

Lineer Cebir

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 20 Eylül 2026

İçindekiler

Giriş	11
1 Tek İşlemlili Cebirsel Yapılar	13
1.1 İkili İşlem ve Cebirsel Yapı	13
1.2 İşlemin İki Temel Özelliği	13
1.3 Birim Eleman ve Ters Eleman	13
1.4 Çözümlü Örnekler	14
1.5 Yarı Grup, Monoid ve Grup	15
1.6 Tanıdık Kümeler Hangi Sınıfa Girer?	16
1.7 Alıştırma	17
2 Halkalar ve Cisimler	19
2.1 Halka	19
2.2 Cisim	20
2.3 Sıfır Bölenler ve Tamlık Bölgesi	20
2.4 Kompleks Sayılar Bir Cisimdir	20
2.5 Sıfır Bölenli Bir Halka	22
2.6 Alıştırma	23
3 Matrisler ve İşlemleri	25
3.1 Matris Nedir?	25
3.2 Toplama ve Skalerle Çarpma	25
3.3 Matris Çarpımı	27
3.4 Birim Matris	28
3.5 Transpoze	28
3.6 Alt Matris	29
3.7 Alıştırma	29
4 Merdiven Matrisler ve Satır Eşdeğerlik	31
4.1 Merdiven Matrisler	31
4.2 Elemanter Satır İşlemleri	31
4.3 Her Matris Bir Merdivene İnegelir	32
4.4 Satır Kanonik Şekil	33
4.5 Alıştırma	34
5 Kare Matrisler ve Ters Matris	37
5.1 Kare Matrisler ve Esas Köşegen	37
5.2 Ters Matris	38

5.3	Matrisin Kuvvetleri	39
5.4	Alıştırma	39
6	Elemanter Matrisler ve Ters Hesabı	41
6.1	Elemanter Satır Matrisleri	41
6.2	Satır İşlemi Bir Çarpımdır	41
6.3	Satır Eşdeğerliğin Cebirsel Karşılığı	42
6.4	Regülerliğin Ölçütü	43
6.5	Blok Matrisler	43
6.6	Tersin Hesaplanması	44
6.7	Alıştırma	45
7	Lineer Denklemler ve Sistemleri	49
7.1	Lineer Denklem	49
7.2	Lineer Denklem Sistemleri	50
7.3	Katsayılar Matrisi ve Genişletilmiş Matris	50
7.4	Çözüm Kümesinin Yapısı	51
7.5	Alıştırma	52
8	Eşdeğer Sistemler ve Merdiven Şekli	55
8.1	Denklemlerin Lineer Birleşimleri	55
8.2	Yok Etme Adımı Çözüm Kümesini Değiştirmez	55
8.3	Merdiven Şekli	56
8.4	Çözümün Varlığı ve Tekliği	57
8.5	Homojen Sistemler	57
8.6	Alıştırma	58
9	Gauss Yok Etme Yöntemi	61
9.1	Yöntemin Adımları	61
9.2	Çözümsüz Bir Sistem	61
9.3	Tek Çözümlü Bir Sistem	62
9.4	İki Homojen Sistem	62
9.5	İki Serbest Değişkenli Sistemler	63
9.6	Alıştırma	65
10	Parametrelili Sistemlerin Tartışması	69
10.1	Kritik Değer Nereden Çıkar?	69
10.2	Tek Parametrelili Bir Sistem	69
10.3	İki Parametrelili Bir Sistem	70
10.4	Alıştırma	71
11	Vektör Uzayları	75
11.1	Tanım ve Aksiyomlar	75
11.2	Sıfır Vektörle İlgili Kurallar	75

