkenin katsayısı). $x_1 + x_2 \le 4$, $2x_1 + x_2 \le 6$, $x_1, x_2 \ge 0$, $\max z = 5x_1 + 2x_2$ probleminin optimal tablosu Tablo 10.7'dir ($c_2 = 2$ için); temelde $x_3 = 1$ ve $x_1 = 3$ vardır. Temelde olan x_3 aylak değişkeninin katsayısı c_3 hangi aralıkta değişirse optimumluk bozulmaz?

Çözüm.
x_3 birinci satırdadır; $\vec{c}_B = (c_3, 5)^T$. Temel dışı sütunlar v_2 ve v_4'tür:

$$z_2 - c_2 = (c_3, 5)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 2 = \frac{c_3 + 5}{2} - 2 = \frac{c_3 + 1}{2} \ge 0 \Rightarrow c_3 \ge -1,$$

$$z_4 - c_4 = (c_3, 5)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 0 = \frac{5 - c_3}{2} \ge 0 \Rightarrow c_3 \le 5.$$

Amaç değeri $z_0 = c_3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = c_3 + 15$'tir.

Tablo 10.11: Temelde olan x_3 değişkeninin değişim aralığı

		c_j	5	2	c_3	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_3	c_3	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
x_1	5	3	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = c_3 + 15$	0	$\frac{c_3+1}{2}$	0	$\frac{5-c_3}{2}$

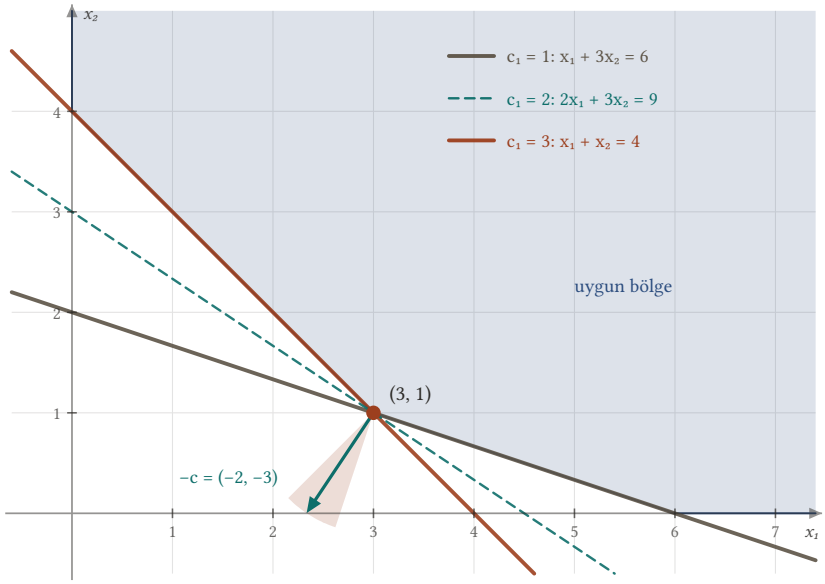
Değişim aralığı $-1 \le c_3 \le 5$'tir. Yorumu şöyledir: birinci kaynağın kullanılmayan her birimi için en fazla 1 birim ceza ödenirse ($c_3 \ge -1$) ya da en fazla 5 birim kazanılırsa ($c_3 \le 5$) üretim planı $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ olarak kalır. Ceza 1'i aşarsa kaynağın boşta kalan kısmını da kullanmak, yani v_2'yi baza almak kârlı olur. ■

Minimum probleminde eşitsizliklerin yönü ters döner; gerisi aynıdır.

Örnek 10.11 (Minimum probleminde temelde olan bir değişkenin katsayısı). $x_1 + x_2 \ge 4$, $x_1 + 3x_2 \ge 6$, $x_1, x_2 \ge 0$, $\min z = 2x_1 + 3x_2$ probleminin optimal tablosu Tablo 10.5'dir. Temelde olan x_1'in katsayısı c_1 hangi aralıkta değişirse optimumluk bozulmaz?

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.3: min z = $c_1x_1 + 3x_2$ için (3, 1) köşesi. $c_1 = 2$ iken kesikli seviye doğrusu bölgeye yalnız bu köşede değer. $c_1 = 3$ olunca seviye doğrusu $x_1 + x_2 = 4$ kenarına, $c_1 = 1$ olunca $x_1 + 3x_2 = 6$ kenarına oturur. Minimumda seviye doğrusu gradyanın tersi $-c = (-c_1, -3)$ yönünde kaydırılır; $-c$ açık boyalı açının içinde kaldıkça, yani $1 \le c_1 \le 3$ iken, (3, 1) optimal kalır.

Minimum probleminde optimal tabloda bütün $z_j - c_j \le 0$ olmalıdır. $\vec{c}_B = (c_1, 3)^T$ ile temel dışı v_3 ve v_4 sütunları:

$$z_3 - c_3 = (c_1, 3)\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 0 = \frac{3 - 3c_1}{2} \le 0 \Rightarrow c_1 \ge 1,$$

$$z_4 - c_4 = (c_1, 3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - 0 = \frac{c_1 - 3}{2} \le 0 \Rightarrow c_1 \le 3.$$

Amaç değeri $z_0 = 3c_1 + 3 \cdot 1 = 3c_1 + 3$'tür.

Tablo 10.12: Temelde olan x_1 değişkeninin değişim aralığı

		c_j	c_1	3	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_1	c_1	3	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	3	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 3c_1 + 3$	0	0	$\frac{3-3c_1}{2}$	$\frac{c_1-3}{2}$

Değişim aralığı $1 \le c_1 \le 3$'tür; bu aralıkta optimal çözüm $(3, 1)$ ve $\min z = 3c_1 + 3$ olur. Geometrik olarak $c_1x_1 + 3x_2 = k$ seviye doğrusunun eğimi $-c_1/3$'tür ve $(3, 1)$'de birleşen $x_1 + 3x_2 = 6$ ile $x_1 + x_2 = 4$ kenarlarının eğimleri olan $-\frac{1}{3}$ ile -1 arasında kalmalıdır.
$0 \le c_1 < 1$ olursa x_1 o kadar ucuzlar ki çözüm x_1 ekseni üzerindeki $(6, 0)$ köşesine kayar; $c_1 > 3$ olursa $(0, 4)$ köşesine kayar. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Sağ Taraf Sabitlerindeki Değişim

Şimdi soruyu sağ taraf sabitleri için soralım: Kısıtların sağ taraf değerleri hangi aralıkta değişirse mevcut temel değişkenler temel değişken olarak kalır? Burada "optimumluğun bozulmaması" farklı bir anlam taşır. Sağ taraf değişince çözümün değerleri de amaç fonksiyonunun değeri de değişir; aynı kalması istenen, **temeldeki değişkenlerin** kendisidir.

Önerme 10.4 (Sağ taraf sabitlerinin değişimi). *B, optimal tablonun baz matrisi olsun ve $\vec{b}$ yerine $\vec{b}\,'$ gelsin. Bu durumda*

1. *$B^{-1}\vec{b}\,' \geq \vec{0}$ ise aynı baz optimal kalır; yeni optimal çözümde temel değişkenlerin değerleri $B^{-1}\vec{b}\,'$, temel dışı değişkenler 0 ve optimal değer $z_0 = \vec{c}_B^{\,T} B^{-1}\vec{b}\,'$ olur;*
2. *$B^{-1}\vec{b}\,'$'nün bir bileşeni negatifse bu bazın temel çözümü uygun değildir, yani optimal tablo bozulur.*

> ***İspat.***
> *Sonuç 10.1 gereği $\vec{b}$ değişince bütün y_{ij}'ler ve $j \geq 1$ için bütün $z_j - c_j$ değerleri aynı kalır; yalnız v_0 sütunu $B^{-1}\vec{b}\,'$ ve z_0 değeri $\vec{c}_B^{\,T} B^{-1}\vec{b}\,'$ olur (Teorem 10.1).*
> ***1.** $B^{-1}\vec{b}\,' \geq \vec{0}$ ise tablonun temel çözümü uygun bir temel çözümdür. Son satır değişmediği için optimallik koşulu hâlâ sağlanır; Teorem 4.3 gereği bu çözüm yeni problemin optimal çözümüdür.*
> ***2.** Bu bazın temel çözümünde temel değişkenlerin değerleri tek türlü $B^{-1}\vec{b}\,'$'dür; bir bileşeni negatifse çözüm $\vec{x} \geq 0$ koşulunu sağlamaz.* ■

Yani sağ taraf değişiminde önemli olan tek koşul

$$B^{-1}\vec{b} \geq \vec{0}$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesidir; burada B^{-1}, temel değişkenlerin ilk baştaki katsayılar matrisinin tersidir. Tek bir b_i değişiyorsa, diğer sağ taraflar sabit tutularak $B^{-1}\vec{b} \geq \vec{0}$ sisteminin her satırı b_i için bir eşitsizlik verir; değişim aralığı bunların kesişimidir.

> **Sağ tarafın değişim aralığı dört adımda**
>
> 1. Optimal tablodaki temel değişkenlerin standart formdaki sütunlarından B'yi kur ve B^{-1}'i bul (ya da aylak sütunlarından oku).
> 2. $\vec{b}$'de incelenen b_i'yi sembol olarak bırak, diğerlerini yerine koy.
> 3. $B^{-1}\vec{b} \geq \vec{0}$ eşitsizliğinin her satırını b_i için çöz.
> 4. Bulunan aralıkların ortak kısmını, yani hepsini birden sağlayan aralığı al. Bu aralıkta yeni çözüm $B^{-1}\vec{b}$, optimal değer $\vec{c}_B^{\,T} B^{-1}\vec{b}$'dir.

Örnek 10.12 (Birinci kısıtın sağ tarafının değişim aralığı). Optimal tablosu Tablo 10.3 olan problemde ($\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq b_1$, $\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \leq 3$, $x_j \geq 0$, $\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$; başta $b_1 = 1$) b_1 hangi aralıkta değişirse mevcut temel değişkenler x_1 ve x_2 temel değişken olarak kalır?

> **Çözüm.**
> Temel değişkenler x_1 ve x_2'dir. Tablonun satır sırasıyla
>
> $$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$
>
> şeklindedir (Örnek 10.2). B^{-1}, optimal tablonun v_4 ve v_5 sütunlarında da okunur. $b_2 = 3$ sabit tutulur:
>
> $$B^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 - 3 \\ -b_1 + 3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
>
> Birinci satırdan $4b_1 - 3 \geq 0$, yani $b_1 \geq \frac{3}{4}$; ikinci satırdan $-b_1 + 3 \geq 0$, yani $b_1 \leq 3$ bulunur. İki aralığın ortak kısmı alınırsa
>
> $$\frac{3}{4} \leq b_1 \leq 3$$

 CC BY-NC-SA 4.0

elde edilir. Yani b_1, $\frac{3}{4}$ ile 3 arasında değişirse mevcut temel değişkenler x_1 ve x_2 temel değişken olarak kalır. Bu aralıkta optimal çözüm $x_1 = 4b_1 - 3$, $x_2 = 3 - b_1$ ve optimal değer

$$z_0 = 2(4b_1 - 3) + 3(3 - b_1) = 5b_1 + 3$$

olur; $b_1 = 1$ için $x_1 = 1, x_2 = 2, z_0 = 8$ bulunur. Aralığın uçlarında temel değişkenlerden biri sıfır olur ($b_1 = \frac{3}{4}$ iken $x_1 = 0$, $b_1 = 3$ iken $x_2 = 0$); çözüm dejenere olur ama baz hâlâ optimaldir. ■

Örnek 10.13 (İkinci kısıtın sağ tarafının değişim aralığı). Aynı problemde ($\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \le 1$, $\frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 \le b_2$, $x_j \ge 0$, $\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$; başta $b_2 = 3$) b_2 hangi aralıkta değişirse optimumluğun bozulmadığı, yani x_1 ve x_2'nin temel değişken olarak kaldığı durumu inceleyiniz.

Çözüm.
B^{-1} aynıdır (Örnek 10.12); bu kez $b_1 = 1$ sabit tutulur:

$$B^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - b_2 \\ -1 + b_2 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Birinci satırdan $4 - b_2 \ge 0$, yani $b_2 \le 4$; ikinci satırdan $-1 + b_2 \ge 0$, yani $b_2 \ge 1$ bulunur. İki aralığın ortak kısmı alınırsa

$$1 \le b_2 \le 4$$

elde edilir. Yani b_2, 1 ile 4 arasında değişirse mevcut temel değişkenler x_1 ve x_2 temel değişken olarak kalır. Bu aralıkta optimal çözüm $x_1 = 4 - b_2$, $x_2 = b_2 - 1$ ve optimal değer

$$z_0 = 2(4 - b_2) + 3(b_2 - 1) = b_2 + 5$$

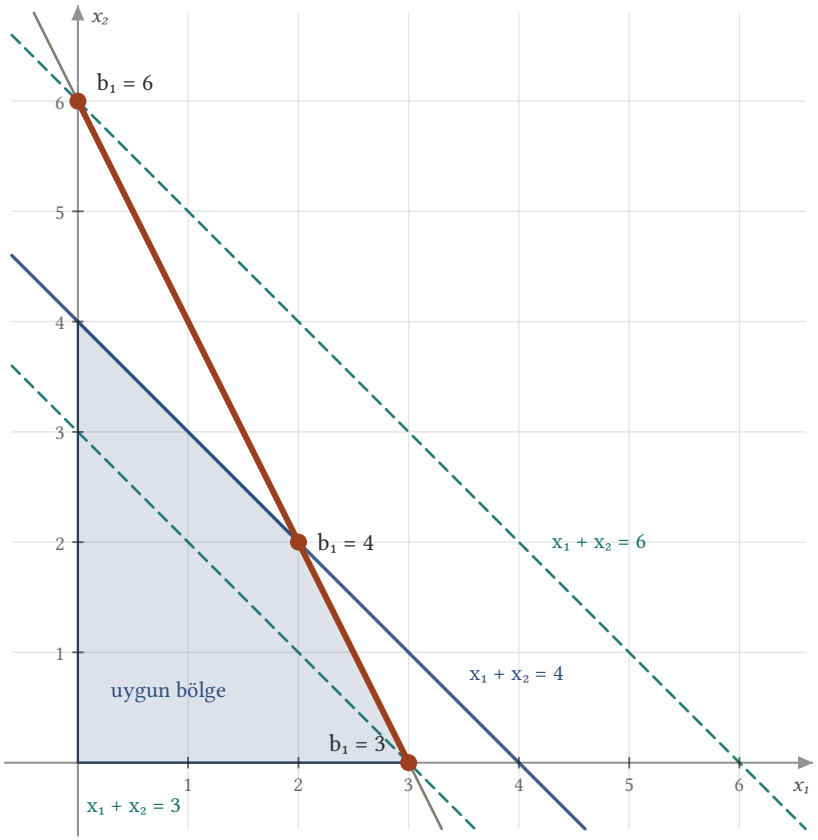
olur. ■

İki değişkenli bir problemde sağ tarafın değişmesi, kısıt doğrusunun kendine paralel olarak kayması demektir. Optimal köşe de onunla birlikte yer değiştirir.

Örnek 10.14 (Sağ taraf değişince optimal köşenin kayması). $x_1 + x_2 \le b_1, 2x_1 + x_2 \le 6, x_1, x_2 \ge 0$, $\max z = 3x_1 + 2x_2$ problemi $b_1 = 4$ için çözülmüş, optimal tablosu Tablo 10.4 bulunmuştur. b_1 hangi aralıkta değişirse temel değişkenler x_1, x_2 olarak kalır? Optimal çözümü ve optimal değeri b_1 cinsinden yazıp grafik üzerinde yorumlayınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.4: $x_1 + x_2 \le b_1$ kısıtının sağ tarafı değiştikçe kısıt doğrusu kendine paralel kayar. Optimal köşe $(6 - b_1, 2b_1 - 6)$ noktasıdır ve $2x_1 + x_2 = 6$ doğrusunun kalın çizilen parçası boyunca yürür: $b_1 = 3$ iken $(3, 0)$, $b_1 = 4$ iken $(2, 2)$, $b_1 = 6$ iken $(0, 6)$. Bu aralığın dışında köşenin bir koordinatı negatif olur.

Örnek 10.3'ta $B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ bulunmuştu; tablonun v_3, v_4 sütunlarında da görünür. $b_2 = 6$ sabit tutulur:

$$B^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - b_1 \\ 2b_1 - 6 \end{bmatrix} \ge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Birinci satır $b_1 \le 6$, ikinci satır $b_1 \ge 3$ verir; değişim aralığı $3 \le b_1 \le 6$'dır. Bu aralıkta

$$x_1 = 6 - b_1, \quad x_2 = 2b_1 - 6, \quad z_0 = 3(6 - b_1) + 2(2b_1 - 6) = b_1 + 6.$$

Örneğin $b_1 = 5$ için $(1, 4)$ ve $z_0 = 11$ bulunur. Kontrol: $1 + 4 = 5$, $2 + 4 = 6$ ve $3 + 8 = 11$.
Geometrik yorum. b_1 değişince $x_1 + x_2 = b_1$ doğrusu kendine paralel kayar; $2x_1 + x_2 = 6$ doğrusu yerinde kalır. Optimal köşe iki doğrunun kesişimi olan $(6 - b_1, 2b_1 - 6)$ noktasıdır ve $2x_1 + x_2 = 6$ doğrusu üzerinde yürür. $b_1 = 3$ iken köşe $(3, 0)$'a, $b_1 = 6$ iken $(0, 6)$'ya ulaşır. $b_1 < 3$ olursa kesişim noktasında $x_2 < 0$, $b_1 > 6$ olursa $x_1 < 0$ olur; kesişim uygun bölgenin dışına düşer ve optimum başka bir bazda bulunur.
Aralığın içinde amaç değeri b_1'in her birim artışında 1 artar. ■

Örnek 10.15 (İkinci kısıtın sağ tarafı). $x_1 + x_2 \le 4$, $2x_1 + x_2 \le b_2$, $x_1, x_2 \ge 0$, $\max z = 3x_1 + 2x_2$ problemi $b_2 = 6$ için çözülmüş, optimal tablosu Tablo 10.4 bulunmuştur. b_2 hangi aralıkta değişirse temel değişkenler x_1, x_2 olarak kalır?

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ve $b_1 = 4$ sabit tutulur:

$$B^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 - 4 \\ 8 - b_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Birinci satır $b_2 \geq 4$, ikinci satır $b_2 \leq 8$ verir; değişim aralığı $4 \leq b_2 \leq 8$'dir. Bu aralıkta $x_1 = b_2 - 4$, $x_2 = 8 - b_2$ ve $z_0 = 3(b_2 - 4) + 2(8 - b_2)$, yani $z_0 = b_2 + 4$ olur. Geometrik olarak $2x_1 + x_2 = b_2$ doğrusu kayar ve optimal köşe $x_1 + x_2 = 4$ doğrusu üzerinde $b_2 = 4$ iken $(0, 4)$'ten $b_2 = 8$ iken $(4, 0)$'a kadar yürür. ■

Örneklerde optimal değerin sağ tarafa doğrusal olarak bağlı olduğunu gördük: Örnek 10.12'de $z_0 = 5b_1 + 3$, Örnek 10.13'de $z_0 = b_2 + 5$. Bu katsayıların, optimal tablonun aylak sütunlarındaki $z_4 - c_4 = 5$ ve $z_5 - c_5 = 1$ kriterleriyle aynı olması tesadüf değildir; bu sayıların anlamını Dualite bölümünde göreceğiz. Aralığın dışına çıkıldığında tablo optimal olmaktan çıkar ama bütünüyle işe yaramaz hâle gelmez. Amaç katsayısı aralığın dışına çıkarsa tablo uygun kalır, yalnız bir ya da birkaç kriter yanlış işaretli olur; simpleks yöntem bu tablodan devam ettirilir. Sağ taraf aralığın dışına çıkarsa kriterler doğru işaretli kalır ama v_0 sütununda negatif bir değer belirir; bu durumu Dual simpleks algoritması çözer.

10.5 Özet

Bu bölümün hesaplarını tek tabloda toplayalım.

Tablo 10.13: Duyarlılık analizinde değişimin etkisi

Değişen veri	Tabloda değişen	Optimumluğun korunma koşulu
Temel dışı x_k'nın c_k'sı	Yalnız $z_k - c_k$	max: $c_k \leq z_k$; min: $c_k \geq z_k$
Temelde olan x_r'nin c_r'si	Temel dışı bütün $z_j - c_j$ ve z_0	Temel dışı her j için max: $z_j - c_j \geq 0$; min: $z_j - c_j \leq 0$
Sağ taraf b_i	v_0 sütunu ve z_0	$B^{-1}\vec{b} \geq \vec{0}$

Bölümün örneğinde (Örnek 10.1) bulunan aralıklar da şöyledir:

Tablo 10.14: Duyarlılık örneğinin değişim aralıkları

Değişen	Değişim aralığı	Aralıkta optimal değer
c_1 (temelde)	$\frac{3}{4} \leq c_1 \leq 3$	$c_1 + 6$
c_2 (temelde)	$2 \leq c_2 \leq 8$	$2 + 2c_2$
c_3 (temel dışı)	$c_3 \leq 4$	8
b_1	$\frac{3}{4} \leq b_1 \leq 3$	$5b_1 + 3$
b_2	$1 \leq b_2 \leq 4$	$b_2 + 5$

Duyarlılık analizi, optimal tablonun yalnız bir çözüm değil, problemin verileri hakkında bir bilgi kaynağı olduğunu gösterdi. Aynı tablonun içinde saklı olan bir başka problem daha vardır: her lineer programlama probleminin bir eşi, bir **dual problemi** bulunur ve optimal tablo onun da çözümünü taşır. Bir sonraki bölüm Dualite bu problemi inceliyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

11. Dualite

Her lineer programlama probleminin bir "ikizi" vardır. Aynı a_{ij}, b_i, c_j sayılarından kurulan bu ikinci probleme **dual problem** denir. Dual problemde kısıtlar ile değişkenlerin rolleri yer değiştirir: primalin her kısıtı dualin bir değişkeni, primalin her değişkeni dualin bir kısıtı olur, maksimum da minimuma dönüşür. İki problemin optimal değerleri aynıdır. Bu yüzden birini çözen ötekini de çözmüş olur.
Bu bölüm, Lineer programlama problemi bölümünde tanımladığımız **kanonik formun** asıl kullanıldığı yerdir (Tanım 1.6). Hatırlayalım: maksimum probleminde bütün kısıtlar $\leq$, minimum probleminde bütün kısıtlar $\geq$ ve bütün değişkenler ≥ 0'dır. Standart forma (Tanım 1.7) ya da simpleks yöntem ile çözülebilir hale (Tanım 1.9) burada ihtiyaç yoktur. Dual problem, **kanonik formdaki** problemden bir transpoz alınarak doğrudan yazılır. Önce dual problemin nereden çıktığını bir örnekte görecek, sonra tanımını verecek, iki problem arasındaki bağı teoremlerle kuracak ve en sonunda iki problemin optimal tablolarını yan yana koyacağız.

11.1 Dual Problemin Fikri

Dual problemi bir tanım olarak vermeden önce onu doğal olarak ortaya çıkaran soruya bakalım: bir minimum probleminin optimal değeri için, problemi çözmeden bir alt sınır bulabilir miyiz?

Örnek 11.1 (Diyet probleminde maliyete alt sınır). Örnek 1.10 diyetini ele alalım: x_1 ve x_2 tüketilecek B_1 ve B_2 besinlerinin miktarı (kg) olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Kısıtları negatif olmayan sayılarla çarpıp toplayarak her diyetin maliyetinin en az 9 TL olduğunu gösteriniz ve buradan optimal diyeti bulunuz.

Çözüm.
Bir kısıtı kullanmak. Birinci kısıtı 2 ile çarpalım: $2x_1 + 2x_2 \geq 8$. Değişkenler negatif olmadığından $3x_2 \geq 2x_2$'dir, dolayısıyla her uygun diyet için

$$z = 2x_1 + 3x_2 \geq 2x_1 + 2x_2 \geq 8.$$

İkinci kısıtla da benzer bir sınır bulunur: $x_1 \geq 0$ olduğundan $z = 2x_1 + 3x_2 \geq x_1 + 3x_2 \geq 6$. İlk sınır daha iyidir; maliyet 8 TL'nin altına inemez.
İki kısıtı birlikte kullanmak. Genel olarak birinci kısıtı $y_1 \geq 0$, ikincisini $y_2 \geq 0$ ile çarpıp toplayalım. Çarpanlar negatif olmadığı için eşitsizliklerin yönü değişmez:

$$(y_1 + y_2)\, x_1 + (y_1 + 3y_2)\, x_2 \geq 4y_1 + 6y_2.$$

Sol taraftaki katsayılar amaçtaki katsayıları aşmıyorsa, yani

$$y_1 + y_2 \leq 2 \qquad \text{ve} \qquad y_1 + 3y_2 \leq 3$$

ise, $x_1, x_2 \geq 0$ olduğundan

$$z = 2x_1 + 3x_2 \geq (y_1 + y_2)\, x_1 + (y_1 + 3y_2)\, x_2 \geq 4y_1 + 6y_2$$

olur. Yani bu iki koşulu sağlayan her $(y_1, y_2) \geq 0$ çifti, $4y_1 + 6y_2$ büyüklüğünde bir alt sınır verir. $(y_1, y_2) = (2, 0)$ yukarıdaki 8 sınırını, $(0, 1)$ ise 6 sınırını verir. $y_1 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{1}{2}$ seçelim: $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \leq 2$ ve $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 \leq 3$ olduğundan koşullar sağlanır ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$z \geq 4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9$$

bulunur. Bu seçimde katsayılar amaçtakilerle tam olarak çakışır:

$$\frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + 3x_2) = 2x_1 + 3x_2.$$

Optimal diyet. $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ diyeti uygundur ($3 + 1 = 4$, $3 + 3 = 6$) ve maliyeti $2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$ TL'dir. Hiçbir diyet 9 TL'den ucuz olamayacağına göre bu diyet optimaldir: $\min z = 9$. Aynı sonucu Örnek 3.8 örneğinde grafik yöntemle bulmuştuk.
■

Örnekte en iyi alt sınırı bulmak da bir lineer programlama problemidir:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\leq 2 \\ y_1 + 3y_2 &\leq 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ \max g &= 4y_1 + 6y_2 \end{aligned}$$

Bu problem diyet probleminin **duali**dir. Nasıl kurulduğuna dikkat edelim. Diyet probleminin i. kısıtı bir y_i değişkeni verdi. x_j değişkeni bir kısıt verdi: x_j'nin katsayıları (A'nın j. sütunu) sol tarafa, c_j sağ tarafa geçti. Amaçtaki katsayılar da primalin sağ tarafları 4 ve 6 oldu. Yani katsayılar tablosu transpoz edildi.
İki koşul da kanonik formdan geliyor. Çarpanların $y_i \geq 0$ olabilmesi için minimum probleminin kısıtlarının hepsi $\geq$ olmalıdır. Bir kısıt $\leq$ olsaydı, onu pozitif bir sayıyla çarpıp ötekilerle toplayınca yönler karışırdı. Katsayıları amaçla karşılaştırırken de $x_j \geq 0$ koşulunu kullandık. İşte kanonik formun istediği tam olarak budur.
Dualin iktisadi bir yorumu da var. Bir eczacının A ve C vitaminini hap olarak sattığını, birim fiyatlarını y_1 ve y_2 TL koyduğunu düşünelim. Hapların besinlerle rekabet edebilmesi için, 1 kg B_1'deki vitaminlerin (1 birim A, 1 birim C) hap karşılığı 2 TL'yi, 1 kg B_2'deki vitaminlerin (1 birim A, 3 birim C) hap karşılığı da 3 TL'yi geçmemelidir. Eczacı, diyetin gerektirdiği 4 birim A ve 6 birim C vitamininden elde edeceği $4y_1 + 6y_2$ gelirini en büyük yapmak ister. Bu, tam olarak yukarıdaki dual problemdir.

11.2 Primal ve Dual Problem

Örnekte yaptığımızı şimdi genel olarak yazalım. Tanım kanonik formdaki iki problem türü için ayrı ayrı verilir: minimum primalin duali bir maksimum problemi, maksimum primalin duali bir minimum problemidir.

Tanım 11.1 (Primal ve dual problem). $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ boyutlu bir matris, $\vec{b} = (b_1, ..., b_m)^T$, $\vec{c} = (c_1, ..., c_n)^T$, $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)^T$ ve $\vec{y} = (y_1, ..., y_m)^T$ olsun.
Minimum primal, maksimum dual. Kanonik formdaki

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\geq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\geq b_m \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n} & \\ \min z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n & \end{aligned}$$

problemi ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m &\le c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m &\le c_2 \\ &\vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m &\le c_n \\ y_i \ge 0, \quad i &= \overline{1,m} \\ \max g &= b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \end{aligned}$$

problemi birbirinin dualidir. Matrislerle:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &\ge \vec{b} \\ \vec{x} &\ge 0 \\ \min z = \vec{c}^T\vec{x} \quad &\Rightarrow \quad A^T\vec{y} \le \vec{c} \\ \vec{y} &\ge 0 \\ \max g &= \vec{b}^T\vec{y} \end{aligned}$$

Maksimum primal, minimum dual. Kanonik formdaki

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\le b_m \\ x_j \ge 0, \quad j &= \overline{1,n} \\ \max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \end{aligned}$$

problemi ile

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m &\ge c_1 \\ &\vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m &\ge c_n \\ y_i \ge 0, \quad i &= \overline{1,m} \\ \min g &= b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \end{aligned}$$

problemi birbirinin dualidir. Matrislerle:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &\le \vec{b} \\ \vec{x} &\ge 0 \\ \max z = \vec{c}^T\vec{x} \quad &\Rightarrow \quad A^T\vec{y} \ge \vec{c} \\ \vec{y} &\ge 0 \\ \min g &= \vec{b}^T\vec{y} \end{aligned}$$

Her iki durumda da bu iki problemden birine **primal (esas) problem**, diğerine **dual problem** denir.

Yani dual problemi yazmak için kanonik formdaki primalin katsayılarını bir tabloya dizer ve tabloyu **sütun sütun** okuruz:

	x_1	$\cdots$	x_n	
y_1	a_{11}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
y_m	a_{m1}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
	c_1	$\cdots$	c_n	

Primal bu tabloyu satır satır okur: i. satır i. kısıttır ve sağ tarafı b_i'dir. Dual aynı tabloyu sütun sütun okur: j. sütun j. dual kısıttır, yani x_j'nin bütün kısıtlardaki katsayıları $a_{1j}, ..., a_{mj}$ sol tarafa, c_j sağ tarafa gelir. y_i değişkeni primalin i. kısıtına aittir. Boyutlara dikkat edelim: A matrisi $m \times n$, A^T ise $n \times m$ boyutludur. Primalde m kısıt ve n değişken varsa dualde n kısıt ve m değişken vardır. A^T matrisi A' ile de gösterilir. Dual değişkenler y_i tek indislidir; simpleks tablosundaki iki indisli y_{ij} sayılarıyla karıştırılmamalıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanımda primalin kanonik formda olduğu varsayılıyor. Kanonik formda olmayan bir problemin duali, önce kanonik forma getirilip sonra tanım uygulanarak yazılır. Aşağıdaki reçete bu işi adım adım yapar.

Dört adımda dual yazma

1. **Primali kanonik forma getir** (Tanım 1.6, Bölüm 1.6). Aylak, artık ya da yapay değişken **eklenmez**; standart form ve simpleks yöntem ile çözülebilir hal burada gerekmez. Yapılacaklar yalnız şunlardır:
   - işaret kısıtlaması olmayan değişkeni $x_j' - x_j''$ ile, $x_j \le 0$ olan değişkeni $-x_j'$ ile değiştir;
   - maksimum probleminde $\ge$ kısıtlarını, minimum probleminde $\le$ kısıtlarını -1 ile çarp;
   - eşitlik kısıtını iki eşitsizliğe ayır (ya da aşağıdaki Önerme 11.1 kısayolunu kullan);
   - sağ tarafların işaretine dokunma: kanonik formda $b_i < 0$ olabilir.
2. **Her kısıta bir dual değişken ata:** i. kısıta $y_i \ge 0$.
3. **Transpoz al:** j. dual kısıtın sol tarafı $a_{1j}y_1 + \ldots + a_{mj}y_m$, sağ tarafı c_j'dir. Maksimum primalde dual kısıtlar $\ge$, minimum primalde $\le$ olur.
4. **Amacı yaz:** maksimum minimuma, minimum maksimuma döner; amaç katsayıları primalin sağ taraflarıdır: $g = b_1y_1 + \ldots + b_my_m$.

Önce zaten kanonik formda olan iki problemle başlayalım.

Örnek 11.2 (Beş kısıtlı bir maksimum probleminin duali). Aşağıdaki problemin dualini yazınız.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 50 \\ 2x_1 + x_2 &\le 110 \\ x_1 + 2x_2 &\le 80 \\ x_1 + 5x_2 &\le 185 \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 300 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max z &= 10x_1 + 15x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.
1. adım: kanonik form. Amaç maksimumdur, beş kısıtın beşi de $\le$ biçimindedir ve iki değişken de ≥ 0'dır. Problem zaten kanonik formdadır; hiçbir değişiklik gerekmez.
2. adım: dual değişkenler. Beş kısıta sırasıyla $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0$ değişkenlerini atarız.
3. adım: transpoz. Katsayılar matrisi ve transpozu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

dir. A^T'nin birinci satırı x_1'in beş kısıttaki katsayılarıdır ve sağ tarafı $c_1 = 10$'dur; ikinci satırı x_2'nin katsayılarıdır ve sağ tarafı $c_2 = 15$'tir. Primal maksimum olduğundan dual kısıtlar $\ge$ olur.
4. adım: amaç. Primalin sağ tarafları $50, 110, 80, 185, 300$ dualin amaç katsayıları olur ve amaç minimuma döner. Dual problem

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + 5y_5 &\ge 10 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 5y_4 + 6y_5 &\ge 15 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\ge 0 \\ \min g = 50y_1 &+ 110y_2 + 80y_3 \\ &+ 185y_4 + 300y_5 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Primalde 5 kısıt ve 2 değişken, dualde 2 kısıt ve 5 değişken vardır.
■

Örnek 11.3 (Üç kısıtlı bir minimum probleminin duali). Aşağıdaki problemin dualini yazınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 4 \\ -2x_1 + 2x_2 &\geq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 10x_1 + 8x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.
1. adım: kanonik form. Amaç minimumdur ve üç kısıtın üçü de $\geq$ biçimindedir; değişkenler ≥ 0'dır. Problem kanonik formdadır.
2. adım: dual değişkenler. Üç kısıta $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ değişkenlerini atarız.
3. adım: transpoz. x_1'in katsayıları $2, 1, -2$ ve $c_1 = 10$ birinci dual kısıtı, x_2'nin katsayıları $1, 3, 2$ ve $c_2 = 8$ ikinci dual kısıtı verir. Primal minimum olduğundan dual kısıtlar $\leq$ olur.
4. adım: amaç. Sağ taraflar $2, 4, 8$ amaç katsayıları olur ve amaç maksimuma döner:

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 - 2y_3 &\leq 10 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\leq 8 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \\ \max g &= 2y_1 + 4y_2 + 8y_3 \end{aligned}$$

■

Şimdi kanonik formda olmayan bir problemle, reçetenin birinci adımının neden gerekli olduğunu görelim.

Örnek 11.4 (Ters yönlü kısıtı olan minimum probleminin duali). Örnek 1.8 problemini ele alalım:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Bu problemin dualini yazınız.

Çözüm.
1. adım: kanonik form. Minimum probleminde bütün kısıtların $\geq$ olması gerekir; ikinci kısıt $\leq$ biçimindedir. Onu -1 ile çarparız: $-x_1 - 3x_2 \geq -9$. Kanonik form

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4 \\ -x_1 - 3x_2 &\geq -9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

olur. Sağ tarafın -9 olması kanonik formu bozmaz; bu satırı standart form için yeniden çevirmeye çalışmayız.
2.–4. adımlar. İki kısıta $y_1, y_2 \geq 0$ atarız. x_1'in sütunu $(1, -1)$, x_2'nin sütunu $(1, -3)$'tür. Dual kısıtlar $\leq$, amaç maksimum olur:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\leq 2 \\ y_1 - 3y_2 &\leq 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ \max g &= 4y_1 - 9y_2 \end{aligned}$$

İkinci kısıtı -1 ile çarpmadan transpoz alsaydık dualde $y_1 + y_2 \leq 2$, $y_1 + 3y_2 \leq 3$ ve $g = 4y_1 + 9y_2$ çıkardı. Bu yanlıştır: örneğin $y = (0, 1)$ bu problemde uygundur ve $g = 9$ verir. Oysa birazdan göreceğimiz zayıf dualiteye göre dualin her uygun değeri primalin her uygun değerinden küçük ya da eşit olmalıdır. Primalin $x = (4, 0)$ uygun çözümünde ise $z = 8 < 9$'dur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Eşitlik kısıtı içeren bir problemde kanonik forma geçiş kısıt sayısını artırır.

Örnek 11.5 (Eşitlik kısıtlı bir maksimum probleminin duali). Aşağıdaki problemin dualini, önce problemi kanonik forma getirerek yazınız.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 4 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \max z &= 3x_1 + 4x_2 - x_3 \end{aligned}$$

Çözüm.
1. adım: kanonik form. Amaç maksimum olduğundan bütün kısıtlar $\leq$ olmalıdır. Satırlara tek tek bakalım.

- Birinci kısıt $\geq$ biçimindedir. -1 ile çarparak yönünü değiştiririz: $-x_1 - x_2 - x_3 \leq -4$.
- İkinci kısıt zaten $\leq$ biçimindedir.

Üçüncü kısıt bir eşitliktir. Önce onu iki eşitsizliğe ayırırız:

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 8 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 8 \end{cases}$$

Birincisi uygun yöndedir. İkincisini -1 ile çarparız: $-x_1 - 2x_2 - 5x_3 \leq -8$.
Böylece kanonik form

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - x_3 &\leq -4 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 8 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 &\leq -8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \max z &= 3x_1 + 4x_2 - x_3 \end{aligned}$$

olur. Kısıt sayısı 3'ten 4'e çıktı.
2. adım: dual değişkenler. Dört kısıta $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ atarız.
3. adım: transpoz. x_1'in dört kısıttaki katsayıları $-1, 2, 1, -1$ ve $c_1 = 3$; x_2'ninkiler $-1, -4, 2, -2$ ve $c_2 = 4$; x_3'ünkiler $-1, -1, 5, -5$ ve $c_3 = -1$'dir. Primal maksimum olduğundan dual kısıtlar $\geq$ olur.
4. adım: amaç. Sağ taraflar $-4, 10, 8, -8$ amaç katsayıları olur ve amaç minimuma döner. Dual problem

$$\begin{aligned} -y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 &\geq 3 \\ -y_1 - 4y_2 + 2y_3 - 2y_4 &\geq 4 \\ -y_1 - y_2 + 5y_3 - 5y_4 &\geq -1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \\ \min g &= -4y_1 + 10y_2 + 8y_3 - 8y_4 \end{aligned}$$

olarak bulunur.
■

Bu dualde y_3 ile y_4 hep birlikte ve zıt katsayılarla görünüyor: her satırda y_3'ün katsayısı a ise y_4'ünki $-a$'dır. Bu bir rastlantı değildir.

Önerme 11.1 (Eşitlik kısıtı ve işaretsiz değişken). *Kanonik forma getirilecek bir primal problem düşünelim.*

1. *Primalin r. kısıtı bir eşitlikse, yani $a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r$ ise, bu kısıt ikiye ayrılmadan bırakılabilir; dual problemde ona karşılık gelen y_r değişkeni **işaretçe kısıtsız** olur.*
2. *Primalin x_s değişkeni işaretçe kısıtsızsa, bu değişken $x_s' - x_s''$ diye yazılmadan bırakılabilir; dual problemde ona karşılık gelen s. kısıt bir **eşitlik** olur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Diğer bütün kısıtlar ve değişkenler tanımdaki gibi yazılır.

> ***İspat.***
> *İspatı maksimum primal için yapıyoruz; minimum primalde yalnız eşitsizliklerin yönleri ters döner.*
> ***1. madde.*** *Eşitliği $a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rn}x_n \le b_r$ ve $-a_{r1}x_1 - \ldots - a_{rn}x_n \le -b_r$ diye ikiye ayıralım ve bu iki kısıta $y'_r \ge 0$, $y''_r \ge 0$ dual değişkenlerini atayalım. Transpoz alınca j. dual kısıtta bu iki değişken*
>
> $$a_{rj}\,y'_r + (-a_{rj})\,y''_r = a_{rj}\,(y'_r - y''_r)$$
>
> *terimiyle, amaçta da $b_r y'_r + (-b_r)y''_r = b_r(y'_r - y''_r)$ terimiyle görünür. Yani dual problem y'_r ve y''_r'ye yalnız $y'_r - y''_r$ farkı üzerinden bağlıdır. $y_r = y'_r - y''_r$ yazalım. Önerme 8.1 gereği $y'_r, y''_r \ge 0$ olan problem ile y_r'nin işaretsiz olduğu problem aynı amaç değerlerini alır; birinin her uygun çözümü ötekinin aynı değerli bir uygun çözümüne dönüşür. Dolayısıyla dual, y_r işaretçe kısıtsız olmak üzere tek bir değişkenle yazılabilir.*
> ***2. madde.*** *$x_s = x'_s - x''_s$, $x'_s, x''_s \ge 0$ yazalım. Katsayılar matrisinde x'_s'nün sütunu A'nın s. sütunu $(a_{1s}, \ldots, a_{ms})$, amaç katsayısı c_s'dir; x''_s'nün sütunu bunun negatifi, amaç katsayısı $-c_s$'dir. Bu iki sütun iki dual kısıt verir:*
>
> $$a_{1s}y_1 + \ldots + a_{ms}y_m \ge c_s, \qquad -a_{1s}y_1 - \ldots - a_{ms}y_m \ge -c_s.$$
>
> *İkincisi -1 ile çarpılınca $a_{1s}y_1 + \ldots + a_{ms}y_m \le c_s$ olur. Bir sayı c_s'den hem büyük-eşit hem küçük-eşitse c_s'ye eşittir; iki kısıt birlikte*
>
> $$a_{1s}y_1 + a_{2s}y_2 + \ldots + a_{ms}y_m = c_s$$
>
> *eşitliğine denktir.*
> ■

Yani eşitlik kısıtını ikiye ayırmak, dualde tek bir işaretsiz değişkeni iki negatif olmayan değişkenin farkı olarak yazmaktan başka bir şey değildir. Bu yüzden eşitlik kısıtları ve işaretsiz değişkenler kanonik forma getirilirken olduğu gibi bırakılabilir. Bütün karşılıkları bir tabloda toplayalım.

Tablo 11.1: Primal–dual karşılık tablosu

Maksimum problemi	Minimum problemi
amaç $\max z = \vec{c}^{\,T}\vec{x}$	amaç $\min g = \vec{b}^{\,T}\vec{y}$
m kısıt	m değişken
n değişken	n kısıt
sağ taraf vektörü $\vec{b}$	amaç katsayıları $\vec{b}$
amaç katsayıları $\vec{c}$	sağ taraf vektörü $\vec{c}$
katsayılar matrisi A	katsayılar matrisi A^T
i. kısıt $\le$	i. değişken $y_i \ge 0$
i. kısıt $=$	i. değişken y_i işaretsiz
j. değişken $x_j \ge 0$	j. kısıt $\ge$
j. değişken x_j işaretsiz	j. kısıt $=$

Karşılık tablosu (Tablo 11.1) iki yönde de okunur. Primal maksimum problemiyse soldan sağa, minimum problemiyse sağdan sola okunur. Minimum primalde değişkenlerin adları yer değiştirir: primalin değişkenleri x_j, dualinkiler y_i olur. Örneğin minimum primalin i. kısıtı $\ge$ ise ona karşılık gelen dual değişken ≥ 0'dır. Tablonun iki yönde okunabilmesinin nedenini Teorem 11.1 gösterecek. Tabloyu kullanmadan önce kanonik forma getirme adımını unutmamak gerekir. Maksimumda $\ge$, minimumda $\le$ kısıtı önce -1 ile çarpılır; tabloda bu satırlara karşılık bir satır yoktur.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Dual yazarken sık yapılan hatalar

- **Standart forma getirmek.** Dual, kanonik formdan yazılır. Aylak ya da artık değişken ekleyip eşitliklerden dual yazmak işi gereksiz yere uzatır; bütün kısıtlar eşitlik olacağı için dual değişkenlerin hepsi işaretsiz çıkar.
- **Ters yönlü kısıtı çevirmemek.** Minimum probleminde $\leq$, maksimum probleminde $\geq$ kısıtı transpozdan önce -1 ile çarpılmalıdır (bkz. Örnek 11.4).
- **Sağ tarafı pozitif yapmaya çalışmak.** Kanonik formda $b_i < 0$ olabilir; b_i olduğu gibi dualin amaç katsayısı olur.
- **Satır ile sütunu karıştırmak.** j. dual kısıtın katsayıları A'nın j. **sütunudur**, yani tek bir değişkenin bütün kısıtlardaki katsayılarıdır.
- **Yönü değiştirmeyi unutmak.** Maksimum primalin dual kısıtları $\geq$, minimum primalinkiler $\leq$'dir.

Örnek 11.6 (Eşitlik kısıtlı problemin duali kısa yoldan). Örnek 11.5 problemini ($x_1 + x_2 + x_3 \geq 4,\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \leq 10,\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 8,\ x_1, x_2, x_3 \geq 0,\ \max z = 3x_1 + 4x_2 - x_3$) Önerme 11.1 yardımıyla, eşitliği ikiye ayırmadan dualine dönüştürünüz ve sonucu Örnek 11.5 ile karşılaştırınız.

Çözüm.
1. adım: kanonik form. Birinci kısıtı -1 ile çarparız: $-x_1 - x_2 - x_3 \leq -4$. İkinci kısıt uygundur. Üçüncü kısıt eşitliktir ve Önerme 11.1 gereği olduğu gibi bırakılır.
2.–4. adımlar. Karışmasın diye dual değişkenlere bu kez t_1, t_2, t_3 diyelim. $t_1, t_2 \geq 0$'dır; eşitlik kısıtına karşılık gelen t_3 ise işaretçe kısıtsızdır. Sütunlar x_1 için $(-1, 2, 1)$, x_2 için $(-1, -4, 2)$, x_3 için $(-1, -1, 5)$'tir:

$$\begin{aligned} -t_1 + 2t_2 + t_3 &\geq 3 \\ -t_1 - 4t_2 + 2t_3 &\geq 4 \\ -t_1 - t_2 + 5t_3 &\geq -1 \\ t_1, t_2 \geq 0, \quad t_3 &\ \text{işaretçe kısıtsız} \\ \min g &= -4t_1 + 10t_2 + 8t_3 \end{aligned}$$

Karşılaştırma. Örnek 11.5 dualinde $t_1 = y_1$, $t_2 = y_2$ ve $t_3 = y_3 - y_4$ yazalım. Örneğin birinci dual kısıt $-y_1 + 2y_2 + (y_3 - y_4) \geq 3$, amaç da $-4y_1 + 10y_2 + 8(y_3 - y_4)$ olur; üç kısıt ve amaç bu yolla aynen yukarıdakilere dönüşür. Tersine, işaretçe kısıtsız t_3 değişkenine $t_3 = t_3' - t_3''$ dönüşümü yapılırsa $t_3' = y_3$, $t_3'' = y_4$ ile önceki dual problem geri gelir. İki problem birbirinin aynısıdır; kısa yol yalnız bir değişken ve bir kısıt tasarruf eder.
■

Örnek 11.7 (Üç türlü kısıtı olan maksimum probleminin duali). Aşağıdaki problemin dualini yazınız.

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &\leq 50 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 30 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &\geq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \end{aligned}$$

Çözüm.
1. adım: kanonik form. Maksimum probleminde kısıtlar $\leq$ olmalıdır. Birinci kısıt uygundur. İkinci kısıt eşitliktir ve Önerme 11.1 gereği olduğu gibi kalır. Üçüncü kısıt $\geq$ biçimindedir; -1 ile çarparız:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &\leq 50 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 &\leq -20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

2. adım: dual değişkenler. Birinci ve üçüncü kısıta $y_1, y_3 \geq 0$, eşitlik olan ikinci kısıta işaretçe kısıtsız y_2 atarız.
3. adım: transpoz. Dört değişkenin sütunları x_1 için $(1, 3, -1)$, x_2 için $(4, 1, -2)$, x_3 için $(1, 2, -1)$, x_4 için $(1, 1, -2)$'dir. Sağ taraflar $c_j = 1, 2, 3, 7$'dir ve dual kısıtlar $\geq$ olur.
4. adım: amaç. Sağ taraflar $50, 30, -20$ amaç katsayıları olur:

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_2 - y_3 &\geq 1 \\ 4y_1 + y_2 - 2y_3 &\geq 2 \\ y_1 + 2y_2 - y_3 &\geq 3 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 &\geq 7 \\ y_1, y_3 \geq 0, \quad y_2 &\text{ işaretçe kısıtsız} \\ \min g &= 50y_1 + 30y_2 - 20y_3 \end{aligned}$$

Eşitliği ikiye ayırsaydık y_2 yerine $y_2' \geq 0$ ve $y_2'' \geq 0$ gibi iki değişken çıkacak, her yerde $y_2' - y_2''$ farkıyla görünecekti.
■

Karşılık tablosunun son satırını, yani işaretsiz primal değişkenin dualde eşitlik kısıtı verdiğini de bir örnekte görelim.

Örnek 11.8 (İşaretsiz değişkenli problemin duali). Örnek 1.17 problemini ele alalım: $x_1 \geq 0$ ve x_2 işaretçe kısıtsız olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\geq -2 \\ \max z &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Bu problemin dualini yazınız.