11.3	Temel Örnekler	76
11.4	Vektör Uzayı Olmayan Yapılar	77
11.5	Alıştırma	78
12	Alt Uzaylar	79
12.1	Tanım ve Ölçüt	79
12.2	Örnekler	80
12.3	Alt Uzay Olmayan Kümeler	80
12.4	Alıştırma	82
13	Toplamlar ve Direkt Toplam	83
13.1	Alt Uzayların Toplamı	83
13.2	Direkt Toplam	83
13.3	Çözümlü Örnekler	84
13.4	Alıştırma	85
14	Lineer Kombinasyonlar ve Doğuran Kümeler	87
14.1	Lineer Kombinasyon	87
14.2	Standart Doğuran Küme	88
14.3	Bir Vektör Lineer Kombinasyon mudur?	88
14.4	Alıştırma	89
15	Satır Uzayı ve Sütun Uzayı	93
15.1	Tanım	93
15.2	Satır İşlemleri Satır Uzayını Korur	93
15.3	Çözümlü Örnekler	94
15.4	Alıştırma	95
16	Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık	97
16.1	Tanım	97
16.2	Çözümlü Örnekler	97
16.3	Bağımlılığın Anlamı	98
16.4	Merdiven Matrisin Satırları	99
16.5	Beş Uyarı	100
16.6	Alıştırma	100
17	Taban ve Boyut	103
17.1	Taban ve Boyut	103
17.2	Doğuran Kümeyi Sadeleştirmek	104
17.3	Değiştirme Teoremi	105
17.4	Boyut İyi Tanımlıdır	105
17.5	Alıştırma	106
18	Boyut Teoremleri	109
18.1	Maksimal Bağımsız Alt Küme	109

18.2	Boyutun Üç Sonucu	110
18.3	Boyut Formülü	111
18.4	Çözümlü Örnekler	112
18.5	Alıştırma	114
19	Rank ve Denklem Sistemleri	117
19.1	Rank	117
19.2	Denklem Sistemlerine Uygulama	118
19.3	Homojen Sistemin Çözüm Uzayı	118
19.4	Alıştırma	120
20	Lineer Dönüşümler	123
20.1	Tanım	123
20.2	Örnekler	123
20.3	Ters Dönüşüm	125
20.4	Alıştırma	125
21	Koordinatlar ve İzomorfizm	127
21.1	Koordinatlar	127
21.2	Koordinatları Bir Tabandan Diğereine Çevirmek	128
21.3	Her n -Boyutlu Uzay K^n 'dir	129
21.4	Dönüşüm Tabanda Belirlenir	130
21.5	Alıştırma	131
22	Çekirdek ve Görüntü	133
22.1	Tanım	133
22.2	Görüntüyü Doğuran Küme	133
22.3	Görüntü Hesabı	134
22.4	Çekirdek Hesabı	135
22.5	Alıştırma	137
23	Boyut Teoremi, Rank ve Nullity	139
23.1	Görüntü, Matrisin Sütun Uzayıdır	139
23.2	Boyut Teoremi	139
23.3	Rank ve Nullity	141
23.4	Boyutları Kısa Yoldan Bulmak	141
23.5	Hesap Örnekleri	142
23.6	Alıştırma	143
24	Singüler Olmayan Dönüşümler	145
24.1	Tanım	145
24.2	Bire Birlikle Denkliği	145
24.3	Lineer Bağımsızlığın Korunması	145

24.4	Boyut Engeli	146
24.5	Alıştırma	147
25	Dönüşümler ve Denklem Sistemleri	149
25.1	Sistemin Dönüşüm Dili	149
25.2	Çözüm Uzayının Boyutu	149
25.3	Kare Sistemler	150
25.4	Alıştırma	150
26	Dönüşümlerin Uzayı	153
26.1	İki İşlem	153
26.2	$\text{Hom}(V, U)$	153
26.3	Boyut	154
26.4	Çözümlü Örnekler	155
26.5	Alıştırma	157
27	Bileşke ve Operatörler Cebri	159
27.1	Bileşke	159
27.2	Lineer Operatörler	160
27.3	Cebir Yapısı	160
27.4	Birim, Kuvvetler ve Polinomlar	161
27.5	Çözümlü Örnekler	162
27.6	Alıştırma	163
28	Tersinir Operatörler	165
28.1	Tanım	165
28.2	Tersinirlik Ölçütü	165
28.3	Ters Operatörün Hesabı	166
28.4	Kare Denklem Sistemleri	167
28.5	Alıştırma	168
29	Bir Operatörün Matrisi	169
29.1	Koordinat Vektörünü Hatırlayalım	169
29.2	Matris Gösterimi	169
29.3	Standart Tabanda: Matrisin Kendisi	170
29.4	Temel Teorem	171
29.5	Çözümlü Örnekler	172
29.6	İki Uzay Arasında: Dikdörtgen Matris Gösterimi	173
29.7	Alıştırma	175
30	Operatör Cebri ile Matris Cebri	177
30.1	Toplama ve Skalerle Çarpma	177
30.2	Çarpma	178