Çözüm.
1. adım: kanonik form. Maksimum probleminde ikinci kısıt $\leq$ olmalıdır; -1 ile çarparız: $-x_1 + x_2 \leq 2$. İşaretsiz x_2'yi Önerme 11.1 gereği olduğu gibi bırakıyoruz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\text{ işaretçe kısıtsız} \\ \max z &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

2.–4. adımlar. İki kısıta $y_1, y_2 \geq 0$ atarız. x_1'in sütunu $(1, -1)$'dir ve $x_1 \geq 0$ olduğundan bir $\geq$ kısıtı verir. x_2'nin sütunu $(1, 1)$'dir ve x_2 işaretsiz olduğundan bir eşitlik kısıtı verir:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\geq 1 \\ y_1 + y_2 &= 3 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ \min g &= 6y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

Uzun yoldan sağlama. Örnek 1.17 örneğinde $x_2 = x_2' - x_2''$ yazıp kanonik forma getirmiştik: $x_1 + x_2' - x_2'' \leq 6$, $-x_1 + x_2' - x_2'' \leq 2$, $\max z = x_1 + 3x_2' - 3x_2''$. Buradan tanımla dual yazılırsa x_2''nün sütunu $y_1 + y_2 \geq 3$, x_2'''nün sütunu $-y_1 - y_2 \geq -3$, yani $y_1 + y_2 \leq 3$ kısıtını verir. İkisi birlikte $y_1 + y_2 = 3$ eşitliğidir.
■

11.3 Dualin Duali

Tanımda "birbirinin dualidir" dedik; yani ilişki simetriktir. Bunu şimdi gösterelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 11.1 (Dualin duali primaldir). *Kanonik formdaki bir problemin dual probleminin duali, problemin kendisidir.*

> ***İspat.***
> *Primal $A\vec{x} \leq \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$, $\max z = \vec{c}^T\vec{x}$ olsun. Tanıma göre duali*
>
> $$A^T\vec{y} \geq \vec{c}, \qquad \vec{y} \geq 0, \qquad \min g = \vec{b}^T\vec{y}$$
>
> *problemidir. Bu bir minimum problemidir, bütün kısıtları $\geq$ ve bütün değişkenleri ≥ 0'dır; yani kendisi de kanonik formdadır. Tanımın minimum primal kısmını bu probleme uygulayalım. Katsayılar matrisi A^T, sağ taraf vektörü $\vec{c}$, amaç katsayıları $\vec{b}$'dir. Dolayısıyla $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ yeni değişken vektörü olmak üzere duali*
>
> $$(A^T)^T\vec{u} \leq \vec{b}, \qquad \vec{u} \geq 0, \qquad \max \vec{c}^T\vec{u}$$
>
> *problemidir. $(A^T)^T = A$ olduğundan bu, değişkenin adı dışında primalin kendisidir.*
> *Primal minimum problemi ($A\vec{x} \geq \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$, $\min z = \vec{c}^T\vec{x}$) ise duali $A^T\vec{y} \leq \vec{c}$, $\vec{y} \geq 0$, $\max g = \vec{b}^T\vec{y}$'dir. Bu kanonik formdaki bir maksimum problemidir ve tanımın maksimum kısmı onun dualini $A\vec{u} \geq \vec{b}$, $\vec{u} \geq 0$, $\min \vec{c}^T\vec{u}$ olarak verir. Bu da primalin kendisidir.*
> ■

Yani "primal" ve "dual" adları yalnız hangi problemden yola çıktığımızı söyler; iki problem bir **dual çift** oluşturur. Eşitlik kısıtı ve işaretsiz değişken içeren problemler için de aynısı geçerlidir. Primalin r. kısıtı eşitlikse dualde y_r işaretsizdir; dualin dualinde bu işaretsiz değişken Önerme 11.1 ikinci maddesi gereği yeniden bir eşitlik kısıtı verir. Primalin x_s değişkeni işaretsizse dualin s. kısıtı eşitliktir; bu kısıt dualin dualinde Önerme 11.1 birinci maddesi gereği yeniden işaretsiz bir değişken verir. Diğer satırlar kanonik durumdaki gibidir. Bu yüzden karşılık tablosu (Tablo 11.1) iki yönde aynı biçimde okunur.

Örnek 11.9 (Bir dualin dualini yazmak). Örnek 11.3 dualinin ($2y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 10,\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 8, y_1, y_2, y_3 \geq 0, \max g = 2y_1 + 4y_2 + 8y_3$) dualini yazınız.

> **Çözüm.**
> Problem bir maksimum problemidir, iki kısıtı da $\leq$ ve üç değişkeni de ≥ 0'dır; kanonik formdadır. İki kısıta $u_1, u_2 \geq 0$ dual değişkenlerini atarız. y_1'in sütunu $(2, 1)$ ve amaç katsayısı 2; y_2'ninki $(1, 3)$ ve 4; y_3'ünkü $(-2, 2)$ ve 8'dir. Maksimumun duali minimumdur ve kısıtları $\geq$'dir:
>
> $$\begin{aligned} 2u_1 + u_2 &\geq 2 \\ u_1 + 3u_2 &\geq 4 \\ -2u_1 + 2u_2 &\geq 8 \\ u_1, u_2 &\geq 0 \\ \min\ & 10u_1 + 8u_2 \end{aligned}$$
>
> $u_1 = x_1$, $u_2 = x_2$ yazınca Örnek 11.3 primal problemi harfi harfine geri gelir.
> ■

11.4 Zayıf Dualite

Örnek 11.1 örneğinde dualin her uygun çözümü primalin optimal değeri için bir alt sınır veriyordu. Bu gözlem her dual çift için doğrudur.

Teorem 11.2 (Zayıf dualite teoremi). *$\vec{x}$ minimum primalin ($A\vec{x} \geq \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$, $\min z = \vec{c}^T\vec{x}$) herhangi bir uygun çözümü, $\vec{y}$ de dualinin ($A^T\vec{y} \leq \vec{c}$, $\vec{y} \geq 0$, $\max g = \vec{b}^T\vec{y}$) herhangi bir uygun çözümü olsun. Bu durumda*

$$g(\vec{y}) = \vec{b}^T\vec{y} \leq \vec{c}^T\vec{x} = z(\vec{x})$$

olur. Primal maksimum problemiyse ($A\vec{x} \leq \vec{b}$, dual $A^T\vec{y} \geq \vec{c}$, $\min g$) eşitsizlik $z(\vec{x}) \leq g(\vec{y})$ biçimini alır. Kısaca: bir dual çiftte maksimum probleminin her uygun değeri, minimum probleminin her uygun değerinden küçük ya da ona eşittir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Hesabı toplamlarla açık açık yazalım. $\vec{y}$ uygun olduğundan her i için $y_i \geq 0$; $\vec{x}$ uygun olduğundan her i için $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$'dir. $b_i \leq \sum_j a_{ij}x_j$ eşitsizliğini negatif olmayan y_i ile çarpınca yön değişmez. i üzerinden toplarsak

$$\begin{aligned} g(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i &\leq \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \Big) y_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \Big) x_j \end{aligned}$$

bulunur. Son adımda yalnız toplama sırasını değiştirdik. Şimdi dual kısıtları kullanalım: her j için $\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$'dir ve $x_j \geq 0$ olduğundan bu eşitsizliği x_j ile çarpınca yön yine değişmez. Böylece

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \Big) x_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z(\vec{x})$$

olur ve iki eşitsizlik birlikte $g(\vec{y}) \leq z(\vec{x})$ verir.
Primal maksimum problemiyse Teorem 11.1 gereği primal, kanonik formdaki minimum dualin dualidir. Yukarıdaki sonucu bu çifte uygularız. Minimum problemi dual, maksimum problemi primal olduğundan $z(\vec{x}) \leq g(\vec{y})$ çıkar.
■

Yani ispat kanonik formun her parçasını kullanır. Minimum primalin kısıtları $\geq$ ve $y_i \geq 0$ olduğu için birinci eşitsizlik doğru yöndedir. Dual kısıtlar $\leq$ ve $x_j \geq 0$ olduğu için ikinci eşitsizlik de doğru yöndedir. Kanonik formu atlayıp yanlış yönlü bir kısıttan dual yazınca zayıf dualitenin bozulmasının nedeni budur (bkz. Örnek 11.4).

Örnek 11.10 (Zayıf dualitenin sayısal bir örneği). Örnek 11.1 diyetinde ($x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 + 3x_2 \geq 6$, $\min z = 2x_1 + 3x_2$) $\vec{x} = (3, 2)$ ve dualinde ($y_1 + y_2 \leq 2$, $y_1 + 3y_2 \leq 3$, $\max g = 4y_1 + 6y_2$) $\vec{y} = (1, \frac{1}{2})$ noktalarının uygun olduğunu gösteriniz. Zayıf dualitenin iki problemin optimal değerleri hakkında ne söylediğini bulunuz.

Çözüm.
Uygunluk. $\vec{x} = (3, 2)$ için $3 + 2 = 5 \geq 4$ ve $3 + 6 = 9 \geq 6$; ayrıca $x_1, x_2 \geq 0$. Maliyet $z = 6 + 6 = 12$'dir. $\vec{y} = (1, \frac{1}{2})$ için $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \leq 2$ ve $1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \leq 3$; ayrıca $y_1, y_2 \geq 0$. Değer $g = 4 + 3 = 7$'dir.
Sonuç. Zayıf dualite gereği $7 \leq 12$ olmalıdır; gerçekten öyledir. Daha fazlasını da söyler. Primalin her uygun değeri 7'den küçük olamaz, dolayısıyla $\min z \geq 7$'dir. Dualin her uygun değeri 12'yi aşamaz, dolayısıyla $\max g \leq 12$'dir. Tek bir uygun çift, iki optimal değeri de 7 ile 12 arasına sıkıştırır. Daha iyi bir çift, $\vec{x} = (3, 1)$ ile $\vec{y} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, bu aralığı tek bir noktaya indirir: ikisinde de değer 9'dur.
■

Son gözlem genel bir sonuçtur.

Sonuç 11.1 (Değerleri eşit olan uygun çözümler optimaldir). *Bir dual çiftte primalin uygun bir $\vec{x}^*$ çözümü ile dualin uygun bir $\vec{y}^*$ çözümü için $z(\vec{x}^*) = g(\vec{y}^*)$ ise $\vec{x}^*$ primalin, $\vec{y}^*$ de dualin optimal çözümüdür.*

İspat.
Primal minimum problemi olsun. $\vec{x}$ primalin herhangi bir uygun çözümüyse zayıf dualite (Teorem 11.2) gereği $z(\vec{x}) \geq g(\vec{y}^*) = z(\vec{x}^*)$ olur. Hiçbir uygun çözüm $\vec{x}^*$'dan daha küçük değer vermediğinden $\vec{x}^*$ optimaldir. Aynı biçimde dualin her uygun $\vec{y}$ çözümü için $g(\vec{y}) \leq z(\vec{x}^*) = g(\vec{y}^*)$'dır ve $\vec{y}^*$ maksimum problemi olan dualin optimal çözümüdür. Primal maksimum problemiyse eşitsizlikler ters yönde yazılır.
■

Sonuç 11.2 (Sınırsız problemin duali). *Bir dual çiftte problemlerden birinin sınırsız çözümü varsa (Tanım 7.1), diğerinin uygun çözümü yoktur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

> ***İspat.***
> *Minimum problemi sınırsız olsun, ama maksimum probleminin bir $\vec{y}$ uygun çözümü bulunsun. Zayıf dualite gereği minimum probleminin her uygun $\vec{x}$ çözümü için $z(\vec{x}) \geq g(\vec{y})$'dir; yani amaç fonksiyonu alttan $g(\vec{y})$ sayısıyla sınırlıdır. Bu, sınırsızlıkla çelişir. Maksimum problemi sınırsızsa aynı akıl yürütme, minimum probleminin bir uygun çözümü varsa maksimum probleminin amacının üstten sınırlı olacağını gösterir.*
> ■

Örnek 11.11 (Sınırsız bir problemin uygun çözümü olmayan duali). Örnek 3.11 problemi ($-x_1 + x_2 \leq 1, x_1 - 2x_2 \leq 2, x_1, x_2 \geq 0, \max z = x_1 + x_2$) sınırsızdır. Dualini yazınız ve dualin uygun çözümü olmadığını doğrudan gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Problem kanonik formdadır: maksimum, iki kısıt $\leq$, değişkenler ≥ 0. x_1'in sütunu $(-1, 1)$, x_2'ninki $(1, -2)$'dir. Dual problem şudur:
>
> $$\begin{aligned} -y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1 - 2y_2 &\geq 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ \min g &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$
>
> Birinci kısıtı 2 ile çarpıp ikincisine ekleyelim. Çarpan pozitif olduğundan yön korunur:
>
> $$2(-y_1 + y_2) + (y_1 - 2y_2) \geq 2 \cdot 1 + 1, \qquad \text{yani} \qquad -y_1 \geq 3.$$
>
> Buradan $y_1 \leq -3$ çıkar; bu, $y_1 \geq 0$ koşuluyla çelişir. Dualin uygun çözümü yoktur. Sonuç 11.2 de bunu söyler.
> ■

11.5 Güçlü Dualite

Zayıf dualite iki optimal değer arasında bir eşitsizlik veriyor. Güçlü dualite, optimal değerler varsa aralarında boşluk kalmadığını söyler. Üstelik dualin optimal çözümü, primalin optimal simpleks tablosundan hazır olarak okunur. Bunu görmek için tablonun sütunlarını bir matrisle ifade edelim.

Lemma 11.1 (Tablo sütunları ve baz matrisi). *Standart formdaki bir problemin bir simpleks tablosunda, satırlardaki baz vektörleri sırasıyla $v_{B_1}, \ldots, v_{B_m}$ olsun. Bu vektörleri sütun olarak yan yana yazarak elde edilen $m \times m$ matrise **baz matrisi** diyelim ve B ile gösterelim. Bu durumda B tersinirdir ve tablonun v_0 dahil her v_j sütunu için (aylak, artık ve yapay değişkenlerin sütunları da dahil)*

$$\vec{y}_j = B^{-1} v_j, \qquad z_j = \vec{w}^{\,T} v_j$$

olur. Burada $\vec{w}^{\,T} = \vec{c}_B^{\,T} B^{-1}$'dir.

> ***İspat.***
> *Baz vektörleri lineer bağımsızdır; sütunları lineer bağımsız olan kare matris tersinirdir. Tablonun v_j sütunundaki $y_{1j}, \ldots, y_{mj}$ sayıları, Tanım 4.2 gereği $v_j = y_{1j} v_{B_1} + \ldots + y_{mj} v_{B_m}$ eşitliğini sağlar. Sağ taraf, B matrisinin $\vec{y}_j$ vektörüyle çarpımıdır: $v_j = B\vec{y}_j$. Soldan B^{-1} ile çarparak $\vec{y}_j = B^{-1} v_j$ buluruz. Buradan*
>
> $$z_j = \vec{c}_B^{\,T} \vec{y}_j = \vec{c}_B^{\,T} B^{-1} v_j = \vec{w}^{\,T} v_j$$
>
> *çıkar. $j = 0$ için bu, $z_0 = \vec{w}^{\,T} v_0$ demektir.*
> ■

Yani tek bir $\vec{w}$ vektörü tablodaki bütün z_j değerlerini üretir: z_j, $\vec{w}$ ile **orijinal** sütun v_j'nin iç çarpımıdır. $\vec{w}$'nin bileşenlerine **simpleks çarpanları** denir. Birazdan göreceğimiz gibi dual optimal çözüm bu çarpanlardan elde edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 11.3 (Güçlü dualite teoremi). *Kanonik formdaki primal problem standart forma getirilip simpleks yöntemle (gerekirse Büyük M yöntemiyle) çözülsün ve yapay değişkenlerin hepsi sıfır olan bir optimal tabloya ulaşılsın. Bu durumda dual problemin de optimal çözümü vardır ve iki problemin optimal değerleri eşittir: primal maksimumsa $\max z = \min g$, primal minimumsa $\min z = \max g$.*

İspat.
Primal $A\vec{x} \leq \vec{b}, \vec{x} \geq 0, \max z = \vec{c}^{\,T}\vec{x}$ olsun; minimum durumunu sonda ele alacağız.
Standart form. *Her i. kısıta bir $x_{n+i} \geq 0$ değişkeni gelir. $b_i \geq 0$ ise x_{n+i} aylak değişken olarak eklenir: $\sum_j a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$. $b_i < 0$ ise önce satır -1 ile çarpılır ve kısıt $\geq$ biçimine döner; sonra x_{n+i} artık değişken olarak çıkarılır: $-\sum_j a_{ij}x_j - x_{n+i} = -b_i$. İki durumu birlikte yazmak için $b_i \geq 0$ ise $\sigma_i = 1$, $b_i < 0$ ise $\sigma_i = -1$ diyelim. i. denklem*

$$\sigma_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \sigma_i x_{n+i} = \sigma_i b_i$$

olur. Standart formda x_j'nin ($j \leq n$) sütunu $v_j = (\sigma_1 a_{1j}, ..., \sigma_m a_{mj})^T$, x_{n+i}'nin sütunu da $v_{n+i} = \sigma_i \vec{e}_i$'dir. Burada $\vec{e}_i$, i. bileşeni 1, diğerleri 0 olan birim vektördür. Sağ taraf $v_0 = (\sigma_1 b_1, ..., \sigma_m b_m)^T \geq 0$'dır. Amaç katsayıları x_j için c_j, x_{n+i} için 0'dır. Yapay değişkenler bu sütunlara ek olarak gelir.
Optimal tablo. *Tablonun çözümünde yapay değişkenler sıfır olduğundan, ilk n bileşeni alınarak elde edilen $\vec{x}^*$ primalin bir uygun çözümüdür ve $z(\vec{x}^*) = z_0$'dır (Teorem 5.1). Bazda sıfır değerli yapay değişkenler kalmışsa c_B sütununda M bulunur ve kriterler $aM + b$ biçimindedir. Tablo optimal olduğundan bu kriterlerin her biri, yeterince büyük her M için ≥ 0'dır (Önerme 5.2). Kriterlerin sayısı sonlu olduğundan hepsini birden ≥ 0 yapan bir M sayısı seçip sabitleyebiliriz. Böylece tablodaki her sütun için $z_j - c_j \geq 0$ bir sayı eşitsizliği olur. Lemma 11.1 ile $\vec{w}^{\,T} = \vec{c}_B^{\,T} B^{-1}$ alalım ve her i için $y_i = \sigma_i w_i$ diyelim.*
$\vec{y}$ dualin uygun çözümüdür. *x_{n+i} sütununun kriteri*

$$z_{n+i} - c_{n+i} = \vec{w}^{\,T}(\sigma_i \vec{e}_i) - 0 = \sigma_i w_i = y_i$$

olduğundan $y_i \geq 0$'dır. x_j sütununun kriteri ise

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} w_i\, \sigma_i a_{ij} - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j$$

olduğundan her $j = \overline{1,n}$ için $\sum_i a_{ij}y_i \geq c_j$, yani $A^T\vec{y} \geq \vec{c}$'dir.
Değerler eşittir. *$\sigma_i^2 = 1$ olduğundan $b_i y_i = (\sigma_i b_i)\, w_i$'dir. Lemma 11.1 içindeki $z_0 = \vec{w}^{\,T} v_0$ eşitliğiyle*

$$g(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = \sum_{i=1}^{m} (\sigma_i b_i)\, w_i = \vec{w}^{\,T} v_0 = z_0 = z(\vec{x}^*)$$

bulunur. Bazdaki yapay değişkenlerin değeri sıfır olduğundan z_0'da M kalmaz; seçtiğimiz M sayısı sonucu etkilemez. $\vec{x}^*$ ve $\vec{y}$ uygun ve değerleri eşit olduğundan Sonuç 11.1 gereği ikisi de optimaldir ve $\max z = \min g$'dir.
Minimum primal. *$A\vec{x} \geq \vec{b}, \min z = \vec{c}^{\,T}\vec{x}$ için $b_i \geq 0$ olan satırdan artık değişken çıkarılır. $b_i < 0$ olan satır ise -1 ile çarpılıp $\leq$ biçimine döner ve ona aylak değişken eklenir. İki durumda da x_{n+i}'nin sütunu $-\sigma_i \vec{e}_i$ olur. Optimal tabloda bu kez her $z_j - c_j \leq 0$'dır. Aynı $y_i = \sigma_i w_i$ tanımıyla $z_{n+i} - c_{n+i} = -y_i \leq 0$, yani $y_i \geq 0$ bulunur. x_j sütunlarından $\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$ elde edilir. Değer hesabı aynen $g(\vec{y}) = z_0$ verir ve Sonuç 11.1 ile $\min z = \max g$ olur.*
■

İspat dual çözümü de açıkça verdi. Kısıtların sağ tarafları negatif olmadığında ($\sigma_i = 1$) bu çözüm doğrudan tablodan okunur.

Önerme 11.2 (Dual optimal çözümün tablodan okunması). *Güçlü dualite teoreminin (Teorem 11.3) koşulları sağlansın ve $\vec{b} \geq 0$ olsun. x_{n+i}, primalin i. kısıtına standart forma geçerken eklenen (maksimumda aylak, minimumda artık) değişken olsun.*

1. *Primal maksimum problemiyse ($A\vec{x} \leq \vec{b}$) dualin bir optimal çözümü, primal optimal tablonun aylak sütunlarının simpleks kriterleridir: $y_i^* = z_{n+i} - c_{n+i}$, $i = \overline{1,m}$.*

 CC BY-NC-SA 4.0

2. *Primal minimum problemiyse ($A\vec{x} \geq \vec{b}$) dualin bir optimal çözümü, primal optimal tablonun artık sütunlarının simpleks kriterlerinin negatifleridir: $y_i^* = -(z_{n+i} - c_{n+i})$, $i = \overline{1,m}$.*

> ***İspat.***
> *$\vec{b} \geq 0$ olduğundan her i için $\sigma_i = 1$'dir. Teorem 11.3 ispatında bulunan optimal dual çözüm $y_i = \sigma_i w_i = w_i$'dir. Aynı ispatta maksimum durumu için $z_{n+i} - c_{n+i} = y_i$, minimum durumu için $z_{n+i} - c_{n+i} = -y_i$ bulunmuştu.*
> ■

Yani maksimum probleminde aylak değişkenlerin başlangıç tablosundaki sütunları birim matrisi oluşturur. Optimal tabloda bu sütunlarda B^{-1} durur ve kriterleri doğrudan simpleks çarpanlarını verir. Minimum probleminde artık değişkenlerin sütunları $-I$ olduğu için işaret değişir.
Teoremin koşulu, yani yapay değişkenleri sıfır olan bir optimal tabloya ulaşılması, optimal çözümü olan her problemde sağlanır. Bunu görmek için simpleks yöntem hakkında şu bilgiyi kullanacağız.

> **i** Not
>
> **Not.** Simpleks yöntemin, Büyük M yöntemiyle birlikte, her problemde sonlu sayıda iterasyondan sonra durduğunu kabul ediyoruz. Hiçbir uygun temel çözüm dejenere değilse bunu Sonuç 4.4 gösterir. Dejenere problemlerde yöntem aynı bazlar arasında dönüp durabilir. Baza girecek ve bazdan çıkacak vektörler uygun bir kuralla seçilirse bu önlenir. Bu genel bilgiyi burada ispatsız kullanıyoruz. Yöntem durduğunda üç sonuçtan biri ortaya çıkar: bazda pozitif değerli bir yapay değişken kalan bir optimal tablo (Teorem 5.2), yapay değişkenlerin hepsi sıfır olan bir optimal tablo (Teorem 5.1) ya da sınırsızlık belirtisi (Önerme 4.2).

Önerme 11.3 (Uygun çözümü olan problemin iki durumu). *Kanonik formdaki bir problemin uygun çözümü olsun. Bu durumda ya problemin sınırsız çözümü vardır (Tanım 7.1), ya da simpleks yöntem (gerekirse Büyük M yöntemiyle) yapay değişkenlerin hepsi sıfır olan bir optimal tabloda durur; ikinci durumda problemin optimal çözümü vardır.*

> ***İspat.***
> *Minimum problemi için yapalım; maksimumda kriterlerin işaretleri ters döner. Not'taki üç sonuca bakalım.*
> ***Pozitif yapay değişkenli optimal tablo.*** *Bu, Teorem 5.2 gereği problemin uygun çözümü olmaması demektir; varsayımımızla çelişir.*
> ***Yapay değişkenleri sıfır olan optimal tablo.*** *Teorem 5.1 gereği tablonun çözümü optimaldir.*
> ***Sınırsızlık belirtisi.*** *Tabloda $z_k - c_k > 0$ olan bir v_k sütununda bütün $y_{ik} \leq 0$ olsun. Baz dışındaki sütunlar yapay değildir, çünkü bazdan çıkan yapay değişkenin sütunu atılır. $\vec{d}$ vektörünün k. bileşeni 1, baz değişkenlerine ait bileşenleri $-y_{ik} \geq 0$, diğerleri 0 olsun. Teorem 7.1 ispatındaki hesap, $\vec{d}$'nin M probleminin kısıtlarını $\hat{A}\vec{d} = \vec{0}$ biçiminde sağladığını gösterir. Tablonun gövdesindeki sayılar yalnız pivot işlemleriyle elde edildiği için M içermez. Bu yüzden $\vec{d}$ de M içermez. $\vec{d}_x$, $\vec{d}$'nin yapay olmayan bileşenlerinden (orijinal değişkenler ile aylak ve artık değişkenler) oluşan vektör, $\hat{\vec{c}}$ de bu değişkenlerin amaç katsayıları olsun; aylak ve artık değişkenlerin katsayısı 0'dır. $\vec{d}$'nin yapay bileşenlerinin toplamına $s \geq 0$ diyelim. Teorem 7.1 ikinci maddesi, $\vec{d}$ yönünde bir birim gidince M probleminin amacının $z_k - c_k$ kadar azaldığını söyler:*

$$\hat{\vec{c}}^T \vec{d}_x + Ms = -(z_k - c_k).$$

$z_k - c_k = aM + b$ olsun. İki tarafta M'nin katsayılarını karşılaştırırsak $s = -a$ çıkar. $z_k - c_k > 0$ olduğundan $a \geq 0$'dır (Önerme 5.2). $s \geq 0$ ve $s = -a \leq 0$ olduğundan $s = 0$ ve $a = 0$'dır; buradan $b > 0$ ve $\hat{\vec{c}}^T \vec{d}_x = -b < 0$ çıkar. $\vec{d}$'nin yapay bileşenleri negatif olmayan ve toplamı sıfır olan sayılardır; hepsi sıfırdır. A_s, problemin standart formunun (yapay sütunlar olmadan) katsayılar matrisi olsun. Yapay bileşenler sıfır olduğundan $\hat{A}\vec{d} = \vec{0}$ eşitliği $A_s\vec{d}_x = \vec{0}$ demektir. Ayrıca $\vec{d}_x \geq 0$ ve $\vec{d}_x \neq \vec{0}$'dır, çünkü k. bileşeni 1'dir. Yani $\vec{d}_x$ standart formun uygun bölgesinin bir yön vektörüdür (Tanım 7.2).
Standart formun bir $\vec{x}$ uygun çözümünü alalım; problemin uygun çözümü olduğundan böyle bir çözüm vardır (Önerme 1.1). Her $\lambda \geq 0$ için $\vec{x} + \lambda\vec{d}_x$ de standart formun uygun çözümüdür ve amaç değeri $\hat{\vec{c}}^T\vec{x} - \lambda b$'dir. λ büyüdükçe bu değer her sayının altına iner. Aylak ve artık değişkenler atılınca problemin aynı değerli uygun çözümleri elde edilir; problemin sınırsız çözümü vardır.

■

Artık güçlü dualiteyi tablolardan bağımsız bir biçimde söyleyebiliriz.

Sonuç 11.3 (Güçlü dualite: genel ifade). *Bir dual çiftte problemlerden birinin optimal çözümü varsa diğerinin de optimal çözümü vardır ve iki optimal değer eşittir.*

İspat.
Teorem 11.1 gereği iki problemin rolleri değiştirilebilir; optimal çözümü olan problemi primal alalım. Primalin uygun çözümü vardır ve sınırsız çözümü yoktur, çünkü sınırsız çözümlü bir problemin optimal çözümü olamaz. Önerme 11.3 gereği simpleks yöntem, primali yapay değişkenlerin hepsi sıfır olan bir optimal tabloda çözer. Teorem 11.3 dualin optimal çözümünün var olduğunu ve optimal değerlerin eşit olduğunu verir.
■

Zayıf ve güçlü dualiteyi kanonik formdaki çiftler için ispatladık. Eşitlik kısıtı ya da işaretsiz değişken içeren bir problemin duali, Önerme 11.1 ile kısa yoldan yazıldığında da sonuçlar değişmez. Eşitliği iki eşitsizliğe ayırmak uygun çözümleri değiştirmez. İşaretsiz bir değişkeni iki negatif olmayan değişkenin farkı olarak yazmak da amaç değerlerinin kümesini değiştirmez (Önerme 8.1). Bu yüzden kısa yoldan yazılan çift, kanonik bir dual çiftle aynı amaç değerlerini alır. Bu kesimdeki bütün sonuçlar böyle çiftler için de geçerlidir.
Güçlü dualiteyi ilk örneğimizde iki problemi ayrı ayrı grafikle çözerek görelim.

Örnek 11.12 (Bir primal–dual çiftinin grafik çözümü). Örnek 11.1 diyet problemini ve dualini grafik yöntemle çözünüz ve optimal değerleri karşılaştırınız:

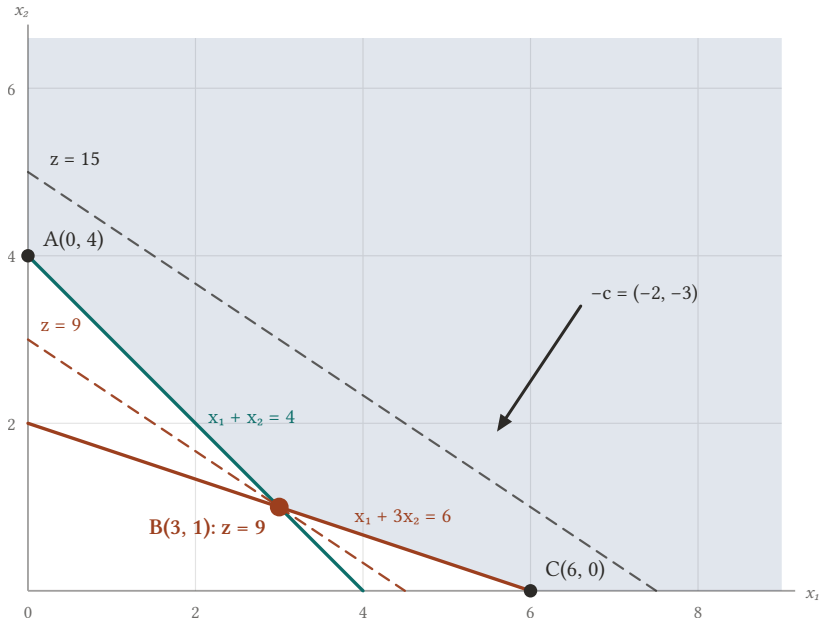
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geq 4 \\
x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
\min z &= 2x_1 + 3x_2
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
y_1 + y_2 &\leq 2 \\
y_1 + 3y_2 &\leq 3 \\
y_1, y_2 &\geq 0 \\
\max g &= 4y_1 + 6y_2
\end{aligned}
$$

Çözüm.
Primal. $x_1 + x_2 = 4$ doğrusu $(4,0)$ ve $(0,4)$ noktalarından, $x_1 + 3x_2 = 6$ doğrusu $(6,0)$ ve $(0,2)$ noktalarından geçer. Kısıtlar $\geq$ olduğundan uygun taraf, iki doğrunun da orijini içermeyen tarafıdır. Uygun bölge sağa ve yukarı doğru sınırsızdır. Köşeleri şunlardır:

- A: $x_1 = 0$ ve $x_1 + x_2 = 4$; $A(0,4)$. Kontrol: $0 + 12 = 12 \geq 6$;
- B: $x_1 + x_2 = 4$ ve $x_1 + 3x_2 = 6$; çıkarırsak $2x_2 = 2$, $B(3,1)$;
- C: $x_2 = 0$ ve $x_1 + 3x_2 = 6$; $C(6,0)$. Kontrol: $6 + 0 = 6 \geq 4$.

Köşelerde $z(A) = 12$, $z(B) = 6 + 3 = 9$, $z(C) = 12$'dir. Bölge sınırsız olduğundan yalnız köşelere bakmak yetmez; amaç doğrusunun kaydırılmasına da bakmak gerekir. $z = 2x_1 + 3x_2$ seviye doğruları gradyanın tersi yönünde kaydırıldığında bölgeye son olarak B köşesinde dokunur. Ayrıca Örnek 11.1 örneğinde her uygun diyet için $z \geq 9$ olduğunu göstermiştik. Demek ki $\min z = 9$'dur ve $B(3,1)$ noktasında alınır.

 CC BY-NC-SA 4.0



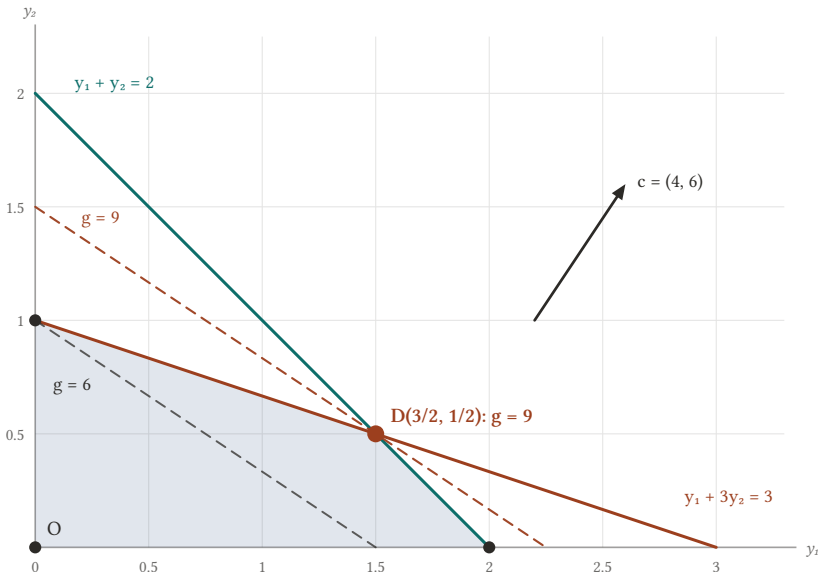
Şekil 11.1: Primal problem: min $z = 2x_1 + 3x_2$, $x_1 + x_2 \geq 4$, $x_1 + 3x_2 \geq 6$. Uygun bölge sınırsızdır; kesikli doğrular $z = 15$ ve $z = 9$ seviye doğrularıdır. Seviye doğrusu gradyanın tersi yönünde kaydırılınca bölgeye son olarak B(3, 1) köşesinde dokunur: min $z = 9$.

Dual. $y_1 + y_2 = 2$ doğrusu $(2,0)$ ve $(0,2)$ noktalarından, $y_1 + 3y_2 = 3$ doğrusu $(3,0)$ ve $(0,1)$ noktalarından geçer. Kısıtlar $\leq$ olduğundan uygun taraf orijini içeren taraftır. Uygun bölge sınırlı bir dörtgendir. Köşeleri şunlardır:

- $O(0,0)$;
- $y_2 = 0$ ve $y_1 + y_2 = 2$: $(2,0)$. Kontrol: $2 + 0 = 2 \leq 3$;
- D: $y_1 + y_2 = 2$ ve $y_1 + 3y_2 = 3$; çıkarırsak $2y_2 = 1$, $D(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$;
- $y_1 = 0$ ve $y_1 + 3y_2 = 3$: $(0,1)$. Kontrol: $0 + 1 = 1 \leq 2$.

Köşelerde g sırasıyla 0, 8, $4 \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 9$ ve 6 değerini alır. Bölge sınırlı olduğundan en büyük değer bir köşede alınır: $\max g = 9$, $D(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ noktasında.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.2: Dual problem: max g = $4y_1 + 6y_2$, $y_1 + y_2 \le 2$, $y_1 + 3y_2 \le 3$. Uygun bölge köşeleri O(0, 0), (2, 0), D(3/2, 1/2), (0, 1) olan dörtgendir; köşelerde g sırasıyla 0, 8, 9, 6 değerini alır. Seviye doğrusu gradyan yönünde kaydırılınca bölgeden en son D(3/2, 1/2) köşesinde ayrılır: max g = 9, primalin minimum değerine eşit.

Karşılaştırma. $\min z = \max g = 9$'dur; güçlü dualitenin (Sonuç 11.3) söylediği gibi optimal değerler eşittir. Dual optimal çözüm $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, Örnek 11.1 örneğinde en iyi alt sınırı veren çarpanların ta kendisidir. İki çözüm arasında bir uyum daha görülüyor. Primal optimumda iki kısıt da tam olarak sağlanıyor (B iki doğrunun kesişimidir) ve iki dual değişken de pozitif. Dual optimumda da iki dual kısıt tam olarak sağlanıyor ve iki primal değişken $x_1 = 3, x_2 = 1$ pozitif.
■

11.6 Primal ve Dual Optimal Tabloların Karşılaştırılması

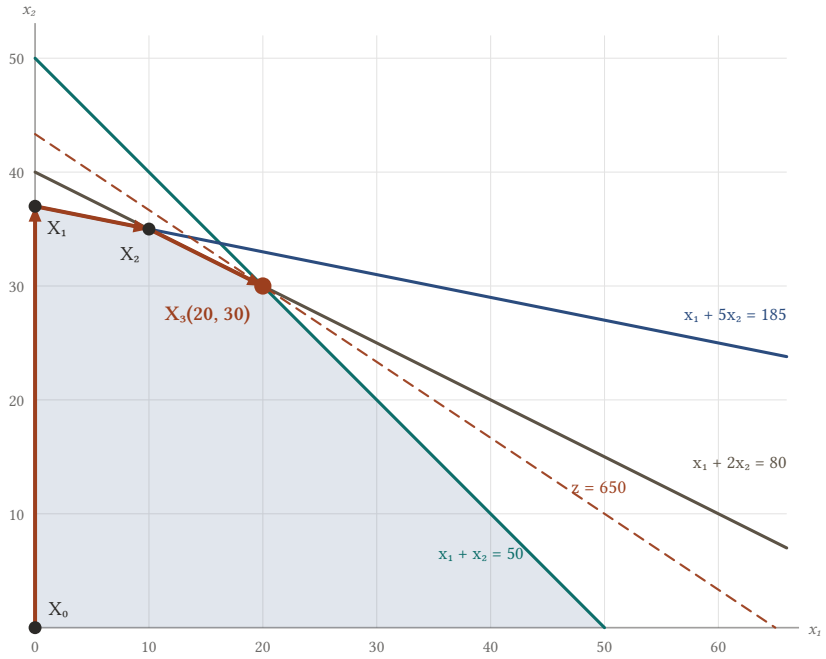
Şimdi bir problemi ve dualini simpleks yöntemle ayrı ayrı çözüp optimal tabloları yan yana koyalım. Güçlü dualitenin ve tablodan okuma kuralının (Önerme 11.2) sayılarda nasıl göründüğünü böylece izleyeceğiz.

Örnek 11.13 (Beş kısıtlı maksimum probleminin simpleks çözümü). Örnek 11.2 problemini simpleks yöntemle çözünüz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 50 \\ 2x_1 + x_2 &\le 110 \\ x_1 + 2x_2 &\le 80 \\ x_1 + 5x_2 &\le 185 \\ 5x_1 + 6x_2 &\le 300 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max z &= 10x_1 + 15x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.3: Beş kısıtlı maksimum probleminin uygun bölgesi. Simpleks yöntem $X_0(0, 0)$ köşesinden ($z = 0$) başlar; x_2 baza girince $X_1(0, 37)$ köşesine ($z = 555$), x_1 baza girince $X_2(10, 35)$ köşesine ($z = 625$), x_6 baza girince $X_3(20, 30)$ köşesine ($z = 650$) geçer. Kesikli doğru $z = 650$ seviye doğrusudur. Şekilde yalnız bölgeyi sınırlayan kısıt doğruları çizildi: $2x_1 + x_2 \le 110$ ve $5x_1 + 6x_2 \le 300$ kısıtları bölgenin her noktasında kendiliğinden sağlanır; optimal çözümde aylak değişkenleri $x_4 = 40$ ve $x_7 = 20$'dir.

Standart form ve çözülebilir hal. Beş kısıtın beşi de $\le$ biçimindedir ve sağ tarafları negatif değildir. Her birine sırasıyla x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 50 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 110 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 80 \\ x_1 + 5x_2 + x_6 &= 185 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_7 &= 300 \\ x_j \ge 0, \quad j &= \overline{1,7} \\ \max z = 10x_1 + 15x_2 &+ 0x_3 + 0x_4 \\ +0x_5 &+ 0x_6 + 0x_7 \end{aligned}$$

Aylak değişkenlerin sütunları 5×5 birim matrisi oluşturur; standart form zaten simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir. Maksimum probleminde en negatif $z_j - c_j$ baza girer; bütün $z_j - c_j \ge 0$ olunca tablo optimaldir.

Başlangıç tablosu. Kriterler $z_j - c_j = -c_j$'dir: -10 ve -15. En negatifi -15 olduğundan v_2 baza girer. Oranlar 50, 110, 40, 37, 50'dir. En küçüğü x_6 satırındadır; v_6 bazdan çıkar, pivot 5'tir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 11.2: Başlangıç tablosu

		c_j	10	15	0	0	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	Oran
x_3	0	50	1	1	1	0	0	0	0	$\frac{50}{1}$
x_4	0	110	2	1	0	1	0	0	0	$\frac{110}{1}$
x_5	0	80	1	2	0	0	1	0	0	$\frac{80}{2}$
x_6	0	185	1	[5]	0	0	0	1	0	$\frac{185}{5} \Rightarrow$
x_7	0	300	5	6	0	0	0	0	1	$\frac{300}{6}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-10	$-15 \Uparrow$	0	0	0	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 5'e bölünür ve x_2 satırı olur: $\left(37 \mid \frac{1}{5}, 1, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, 0 \right)$. Diğer satırlardan bu satırın v_2 sütunundaki elemanları kadar katı çıkarılır: x_3 ve x_4 satırlarından 1, x_5 satırından 2, x_7 satırından 6 katı. $z_j - c_j$ satırına ise 15 katı eklenir. Tek negatif kriter -7'dir; v_1 baza girer. Oranlar $\frac{65}{4}$, $\frac{365}{9}$, 10, 185, $\frac{390}{19}$'dur. En küçüğü 10'dur; v_5 bazdan çıkar, pivot $\frac{3}{5}$'tir.

Tablo 11.3: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	10	15	0	0	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	Oran
x_3	0	13	$\frac{4}{5}$	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{13}{4/5}$
x_4	0	73	$\frac{9}{5}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{73}{9/5}$
x_5	0	6	$[\frac{3}{5}]$	0	0	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{6}{3/5} \Rightarrow$
x_2	15	37	$\frac{1}{5}$	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{37}{1/5}$
x_7	0	78	$\frac{19}{5}$	0	0	0	0	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{78}{19/5}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 555$	$-7 \Uparrow$	0	0	0	0	3	0	

İkinci iterasyon. Pivot satırı $\frac{3}{5}$'e bölünür, yani $\frac{5}{3}$ ile çarpılır ve x_1 satırı olur: $\left(10 \mid 1, 0, 0, 0, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 0 \right)$. Diğer satırlardan bu satırın v_1 sütunundaki elemanları kadar katı çıkarılır. Tek negatif kriter $-\frac{5}{3}$'tür; v_6 baza girer. v_6 sütununda x_1 satırının elemanı $-\frac{2}{3} < 0$ olduğundan o satır oran testine girmez. Oranlar 15, 55, 105, 30'dur. En küçüğü 15'tir; v_3 bazdan çıkar, pivot $\frac{1}{3}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 11.4: İkinci iterasyon tablosu

		c_j	10	15	0	0	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	Oran
x_3	0	5	0	0	1	0	$-\frac{4}{3}$	$[\frac{1}{3}]$	0	$\frac{5}{1/3} \Rightarrow$
x_4	0	55	0	0	0	1	-3	1	0	$\frac{55}{1}$
x_1	10	10	1	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$-$
x_2	15	35	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{35}{1/3}$
x_7	0	40	0	0	0	0	$-\frac{19}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{40}{4/3}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 625$	0	0	0	0	$\frac{35}{3}$	$-\frac{5}{3} \Uparrow$	0	

Üçüncü iterasyon. Pivot satırı 3 ile çarpılır ve x_6 satırı olur: $(15 \mid 0, 0, 3, 0, -4, 1, 0)$. Diğer satırlardan bu satırın v_6 sütunundaki elemanları kadar katı çıkarılır. Örneğin x_1 satırına $\frac{2}{3}$ katı eklenir: $10 + \frac{2}{3} \cdot 15 = 20$. Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan tablo optimaldir.

Tablo 11.5: Optimal tablo

		c_j	10	15	0	0	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
x_6	0	15	0	0	3	0	-4	1	0
x_4	0	40	0	0	-3	1	1	0	0
x_1	10	20	1	0	2	0	-1	0	0
x_2	15	30	0	1	-1	0	1	0	0
x_7	0	20	0	0	-4	0	-1	0	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 650$	0	0	5	0	5	0	0

Sonuç. Optimal çözüm $x_1 = 20$, $x_2 = 30$ ve $\max z = 10 \cdot 20 + 15 \cdot 30 = 650$'dir. Primal problemin esas değişkenleri x_1, x_2, aylak değişkenleri x_3, x_4, x_5, x_6, x_7'dir. Optimal çözümde $x_4 = 40$, $x_6 = 15$, $x_7 = 20$, $x_3 = x_5 = 0$ olur. Yani birinci ve üçüncü kısıt tam olarak sağlanır, diğerlerinde boşluk kalır. Simpleks yöntemin uygun bölgenin köşeleri boyunca izlediği yol aşağıdadır.
■

Örnek 11.14 (Beş kısıtlı maksimum probleminin dualinin çözümü). Örnek 11.2 örneğinde bulunan dual problemi simpleks yöntemle çözünüz:

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + 5y_5 &\geq 10 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 5y_4 + 6y_5 &\geq 15 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 &\geq 0 \\ \min g = 50y_1 + 110y_2 &+ 80y_3 \\ +185y_4 &+ 300y_5 \end{aligned}$$

Çözüm.

Standart form. İki kısıt da $\geq$ biçimindedir ve sağ tarafları negatif değildir. Onlardan sırasıyla y_6 ve y_7 artık değişkenlerini çıkarırız. Artık değişkenlerin sütunları -1 içerir ve birim sütun vermez. Standart form birim matris içermediği için henüz simpleks yöntem ile çözülebilir halde değildir.
Çözülebilir hal. İki denkleme y_{u_1} ve y_{u_2} yapay değişkenlerini ekleriz (Tanım 1.10). Minimum problemi olduğundan amaç katsayıları $+M$'dir:

$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 + 5y_5 - y_6 + y_{u_1} &= 10 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 + 5y_4 + 6y_5 - y_7 + y_{u_2} &= 15 \\ y_1, \ldots, y_7, y_{u_1}, y_{u_2} &\geq 0 \\ \min g = 50y_1 + 110y_2 + 80y_3 + 185y_4 & \\ +300y_5 + 0y_6 + 0y_7 & \\ +My_{u_1} + My_{u_2} & \end{aligned}$$

Minimum probleminde en büyük pozitif $z_j - c_j$ baza girer; bütün $z_j - c_j \leq 0$ olunca tablo optimaldir. $aM + b$ biçimindeki kriterlerde önce M'nin katsayısına bakılır (Önerme 5.2). Tablolarda baz değişkenlerinin sütunu y_B ile gösterilir. z_0 değeri dualin amaç değeri g'dir.
Başlangıç tablosu. $\vec{c}_B = (M, M)$ olduğundan her sütunun z_j değeri, sütun elemanlarının toplamının M katıdır. Pozitif kriterlerde M'nin katsayıları $2, 3, 3, 6, 11$'dir. En büyüğü 11 olduğundan v_5 baza girer. Oranlar $\frac{10}{5} = 2$ ve $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$'dir; v_{u_1} bazdan çıkar, pivot 5'tir.

Tablo 11.6: Başlangıç tablosu

		c_j	50	110	80	185	300	0	0	M	M	
y_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_{u_1}	v_{u_2}	Oran
y_{u_1}	M	10	1	2	1	1	[5]	-1	0	1	0	$\frac{10}{5} \Rightarrow$
y_{u_2}	M	15	1	1	2	5	6	0	-1	0	1	$\frac{15}{6}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 25M$	$2M - 50$	$3M - 110$	$3M - 80$	$6M - 185$	$11M - 300 \Uparrow$	$-M$	$-M$	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 5'e bölünür ve y_5 satırı olur. y_{u_2} satırından bu satırın 6 katı çıkarılır. v_{u_1} sütunu artık yazılmaz. $\vec{c}_B = (300, M)$ ile kriterleri yeniden hesaplarız. Pozitif kriterler $\frac{4}{5}M - 20$, $\frac{19}{5}M - 125$ ve $\frac{6}{5}M - 60$'tır. M'nin en büyük katsayısı $\frac{19}{5}$ olduğundan v_4 baza girer. Oranlar $\frac{2}{1/5} = 10$ ve $\frac{3}{19/5} = \frac{15}{19}$'dur; v_{u_2} bazdan çıkar, pivot $\frac{19}{5}$'tir.

Tablo 11.7: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	50	110	80	185	300	0	0	M	
y_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_{u_2}	Oran
y_5	300	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{2}{1/5}$
y_{u_2}	M	3	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{4}{5}$	$[\frac{19}{5}]$	0	$\frac{6}{5}$	-1	1	$\frac{3}{19/5} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 3M + 600$	$\frac{1}{5}M + 10$	$-\frac{7}{5}M + 10$	$\frac{4}{5}M - 20$	$\frac{19}{5}M - 125 \Uparrow$	0	$\frac{6}{5}M - 60$	$-M$	0	

İkinci iterasyon. Pivot satırı $\frac{19}{5}$'e bölünür ve y_4 satırı olur. y_5 satırından bu satırın $\frac{1}{5}$ katı çıkarılır. v_{u_2} sütunu da atılır. Bazda yapay değişken kalmadığından kriterlerde artık M yoktur. $\vec{c}_B = (300, 185)$ ile pozitif kriterler $\frac{65}{19}$ ve $\frac{120}{19}$'dur. En büyüğü $\frac{120}{19}$ olduğundan v_3 baza girer. Oranlar $\frac{35/19}{3/19} = \frac{35}{3}$ ve $\frac{15/19}{4/19} = \frac{15}{4}$'tür; v_4 bazdan çıkar, pivot $\frac{4}{19}$'dur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 11.8: İkinci iterasyon tablosu

		c_j	50	110	80	185	300	0	0	
y_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	Oran
y_5	300	$\frac{35}{19}$	$\frac{4}{19}$	$\frac{9}{19}$	$\frac{3}{19}$	0	1	$-\frac{5}{19}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{35/19}{3/19}$
y_4	185	$\frac{15}{19}$	$-\frac{1}{19}$	$-\frac{7}{19}$	$[\frac{4}{19}]$	1	0	$\frac{6}{19}$	$-\frac{5}{19}$	$\frac{15/19}{4/19}\Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{13275}{19}$	$\frac{65}{19}$	$-\frac{685}{19}$	$\frac{120}{19}\Uparrow$	0	0	$-\frac{390}{19}$	$-\frac{625}{19}$	

Üçüncü iterasyon. Pivot satırı $\frac{19}{4}$ ile çarpılır ve y_3 satırı olur. y_5 satırından bu satırın $\frac{3}{19}$ katı çıkarılır. $\vec{c}_B = (300, 80)$ ile tek pozitif kriter 5'tir; v_1 baza girer. v_1 sütununda yalnız y_5 satırının elemanı pozitiftir. Oran $\frac{5/4}{1/4} = 5$'tir; v_5 bazdan çıkar, pivot $\frac{1}{4}$'tür.

Tablo 11.9: Üçüncü iterasyon tablosu

		c_j	50	110	80	185	300	0	0	
y_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	Oran
y_5	300	$\frac{5}{4}$	$[\frac{1}{4}]$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5/4}{1/4}\Rightarrow$
y_3	80	$\frac{15}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{4}$	1	$\frac{19}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	–
$z_j - c_j$		$z_0 = 675$	$5\Uparrow$	-25	0	-30	0	-30	-25	

Dördüncü iterasyon. Pivot satırı 4 ile çarpılır ve y_1 satırı olur: $(5 \mid 1, 3, 0, -3, 4, -2, 1)$. y_3 satırına bu satırın $\frac{1}{4}$ katı eklenir. $\vec{c}_B = (50, 80)$ ile bütün $z_j - c_j \leq 0$ olur; tablo optimaldir.

Tablo 11.10: Optimal tablo

		c_j	50	110	80	185	300	0	0
y_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
y_1	50	5	1	3	0	-3	4	-2	1
y_3	80	5	0	-1	1	4	1	1	-1
$z_j - c_j$		$z_0 = 650$	0	-40	0	-15	-20	-20	-30

Sonuç. Optimal çözüm $y_1 = 5$, $y_3 = 5$, $y_2 = y_4 = y_5 = 0$ ve $\min g = 50 \cdot 5 + 80 \cdot 5 = 650$'dir. Dual problemin esas değişkenleri $y_1, \ldots, y_5$, artık değişkenleri y_6, y_7'dir.
■

İki optimal tabloyu (Tablo 11.5 ve Tablo 11.10) karşılaştırınca şu özellikler öne çıkar.

1. **Optimal amaç değerleri aynıdır:** $\max z = \min g = 650$. Güçlü dualite teoreminin (Teorem 11.3) söylediği budur.
2. **Her tablo diğer problemin çözümünü içerir.** Primalin x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 aylak değişkenlerini, sırasıyla ait oldukları kısıtların dual değişkenleriyle eşleyelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$$

Primal optimal tablonun son satırında bu sütunların simpleks kriterleri $5, 0, 5, 0, 0$'dır. Bu sayılar dualin optimal çözümüdür: $Y^* = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (5, 0, 5, 0, 0)$. Primal maksimum problemi olduğundan Önerme 11.2 birinci maddesi tam olarak bunu söyler.

Benzer biçimde dualin y_6, y_7 artık değişkenlerini primalin x_1, x_2 esas değişkenleriyle eşleyelim:

$$\begin{bmatrix} y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dual optimal tablonun son satırında bu sütunların kriterleri -20 ve -30'dur. İşaretleri değiştirilince primalin optimal çözümü çıkar: $X^* = (x_1, x_2) = (20, 30)$. Dual problem, $\geq$ kısıtlı ve sağ tarafları negatif olmayan bir minimum problemidir. Teorem 11.1 gereği duali primaldir. Bu yüzden Önerme 11.2 ikinci maddesi dualin tablosuna uygulanır ve işaret değişimi oradan gelir.

Eşleme öbür sütunlarda da işler. Dual optimal tablonun $v_1, \ldots, v_5$ sütunlarındaki kriterler $0, -40, 0, -15, -20$'dir. Bunlar primalin optimal çözümündeki aylak değerlerinin ($x_3 = 0$, $x_4 = 40$, $x_5 = 0$, $x_6 = 15$, $x_7 = 20$) negatifleridir. Nedeni şudur. Dual tabloda sağ taraflar negatif olmadığından Teorem 11.3 ispatındaki simpleks çarpanları tam olarak $\vec{w} = (x_1^*, x_2^*)$'dır. Lemma 11.1 gereği y_i sütununun kriteri, $\vec{w}$ ile bu sütunun iç çarpımından b_i çıkarılarak bulunur. Bu sütun primalin i. kısıtının katsayılarıdır; iç çarpım primalin i. kısıtının sol tarafıdır. Kriter bu yüzden $\sum_j a_{ij} x_j^* - b_i = -x_{2+i}$'dir. Primal tablonun v_1, v_2 kriterlerinin 0 olması da dualin $y_6 = y_7 = 0$ olmasıyla uyumludur.

3. **Hangisi kolaysa o çözülür.** Bu özellikler sayesinde bir problemin yerine duali çözülüp optimal tablodan primalin çözümü okunabilir. Primal ile dualinden hangisinin çözümü daha az işlem gerektiriyorsa o çözülür. Bu örnekte primal $\leq$ kısıtlı olduğu için yapay değişken gerektirmedi. Dual ise iki yapay değişken ve bir iterasyon fazlası istedi. Tersine, Örnek 11.3 örneğindeki üç $\geq$ kısıtlı minimum problemi üç yapay değişken ister. Dualinin iki $\leq$ kısıtı vardır ve aylak değişkenlerle doğrudan çözülür. Genel olarak kısıt sayısı değişken sayısından çok fazla olan bir problemde dualin tablosu daha küçüktür.
4. **Uygun çözümün olmaması ve sınırsızlık birbirine bağlıdır.** Problemlerden biri sınırsızsa diğerinin uygun çözümü yoktur (Sonuç 11.2). Tersi ise tam olarak doğru değildir: uygun çözümü olmayan bir problemin duali sınırsız olabileceği gibi, onun da uygun çözümü olmayabilir. Bunu aşağıdaki önerme ve iki örnek gösteriyor.

Önerme 11.4 (Uygun çözümü olmayan problemin duali). *Bir dual çiftte problemlerden birinin uygun çözümü yoksa diğerinin optimal çözümü yoktur. Yani diğer problem ya sınırsızdır ya da onun da uygun çözümü yoktur.*

> ***İspat.***
> *Diğer problemin optimal çözümü olsaydı güçlü dualite (Sonuç 11.3) gereği ilk problemin de optimal çözümü, dolayısıyla uygun çözümü olurdu; bu, varsayımla çelişir. Demek ki diğer problemin optimal çözümü yoktur. Diğer problemin uygun çözümü varsa Önerme 11.3 gereği ya optimal çözümü ya da sınırsız çözümü vardır. Optimal çözümü olmadığına göre sınırsızdır.*
> ■

Örnek 11.15 (Uygun çözümü olmayan problemin sınırsız duali). Örnek 3.10 problemi ($x_1 + x_2 \leq 2, x_1 + 2x_2 \geq 6, x_1, x_2 \geq 0, \max z = 3x_1 + 2x_2$) uygun çözümü olmayan bir problemdir. Dualini yazınız ve dualin sınırsız olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Kanonik form ve dual.** Maksimum probleminde ikinci kısıt -1 ile çarpılır: $-x_1 - 2x_2 \leq -6$. İki kısıta $y_1, y_2 \geq 0$ atarız. x_1'in sütunu $(1, -1)$, x_2'ninki $(1, -2)$'dir:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\geq 3 \\ y_1 - 2y_2 &\geq 2 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ \min g &= 2y_1 - 6y_2 \end{aligned}$$

Dual sınırsızdır. $t \geq 0$ için $y_1 = 3 + 2t$, $y_2 = t$ noktalarını alalım. $y_1 - y_2 = 3 + t \geq 3$ ve $y_1 - 2y_2 = 3 \geq 2$ olduğundan hepsi uygundur. Amaç değeri

$$g = 2(3 + 2t) - 6t = 6 - 2t$$

olur ve t büyüdükçe her sayının altına iner. Dualin sınırsız çözümü vardır, minimumu yoktur. Bu durum Önerme 11.4 ile uyumludur.
■

Örnek 11.16 (İkisinin de uygun çözümü olmayan dual çift). Aşağıdaki problemin ve dualinin uygun çözümü olmadığını gösteriniz.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq -1 \\ -x_1 + x_2 &\leq -1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Çözüm.
Primal. İki kısıtı toplarsak $0 \leq -2$ çıkar; hiçbir (x_1, x_2) iki kısıtı birlikte sağlayamaz. Geometrik olarak birinci kısıt $x_2 \geq x_1 + 1$, ikincisi $x_2 \leq x_1 - 1$ demektir ve bu iki bölge ortak nokta içermez.
Dual. Problem kanonik formdadır: maksimum, iki kısıt $\leq$, değişkenler ≥ 0. Sağ tarafların negatif olması kanonik formu bozmaz. x_1'in sütunu $(1, -1)$, x_2'ninki $(-1, 1)$'dir:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &\geq 1 \\ -y_1 + y_2 &\geq 1 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ \min g &= -y_1 - y_2 \end{aligned}$$

İki kısıtı toplarsak $0 \geq 2$ çıkar; dualin de uygun çözümü yoktur. Demek ki uygun çözümü olmayan bir problemin duali her zaman sınırsız değildir.
■

Bir dual çiftte iki problemin her birinin optimal çözümü olabilir, sınırsız çözümü olabilir ya da uygun çözümü olmayabilir. Bu bölümün sonuçları dokuz durumdan hangilerinin gerçekleşebileceğini tam olarak belirler.

Tablo 11.11: Bir dual çiftte olası durumlar

Primal (satır), dual (sütun)	Optimal çözüm var	Sınırsız çözüm	Uygun çözüm yok
Optimal çözüm var	mümkün; optimal değerler eşit	olamaz	olamaz
Sınırsız çözüm	olamaz	olamaz	mümkün
Uygun çözüm yok	olamaz	mümkün	mümkün

Tablodaki (Tablo 11.11) "olamaz" hükümleri şöyle gerekçelendirilir. Birinci satır ve birinci sütundakiler Sonuç 11.3'den çıkar: birinin optimal çözümü varsa diğerinin de vardır. İki problemin birlikte sınırsız olamaması Sonuç 11.2'den çıkar, çünkü sınırsız bir problemin duali uygun çözümsüzdür. "Mümkün"

 CC BY-NC-SA 4.0

hükümleri de örneklerle doğrulanır: birinci satır için Örnek 11.13 ve Örnek 11.14, sınırsız–uygunsuz çiftler için Örnek 11.11 ve Örnek 11.15, son durum için Örnek 11.16.

Bu bölümde bir problemin dualini kanonik formundan yazmayı, dual çiftin optimal değerlerinin eşit olduğunu ve dual optimal çözümün primal optimal tablodan okunduğunu gördük. Dual tablonun kriterleri primalin çözümünü, primal tablonun kriterleri de dualin çözümünü taşıyor. Bu gözlem yeni bir çözüm yöntemine yol açar. Bu yöntem, primalin tablosu üzerinde çalışırken aslında dualini simpleks yöntemle çözer. Kriterleri optimallik koşulunu sağlayan ama sağ tarafında negatif sayılar bulunan tablolardan başlayarak ilerler. Bir sonraki bölüm, Dual simpleks algoritması, bu yöntemi anlatıyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

12. Dual Simpleks Algoritması

Büyük M yöntemi ve İki faz yöntemi bölümlerinde, $\geq$ kısıtlı bir problemin standart formu birim matris içermediği için her $\geq$ kısıtına bir yapay değişken ekledik. Kısıt sayısı arttıkça bu pahalıya patlar: her yapay değişken tabloya bir sütun ve M'li hesaplar ekler, yapay değişkenleri bazdan çıkarmak için de fazladan iterasyonlar harcanır. Bu bölümde yapay değişkenleri hiç işin içine katmayan bir yol göreceğiz: **dual simpleks algoritması**.

Fikir, simpleks yöntemin tam tersinden başlamaktır. Simpleks yöntem uygun bir temel çözümle başlar ve simpleks kriteri optimallik koşulunu sağlayana kadar ilerler. Dual simpleks algoritması ise simpleks kriterleri optimallik koşulunu **baştan sağlayan** ama bazı değişkenleri negatif olan, yani uygun olmayan bir temel çözümle başlar ve uygunluk sağlanana kadar ilerler. Yöntemin adı Dualite bölümündeki dual problemden gelir: Tablonun $z_j - c_j$ satırı her adımda dual problemin bir çözümünü taşır. Bunu bölümün ortasında göreceğiz.

12.1 Dual Uygun Temel Çözüm

Önce "optimal görünen ama uygun olmayan" temel çözüme bir ad verelim.

Tanım 12.1 (Dual Uygun Temel Çözüm). Bir temel çözümün simpleks tablosunda

- amaç fonksiyonu **minimum** yapılmak isteniyorsa her j için $z_j - c_j \leq 0$,
- amaç fonksiyonu **maksimum** yapılmak isteniyorsa her j için $z_j - c_j \geq 0$

ise bu temel çözüme **dual uygun** temel çözüm denir. Temel değişkenlerin x_{Bi} değerleri (v_0 sütunu) burada negatif olabilir.

Yani dual uygunluk, simpleks kriterlerinin optimallik koşulunun (Teorem 4.3) sağlanmasıdır; minimumda pozitif, maksimumda negatif $z_j - c_j$ kalmamıştır. Eksik olan tek şey uygunluktur: v_0 sütununda negatif sayılar bulunabilir. Böyle bir tablonun gösterdiği nokta, kısıt denklemlerini sağlar ama bazı değişkenleri negatif olduğu için uygun bölgenin dışındadır.

Bir temel çözüm için iki soru sorulabilir: Uygun mu (bütün $x_{Bi} \geq 0$ mı)? Dual uygun mu? Simpleks yöntem birinci soruya "evet" diyen tablolar arasında yürür ve ikinciye "evet" dediği anda durur. Dual simpleks algoritması bunun tersini yapar. İkisinin buluştuğu yer aynıdır.

Önerme 12.1 (Hem Uygun Hem Dual Uygun Çözüm Optimaldir). *Bir temel çözüm hem uygun (her $i = \overline{1,m}$ için $x_{Bi} \geq 0$) hem de dual uygun ise optimal çözümdür.*

> ***İspat.***
> *Temel çözüm uygun olduğu için bir uygun temel çözümdür. Dual uygun olduğu için minimum probleminde her j için $z_j - c_j \leq 0$, maksimum probleminde her j için $z_j - c_j \geq 0$'dır. Optimallik koşulu (Teorem 4.3) tam olarak bu durumda uygun temel çözümün optimal olduğunu söyler.* ■

Dual uygun bir başlangıç tablosu bulmak çoğu zaman kolaydır. En sık karşılaşılan durum, amaç katsayıları negatif olmayan ve kısıtları $\geq$ olan bir minimum problemidir. Böyle bir kısıttan artık değişkeni çıkarıp (Tanım 1.8) denklemin iki yanını -1 ile çarparsak artık değişkenin sütunu birim sütuna dönüşür:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 &\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ &\Rightarrow -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -6. \end{aligned}$$

İlk denklemde x_4'ün katsayısı -1'di; -1 ile çarpınca $+1$ oldu. Aynı sonuca kısıtı önce -1 ile çarpıp $-x_1 - x_2 - x_3 \leq -6$ biçimine getirerek, sonra da bir aylak değişken ekleyerek varılır; $x_4 = x_1 + x_2 + x_3 - 6$ her iki yazılışta aynı değişkendir. Bedeli, sağ tarafın negatif olmasıdır. Böyle bir sistem standart formda değildir (standart formda $b_i \geq 0$ istenir, Tanım 1.7); dolayısıyla simpleks yöntem ile çözülebilir halde de

 CC BY-NC-SA 4.0

değildir (Tanım 1.9). Dual simpleks algoritmasının başlaması için ise bu kadarı yeter: Birim matris bir başlangıç bazı verir, sağ tarafların işaretine bakılmaz.

Önerme 12.2 (Dual Uygun Başlangıç Tablosu). *Kısıtları $\leq$ ya da $\geq$ olan bir problemde her $\leq$ kısıtına bir aylak değişken eklensin; her $\geq$ kısıttan bir artık değişken çıkarılsın ve o denklem -1 ile çarpılsın. Bu durumda*

1. *aylak ve artık değişkenlerin sütunları birim matris oluşturur, yani bir baz verir;*
2. *bu bazda aylak değişkenin değeri kısıtın sağ tarafı b_i, artık değişkenin değeri $-b_i$'dir ve tablonun gövdesi, ($\geq$ kısıtları -1 ile çarpıldıktan sonraki) denklem sisteminin katsayılarıdır;*
3. *$z_0 = 0$ ve her j için $z_j - c_j = -c_j$'dir.*

Dolayısıyla minimum probleminde bütün $c_j \geq 0$ ise, maksimum probleminde bütün $c_j \leq 0$ ise bu temel çözüm dual uygundur.

> ***İspat.***
> *-1 ile çarpılan denklemlerde artık değişkenin katsayısı $+1$ olur ve bu değişken başka hiçbir denklemde görünmez; aylak değişkenler de yalnız kendi denklemlerinde $+1$ katsayısıyla görünür. Demek ki bu sütunlar $m \times m$ birim matrisin sütunlarıdır. Birim matrisli başlangıç bazı önermesinin (Önerme 4.3) ispatındaki hesap, sağ tarafların işaretini hiç kullanmadığı için burada da geçerlidir: Tablonun gövdesi denklemlerin katsayılarıdır, temel değişkenlerin değerleri denklemlerin sağ taraflarıdır (b_i ya da $-b_i$), aylak ve artık değişkenlerin amaç katsayıları 0 olduğundan $\vec{c}_B = \vec{0}$, $z_0 = 0$ ve $z_j - c_j = 0 - c_j = -c_j$ bulunur. Minimum probleminde $c_j \geq 0$ ise $-c_j \leq 0$; maksimum probleminde $c_j \leq 0$ ise $-c_j \geq 0$. Bu, dual uygunluğun (Tanım 12.1) tanımıdır.* ■

Yani maliyetleri negatif olmayan bir minimum probleminde $\geq$ kısıtlarını -1 ile çarpmak, yapay değişkene hiç gerek bırakmadan dual uygun bir başlangıç tablosu verir. Bu tablonun v_0 sütununda $\geq$ kısıtlarından gelen $-b_i$ değerleri bulunur; $b_i > 0$ ise bunlar negatiftir ve tablo uygun değildir. Dual simpleks algoritmasının işi bu negatif değerleri, dual uygunluğu bozmadan ortadan kaldırmaktır.

12.2 Dual Simpleks Kuralları

Dual uygun ama uygun olmayan bir tablodan bir sonrakine geçerken simpleks yöntemdeki iki seçimin sırası değişir: Önce bazdan çıkacak satır, sonra baza girecek sütun seçilir.

Tanım 12.2 (Dual Simpleks Kuralları). Dual uygun bir tabloda bazı x_{Bi} değerleri negatif olsun.

1. **Bazdan çıkan vektör.** Negatif x_{Bi} değerlerinin en küçüğü (mutlak değerce en büyüğü) seçilir:

$$x_{Br} = \min_{x_{Bi}<0} \{x_{Bi}\}.$$

   r. satırın temel değişkeni bazdan çıkar. Bu satıra **pivot satırı** denir.

2. **Baza giren vektör.** Pivot satırında yalnız $y_{rj} < 0$ olan sütunlar için $\dfrac{z_j - c_j}{y_{rj}}$ oranları hesaplanır ve v_k şöyle seçilir:

$$\text{minimumda:} \quad \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_{y_{rj}<0} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \right\},$$

$$\text{maksimumda:} \quad \frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \max_{y_{rj}<0} \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \right\}.$$

   v_k baza girer; pivot eleman y_{rk}'dır.

Bu iki kurala **dual simpleks kuralları** denir.

Yani önce "en kötü" negatif değişken bazdan atılır, sonra onun satırındaki negatif elemanlar arasından oranı en küçük olan sütun baza alınır. İki formül aslında aynı şeyi söyler. Minimum probleminde $z_j - c_j \leq 0$ ve $y_{rj} < 0$ olduğundan oranların hepsi ≥ 0'dır; en küçüğü, mutlak değerce en küçüğüdür. Maksimum

 CC BY-NC-SA 4.0

probleminde $z_j - c_j \geq 0$ ve $y_{rj} < 0$ olduğundan oranların hepsi ≤ 0'dır; en büyüğü yine mutlak değerce en küçüğüdür. Bu yüzden her iki problemde de tek bir kural yeter:

$$\left|\frac{z_k - c_k}{y_{rk}}\right| = \min_{y_{rj}<0}\left|\frac{z_j - c_j}{y_{rj}}\right|.$$

Pivot eleman, simpleks yöntemdekinin aksine **negatiftir**.
Çıkan satırın "en negatif" seçilmesi, simpleks yöntemde giren sütunun "en büyük kriter" seçilmesi gibi bir kuraldır, zorunluluk değildir: $x_{Bi} < 0$ olan her satır pivot satırı olabilir. Giren sütunun oranla seçilmesi ise zorunludur; aşağıdaki teorem bunun nedenini gösteriyor. Oranlarda eşitlik olursa indisi küçük olan sütunu seçeriz.

Teorem 12.1 (Dual Simpleks Adımı). *Dual uygun bir tabloda $x_{Br} = y_{r0} < 0$ olsun ve v_k, dual simpleks kurallarıyla (Tanım 12.2) seçilsin. y_{rk} pivot alınarak dönüşüm kuralıyla (Teorem 4.4) hesaplanan yeni tablo için:*

1. *Yeni baz gerçekten bir bazdır ve yeni tablo da dual uygundur.*
2. *Baza giren x_k'nın yeni değeri $y_{r0}/y_{rk} > 0$'dır.*
3. *Amaç değeri*

$$z_0' = z_0 - \frac{(z_k - c_k)\, y_{r0}}{y_{rk}}$$

olur; minimum probleminde $z_0' \geq z_0$, maksimum probleminde $z_0' \leq z_0$'dır.

İspat.
Baz. *Baz değişimi teoreminin (Teorem 4.1) ispatında yeni vektörlerin lineer bağımsızlığı yalnız $y_{rk} \neq 0$ olmasına dayanır; dönüşüm kuralının (Teorem 4.4) ispatı da yalnız $y_{rk} \neq 0$ kullanır. Burada $y_{rk} < 0$ olduğundan yeni vektörler bir baz oluşturur ve dönüşüm kuralı geçerlidir.*
x_k'nın değeri. *Dönüşüm kuralına göre yeni pivot satırı eski satırın y_{rk}'ya bölümüdür; v_0 sütununda y_{r0}/y_{rk} bulunur. Pay ve payda negatif olduğundan bu sayı pozitiftir.*
Dual uygunluk. *$\theta = \dfrac{z_k - c_k}{y_{rk}}$ diyelim. Dönüşüm kuralına göre her j için*

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - \theta\, y_{rj}.$$

Minimum problemini ele alalım: Her j için $z_j - c_j \leq 0$ ve $\theta \geq 0$'dır. İki durum var:

- *$y_{rj} \geq 0$ ise $\theta\, y_{rj} \geq 0$, dolayısıyla $(z_j - c_j)' \leq z_j - c_j \leq 0$.*
- *$y_{rj} < 0$ ise θ en küçük oran olduğundan $\theta \leq \dfrac{z_j - c_j}{y_{rj}}$'dir. Bu eşitsizliğin iki yanını negatif y_{rj} ile çarpınca yön değişir: $\theta\, y_{rj} \geq z_j - c_j$, yani $(z_j - c_j)' \leq 0$.*

Maksimum probleminde her $z_j - c_j \geq 0$ ve $\theta \leq 0$'dır. $y_{rj} \geq 0$ ise $\theta\, y_{rj} \leq 0$ ve $(z_j - c_j)' \geq z_j - c_j \geq 0$. $y_{rj} < 0$ ise θ en büyük oran olduğundan $\theta \geq \dfrac{z_j - c_j}{y_{rj}}$; y_{rj} ile çarpınca $\theta\, y_{rj} \leq z_j - c_j$, yani $(z_j - c_j)' \geq 0$. Her iki problemde de yeni tablo dual uygundur.
Amaç değeri. *Dönüşüm kuralının $j = 0$ için verdiği formül $z_0' = z_0 - \theta\, y_{r0}$'dır. Minimumda $\theta \geq 0$ ve $y_{r0} < 0$ olduğundan $\theta\, y_{r0} \leq 0$ ve $z_0' \geq z_0$. Maksimumda $\theta \leq 0$ olduğundan $\theta\, y_{r0} \geq 0$ ve $z_0' \leq z_0$.* ■

Yani giren sütunu oranla seçmek, dual uygunluğu korumanın tek yoludur: Başka bir negatif y_{rj} pivot alınsaydı, oranı daha küçük olan bir sütunun $z_j - c_j$ değeri işaret değiştirirdi. Amaç değerinin davranışı da dikkat çekicidir. Minimum probleminde dual simpleks adımları amaç değerini **artırır**. Bu bir kötüleşme değildir: Başlangıçtaki uygun olmayan noktalar "fazla iyi" amaç değerlerine sahiptir ve yöntem optimuma alttan yaklaşır.
Negatif x_{Br}'nin satırında hiç negatif eleman bulunmazsa oran hesaplanamaz. Bu, problemin kendisiyle ilgili kesin bir bilgi verir.

Teorem 12.2 (Uygun Çözümün Olmaması). *Bir tabloda $x_{Br} = y_{r0} < 0$ olsun ve r. satırda her $j = \overline{1,n}$ için $y_{rj} \geq 0$ olsun. Bu durumda problemin hiçbir uygun çözümü yoktur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Tablonun baz vektörlerinden oluşan matrisi B ile gösterelim. Baza göre katsayıların tanımı (Tanım 4.2) her $j = 0, 1, ..., n$ için $v_j = B\,\vec{y}_j$ demektir; B tersinir olduğundan $\vec{y}_j = B^{-1}v_j$, yani tablonun v_j sütunu $B^{-1}v_j$'dir.
Şimdi $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ kısıt denklemlerinin herhangi bir çözümü olsun: $x_1v_1 + ... + x_nv_n = v_0$. İki yanı soldan B^{-1} ile çarparsak

$$x_1\vec{y}_1 + x_2\vec{y}_2 + ... + x_n\vec{y}_n = \vec{y}_0$$

buluruz. Bu vektör eşitliğinin r. bileşeni

$$y_{r1}x_1 + y_{r2}x_2 + ... + y_{rn}x_n = y_{r0}$$

denklemidir; yani tablonun her satırı, kısıtların her çözümünün sağladığı bir denklemdir. $\vec{x}$ uygun olsaydı her $x_j \geq 0$ olurdu; varsayım gereği her $y_{rj} \geq 0$ olduğundan sol taraf ≥ 0 çıkardı. Oysa sağ taraf $y_{r0} < 0$'dır. Bu çelişki, uygun çözüm olmadığını gösterir. ■

Yani r. satır, negatif olmayan değişkenlerin negatif olmayan katsayılarla toplamının negatif bir sayıya eşit olmasını istiyor; bu imkânsızdır. Satırda temel değişkenlerin sütunları da vardır, ama onların elemanları 0 ya da 1 olduğundan koşulu bozmazlar.

Sonuç 12.1 (Dual Simpleks Algoritmasının Sonlu Adımda Bitmesi). *Bir minimum probleminde dual simpleks algoritmasının her adımında seçilen $z_k - c_k$ sıfırdan farklı olsun. Bu durumda algoritma sonlu sayıda adımdan sonra ya optimal bir çözümde ya da uygun çözüm olmadığı sonucunda durur. Maksimum probleminde de aynısı geçerlidir.*

İspat.
$z_k - c_k \neq 0$ ise $\theta \neq 0$ ve $y_{r0} < 0$ olduğundan dual simpleks adımı teoremindeki (Teorem 12.1) $\theta\,y_{r0}$ sıfırdan farklıdır; minimum probleminde $z_0' > z_0$ olur. Bir baz, tablonun bütün sayılarını ve dolayısıyla z_0'ı tek türlü belirler. z_0 her adımda kesin olarak arttığına göre aynı baza bir daha dönülmez. n sütundan m tanesini seçmenin en fazla $\binom{n}{m}$ yolu olduğundan algoritma sonlu adımda durur. Durduğu yerde ya bütün $x_{Bi} \geq 0$'dır, o zaman Önerme 12.1 gereği çözüm optimaldir; ya da negatif bir x_{Br}'nin satırında negatif eleman yoktur, o zaman Teorem 12.2 gereği uygun çözüm yoktur. Maksimum probleminde z_0 kesin olarak azalır ve aynı akıl yürütme geçerlidir. ■

12.3 Algoritma ve Örnekler

Buraya kadar söylenenler altı adımlık bir algoritmada toplanır.

Altı adımda dual simpleks algoritması

1. **Dual uygun başlangıç.** Minimum probleminde her j için $z_j - c_j \leq 0$, maksimum probleminde her j için $z_j - c_j \geq 0$ olan bir temel çözüm bul. Maliyetleri negatif olmayan bir minimum probleminde $\geq$ kısıtlarını -1 ile çarpmak bunu sağlar (Önerme 12.2).
2. **Uygunluk kontrolü.** Her $i = \overline{1, m}$ için $x_{Bi} \geq 0$ ise dur: Çözüm optimaldir (Önerme 12.1). Değilse 3. adıma geç.
3. **Çıkan vektör.** Negatif x_{Bi}'lerin en küçüğü x_{Br}'nin satırı pivot satırıdır; x_{Br} bazdan çıkar.
4. **Uygun çözüm var mı?** Pivot satırında her j için $y_{rj} \geq 0$ ise dur: Problemin uygun çözümü yoktur (Teorem 12.2). Değilse 5. adıma geç.
5. **Giren vektör.** Pivot satırında $y_{rj} < 0$ olan sütunlar için $\left|\frac{z_j - c_j}{y_{rj}}\right|$ oranlarını hesapla; en küçük oranı veren v_k baza girer, pivot y_{rk}'dır.
6. **Yeni tablo.** Dönüşüm kuralıyla (Bölüm 4.4) yeni tabloyu hesapla ve 2. adıma dön.

3. ve 5. adımlar dual simpleks kurallarıdır (Tanım 12.2). Tabloları simpleks tablosunun düzeninde (Bölüm 4.3) yazacağız, iki farkla. Oran sütunu yerine en alta bir **Oran satırı** ekleyeceğiz: Pivot satırında $y_{rj} < 0$ olan her sütunun altına $\left|\frac{z_j - c_j}{y_{rj}}\right|$ yazılır, diğerlerine $-$ konur. Bazdan çıkan satırı, v_0 sütunundaki değerinin yanına konan $\Rightarrow$ işaretler; baza giren sütunu yine $z_j - c_j$ satırındaki $\Uparrow$ işaretler.

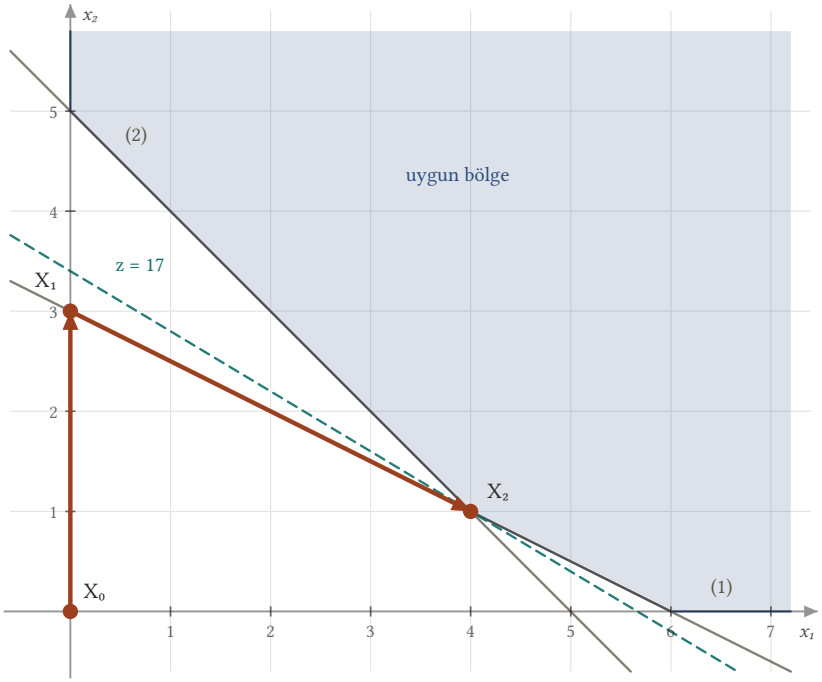
 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 12.1 (İki Değişkenli Bir Minimum Problemi).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 3x_1 + 5x_2 \end{aligned}$$

problemini dual simpleks algoritmasıyla çözünüz ve algoritmanın izlediği yolu grafikte gösteriniz.

Çözüm.



Şekil 12.1: Dual simpleks yolu: $X_0 = (0, 0) \longrightarrow X_1 = (0, 3) \longrightarrow X_2 = (4, 1)$. İlk iki nokta uygun bölgenin dışındadır; z değeri 0, 15, 17 diye artarak optimuma alttan yaklaşır. Kesikli doğru $z = 17$ seviye doğrusudur. (1) $x_1 + 2x_2 = 6$, (2) $x_1 + x_2 = 5$.

Başlangıç tablosu. Önce problemi standart forma getirelim: İki $\geq$ kısıtından x_3 ve x_4 artık değişkenlerini çıkarırız.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - x_4 &= 5 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,4} \\ \min z &= 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Artık değişkenlerin sütunları -1 taşıdığı için bu standart form birim matris içermez. Büyük M yöntemi iki yapay değişken isterdi. Onun yerine iki denklemi -1 ile çarpalım:

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 + x_3 &= -6 \\ -x_1 - x_2 + x_4 &= -5 \end{aligned}$$

Şimdi v_3 ve v_4 birim matris oluşturur. Maliyetler 3 ve 5 negatif olmadığından Önerme 12.2 gereği $B_0 = (v_3, v_4)$ bazının çözümü dual uygundur: $z_1 - c_1 = -3$, $z_2 - c_2 = -5$. Çözüm $x_3 = -6$, $x_4 = -5$ uygun değildir.

Birinci adım. Negatif değerlerin en küçüğü $x_3 = -6$'dır; x_3 satırı pivot satırıdır ve v_3 bazdan çıkar. Bu satırda $y_{31} = -1$ ve $y_{32} = -2$ negatiftir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\frac{z_1 - c_1}{y_{31}}\right| = \left|\frac{-3}{-1}\right| = 3, \qquad \left|\frac{z_2 - c_2}{y_{32}}\right| = \left|\frac{-5}{-2}\right| = \frac{5}{2}.$$

En küçük oran $\frac{5}{2}$ olduğundan v_2 baza girer; pivot $y_{32} = -2$.

Tablo 12.1: Başlangıç tablosu

		c_j	3	5	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_3	0	$-6 \Rightarrow$	-1	$[-2]$	1	0
x_4	0	-5	-1	-1	0	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-3	$-5 \Uparrow$	0	0
Oran			$\frac{3}{1}$	$\frac{5}{2}$	—	—

Pivot satırı -2'ye bölünür ve x_2 satırı olur: $\left(3 \mid \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0 \right)$. x_4 satırının pivot sütunundaki elemanı -1 olduğundan bu satıra yeni pivot satırı eklenir; $z_j - c_j$ satırına da yeni pivot satırının 5 katı eklenir:

$$x_4 : \left(-5 + 3 \mid -1 + \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1 \right) = \left(-2 \mid -\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 1 \right),$$
$$z_j - c_j : \left(0 + 15 \mid -3 + \frac{5}{2}, 0, -\frac{5}{2}, 0 \right) = \left(15 \mid -\frac{1}{2}, 0, -\frac{5}{2}, 0 \right).$$

Amaç değeri formülüyle (Teorem 12.1) de $z_0' = 0 - \frac{(-5)(-6)}{-2} = 15$.
İkinci adım. Kriterler hâlâ ≤ 0'dır ama $x_4 = -2 < 0$. Tek negatif değer bu olduğu için v_4 bazdan çıkar. x_4 satırında $y_{41} = -\frac{1}{2}$ ve $y_{43} = -\frac{1}{2}$ negatiftir:

$$\left|\frac{-1/2}{-1/2}\right| = 1, \qquad \left|\frac{-5/2}{-1/2}\right| = 5.$$

En küçük oran 1 olduğundan v_1 baza girer; pivot $y_{41} = -\frac{1}{2}$.

Tablo 12.2: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	3	5	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_2	5	3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0
x_4	0	$-2 \Rightarrow$	$[-\frac{1}{2}]$	0	$-\frac{1}{2}$	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 15$	$-\frac{1}{2} \Uparrow$	0	$-\frac{5}{2}$	0
Oran			$\frac{1/2}{1/2}$	—	$\frac{5/2}{1/2}$	—

Pivot satırı $-\frac{1}{2}$'ye bölünür, yani -2 ile çarpılır: x_1 satırı $(4 \mid 1, 0, 1, -2)$ olur. x_2 satırından bunun $\frac{1}{2}$ katı çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına $\frac{1}{2}$ katı eklenir:

$$x_2 : \left(3 - 2 \mid 0, 1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, 0 + 1 \right) = (1 \mid 0, 1, -1, 1),$$
$$z_j - c_j : \left(15 + 2 \mid 0, 0, -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}, 0 - 1 \right) = (17 \mid 0, 0, -2, -1).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 12.3: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	3	5	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_2	5	1	0	1	-1	1
x_1	3	4	1	0	1	-2
$z_j - c_j$		$z_0 = 17$	0	0	-2	-1

Sonuç. Optimal tabloda (Tablo 12.3) bütün $x_{Bi} \geq 0$ ve bütün $z_j - c_j \leq 0$; Önerme 12.1 gereği çözüm optimaldir:

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 1, 0, 0), \qquad \min z = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 17.$$

Kontrol: $4 + 2 \cdot 1 = 6$ ve $4 + 1 = 5$; iki kısıt da eşitlikle sağlanır.
Grafik. Algoritmanın uğradığı temel çözümler (x_1, x_2) düzleminde $X_0 = (0, 0)$, $X_1 = (0, 3)$ ve $X_2 = (4, 1)$ noktalarıdır. X_0 iki kısıtı da, X_1 ise ikinci kısıtı bozar: $0 + 3 = 3 < 5$, bu da tablodaki $x_4 = -2$ değeridir. Her nokta iki doğrunun kesişimidir, yani bir temel çözümdür, ama yalnız sonuncusu uygun bölgenin köşesidir. Amaç değeri $0 \to 15 \to 17$ diye artar; uygun bölgenin köşelerindeki değerler ise $(0, 5)$'te 25, $(4, 1)$'de 17 ve $(6, 0)$'da 18'dir. Algoritma uygun bölgeye dışarıdan, amaç değeri optimumu hiç aşmadan yaklaştı.
■

Şimdi aynı yöntemi üç değişkenli bir probleme uygulayalım.

Örnek 12.2 (Üç Kısıtı da ≥ Olan Bir Minimum Problemi).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\geq 6 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 &\geq 4 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &\geq 24 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \min z &= 3x_1 + 6x_2 + x_3 \end{aligned}$$

problemini dual simpleks algoritmasıyla çözünüz.

Çözüm.
Neden dual simpleks? Problemi standart forma getirmek için üç kısıttan x_4, x_5, x_6 artık değişkenlerini çıkarırız. Artık sütunları -1 taşıdığından Büyük M yöntemi ile çözmek istesek üç yapay değişken $x_{u_1}, x_{u_2}, x_{u_3}$ de eklememiz gerekirdi: tabloda 6 yerine 9 değişken, $z_j - c_j$ satırında da M'li ifadeler olurdu. Denklemleri -1 ile çarparsak artık değişkenlerle yetiniriz ve problem daha az değişkenle çözülür.
Başlangıç tablosu. Eşitsizlikleri -1 ile çarpalım:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - x_3 &\leq -6 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 &\leq -4 \\ -x_1 - 5x_2 - x_3 &\leq -24 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \min z &= 3x_1 + 6x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Her kısıta sırasıyla x_4, x_5, x_6 eklenince

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= -6 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_5 &= -4 \\ -x_1 - 5x_2 - x_3 + x_6 &= -24 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,6} \\ \min z = 3x_1 + 6x_2 + x_3 & \\ +0x_4 + 0x_5 + 0x_6 & \end{aligned}$$

elde edilir. Örneğin birinci denklem $x_4 = x_1 + x_2 + x_3 - 6$ demektir; x_4, birinci kısıtın artık değişkenidir ve -1 ile çarpma sayesinde sütunu $(1,0,0)^T$ birim vektörü olmuştur. v_4, v_5, v_6 birim matris oluşturur, ama sağ taraflar negatif olduğundan sistem standart formda değildir. Maliyetler $3, 6, 1$ negatif olmadığından Önerme 12.2 gereği başlangıç çözümü dual uygundur:

$$z_1 - c_1 = -3, \quad z_2 - c_2 = -6, \quad z_3 - c_3 = -1.$$

Minimum probleminde pozitif kriter kalmamıştır; dual uygun çözüme ulaşılmıştır. Ama $x_4 = -6, x_5 = -4, x_6 = -24$ negatif olduğundan esas problem için uygun çözüm değildir.

Birinci adım. Negatif değerlerin en küçüğü $x_6 = -24$'tür; v_6 bazdan çıkar. x_6 satırındaki negatif elemanlar $y_{61} = -1$, $y_{62} = -5$, $y_{63} = -1$'dir. Minimum probleminde kural

$$\min\left\{\frac{-3}{-1}, \frac{-6}{-5}, \frac{-1}{-1}\right\} = \min\left\{3, \frac{6}{5}, 1\right\} = 1$$

verir. En küçük oran v_3 sütunundadır; v_3 baza girer ve pivot $y_{63} = -1$'dir.

Tablo 12.4: Başlangıç tablosu

		c_j	3	6	1	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
x_4	0	-6	-1	-1	-1	1	0	0
x_5	0	-4	-1	5	1	0	1	0
x_6	0	$-24 \Rightarrow$	-1	-5	$[-1]$	0	0	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-3	-6	$-1 \Uparrow$	0	0	0
Oran			$\frac{3}{1}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{1}$	–	–	–

Pivot -1 olduğundan pivot satırı -1 ile çarpılır ve x_3 satırı olur: $(24 \mid 1, 5, 1, 0, 0, -1)$. v_3 sütununun diğer elemanları x_4 satırında -1, x_5 satırında 1, $z_j - c_j$ satırında -1'dir. Dolayısıyla x_4 satırına yeni pivot satırı eklenir, x_5 satırından çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına eklenir:

$$\begin{aligned} x_4 &: (-6 + 24 \mid -1 + 1, -1 + 5, 0, 1, 0, -1) \\ &= (18 \mid 0, 4, 0, 1, 0, -1), \\ x_5 &: (-4 - 24 \mid -1 - 1, 5 - 5, 0, 0, 1, 1) \\ &= (-28 \mid -2, 0, 0, 0, 1, 1), \\ z_j - c_j &: (0 + 24 \mid -3 + 1, -6 + 5, 0, 0, 0, -1) \\ &= (24 \mid -2, -1, 0, 0, 0, -1). \end{aligned}$$

İkinci adım. Kriterler yine ≤ 0'dır ve tek negatif değer $x_5 = -28$'dir; v_5 bazdan çıkar. x_5 satırında tek negatif eleman $y_{51} = -2$ olduğundan oran tektir: $\left|\frac{-2}{-2}\right| = 1$. v_1 baza girer; pivot $y_{51} = -2$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 12.5: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	3	6	1	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
x_4	0	18	0	4	0	1	0	-1
x_5	0	$-28 \Rightarrow$	$[-2]$	0	0	0	1	1
x_3	1	24	1	5	1	0	0	-1
$z_j - c_j$		$z_0 = 24$	$-2 \Uparrow$	-1	0	0	0	-1
Oran			$\frac{2}{2}$	–	–	–	–	–

Pivot satırı -2'ye bölünür ve x_1 satırı olur: $\left(\, 14 \mid 1, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \, \right)$. x_4 satırının v_1 sütunundaki elemanı 0 olduğundan bu satır değişmez. x_3 satırından yeni pivot satırı çıkarılır, $z_j - c_j$ satırına 2 katı eklenir:

$$\begin{aligned} x_3 &: \left(\, 24 - 14 \mid 0, 5, 1, 0, \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2} \, \right) \\ &= \left(\, 10 \mid 0, 5, 1, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \, \right), \\ z_j - c_j &: (24 + 28 \mid 0, -1, 0, 0, -1, -1 - 1) \\ &= (52 \mid 0, -1, 0, 0, -1, -2). \end{aligned}$$

Tablo 12.6: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	3	6	1	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
x_4	0	18	0	4	0	1	0	-1
x_1	3	14	1	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_3	1	10	0	5	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 52$	0	-1	0	0	-1	-2

Sonuç. Optimal tabloda (Tablo 12.6) her $x_j \geq 0$ ve her $z_j - c_j \leq 0$ olduğundan optimal çözüme ulaşılmıştır:

$$X^* = (x_1, \ldots, x_6) = (14, 0, 10, 18, 0, 0),$$
$$\min z = 3 \cdot 14 + 6 \cdot 0 + 1 \cdot 10 = 52.$$

Kontrol: $14 + 0 + 10 = 24 \geq 6$ (artık $x_4 = 18$), $14 - 0 - 10 = 4$ ve $14 + 0 + 10 = 24$; ikinci ve üçüncü kısıt eşitlikle sağlanır ($x_5 = x_6 = 0$). Amaç değeri adım adım $0 \to 24 \to 52$ diye arttı. ■

12.4 Neden "Dual" Simpleks?

Yöntemin adını açıklamak için tablodaki sayılara bir kez daha, bu kez Dualite bölümünün gözüyle bakalım. Kısıtları $\geq$ olan bir minimum problemini ele alalım:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1,m}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$
$$\min z = c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

Bu problemin duali (Tanım 11.1)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j, \quad j = \overline{1,n}$$
$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}$$
$$\max g = b_1y_1 + ... + b_my_m$$

problemidir. Dual değişkenler $y_1, ..., y_m$ tek indislidir; iki indisli tablo elemanları y_{ij} ile karıştırılmamalıdır.

Önerme 12.3 (Simpleks Kriterleri ve Dual Değişkenler). *Yukarıdaki minimum probleminde $\geq$ kısıtlarından $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$ artık değişkenleri çıkarılsın ve denklemler -1 ile çarpılsın. Herhangi bir baza ait simpleks tablosunda*

$$y_i = -(z_{n+i} - c_{n+i}), \quad i = \overline{1,m}$$

tanımlansın; yani y_i, i. artık değişkenin sütunundaki simpleks kriterinin -1 katı olsun. Bu durumda

1. *her $j = \overline{1,n}$ için $z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - c_j$;*
2. *$z_0 = b_1y_1 + ... + b_my_m$, yani tablonun amaç değeri, dual amaç fonksiyonunun $(y_1, ..., y_m)$'deki değeridir;*
3. *tablo dual uygun ise $(y_1, ..., y_m)$ dual problemin uygun bir çözümüdür.*

İspat.
Tablonun baz vektörlerinden oluşan matris B olsun. Uygun çözüm olmaması teoreminin (Teorem 12.2) ispatında gördüğümüz gibi tablonun v_j sütunu $B^{-1}v_j$'dir. Dolayısıyla

$$z_j = \vec{c}_B^T B^{-1} v_j = \vec{p}^T v_j, \qquad \vec{p}^T = \vec{c}_B^T B^{-1}$$

yazabiliriz; $\vec{p} = (p_1, ..., p_m)^T$ bazın belirlediği sabit bir vektördür. -1 ile çarpılmış sistemde sütunlar şöyledir: x_j'nin sütunu $v_j = -(a_{1j}, ..., a_{mj})^T$ $(j = \overline{1,n})$, x_{n+i}'nin sütunu i. birim vektör e_i, sağ taraf $v_0 = -(b_1, ..., b_m)^T$.

- *Artık sütunlarında $c_{n+i} = 0$ ve $z_{n+i} = \vec{p}^T e_i = p_i$'dir. Tanım gereği $y_i = -p_i$.*
- *$j = \overline{1,n}$ için $z_j = -\sum_i p_i a_{ij} = \sum_i a_{ij}y_i$; buradan (1) çıkar.*
- *$z_0 = \vec{p}^T v_0 = -\sum_i p_i b_i$, yani $z_0 = \sum_i b_i y_i$; bu da (2)'dir.*

(3) için tablo dual uygun olsun, yani her j için $z_j - c_j \leq 0$. $j = \overline{1,n}$ için (1) gereği bu $\sum_i a_{ij}y_i \leq c_j$, yani dualin j. kısıtıdır. Artık sütunlarında $z_{n+i} - c_{n+i} = -y_i \leq 0$, yani $y_i \geq 0$'dır. Demek ki $(y_1, ..., y_m)$ dualin bütün kısıtlarını sağlar. ■

Yani $z_j - c_j$ satırının artık değişkenlere ait kısmı, işaret değiştirilince dual problemin bir çözümünü verir; tablonun dual uygun olması tam olarak bu çözümün dual problem için uygun olması demektir. “Dual uygun” adı buradan gelir.
Buradan yöntemin davranışı da anlaşılır. Esas problemin her uygun çözümü $\vec{x}$ ve dualin her uygun çözümü $(y_1, ..., y_m)$ için

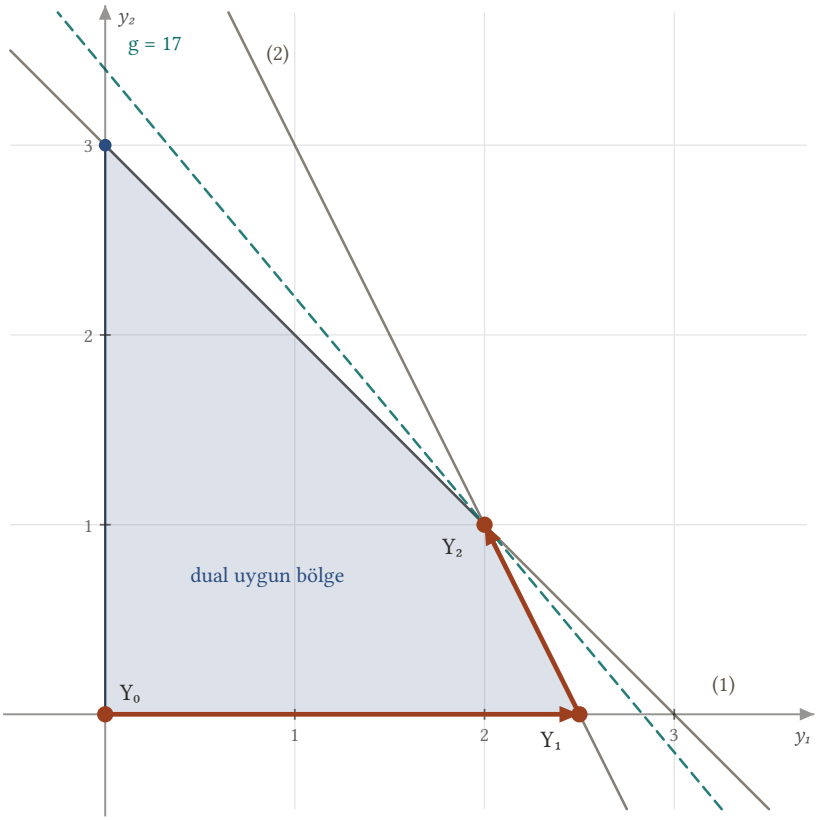
$$\sum_j c_j x_j \geq \sum_j \Big(\sum_i a_{ij}y_i \Big) x_j$$
$$= \sum_i y_i \Big(\sum_j a_{ij}x_j \Big) \geq \sum_i y_i b_i$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur: Birinci eşitsizlik $x_j \geq 0$ ve dual kısıtlardan, ikincisi $y_i \geq 0$ ve esas kısıtlardan gelir. Yani dualin her uygun çözümü, esas problemin minimumu için bir **alt sınır** verir. Dual simpleks algoritmasının her tablosu böyle bir alt sınır taşır: $z_0 = g$. Algoritma adım adım bu alt sınırı yükseltir (Teorem 12.1) ve esas çözüm de uygun hale geldiği anda alt sınır, uygun bir çözümün amaç değerine eşit olur; o değerden daha iyisi olamayacağı için ikisi de optimaldir. Kısacası: **Dual simpleks yöntemin özü, esas ve dual problemin ikisinde de uygun çözüme ulaşılan aşamanın optimal çözüm olmasıdır.**
Böylece dual simpleks algoritması, dual problemi hiç yazmadan dual problem üzerinde simpleks yöntemi uygulamaya denktir. Simpleks yöntem esas problemin uygun köşelerinde yürüyüp dual uygunluğu ararken, dual simpleks dual problemin uygun köşelerinde yürüyüp esas problemin uygunluğunu arar.