30.3	İki Boyutlu Durumda Açık Hesap	178
30.4	Alıştırma	179
31	Taban Değişirme	181
31.1	Geçiş Matrisi	181
31.2	Koordinatların Değişimi	182
31.3	Operatör Matrisinin Değişimi	183
31.4	Tabanı Neden Değiştiririz?	184
31.5	Alıştırma	185
32	Problemler	189
32.1	Bir Vektörün Koordinatlarını Bulmak	189
32.2	Geçiş Matrisini Kısa Yoldan Hesaplamak	190
32.3	Koordinatları Bir Tabandan Diğetine Taşımak	192
32.4	Operatörün Matrisini Yeni Tabanda Yazmak	195
32.5	$\mathbb{R}^n$ Dışında: Polinom Uzayı	198
32.6	Çekirdek, Görüntü ve Boyut	199
32.7	Dönüşümü Taban Değerlerinden Kurmak	200
32.8	Matris Gösterimi ve Taban Değişimi	201
32.9	İspat Problemleri	205
32.10	Alıştırma	207
33	Benzerlik ve İz	211
33.1	Benzer Matrisler	211
33.2	Bir Matrisin İzi	213
33.3	Köşegenleştirilebilir Operatörler	215
33.4	Alıştırma	216
34	İki Uzay Arasında Matris Gösterimi	219
34.1	Temel Eşitlik	219
34.2	Dönüşüm Uzayı ile Matris Uzayı	220
34.3	Bileşkenin Matrisi	220
34.4	İki Tabanın Birden Değişmesi	221
34.5	Kanonik Form	222
34.6	Çözümlü Örnekler	222
34.7	Alıştırma	226
35	Permütasyonlar	229
35.1	Tanım ve Gösterim	229
35.2	İşaret	230
35.3	İşaretin Çarpımsallığı	231
35.4	Alıştırma	233

36	Determinant ve Özellikleri	235
36.1	Tanım	235
36.2	Küçük Mertebeler	235
36.3	Transpoze	236
36.4	Satır Değişimi	237
36.5	Sıfır Satır, Eşit Satırlar, Üçgensellik	238
36.6	Satır İşlemleri	238
36.7	Regülerlik Ölçütü	239
36.8	Çarpımın Determinantı	240
36.9	Alıştırma	241
37	Kofaktör Açılımı ve Ters Matris	243
37.1	Minör ve Kofaktör	243
37.2	Laplace Açılımı	244
37.3	Ek Matris	246
37.4	Alıştırma	248
38	Cramer Kuralı ve Operatörün Determinantı	251
38.1	Cramer Kuralı	251
38.2	Homojen Sistemler	253
38.3	Bir Lineer Operatörün Determinantı	254
38.4	Alıştırma	255
39	Matris ve Operatör Polinomları	257
39.1	Bir Matriste Polinom	257
39.2	İşlemlerle Uyum	258
39.3	Operatör Polinomları	258
39.4	Alıştırma	260
40	Özdeğerler ve Özvektörler	261
40.1	Tanım	261
40.2	Matrisler İçin	262
40.3	Farklı Özdeğerler, Bağımsız Özvektörler	263
40.4	Alıştırma	264
41	Karakteristik Polinom ve Cayley-Hamilton Teoremi	267
41.1	Karakteristik Polinom	267
41.2	Özdeğerler Karakteristik Polinomun Kökleridir	268
41.3	Cayley-Hamilton Teoremi	269
41.4	Cayley-Hamilton ile Ters Hesabı	271
41.5	Alıştırma	271
42	Köşegenleştirme	273
42.1	Ölçüt	273