Örnek 12.3 (İki Değişkenli Örneğin Dual Problemdeki Yolu). İki değişkenli minimum problemini (Örnek 12.1) ele alalım: $x_1 + 2x_2 \geq 6$, $x_1 + x_2 \geq 5$, $x_1, x_2 \geq 0$, $\min z = 3x_1 + 5x_2$. Dual problemini yazınız ve dual simpleks tablolarından okunan dual çözümlerin dual problemde izlediği yolu gösteriniz.

Çözüm.



Şekil 12.2: Aynı iterasyonlar dual problemde: $Y_0 = (0, 0) \longrightarrow Y_1 = (5/2, 0) \longrightarrow Y_2 = (2, 1)$. Her nokta dual uygun bölgenin bir köşesidir ve g değeri 0, 15, 17 diye artar; kesikli doğru g = 17 seviye doğrusudur. (1) $y_1 + y_2 = 3$, (2) $2y_1 + y_2 = 5$.

Dual problem. Kısıt katsayıları matrisinin sütunları dualin kısıtlarını, sağ taraflar dualin amaç katsayılarını verir:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\leq 3 \\ 2y_1 + y_2 &\leq 5 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \\ \max g &= 6y_1 + 5y_2 \end{aligned}$$

Tablolardan dual çözümler. Artık değişkenler x_3 ve x_4 olduğundan Önerme 12.3 gereği $y_1 = -(z_3 - c_3)$ ve $y_2 = -(z_4 - c_4)$'tür:

 CC BY-NC-SA 4.0

- Başlangıç tablosunda (Tablo 12.1) $z_3 - c_3 = z_4 - c_4 = 0$, yani $Y_0 = (0,0)$ ve $g = 0 = z_0$.
- Birinci iterasyon tablosunda (Tablo 12.2) $z_3 - c_3 = -\frac{5}{2}$, $z_4 - c_4 = 0$, yani $Y_1 = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ve $g = 6 \cdot \frac{5}{2} = 15 = z_0$.
- Optimal tabloda (Tablo 12.3) $z_3 - c_3 = -2$, $z_4 - c_4 = -1$, yani $Y_2 = (2,1)$ ve $g = 12 + 5 = 17 = z_0$.

Uygunluk kontrolü. Y_1 için $\frac{5}{2} + 0 \le 3$ ve $2 \cdot \frac{5}{2} + 0 = 5 \le 5$; Y_2 için $2 + 1 = 3 \le 3$ ve $4 + 1 = 5 \le 5$. Üç nokta da dualin uygun çözümüdür. Ayrıca optimal tablonun v_1 ve v_2 sütunlarındaki kriterler (1) formülüyle aynıdır: $z_1 - c_1 = (2+1) - 3 = 0$, $z_2 - c_2 = (2 \cdot 2 + 1) - 5 = 0$.
Yol. Dual uygun bölgenin köşeleri $(0,0)$, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $(2,1)$ ve $(0,3)$’tür; g bunlarda sırasıyla 0, 15, 17 ve 15 değerini alır. Dual simpleks algoritmasının esas problemde uygun olmayan noktalardan geçen yolu, dual problemde uygun köşeler arasında g’yi artıran sıradan bir simpleks yoludur ve $\max g = 17 = \min z$ değerinde biter.
■

Örnek 12.4 (Üç Kısıtlı Örneğin Dual Çözümleri). Üç kısıtlı minimum probleminin (Örnek 12.2) dualini yazınız. Dual simpleks tablolarından dual çözümleri okuyup her adımda $g = z_0$ olduğunu ve optimal tablonun dual çözümünün dualin optimal çözümü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Dual problem. Esas problemin kısıtları $x_1 + x_2 + x_3 \ge 6$, $x_1 - 5x_2 - x_3 \ge 4$, $x_1 + 5x_2 + x_3 \ge 24$ ve amacı $\min z = 3x_1 + 6x_2 + x_3$’tür. Dual, katsayılar matrisinin sütunlarından kurulur:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &\le 3 \\ y_1 - 5y_2 + 5y_3 &\le 6 \\ y_1 - y_2 + y_3 &\le 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \\ \max g &= 6y_1 + 4y_2 + 24y_3 \end{aligned}$$

Dual çözümler. Artık değişkenler x_4, x_5, x_6 olduğundan $y_i = -(z_{3+i} - c_{3+i})$’dir. Tabloların v_4, v_5, v_6 sütunlarındaki kriterlerden:

- Başlangıç tablosu (Tablo 12.4): $(0,0,0)$, yani $Y_0 = (0,0,0)$ ve $g = 0 = z_0$.
- Birinci iterasyon tablosu (Tablo 12.5): $(0,0,-1)$, yani $Y_1 = (0,0,1)$ ve $g = 24 = z_0$.
- Optimal tablo (Tablo 12.6): $(0,-1,-2)$, yani $Y_2 = (0,1,2)$ ve $g = 4 + 48 = 52 = z_0$.

Uygunluk. $Y_1 = (0,0,1)$ için kısıtların sol tarafları 1, 5, 1’dir ve 3, 6, 1’i aşmaz. $Y_2 = (0,1,2)$ için sol taraflar

$$0 + 1 + 2 = 3, \quad 0 - 5 + 10 = 5, \quad 0 - 1 + 2 = 1$$

olur; yine 3, 6, 1’i aşmaz. İki çözüm de dual uygundur.
Optimallik. Y_2 dualin uygun bir çözümüdür ve $g = 52$ verir; X^* da esasın uygun bir çözümüdür ve $z = 52$ verir. Metinde gösterdiğimiz eşitsizlik gereği dualin her uygun çözümü için $g \le 52$, esasın her uygun çözümü için $z \ge 52$’dir. Dolayısıyla $Y_2 = (0,1,2)$ dualin optimal çözümüdür ve $\max g = \min z = 52$’dir. ■

12.5 Önce Dual Uygunluğu Sağlamak

Dual simpleks algoritması dual uygun bir tabloyla başlamak zorundadır; bazen ilk tablo bu koşulu sağlamaz.
Örneğin kısıtlardan biri eşitlikse o denklem için ne aylak ne de artık değişken vardır; birim sütun ancak bir yapay değişkenle kurulur. Yapay değişkenin M’li maliyeti de $z_j - c_j$ satırına pozitif M’li kriterler getirir. Bu durumda önce sıradan simpleks adımlarıyla (burada Büyük M yöntemiyle) dual uygunluk sağlanır, sonra dual simpleks algoritmasına geçilir. Ara adımlarda bazı temel değişkenler negatif olabilir. Bu adımlarda oran testi yalnız $x_{Bi} \ge 0$ **ve** $y_{ik} > 0$ olan satırlarla yapılır. Böylece $\lambda \ge 0$ olur, negatif olmayan temel değişkenler negatif olmaz ve $y_{ik} \le 0$ olan satırlardaki değerler azalmaz. Negatif x_{Bi}’li satırlar teste

 CC BY-NC-SA 4.0

girmez; onların değeri bu adımda değişebilir, bu da sorun değildir. Bu adımların amacı uygunluk değil, $z_j - c_j$ satırını düzeltmektir.

Örnek 12.5 (Eşitlik Kısıtlı Bir Problemde Büyük M ile Dual Simpleks).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 40 \\ 3x_1 + x_2 &= 30 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 20x_1 + 10x_2 \end{aligned}$$

problemini dual simpleks algoritmasıyla çözünüz.

Çözüm.

Başlangıç tablosu. Birinci kısıta x_3 aylak değişkenini ekleriz. Yapay değişkene ihtiyaç duymamak için $\geq$ olan üçüncü kısıtı -1 ile çarpıp $-4x_1 - 3x_2 \leq -60$ haline getirir ve ona da x_4'ü ekleriz; x_4 bu kısıtın artık değişkenidir. Eşitlik kısıtında birim sütun olmadığından ona x_{u_1} yapay değişkenini ekleriz; minimum problemi olduğu için amaç katsayısı $+M$'dir (Tanım 5.1):

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 40 \\ 3x_1 + x_2 + x_{u_1} &= 30 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_4 &= -60 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1} &\geq 0 \\ \min z &= 20x_1 + 10x_2 + 0x_3 \\ &\quad + 0x_4 + Mx_{u_1} \end{aligned}$$

v_3, v_{u_1} ve v_4 birim matris oluşturur. Üçüncü sağ taraf negatif olduğundan bu sistem standart formda değildir; M problemini burada yalnız $z_j - c_j$ satırını düzeltmek için kuruyoruz ve kurulumu sağ tarafların işaretini kullanmaz. $\vec{c}_B = (0, M, 0)^T$ olduğundan

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 = 3M - 20, z_2 - c_2 = M - 10, \\ z_0 = 30M. \end{aligned}$$

Minimum probleminde pozitif kriterler tükenmediği için bu tablo dual uygun değildir; algoritmanın 2. adımına hemen geçemeyiz. Önce bir dual uygun çözüm bulmamız gerekir; bunun için Büyük M yöntemini kullanırız.

Birinci adım (Büyük M adımı). Minimum probleminde en büyük pozitif kriter girer. M'nin katsayılarını karşılaştırırsak (Önerme 5.2) $3M - 20 > M - 10$; v_1 baza girer. Oran testi v_1 sütununun pozitif elemanlarıyla yapılır; $y_{41} = -4 < 0$ olduğundan x_4 satırı teste girmez:

$$\min\left(\frac{40}{1}, \frac{30}{3}\right) = 10 = \frac{x_{u_1}}{y_{u_1 1}}.$$

x_{u_1} bazdan çıkar; pivot 3.

Tablo 12.7: Başlangıç tablosu

		c_j	20	10	0	0	M	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	Oran
x_3	0	40	1	2	1	0	0	$\frac{40}{1}$
x_{u_1}	M	30	[3]	1	0	0	1	$\frac{30}{3} \Rightarrow$
x_4	0	-60	-4	-3	0	1	0	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = 30M$	$3M - 20 \Uparrow$	$M - 10$	0	0	0	

 CC BY-NC-SA 4.0

Pivot satırı 3'e bölünür: x_1 satırı $\left(\ 10 \mid 1, \frac{1}{3}, 0, 0\ \right)$ olur. Bazdan çıkan yapay değişkenin sütunu yeni tabloda yazılmaz (bkz. Büyük M yöntemi). x_3 satırından yeni pivot satırı çıkarılır, x_4 satırına 4 katı eklenir:

$$x_3 : \left(\ 40 - 10 \mid 0, 2 - \frac{1}{3}, 1, 0\ \right) = \left(\ 30 \mid 0, \frac{5}{3}, 1, 0\ \right),$$
$$x_4 : \left(\ -60 + 40 \mid 0, -3 + \frac{4}{3}, 0, 1\ \right) = \left(\ -20 \mid 0, -\frac{5}{3}, 0, 1\ \right).$$

$z_j - c_j$ satırından yeni pivot satırının $3M - 20$ katı çıkarılır:

$$z_0 : 30M - (3M - 20) \cdot 10 = 200,$$
$$v_2 : (M - 10) - (3M - 20) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}.$$

x_4 satırının değeri -60'tan -20'ye yükseldi ama hâlâ negatif.
İkinci adım (dual simpleks adımı). Yeni tabloda kriterler $0, -\frac{10}{3}, 0, 0$'dır; hepsi ≤ 0 olduğundan tablo dual uygundur, yani simpleks yöntemin gözüyle optimum tabloya ulaşıldı. Ancak çözümdeki $x_4 = -20 < 0$ olduğundan dual simpleks algoritmasına geçeriz. Tek negatif değer x_4 olduğundan v_4 bazdan çıkar. x_4 satırındaki tek negatif eleman $y_{42} = -\frac{5}{3}$'tür; v_2 baza girer ve pivot $-\frac{5}{3}$'tür. Oran $\left|\frac{-10/3}{-5/3}\right| = 2$.

Tablo 12.8: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	20	10	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_3	0	30	0	$\frac{5}{3}$	1	0
x_1	20	10	1	$\frac{1}{3}$	0	0
x_4	0	$-20 \Rightarrow$	0	$[-\frac{5}{3}]$	0	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 200$	0	$-\frac{10}{3} \Uparrow$	0	0
Oran			—	$\frac{10/3}{5/3}$	—	—

Pivot satırı $-\frac{5}{3}$'e bölünür, yani $-\frac{3}{5}$ ile çarpılır: x_2 satırı $\left(\ 12 \mid 0, 1, 0, -\frac{3}{5}\ \right)$ olur. x_3 satırından bunun $\frac{5}{3}$ katı, x_1 satırından $\frac{1}{3}$ katı çıkarılır; $z_j - c_j$ satırına $\frac{10}{3}$ katı eklenir:

$$x_3 : \left(\ 30 - 20 \mid 0, 0, 1, 0 + 1\ \right) = (10 \mid 0, 0, 1, 1),$$
$$x_1 : \left(\ 10 - 4 \mid 1, 0, 0, 0 + \frac{1}{5}\ \right) = \left(\ 6 \mid 1, 0, 0, \frac{1}{5}\ \right),$$
$$z_j - c_j : \left(\ 200 + 40 \mid 0, 0, 0, 0 - 2\ \right) = (240 \mid 0, 0, 0, -2).$$

Tablo 12.9: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	20	10	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_3	0	10	0	0	1	1
x_1	20	6	1	0	0	$\frac{1}{5}$
x_2	10	12	0	1	0	$-\frac{3}{5}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 240$	0	0	0	-2

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç. Bütün temel değişkenler negatif değildir ve bütün kriterler ≤ 0'dır; Önerme 12.1 gereği optimal çözüme ulaşılmıştır:

$$X^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1}) = (6, 12, 10, 0, 0),$$
$$\min z = 20 \cdot 6 + 10 \cdot 12 = 240.$$

Yapay değişkenin sütunu atılmıştır, yani $x_{u_1} = 0$; son tablo, yapay değişken hiç eklenmemiş orijinal problemin tablosudur ve gösterdiği çözüm orijinal problemin optimal çözümüdür. Kontrol: $6 + 24 = 30 \leq 40$ (aylak $x_3 = 10$), $18 + 12 = 30$ ve $24 + 36 = 60$ (artık $x_4 = 0$).
Sonucu grafikle de doğrulayalım. Eşitlik kısıtı uygun çözümleri $3x_1 + x_2 = 30$ doğrusuna, yani $x_2 = 30 - 3x_1$ noktalarına kısıtlar. Bunu yerine koyunca birinci kısıt $60 - 5x_1 \leq 40$, yani $x_1 \geq 4$; üçüncü kısıt $90 - 5x_1 \geq 60$, yani $x_1 \leq 6$ olur. Uygun bölge $(4, 18)$ ile $(6, 12)$ arasındaki doğru parçasıdır ve üzerinde

$$z = 20x_1 + 10(30 - 3x_1) = 300 - 10x_1$$

olur. z, x_1 büyüdükçe azaldığından minimum $x_1 = 6$'da, yani $(6, 12)$'de 240 değerini alır; diğer uçta $z = 260$'tır. ■

12.6 Duyarlılık Analizinden Sonra Dual Simpleks

Dual simpleks algoritmasının en çok kullanıldığı yerlerden biri, çözülmüş bir problemin verisi değiştiğinde yeniden çözmeye gerek bırakmamasıdır.
Duyarlılık analizi bölümünde sağ taraf sabitleri $\vec{b}$ değişince optimal tablonun yalnız v_0 sütununun değiştiğini gördük: Yeni değerler $B^{-1}\vec{b}$'dir ve $B^{-1}\vec{b} \geq 0$ olduğu sürece temel değişkenler aynı kalır. $z_j - c_j$ satırı ise $\vec{b}$'yi hiç kullanmaz; $z_j = \vec{c}_B^T B^{-1} v_j$ yalnız baza ve sütunlara bağlıdır. Dolayısıyla $\vec{b}$ izin verilen aralığın dışına çıkınca tablo optimallik koşulunu korur ama uygunluğunu yitirir; yani tablo dual uygundur. Bu, tam da dual simpleks algoritmasının başlangıç noktasıdır.

Örnek 12.6 (Sağ Taraf Değişince Dual Simpleksle Devam).

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &\leq 1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \max z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \end{aligned}$$

probleminin optimal tablosu aşağıdadır (x_4, x_5 aylak değişkenler). Optimal baz, ikinci kısıtın sağ tarafı $1 \leq b_2 \leq 4$ aralığında kaldıkça değişmez. İkinci kısıtın sağ tarafı 3'ten 5'e çıkarılırsa yeni optimal çözüm nedir?

Tablo 12.10: Optimal tablo ($b_2 = 3$)

		c_j	2	3	1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_1	2	1	1	0	-1	4	-1
x_2	3	2	0	1	2	-1	1
$z_j - c_j$		$z_0 = 8$	0	0	3	5	1

Çözüm.
Yeni v_0 sütunu. Aylak değişkenlerin başlangıç sütunları birim vektörler olduğundan optimal tablonun v_4, v_5 sütunları $B^{-1}e_1$ ve $B^{-1}e_2$'dir; yani B^{-1} bu iki sütunda okunur:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\qquad B^{-1}\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-5\\-1+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}.$$

$b_2=5$ izin verilen $[1,4]$ aralığının dışında olduğu için beklendiği gibi bir değer negatif çıktı: $x_1=-1$. Yeni amaç değeri $z_0=2\cdot(-1)+3\cdot 4=10$'dur. z_j-c_j satırı değişmez ve hepsi ≥ 0'dır; maksimum probleminde bu, tablonun dual uygun olduğunu söyler.

Dual simpleks adımı. Tek negatif değer $x_1=-1$'dir; v_1 bazdan çıkar. x_1 satırında $y_{13}=-1$ ve $y_{15}=-1$ negatiftir. Maksimum probleminde kural

$$\max\left\{\frac{3}{-1},\frac{1}{-1}\right\}=\max\{-3,-1\}=-1$$

verir; mutlak değerce en küçük oran v_5 sütunundadır. v_5 baza girer; pivot $y_{15}=-1$.

Tablo 12.11: $b_2=5$ için başlangıç tablosu

		c_j	2	3	1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_1	2	$-1\Rightarrow$	1	0	-1	4	$[-1]$
x_2	3	4	0	1	2	-1	1
z_j-c_j		$z_0=10$	0	0	3	5	$1\Uparrow$
Oran			—	—	$\frac{3}{1}$	—	$\frac{1}{1}$

Pivot -1 olduğundan pivot satırı -1 ile çarpılır ve x_5 satırı olur: $(1\mid -1,0,1,-4,1)$; bu satırın maliyeti $c_5=0$'dır. x_2 satırından ve z_j-c_j satırından yeni pivot satırı çıkarılır (ikisinin de pivot sütunundaki elemanı 1′dir):

$$x_2:(4-1\mid 0+1,1,2-1,-1+4,0)=(3\mid 1,1,1,3,0),$$
$$z_j-c_j:(10-1\mid 0+1,0,3-1,5+4,0)=(9\mid 1,0,2,9,0).$$

Tablo 12.12: Birinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	2	3	1	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_5	0	1	-1	0	1	-4	1
x_2	3	3	1	1	1	3	0
z_j-c_j		$z_0=9$	1	0	2	9	0

Sonuç. Bütün temel değişkenler negatif değildir ve maksimum probleminde bütün $z_j-c_j\geq 0$'dır; tablo optimaldir. Yeni optimal çözüm

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(0,3,0,0,1),\qquad \max z=3\cdot 3=9.$$

Kontrol: $\frac{1}{3}\cdot 3=1$, yani birinci kısıt eşitlikle sağlanır; $\frac{4}{3}\cdot 3=4\leq 5$ ve aylak $x_5=1$. Amaç değeri dual simpleks adımında beklendiği gibi azaldı ($10\to 9$), ama $b_2=3$ iken bulunan 8'den büyüktür: İkinci kaynağın artması kârı artırdı, yalnız artık birinci kısıt darboğazdır ve x_1 üretimden çıkar. Problemi baştan çözmek yerine tek bir dual simpleks adımı yetti. ■

Bu bölümde, simpleks kriterleri optimallik koşulunu sağlayan ama uygun olmayan bir tablodan başlayıp uygunluğa doğru yürüyen dual simpleks algoritmasını gördük. $\geq$ kısıtlı problemlerde yapay değişken-

 CC BY-NC-SA 4.0

lerden kurtardığı gibi, duyarlılık analizinde veri değişince çözümü birkaç adımda güncellememizi de sağlar. Bir sonraki bölüm Tam sayılı programlama ve dal-sınır yöntemi, değişkenlerin tam sayı olması istendiğinde ortaya çıkan problemleri ele alıyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

13. Tam Sayılı Programlama ve Dal-Sınır Yöntemi

Şimdiye kadar çözdüğümüz bütün problemlerde değişkenler sürekli değerler alabiliyordu: $x_1 = 13/7$ ton hammadde ya da $x_2 = 9/4$ saat çalışma anlamlı cevaplardı. Oysa pek çok problemde değişken bir **sayım** sonucudur: kaç makine alınacağı, kaç kamyon gönderileceği, kaç kişinin işe alınacağı. Bu değişkenlerin tam sayı olması gerekir ve 2,25 makine bir cevap değildir. Dual simpleks algoritması bölümüyle simpleks ailesinin yöntemlerini tamamladık; bu son konu bölümünde tam sayı şartını da işin içine katıyoruz.
İlk akla gelen yol tam sayı şartını unutup problemi alışık olduğumuz gibi çözmek, sonra da çıkan kesirli değerleri yuvarlamaktır. Bunun neden güvenilir olmadığını bir örnekle göreceğiz. Onun yerine **dal-sınır yöntemini** kuracağız: problem gittikçe küçülen alt problemlere bölünür (dallanma), her alt problemin varabileceği en iyi değer tam sayı şartı kaldırılarak hesaplanır (sınır) ve umut vermeyen alt problemler bir daha bakılmamak üzere atılır (budama).

13.1 Tam Sayılı Programlama Problemi

Önce problemi tanımlayalım; kısıtlar ve amaç fonksiyonu tanıdıktır, yeni olan yalnız değişkenlere konan şarttır.

Tanım 13.1 (Tam Sayılı Programlama Problemi). Bir lineer programlama problemine (Tanım 1.1) değişkenlerin tam sayı değer alması şartı da eklenirse elde edilen probleme **tam sayılı programlama (TP) problemi** denir. Bütün değişkenlerin tam sayı olması isteniyorsa probleme **pür (saf) TP problemi** denir. Örneğin

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\le 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \quad \text{ve tam sayı} \\ \max z &= 8x_1 + 5x_2 \end{aligned}$$

bir pür TP problemidir.

Yani TP problemi, işaret koşullarının yanına "ve tam sayı" ibaresi eklenmiş bir lineer programlama problemidir. Değişkenlerin yalnız bir kısmı tam sayı olmak zorundaysa problem karma TP problemi olur; bu bölümde yalnız pür TP problemleriyle çalışacağız ve kısaca TP diyeceğiz. Bir TP probleminin uygun çözümü, bütün kısıtları sağlayan ve bütün bileşenleri tam sayı olan bir $\vec{x}$ vektörüdür.
Uygun bölge sınırlıysa bir TP probleminin uygun çözümleri sonlu sayıdadır; bu yüzden ilke olarak her birini tek tek deneyip önce uygun olup olmadığına, sonra amaç değerine bakabiliriz. Küçük bir problemde bu gerçekten işe yarar.

Örnek 13.1 (Uygun Çözümleri Tek Tek Denemek).

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 &\le 13 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \quad \text{ve tam sayı} \\ \max z &= 21x_1 + 11x_2 \end{aligned}$$

TP probleminin bütün uygun çözümlerini yazarak optimal çözümünü bulunuz.

> **Çözüm.**
> $x_2 \ge 0$ olduğundan $7x_1 \le 13$, yani $x_1 \le 13/7 < 2$; tam sayı olduğu için $x_1 \in \{0, 1\}$.
>
> - $x_1 = 0$ ise $4x_2 \le 13$, yani $x_2 \le 13/4$ ve $x_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$.
> - $x_1 = 1$ ise $4x_2 \le 6$, yani $x_2 \le 3/2$ ve $x_2 \in \{0, 1\}$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Altı uygun çözüm ve amaç değerleri şöyledir:

Tablo 13.1: Uygun çözümlerde amaç değerleri

(x_1, x_2)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$z = 21x_1 + 11x_2$	0	11	22	33	21	32

En büyük değer $(0,3)$ noktasındadır: optimal çözüm $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ ve $\max z = 33$'tür. ■

Ne var ki bu yol değişken sayısı arttıkça hızla imkânsız hâle gelir. Örneğin her değişkeni yalnız 0 ya da 1 değerini alabilen n değişkenli bir TP probleminde denenecek 2^n aday vardır. Her yeni değişken aday sayısını iki katına çıkarır; 30 değişkende aday sayısı $2^{30} = 1\,073\,741\,824$, yani bir milyardan fazladır. Bu olguya problem zorluğunun **üstel büyümesi** denir. Dal-sınır yöntemi, uygun çözümlerin yalnız küçük bir kısmına açıkça bakarak bu engeli aşmaya çalışır.
Yöntemin her adımında aynı yardımcı problemi kullanacağız: tam sayı şartı kaldırılmış problem.

Tanım 13.2 (Rahatlatılmış LP Problemi). Bir TP probleminde tam sayı şartları kaldırılarak elde edilen lineer programlama problemine **rahatlatılmış LP problemi** (ya da gevşetilmiş problem) denir.

Yani rahatlatılmış problemin kısıtları, işaret koşulları ve amaç fonksiyonu TP probleminin aynısıdır; yalnız "ve tam sayı" ibaresi silinmiştir. Rahatlatılmış problem sıradan bir lineer programlama problemidir; iki değişkende grafik yöntemle (Uç noktalar ve grafik yöntem), genel olarak simpleks yöntemle çözülür.

Örnek 13.2 (Rahatlatılmış Problemin Çözümü). Önceki örnekteki (Örnek 13.1) TP probleminin rahatlatılmış LP problemini yazınız ve çözünüz.

Çözüm.
Tam sayı şartını kaldırırız:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 &\le 13 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max z &= 21x_1 + 11x_2 \end{aligned}$$

Uygun bölge $(0,0)$, $(13/7, 0)$ ve $(0, 13/4)$ köşeli üçgendir. Köşelerde

$$z(0,0) = 0, \quad z\left(\frac{13}{7}, 0\right) = 21 \cdot \frac{13}{7} = 39, \quad z\left(0, \frac{13}{4}\right) = \frac{143}{4} = 35{,}75$$

olur. Bölge sınırlı olduğundan optimum bir köşededir (Sonuç 3.1): rahatlatılmış problemin optimal çözümü $x_1 = 13/7$, $x_2 = 0$ ve $\max z = 39$'dur. ■

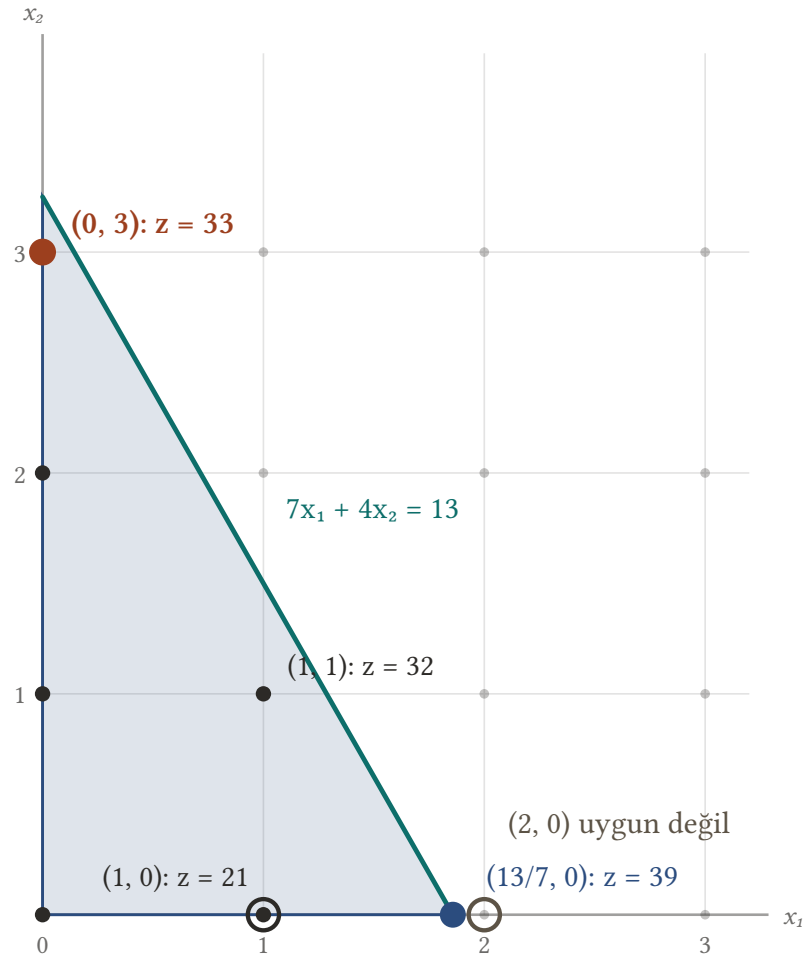
13.2 Yuvarlama Neden Yetmez

Rahatlatılmış problemin çözümünü yuvarlamak cazip görünür. Aynı örnek bunun iki ayrı şekilde yanlış gidebileceğini gösteriyor.

Örnek 13.3 (Yuvarlamanın Başarısız Olduğu Bir Problem). $7x_1 + 4x_2 \le 13, x_1, x_2 \ge 0$ ve tam sayı kısıtları altında $\max z = 21x_1 + 11x_2$ problemini ele alalım. Rahatlatılmış problemin optimal çözümünü (Örnek 13.2) yuvarlayarak TP probleminin optimal çözümü bulunabilir mi?

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.1: $7x_1 + 4x_2 \leq 13$ bölgesi ve tam sayılı noktaları (koyu noktalar). Rahatlatılmış problemin optimumu (13/7, 0) noktasıdır. Yukarı yuvarlanan (2, 0) bölgenin dışında kalır, aşağı yuvarlanan (1, 0) ise z = 21 verir; tam sayılı optimum (0, 3) noktasında z = 33'tür ve LP optimumundan uzaktadır.

Rahatlatılmış problemin optimal çözümü $(13/7, 0)$, yani yaklaşık $(1{,}86; 0)$'dır.
En yakın tam sayıya yuvarlama. $x_1 = 13/7$ en yakın tam sayıya yuvarlanırsa $(2, 0)$ elde edilir. Bu nokta kısıtı sağlamaz: $7 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 14 > 13$. Yuvarlanmış çözüm uygun bile değildir.
Aşağı yuvarlama. Uygunluğu korumak için aşağı yuvarlayalım: $(1, 0)$ noktası uygundur ama $z = 21$ verir. Oysa Örnek 13.1 içinde TP probleminin optimumunu $(0, 3)$ noktasında $z = 33$ olarak bulduk. Aşağı yuvarlanmış çözüm optimumdan çok uzaktadır.
Nedeni şekilde görülüyor: rahatlatılmış problemin optimumu x_1 ekseni üzerindeki köşededir, tam sayılı optimum ise bölgenin öbür ucunda, x_2 ekseni üzerindedir. İki nokta birbirine hiç yakın değildir.
Demek ki yuvarlama ne uygun bir çözüm ne de iyi bir çözüm garanti eder. Çok değişkenli problemlerde durum daha da kötüdür: her değişken yukarı ya da aşağı yuvarlanabildiği için 2^n yuvarlama seçeneği vardır ve bunların hiçbiri uygun olmayabilir. ■

Yine de rahatlatılmış problem boşa çözülmüş değildir: z değeri TP probleminin optimumu hakkında kesin bir bilgi verir. Bu örnekte rahatlatılmış optimum 39, TP optimumu 33'tür ve $33 \leq 39$ olduğuna dikkat edelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Rahatlatılmış Problem Bir Sınır Verir

Son gözlemin tesadüf olmadığını gösterelim. Bütün fikir, TP probleminin uygun çözümlerinin rahatlatılmış problemin uygun çözümleri arasında bulunmasıdır.

Teorem 13.1 (Rahatlatılmış Problemin Verdiği Sınır). *Bir TP problemi ve onun rahatlatılmış LP problemi verilsin.*

1. *Rahatlatılmış problemin uygun çözümü yoksa TP probleminin de uygun çözümü yoktur.*
2. *Maksimum probleminde rahatlatılmış problemin optimal değeri z_R ise TP probleminin her uygun çözümü için $z \leq z_R$'dir. Özellikle TP probleminin optimal değeri z_T varsa $z_T \leq z_R$ olur.*
3. *Minimum probleminde aynı koşullarda TP probleminin her uygun çözümü için $z \geq z_R$, dolayısıyla $z_T \geq z_R$'dir.*

> ***İspat.***
> *TP probleminin uygun çözümlerinin kümesini S_T, rahatlatılmış problemin uygun çözümlerinin kümesini S_R ile gösterelim. $\vec{x} \in S_T$ ise $\vec{x}$ bütün kısıtları ve işaret koşullarını sağlar; tam sayı olması da ek bir bilgidir. O hâlde $\vec{x} \in S_R$'dir, yani*
>
> $$S_T \subseteq S_R.$$
>
> ***1.*** *$S_R = \varnothing$ ise $S_T \subseteq S_R$ gereği $S_T = \varnothing$ olur.*
> ***2.*** *$\vec{x} \in S_T$ olsun. $\vec{x} \in S_R$ olduğundan ve z_R, amaç fonksiyonunun S_R üzerindeki en büyük değeri olduğundan $z(\vec{x}) \leq z_R$'dir. TP probleminin optimal çözümü $\vec{x}^*$ ise $z_T = z(\vec{x}^*)$ ve $\vec{x}^* \in S_T$ olduğundan $z_T \leq z_R$ çıkar.*
> ***3.*** *Aynı akıl yürütme, z_R bu kez S_R üzerindeki en küçük değer olduğu için $z(\vec{x}) \geq z_R$ verir.* ■

Yani daha az şart koyan problem daha çok çözüm arasından seçer ve bu yüzden en az onun kadar iyi bir değere ulaşır. Maksimumda "iyi" büyük demek olduğu için rahatlatılmış optimum TP optimumunun üstünde, minimumda altında kalır:

$$\begin{pmatrix}\text{TP problemi için}\\ \text{optimal } z \text{ değeri}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Rahatlatılmış LP problemi}\\ \text{için optimal } z \text{ değeri}\end{pmatrix} \quad (\max).$$

Tanım 13.3 (Üst Sınır ve Alt Sınır). Maksimum tipindeki bir TP probleminde rahatlatılmış LP probleminin optimal z değerine TP problemi için **üst sınır** (Ü.S) denir. Minimum tipindeki bir TP probleminde aynı değere **alt sınır** (A.S) denir.

Yani maksimum probleminde Ü.S, TP optimumunun asla aşamayacağı değerdir; minimum probleminde A.S, TP optimumunun asla altına inemeyeceği değerdir. Örnek 13.2 içindeki problemde Ü.S $= 39$'dur. Sınır çoğu zaman aşılamaz bir tavandır ama bazen tam olarak ulaşılır. Bu durumda iş hemen biter.

Sonuç 13.1 (Tam Sayılı Rahatlatılmış Optimum). *Rahatlatılmış LP probleminin optimal çözümünde bütün değişkenler tam sayı değer alıyorsa bu çözüm TP probleminin de optimal çözümüdür.*

> ***İspat.***
> *Rahatlatılmış problemin optimal çözümü $\vec{x}^*$ ve optimal değeri $z_R = z(\vec{x}^*)$ olsun. $\vec{x}^*$ bütün kısıtları sağlar ve bileşenleri tam sayıdır; yani TP probleminin bir uygun çözümüdür. Maksimum probleminde Teorem 13.1 gereği TP probleminin her uygun $\vec{x}$ çözümü için $z(\vec{x}) \leq z_R = z(\vec{x}^*)$ olur. Demek ki $\vec{x}^*$ TP probleminin optimal çözümüdür. Minimum probleminde eşitsizlikler yön değiştirir, sonuç aynıdır.* ■

Örnek 13.4 (Rahatlatılmış Optimumun Tam Sayı Çıkması).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \ \text{ ve tam sayı} \\ \max z &= 2x_1 + x_2 \end{aligned}$$

TP problemini rahatlatılmış problemi yardımıyla çözünüz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Rahatlatılmış problemin uygun bölgesi $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,1)$ ve $(0,4)$ köşeli dörtgendir. $(3,1)$ köşesi $x_1 = 3$ ile $x_1 + x_2 = 4$ doğrularının kesişimidir. Köşelerde

$$z(0,0) = 0, \quad z(3,0) = 6, \quad z(3,1) = 7, \quad z(0,4) = 4$$

olur; rahatlatılmış optimum $x_1 = 3, x_2 = 1, z = 7$'dir. İki değişken de tam sayı olduğundan Sonuç 13.1 gereği TP probleminin optimal çözümü de $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ ve $\max z = 7$'dir. ■

13.4 Dallanma ve Budama

Rahatlatılmış optimum kesirliyse ne yapacağız? Dal-sınır yöntemi iki temel işleme dayanır.

Tanım 13.4 (Dallandırma). TP probleminin rahatlatılmış LP problemine **Alt Problem 1** diyelim. Bir alt problemin rahatlatılmış optimal çözümünde bir x_j değişkeni kesirli bir a değeri alsın; $k = \lfloor a \rfloor$ ile $k+1 = \lceil a \rceil$ arasında, yani $k < a < k+1$ olsun. Bu alt problemden iki yeni alt problem kurulur:

$$\text{Alt problem} \cup \{x_j \le k\},$$
$$\text{Alt problem} \cup \{x_j \ge k+1\}.$$

Yeni alt problemlere sıradaki numaralar verilir. Bu işleme x_j değişkeninden **dallandırma** (dallanma) denir.

Yani x_j tam sayı olacaksa ya k'dan küçük eşit ya da $k+1$'den büyük eşit olmak zorundadır; iki seçeneği iki ayrı dala ayırırız. "$\cup$" işareti, alt problemin kısıtlarına yeni kısıtın eklendiğini anlatır. Yeni alt problemler yine TP problemleridir ve onların da rahatlatılmış problemleri çözülür. Birden fazla kesirli değişken varsa hangisinden dallanılacağı keyfidir; hangi dala hangi numaranın verildiği de önemli değildir. Dallanmalar, kökünde Alt Problem 1 bulunan bir **ağaç** yapısıyla gösterilir.
Dallanmanın hiçbir tam sayılı çözümü kaybetmediğini ama rahatlatılmış optimumu dışarıda bıraktığını gösterelim.

Önerme 13.1 (Dallanmanın Özellikleri). *Bir alt problem, rahatlatılmış optimumunda $k < x_j = a < k+1$ olan x_j değişkeninden dallandırılsın.*

1. *Alt problemin tam sayılı her uygun çözümü, iki yeni alt problemden tam olarak birinin uygun çözümüdür.*
2. *Alt problemin rahatlatılmış optimal çözümü, yeni alt problemlerin hiçbirinin uygun çözümü değildir.*
3. *Maksimum probleminde yeni alt problemlerin rahatlatılmış optimal z değerleri, dallandırılan alt problemkini aşamaz; minimum probleminde onun altına inemez.*

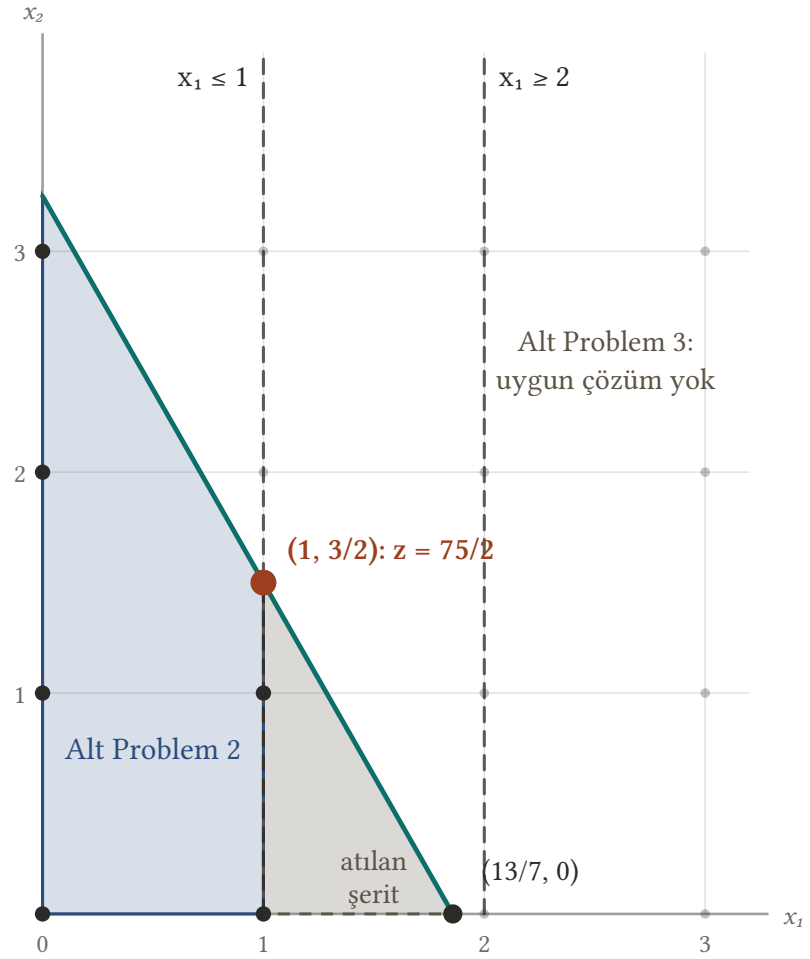
İspat.
1. *$\vec{x}$ alt problemin tam sayılı bir uygun çözümü olsun. x_j bir tam sayıdır ve k ile $k+1$ ardışık tam sayılar olduğundan aralarında başka tam sayı yoktur. O hâlde ya $x_j \le k$ ya da $x_j \ge k+1$'dir; ikisi birden olamaz, çünkü $k < k+1$. $\vec{x}$ alt problemin bütün kısıtlarını zaten sağladığından, eklenen kısıtı sağladığı yeni alt problemin uygun çözümüdür, öbürünün değildir.*
2. *Rahatlatılmış optimumda $x_j = a$ ve $k < a < k+1$'dir. $a \le k$ ve $a \ge k+1$ eşitsizliklerinin ikisi de yanlıştır; optimal çözüm eklenen kısıtların hiçbirini sağlamaz.*
3. *Yeni alt problemin kısıtları eskisinin kısıtlarını ve bir kısıt daha içerir. Bu yüzden yeni rahatlatılmış problemin uygun çözümleri eskisinin uygun çözümleri arasındadır. Maksimum probleminde daha küçük bir küme üzerindeki en büyük değer, daha büyük küme üzerindeki en büyük değeri aşamaz; minimumda en küçük değer onun altına inemez.* ■

Geometrik olarak dallanma, uygun bölgeden $k < x_j < k+1$ şeridini kesip atar. Şeridin içinde hiç tam sayılı nokta yoktur, rahatlatılmış optimum ise tam bu şeridin içindedir.

Örnek 13.5 (Bir Dallanma Adımı). $7x_1 + 4x_2 \le 13$, $x_1, x_2 \ge 0$ ve tam sayı kısıtları altında $\max z = 21x_1 + 11x_2$ problemini ele alalım. Alt Problem 1'in (rahatlatılmış problemin) optimumu $x_1 = 13/7$, $x_2 = 0$ idi (Örnek 13.2). x_1 değişkeninden dallanarak iki alt problem kurunuz ve rahatlatılmış problemlerini çözünüz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.



Şekil 13.2: $x_1 = 13/7$ değişkeninden dallanma. $x_1 \le 1$ dalı (Alt Problem 2) bölgenin sol parçasını alır; $1 < x_1 < 2$ şeridi atılır ve içinde tam sayılı nokta yoktur. $x_1 \ge 2$ dalı (Alt Problem 3) bölgeyle kesişmez. Altı tam sayılı noktanın hepsi Alt Problem 2'de kalır.

$1 < 13/7 < 2$ olduğundan $k = 1$'dir:

$$\text{Alt Problem } 2 = \text{Alt Problem } 1 \cup \{x_1 \le 1\},$$
$$\text{Alt Problem } 3 = \text{Alt Problem } 1 \cup \{x_1 \ge 2\}.$$

Alt Problem 3. $x_1 \ge 2$ ise $7x_1 + 4x_2 \ge 14 > 13$ olur; kısıt sağlanamaz. Alt Problem 3'ün uygun çözümü yoktur.
Alt Problem 2. Uygun bölge $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,3/2)$ ve $(0,13/4)$ köşeli dörtgendir; $(1,3/2)$ köşesi $x_1 = 1$ ile $7x_1 + 4x_2 = 13$ doğrularının kesişimidir. Köşelerde

$$z(0,0) = 0, \qquad z(1,0) = 21,$$
$$z\left(1, \frac{3}{2}\right) = 21 + \frac{33}{2} = \frac{75}{2}, z\left(0, \frac{13}{4}\right) = \frac{143}{4}$$

olur. $75/2 = 37{,}5$ en büyüğüdür; Alt Problem 2'nin rahatlatılmış optimumu $x_1 = 1$, $x_2 = 3/2$ ve $z = 75/2$'dir.
Önerme 13.1 burada gözle görülüyor: altı tam sayılı uygun çözümün (Tablo 13.1) hepsinde $x_1 \le 1$ olduğundan hepsi Alt Problem 2'dedir; $(13/7, 0)$ noktası iki alt problemin de dışında kalır; $75/2 \le$

 CC BY-NC-SA 4.0

39'dur. Alt Problem 2'nin optimumunda $x_2 = 3/2$ kesirli olduğu için yöntem bu kez x_2 değişkeninden dallanarak devam eder. ■

Dallanma tek başına ağacı durmadan büyütür. Onu durduran şey, bazı alt problemlerin bir daha dallandırılmamasıdır. Bunun için önce elimizdeki en iyi tam sayılı çözümü adlandıralım.

Tanım 13.5 (Aday Çözüm). Bir alt problemin rahatlatılmış optimal çözümünde bütün değişkenler tam sayı ise bu çözüm TP probleminin bir uygun çözümüdür; buna **aday çözüm** denir. Maksimum probleminde o ana kadar bulunan aday çözümlerin en büyük z değeri TP optimumu için bir **alt sınırdır** (A.S). Henüz aday yoksa $\text{A.S} = -\infty$ alınır. Minimum probleminde adayların en küçük z değeri bir **üst sınırdır** (Ü.S) ve başlangıçta $\text{Ü.S} = +\infty$ alınır.

Yani aday çözüm, TP problemi için gerçekten kullanılabilecek bir cevaptır; optimal olup olmadığı henüz bilinmez. Maksimum probleminde optimal değer en iyi adayın değerinden küçük olamaz, rahatlatılmış problemin değerinden de büyük olamaz:

$$\text{A.S} \le z_T \le \text{Ü.S} \ .$$

Yöntem ilerledikçe daha iyi adaylar bulundukça A.S büyür ve iki sınır birbirine yaklaşır.

Tanım 13.6 (Budama). Bir alt problemin bir daha dallandırılmamasına alt problemin **budanması** denir. Maksimum probleminde bir alt problem şu durumlarda budanır:

- **D1)** Alt problemin rahatlatılmış optimal z değeri mevcut A.S değerini aşmıyorsa ($z \le \text{A.S}$). Minimum probleminde: z değeri mevcut Ü.S değerinden küçük değilse ($z \ge \text{Ü.S}$).
- **D2)** Alt problemin uygun çözümü yoksa.
- **D3)** Alt problemin rahatlatılmış optimal çözümü tam sayılıysa. Bu çözüm bir aday çözümdür; z değeri mevcut A.S değerinden büyükse yeni A.S olur ve en iyi aday bu çözüm olur.

Yani budanan bir alt problemde, elimizdeki en iyi adaydan daha iyi bir tam sayılı çözüm bulunamayacağı bilindiği için arama sürdürülmez. D2'de alt problemde tam sayılı çözüm yoktur (Teorem 13.1). D3'te alt problemin en iyi tam sayılı çözümü zaten elimizdedir: rahatlatılmış optimumun kendisi (Sonuç 13.1). D1'de alt problemin tam sayılı çözümlerinin hiçbiri elimizdeki adaydan daha iyi olamaz, çünkü Teorem 13.1 gereği hepsinin z değeri alt problemin rahatlatılmış z değerini aşmaz. Tek bir alt problemi çözerek çok sayıda tam sayılı çözümü incelemeden eleriz; TP probleminin bütün uygun çözümleri böylece örtülü olarak, açıkça tek tek bakılmadan ele alınmış olur.
Yöntemin gerçekten durduğunu ve durduğunda doğru cevabı verdiğini ispatlayalım.

Önerme 13.2 (Dal-Sınır Yöntemi Sonlu Adımda Durur). *Rahatlatılmış LP probleminin uygun bölgesi sınırlıysa dal-sınır yöntemi sonlu sayıda alt problem çözdükten sonra durur.*

İspat.
Uygun bölge sınırlı olduğundan her j için bölgede $x_j \le U_j$ olacak şekilde bir U_j sayısı vardır. Her alt problemin kısıtları Alt Problem 1'in kısıtlarını içerdiği için bu sınır bütün alt problemlerde geçerlidir.
Bir alt problem, rahatlatılmış optimumunda $x_j = a$ kesirli olduğu için dallandırılsın. Eklenen kısıt ya $x_j \le \lfloor a \rfloor$ ya da $x_j \ge \lceil a \rceil$'dir. $0 \le a \le U_j$ olduğundan

$$0 \le \lfloor a \rfloor \le \lfloor U_j \rfloor, \qquad 1 \le \lceil a \rceil \le \lfloor U_j \rfloor + 1$$

olur. Demek ki ağaçta eklenebilecek bütün kısıtlar

$$x_j \le t \ \ (0 \le t \le \lfloor U_j \rfloor), \qquad x_j \ge t \ \ (1 \le t \le \lfloor U_j \rfloor + 1)$$

biçimindedir ve her j için bunların sayısı $2(\lfloor U_j \rfloor + 1)$'dir; hepsinin sayısı sonludur. Buna N diyelim.
Ağacın kökten başlayan herhangi bir yolu boyunca eklenen kısıtların hepsi farklıdır. Gerçekten, bir alt problemde eklenen yeni kısıt, o alt problemin rahatlatılmış optimumu tarafından sağlanmaz (Önerme 13.1); alt problemin kendi kısıtlarını ise bu optimum sağlar. Öyleyse yeni kısıt alt problemin kısıtları arasında yoktu. Bu yüzden bir yol üzerinde en fazla N dallanma olabilir, yani ağacın derinliği en fazla

 CC BY-NC-SA 4.0

N'dir. Her alt problem en fazla iki yeni alt problem ürettiğinden ağaçta en fazla $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^N$ *alt problem bulunur. Bu sayı sonludur ve yöntem sonlu adımda durur.* ■

Teorem 13.2 (Dal-Sınır Yönteminin Doğruluğu). *Maksimum tipinde bir TP probleminin rahatlatılmış LP probleminin uygun bölgesi sınırlı olsun ve dal-sınır yöntemi bütün alt problemler budanınca dursun.*

1. *Hiç aday çözüm bulunmamışsa TP probleminin uygun çözümü yoktur.*
2. *Aday çözüm bulunmuşsa en büyük* z *değerli aday TP probleminin optimal çözümüdür.*

İspat.
Ağaçta dallandırılmamış, yani budanmış alt problemlere ***yaprak*** *diyelim.* $\vec{x}$ *TP probleminin herhangi bir uygun çözümü olsun.*
$\vec{x}$ bir yaprağın uygun çözümüdür. *$\vec{x}$, Alt Problem 1'in tam sayılı bir uygun çözümüdür. Tam sayılı uygun çözümü olduğu bir alt problem dallandırılmışsa Önerme 13.1 gereği $\vec{x}$ yeni alt problemlerden birinin tam sayılı uygun çözümüdür. Kökten başlayıp her seferinde bu alt probleme inersek, ağaç sonlu olduğundan (Önerme 13.2) sonunda bir L yaprağına varırız ve $\vec{x}$, L'nin uygun çözümüdür.*
$z(\vec{x})$, son A.S değerini aşmaz. *L'nin rahatlatılmış optimal değeri z_L olsun. Teorem 13.1 gereği $z(\vec{x}) \leq z_L$'dir. L üç durumdan biriyle budanmıştır:*

- *D2 olamaz, çünkü $\vec{x}$, L'nin bir uygun çözümüdür.*
- *D3 ise L'nin optimumu bir adaydır; z_L bu adayın değeridir ve en iyi adayın değerini aşmaz.*
- *D1 ise budama anındaki A.S için $z_L \leq$ A.S'dir. A.S yalnız büyüyebildiği için bu, son A.S değerini de aşmaz. D1'in uygulanabilmesi için o anda A.S sonlu olmalıdır, yani bir aday bulunmuş olmalıdır.*

Her durumda $z(\vec{x}) \leq z_L \leq$ (en iyi adayın değeri) olur ve bir aday bulunmuştur.
Sonuç. *Hiç aday bulunmamışsa yukarıdaki akıl yürütme bir çelişki verir; demek ki TP probleminin uygun çözümü yoktur. Aday bulunmuşsa en iyi aday TP probleminin uygun bir çözümüdür ve her uygun $\vec{x}$ için $z(\vec{x})$ onun değerini aşmaz; yani en iyi aday optimal çözümdür.* ■

Minimum probleminde aynı ispat, eşitsizlikler ters çevrilerek ve A.S yerine Ü.S kullanılarak yapılır.

13.5 Dal-Sınır Yöntemi

Buraya kadar söylenenleri bir reçetede toplayalım ve iki örnekte uygulayalım.

Dal-sınır yöntemi altı adımda (maksimum problemi)

1. Tam sayı şartlarını kaldırıp Alt Problem 1'i, yani rahatlatılmış LP problemini çöz. Uygun çözümü yoksa TP probleminin de yoktur. Optimal z değeri Ü.S'dir; A.S $= -\infty$ al.
2. Optimal çözüm tam sayılıysa TP probleminin optimal çözümüdür; dur.
3. Dallandırılacak bir alt problemde kesirli değer alan bir $x_j = a$ seç ve $x_j \leq \lfloor a \rfloor$, $x_j \geq \lceil a \rceil$ kısıtlarıyla iki yeni alt problem kur; sıradaki numaraları ver.
4. Her yeni alt problemin rahatlatılmış problemini çöz ve karar ver: uygun değilse budanır (D2); çözüm tam sayılıysa adaydır, gerekirse A.S güncellenir ve budanır (D3); $z \leq$ A.S ise budanır (D1); hiçbiri değilse dallandırılmak üzere bekler.
5. Bekleyen alt problem kaldıkça 3. ve 4. adımları tekrarla. Bekleyen bir alt problemi dallandırmadan önce, bu arada büyümüş olabilecek A.S ile yeniden karşılaştır.
6. Bekleyen alt problem kalmayınca en iyi aday TP probleminin optimal çözümüdür; aday yoksa TP probleminin uygun çözümü yoktur.

Minimum probleminde Ü.S ile A.S yer değiştirir: Alt Problem 1'in değeri A.S olur, başlangıçta Ü.S $= +\infty$ alınır, D1'de $z \geq$ Ü.S olan alt problem budanır ve en küçük z değerli aday seçilir.

Örnek 13.6 (Dal-Sınır Yöntemiyle Bir Maksimum Problemi).

 CC BY-NC-SA 4.0

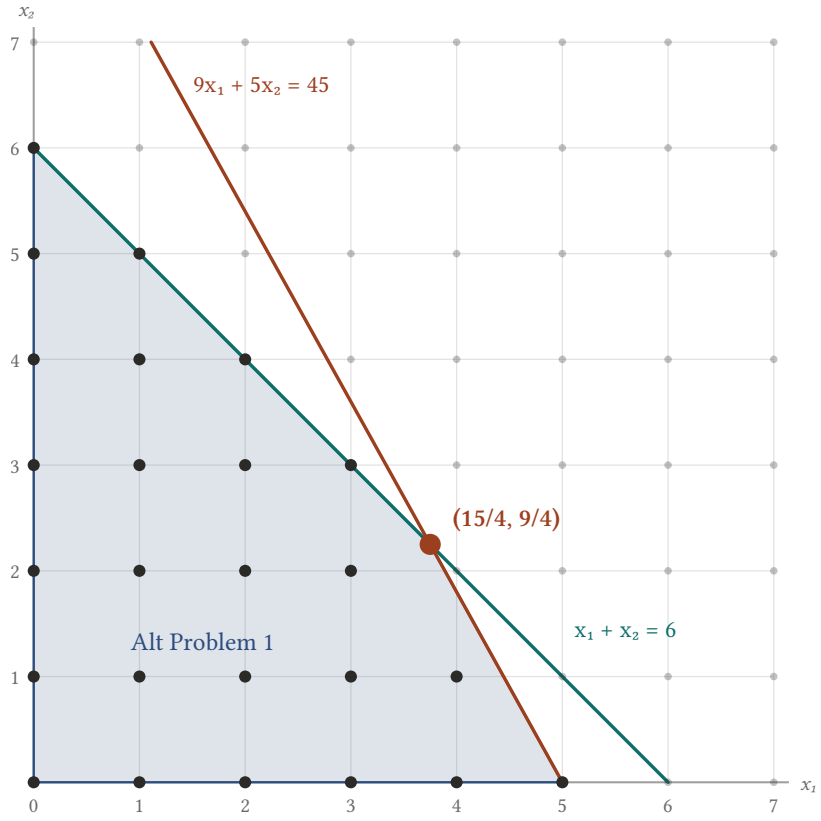
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 6 \\ 9x_1 + 5x_2 &\le 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \ \text{ ve tam sayı} \\ \max z &= 8x_1 + 5x_2 \end{aligned}$$

problemini çözünüz.

Çözüm.
İşaret koşulunda tam sayı olma şartı da bulunduğuna dikkat edelim: problem bir TP problemidir ve dal-sınır yöntemiyle çözülecektir. Alt problemlerin hepsi iki değişkenlidir; her birinin rahatlatılmış problemini grafik yöntemle, uygun bölgenin köşelerini tarayarak çözeceğiz.
Alt Problem 1. Rahatlatılmış problemin uygun bölgesi $(0,0)$, $(5,0)$, $(15/4, 9/4)$ ve $(0,6)$ köşeli dörtgendir. $(15/4, 9/4)$ köşesi iki kısıt doğrusunun kesişimidir: $9x_1 + 5x_2 = 45$ denkleminden $5(x_1 + x_2) = 30$ denklemini çıkarırsak $4x_1 = 15$, yani $x_1 = 15/4$ ve $x_2 = 6 - 15/4 = 9/4$ bulunur. Köşelerde

$$z(0,0) = 0, \qquad z(5,0) = 40,$$
$$z\left(\frac{15}{4}, \frac{9}{4}\right) = 30 + \frac{45}{4} = \frac{165}{4}, z(0,6) = 30$$

olur. Alt Problem 1'in optimal çözümü $x_1 = 15/4, x_2 = 9/4$ ve $z = 165/4 = 41{,}25$'tir. Pür TP problemi için Ü.S $= 165/4$'tür; henüz aday olmadığından A.S $= -\infty$'dur.



Şekil 13.3: Alt Problem 1, yani rahatlatılmış problem. Uygun bölge (0, 0), (5, 0), (15/4, 9/4), (0, 6) köşeli dörtgendir; koyu noktalar tam sayılı uygun noktalardır. Rahatlatılmış problemin optimumu (15/4, 9/4) köşesidir ve tam sayılı değildir.

Çözümde iki değişken de kesirlidir. Dallanan değişken keyfi seçilir; x_1'i seçelim. $3 < x_1 = 15/4 < 4$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\text{Alt Problem } 2 = \text{Alt Problem } 1 \cup \{x_1 \geq 4\},$$
$$\text{Alt Problem } 3 = \text{Alt Problem } 1 \cup \{x_1 \leq 3\}$$

alt problemleri kurulur.

Tablo 13.2: Alt Problem 2 ve Alt Problem 3

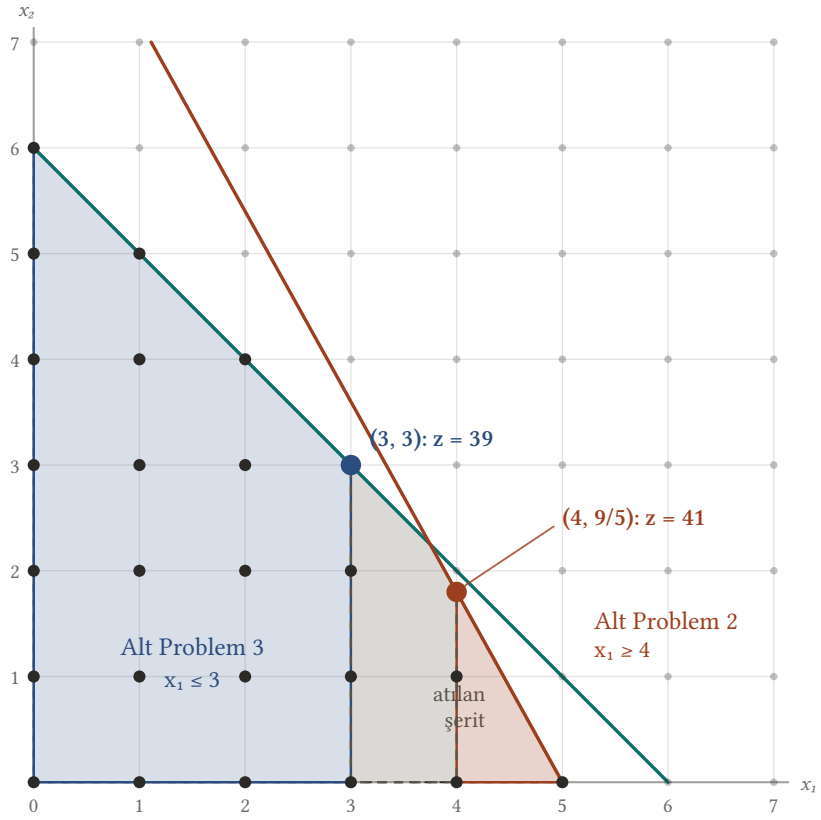
Alt Problem 2	Alt Problem 3
$x_1 + x_2 \leq 6$	$x_1 + x_2 \leq 6$
$9x_1 + 5x_2 \leq 45$	$9x_1 + 5x_2 \leq 45$
$x_1 \geq 4$	$x_1 \leq 3$
$x_1, x_2 \geq 0$ ve tam sayı	$x_1, x_2 \geq 0$ ve tam sayı
$\max z = 8x_1 + 5x_2$	$\max z = 8x_1 + 5x_2$
Rahatlatılmış optimum: $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{9}{5}$, $\max z = 41$	Rahatlatılmış optimum: $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $\max z = 39$

Alt Problem 3. $x_1 \leq 3$ kısıtı bölgenin sol parçasını alır; köşeler $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,3)$ ve $(0,6)$'dır. $(3,3)$ noktası $x_1 = 3$ ile $x_1 + x_2 = 6$ doğrularının kesişimidir ve $9 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 42 \leq 45$ olduğundan uygundur. Köşelerde z değerleri sırasıyla 0, 24, 39 ve 30'dur. Optimum $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $z = 39$'dur. Bütün karar değişkenleri tam sayı olduğundan bu bir uygun çözüm ve **aday çözümdür**: A.S $= 39$ olur ve Alt Problem 3 budanır (D3).
Alt Problem 2. $x_1 \geq 4$ kısıtı bölgenin sağındaki küçük üçgeni alır; köşeler $(4,0)$, $(5,0)$ ve $(4,9/5)$'tir. $(4,9/5)$ noktası $x_1 = 4$ ile $9x_1 + 5x_2 = 45$ doğrularının kesişimidir ($5x_2 = 9$) ve $4 + 9/5 = 29/5 \leq 6$ olduğundan uygundur. Köşelerde

$$z(4,0) = 32, \quad z(5,0) = 40, \quad z\left(4, \frac{9}{5}\right) = 32 + 9 = 41$$

olur. Optimum $x_1 = 4$, $x_2 = 9/5$, $z = 41$'dir. $41 > 39 =$ A.S olduğundan D1 uygulanmaz; x_2 kesirli olduğu için dallanmaya devam edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.4: $x_1 = 15/4$ değişkeninden dallanma. Alt Problem 3 ($x_1 \le 3$) bölgenin sol parçası, Alt Problem 2 ($x_1 \ge 4$) sağdaki küçük üçgendir; $3 < x_1 < 4$ şeridi atılır ve içinde tam sayılı nokta yoktur. Kalın noktalar iki alt problemin optimumlarıdır.

$1 < x_2 = 9/5 < 2$ olduğundan yeni alt problemler şunlardır:

$$\text{Alt Problem 4} = \text{Alt Problem 2} \cup \{x_2 \ge 2\},$$
$$\text{Alt Problem 5} = \text{Alt Problem 2} \cup \{x_2 \le 1\}.$$

Tablo 13.3: Alt Problem 4 ve Alt Problem 5

Alt Problem 4	Alt Problem 5
$x_1 + x_2 \le 6$	$x_1 + x_2 \le 6$
$9x_1 + 5x_2 \le 45$	$9x_1 + 5x_2 \le 45$
$x_1 \ge 4$	$x_1 \ge 4$
$x_2 \ge 2$	$x_2 \le 1$
$x_1, x_2 \ge 0$ ve tam sayı	$x_1, x_2 \ge 0$ ve tam sayı
$\max z = 8x_1 + 5x_2$	$\max z = 8x_1 + 5x_2$
Uygun çözüm yok	Rahatlatılmış optimum: $x_1 = \frac{40}{9}$, $x_2 = 1$, $\max z = \frac{365}{9}$

Alt Problem 4. Alt Problem 2 için çizdiğimiz üçgenin en yüksek noktası $x_2 = 9/5$'tir; bu üçgen ile $x_2 \ge 2$ yarı düzleminin arakesiti boştur. Cebirle de görülür: $x_1 \ge 4$ ve $x_2 \ge 2$ ise $9x_1 + 5x_2 \ge 36 +$

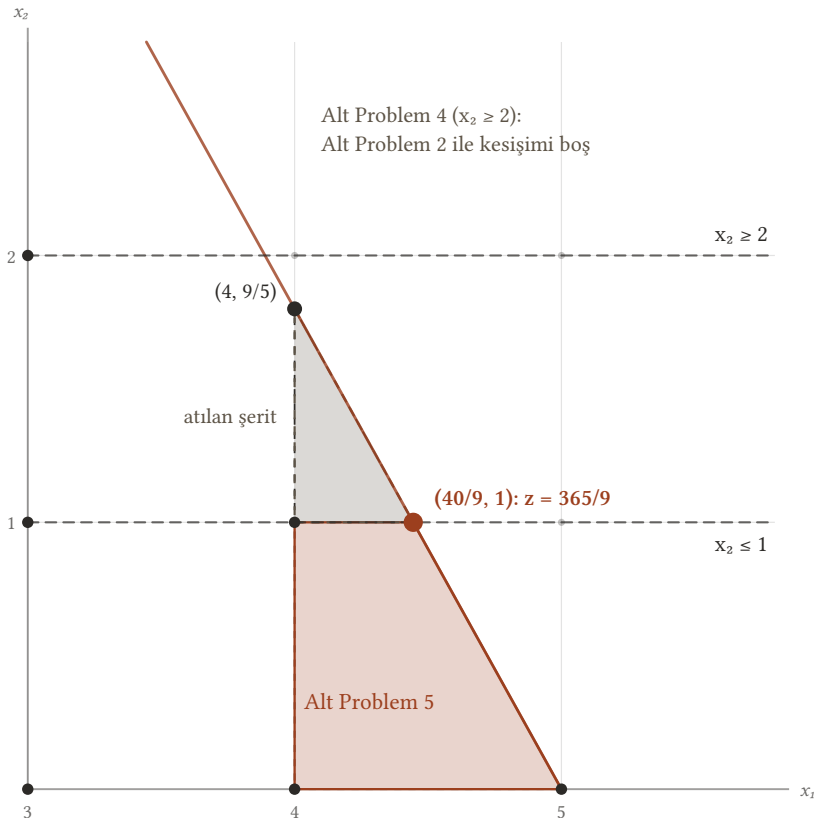
 CC BY-NC-SA 4.0

$10 = 46 > 45$ olur. Alt Problem 4 uygun değildir, TP probleminin optimal çözümünü veremez ve bu yüzden budanır (D2).

Alt Problem 5. Alt Problem 2'nin üçgeni ile $x_2 \leq 1$ yarı düzleminin arakesiti $(4,0)$, $(5,0)$, $(40/9,1)$ ve $(4,1)$ köşeli dörtgendir. $(40/9,1)$ noktası $x_2 = 1$ ile $9x_1 + 5x_2 = 45$ doğrularının kesişimidir: $9x_1 = 40$. Ayrıca $40/9 + 1 = 49/9 \leq 6$'dır. Köşelerde

$$z(4,0) = 32, \qquad z(5,0) = 40,$$
$$z\left(\frac{40}{9}, 1\right) = \frac{320}{9} + 5 = \frac{365}{9}, z(4,1) = 37$$

olur. Optimum $x_1 = 40/9$, $x_2 = 1$, $z = 365/9 \approx 40{,}56$'dır. $365/9 > 39 =$ A.S olduğundan budanmaz; x_1 için bulunan değer tam sayı olmadığından x_1 seçilerek tekrar dallanma yapılır.



Şekil 13.5: Alt Problem 2'nin bölgesi (kesikli üçgen) $x_2 = 9/5$ değişkeninden bölünür. $x_2 \leq 1$ dalı Alt Problem 5'in dörtgenini verir; $1 < x_2 < 2$ şeridi atılır. Üçgenin en yüksek noktası $x_2 = 9/5$ olduğundan $x_2 \geq 2$ dalı (Alt Problem 4) boştur.

$4 < x_1 = 40/9 < 5$ eşitsizliğinden yeni alt problemler oluşturulur:

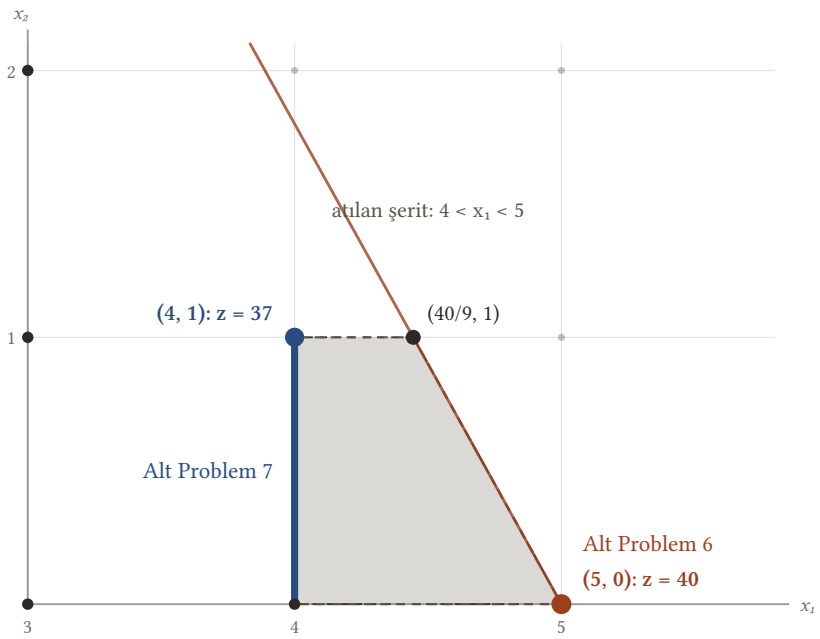
$$\text{Alt Problem } 6 = \text{Alt Problem } 5 \cup \{x_1 \geq 5\},$$
$$\text{Alt Problem } 7 = \text{Alt Problem } 5 \cup \{x_1 \leq 4\}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 13.4: Alt Problem 6 ve Alt Problem 7

Alt Problem 6	Alt Problem 7
$x_1 + x_2 \leq 6$	$x_1 + x_2 \leq 6$
$9x_1 + 5x_2 \leq 45$	$9x_1 + 5x_2 \leq 45$
$x_1 \geq 4$	$x_1 \geq 4$
$x_1 \geq 5$	$x_1 \leq 4$
$x_2 \leq 1$	$x_2 \leq 1$
$x_1, x_2 \geq 0$ ve tam sayı	$x_1, x_2 \geq 0$ ve tam sayı
$\max z = 8x_1 + 5x_2$	$\max z = 8x_1 + 5x_2$
Rahatlatılmış optimum: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $\max z = 40$	Rahatlatılmış optimum: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $\max z = 37$

Alt Problem 7. $x_1 \geq 4$ ve $x_1 \leq 4$ birlikte $x_1 = 4$ demektir. O zaman $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ kısıtı $x_2 \leq 9/5$, $x_1 + x_2 \leq 6$ kısıtı $x_2 \leq 2$ verir; bunlardan daha güçlüsü $x_2 \leq 1$'dir. Uygun bölge $(4, 0)$ ile $(4, 1)$ arasındaki doğru parçasıdır. Uç noktalarda $z(4, 0) = 32$ ve $z(4, 1) = 37$'dir; optimum $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $z = 37$'dir. x_1 ve x_2 tam sayı olduğundan bu bir uygun çözümdür, optimal çözüm için adaydır. Ama $37 < 39 = \text{A.S}$ olduğundan elimizdeki adaydan kötüdür; A.S değişmez ve Alt Problem 7 budanır (D3).
Alt Problem 6. $x_1 \geq 5$ ise $9x_1 \geq 45$ olur; $9x_1 + 5x_2 \leq 45$ kısıtı ancak $x_1 = 5$ ve $x_2 = 0$ için sağlanır. Yani Alt Problem 5'in bölgesi ile $x_1 \geq 5$ yarı düzleminin arakesiti yalnız $(5, 0)$ noktasıdır. Bu bölge için optimum $x_1 = 5, x_2 = 0, z = 40$'tır. Bütün karar değişkenleri tam sayı olduğundan bu da bir aday çözümdür. $40 > 39$ olduğundan en iyi aday artık budur: $\text{A.S} = 40$. Alt Problem 6 budanır (D3).



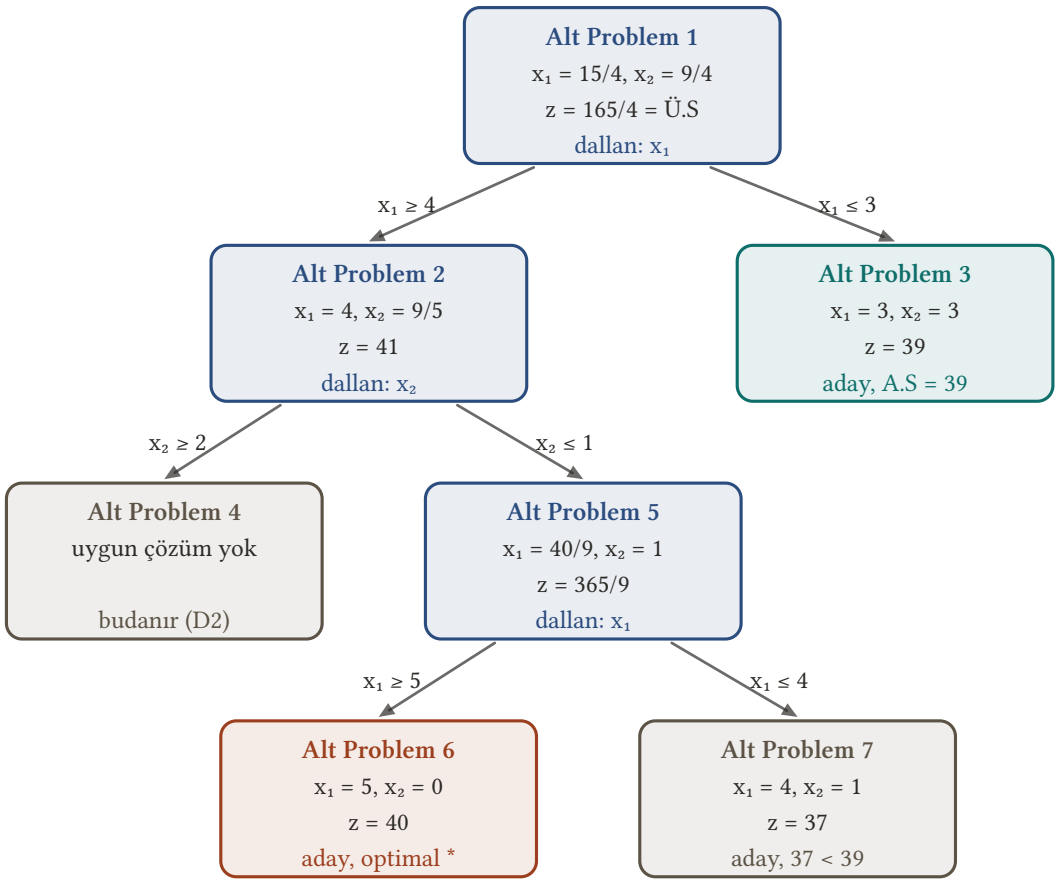
Şekil 13.6: Alt Problem 5'in bölgesi (kesikli dörtgen) $x_1 = 40/9$ değişkeninden bölünür. $x_1 \leq 4$ dalı (Alt Problem 7) $x_1 = 4$ üzerindeki kalın doğru parçasıdır, $x_1 \geq 5$ dalı (Alt Problem 6) yalnız (5, 0) noktasıdır; aradaki $4 < x_1 < 5$ şeridi atılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç. Bekleyen alt problem kalmadı. Üç aday çözüm bulundu: Alt Problem 3 ($z = 39$), Alt Problem 7 ($z = 37$) ve Alt Problem 6 ($z = 40$). En büyük değerli aday Alt Problem 6'dır ve Teorem 13.2 gereği TP probleminin optimal çözümüdür:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 0, \quad \max z = 40.$$

Bu değer, beklendiği gibi Ü.S $= 165/4 = 41{,}25$ değerini geçmez. Bütün adımlar aşağıdaki ağaçta toplanmıştır.



Şekil 13.7: Örneğin dal-sınır ağacı. Her kutuda alt problemin rahatlatılmış optimumu, z değeri ve verilen karar yazılıdır; oklarda eklenen kısıt durur. Alt Problem 4 uygun olmadığı, Alt Problem 3, 6 ve 7 tam sayılı çözüm verdiği için dallanmaz. En iyi aday Alt Problem 6'dır: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $z = 40$.

Sağlama. Sonucu dal-sınır yönteminden bağımsız olarak da doğrulayalım. Tam sayılı noktalarda $z = 8x_1 + 5x_2$ bir tam sayıdır ve Teorem 13.1 gereği $z \le 165/4 = 41{,}25$'tir; yani $z \le 41$. $z = 41$ olabilir mi? $8x_1 = 41 - 5x_2$ eşitliğinde $x_2 = 0, 1, \ldots, 8$ denenirse sağ taraf $41, 36, 31, 26, 21, 16, 11, 6, 1$ değerlerini alır; bunlardan yalnız 16 sayısı 8'e bölünür. Tek aday $x_2 = 5$, $x_1 = 2$ noktasıdır, o da $2 + 5 = 7 > 6$ olduğundan uygun değildir. Demek ki tam sayılı uygun noktalarda $z \le 40$'tır ve $(5, 0)$ noktası bu değere ulaşır.
Son olarak yuvarlamanın burada da işe yaramadığına dikkat edelim: Alt Problem 1'in optimumu $(15/4, 9/4)$ en yakın tam sayılara yuvarlanırsa $(4, 2)$ elde edilir, ama $9 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 46 > 45$ olduğundan bu nokta uygun değildir. ■

Bu örnekte D1 kuralı hiç kullanılmadı: her alt problem ya uygun değildi ya tam sayılı çözüm verdi ya da mevcut adaydan daha büyük bir sınır verdi. Aşağıdaki küçük örnekte üç budama kuralının üçü de işe karışıyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 13.7 (Üç Budama Kuralının Birlikte Kullanıldığı Bir Örnek).

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \ \text{ ve tam sayı} \\ \max z &= 3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

TP problemini dal-sınır yöntemiyle çözünüz. Kesirli değişkenlerden önce x_1'i seçiniz.

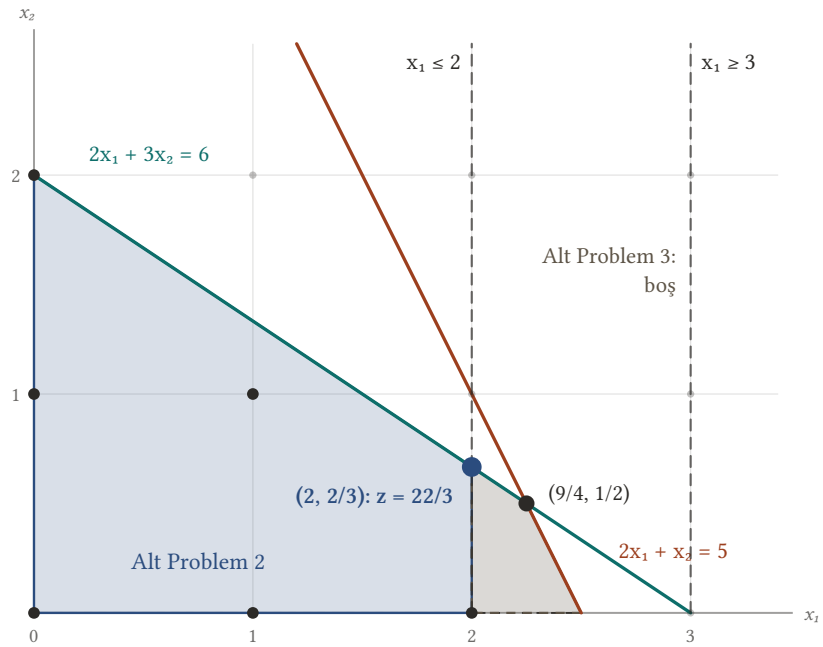
Çözüm.
Alt problemleri numara sırasıyla çözeceğiz; her dallanmada önce $\le$, sonra $\ge$ dalına numara verelim.
Alt Problem 1. Rahatlatılmış problemin köşeleri $(0,0)$, $(5/2,0)$, $(9/4,1/2)$ ve $(0,2)$'dir. $(9/4,1/2)$ köşesi için $2x_1+3x_2=6$ denkleminden $2x_1+x_2=5$ denklemini çıkarırsak $2x_2=1$, yani $x_2=1/2$ ve $x_1=9/4$ bulunur. Köşelerde

$$z(0,0)=0, \qquad z\left(\frac{5}{2},0\right)=\frac{15}{2},$$
$$z\left(\frac{9}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{27}{4}+1=\frac{31}{4}, \qquad z(0,2)=4$$

olur. Optimum $x_1=9/4$, $x_2=1/2$, $z=31/4=7{,}75$'tir: Ü.S $=31/4$, A.S $=-\infty$. $2<9/4<3$ olduğundan

$$\text{Alt Problem } 2 = \text{Alt Problem } 1 \cup \{x_1 \le 2\},$$
$$\text{Alt Problem } 3 = \text{Alt Problem } 1 \cup \{x_1 \ge 3\}.$$

Alt Problem 2. Köşeler $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2/3)$ ve $(0,2)$'dir; $(2,2/3)$ noktası $x_1=2$ ile $2x_1+3x_2=6$ doğrularının kesişimidir ve $2\cdot 2+2/3=14/3\le 5$ olduğundan uygundur. z değerleri sırasıyla 0, 6, $6+4/3=22/3$ ve 4'tür. Optimum $x_1=2$, $x_2=2/3$, $z=22/3\approx 7{,}33$'tür. Henüz aday olmadığından dallanmaya devam edilir.
Alt Problem 3. $2x_1+x_2\le 5$ ve $x_2\ge 0$ kısıtlarından $x_1\le 5/2<3$ çıkar; $x_1\ge 3$ ile çelişir. Uygun çözüm yoktur ve Alt Problem 3 budanır (D2).



Şekil 13.8: Ek örnekte Alt Problem 1'in bölgesi (kesikli) ve $x_1 = 9/4$ değişkeninden dallanma. $x_1 \le 2$ dalı Alt Problem 2'dir; $2 < x_1 < 3$ şeridi atılır; bölgede x_1 en fazla 5/2 olduğundan $x_1 \ge 3$ dalı (Alt Problem 3) boştur.

 CC BY-NC-SA 4.0

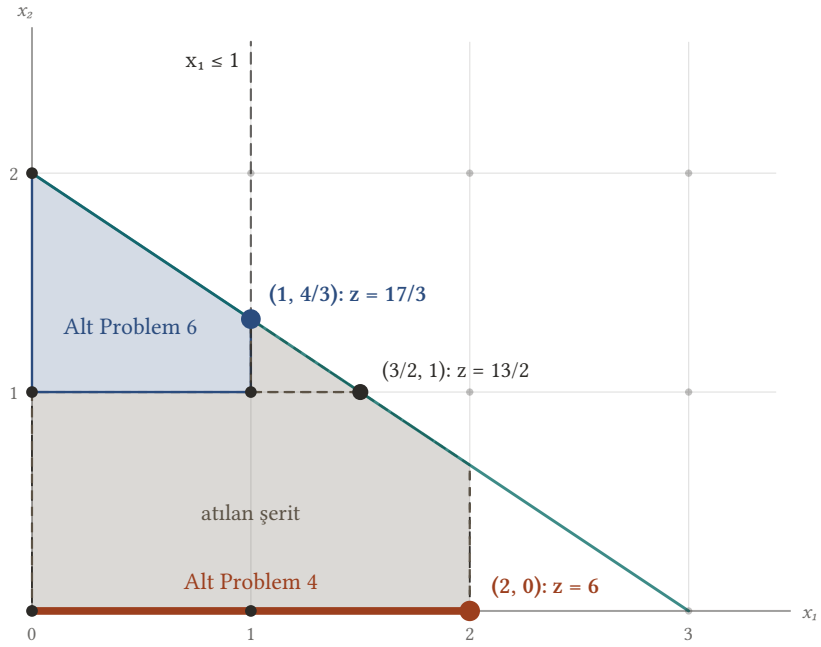
Alt Problem 2'de $0 < x_2 = 2/3 < 1$ olduğundan x_2 değişkeninden dallanırız:

$$\text{Alt Problem } 4 = \text{Alt Problem } 2 \cup \{x_2 \leq 0\},$$
$$\text{Alt Problem } 5 = \text{Alt Problem } 2 \cup \{x_2 \geq 1\}.$$

Alt Problem 4. $x_2 \geq 0$ ve $x_2 \leq 0$ birlikte $x_2 = 0$ demektir; kısıtlar $2x_1 \leq 6$, $2x_1 \leq 5$ ve $x_1 \leq 2$'ye iner. Uygun bölge $(0,0)$ ile $(2,0)$ arasındaki doğru parçasıdır ve optimum $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 6$'dır. Çözüm tam sayılıdır; bu bir aday çözümdür ve A.S $= 6$ olur. Alt Problem 4 budanır (D3).
Alt Problem 5. Köşeler $(0,1)$, $(3/2,1)$ ve $(0,2)$'dir; $(3/2,1)$ noktası $x_2 = 1$ ile $2x_1 + 3x_2 = 6$ doğrularının kesişimidir ve $2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4 \leq 5$'tir. z değerleri 2, $9/2 + 2 = 13/2$ ve 4'tür. Optimum $x_1 = 3/2$, $x_2 = 1$, $z = 13/2 = 6{,}5$'tir. $13/2 > 6 =$ A.S olduğundan budanmaz; $1 < 3/2 < 2$ olduğundan x_1 değişkeninden dallanırız:

$$\text{Alt Problem } 6 = \text{Alt Problem } 5 \cup \{x_1 \leq 1\},$$
$$\text{Alt Problem } 7 = \text{Alt Problem } 5 \cup \{x_1 \geq 2\}.$$

Alt Problem 6. Köşeler $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,4/3)$ ve $(0,2)$'dir; $(1,4/3)$ noktası $x_1 = 1$ ile $2x_1 + 3x_2 = 6$ doğrularının kesişimidir. z değerleri 2, 5, $3 + 8/3 = 17/3$ ve 4'tür. Optimum $x_1 = 1$, $x_2 = 4/3$, $z = 17/3 \approx 5{,}67$'dir. Çözüm kesirlidir ama $17/3 \leq 6 =$ A.S'dir: bu alt problemin hiçbir tam sayılı çözümü elimizdeki adaydan iyi olamaz. Alt Problem 6 budanır (D1). Böylece örneğin $(1,1)$ noktasına ($z = 5$) hiç bakmadan elemiş olduk.
Alt Problem 7. $x_1 \geq 2$ ve $x_2 \geq 1$ ise $2x_1 + 3x_2 \geq 4 + 3 = 7 > 6$ olur. Uygun çözüm yoktur; Alt Problem 7 budanır (D2).



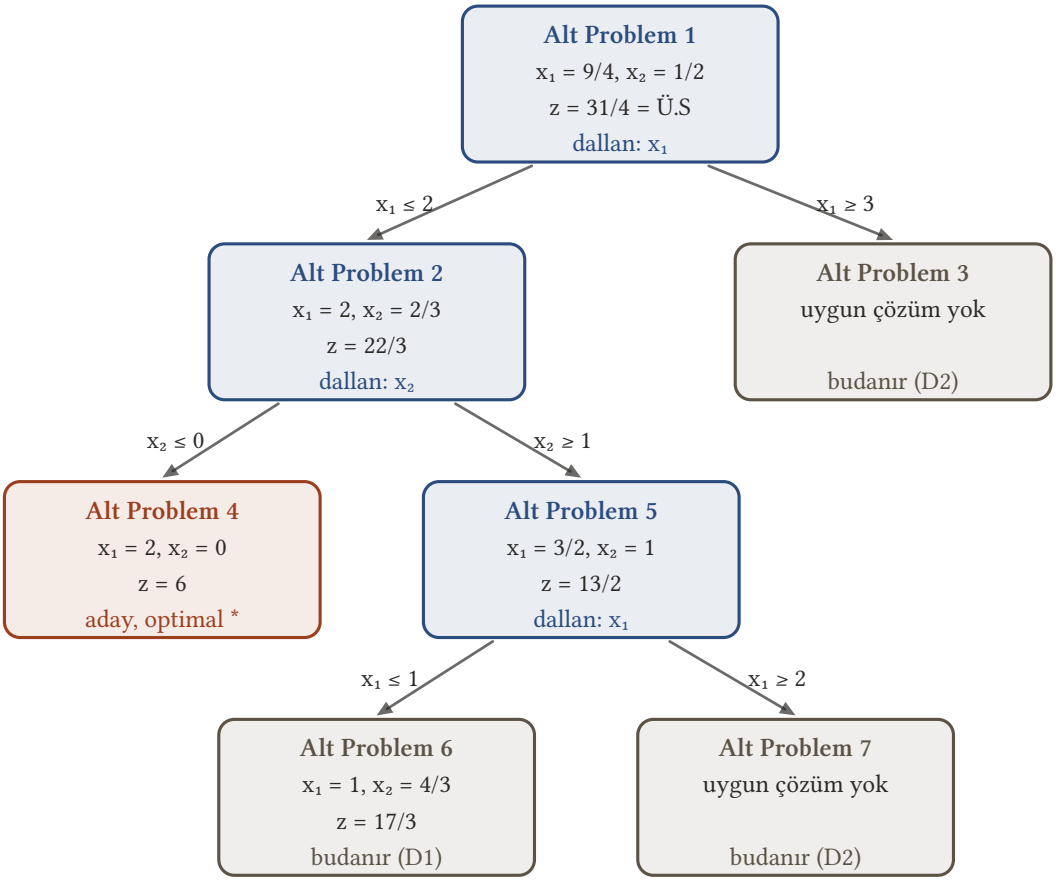
Şekil 13.9: Ek örneğin sonraki adımları. Alt Problem 2'nin bölgesi (kesikli) $x_2 = 2/3$ değişkeninden bölünür: $x_2 \leq 0$ dalı x_1 ekseni üzerindeki kalın doğru parçasıdır (Alt Problem 4), $x_2 \geq 1$ dalı Alt Problem 5'tir. Alt Problem 5 de $x_1 = 3/2$ değişkeninden bölünür; $x_1 \leq 1$ dalı Alt Problem 6'nın dörtgenidir, $x_1 \geq 2$ dalı (Alt Problem 7) boştur. Gri şeritler ($0 < x_2 < 1$ ve $1 < x_1 < 2$) atılan parçalardır.

Sonuç. Bekleyen alt problem kalmadı. Tek aday Alt Problem 4'ün çözümüdür; TP probleminin optimal çözümü

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad \max z = 6$$

olur ve $6 \leq$ Ü.S $= 31/4$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.10: Ek örneğin dal-sınır ağacı. Alt Problem 3 ve 7 uygun olmadığı için, Alt Problem 6 da z = 17/3 değeri mevcut aday değeri 6'yı geçemediği için budanır. Tek aday Alt Problem 4'tür: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 6$.

Sağlama. Uygun tam sayılı noktaları tek tek sayalım. $2x_1 + 3x_2 \le 6$ kısıtından $x_2 \le 2$; $x_2 = 0$ için $x_1 \le 2$, $x_2 = 1$ için $x_1 \le 3/2$, $x_2 = 2$ için $x_1 = 0$ bulunur. Uygun noktalar $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ ve $(0,2)$'dir; z değerleri sırasıyla 0, 3, 6, 2, 5 ve 4'tür. En büyüğü gerçekten $(2,0)$ noktasındaki 6'dır. ■

İki örnekte de alt problemler iki değişkenli olduğu için grafikle çözüldü. Değişken sayısı arttığında her alt problemin rahatlatılmış problemi simpleks yöntemle çözülür. Bunu her seferinde baştan yapmak gerekmez: yeni alt problem, dallandırılan alt problemin optimal tablosuna tek bir kısıt eklenerek elde edilir. Eklenen kısıt eski optimumu uygunsuz yapar ama $z_j - c_j$ satırını bozmaz; tablo, Dual simpleks algoritması bölümündeki yöntemle birkaç iterasyonda yeniden optimal hâle getirilir.

Dallanan değişkenin ve alt problemlerin çözülme sırasının seçimi yalnız ağacın büyüklüğünü etkiler. Teorem 13.2 hangi seçim yapılırsa yapılsın yöntemin optimal değeri bulacağını garanti eder.

Bu bölümle kitabın konu anlatımı tamamlandı. Model kurmaktan başlayıp kanonik ve standart formlara, simpleks, büyük M ve iki faz yöntemlerine, duyarlılık analizine, dualiteye ve son olarak tam sayılı programlamaya uzanan bütün yöntemleri Alıştırmalar bölümündeki çözümlü problemlerle pekiştirebilirsiniz; orada bir dal-sınır problemi de bütün alt problemleri ve ağacıyla çözülüyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

14. Alıştırmalar

Bu bölümdeki alıştırmalar kitabın yöntemlerini baştan sona uygular. Önce bir problemin bütün temel çözümlerini tarayacak, sonra grafik yöntem, simpleks yöntem ve büyük M yöntemiyle problemler çözeceğiz. Ardından bir optimal tablo üzerinde duyarlılık analizi yapacak, bir problemi duali üzerinden çözecek ve son olarak dal-sınır yöntemiyle bir tam sayılı programlama problemini ele alacağız. Her çözüm, kullandığı yöntemin anlatıldığı bölüme bağlanır ve bütün tablolarını içerir.

14.1 Temel Çözümler

İlk iki alıştırma, simpleks yöntemden önceki en doğrudan yolu izler: bütün temel çözümleri hesaplayıp amaç değerlerini karşılaştırmak.

Alıştırma 14.1 (Bütün temel çözümler).

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 + x_5 &= 12 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,5} \\ \min z &= x_1 + x_2 - x_4 \end{aligned}$$

lineer programlama probleminin bütün temel çözümlerini bulunuz. Bunlardan hangilerinin uygun temel çözüm, hangilerinin dejenere olduğunu belirleyiniz ve her temel çözümde z değerini hesaplayınız.

Çözüm.
Temel çözümler ve konveks kümeler bölümündeki dört adımlı reçeteyi izliyoruz (Tanım 2.3, Tanım 2.5, Tanım 2.6).
Sayı. Problem zaten standart formdadır: iki kısıt da eşitliktir, sağ taraflar 8 ve 12 negatif değildir ve bütün değişkenler ≥ 0'dır. $m = 2$ denklem ve $n = 5$ değişken vardır. Her seçimde $n - m = 3$ değişken sıfırlanır ve kalan iki değişken için 2×2 bir sistem çözülür. En fazla $C(5,2) = 10$ seçim vardır; hiçbirini atlamamak için temel değişken çiftlerini $\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \ldots, \{x_4, x_5\}$ sırasıyla alıyoruz.
a) $x_3 = x_4 = x_5 = 0$; temel değişkenler x_1, x_2.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 12 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Birinci denklemden $x_1 = 8 - 2x_2$; ikincide yerine koyarsak $16 - 4x_2 - 3x_2 = 12$, yani $x_2 = \frac{4}{7}$ ve $x_1 = 8 - \frac{8}{7} = \frac{48}{7}$ bulunur:

$$X_1 = \left(\frac{48}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 0\right), \qquad z = \frac{48}{7} + \frac{4}{7} = \frac{52}{7}.$$

b) $x_2 = x_4 = x_5 = 0$; temel değişkenler x_1, x_3.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 &= 12 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

İkinci denklemden $x_1 = 6$; birinciden $3x_3 = 2$, yani $x_3 = \frac{2}{3}$:

$$X_2 = \left(6, 0, \frac{2}{3}, 0, 0\right), \qquad z = 6.$$

c) $x_2 = x_3 = x_5 = 0$; temel değişkenler x_1, x_4.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x_1 - x_4 = 8$$
$$2x_1 + x_4 = 12 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

İki denklemi toplarsak $3x_1 = 20$, yani $x_1 = \frac{20}{3}$ ve $x_4 = \frac{20}{3} - 8 = -\frac{4}{3}$:

$$X_3 = \left(\frac{20}{3}, 0, 0, -\frac{4}{3}, 0\right), \qquad z = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} = 8.$$

d) $x_2 = x_3 = x_4 = 0$; temel değişkenler x_1, x_5.

$$x_1 = 8$$
$$2x_1 + x_5 = 12 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

$x_1 = 8$ ve $x_5 = 12 - 16 = -4$:

$$X_4 = (8, 0, 0, 0, -4), \qquad z = 8.$$

e) $x_1 = x_4 = x_5 = 0$; temel değişkenler x_2, x_3.

$$2x_2 + 3x_3 = 8$$
$$-3x_2 = 12 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

İkinci denklemden $x_2 = -4$; birinciden $3x_3 = 8 + 8 = 16$, yani $x_3 = \frac{16}{3}$:

$$X_5 = \left(0, -4, \frac{16}{3}, 0, 0\right), \qquad z = -4.$$

f) $x_1 = x_3 = x_5 = 0$; temel değişkenler x_2, x_4.

$$2x_2 - x_4 = 8$$
$$-3x_2 + x_4 = 12 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

İki denklemi toplarsak $-x_2 = 20$, yani $x_2 = -20$ ve $x_4 = 2x_2 - 8 = -48$:

$$X_6 = (0, -20, 0, -48, 0), \qquad z = -20 + 48 = 28.$$

g) $x_1 = x_3 = x_4 = 0$; temel değişkenler x_2, x_5.

$$2x_2 = 8$$
$$-3x_2 + x_5 = 12 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

$x_2 = 4$ ve $x_5 = 12 + 12 = 24$:

$$X_7 = (0, 4, 0, 0, 24), \qquad z = 4.$$

h) $x_1 = x_2 = x_5 = 0$; temel değişkenler x_3, x_4.

$$3x_3 - x_4 = 8$$
$$x_4 = 12 \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

$x_4 = 12$ ve $3x_3 = 20$, yani $x_3 = \frac{20}{3}$:

$$X_8 = \left(0, 0, \frac{20}{3}, 12, 0\right), \qquad z = -12.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

i) $x_1 = x_2 = x_4 = 0$; temel değişkenler x_3, x_5.

$$\begin{aligned} 3x_3 &= 8 \\ x_5 &= 12 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

$x_3 = \frac{8}{3}$ ve $x_5 = 12$:

$$X_9 = \left(0, 0, \frac{8}{3}, 0, 12\right), \qquad z = 0.$$

j) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; temel değişkenler x_4, x_5.

$$\begin{aligned} -x_4 &= 8 \\ x_4 + x_5 &= 12 \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

$x_4 = -8$ ve $x_5 = 12 + 8 = 20$:

$$X_{10} = (0, 0, 0, -8, 20), \qquad z = 8.$$

Sınıflandırma. Hiçbir seçimde $\Delta = 0$ çıkmadığından sistemin tam 10 temel çözümü vardır. Negatif bileşeni olmayanlar X_1, X_2, X_7, X_8 ve X_9'dur; bu beşi uygun temel çözümdür. Her birinde iki temel değişkenin ikisi de pozitiftir, dolayısıyla hiçbiri dejenere değildir. X_3, X_4, X_5, X_6 ve X_{10}'da negatif bir bileşen bulunduğu için bunlar uygun değildir. Sonuçları bir tabloda toplayalım (Tablo 14.1); dejenerelik yalnız uygun temel çözümler için sorulduğundan uygun olmayan satırlarda o sütun boştur.