42.2	Çözümlü Örnekler	274
42.3	Köşegenleştirilemeyen Matrisler	276
42.4	Alıştırma	278
43	Problemler	281
43.1	Çekirdek, Görüntü, Rank ve Sıfırlık	281
43.2	Determinantlar ve Ters Matris	282
43.3	Dönüşüm Uzayında Lineer Bağımsızlık	283
43.4	Özdeğerler ve Köşegenleştirme	284
43.5	Cayley-Hamilton Uygulaması	287
43.6	Genel Tekrar: Vektör Uzayları	288
43.7	Alıştırma	290

Giriş

Lineer cebir, vektör uzayları ile bunlar arasındaki lineer dönüşümleri inceleyen, hemen her uygulamalı matematik dalının ortak dilini oluşturan temel derstir. Bu arşiv iki dönemlik bir müfredatı kapsar: birinci dönem cebirsel yapılardan başlayıp matrisler ve denklem sistemleri üzerinden vektör uzaylarına ulaşır, ikinci dönem ise bu uzaylar arasındaki lineer dönüşümleri, onların matrislerle temsilini, determinantları ve özdeğer kuramını konu alır.

Not

Aşağıdaki müfredatta yer alan tüm başlıkların notları hazırdır; bu notlara bağlantılardan ulaşabilirsiniz.

1. Tek İşlemlili Cebirsel Yapılar

Lineer cebir vektörleri toplayıp skalerle çarparak iş görür. Ama “toplama” ve “çarpma” sözcüklerinin ne anlama geldiği, üzerinde çalışılan kümeye göre değişir. Bu yüzden derse işlemin kendisini soyut olarak tanımlayarak başlıyoruz: bir kümede tanımlı bir işlem hangi kuralları sağlarsa o kümeye ne ad verilir? Buradaki sınıflandırma – yarı grup, monoid, grup – ilerideki bütün yapıların iskeletidir.

1.1 İkili İşlem ve Cebirsel Yapı

Tanım 1.1 (İkili İşlem). $M \neq \emptyset$ bir küme olsun. $M \times M$ kümesini M içine resmeden bir

$$\circ : M \times M \rightarrow M, \quad (a, b) \mapsto c \in M$$

fonksiyonu varsa, M 'de bir **ikili işlem** tanımlanmıştır denir. $\circ ((a, b)) = c$ yazımı yerine kısaca

$$a \circ b = c$$

gösterimi kullanılır.

Tanımın gizli ama en önemli parçası, sonucun yine M 'de olmasıdır: bir işlemin ikili işlem sayılabilmesi için kümenin o işleme göre **kapalı** olması gerekir.

Tanım 1.2 (Cebirsel Yapı). İçinde en az bir ikili işlem tanımlanmış, boş olmayan bir kümeye bir **cebirsal yapı** denir. M kümesinde $\circ$ gibi bir ikili işlem tanımlıysa bu cebirsel yapı $\langle M, \circ \rangle$ ile gösterilir.

1.2 İşlemin İki Temel Özelliği

Tanım 1.3 (Birleşme Özelliği). $M \neq \emptyset$ kümesinde tanımlı bir $\circ$ ikili işlemi

$$\forall a, b, c \in M \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$$

koşulunu sağlıyorsa $\circ$ işlemine M 'de **asosyatif** (birleşmeli) bir işlem denir.

Tanım 1.4 (Değişme Özelliği). $M \neq \emptyset$ kümesinde tanımlı bir $\circ$ ikili işlemi

$$\forall a, b \in M \quad a \circ b = b \circ a$$

koşulunu sağlıyorsa $\circ$ işlemine M 'de **komutatif** (değişmeli) bir işlem denir.