Tablo 14.1: Problemin bütün temel çözümleri

Seçim	Sıfırlanan	Temel değişkenler	Δ	Temel çözüm	Uygun mu?	Dejenere mi?	z
a)	x_3, x_4, x_5	x_1, x_2	-7	$X_1 = \left(\frac{48}{7}, \frac{4}{7}, 0, 0, 0\right)$	Evet	Hayır	$\frac{52}{7}$
b)	x_2, x_4, x_5	x_1, x_3	-6	$X_2 = \left(6, 0, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$	Evet	Hayır	6
c)	x_2, x_3, x_5	x_1, x_4	3	$X_3 = \left(\frac{20}{3}, 0, 0, -\frac{4}{3}, 0\right)$	Hayır ($x_4 < 0$)	—	8
d)	x_2, x_3, x_4	x_1, x_5	1	$X_4 = (8, 0, 0, 0, -4)$	Hayır ($x_5 < 0$)	—	8
e)	x_1, x_4, x_5	x_2, x_3	9	$X_5 = \left(0, -4, \frac{16}{3}, 0, 0\right)$	Hayır ($x_2 < 0$)	—	-4
f)	x_1, x_3, x_5	x_2, x_4	-1	$X_6 = (0, -20, 0, -48, 0)$	Hayır ($x_2, x_4 < 0$)	—	28
g)	x_1, x_3, x_4	x_2, x_5	2	$X_7 = (0, 4, 0, 0, 24)$	Evet	Hayır	4
h)	x_1, x_2, x_5	x_3, x_4	3	$X_8 = \left(0, 0, \frac{20}{3}, 12, 0\right)$	Evet	Hayır	-12
i)	x_1, x_2, x_4	x_3, x_5	3	$X_9 = \left(0, 0, \frac{8}{3}, 0, 12\right)$	Evet	Hayır	0
j)	x_1, x_2, x_3	x_4, x_5	-1	$X_{10} = (0, 0, 0, -8, 20)$	Hayır ($x_4 < 0$)	—	8

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 14.2 (Uygun temel çözümlerle optimumun aranması). Önceki alıştırmadaki (Alıştırma 14.1) problemin optimum uygun çözümünü belirleyiniz. Problem şudur:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 + x_5 &= 12 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,5} \\ \min z &= x_1 + x_2 - x_4 \end{aligned}$$

Çözüm.
Uygun temel çözümlerin karşılaştırılması. Önceki alıştırmanın tablosuna (Tablo 14.1) göre beş uygun temel çözüm ve amaç değerleri şunlardır:

$$X_1 : z = \frac{52}{7}, \quad X_2 : z = 6, X_7 : z = 4,$$
$$X_8 : z = -12, X_9 : z = 0.$$

En küçük değer $X_8 = \left(0, 0, \frac{20}{3}, 12, 0\right)$ noktasındaki $z = -12$'dir. Uygun olmayan X_5 ve X_6'nın z değerleri aday değildir, çünkü bu noktalar $x_j \geq 0$ koşulunu bozar.
Tarama ne zaman geçerli? Uygun temel çözümleri tarama sonucu (Sonuç 3.4), bunlar arasındaki en iyi değerin optimum olduğunu ancak problemin bir optimal çözümü **varsa** söyler. Uygun bölge sınırlı olsaydı optimum kendiliğinden var olurdu; burada bölgenin sınırlı olduğunu bilmiyoruz. Bu yüzden X_8'den daha iyi bir uygun çözüm olup olmadığını ayrıca kontrol etmeliyiz.
X_8 bazında simpleks kriteri. X_8'in bazı $B = (v_3, v_4)$'tür; burada $v_3 = (3,0)^T$ ve $v_4 = (-1,1)^T$. Baz dışındaki $v_2 = (2,-3)^T$ vektörünü baz vektörleri cinsinden yazalım: $v_2 = y_{32}v_3 + y_{42}v_4$ eşitliği

$$3y_{32} - y_{42} = 2, \qquad y_{42} = -3$$

sistemini verir; buradan $y_{42} = -3$ ve $3y_{32} = -1$, yani $y_{32} = -\frac{1}{3}$. Baz maliyetleri $\vec{c}_B = (c_3, c_4)^T = (0,-1)^T$ olduğundan

$$z_2 - c_2 = 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (-1)\cdot(-3) - 1 = 2 > 0.$$

Minimum probleminde pozitif simpleks kriteri, v_2 baza alınırsa amaç değerinin küçüleceğini söyler. Üstelik v_2'nin iki katsayısı da negatiftir; oran testi yapılamaz. Önerme 4.2 gereği amaç fonksiyonu uygun bölgede alttan sınırsızdır.
Açık bir yarı doğru. Aynı sonucu doğrudan görelim. $\vec{d} = \left(0, 1, \frac{1}{3}, 3, 0\right)$ vektörü için kısıtların sol tarafları

$$\begin{aligned} 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot\frac{1}{3} - 3 &= 0, \\ 2\cdot 0 - 3\cdot 1 + 3 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

olur ve $\vec{d} \geq 0$'dır; yani $\vec{d}$ uygun bölgenin bir yön vektörüdür (Tanım 7.2). O halde her $\lambda \geq 0$ için

$$X(\lambda) = X_8 + \lambda\vec{d} = \left(0, \lambda, \frac{20}{3} + \frac{\lambda}{3}, 12 + 3\lambda, 0\right)$$

bir uygun çözümdür. Kontrol edelim:

$$\begin{aligned} 2\lambda + 3\left(\frac{20}{3} + \frac{\lambda}{3}\right) - (12 + 3\lambda) &= 20 - 12 = 8, \\ -3\lambda + (12 + 3\lambda) + 0 &= 12. \end{aligned}$$

Bu çözümlerde amaç değeri

$$z\left(\ X(\lambda)\ \right) = 0 + \lambda - (12 + 3\lambda) = -12 - 2\lambda$$

olur. λ büyüdükçe z sınır tanımadan küçülür. Örneğin $\lambda = 1$ için $X(1) = (0,1,7,15,0)$ uygun çözümdür ve $z = -14 < -12$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Neden böyle olduğunu kısıtlardan da okuyabiliriz. Birinci denklemden $x_4 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 8$ yazıp amaçta yerine koyarsak $z = 8 - x_2 - 3x_3$ çıkar. x_2 büyüdükçe x_4 de büyür ve ikinci denklem x_5'i negatif yapmaz; bu yüzden x_2'yi istediğimiz kadar artırıp z'yi istediğimiz kadar küçültebiliriz.
Sonuç. Problemin sınırsız çözümü vardır (Tanım 7.1): amaç fonksiyonu uygun çözümler üzerinde alttan sınırlı değildir ve **optimal çözüm yoktur**. Uygun temel çözümler arasındaki en küçük değer X_8'deki $z = -12$'dir, ama bu bir minimum değildir. Bu alıştırma, uygun temel çözümleri karşılaştırmadan önce optimumun var olduğundan emin olmak gerektiğini gösteriyor.
■

14.2 Grafik Yöntem

İki değişkenli bir problemde uygun bölgeyi çizerek optimumu doğrudan görebiliriz.

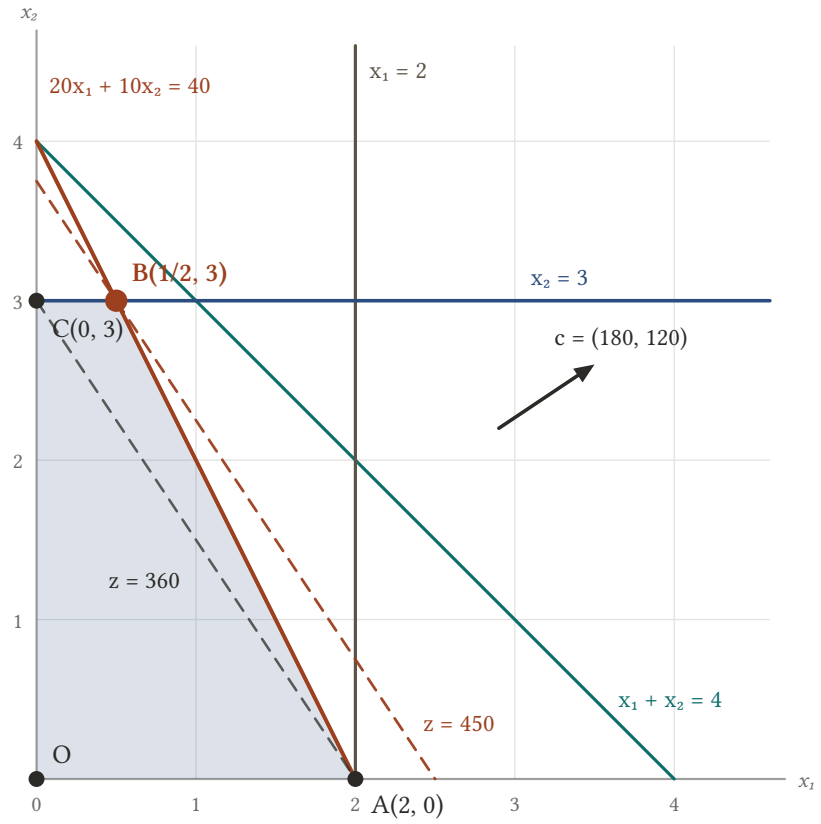
Alıştırma 14.3 (Grafik yöntemle bir maksimum problemi).

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ 20x_1 + 10x_2 &\leq 40 \\ x_1 &\leq 2 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 180x_1 + 120x_2 \end{aligned}$$

lineer programlama problemini grafik yöntemle çözünüz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.1: Uygun bölge OABC dörtgenidir; $x_1 + x_2 \le 4$ kısıtı bölgeye hiç değmez, $x_1 = 2$ doğrusu bölgeye yalnız A köşesinde değer. Kesikli doğrular $z = 180x_1 + 120x_2$ amaç fonksiyonunun $z = 360$ (A ve C'den geçer) ve $z = 450$ seviye doğrularıdır. Seviye doğrusu gradyan yönünde kaydırıldığında bölgeden en son B(1/2, 3) köşesinde ayrılır: max $z = 450$.

Uç noktalar ve grafik yöntem bölümündeki beş adımı (Bölüm 3.3) izliyoruz.
1–2. Kısıt doğruları ve yarı düzlemler. Her kısıtı eşitlik olarak çizip $O(0,0)$ test noktasını yerine koyalım:

- $x_1 + x_2 = 4$ doğrusu $(4,0)$ ve $(0,4)$'ten geçer. O'da $0 \le 4$ doğrudur; uygun taraf O'nun bulunduğu taraftır.
- $20x_1 + 10x_2 = 40$ doğrusunun iki yanını 10'a bölersek $2x_1 + x_2 = 4$ olur; doğru $(2,0)$ ve $(0,4)$'ten geçer. O'da $0 \le 40$ doğrudur; uygun taraf O'nun bulunduğu taraftır.
- $x_1 = 2$ düşey bir doğrudur. O'da $0 \le 2$ doğrudur; uygun taraf doğrunun soludur.
- $x_2 = 3$ yatay bir doğrudur. O'da $0 \le 3$ doğrudur; uygun taraf doğrunun altıdır.

$x_1, x_2 \ge 0$ koşulları birinci bölgeyi verir.
3. Uygun bölge. Bu yarı düzlemlerin kesişimi $OABC$ dörtgenidir. İki kısıt bölgenin biçimine katkı yapmaz. $2x_1 + x_2 \le 4$ ve $x_2 \ge 0$ olduğundan $2x_1 \le 4$, yani $x_1 \le 2$ kendiliğinden sağlanır. Ayrıca

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(2x_1 + x_2) + \frac{1}{2}x_2 \le \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{7}{2} < 4$$

olduğundan $x_1 + x_2 \le 4$ kısıtı da bölgenin hiçbir noktasında sıkı değildir.
4. Köşeler. Her köşe iki kısıt doğrusunun kesişimidir:

- $O(0,0)$: iki eksenin kesişimi.
- A: $x_2 = 0$ ile $2x_1 + x_2 = 4$; $x_1 = 2$, yani $A(2,0)$. $x_1 = 2$ doğrusu da bu noktadan geçer; A'da üç kısıt doğrusu kesişir.
- B: $x_2 = 3$ ile $2x_1 + x_2 = 4$; $2x_1 = 1$, yani $B(\frac{1}{2}, 3)$.

 CC BY-NC-SA 4.0

- C: $x_1 = 0$ ile $x_2 = 3$; $C(0,3)$.

Köşelerin diğer kısıtları sağladığını kontrol edelim. B için $x_1 + x_2 = \frac{7}{2} \leq 4$ ve $x_1 = \frac{1}{2} \leq 2$; A için $x_1 + x_2 = 2 \leq 4$ ve $x_2 = 0 \leq 3$; C için $20 \cdot 0 + 10 \cdot 3 = 30 \leq 40$, $0 + 3 \leq 4$ ve $0 \leq 2$'dir.
A'da üç kısıt birden sıkı olduğu için bu köşeye karşılık gelen uygun temel çözüm dejeneredir (Tanım 2.6): standart formda $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ iken $2x_1 + x_2 = 4$ ve $x_1 = 2$ kısıtlarının aylak değişkenleri de sıfırdır.
5. Optimum. Gradyan $\vec{c} = (180, 120) = 60 \cdot (3, 2)$'dir. z seviye doğruları $180x_1 + 120x_2 = z$, yani $3x_1 + 2x_2 = \frac{z}{60}$ biçiminde paralel doğrulardır. Amaç maksimum olduğundan seviye doğrusunu gradyan yönünde, yani sağ yukarıya doğru kaydırırız. $z = 360$ seviye doğrusu $3x_1 + 2x_2 = 6$'dır ve hem $A(2,0)$'dan hem $C(0,3)$'ten geçer; bölgenin bu doğrunun üstünde kalan kısmında z daha büyüktür. Kaydırmaya devam edince doğru bölgeden en son $B(\frac{1}{2}, 3)$ köşesinde ayrılır: $z = 450$ seviye doğrusu $3x_1 + 2x_2 = \frac{15}{2}$ bölgeye yalnız B'de değer.
Bölge sınırlı olduğu için köşelerdeki değerleri karşılaştırmak da yeter (Sonuç 3.1):

Tablo 14.2: Grafik yöntem alıştırmasında köşelerdeki amaç değerleri

Köşe	$O(0,0)$	$A(2,0)$	$B(\frac{1}{2},3)$	$C(0,3)$
$z = 180x_1 + 120x_2$	0	360	450	360

En büyük değer B'dedir. Optimal çözüm

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 3, \qquad \max z = 180 \cdot \frac{1}{2} + 120 \cdot 3 = 90 + 360 = 450$$

dir.
■

14.3 Simpleks Yöntem

Şimdi aynı karşılaştırmayı bütün köşeleri gezmeden, komşu uç noktadan komşu uç noktaya geçerek yapalım.

Alıştırma 14.4 (Simpleks yöntemle bir minimum problemi).

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_6 &= 2 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,6} \\ \min z &= -4x_1 - 5x_2 \end{aligned}$$

lineer programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

Çözüm.
Çözümde Simpleks yöntem bölümündeki tabloyu (Bölüm 4.3) ve dönüşüm kurallarını (Bölüm 4.4) kullanıyoruz.
Çözülebilir hal. Problem standart formdadır: bütün kısıtlar eşitliktir, sağ taraflar $2, 6, 5, 2$ negatif değildir ve bütün değişkenler ≥ 0'dır. Amaç fonksiyonunu sıfır katsayılarla birlikte yazalım:

$$\min z = -4x_1 - 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6.$$

x_3, x_4, x_5, x_6 değişkenlerinin her biri yalnız bir denklemde ve katsayısı 1 ile görünür; v_3, v_4, v_5, v_6 sütunları 4×4 birim matrisi oluşturur. Demek ki problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir (Tanım 1.9) ve yapay değişken gerekmez. (Bu dört değişken aslında $x_1 - 2x_2 \leq 2$, $2x_1 + x_2 \leq 6$, $x_1 + 2x_2 \leq 5$, $-x_1 + x_2 \leq 2$ kısıtlarının aylak değişkenleridir.)

 CC BY-NC-SA 4.0

Başlangıç tablosu. Başlangıç bazı $B_0 = (v_3, v_4, v_5, v_6)$, başlangıç çözümü $X_0 = (0, 0, 2, 6, 5, 2)$ ve $z_0 = 0$'dır. $\vec{c}_B = \vec{0}$ olduğu için $z_j - c_j = -c_j$: $z_1 - c_1 = 4$, $z_2 - c_2 = 5$; baz vektörlerininki 0'dır. Minimum probleminde en büyük pozitif $z_j - c_j$ baza girer ve bütün $z_j - c_j \le 0$ olunca durulur. $\max\{4, 5\} = 5$ olduğundan v_2 baza girer. v_2 sütununda $y_{32} = -2 < 0$ olduğundan x_3 satırı oran testine girmez:

$$\min\left(\frac{6}{1}, \frac{5}{2}, \frac{2}{1}\right) = 2.$$

En küçük oran x_6 satırındadır; v_6 bazdan çıkar ve pivot $y_{62} = 1$'dir.

Tablo 14.3: Başlangıç tablosu

		c_j	-4	-5	0	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_3	0	2	1	-2	1	0	0	0	$-$
x_4	0	6	2	1	0	1	0	0	$\frac{6}{1}$
x_5	0	5	1	2	0	0	1	0	$\frac{5}{2}$
x_6	0	2	-1	$[1]$	0	0	0	1	$\frac{2}{1} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	4	$5 \Uparrow$	0	0	0	0	

Birinci iterasyon. Satırları baz değişkenlerinin indisleriyle S_3, S_4, S_5, S_6 diye adlandıralım. Pivot 1 olduğundan S_6 aynen kalır ve c_B değeri -5 olan x_2 satırı olur. v_2 sütununu birim vektöre çevirmek için

$$S_3 \leftarrow S_3 + 2S_6, \qquad S_4 \leftarrow S_4 - S_6,$$
$$S_5 \leftarrow S_5 - 2S_6, (z_j - c_j) \leftarrow (z_j - c_j) - 5S_6$$

işlemlerini yaparız. Örneğin $S_6 = (2 \mid -1, 1, 0, 0, 0, 1)$ olduğundan kriter satırı

$$\begin{aligned}&(0 - 10 \mid 4 + 5, 5 - 5, 0, 0, 0, 0 - 5)\\ &= (-10 \mid 9, 0, 0, 0, 0, -5)\end{aligned}$$

olur.

Tablo 14.4: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	-4	-5	0	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_3	0	6	-1	0	1	0	0	2	$-$
x_4	0	4	3	0	0	1	0	-1	$\frac{4}{3}$
x_5	0	1	$[3]$	0	0	0	1	-2	$\frac{1}{3} \Rightarrow$
x_2	-5	2	-1	1	0	0	0	1	$-$
$z_j - c_j$		$z_0 = -10$	$9 \Uparrow$	0	0	0	0	-5	

Birinci iterasyon tablosunda (Tablo 14.4) çözüm $X_1 = (0, 2, 6, 4, 1, 0)$ ve $z = -5 \cdot 2 = -10$'dur. Tek pozitif kriter $z_1 - c_1 = 9$ olduğundan v_1 baza girer. v_1 sütununda x_3 ve x_2 satırlarının elemanları -1'dir, bu satırlar teste girmez: $\min\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. v_5 bazdan çıkar; pivot $y_{51} = 3$.

İkinci iterasyon. Pivot satırı 3'e bölünür ve c_B değeri -4 olan x_1 satırı olur:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$S_1 = \left(\frac{1}{3} \mid 1,0,0,0,\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right).$$

Diğer satırlar

$$S_3 \leftarrow S_3 + S_1, \qquad S_4 \leftarrow S_4 - 3S_1,$$
$$S_2 \leftarrow S_2 + S_1, (z_j - c_j) \leftarrow (z_j - c_j) - 9S_1$$

ile bulunur. Örneğin x_3 satırı

$$\begin{aligned} S_3 + S_1 &= \left(6 + \frac{1}{3} \mid 0,0,1,0,\frac{1}{3}, 2 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{19}{3} \mid 0,0,1,0,\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

olur; kriter satırının v_6 elemanı da $-5 - 9 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 1$'dir.

Tablo 14.5: İkinci iterasyon tablosu

		c_j	-4	-5	0	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_3	0	$\frac{19}{3}$	0	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{19/3}{4/3}$
x_4	0	3	0	0	0	1	-1	$[1]$	$\frac{3}{1} \Rightarrow$
x_1	-4	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-$
x_2	-5	$\frac{7}{3}$	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7/3}{1/3}$
$z_j - c_j$		$z_0 = -13$	0	0	0	0	-3	$1 \Uparrow$	

İkinci iterasyon tablosunda (Tablo 14.5) çözüm $X_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{19}{3}, 3, 0, 0\right)$ ve $z = -\frac{4}{3} - \frac{35}{3} = -13$'tür. Pozitif kriter $z_6 - c_6 = 1$ kaldığı için v_6 baza girer. x_1 satırındaki $-\frac{2}{3}$ teste girmez:

$$\min\left(\frac{19/3}{4/3}, \frac{3}{1}, \frac{7/3}{1/3}\right) = \min\left(\frac{19}{4}, 3, 7\right) = 3.$$

v_4 bazdan çıkar; pivot $y_{46} = 1$.
Üçüncü iterasyon. Pivot 1 olduğundan $S_4 = (3 \mid 0,0,0,1,-1,1)$ aynen kalır ve c_B değeri 0 olan x_6 satırı olur. Diğer satırlar

$$S_3 \leftarrow S_3 - \frac{4}{3}S_4, \qquad S_1 \leftarrow S_1 + \frac{2}{3}S_4,$$
$$S_2 \leftarrow S_2 - \frac{1}{3}S_4, (z_j - c_j) \leftarrow (z_j - c_j) - S_4$$

ile bulunur. Pivot satırında yalnız v_0, v_4, v_5, v_6 sütunları sıfırdan farklı olduğu için yalnız bu sütunlar değişir; örneğin x_3 satırında $\frac{19}{3} - 4 = \frac{7}{3}$, $0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$, $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 14.6: Üçüncü iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	-4	-5	0	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
x_3	0	$\frac{7}{3}$	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	0
x_6	0	3	0	0	0	1	-1	1
x_1	-4	$\frac{7}{3}$	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
x_2	-5	$\frac{4}{3}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
$z_j - c_j$		$z_0 = -16$	0	0	0	-1	-2	0

Sonuç. Üçüncü iterasyon tablosunda (Tablo 14.6) bütün $z_j - c_j \leq 0$'dır; minimum problemi için optimal tabloya ulaşıldı. Optimal çözüm

$$X^* = (x_1, \ldots, x_6) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, 0, 0, 3\right), \qquad \min z = -4 \cdot \frac{7}{3} - 5 \cdot \frac{4}{3} = -16$$

dır. Amaç değeri iterasyonlar boyunca $0 \to -10 \to -13 \to -16$ diye azaldı.
Bu problem, Simpleks yöntem bölümünde kurulup çözülen örneğin (Örnek 4.6) standart formudur. Orada yöntemin uygun bölgenin köşeleri üzerinde izlediği $(0,0) \to (0,2) \to (\frac{1}{3}, \frac{7}{3}) \to (\frac{7}{3}, \frac{4}{3})$ yolu şekil üzerinde de gösterilir.
■

14.4 Büyük M Yöntemi

Kısıtlarda $\geq$ bulununca standart form birim matris içermez ve yapay değişken gerekir. Bir sonraki alıştırmada kanonik formdan simpleks yöntem ile çözülebilir hale kadar bütün adımları açıkça yazıyoruz.

Alıştırma 14.5 (Büyük M yöntemiyle üç değişkenli bir minimum problemi).

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 11 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \end{aligned}$$

lineer programlama problemini M yöntemiyle çözünüz.

Çözüm.
Problemi Büyük M yöntemi bölümündeki adımlarla çözeceğiz. Önce üç formu bu problem üzerinde birbirinden ayıralım.
Kanonik form. Minimum probleminde kanonik form (Tanım 1.6) bütün kısıtların $\geq$ olmasını ister. Birinci ve üçüncü kısıtlar $\leq$ olduğundan onları -1 ile çarparız:

$$\begin{aligned} -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &\geq -2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 11 \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\geq -5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ \min z &= 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \end{aligned}$$

Bu problem kanonik formdadır, ama sağ taraflarında -2 ve -5 vardır. Kanonik form dual problemi yazmak için gereklidir; simpleks yöntem için ondan geçmek zorunlu değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Standart form. Standart form (Tanım 1.7) eşitlik kısıtları ve negatif olmayan sağ taraflar ister. Verilen problemin sağ tarafları $2, 11, 5$ zaten negatif değildir; bu yüzden verilen problemden doğrudan ilerleriz. (Kanonik formdan başlasaydık birinci ve üçüncü satırları yeniden -1 ile çarpıp aynı yere dönerdik.) $\leq$ olan birinci ve üçüncü kısıtlara x_4 ve x_6 aylak değişkenlerini ekler, $\geq$ olan ikinci kısıttan x_5 artık değişkenini çıkarırız (Tanım 1.8):

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 &= 11 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_6 &= 5 \\ x_j \geq 0, \quad j &= \overline{1,6} \\ \min z = 2x_1 - 3x_2 &+ 6x_3 \\ +0x_4 + 0x_5 &+ 0x_6 \end{aligned}$$

Simpleks yöntem ile çözülebilir hal. Standart formun katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. x_4 yalnız birinci, x_6 yalnız üçüncü denklemde ve katsayısı 1 ile görünür; bu iki denklemin birim sütunu hazırdır. İkinci denklemde ise x_5'in katsayısı -1'dir ve $(0,1,0)^T$ birim sütunu yoktur. Standart form birim matris içermediği için henüz simpleks yöntem ile çözülebilir halde değildir. Yalnız ikinci denkleme x_{u_1} yapay değişkenini (Tanım 1.10) ekleriz; minimum problemi olduğundan amaç katsayısı $+M$'dir:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_{u_1} &= 11 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_6 &= 5 \\ x_1, \ldots, x_6, x_{u_1} \geq 0 \\ \min z = 2x_1 - 3x_2 &+ 6x_3 + 0x_4 \\ +0x_5 + 0x_6 &+ Mx_{u_1} \end{aligned}$$

Artık v_4, v_{u_1}, v_6 sütunları 3×3 birim matrisi oluşturur ve problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir. Başlangıç bazı $B_0 = (v_4, v_{u_1}, v_6)$, başlangıç çözümü $x_4 = 2, x_{u_1} = 11, x_6 = 5$ ve diğer değişkenler 0'dır.

Başlangıç tablosu. Baz maliyetleri $\vec{c}_B = (0, M, 0)$'dır. Her sütun için c_B sütunuyla v_j sütununun karşılıklı çarpımlarını toplayıp c_j'yi çıkarırız:

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= (0 \cdot 3 + M \cdot 2 + 0 \cdot 1) - 2 = 2M - 2, \\ z_2 - c_2 &= (0 \cdot (-4) + M \cdot 1 + 0 \cdot 3) - (-3) = M + 3, \\ z_3 - c_3 &= (0 \cdot (-6) + M \cdot 2 + 0 \cdot (-2)) - 6 = 2M - 6, \\ z_5 - c_5 &= (0 \cdot 0 + M \cdot (-1) + 0 \cdot 0) - 0 = -M, \\ z_0 &= 0 \cdot 2 + M \cdot 11 + 0 \cdot 5 = 11M. \end{aligned}$$

Baz vektörleri v_4, v_{u_1}, v_6'nın kriterleri 0'dır.
Minimum probleminde en büyük pozitif $z_j - c_j$ girer. Pozitif kriterler $2M - 2$, $M + 3$ ve $2M - 6$'dır. M'nin katsayısı en büyük olan ikisi $2M - 2$ ile $2M - 6$'dır; katsayılar eşit olduğundan sabit terimlere bakarız: $-2 > -6$ (Önerme 5.2). En büyük kriter $2M - 2$'dir ve v_1 baza girer. v_1 sütununun üç elemanı da pozitiftir:

$$\min\left(\frac{2}{3}, \frac{11}{2}, \frac{5}{1}\right) = \frac{2}{3}.$$

v_4 bazdan çıkar; pivot 3'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 14.7: Başlangıç tablosu

		c_j	2	-3	6	0	0	0	M	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_{u_1}	Oran
x_4	0	2	[3]	-4	-6	1	0	0	0	$\frac{2}{3} \Rightarrow$
x_{u_1}	M	11	2	1	2	0	-1	0	1	$\frac{11}{2}$
x_6	0	5	1	3	-2	0	0	1	0	$\frac{5}{1}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 11M$	$2M - 2 \Uparrow$	$M + 3$	$2M - 6$	0	$-M$	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 3'e bölünür ve c_B değeri $c_1 = 2$ olan x_1 satırı olur:

$$\left(\frac{2}{3} \mid 1, -\frac{4}{3}, -2, \frac{1}{3}, 0, 0, 0\right).$$

x_{u_1} satırının v_1 elemanı 2 olduğundan bu satırdan yeni pivot satırının 2 katı, x_6 satırından da 1 katı çıkarılır:

$$\begin{aligned} x_{u_1} &: \left(11 - \frac{4}{3} \mid 0, 1 + \frac{8}{3}, 2 + 4, -\frac{2}{3}, -1, 0, 1\right) \\ &= \left(\frac{29}{3} \mid 0, \frac{11}{3}, 6, -\frac{2}{3}, -1, 0, 1\right), \\ x_6 &: \left(5 - \frac{2}{3} \mid 0, 3 + \frac{4}{3}, -2 + 2, -\frac{1}{3}, 0, 1, 0\right) \\ &= \left(\frac{13}{3} \mid 0, \frac{13}{3}, 0, -\frac{1}{3}, 0, 1, 0\right). \end{aligned}$$

Yeni baz maliyetleri $\vec{c}_B = (2, M, 0)$ ile kriterler:

$$\begin{aligned} z_2 - c_2 &= 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + M \cdot \frac{11}{3} + 0 + 3 = \frac{11}{3}M + \frac{1}{3}, \\ z_3 - c_3 &= 2 \cdot (-2) + M \cdot 6 + 0 - 6 = 6M - 10, \\ z_4 - c_4 &= 2 \cdot \frac{1}{3} + M \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 - 0 = -\frac{2}{3}M + \frac{2}{3}, \\ z_5 - c_5 &= 2 \cdot 0 + M \cdot (-1) + 0 - 0 = -M, \\ z_0 &= 2 \cdot \frac{2}{3} + M \cdot \frac{29}{3} + 0 = \frac{29}{3}M + \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Pozitif kriterler $\frac{11}{3}M + \frac{1}{3}$ ve $6M - 10$'dur. M'nin katsayıları $6 > \frac{11}{3}$ olduğundan en büyüğü $6M - 10$'dur ve v_3 baza girer. v_3 sütununda x_1 satırının elemanı -2, x_6 satırınınki 0'dır; bu satırlar teste girmez. Tek oran $\frac{29/3}{6} = \frac{29}{18}$'dir; v_{u_1} bazdan çıkar ve pivot 6'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 14.8: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	2	-3	6	0	0	0	M	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_{u_1}	Oran
x_1	2	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	-2	$\frac{1}{3}$	0	0	0	–
x_{u_1}	M	$\frac{29}{3}$	0	$\frac{11}{3}$	[6]	$-\frac{2}{3}$	-1	0	1	$\frac{29/3}{6} \Rightarrow$
x_6	0	$\frac{13}{3}$	0	$\frac{13}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	–
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{29}{3}M + \frac{4}{3}$	0	$\frac{11}{3}M + \frac{1}{3}$	$6M - 10 \Uparrow$	$-\frac{2}{3}M + \frac{2}{3}$	$-M$	0	0	

İkinci iterasyon. Pivot satırı 6'ya bölünür ve c_B değeri $c_3 = 6$ olan x_3 satırı olur:

$$\left(\frac{29}{18} \mid 0, \frac{11}{18}, 1, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{6}, 0\right).$$

x_{u_1} bazdan çıktığı için v_{u_1} sütunu artık yazılmaz. x_1 satırının v_3 elemanı -2 olduğundan bu satıra yeni pivot satırının 2 katı eklenir:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{3} + \frac{29}{9} \mid 1, -\frac{4}{3} + \frac{11}{9}, 0, \frac{1}{3} - \frac{2}{9}, -\frac{1}{3}, 0\right)\\ &= \left(\frac{35}{9} \mid 1, -\frac{1}{9}, 0, \frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 0\right).\end{aligned}$$

x_6 satırının v_3 elemanı 0 olduğundan bu satır değişmez. $\vec{c}_B = (2, 6, 0)$ ile kriterler:

$$\begin{aligned}z_2 - c_2 &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) + 6 \cdot \frac{11}{18} + 0 + 3 = \frac{58}{9},\\ z_4 - c_4 &= 2 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) + 0 - 0 = -\frac{4}{9},\\ z_5 - c_5 &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 0 - 0 = -\frac{5}{3},\\ z_0 &= 2 \cdot \frac{35}{9} + 6 \cdot \frac{29}{18} + 0 = \frac{70}{9} + \frac{87}{9} = \frac{157}{9}.\end{aligned}$$

Bazda yapay değişken kalmadığı için M tablodan kayboldu. Bu tablonun çözümü $\left(\frac{35}{9}, 0, \frac{29}{18}, 0, 0, \frac{13}{3}\right)$ artık orijinal problemin uygun bir çözümüdür.
Tek pozitif kriter $z_2 - c_2 = \frac{58}{9}$ olduğundan v_2 baza girer. x_1 satırındaki $-\frac{1}{9}$ teste girmez:

$$\min\left(\frac{29/18}{11/18}, \frac{13/3}{13/3}\right) = \min\left(\frac{29}{11}, 1\right) = 1.$$

v_6 bazdan çıkar; pivot $\frac{13}{3}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 14.9: İkinci iterasyon tablosu

		c_j	2	-3	6	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_1	2	$\frac{35}{9}$	1	$-\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-$
x_3	6	$\frac{29}{18}$	0	$\frac{11}{18}$	1	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{29/18}{11/18}$
x_6	0	$\frac{13}{3}$	0	$[\frac{13}{3}]$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{13/3}{13/3} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = \frac{157}{9}$	0	$\frac{58}{9} \Uparrow$	0	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{5}{3}$	0	

Üçüncü iterasyon. Pivot satırı $\frac{13}{3}$'e bölünür, yani $\frac{3}{13}$ ile çarpılır ve c_B değeri $c_2 = -3$ olan x_2 satırı olur:

$$\left(1 \mid 0, 1, 0, -\frac{1}{13}, 0, \frac{3}{13}\right).$$

x_1 satırına yeni pivot satırının $\frac{1}{9}$ katı eklenir, x_3 satırından $\frac{11}{18}$ katı çıkarılır:

$$\begin{aligned} x_1 &: \left(\frac{35}{9} + \frac{1}{9} \mid 1, 0, 0, \frac{1}{9} - \frac{1}{117}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{117}\right) \\ &= \left(4 \mid 1, 0, 0, \frac{4}{39}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{39}\right), \\ x_3 &: \left(\frac{29}{18} - \frac{11}{18} \mid 0, 0, 1, -\frac{1}{9} + \frac{11}{234}, -\frac{1}{6}, -\frac{33}{234}\right) \\ &= \left(1 \mid 0, 0, 1, -\frac{5}{78}, -\frac{1}{6}, -\frac{11}{78}\right). \end{aligned}$$

$\vec{c}_B = (2, 6, -3)$ ile kriterler:

$$\begin{aligned} z_4 - c_4 &= 2 \cdot \frac{4}{39} + 6 \cdot \left(-\frac{5}{78}\right) + (-3) \cdot \left(-\frac{1}{13}\right) \\ &= \frac{8}{39} - \frac{15}{39} + \frac{9}{39} = \frac{2}{39}, \\ z_5 - c_5 &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + (-3) \cdot 0 = -\frac{5}{3}, \\ z_6 - c_6 &= 2 \cdot \frac{1}{39} + 6 \cdot \left(-\frac{11}{78}\right) + (-3) \cdot \frac{3}{13} \\ &= \frac{2}{39} - \frac{33}{39} - \frac{27}{39} = -\frac{58}{39}, \\ z_0 &= 2 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = 11. \end{aligned}$$

Pozitif kriter $z_4 - c_4 = \frac{2}{39}$ kaldığı için v_4 baza girer. v_4 sütununda yalnız x_1 satırının elemanı pozitiftir; oran $\frac{4}{4/39} = 39$'dur. v_1 bazdan çıkar; pivot $\frac{4}{39}$'dur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 14.10: Üçüncü iterasyon tablosu

		c_j	2	-3	6	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	Oran
x_1	2	4	1	0	0	$[\frac{4}{39}]$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{4}{4/39} \Rightarrow$
x_3	6	1	0	0	1	$-\frac{5}{78}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{11}{78}$	–
x_2	-3	1	0	1	0	$-\frac{1}{13}$	0	$\frac{3}{13}$	–
$z_j - c_j$		$z_0 = 11$	0	0	0	$\frac{2}{39} \Uparrow$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{58}{39}$	

Dördüncü iterasyon. Pivot satırı $\frac{39}{4}$ ile çarpılır ve c_B değeri $c_4 = 0$ olan x_4 satırı olur:

$$\left(39 \mid \frac{39}{4}, 0, 0, 1, -\frac{13}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

x_3 satırına yeni pivot satırının $\frac{5}{78}$ katı, x_2 satırına $\frac{1}{13}$ katı eklenir:

$$\begin{aligned} x_3 &: \left(1 + \frac{5}{2} \mid \frac{5}{8}, 0, 1, 0, -\frac{1}{6} - \frac{5}{24}, -\frac{11}{78} + \frac{5}{312}\right) \\ &= \left(\frac{7}{2} \mid \frac{5}{8}, 0, 1, 0, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{8}\right), \\ x_2 &: \left(1 + 3 \mid \frac{3}{4}, 1, 0, 0, -\frac{1}{4}, \frac{3}{13} + \frac{1}{52}\right) \\ &= \left(4 \mid \frac{3}{4}, 1, 0, 0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

$\vec{c}_B = (0, 6, -3)$ ile kriterler:

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= 0 + 6 \cdot \frac{5}{8} + (-3) \cdot \frac{3}{4} - 2 = \frac{15}{4} - \frac{9}{4} - 2 = -\frac{1}{2}, \\ z_5 - c_5 &= 0 + 6 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + (-3) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 0 = -\frac{3}{2}, \\ z_6 - c_6 &= 0 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + (-3) \cdot \frac{1}{4} - 0 = -\frac{3}{2}, \\ z_0 &= 0 \cdot 39 + 6 \cdot \frac{7}{2} + (-3) \cdot 4 = 9. \end{aligned}$$

Tablo 14.11: Dördüncü iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	2	-3	6	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
x_4	0	39	$\frac{39}{4}$	0	0	1	$-\frac{13}{4}$	$\frac{1}{4}$
x_3	6	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{8}$	0	1	0	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{8}$
x_2	-3	4	$\frac{3}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 9$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$

Sonuç. Dördüncü iterasyon tablosunda (Tablo 14.11) bütün $z_j - c_j \leq 0$'dır ve bazda yapay değişken yoktur. Teorem 5.1 gereği optimal çözüm

 CC BY-NC-SA 4.0

$$X^* = (x_1, ..., x_6) = \left(0, 4, \frac{7}{2}, 39, 0, 0\right), \qquad \min z = -3 \cdot 4 + 6 \cdot \frac{7}{2} = 9$$

dur. Baz dışındaki bütün kriterler negatif olduğundan optimal çözüm tektir (Sonuç 7.1). Kısıtlarda kontrol edelim: $3 \cdot 0 - 16 - 21 = -37 \leq 2$ (aradaki fark $x_4 = 39$), $0 + 4 + 7 = 11$ (ikinci kısıt tam sağlanır, $x_5 = 0$) ve $0 + 12 - 7 = 5$ (üçüncü kısıt tam sağlanır, $x_6 = 0$). Amaç değeri iterasyonlar boyunca

$$11M \to \frac{29}{3}M + \frac{4}{3} \to \frac{157}{9} \to 11 \to 9$$

diye azaldı.
■

14.5 Duyarlılık Analizi

Optimal tablo yalnız çözümü vermez; problemin verileri değişince bu çözümün ne kadar dayanıklı olduğunu da söyler. Aşağıdaki üç alıştırma aynı problem üzerindedir: önce problem çözülür, sonra amaç fonksiyonu katsayıları ve sağ taraf sabitleri için Duyarlılık analizi bölümündeki inceleme yapılır.

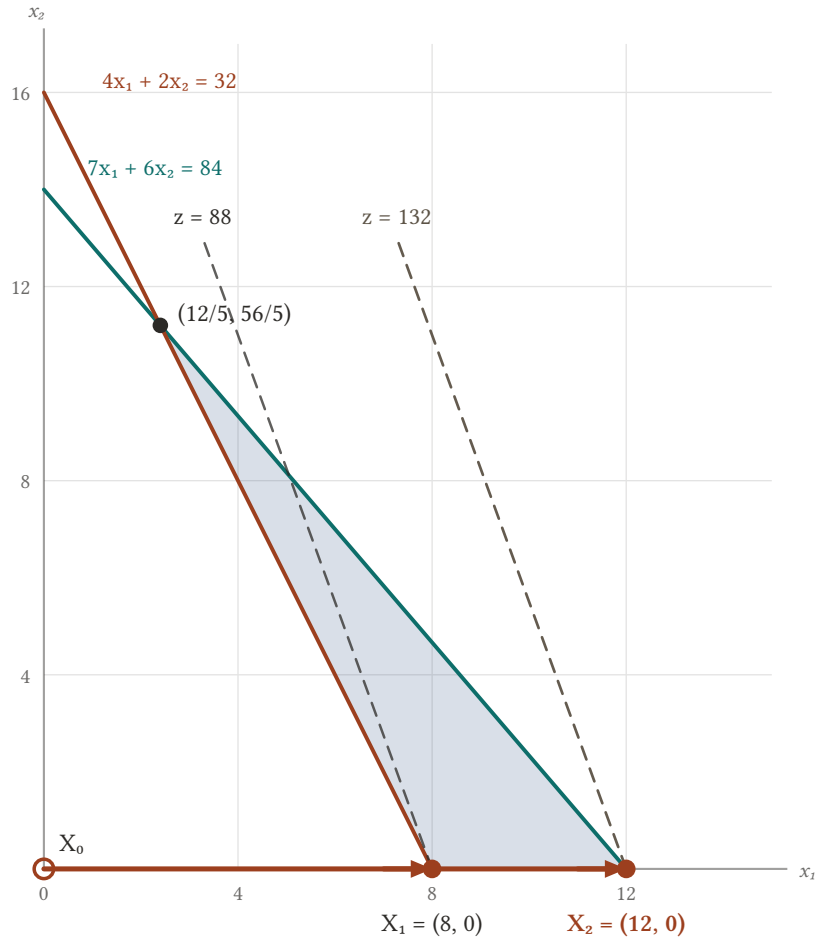
Alıştırma 14.6 (Duyarlılık problemi: M yöntemiyle çözüm).

$$\begin{aligned} 7x_1 + 6x_2 &\leq 84 \\ 4x_1 + 2x_2 &\geq 32 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \max z &= 11x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

lineer programlama problemini M yöntemiyle çözünüz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.2: Uygun bölge (8, 0), (12, 0) ve (12/5, 56/5) köşeli üçgendir. Büyük M yöntemi uygun bölgenin dışındaki X_0 = (0, 0) noktasından başlar, X_1 = (8, 0) köşesine ve oradan optimal X_2 = (12, 0) köşesine gider. Kesikli doğrular $z = 11x_1 + 4x_2$ amaç fonksiyonunun z = 88 ve z = 132 seviye doğrularıdır.

Kanonik form. Maksimum probleminde bütün kısıtlar $\leq$ olmalıdır; ikinci kısıtı -1 ile çarparsak kanonik form $7x_1 + 6x_2 \leq 84$, $-4x_1 - 2x_2 \leq -32$ olur. Sağ tarafta -32 bulunduğu için standart forma verilen problemden geçeriz.
Standart form. Birinci kısıta x_3 aylak değişkenini ekler, ikinci kısıttan x_4 artık değişkenini çıkarırız:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 6x_2 + x_3 &= 84 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_4 &= 32 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \\ \max z &= 11x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 \end{aligned}$$

Simpleks yöntem ile çözülebilir hal. $v_3 = (1, 0)^T$ birim sütundur, ama ikinci denklemde x_4'ün katsayısı -1'dir. İkinci denkleme x_{u_1} yapay değişkenini ekleriz; maksimum problemi olduğundan amaç katsayısı $-M$'dir:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 6x_2 + x_3 &= 84 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_4 + x_{u_1} &= 32 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_{u_1} &\geq 0 \\ \max z &= 11x_1 + 4x_2 + 0x_3 \\ &\quad +0x_4 - Mx_{u_1} \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Başlangıç bazı $B_0 = (v_3, v_{u_1})$, başlangıç çözümü $x_3 = 84$, $x_{u_1} = 32$'dir.
Başlangıç tablosu. $\vec{c}_B = (0, -M)$ ile

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= (0 \cdot 7 + (-M) \cdot 4) - 11 = -4M - 11, \\ z_2 - c_2 &= (0 \cdot 6 + (-M) \cdot 2) - 4 = -2M - 4, \\ z_4 - c_4 &= (0 \cdot 0 + (-M) \cdot (-1)) - 0 = M, \\ z_0 &= 0 \cdot 84 + (-M) \cdot 32 = -32M. \end{aligned}$$

Maksimum probleminde en negatif $z_j - c_j$ girer ve bütün $z_j - c_j \geq 0$ olunca durulur. Negatif kriterler $-4M - 11$ ve $-2M - 4$'tür; M'nin katsayıları $-4 < -2$ olduğundan en negatifi $-4M - 11$'dir ve v_1 baza girer. Oranlar $\frac{84}{7} = 12$ ve $\frac{32}{4} = 8$'dir; v_{u_1} bazdan çıkar ve pivot 4'tür.

Tablo 14.12: Başlangıç tablosu

		c_j	11	4	0	0	$-M$	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_{u_1}	Oran
x_3	0	84	7	6	1	0	0	$\frac{84}{7}$
x_{u_1}	$-M$	32	[4]	2	0	-1	1	$\frac{32}{4} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = -32M$	$-4M - 11 \Uparrow$	$-2M - 4$	0	M	0	

Birinci iterasyon. Pivot satırı 4'e bölünür ve c_B değeri 11 olan x_1 satırı olur: $\left(8 \mid 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}\right)$. v_{u_1} sütunu artık yazılmaz. x_3 satırından yeni pivot satırının 7 katı çıkarılır:

$$\left(84 - 56 \mid 0, 6 - \frac{7}{2}, 1, \frac{7}{4}\right) = \left(28 \mid 0, \frac{5}{2}, 1, \frac{7}{4}\right).$$

$\vec{c}_B = (0, 11)$ ile

$$\begin{aligned} z_2 - c_2 &= 0 \cdot \frac{5}{2} + 11 \cdot \frac{1}{2} - 4 = \frac{3}{2}, \\ z_4 - c_4 &= 0 \cdot \frac{7}{4} + 11 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - 0 = -\frac{11}{4}, \\ z_0 &= 0 \cdot 28 + 11 \cdot 8 = 88. \end{aligned}$$

Tek negatif kriter $-\frac{11}{4}$ olduğundan v_4 baza girer. x_1 satırındaki $-\frac{1}{4}$ teste girmez; tek oran $\frac{28}{7/4} = 16$'dır. v_3 bazdan çıkar; pivot $\frac{7}{4}$'tür.

Tablo 14.13: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	11	4	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	Oran
x_3	0	28	0	$\frac{5}{2}$	1	$[\frac{7}{4}]$	$\frac{28}{7/4} \Rightarrow$
x_1	11	8	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	—
$z_j - c_j$		$z_0 = 88$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{11}{4} \Uparrow$	

İkinci iterasyon. Pivot satırı $\frac{4}{7}$ ile çarpılır ve c_B değeri 0 olan x_4 satırı olur: $\left(16 \mid 0, \frac{10}{7}, \frac{4}{7}, 1\right)$. x_1 satırına yeni pivot satırının $\frac{1}{4}$ katı eklenir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left(8+4 \mid 1, \frac{1}{2}+\frac{5}{14}, \frac{1}{7}, 0\right) = \left(12 \mid 1, \frac{6}{7}, \frac{1}{7}, 0\right).$$

$\vec{c}_B = (0, 11)$ ile

$$z_2 - c_2 = 0 \cdot \frac{10}{7} + 11 \cdot \frac{6}{7} - 4 = \frac{38}{7},$$
$$z_3 - c_3 = 0 \cdot \frac{4}{7} + 11 \cdot \frac{1}{7} - 0 = \frac{11}{7},$$
$$z_0 = 0 \cdot 16 + 11 \cdot 12 = 132.$$

Tablo 14.14: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	11	4	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_4	0	16	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{4}{7}$	1
x_1	11	12	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$	0
$z_j - c_j$		$z_0 = 132$	0	$\frac{38}{7}$	$\frac{11}{7}$	0

Sonuç. Negatif simpleks kriteri kalmadı; maksimum problemi için optimal tabloya (Tablo 14.14) ulaşıldı. Bazda yapay değişken yoktur (Teorem 5.1) ve optimal çözüm

$$x_1 = 12, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 16, \qquad \max z = 11 \cdot 12 = 132$$

dir. Birinci kısıt tam sağlanır ($7 \cdot 12 = 84$), ikinci kısıtın gereksinimi $x_4 = 16$ birim aşılır ($4 \cdot 12 = 48 = 32 + 16$). Baz dışındaki kriterler $\frac{38}{7}$ ve $\frac{11}{7}$ pozitif olduğundan optimal çözüm tektir (Sonuç 7.1).
Grafikle karşılaştıralım. Uygun bölge $(8, 0)$, $(12, 0)$ ve iki kısıt doğrusunun kesiştiği $(\frac{12}{5}, \frac{56}{5})$ köşeli üçgendir; bu köşelerde z sırasıyla 88, 132 ve $\frac{132}{5} + \frac{224}{5} = \frac{356}{5}$ değerini alır. En büyüğü gerçekten 132'dir. Başlangıç tablosunun çözümü $(x_1, x_2) = (0, 0)$ bölgenin dışındadır, birinci iterasyon tablosununki $(8, 0)$ köşesidir.
■

Alıştırma 14.7 (Amaç fonksiyonu katsayıları için duyarlılık analizi). Önceki alıştırmada (Alıştırma 14.6) çözülen

$$\begin{aligned} 7x_1 + 6x_2 &\le 84 \\ 4x_1 + 2x_2 &\ge 32 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max z &= 11x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

problemi için amaç fonksiyonu katsayılarında duyarlılık analizi yapınız: her c_j katsayısı, diğerleri sabit kalırken hangi aralıkta değişirse optimal çözüm değişmez?

Çözüm.
Bir c_j değişince tablonun gövdesi, yani v_0 sütunu ve y_{ij} değerleri değişmez; bunlar yalnız kısıtlara ve baza bağlıdır. Değişen yalnız $z_j - c_j$ satırı ve amaç değeridir. Dolayısıyla optimal tablo (Tablo 14.14), maksimum probleminde bütün $z_j - c_j \ge 0$ kaldığı sürece optimal kalır ve aynı çözümü, $x_1 = 12, x_2 = 0$'ı verir. Optimal tabloda temel değişkenler x_4 ve x_1, temel dışı değişkenler x_2 ve x_3'tür.
Temel dışı değişken x_2. Optimal tabloda $c_2 = 4$ yerine c_2 yazalım. x_2 bazda olmadığından $\vec{c}_B = (0, 11)$ değişmez ve yalnız v_2 sütununun kriteri etkilenir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$z_1 - c_1 = (0,11)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - 11 = 0,$$
$$z_2 - c_2 = (0,11)\begin{bmatrix}\frac{10}{7}\\\frac{6}{7}\end{bmatrix} - c_2 = \frac{66}{7} - c_2 \geq 0 \Rightarrow c_2 \leq \frac{66}{7},$$
$$z_3 - c_3 = (0,11)\begin{bmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{1}{7}\end{bmatrix} - 0 = \frac{11}{7},$$
$$z_4 - c_4 = (0,11)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - 0 = 0.$$

Tablo 14.15: Temel dışı bir değişkenin değişim aralığı

		c_j	11	c_2	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_4	0	16	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{4}{7}$	1
x_1	11	12	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$	0
$z_j - c_j$		$z_0 = 132$	0	$\frac{66}{7} - c_2$	$\frac{11}{7}$	0

$c_2 \leq \frac{66}{7}$ alınırsa optimumluk bozulmaz. Yani x_2'nin birim kârı $\frac{66}{7} \approx 9{,}43$'ü aşmadıkça x_2 üretmek kârlı değildir; aştığında v_2 baza girer ve çözüm değişir. $c_2 = \frac{66}{7}$ sınırında $z_2 - c_2 = 0$ olur: $(12,0)$ ile $(\frac{12}{5}, \frac{56}{5})$ köşeleri aynı amaç değerini, 132'yi verir.

Temel değişken x_1. Şimdi $c_1 = 11$ yerine c_1 yazalım. x_1 bazda olduğundan c_1 hem c_j satırında hem c_B sütununda görünür ve bütün kriterler yeniden hesaplanır; $\vec{c}_B = (0, c_1)$:

$$z_1 - c_1 = (0,c_1)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - c_1 = c_1 - c_1 = 0,$$
$$z_2 - c_2 = (0,c_1)\begin{bmatrix}\frac{10}{7}\\\frac{6}{7}\end{bmatrix} - 4 = \frac{6c_1}{7} - 4 = \frac{6c_1 - 28}{7},$$
$$z_3 - c_3 = (0,c_1)\begin{bmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{1}{7}\end{bmatrix} - 0 = \frac{c_1}{7},$$
$$z_4 - c_4 = (0,c_1)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - 0 = 0.$$

Tablo 14.16: Temelde olan x_1 değişkeninin değişim aralığı

		c_j	c_1	4	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_4	0	16	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{4}{7}$	1
x_1	c_1	12	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$	0
$z_j - c_j$		$z_0 = 12c_1$	0	$\frac{6c_1}{7} - 4$	$\frac{c_1}{7}$	0

İki koşul gerekir:

$$\frac{6c_1 - 28}{7} \geq 0 \Rightarrow c_1 \geq \frac{14}{3}, \qquad \frac{c_1}{7} \geq 0 \Rightarrow c_1 \geq 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İkisinin birden sağlanması için $c_1 \geq \frac{14}{3}$ olmalıdır. $c_1 \geq \frac{14}{3}$ olursa optimumluk bozulmaz; optimal çözüm yine $(12,0)$ ve optimal değer $12c_1$'dir.

Temel değişken x_4. x_4 bir artık değişkendir ve amaçtaki katsayısı 0'dır; aynı soruyu onun katsayısı için de sorabiliriz. $c_4 = 0$ yerine c_4 yazalım; $\vec{c}_B = (c_4, 11)$:

$$z_1 - c_1 = (c_4,11)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - 11 = 0,$$

$$z_2 - c_2 = (c_4,11)\begin{bmatrix}\frac{10}{7}\\\frac{6}{7}\end{bmatrix} - 4 = \frac{10c_4+66}{7} - 4 = \frac{10c_4+38}{7},$$

$$z_3 - c_3 = (c_4,11)\begin{bmatrix}\frac{4}{7}\\\frac{1}{7}\end{bmatrix} - 0 = \frac{4c_4+11}{7},$$

$$z_4 - c_4 = (c_4,11)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - c_4 = 0.$$

Tablo 14.17: Temelde olan x_4 değişkeninin değişim aralığı

		c_j	11	4	0	c_4
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4
x_4	c_4	16	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{4}{7}$	1
x_1	11	12	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$	0
$z_j - c_j$		$z_0 = 16c_4 + 132$	0	$\frac{10c_4+38}{7}$	$\frac{4c_4+11}{7}$	0

Koşullar

$$10c_4 + 38 \geq 0 \Rightarrow c_4 \geq -\frac{19}{5}, \qquad 4c_4 + 11 \geq 0 \Rightarrow c_4 \geq -\frac{11}{4}$$

dir. $-\frac{11}{4} = -2{,}75$ sayısı $-\frac{19}{5} = -3{,}8$'den büyük olduğundan ikisi birden $c_4 \geq -\frac{11}{4}$ iken sağlanır. $c_4 \geq -\frac{11}{4}$ olursa optimumluk bozulmaz.

Temel dışı değişken x_3. Son olarak aylak değişken x_3'ün katsayısını c_3 ile gösterelim. x_3 bazda olmadığından yalnız kendi kriteri değişir: $z_3 - c_3 = \frac{11}{7} - c_3 \geq 0$, yani $c_3 \leq \frac{11}{7}$.

Özet.

Tablo 14.18: Amaç fonksiyonu katsayılarının değişim aralıkları

Katsayı	Şimdiki değer	Optimumluğun bozulmadığı aralık
c_1	11	$c_1 \geq \frac{14}{3}$
c_2	4	$c_2 \leq \frac{66}{7}$
c_3	0	$c_3 \leq \frac{11}{7}$
c_4	0	$c_4 \geq -\frac{11}{4}$

Her aralık katsayının şimdiki değerini içerir; bu, hesabın kolay bir sağlamasıdır. Aralığın içinde optimal çözüm $(x_1, x_2) = (12, 0)$ olarak kalır, yalnız optimal değer değişebilir.

■

Alıştırma 14.8 (Sağ taraf sabitleri için duyarlılık analizi). Önceki alıştırmalardaki

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} 7x_1 + 6x_2 &\le 84 \\ 4x_1 + 2x_2 &\ge 32 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max z &= 11x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

problemi için sağ taraf sabitlerinde duyarlılık analizi yapınız: $b_1 = 84$ ve $b_2 = 32$ sabitlerinin her biri, diğeri sabit kalırken hangi aralıkta değişirse optimal baz değişmez?

Çözüm.
Bir b_i değişince $z_j - c_j$ satırı değişmez, çünkü o satır yalnız $\vec{c}_B$'ye ve y_{ij} değerlerine bağlıdır. Optimal tablonun (Tablo 14.14) optimallik koşulu bu yüzden korunur. Değişen v_0 sütunudur: B optimal bazın matrisi olmak üzere yeni temel çözüm $B^{-1}\vec{b}$'dir. Baz uygun kalmalı, yani

$$B^{-1}\vec{b} \ge 0$$

eşitsizliği gerçeklenmelidir.
B matrisi. Temel değişkenler tablodaki sırayla x_4 ve x_1'dir. B'nin sütunları bu değişkenlerin standart formdaki (Alıştırma 14.6) sütunlarıdır: $4x_1 + 2x_2 - x_4 = 32$ denkleminden $v_4 = (0,-1)^T$ ve $v_1 = (7,4)^T$. O halde

$$B = [\,v_4 \;\; v_1\,] = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \det B = 0\cdot 4 - 7\cdot(-1) = 7 \neq 0,$$

dolayısıyla B'nin tersi vardır. 2×2 matrisin tersi formülüyle

$$B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Kontrol: $BB^{-1} = \begin{bmatrix} 0+1 & 0+0 \\ -\frac{4}{7}+\frac{4}{7} & 1+0 \end{bmatrix} = I$. B^{-1}'in birinci sütununun optimal tablodaki v_3 sütunu $\left(\frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right)^T$ olduğuna da dikkat edelim: başlangıçta birim sütun olan v_3'ün son tablodaki katsayıları $B^{-1}v_3$'tür. Şimdiki değerlerle

$$B^{-1}\vec{b} = \left(\frac{4}{7}\cdot 84 - 32, \frac{1}{7}\cdot 84\right)^T = (16, 12)^T$$

bulunur; bu, tablodaki v_0 sütununun ta kendisidir.
b_1 için inceleme. $b_2 = 32$ sabit, b_1 değişken:

$$B^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7}b_1 - 32 \\ \frac{1}{7}b_1 \end{bmatrix} \ge 0.$$

Birinci bileşenden $\frac{4}{7}b_1 \ge 32$, yani $b_1 \ge 56$; ikinci bileşenden $b_1 \ge 0$. İkisi birlikte $b_1 \ge 56$ verir. Bu aralıkta optimal çözüm $x_1 = \frac{b_1}{7}$, $x_4 = \frac{4}{7}b_1 - 32$ ve optimal değer $z = \frac{11}{7}b_1$'dir. Anlamı şudur: $x_2 = 0$ iken birinci kısıt $x_1 \le \frac{b_1}{7}$, ikinci kısıt $x_1 \ge 8$ der; $b_1 < 56$ olunca $\frac{b_1}{7} < 8$ olur ve bu köşe uygunluğunu kaybeder.
b_2 için inceleme. $b_1 = 84$ sabit, b_2 değişken:

$$B^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 84 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 - b_2 \\ 12 \end{bmatrix} \ge 0.$$

Birinci bileşenden $b_2 \le 48$; ikinci bileşen $12 \ge 0$ her zaman doğrudur. Demek ki $b_2 \le 48$ olmalıdır. Bu aralıkta çözüm $x_1 = 12$, $x_4 = 48 - b_2$ ve $z = 132$ olarak kalır: $x_1 = 12$ için $4x_1 = 48$'dir ve gereksinim 48'i aşmadıkça karşılanır.
Özet.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 14.19: Sağ taraf sabitlerinin değişim aralıkları

Sabit	Şimdiki değer	Optimal bazın korunduğu aralık	Optimal değer
b_1	84	$b_1 \geq 56$	$z = \frac{11}{7} b_1$
b_2	32	$b_2 \leq 48$	$z = 132$

Sonuç olarak $b_1 \geq 56$ ve $b_2 \leq 48$ olursa optimumluk bozulmaz.
■

14.6 Dualite

Bir problemi çözmenin bir yolu da onun dualini çözmektir. Aşağıdaki iki alıştırmada önce dual problem kurulur, sonra dualin optimal tablosundan esas problemin çözümü okunur (Dualite).

Alıştırma 14.9 (Dual problemin kurulması).

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 3x_1 + x_2 \end{aligned}$$

lineer programlama probleminin dual problemini oluşturunuz.

Çözüm.
Kanonik form. Amaç fonksiyonu minimum olduğu için kanonik formda (Tanım 1.6) bütün kısıtlar $\geq$ olmalıdır. Üçüncü kısıtı -1 ile çarparız: $-x_1 - 2x_2 \geq -5$. Eşitlik kısıtı ise iki eşitsizliğe ayrılır: $x_1 + x_2 \geq 3$ ve $x_1 + x_2 \leq 3$; ikincisini -1 ile çarparsak $-x_1 - x_2 \geq -3$ olur. Kanonik form:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 3 \\ -x_1 - x_2 &\geq -3 \\ -x_1 - 2x_2 &\geq -5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \min z &= 3x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Dual problem. Kanonik formdaki $\min z = \vec{c}^{\,T}\vec{x},\ A\vec{x} \geq \vec{b},\ \vec{x} \geq 0$ probleminin duali $\max g = \vec{b}^{\,T}\vec{y}$, $A^T\vec{y} \leq \vec{c},\ \vec{y} \geq 0$ problemidir: her kısıta bir dual değişken karşılık gelir, katsayılar matrisi transpoze edilir, sağ taraflar ile amaç katsayıları yer değiştirir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \qquad \vec{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Dört kısıta sırasıyla y_1, y_2', y_2'', y_3 dual değişkenlerini verelim. A^T'nin satırları A'nın sütunlarıdır; dual problem

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2' - y_2'' - y_3 &\leq 3 \\ y_1 + y_2' - y_2'' - 2y_3 &\leq 1 \\ y_1, y_2', y_2'', y_3 &\geq 0 \\ \max g &= 6y_1 + 3y_2' - 3y_2'' - 5y_3 \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.
İşaretsiz değişkenle yazım. y_2' ve y_2'' her yerde $y_2' - y_2''$ farkı olarak görünür. $y_2 = y_2' - y_2''$ dersek y_2 her işareti alabilir (İşaret kısıtlaması olmayan değişkenler). Dual problem kısaca

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 - y_3 &\le 3 \\ y_1 + y_2 - 2y_3 &\le 1 \\ y_1, y_3 \ge 0, \quad &y_2 \text{ işaretçe kısıtsız} \\ \max g &= 6y_1 + 3y_2 - 5y_3 \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Yani esas problemin eşitlik kısıtına işaretçe kısıtsız bir dual değişken karşılık gelir. ■

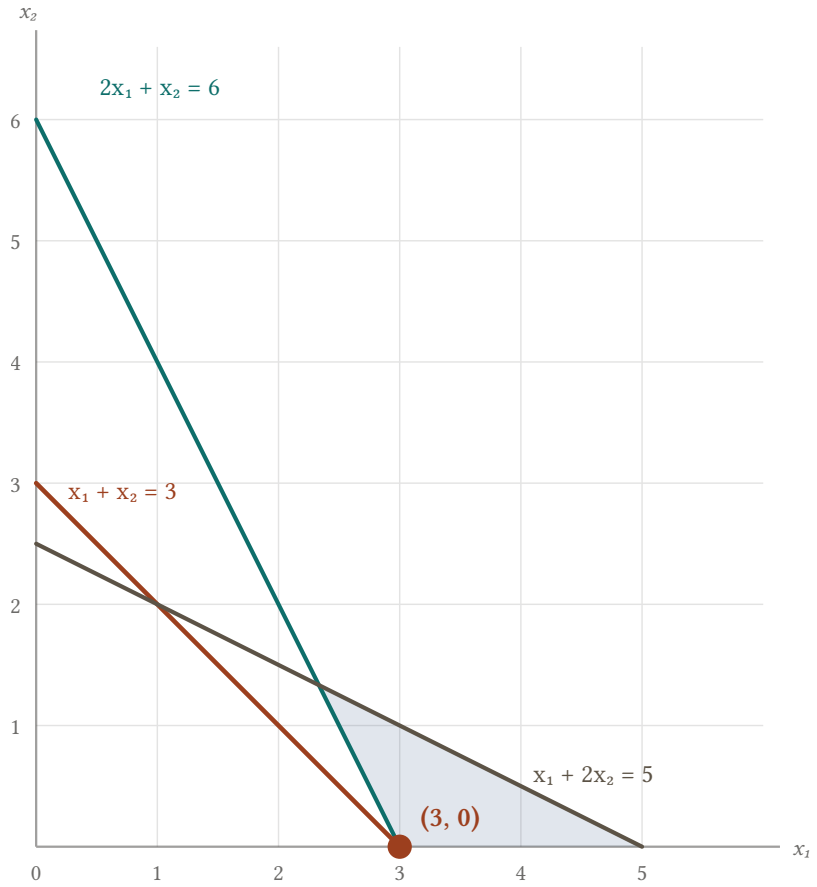
Alıştırma 14.10 (Dual problemi çözerek esas problemin çözümü). Önceki alıştırmada (Alıştırma 14.9) kurulan dual problemi simpleks yöntemle çözünüz ve dualin optimal tablosundan esas problemin, yani

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\ge 6 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \min z &= 3x_1 + x_2 \end{aligned}$$

probleminin çözümüne geçiniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.3: Açık boyalı bölge $2x_1 + x_2 \geq 6$ ve $x_1 + 2x_2 \leq 5$ eşitsizliklerinin ortak bölgesidir. Eşitlik kısıtı yüzünden uygun çözümler $x_1 + x_2 = 3$ doğrusu üzerinde olmalıdır ve bu doğru bölgeye yalnız (3, 0) noktasında değer: esas problemin tek uygun çözümü (3, 0)'dır.

Standart form ve çözülebilir hal. İşaretsiz y_2 yerine $y_2 = y_2' - y_2''$ ($y_2', y_2'' \geq 0$) yazılmış duali kullanıyoruz. İki $\leq$ kısıta y_4 ve y_5 aylak değişkenlerini ekleriz:

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2' - y_2'' - y_3 + y_4 &= 3 \\ y_1 + y_2' - y_2'' - 2y_3 + y_5 &= 1 \\ y_1, y_2', y_2'', y_3, y_4, y_5 &\geq 0 \\ \max g = 6y_1 + 3y_2' - 3y_2'' - 5y_3 & \\ +0y_4 + 0y_5 & \end{aligned}$$

v_4 ve v_5 sütunları 2×2 birim matrisi oluşturur; problem simpleks yöntem ile çözülebilir haldedir ve yapay değişken gerekmez. Sütunları $v_1, v_2', v_2'', v_3, v_4, v_5$ diye adlandırıyoruz; amaç değerini g_0 ile gösteriyoruz.

Başlangıç tablosu. $\vec{c}_B = \vec{0}$ olduğundan $z_j - c_j = -c_j$: sırasıyla $-6, -3, 3, 5, 0, 0$. Maksimum probleminde en negatif $z_j - c_j$ girer ve bütün $z_j - c_j \geq 0$ olunca durulur. En negatifi -6 olduğundan v_1 baza girer. Oranlar $\frac{3}{2}$ ve $\frac{1}{1} = 1$'dir; v_5 bazdan çıkar ve pivot 1'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 14.20: Başlangıç tablosu

		c_j	6	3	-3	-5	0	0	
y_B	c_B	v_0	v_1	v_2'	v_2''	v_3	v_4	v_5	Oran
y_4	0	3	2	1	-1	-1	1	0	$\frac{3}{2}$
y_5	0	1	[1]	1	-1	-2	0	1	$\frac{1}{1} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$g_0 = 0$	$-6 \Uparrow$	-3	3	5	0	0	

Birinci iterasyon. Pivot 1 olduğundan y_5 satırı aynen kalır ve c_B değeri 6 olan y_1 satırı olur: $(1 \mid 1, 1, -1, -2, 0, 1)$. y_4 satırından bu satırın 2 katı çıkarılır, kriter satırına 6 katı eklenir:

$$y_4 : (3-2 \mid 0, 1-2, -1+2, -1+4, 1, -2) = (1 \mid 0, -1, 1, 3, 1, -2),$$
$$z_j - c_j : (0+6 \mid 0, -3+6, 3-6, 5-12, 0, 6) = (6 \mid 0, 3, -3, -7, 0, 6).$$

Negatif kriterler -3 ve -7'dir; en negatifi -7 olduğundan v_3 baza girer. y_1 satırındaki -2 teste girmez; tek oran $\frac{1}{3}$'tür. y_4 bazdan çıkar; pivot 3'tür.

Tablo 14.21: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	6	3	-3	-5	0	0	
y_B	c_B	v_0	v_1	v_2'	v_2''	v_3	v_4	v_5	Oran
y_4	0	1	0	-1	1	[3]	1	-2	$\frac{1}{3} \Rightarrow$
y_1	6	1	1	1	-1	-2	0	1	–
$z_j - c_j$		$g_0 = 6$	0	3	-3	$-7 \Uparrow$	0	6	

İkinci iterasyon. Pivot satırı 3'e bölünür ve c_B değeri -5 olan y_3 satırı olur: $\left(\frac{1}{3} \mid 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. y_1 satırına bu satırın 2 katı, kriter satırına 7 katı eklenir:

$$\begin{aligned} y_1 &: \left(1 + \frac{2}{3} \mid 1, 1 - \frac{2}{3}, -1 + \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1 - \frac{4}{3}\right) \\ &= \left(\frac{5}{3} \mid 1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \\ z_j - c_j &: \left(6 + \frac{7}{3} \mid 0, 3 - \frac{7}{3}, -3 + \frac{7}{3}, 0, \frac{7}{3}, 6 - \frac{14}{3}\right) \\ &= \left(\frac{25}{3} \mid 0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right). \end{aligned}$$

Tek negatif kriter $-\frac{2}{3}$ olduğundan v_2'' baza girer. y_1 satırındaki $-\frac{1}{3}$ teste girmez; tek oran $\frac{1/3}{1/3} = 1$'dir. y_3 bazdan çıkar; pivot $\frac{1}{3}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 14.22: İkinci iterasyon tablosu

		c_j	6	3	-3	-5	0	0	
y_B	c_B	v_0	v_1	v_2'	v_2''	v_3	v_4	v_5	Oran
y_3	-5	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$[\frac{1}{3}]$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1/3}{1/3} \Rightarrow$
y_1	6	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-$
$z_j - c_j$		$g_0 = \frac{25}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} \Uparrow$	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$	

Üçüncü iterasyon. Pivot satırı $\frac{1}{3}$'e bölünür, yani 3 ile çarpılır ve c_B değeri -3 olan y_2'' satırı olur: $(1 \mid 0, -1, 1, 3, 1, -2)$. y_1 satırına bu satırın $\frac{1}{3}$ katı, kriter satırına $\frac{2}{3}$ katı eklenir:

$$\begin{aligned} y_1 &: \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{3} \mid 1, \frac{1}{3} - \frac{1}{3}, 0, 1, \frac{2}{3} + \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \\ &= (2 \mid 1, 0, 0, 1, 1, -1), \\ z_j - c_j &: \left(\frac{25}{3} + \frac{2}{3} \mid 0, \frac{2}{3} - \frac{2}{3}, 0, 2, \frac{7}{3} + \frac{2}{3}, \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) \\ &= (9 \mid 0, 0, 0, 2, 3, 0). \end{aligned}$$

Tablo 14.23: Üçüncü iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	6	3	-3	-5	0	0
y_B	c_B	v_0	v_1	v_2'	v_2''	v_3	v_4	v_5
y_2''	-3	1	0	-1	1	3	1	-2
y_1	6	2	1	0	0	1	1	-1
$z_j - c_j$		$g_0 = 9$	0	0	0	2	3	0

Dualin çözümü. Üçüncü iterasyon tablosunda (Tablo 14.23) bütün $z_j - c_j \geq 0$'dır; maksimum problemi için optimal tabloya ulaşıldı. Dual problemin çözümü

$$(y_1, y_2', y_2'', y_3, y_4, y_5) = (2, 0, 1, 0, 0, 0), \qquad y_2 = y_2' - y_2'' = -1$$

ve

$$\max g = 6 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 3 \cdot 1 - 5 \cdot 0 = 9$$

dur. (v_5 baz dışında olduğu halde kriteri 0'dır ve sütununda pozitif eleman yoktur; bu yüzden dualin başka optimal çözümleri de vardır, örneğin $(3, 0, 3, 0, 0, 1)$ için de $g = 18 - 9 = 9$ olur. Esas problemin çözümünü okumak için bu fark etmez.)

Esas problemin çözümü. Esas problemin x_1 ve x_2 değişkenleri dualin birinci ve ikinci kısıtlarına, dolayısıyla bu kısıtların y_4 ve y_5 aylak değişkenlerine karşılık gelir:

$$\begin{bmatrix} y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Dualin optimal tablosunda bu aylak sütunların simpleks kriterleri esas problemin optimal çözümünü verir: $x_1 = z_4 - c_4 = 3$ ve $x_2 = z_5 - c_5 = 0$. Bunun nedeni, başlangıçta birim sütun olan bir aylak sütunun kriterinin $\vec{c}_B^{\,T} B^{-1}$ satır vektörünün ilgili bileşeni olmasıdır; ayrıntısı Dualite bölümündedir. Bulduğumuz noktayı doğrudan da sağlayalım.

$X^* = (3, 0)$ uygundur: $2 \cdot 3 + 0 = 6 \geq 6$, $3 + 0 = 3$ ve $3 + 0 = 3 \leq 5$; amaç değeri $z = 3 \cdot 3 + 0 = 9$'dur.

 CC BY-NC-SA 4.0

X optimaldir.* Kanonik formdaki esas problemin her uygun $\vec{x}$ çözümü ve dualin her uygun $\vec{y}$ çözümü için

$$z = \vec{c}^T\vec{x} \geq (A^T\vec{y})^T\vec{x} = \vec{y}^T(A\vec{x}) \geq \vec{y}^T\vec{b} = g$$

dir. Birinci eşitsizlik $\vec{x} \geq 0$ ve $\vec{c} \geq A^T\vec{y}$ olduğundan, ikincisi $\vec{y} \geq 0$ ve $A\vec{x} \geq \vec{b}$ olduğundan doğrudur. Yani esas problemin hiçbir uygun çözümünün değeri, dualin bir uygun çözümünün değerinden küçük olamaz. X^* ile dualin bulduğumuz çözümü aynı değeri verdiğine göre

$$\min z = 9 = \max g$$

olur ve ikisi de kendi probleminde optimaldir. Esas problemin optimal çözümü $x_1 = 3$, $x_2 = 0$ ve $\min z = 9$'dur.
Grafik de aynı sonucu gösteriyor: $x_1 + x_2 = 3$ ve $x_2 \geq 0$ iken $2x_1 + x_2 \geq 6$ kısıtı $x_1 \geq 3$ demektir; bu da yalnız $(3, 0)$ noktasında mümkündür. Esas problemin tek uygun çözümü bu noktadır.
■

14.7 Dal-Sınır Yöntemi

Son alıştırmada değişkenlerin tam sayı olması istenir. Problemi Tam sayılı programlama ve dal-sınır yöntemi bölümündeki yöntemle, alt problemleri grafik yöntemle çözerek ele alıyoruz.

Alıştırma 14.11 (Dal-sınır yöntemiyle bir tam sayılı problem).

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &\leq 19 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0, &\quad x_1, x_2 \text{ tam sayı} \\ \max z &= 5x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

lineer programlama problemini çözünüz.

Çözüm.
Dal-sınır yönteminde önce tam sayı koşulu kaldırılır ve kalan lineer programlama problemi çözülür. Çözüm tam sayılı değilse kesirli bir $x_k = t$ değişkeni seçilir ve problem iki alt probleme ayrılır: birine $x_k \leq \lfloor t \rfloor$, diğerine $x_k \geq \lfloor t \rfloor + 1$ kısıtı eklenir. Aradaki $\lfloor t \rfloor < x_k < \lfloor t \rfloor + 1$ şeridinde tam sayılı nokta bulunmadığından hiçbir tam sayılı çözüm kaybolmaz. Tam sayılı çözüm veren alt problemler **aday çözümdür** ve en iyi adayın değeri optimum için bir alt sınırdır (A.S). Budama kuralları bölümdeki gibidir: rahatlatılmış değeri A.S'yi aşmayan (D1), uygun çözümü olmayan (D2) ya da tam sayılı çözüm veren (D3) alt problem bir daha dallandırılmaz.
Alt Problem 1. Tam sayı koşulu olmadan problemi grafik yöntemle çözelim. $6x_1 + 2x_2 = 19$ doğrusu $\left(\frac{19}{6}, 0\right)$ ve $\left(0, \frac{19}{2}\right)$'den, $2x_1 + 3x_2 = 13$ doğrusu $\left(\frac{13}{2}, 0\right)$ ve $\left(0, \frac{13}{3}\right)$'ten geçer; $O(0,0)$ iki kısıtı da sağladığından uygun taraflar O'nun bulunduğu taraflardır. İki doğrunun kesişimini bulmak için ikinci denklemi 3 ile çarpıp birinciyi çıkaralım:

$$(6x_1 + 9x_2) - (6x_1 + 2x_2) = 39 - 19 \Rightarrow 7x_2 = 20 \Rightarrow x_2 = \frac{20}{7},$$

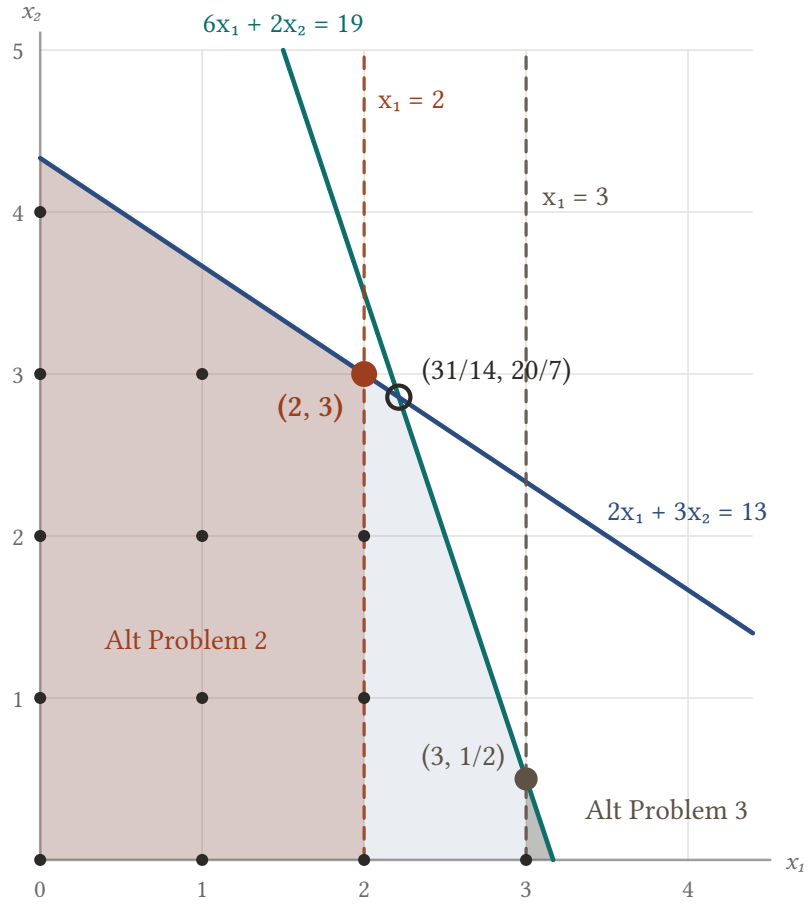
ve $2x_1 = 13 - \frac{60}{7} = \frac{31}{7}$, yani $x_1 = \frac{31}{14}$. Uygun bölgenin köşeleri ve amaç değerleri:

$$(0,0) : z = 0, \qquad \left(\frac{19}{6}, 0\right) : z = \frac{95}{6},$$
$$\left(\frac{31}{14}, \frac{20}{7}\right) : z = \frac{155}{14} + \frac{160}{14} = \frac{45}{2}, \left(0, \frac{13}{3}\right) : z = \frac{52}{3}.$$

Maksimum değer $\left(\frac{31}{14}, \frac{20}{7}\right)$ noktasındaki $z = \frac{45}{2} = 22{,}5$'tir. Tam sayı koşulu eklenince uygun küme küçülür; bu yüzden aradığımız tam sayılı optimum 22,5'i aşamaz. **Üst sınır** 22,5'tir.
Dallanma. $x_1 = \frac{31}{14} \approx 2{,}21$ tam sayı değildir ve $2 < x_1 < 3$'tür. İki alt problem kurulur:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\text{Alt Problem } 2 = \text{Alt Problem } 1 \cup \{x_1 \leq 2\},$$
$$\text{Alt Problem } 3 = \text{Alt Problem } 1 \cup \{x_1 \geq 3\}.$$



Şekil 14.4: Alt Problem 1'in (tam sayı koşulsuz problemin) uygun bölgesi dörtgendir ve LP optimumu (31/14, 20/7) noktasındadır. $x_1 \leq 2$ ve $x_1 \geq 3$ dalları bölgenin iki şeridini ayırır; aradaki $2 < x_1 < 3$ şeridinde hiç tam sayılı nokta yoktur. Alt Problem 2'nin optimumu (2, 3), Alt Problem 3'ünkü (3, 1/2) noktasıdır. Küçük noktalar bölgedeki tam sayılı noktalardır.

Alt Problem 2. Kısıtlar $6x_1 + 2x_2 \leq 19$, $2x_1 + 3x_2 \leq 13$, $x_1 \leq 2$, $x_1, x_2 \geq 0$'dır. $x_1 = 2$ doğrusu $2x_1 + 3x_2 = 13$ doğrusunu $x_2 = 3$'te keser ve bu nokta birinci kısıtı sağlar: $12 + 6 = 18 \leq 19$. Köşeler ve amaç değerleri:

$$(0,0) : z = 0, \quad (2,0) : z = 10, \quad (2,3) : z = 22, \quad \left(0, \frac{13}{3}\right) : z = \frac{52}{3}.$$

Optimal çözüm $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $\max z = 22$'dir. Bütün değişkenler tam sayı olduğundan bu bir **aday çözümdür**; artık tam sayılı optimumun 22'den küçük olmadığını biliyoruz: A.S $= 22$. Bu alt problem D3 kuralıyla budanır, yani daha fazla dallandırılmaz.

Alt Problem 3. Kısıtlara $x_1 \geq 3$ eklenir. $x_1 = 3$ doğrusu $6x_1 + 2x_2 = 19$ doğrusunu $x_2 = \frac{1}{2}$'de keser $(2 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5 \leq 13)$. Uygun bölge köşeleri $(3,0)$, $\left(\frac{19}{6}, 0\right)$, $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ olan küçük bir üçgendir:

$$(3,0) : z = 15, \quad \left(\frac{19}{6}, 0\right) : z = \frac{95}{6}, \quad \left(3, \frac{1}{2}\right) : z = 17.$$

Optimal çözüm $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $\max z = 17$'dir ve x_2 tam sayı değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Burada bir sınır gözlemi yapabiliriz: bu dalın bütün tam sayılı çözümleri Alt Problem 3′ün uygun bölgesindedir, dolayısıyla değerleri 17'yi aşamaz. Elimizde zaten 22 değerli bir aday olduğundan bu dal 22'den iyi bir çözüm veremez: $17 \leq \text{A.S} = 22$ olduğu için Alt Problem 3 D1 kuralıyla burada budanabilir. Yöntemin bütün adımlarını görmek için dalı yine de sonuna kadar açalım; sonucun değişmediğini göreceğiz.
$0 < x_2 = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan

$$\text{Alt Problem } 4 = \text{Alt Problem } 3 \cup \{x_2 \leq 0\},$$
$$\text{Alt Problem } 5 = \text{Alt Problem } 3 \cup \{x_2 \geq 1\}$$

kurulur.
Alt Problem 5. Alt Problem 3′te $x_1 \geq 3$ ve $6x_1 + 2x_2 \leq 19$ olduğundan $2x_2 \leq 19 - 18 = 1$, yani $x_2 \leq \frac{1}{2}$'dir. $x_2 \geq 1$ ile $x_2 \leq \frac{1}{2}$'nin ortak noktası yoktur. Alt Problem 5′in uygun çözümü yoktur ve D2 kuralıyla budanır.
Alt Problem 4. $x_2 \leq 0$ ile $x_2 \geq 0$ birlikte $x_2 = 0$ verir. Uygun küme x_1 ekseni üzerinde $3 \leq x_1 \leq \frac{19}{6}$ doğru parçasıdır ve uç noktaları $(3,0)$ ile $\left(\frac{19}{6}, 0\right)$'dır:

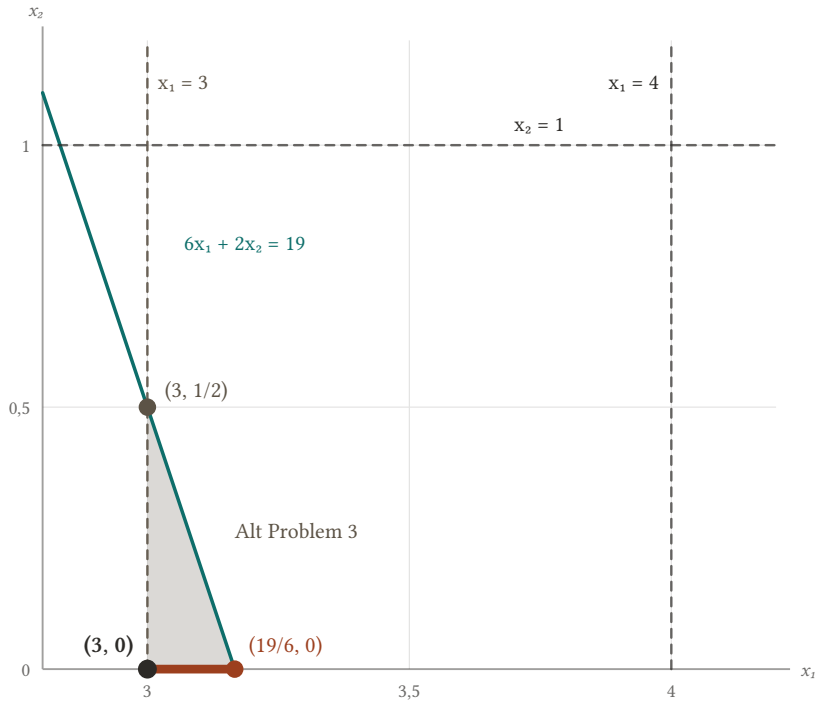
$$(3,0) : z = 15, \qquad \left(\frac{19}{6}, 0\right) : z = \frac{95}{6} \approx 15{,}83.$$

Optimal çözüm $x_1 = \frac{19}{6}$, $x_2 = 0$, $\max z = \frac{95}{6}$'dır; x_1 tam sayı olmadığından bu bir aday değildir. $\frac{95}{6} \leq 22$ olduğundan bu alt problem de D1 ile budanabilirdi; dallandırmayı sürdürelim. $3 < x_1 = \frac{19}{6} < 4$ olduğundan

$$\text{Alt Problem } 6 = \text{Alt Problem } 4 \cup \{x_1 \leq 3\},$$
$$\text{Alt Problem } 7 = \text{Alt Problem } 4 \cup \{x_1 \geq 4\}$$

kurulur.
Alt Problem 6. Doğru parçasının $x_1 \leq 3$ ile kesişimi yalnız $(3,0)$ noktasıdır. $x_1 = 3$ ve $x_2 = 0$ tam sayılardır; Alt Problem 6 bir aday çözüm verir: $\max z = 15$. Bu değer A.S'yi büyütmez; alt sınır 22 olarak kalır.
Alt Problem 7. Alt Problem 4′te x_1 en fazla $\frac{19}{6}$ olur; $x_1 \geq 4$ ile $x_1 \leq \frac{19}{6}$'nın ortak noktası yoktur. Alt Problem 7′nin uygun çözümü yoktur ve D2 kuralıyla budanır.

 CC BY-NC-SA 4.0



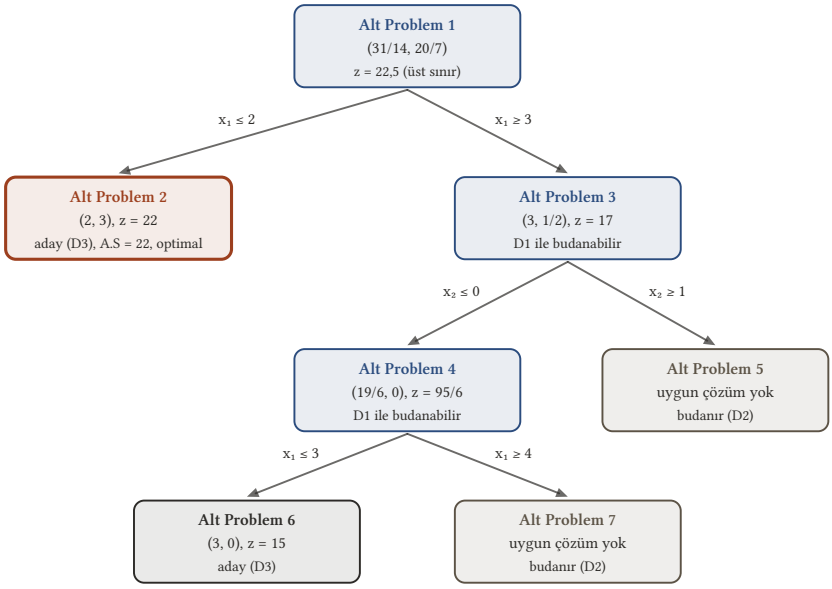
Şekil 14.5: Alt Problem 3'ün uygun bölgesi (3, 0), (19/6, 0), (3, 1/2) köşeli küçük üçgendir. $x_2 \geq 1$ yarı düzlemi bu üçgene değmez (Alt Problem 5 uygun değildir); $x_2 \leq 0$ ile kesişimi kalın çizilen doğru parçasıdır (Alt Problem 4). Bu parçanın $x_1 \leq 3$ ile kesişimi yalnız (3, 0) noktasıdır (Alt Problem 6), $x_1 \geq 4$ ile kesişimi boştur (Alt Problem 7).

Sonuç. Bütün dallar kapandı. Aday çözümler Alt Problem 2 ($z = 22$) ve Alt Problem 6 ($z = 15$)'dır; ikisi de üst sınır 22,5'ten küçüktür. Maksimum aradığımız için adaylar arasında en büyük değeri veren Alt Problem 2 seçilir. Optimal çözüm

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \qquad \max z = 22$$

dir. Bütün alt problemler aşağıdaki ağaçta toplanmıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.6: Dal-sınır ağacı. Her kutuda alt problemin LP optimumu, amaç değeri ve budama kuralı yazılıdır; oklar eklenen dal kısıtını gösterir. Alt Problem 3 ve 4, değerleri A.S = 22'yi aşmadığı için D1 ile budanabilirdi; yöntemin adımlarını göstermek için dallandırıldılar. Aday çözümler Alt Problem 2 (z = 22) ve Alt Problem 6 (z = 15)'dır; en büyüğü Alt Problem 2'nin (2, 3) çözümüdür.

Tam sayılı x_1, x_2 için $z = 5x_1 + 4x_2$ de tam sayıdır. $z \le 22{,}5$ olduğundan tam sayılı çözümlerde $z \le 22$'dir; Alt Problem 2'de 22 bulunduğu anda optimum aslında belli olmuştu.
Sağlama. Bölgedeki tam sayılı noktaları x_1'e göre tarayalım. $6x_1 \le 19$ olduğundan $x_1 \le 3$'tür. Her x_1 için en büyük tam sayı x_2 şöyledir: $x_1 = 0$ için $3x_2 \le 13$ ve $x_2 \le 4$, $z = 16$; $x_1 = 1$ için $2x_2 \le 13$ ve $3x_2 \le 11$, yani $x_2 \le 3$ ve $z = 17$; $x_1 = 2$ için $2x_2 \le 7$ ve $3x_2 \le 9$, yani $x_2 \le 3$ ve $z = 22$; $x_1 = 3$ için $2x_2 \le 1$, yani $x_2 = 0$ ve $z = 15$. En büyük değer gerçekten $(2, 3)$'teki 22'dir.
■

Bu alıştırmalarla kitabın bütün yöntemleri bir kez daha, baştan sona uygulanmış oldu. Konuların listesine ve bölümlere Müfredat ve Giriş sayfasından dönebilirsiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

15. Uygulamalı Özet

Bu sayfa kitabın yöntemlerini ispatsız, soru çözmeye dönük bir kopya kâğıdı olarak toplar. Uygulama sorularının çoğu "şu durumu modelleyiniz", "bütün temel çözümleri bulunuz", "grafik yöntemle çözünüz", "simpleks yöntemle çözünüz" ya da "dualini yazınız" biçimindedir. Sayfa, bu soru tiplerinin her biri için adım adım bir çözüm algoritması verir. Tek bir örnek problemi modelden grafiğe ve optimal tabloya kadar izleyeceğiz; simpleks kısmının sonunda kendi problemini tablo tablo çözen bir hesaplayıcı da var. Her kural, ayrıntısının ve gerekçesinin bulunduğu bölüme bağlanır.

15.1 Soru Tipine Göre Yöntem

Bir soruyu okuyunca ilk iş, hangi yöntemin istendiğini ya da hangisinin en kısa yol olduğunu belirlemektir. Aşağıdaki tablo soru kalıplarını yöntemlerle eşleştirir.

Tablo 15.1: Soru kalıpları ve yöntemler

Soruda istenen	Kullanılacak yöntem	Bu sayfada
Sözel bir durumu lineer programlama problemi olarak yaz	Model kurma	Bölüm 15.2
Problemi kanonik ya da standart forma getir	Dönüştürme kuralları	Bölüm 15.3, Bölüm 15.4
Bütün temel çözümleri bul, optimal olanı seç	Tablo yöntemi: $C(n, m)$ seçimi tek tek dene	Bölüm 15.5
İki değişkenli problemi grafikle çöz	Grafik yöntem: aday köşe noktalarını karşılaştır	Bölüm 15.6
Simpleks yöntemle çöz; kısıtlar $\leq$, sağ taraflar ≥ 0	Doğrudan simpleks	Bölüm 15.8, Bölüm 15.9
Simpleks yöntemle çöz; $\geq$ ya da $=$ kısıt var	Büyük M ya da iki faz yöntemi	Bölüm 15.11
Dualini yaz, dual çözümü bul	Dual yazma, optimal tablodan okuma	Bölüm 15.12
Sağ tarafı negatif ama kriterleri optimal bir tablo	Dual simpleks algoritması	Bölüm 15.13
Bir katsayı ya da sağ taraf hangi aralıkta değişebilir?	Duyarlılık analizi	Bölüm 15.14
Değişkenler tam sayı olmalı	Dal-sınır yöntemi	Bölüm 15.15

15.2 Model Kurma

Sözel bir problemden model kurmak, bütün çözümün temelidir; model yanlışsa sonraki hesapların hepsi boşa gider. Kitaptaki reçeteye (Bölüm 1.3) pratik bir ön adım ekleyerek şöyle çalışırız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Beş adımda model kurma

1. **Verileri tabloya diz.** Satırlara kaynakları ya da gereksinimleri, sütunlara ürünleri yaz; en sağa kapasiteyi ya da gereksinimi, en alta birim kâr ya da maliyeti koy.
2. **Karar değişkenlerini birimleriyle tanımla:** "x_1: günde üretilen A miktarı (birim)" gibi. Tablonun her sütunu bir değişkendir.
3. **Kısıtları yaz.** Tablonun her satırı bir kısıttır: satırdaki katsayılar ile değişkenlerin çarpımlarının toplamı, satırın sonundaki sayıyla karşılaştırılır. Karşılaştırmanın yönünü aşağıdaki sözlükten oku; iki yanın birimi aynı olmalıdır.
4. **İşaret koşullarını ekle:** $x_j \geq 0$.
5. **Amacı yaz:** en alttaki satır amaç fonksiyonudur; kâr ise max, maliyet ise min.

Soru metnindeki kalıpların matematik karşılıkları şöyledir:

Tablo 15.2: Sözel ifadeler ve kısıtlar

Soruda geçen ifade	Matematik karşılığı
"en az a", "a'dan az olmamalı", "gereksinim a"	$\ldots \geq a$
"en çok a", "en fazla", "geçmemeli", "aşmamalı", "kapasite a"	$\ldots \leq a$
"tam olarak a", "tamamı kullanılmalı"	$\ldots = a$
"x_1, x_2'nin en az iki katı olmalı"	$x_1 \geq 2x_2$, yani $x_1 - 2x_2 \geq 0$
"x_1, toplamın en çok %40'ı olmalı"	$x_1 \leq 0{,}4(x_1 + x_2)$, yani $0{,}6x_1 - 0{,}4x_2 \leq 0$
"kâr, gelir en büyük olsun"	$\max z$
"maliyet, süre en küçük olsun", "en ucuz"	$\min z$
"adet", "kişi", "araç" gibi bölünemeyen miktarlar	tam sayı koşulu: dal-sınır yöntemi

Oran içeren kısıtlarda değişkenleri hep sol tarafa toplayıp sağ tarafı sabit bırakırız; aksi hâlde standart forma geçerken karışıklık çıkar.

Örnek 15.1 (Atölye problemi). Bir atölye A ve B ürünlerini üretiyor. Bir birim A için 1 saat makine ve 1 saat işçilik, bir birim B için 1 saat makine ve 3 saat işçilik gerekiyor. Günde en çok 4 saat makine ve 6 saat işçilik kullanılabiliyor. Bir birim A'dan 2 TL, bir birim B'den 3 TL kâr ediliyor. Günlük kârı en büyük yapacak üretim miktarlarını bulmak için problemi bir lineer programlama problemi olarak ifade ediniz.