1.3 Birim Eleman ve Ters Eleman

Tanım 1.5 (Birim Eleman). $\langle M, \circ \rangle$ bir cebirsel yapı olsun. Eğer

$$\exists e \in M \text{ öyle ki } \forall a \in M \quad e \circ a = a \circ e = a$$

oluyorsa e 'ye $\langle M, \circ \rangle$ cebirsel yapısının bir **birim elemanı** denir.

Teorem 1.1 (Birim Elemanın Tekliği). Bir $\langle M, \circ \rangle$ cebirsel yapısının birim elemanı varsa tektir.

İspat.

e ve e' gibi iki birim elemanın bulunduğunu varsayalım. e birim eleman ve $e' \in M$ olduğundan

$$e \circ e' = e' \circ e = e'$$

e' birim eleman ve $e \in M$ olduğundan da

$$e \circ e' = e' \circ e = e$$

İki eşitliğin sol tarafları aynı olduğuna göre $e = e'$ bulunur.

■

Tanım 1.6 (Ters Eleman). $\langle M, \circ \rangle$ cebirsel yapısında bir e birim elemanı var olsun. Bir $a \in M$ için

$$a^* \circ a = a \circ a^* = e$$

olacak biçimde bir $a^* \in M$ varsa, a^* elemanına a 'nın $\langle M, \circ \rangle$ 'deki bir **tersi** denir.

Teorem 1.2 (Ters Elemanın Tekliği). $M \neq \emptyset$ kümesinde asosyatif bir $\circ$ ikili işlemi tanımlıysa, herhangi bir $a \in M$ 'nin en çok bir tersi vardır: tersi varsa tektir.

İspat.

a 'nın a^* ve a^{**} gibi iki tersinin bulunduğunu varsayalım; e birim eleman olmak üzere

$$a^* \circ a = a \circ a^* = e, \quad a^{**} \circ a = a \circ a^{**} = e$$

Birinci eşitlikteki $a \circ a^* = e$ ifadesini soldan a^{**} ile birleştirelim:

$$a^{**} \circ (a \circ a^*) = a^{**} \circ e = a^{**}$$

İkinci eşitlikteki $a^{**} \circ a = e$ ifadesini de sağdan a^* ile birleştirelim:

$$(a^{**} \circ a) \circ a^* = e \circ a^* = a^*$$

$\circ$ asosyatif olduğundan bu iki ifadenin sol tarafları eşittir; dolayısıyla $a^* = a^{**}$ 'dir.

■

İ Asosyatiflik neden şart?

Birim elemanın tekliği hiçbir ek koşul istemiyordu; ters elemanın tekliği ise asosyatifliğe dayanıyor. İspattaki tek hamle $a^{**} \circ (a \circ a^*)$ ile $(a^{**} \circ a) \circ a^*$ ifadelerini eşitlemek — parantezleri kaydırma hakkı elimizden alınırsa bir elemanın birden çok tersi olabilir.

1.4 Çözümlü Örnekler

Örnek 1.1 (Birim Elemanı Olmayan Bir Yapı). $\mathbb{Q}$ kümesinde $a \circ b = ab + 1$ biçiminde bir işlem tanımlanıyor.

- $\circ$ işlemi asosyatif midir?
- $\circ$ işlemi komutatif midir?
- $\langle \mathbb{Q}, \circ \rangle$ yapısının birim elemanı var mıdır?