Çözüm.
Veri tablosu. Kaynaklar satırlara, ürünler sütunlara yazılır:

	A	B	Kapasite
Makine (saat)	1	1	4
İşçilik (saat)	1	3	6
Kâr (TL)	2	3	

Karar değişkenleri. x_1: günde üretilen A miktarı (birim), x_2: günde üretilen B miktarı (birim).
Kısıtlar. Makine satırı: harcanan makine saati $x_1 + x_2$'dir ve "en çok 4" olmalıdır. İşçilik satırı: $x_1 + 3x_2$, "en çok 6" olmalıdır. Üretim negatif olamaz.
Amaç. Kâr satırı $2x_1 + 3x_2$'dir ve en büyük yapılmak isteniyor. Model:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\le 4 \\
x_1 + 3x_2 &\le 6 \\
x_1, x_2 &\ge 0 \\
\max z &= 2x_1 + 3x_2
\end{aligned}
$$

Bu problemi sayfa boyunca önce tablo yöntemiyle, sonra grafik yöntemle çözeceğiz; simpleks hesaplayıcının ilk hazır örneği de budur. ■

15.3 Hangi Forma Getiriyorum?

Üç formu birbirinden ayıran şey, her birinin probleme **neye baktığıdır**. Kanonik form eşitsizliklerin yönüne, standart form eşitliklere ve sağ tarafların işaretine, simpleks yöntem ile çözülebilir hal ise bir birim matrisin varlığına bakar. Tanımlar için bkz. Tanım 1.6, Tanım 1.7 ve Tanım 1.9; ayrıntılı karşılaştırma için bkz. Tablo 1.2.
Pratikte her kısıta tek tek bakıp aşağıdaki tablodan ne yapılacağını okuruz. Sağ tarafı negatif bir kısıt varsa önce son satır uygulanır; kısıtın yönü döner ve kısıt, yeni yönüne karşılık gelen satıra göre işlenir.

Tablo 15.3: Kısıt türüne göre yapılacaklar

Kısıt	Kanonik form (max)	Kanonik form (min)	Standart form	Çözülebilir hal
$\le b_i$	aynen kalır	-1 ile çarp: $\ge -b_i$	aylak ekle: $+x_s$	aylak birim sütun verir, ek yok
$\ge b_i$	-1 ile çarp: $\le -b_i$	aynen kalır	artık çıkar: $-x_s$	yapay ekle: $+x_u$
$= b_i$	$\le b_i$ ve $\ge b_i$ diye ayır; $\ge$ olanı -1 ile çarp: $\le -b_i$	$\le b_i$ ve $\ge b_i$ diye ayır; $\le$ olanı -1 ile çarp: $\ge -b_i$	aynen kalır	yapay ekle: $+x_u$
$b_i < 0$	dokunma	dokunma	önce -1 ile çarp, yön döner	standart formdaki gibi

Amaç fonksiyonu için üç kural yeter:

- Aylak ve artık değişkenlerin amaç katsayısı 0'dır.
- Yapay değişkenin amaç katsayısı minimumda $+M$, maksimumda $-M$'dir (Tanım 1.10).
- Maksimum ile minimum arasında $\min z = -\max(-z)$ ile geçilir: amaç katsayılarının hepsi -1 ile çarpılır, kısıtlara dokunulmaz ve sonunda optimal değerin işareti geri çevrilir (Önerme 1.3).

Dual yazarken eşitlik ikiye ayrılmadan da bırakılabilir; o zaman karşılık gelen dual değişken işaretsiz olur (Önerme 11.1). Standart form için kanonik formdan geçmek gerekmez; eşitlikleri ikiye ayırmadan doğrudan standart forma geçmek daha kısadır. Kanonik form asıl olarak dual yazarken gerekir.

15.4 Değişken Kısıtları Tek Tabloda

Bütün yöntemler değişkenlerin ≥ 0 olmasını ister. $x_j \ge 0$ dışındaki her koşul, x_j yerine yeni bir değişken yazılarak bu kalıba getirilir. Aşağıdaki tablo İşaret kısıtlaması olmayan değişkenler ve Sınırlı değişkenler bölümlerindeki bütün durumları bir araya getirir (Tablo 9.1).

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 15.4: Değişken kısıtlarının dönüşümleri

Verilen koşul	Yerine yaz	Yeni koşul	Kısıtlara eklenen satır	Sonunda geri dönüş
$x_j \geq 0$	değişiklik yok	$x_j \geq 0$	yok	yok
$x_j \leq 0$	$x_j = -x'_j$	$x'_j \geq 0$	yok	$x_j = -x'_j$
işaretsiz	$x_j = x'_j - x''_j$	$x'_j, x''_j \geq 0$	yok	$x_j = x'_j - x''_j$
$x_j \geq d_j$	$x_j = x'_j + d_j$	$x'_j \geq 0$	yok	$x_j = x'_j + d_j$
$x_j \leq s_j$	$x_j = -x'_j + s_j$	$x'_j \geq 0$	yok	$x_j = s_j - x'_j$
$0 \leq x_j \leq s_j$	değişiklik yok	$x_j \geq 0$	$x_j \leq s_j$	yok
$d_j \leq x_j \leq s_j$	$x_j = x'_j + d_j$	$x'_j \geq 0$	$x'_j \leq s_j - d_j$	$x_j = x'_j + d_j$

Yani kural hep aynıdır: alt sınırı olan değişken alt sınırı kadar **ötelenir**, yalnız üst sınırı olan değişken üst sınırından geriye doğru **yansıtılır**, hiç sınırı olmayan değişken iki negatif olmayan değişkenin farkı olarak yazılır. Tablonun yanında şu üç noktayı unutmamak gerekir:

- **Sağ taraflar değişir.** Öteleme ve yansıtmada sabit terimler sağ tarafa geçer. Sağ taraf negatif çıkarsa kısıt -1 ile çarpılır ve yönü döner (Tablo 15.3).
- **Amaçta sabit belirir.** Amaç $z = z' + k$ biçimine gelir. Tabloya yalnız z''nün katsayıları yazılır ve asıl optimal değer sonunda $z_0 + k$ olarak hesaplanır.
- **İşaretsiz değişken iki zıt sütun verir.** $x_j = x'_j - x''_j$ dönüşümünde $v''_j = -v'_j$ ve $c''_j = -c'_j$'dür. Her tabloda bu iki sütun birbirinin negatifidir ve ikisi aynı anda bazda bulunmaz (Önerme 8.2).

Örnek 15.2 (Üç farklı değişken kısıtını birlikte dönüştürmek). $x_1 \geq 2$, x_2 işaretsiz ve $1 \leq x_3 \leq 5$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\geq 1 \\ \max z &= 3x_1 + x_2 - 2x_3 \end{aligned}$$

problemini bütün değişkenleri ≥ 0 olan ve simpleks yöntem ile çözülebilir halde olan bir probleme dönüştürünüz.

Çözüm.
Dönüşümler. Değişken kısıtları tablosuna (Tablo 15.4) göre üç değişken üç farklı satıra girer:

- $x_1 \geq 2$ alttan sınırlıdır: $x_1 = x'_1 + 2$, $x'_1 \geq 0$.
- x_2 işaretsizdir: $x_2 = x'_2 - x''_2$, $x'_2, x''_2 \geq 0$.
- $1 \leq x_3 \leq 5$ iki yanlı sınırlıdır: $x_3 = x'_3 + 1$, $x'_3 \geq 0$ ve üst sınır $x'_3 \leq 5 - 1 = 4$ satırı olarak eklenir.

Kısıtlar. Yerine koyup sabitleri sağa atalım. Birinci kısıt

$$\begin{aligned} &(x'_1 + 2) + 2(x'_2 - x''_2) + (x'_3 + 1) \leq 8 \\ \Rightarrow\quad &x'_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + x'_3 \leq 5 \end{aligned}$$

olur. İkinci kısıt

$$\begin{aligned} &2(x'_1 + 2) - (x'_2 - x''_2) + (x'_3 + 1) \geq 1 \\ \Rightarrow\quad &2x'_1 - x'_2 + x''_2 + x'_3 \geq -4 \end{aligned}$$

olur. Sağ taraf negatif çıktığı için iki yanı -1 ile çarparız ve yön döner:

$$-2x'_1 + x'_2 - x''_2 - x'_3 \leq 4.$$

Amaç. Amaç fonksiyonunda da yerine koyalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} z &= 3(x_1' + 2) + (x_2' - x_2'') - 2(x_3' + 1) \\ &= 3x_1' + x_2' - x_2'' - 2x_3' + 4. \end{aligned}$$

Sabit 4 tabloya girmez: $z = z' + 4$.
Sonuç. Üç kısıt da $\leq$ biçiminde ve sağ tarafları negatif olmadığı için aylak değişkenler x_4, x_5, x_6 bir birim matris verir; yapay değişkene gerek yoktur:

$$\begin{aligned} x_1' + 2x_2' - 2x_2'' + x_3' + x_4 &= 5 \\ -2x_1' + x_2' - x_2'' - x_3' + x_5 &= 4 \\ x_3' + x_6 &= 4 \\ x_1', x_2', x_2'', x_3', x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \\ \max z' &= 3x_1' + x_2' - x_2'' - 2x_3' \end{aligned}$$

Simpleks yöntemin verdiği optimal çözümden $x_1 = x_1' + 2$, $x_2 = x_2' - x_2''$, $x_3 = x_3' + 1$ ile orijinal değişkenlere dönülür; optimal değer $z_0 + 4$'tür.
Dikkat edilirse ikinci kısıt başta $\geq$ idi ve yapay değişken gerektirecekti. Ötelemeden sonra sağ tarafı negatif çıktı, -1 ile çarpınca $\leq$ oldu ve yapay değişken gereği ortadan kalktı. ■

15.5 Bütün Temel Çözümler: Tablo Yöntemi

Standart formda m denklem ve n değişken varsa, $n - m$ değişken sıfırlanıp kalan kare sistem çözülerek bir temel çözüm bulunur (Tanım 2.3). Soru bütün temel çözümleri istiyorsa bütün seçimler bir tabloda denenir; optimal çözüm, uygun olanlar arasında amaç değeri en iyi olandır (Teorem 3.4).

Beş adımda tablo yöntemi

1. **Standart form.** Aylak ve artık değişkenleri ekle; m ve n'yi belirle.
2. **Seçimleri say.** Temel değişken olacak m değişkenin bütün seçimlerini sistemli sırayla yaz; en çok $C(n,m) = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ seçim vardır (Önerme 2.1).
3. **Determinant.** Her seçimde temel değişkenlerin sütunlarından oluşan kare matrisin Δ'sını hesapla. $\Delta = 0$ ise bu seçimden temel çözüm çıkmaz.
4. **Çöz ve sınıflandır.** $\Delta \neq 0$ ise diğer değişkenleri 0 alıp sistemi çöz. Negatif bileşen varsa çözüm uygun değildir; yoksa uygun temel çözümdür; bir temel değişken 0 çıkmışsa dejeneredir (Tanım 2.6).
5. **Optimum.** Yalnız uygun temel çözümlerde z'yi hesapla ve en iyisini seç.

Örnek 15.3 (Atölye probleminin bütün temel çözümleri). Atölye probleminin (Örnek 15.1) bütün temel çözümlerini bulunuz ve optimal çözümü belirleyiniz.

Çözüm.
Standart form. İki kısıta x_3 ve x_4 aylak değişkenleri eklenir:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

$m = 2$, $n = 4$ olduğundan her seçimde iki değişken sıfırlanır ve en çok $C(4,2) = 6$ seçim vardır.
Bir seçimin hesabı. Temel değişkenler x_1, x_2 olsun; $x_3 = x_4 = 0$ alınır:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = 6, \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

İkinci denklemden birinciyi çıkarınca $2x_2 = 2$, yani $x_2 = 1$ ve $x_1 = 3$ bulunur. Çözüm $(3, 1, 0, 0)$'dır; negatif bileşeni olmadığı için uygundur ve $z = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 9$'dur. Diğer beş seçim aynı yolla hesaplanır.

Tablo 15.5: Atölye probleminin temel çözümleri

Temel değişkenler	Δ	(x_1, x_2, x_3, x_4)	Uygun mu?	z
x_1, x_2	2	$(3, 1, 0, 0)$	evet	9
x_1, x_3	-1	$(6, 0, -2, 0)$	hayır	—
x_1, x_4	1	$(4, 0, 0, 2)$	evet	8
x_2, x_3	-3	$(0, 2, 2, 0)$	evet	6
x_2, x_4	1	$(0, 4, 0, -6)$	hayır	—
x_3, x_4	1	$(0, 0, 4, 6)$	evet	0

Sonuç. Altı temel çözümün dördü uygundur ve hiçbiri dejenere değildir. Uygun olanlar arasında en büyük değer $z = 9$'dur: optimal çözüm $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ ve $\max z = 9$'dur. Aylaklar $x_3 = x_4 = 0$ olduğundan makine ve işçilik saatlerinin hepsi kullanılır. ■

15.6 Grafik Yöntem ve Aday Köşe Noktaları

Uygun bölge boş değil ve sınırlıysa optimum bir köşede alınır (Teorem 3.1). Bölge sınırsızken optimum varsa yine bir köşededir, ama önce var olup olmadığı seviye doğrusuyla denetlenir. Bu yüzden grafik yöntemin özü, **aday noktaları**, yani uygun bölgenin köşelerini eksiksiz bulup amaç değerlerini karşılaştırmaktır. Uygun temel çözümler de tam olarak bu köşelerdir (Teorem 3.3); tablo yöntemindeki uygun satırlar, grafikte köşe olarak karşımıza çıkar.

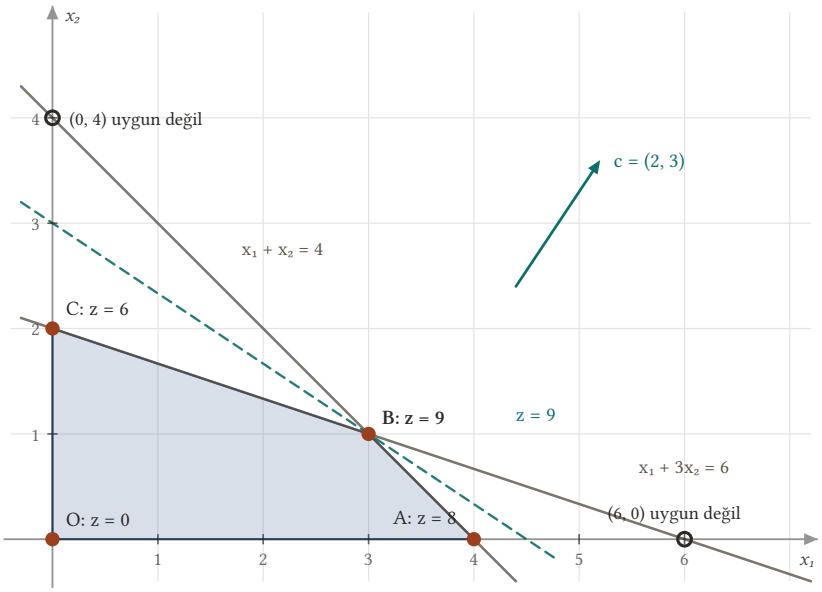
Altı adımda grafik yöntem

1. **Doğruları çiz.** Her kısıtı eşitlik olarak yaz ve doğruyu eksenleri kestiği iki noktadan çiz.
2. **Yarı düzlemi seç.** Doğru üzerinde olmayan bir test noktası (çoğunlukla $O(0,0)$) kısıtı sağlıyorsa o tarafı, sağlamıyorsa öbür tarafı al. $x_1, x_2 \geq 0$ birinci bölgeyi verir.
3. **Uygun bölgeyi tara.** Bütün yarı düzlemlerin ortak kısmıdır. Ortak kısım boşsa uygun çözüm yoktur; dur.
4. **Aday noktaları bul.** Bölgenin her köşesi iki sınır doğrusunun kesişimidir: iki denklemi çöz. Kesişim noktasının **bütün** kısıtları sağladığını kontrol et; sağlamayan kesişim bölgenin dışındadır ve aday değildir.
5. **Karşılaştır.** Her aday noktada z'yi hesapla ve tabloya yaz. Maksimumda en büyük, minimumda en küçük değer optimaldir.
6. **Seviye doğrusuyla doğrula.** $z = k$ doğrusunu maksimumda $\vec{c}$ yönünde, minimumda $-\vec{c}$ yönünde kaydır; bölgeye son değdiği nokta optimaldir. Bölge sınırsızsa köşe karşılaştırmasından önce bu adım zorunludur.

Örnek 15.4 (Atölye probleminin grafik çözümü). Atölye problemini (Örnek 15.1) grafik yöntemle çözünüz. Aday noktaları bir tabloda toplayınız ve sonucu tablo yöntemiyle karşılaştırınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.1: Grafik yöntem. Uygun bölge OABC dörtgenidir ve aday noktalar dört köşedir. Köşelerdeki z değerleri 0, 8, 9, 6 olduğundan optimum B(3, 1)'de, z = 9'dur. Kesikli seviye doğrusu $2x_1 + 3x_2 = 9$ bölgeye yalnız B'de değer. İçi boş iki nokta kısıt doğrularının bölge dışındaki kesişimleridir; bunlar uygun olmayan temel çözümlerdir.

Doğrular ve yarı düzlemler. $x_1 + x_2 = 4$ doğrusu $(4, 0)$ ve $(0, 4)$'ten, $x_1 + 3x_2 = 6$ doğrusu $(6, 0)$ ve $(0, 2)$'den geçer. $O(0, 0)$ iki kısıtı da sağladığından $(0 \le 4,\ 0 \le 6)$ iki doğrunun da orijin tarafı alınır.
Aday noktalar. Uygun bölgenin köşeleri eksenlerle ve iki doğruyla sınırlanan dört noktadır. B köşesi iki kısıt doğrusunun kesişimidir: denklemler taraf tarafa çıkarılınca $2x_2 = 2$, yani $x_2 = 1$, $x_1 = 3$ bulunur.

Tablo 15.6: Atölye probleminin aday noktaları

Aday nokta	Kesişen doğrular	$z = 2x_1 + 3x_2$
$O(0, 0)$	$x_1 = 0,\ x_2 = 0$	0
$A(4, 0)$	$x_2 = 0,\ x_1 + x_2 = 4$	8
$B(3, 1)$	$x_1 + x_2 = 4,\ x_1 + 3x_2 = 6$	9
$C(0, 2)$	$x_1 = 0,\ x_1 + 3x_2 = 6$	6

Aday olmayan kesişimler. $x_2 = 0$ ile $x_1 + 3x_2 = 6$ doğrusu $(6, 0)$'da kesişir, ama $6 + 0 = 6 > 4$ olduğundan bu nokta birinci kısıtı sağlamaz. Aynı biçimde $(0, 4)$ ikinci kısıtı sağlamaz: $0 + 12 = 12 > 6$. Bu iki nokta, tablo yönteminde uygun çıkmayan iki temel çözümdür (Tablo 15.5).
Sonuç. En büyük değer $B(3, 1)$'dedir: $\max z = 9$. Seviye doğrusu $2x_1 + 3x_2 = 9$, $\vec{c} = (2, 3)$ yönünde kaydırıldığında bölgeye son olarak B'de değer. Tablo yöntemi de aynı cevabı vermişti; dört aday nokta, dört uygun temel çözümün ilk iki bileşenidir. ■

Grafikte bazen tek bir optimal köşe yerine başka bir sonuç görülür. Dört durumu şöyle tanırız (Bölüm 3.3):

Tablo 15.7: Grafik yöntemde özel durumlar

Grafikte görülen	Sonuç
Yarı düzlemlerin ortak kısmı boş	Uygun çözüm yok
Seviye doğrusu optimal yönde bir kenarla çakışıyor	Alternatif optimal çözüm: kenarın bütün noktaları optimaldir
Bölge sınırsız ve seviye doğrusu iyileşme yönünde sonsuza kayabiliyor	Sınırsız çözüm
Bölge sınırsız ama seviye doğrusu bir köşede takılıyor	Optimum vardır ve o köşededir

15.7 Simpleks Tablosunun Okunuşu

Bütün simpleks tabloları aynı düzende yazılır (Bölüm 4.3). Sembollerle tablo şöyledir; v_k baza girecek vektördür.

Tablo 15.8: Simpleks tablosunun genel düzeni

		c_j	c_1	$\cdots$	c_n	
x_B	c_B	v_0	v_1	$\cdots$	v_n	Oran
x_{B_1}	c_{B_1}	y_{10}	y_{11}	$\cdots$	y_{1n}	y_{10}/y_{1k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	c_{B_m}	y_{m0}	y_{m1}	$\cdots$	y_{mn}	y_{m0}/y_{mk}
$z_j - c_j$		z_0	$z_1 - c_1$	$\cdots$	$z_n - c_n$	

Tablonun her parçası tek bir soruya cevap verir:

- **v_0 sütunu:** Şu anki çözüm nedir? Baz değişkenlerinin değerleri buradadır; bazda olmayan değişkenler 0'dır.
- **v_j sütunları:** v_j vektörü baz vektörleri cinsinden nasıl yazılır? Bazdaki vektörlerin sütunları birim vektördür.
- **Son satır:** Çözüm iyileşir mi? $z_j = \vec{c}_B^T \vec{y}_j$, yani c_B sütunu ile v_j sütununun karşılıklı çarpımlarının toplamıdır; ondan c_j çıkarılır. $z_0 = \vec{c}_B^T \vec{y}_0$ amaç değeridir. Bazdaki vektörlerin kriteri 0'dır.
- **Oran sütunu:** Hangi vektör bazdan çıkar? Yalnız $y_{ik} > 0$ olan satırlar için y_{i0}/y_{ik} yazılır, diğerlerine $-$ konur.

Pivot köşeli parantezle, bazdan çıkan satır $\Rightarrow$ ile, baza giren sütun $\Uparrow$ ile işaretlenir.

15.8 Giren, Çıkan ve Durma Kuralları

Maksimum ve minimum problemlerinde kurallar yalnız işaretlerde ayrılır. Yöntemin bütün adımları Simpleks yöntem bölümündeki yedi adımlık reçetededir (Bölüm 4.5).

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 15.9: Maksimum ve minimum problemlerinde seçim kuralları

	Maksimum	Minimum
Tablo optimaldir	bütün $z_j - c_j \geq 0$	bütün $z_j - c_j \leq 0$
Baza giren v_k	en negatif $z_j - c_j$	en büyük pozitif $z_j - c_j$
Bazdan çıkan v_r	$y_{ik} > 0$ olanlar arasında en küçük y_{i0}/y_{ik}	aynı
Yapay değişkenin amaç katsayısı	$-M$	$+M$
$aM + b$ biçimli kriterler	önce M'nin katsayısı, eşitse sabit terim karşılaştırılır	aynı

Tablo bazen normal bir optimumdan farklı bir şey söyler. Hangi belirtinin neyi gösterdiği aşağıda toplanmıştır.

Tablo 15.10: Özel durumların tablodaki belirtileri

Tabloda görülen	Anlamı	Ayrıntı
Giren v_k sütununda hiç pozitif eleman yok, bazda pozitif yapay değişken yok	Sınırsız çözüm: amaç sonsuza gider	Teorem 7.1
Optimal tabloda baz dışı bir v_k için $z_k - c_k = 0$	Alternatif optimal çözüm olabilir: v_k'yı baza al	Teorem 7.2
Optimal tabloda bazda pozitif değerli yapay değişken	Uygun çözüm yok	Teorem 5.2
v_0 sütununda 0 değerli baz değişkeni (oran testindeki eşitlik bunu doğurur)	Dejenere çözüm	Tanım 2.6
Bazda 0 değerli yapay değişken	Gerçek bir sütunla pivot yap; olmuyorsa satır gereksizdir	Önerme 5.3

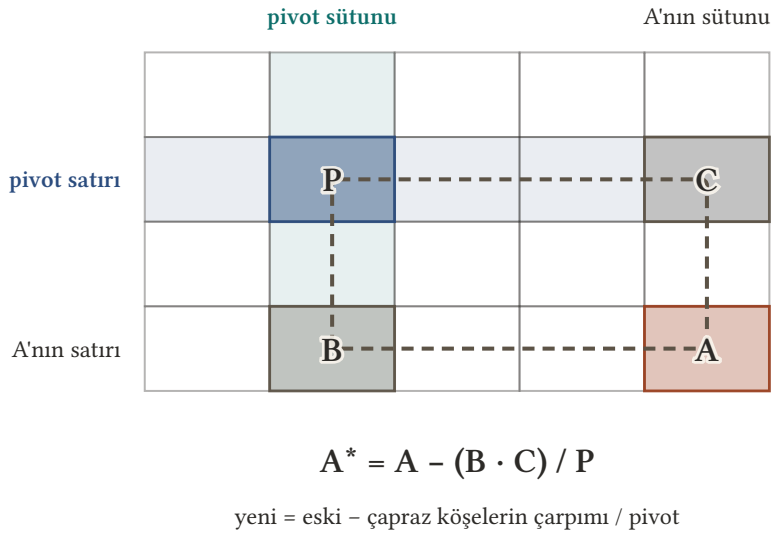
15.9 Yeni İterasyon Tablosu: Dikdörtgen Kuralı

Giren ve çıkan vektör belli olunca yeni tablonun bütün sayıları eski tablodan hesaplanır (Teorem 4.4). Elle hesapta en hızlı yol **dikdörtgen kuralıdır** ve aşağıdaki beş adımda uygulanır. Adımların sırası önemlidir: önce hiç hesap gerektirmeyen hücreler doldurulur, dikdörtgen kuralı yalnız geriye kalan hücrelere uygulanır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yeni tablo beş adımda

1. **Pivot satırı.** Pivot satırını pivota böl. Satırın adı baza giren x_k, c_B değeri de c_k olur.
2. **Pivot sütunu.** Pivot sütununu birim vektör yap: pivotun yerine 1, diğer bütün hücrelere ($z_k - c_k$ dahil) 0 yaz.
3. **Sıfır kısayolu.** Pivot sütununda 0 olan satırları ve pivot satırında 0 olan sütunları aynen kopyala. Bazda kalan vektörlerin birim sütunları bu yüzden hiç değişmez.
4. **Dikdörtgen kuralı.** Kalan her A hücresi için $A^* = A - \dfrac{B\,C}{P}$ hesapla. Burada P pivot, B hücrenin satırının pivot sütunundaki elemanı, C hücrenin sütununun pivot satırındaki elemanıdır. Kural v_0 sütununa ve $z_j - c_j$ satırına da uygulanır.
5. **Sağlama.** $z_0 = \vec{c}_B^{\,T}\vec{y}_0$ ve birkaç $z_j - c_j$ değerini yeni c_B sütunuyla yeniden hesapla. v_0 sütununda negatif sayı çıkmamalı, bazdaki vektörlerin kriteri 0 olmalıdır.



Şekil 15.2: Dikdörtgen kuralı. Güncellenecek A elemanı ile pivot P bir dikdörtgenin karşılıklı köşeleridir. Öbür iki köşe B (A'nın satırı ile pivot sütununun kesişimi) ve C (A'nın sütunu ile pivot satırının kesişimi) olur. Yeni değer A − BC/P'dir.

Kuralın içinde hatırlamayı kolaylaştıran üç gözlem var:

- $B = 0$ ya da $C = 0$ ise $BC/P = 0$ olur ve hücre değişmez. Üçüncü adımdaki sıfır kısayolu buradan gelir.
- Aynı satırdaki bütün hücrelerde B aynıdır ve C/P, yeni pivot satırındaki elemandır. Bu yüzden bir satırı tek hamlede de hesaplayabilirsin: **yeni satır = eski satır $-$ B $\times$ yeni pivot satırı**. Bu, Simpleks yöntem bölümündeki elemanter satır işlemleri yöntemidir; iki yol aynı sayıları verir.
- Pivot 1 ise kural $A^* = A - BC$'ye, ayrıca $B = -1$ ise $A^* = A + C$'ye iner.

Örnek 15.5 (Dikdörtgen kuralıyla iki iterasyon).

$$\begin{aligned} x_1 &\le 4 \\ 2x_2 &\le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \max z &= 3x_1 + 5x_2 \end{aligned}$$

problemini simpleks yöntemle çözünüz. Her yeni tabloyu beş adımlık reçeteyle, dikdörtgen kuralını yalnız gereken hücrelere uygulayarak hesaplayınız.

Çözüm.

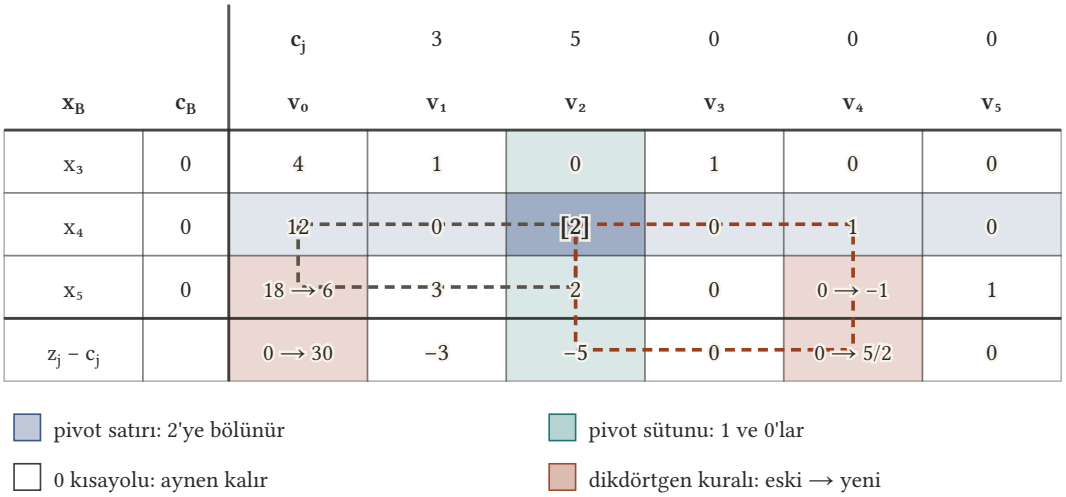
 CC BY-NC-SA 4.0

Başlangıç tablosu. Kısıtlar $\leq$ ve sağ taraflar negatif olmadığı için x_3, x_4, x_5 aylak değişkenleri bir birim matris verir. $\vec{c}_B = \vec{0}$ olduğundan $z_j - c_j = -c_j$'dir. Maksimum probleminde en negatif kriter -5'tir, v_2 baza girer. Oranlar $12/2 = 6$ ve $18/2 = 9$'dur; x_3 satırında v_2 elemanı 0 olduğundan o satıra $-$ yazılır. En küçük oran x_4 satırındadır: v_4 bazdan çıkar, pivot 2'dir.

Tablo 15.11: Başlangıç tablosu

		c_j	3	5	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_3	0	4	1	0	1	0	0	$-$
x_4	0	12	0	[2]	0	1	0	$\frac{12}{2} \Rightarrow$
x_5	0	18	3	2	0	0	1	$\frac{18}{2}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 0$	-3	$-5 \Uparrow$	0	0	0	

Birinci iterasyon. Aşağıdaki şekil başlangıç tablosunun her hücresini, yeni değerini bulmak için gereken işe göre boyuyor.



Şekil 15.3: Birinci iterasyonun haritası. Pivot 2'dir. Pivot sütununda 0 olan x_3 satırı ile pivot satırında 0 olan v_1, v_3, v_5 sütunları aynen kalır. Dikdörtgen kuralı yalnız dört hücreye uygulanır. Kesikli dikdörtgenler iki örneği gösteriyor: $18 - 2{\cdot}12/2 = 6$ ve $0 - (-5){\cdot}1/2 = 5/2$.

1. Pivot satırı 2'ye bölünür ve x_2 satırı olur ($c_B = 5$): $(6 \mid 0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0)$.
2. v_2 sütunu $(0, 1, 0)$ olur, kriteri 0'dır.
3. x_3 satırının pivot sütunundaki elemanı 0 olduğundan bu satır aynen kalır. Pivot satırında v_1, v_3, v_5 sütunlarının elemanı 0 olduğundan bu sütunlar da aynen kalır.
4. Geriye yalnız dört hücre kalır. x_5 satırında $B = 2$, $z_j - c_j$ satırında $B = -5$'tir; C değerleri pivot satırındaki 12 (v_0) ve 1 (v_4)'dir:

$$x_5, v_0 : 18 - \frac{2 \cdot 12}{2} = 6, \qquad x_5, v_4 : 0 - \frac{2 \cdot 1}{2} = -1,$$
$$z_0 : 0 - \frac{(-5) \cdot 12}{2} = 30, z_4 - c_4 : 0 - \frac{(-5) \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}.$$

5. Sağlama: $\vec{c}_B = (0, 5, 0)$ ile $z_0 = 5 \cdot 6 = 30$ ve $z_4 - c_4 = 5 \cdot \frac{1}{2} - 0 = \frac{5}{2}$.

 CC BY-NC-SA 4.0

En negatif kriter -3 olduğundan v_1 baza girer. Oranlar x_3 satırında $4/1 = 4$, x_5 satırında $6/3 = 2$'dir; x_2 satırının elemanı 0 olduğundan oran yazılmaz. v_5 bazdan çıkar, pivot 3'tür.

Tablo 15.12: Birinci iterasyon tablosu

		c_j	3	5	0	0	0	
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	Oran
x_3	0	4	1	0	1	0	0	$\frac{4}{1}$
x_2	5	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	—
x_5	0	6	[3]	0	0	-1	1	$\frac{6}{3} \Rightarrow$
$z_j - c_j$		$z_0 = 30$	$-3 \Uparrow$	0	0	$\frac{5}{2}$	0	

İkinci iterasyon. Aynı boyamayı birinci iterasyon tablosu için yapalım.

		c_j	3	5	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_3	0	4 → 2	1	0	1	0 → 1/3	0 → −1/3
x_2	5	6	0	1	0	1/2	0
x_5	0	6	[3]	0	0	−1	1
$z_j - c_j$		30 → 36	−3	0	0	5/2 → 3/2	0 → 1

pivot satırı: 3'ye bölünür — pivot sütunu: 1 ve 0'lar

0 kısayolu: aynen kalır — dikdörtgen kuralı: eski → yeni

Şekil 15.4: İkinci iterasyonun haritası. Pivot 3'tür. Pivot sütununda 0 olan x_2 satırı ile pivot satırında 0 olan v_2, v_3 sütunları aynen kalır ve altı hücre dikdörtgen kuralıyla bulunur. İki örnek: $4 - 1{\cdot}6/3 = 2$ ve $5/2 - (-3)(-1)/3 = 3/2$.

1. Pivot satırı 3'e bölünür ve x_1 satırı olur ($c_B = 3$): $(2 \mid 1, 0, 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
2. v_1 sütunu $(0, 0, 1)$ olur, kriteri 0'dır.
3. x_2 satırının pivot sütunundaki elemanı 0 olduğundan bu satır aynen kalır. Pivot satırında v_2 ve v_3 sütunlarının elemanı 0 olduğundan bu sütunlar da aynen kalır.
4. Geriye altı hücre kalır. x_3 satırında $B = 1$, $z_j - c_j$ satırında $B = -3$'tür; C değerleri pivot satırındaki 6, -1 ve 1'dir:

$$x_3, v_0 : 4 - \frac{1 \cdot 6}{3} = 2, \qquad z_0 : 30 - \frac{(-3) \cdot 6}{3} = 36,$$
$$x_3, v_4 : 0 - \frac{1 \cdot (-1)}{3} = \frac{1}{3}, z_4 - c_4 : \frac{5}{2} - \frac{(-3)(-1)}{3} = \frac{3}{2},$$
$$x_3, v_5 : 0 - \frac{1 \cdot 1}{3} = -\frac{1}{3}, \quad z_5 - c_5 : 0 - \frac{(-3) \cdot 1}{3} = 1.$$

5. Sağlama: $\vec{c}_B = (0, 5, 3)$ ile $z_0 = 5 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 36$, $z_4 - c_4 = 5 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$, $z_5 - c_5 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 15.13: İkinci iterasyon tablosu (optimal tablo)

		c_j	3	5	0	0	0
x_B	c_B	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_3	0	2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	5	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
x_1	3	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$z_j - c_j$		$z_0 = 36$	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1

Bütün $z_j - c_j \geq 0$ olduğundan tablo optimaldir. Optimal çözüm $x_1 = 2, x_2 = 6$ ve $\max z = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 36$'dır. Aylak $x_3 = 2$, birinci kısıtta 2 birim boşluk kaldığını söyler; ikinci ve üçüncü kısıtlar tam sağlanır.
İki iterasyonda tablonun $4 \cdot 6 = 24$ sayısal hücresinden yalnız 4 ve 6 tanesi gerçek hesap istedi; geri kalanlar bölme, birim sütun ya da kopyalamayla doldu. ■

15.10 Simpleks Hesaplayıcı

Aşağıdaki hesaplayıcı bir problemi kitabın tablo düzeninde adım adım çözer. Her tabloda pivotu köşeli parantezle, bazdan çıkan satırı ⇒ ile, baza giren sütunu ⇑ ile işaretler; her iterasyonun altına giren ve çıkan vektörün neden seçildiğini yazar. Kesirlerle tam hesap yapar, ondalığa yuvarlamaz. $\geq$ ve $=$ kısıtlarında Büyük M yöntemini kullanır ve bazdan çıkan yapay değişkenin sütununu sonraki tablolarda yazmaz (Bölüm 15.11).
Hesaplayıcıyı kendi çözümünü tablo tablo karşılaştırmak için kullan. Bir tabloda fark bulursan hatayı o iterasyonun dikdörtgen hesabında ara. Üç noktaya dikkat:

- Bütün değişkenler ≥ 0 kabul edilir. Başka bir değişken kısıtı varsa problemi önce Tablo 15.4 ile dönüştür.
- Katsayılar tam sayı (-3), kesir $(3/4)$ ya da ondalık $(0{,}5)$ olarak yazılabilir.
- Kriterlerde ya da oranlarda eşitlik olursa hesaplayıcı soldaki sütunu ve üstteki satırı seçer. Elle çözümde öbür seçim de doğrudur; ara tablolar farklı çıkabilir ama optimal değer aynıdır.

(Bu etkileşimli bileşen yalnızca web sürümünde çalışır.)

15.11 Başlangıç Bazı Yoksa: Büyük M mi, İki Faz mı?

Kısıtlarda $\geq$ ya da $=$ varsa standart form birim matris içermeyebilir ve yapay değişken eklenir. Bundan sonra iki yol vardır; ikisi de aynı tabloları farklı bir amaçla yürütür. Büyük M yönteminde başlangıç tablosu şöyle kurulur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Beş adımda Büyük M başlangıç tablosu

1. **Standart form.** Sağ tarafı negatif satırı -1 ile çarp; $\leq$ kısıta aylak ekle, $\geq$ kısıttan artık çıkar.
2. **Yapaylar.** Birim sütunu olmayan her satıra ($\geq$ ve $=$ satırları) bir yapay değişken ekle; amaç katsayısı minimumda $+M$, maksimumda $-M$'dir.
3. **Başlangıç bazı.** $\leq$ satırlarında aylak, diğer satırlarda yapay değişken bazdadır; c_B sütununa bunların katsayıları (0 ya da $\pm M$) yazılır.
4. **Son satır kısayolu.** Aylakların maliyeti 0 olduğundan yalnız yapaylı satırlar katkı verir: her sütun için

$$z_j - c_j = \pm M \cdot (\text{yapaylı satırlardaki elemanlar toplamı}) - c_j,$$
$$z_0 = \pm M \cdot (\text{yapaylı satırların sağ tarafları toplamı});$$

   işaret minimumda $+$, maksimumda $-$'dir.
5. **İterasyonlar.** Kriterleri önce M'nin katsayısına göre karşılaştır; bazdan çıkan yapayın sütununu sil. Optimal tabloda bazda pozitif bir yapay kaldıysa uygun çözüm yoktur.

Örneğin minimum probleminde tek yapaylı satır $(2 \mid 2, 1, -1, 0, 0)$ ve $c_1 = -3$, $c_2 = 1$ ise kriterler $z_1 - c_1 = 2M + 3$, $z_2 - c_2 = M - 1$, $z_3 - c_3 = -M$ ve $z_0 = 2M$'dir; Tablo 5.1 ile karşılaştır.

Tablo 15.14: Büyük M ve iki faz yöntemlerinin karşılaştırması

	Büyük M yöntemi	İki faz yöntemi
Amaç	Orijinal amaç ve yapaylar için $+M$ (min) ya da $-M$ (max)	1. faz: $\min g = \sum x_{u_i}$ (max'ta $\max g = -\sum x_{u_i}$); 2. faz: orijinal amaç
Kriterler	$aM + b$ biçiminde; önce M'nin katsayısı karşılaştırılır	Sayı; 1. fazda yapayların katsayısı ± 1
Bazdan çıkan yapay	Sütunu sonraki tablolarda yazılmaz	Sütunu atılır
Uygun çözüm yok	Optimal tabloda bazda pozitif yapay değişken kalır	1. fazın sonunda $g \neq 0$
Bazda 0 değerli yapay	Gerçek bir sütundaki sıfır olmayan elemanla pivot yap; hepsi sıfırsa satır gereksizdir, silinir	Aynı; sonra 2. faza geçilir
Geçiş	Yok, tek aşama	1. fazın optimal tablosunda c_j satırı ve c_B sütunu orijinal katsayılarla değiştirilir, son satır yeniden hesaplanır

Yani iki faz yöntemi, Büyük M yöntemindeki "M çok büyük" fikrini iki aşamaya böler: önce yalnız M'li kısım en iyilenir, sonra sabit kısım (Önerme 6.4). Elle hesapta M'li ifadelerle uğraşmak istemiyorsan iki faz yöntemini seç.

15.12 Dual Problemi Yazmak

Dual, kanonik formdaki primalin katsayı tablosunun sütun sütun okunmasıdır (Tanım 11.1). Primal maksimum problemiyse karşılıklar aşağıdaki gibidir; primal minimumsa bütün eşitsizlik yönleri ters döner.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 15.15: Primal ile dual arasındaki karşılıklar

Maksimum primal	Minimum dual
m kısıt, n değişken	n kısıt, m değişken
i. kısıt $\leq b_i$	$y_i \geq 0$
i. kısıt $\geq b_i$	önce -1 ile çarp ($\leq -b_i$), sonra $y_i \geq 0$
i. kısıt $= b_i$	y_i işaretsiz (Önerme 11.1)
$x_j \geq 0$	j. dual kısıt $a_{1j}y_1 + \ldots + a_{mj}y_m \geq c_j$
x_j işaretsiz	j. dual kısıt eşitlik: $\ldots = c_j$ (Önerme 11.1)
$x_j \leq 0$	önce $x_j = -x'_j$ yaz, sonra tanımı uygula
Amaç katsayıları c_j	Dual kısıtların sağ tarafları
Sağ taraflar b_i	Dual amacın katsayıları: $\min g = b_1y_1 + \ldots + b_my_m$

Sağ tarafları negatif olmayan bir problemde primalin optimal tablosu dualin çözümünü de verir (Önerme 11.2). Primal maksimumsa i. kısıtın dual değişkeni, o kısıtın aylak sütununun kriteridir: $y_i^* = z_{n+i} - c_{n+i}$. Primal minimumsa dual değişken, artık sütununun kriterinin negatifidir: $y_i^* = -(z_{n+i} - c_{n+i})$. Güçlü dualite gereği iki optimal değer eşittir (Teorem 11.3).

Örnek 15.6 (Dual çözümü optimal tablodan okumak). Dikdörtgen kuralı örneğindeki (Örnek 15.5) problemin dualini yazınız ve dual optimal çözümü o örneğin optimal tablosundan (Tablo 15.13) okuyunuz.

Çözüm.
Dual. Primal kanonik formdaki bir maksimum problemidir; üç kısıtına $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ karşılık gelir. Katsayı tablosunu sütun sütun okursak

$$\begin{aligned} y_1 + 3y_3 &\geq 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\geq 5 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \\ \min g &= 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 \end{aligned}$$

bulunur.
Tablodan okuma. Aylak değişkenler x_3, x_4, x_5 sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü kısıta aittir. Optimal tablodaki kriterleri 0, $\frac{3}{2}$ ve 1'dir. Buna göre

$$y_1^* = 0, \qquad y_2^* = \frac{3}{2}, \qquad y_3^* = 1.$$

Sağlama. Dual kısıtlar $0 + 3 \cdot 1 = 3 \geq 3$ ve $2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot 1 = 5 \geq 5$ ile sağlanır. Amaç değeri $g = 4 \cdot 0 + 12 \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 1 = 36$'dır ve primalin $\max z = 36$ değerine eşittir. $y_1^* = 0$ olmasının nedeni de tablodadır: aylak x_3 bazdadır ($x_3 = 2$), bazdaki vektörlerin kriteri 0 olduğundan (Önerme 4.1) $y_1^* = z_3 - c_3 = 0$ çıkar. ■

15.13 Dual Simpleks Algoritması

Dual simpleks algoritması simpleks yöntemin aynasıdır: önce satır, sonra sütun seçer (Tanım 12.2). İki yöntemi yan yana koyalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 15.16: Simpleks yöntem ile dual simpleks algoritmasının karşılaştırması

	Simpleks yöntem	Dual simpleks algoritması
Tablonun durumu	Uygun: v_0 sütunu ≥ 0	Dual uygun: kriterler optimal işaretli, v_0'da negatif olabilir
Önce seçilen	Giren sütun: kritere göre	Çıkan satır: en negatif x_{Bi}
Sonra seçilen	Çıkan satır: $y_{ik} > 0$ olanlarda en küçük y_{i0}/y_{ik}	Giren sütun: $y_{rj} < 0$ olanlarda en küçük $\lvert(z_j - c_j)/y_{rj}\rvert$
Pivot	Pozitif	Negatif
Oranların yeri	Sağda, Oran sütunu	Altta, Oran satırı
Durma	Kriterler optimal işaretli	v_0 sütunu ≥ 0
Olumsuz sonuç	Giren sütunda pozitif eleman yok: sınırsız	Pivot satırında negatif eleman yok: uygun çözüm yok

Dual simpleks iki yerde işe yarar. Birincisi, maliyetleri negatif olmayan ve $\geq$ kısıtlı bir minimum problemde $\geq$ kısıtları -1 ile çarpılınca yapay değişkene gerek kalmadan dual uygun bir başlangıç tablosu elde edilir (Önerme 12.2). İkincisi, duyarlılık analizinde sağ taraf değişince optimal tablonun v_0 sütunu negatif olabilir; tablo hâlâ dual uygun olduğundan dual simpleks kaldığı yerden devam eder (Bölüm 12.6). Yeni tablo yine dikdörtgen kuralıyla hesaplanır.

15.14 Duyarlılık Analizi Formülleri

Duyarlılık analizinin bütün hesapları optimal bazın B matrisine dayanır (Tanım 10.2). B, optimal tablodaki baz değişkenlerinin **standart formdaki** sütunlarından tablonun satır sırasıyla kurulur ve tablonun her parçası onunla yazılır (Teorem 10.1):

$$\vec{y}_j = B^{-1}v_j, \qquad v_0 \text{ sütunu} = B^{-1}\vec{b}, \qquad z_0 = \vec{c}_B^{\,T}B^{-1}\vec{b}.$$

Bütün kısıtlar $\leq$ ise B^{-1}'i hesaplamaya gerek yoktur: optimal tablonun aylak sütunlarında hazır durur (Önerme 10.1). Örneğin Tablo 15.13 tablosunda v_3, v_4, v_5 sütunları B^{-1}'in sütunlarıdır.

Tablo 15.17: Duyarlılık analizinde hesap ve koşul

Değişen veri	Ne hesaplanır	Optimallik korunur, eğer
Temel dışı x_k'nın c_k'sı	Yalnız $z_k - c_k$	max: $c_k \leq z_k$; min: $c_k \geq z_k$
Temelde olan x_r'nin c_r'si	c_r'yi sembol bırak, temel dışı bütün kriterleri c_r cinsinden yaz	Hepsi max'ta ≥ 0, min'de ≤ 0; aralıkların kesişimi
Sağ taraf b_i	b_i'yi sembol bırak, $B^{-1}\vec{b}$'yi hesapla	$B^{-1}\vec{b} \geq \vec{0}$; aralıkların kesişimi

Aralığın dışına çıkılırsa tablo bozulur: kriter bozulduysa simpleks yöntemle, v_0 bozulduysa dual simpleks algoritmasıyla devam edilir.

15.15 Dal-Sınır Yöntemi Kısaca

Tam sayılı bir problem, tam sayı şartı kaldırılmış LP problemleri çözülerek adım adım daraltılır (Bölüm 13.5). Maksimum probleminde:

- **Başla.** Rahatlatılmış problemi çöz. Değeri Ü.S olur; başta A.S $= -\infty$.
- **Dallandır.** Kesirli bir $x_j = a$ seç ve iki alt problem kur: birine $x_j \leq \lfloor a \rfloor$, öbürüne $x_j \geq \lceil a \rceil$ kısıtını ekle.

 CC BY-NC-SA 4.0

- **Buda.** Her alt problemin rahatlatılmış çözümüne bak (Tanım 13.6):

Tablo 15.18: Maksimum probleminde alt problem kararları

Durum	Karar
Uygun çözüm yok	Buda (D2)
Çözüm tam sayılı	Aday; $z >$ A.S ise yeni A.S olur; buda (D3)
$z \leq$ A.S	Buda (D1)
Hiçbiri	Dallandırmak üzere beklet

- **Bitir.** Bekleyen alt problem kalmayınca en iyi aday optimaldir; aday yoksa uygun tam sayılı çözüm yoktur.

Minimum probleminde Ü.S ile A.S yer değiştirir: rahatlatılmış değer A.S olur, başta Ü.S $= +\infty$ alınır ve $z \geq$ Ü.S olan alt problem budanır.

15.16 Son Kontrol Listesi

Bir çözümü bitirmeden önce şu soruları sor:

1. Modelde her kısıtın iki yanının birimi aynı mı? “En az” ve “en çok” yönleri doğru mu?
2. Tablo yönteminde $C(n, m)$ seçimin hepsini yazdın mı, $\Delta = 0$ olanları ayırdın mı?
3. Grafik yöntemde bütün aday köşeleri buldun mu? Her kesişim noktasının bütün kısıtları sağladığını kontrol ettin mi?
4. Standart formda bütün sağ taraflar ≥ 0 mı? Sağ taraf negatifse satırı -1 ile çarpıp yapay değişkenden önce düzelttin mi?
5. Yapay değişkenin katsayısı doğru mu: minimumda $+M$, maksimumda $-M$?
6. Giren vektörü doğru işaretle mi seçtin: maksimumda en negatif, minimumda en büyük pozitif kriter?
7. Oran testinde yalnız pozitif elemanları mı kullandın?
8. Her yeni tabloda baz sütunları birim vektör, kriterleri 0 mı? $z_0 = \vec{c}_B^{\,T}\vec{y}_0$ sağlamasını yaptın mı?
9. Dönüştürülmüş değişkenlerden $(x'_j,\ x''_j)$ orijinal değişkenlere döndün mü, amaçtaki sabiti optimal değere ekledin mi?

Kuralları bir bütün hâlinde uygulamak için Alıştırmalar bölümündeki çözümlü problemlere dönebilirsin.

 CC BY-NC-SA 4.0