Çözüm.

a) $a, b, c \in \mathbb{Q}$ olmak üzere iki tarafı ayrı ayrı açalım:

$$(a \circ b) \circ c = (ab + 1) \circ c = (ab + 1)c + 1 = abc + c + 1$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (bc + 1) = a(bc + 1) + 1 = abc + a + 1$$

$c \neq a$ olduğu her durumda $abc + c + 1 \neq abc + a + 1$ 'dir; örneğin $a = 1, b = 1, c = 2$ için sol taraf 5, sağ taraf 4 çıkar. Demek ki işlem asosyatif **değildir**.

b) $\mathbb{Q}$ 'da çarpma komutatif olduğundan her a, b için

$$a \circ b = ab + 1 = ba + 1 = b \circ a$$

olur; işlem komutatifdir.

c) Her $a \in \mathbb{Q}$ için $e \circ a = a$ olacak sabit bir e arıyoruz:

$$e \circ a = ea + 1 = a \implies e = \frac{a-1}{a} \quad (a \neq 0)$$

Bulunan değer a 'ya bağlı çıktı; oysa birim elemanın a 'dan bağımsız tek bir eleman olması gerekir. O hâlde $\langle \mathbb{Q}, \circ \rangle$ 'nin birim elemanı **yoktur**.

■

Örnek 1.2 (Birimi ve Tersleri Olan Bir Yapı). $\mathbb{Q}$ kümesinde $a \circ b = \frac{ab}{2}$ işlemi tanımlanıyor. İşlemin asosyatif ve komutatif olduğunu gösterip birim elemanı ile ters elemanları belirleyiniz.

Çözüm.

Asosyatifiklik. Her $a, b, c \in \mathbb{Q}$ için

$$(a \circ b) \circ c = \frac{ab}{2} \circ c = \frac{abc}{4}, \quad a \circ (b \circ c) = a \circ \frac{bc}{2} = \frac{abc}{4}$$

İki sonuç aynı olduğundan işlem asosyatifdir.

Komutatiflik. $a \circ b = \frac{ab}{2} = \frac{ba}{2} = b \circ a$ olduğundan işlem komutatifdir.

Birim eleman. Her a için $e \circ a = a$ isteniyor:

$$e \circ a = \frac{ea}{2} = a \implies e = 2$$

Bu değer a 'dan bağımsızdır ve $2 \in \mathbb{Q}$ 'dur; dolayısıyla birim eleman $e = 2$ 'dir.

Sıfırın tersi. $x \circ 0 = 2$ olacak bir $x \in \mathbb{Q}$ olsaydı

$$x \circ 0 = \frac{x \cdot 0}{2} = 0 = 2$$

çelişkisi doğardı. O hâlde 0'ın tersi yoktur.

Sıfırdan farklı elemanların tersi. $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ için

$$x \circ a = 2 \implies \frac{xa}{2} = 2 \implies x = \frac{4}{a} \in \mathbb{Q}$$

Demek ki her $a \neq 0$ rasyonel sayısının tersi $\frac{4}{a}$ 'dır.

■

1.5 Yarı Grup, Monoid ve Grup

Tek bir işlem taşıyan yapılar, işlemin sağladığı koşullara göre adlandırılır.

Tanım 1.7 (Tek İşlemlili Yapı). İçinde bir tane ikili işlem tanımlanmış bir cebirsel yapıya **tek işlemlili cebirsel yapı** denir.

Tanım 1.8 (Yarı Grup). İçinde asosyatif bir ikili işlem tanımlanmış tek işlemlili cebirsel yapıya bir **yarı grup** denir. Yarı gruptaki işlem komutatif ise yapıya **komutatif (abelyen) yarı grup** adı verilir.

Bir $M \neq \emptyset$ kümesinin yarı grup olması, **yarı grup aksiyomları** denen iki koşulu sağlamasıyla aynı şeydir:

- I. $\forall a, b \in M$ için $a \circ b \in M$ (kapalılık aksiyomu)
 II. $\forall a, b, c \in M$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ (asosiyatiflik aksiyomu)
 Komutatif yarı grup için bunlara
 III. $\forall a, b \in M$ için $a \circ b = b \circ a$ (komutatiflik aksiyomu)
 eklenir.

Tanım 1.9 (Monoid). Birimli, yani birim elemanı olan bir yarı gruba **monoid** denir. Monoiddeki işlem komutatif ise yapıya **komutatif (abelyen) monoid** denir.

Tanım 1.10 (Grup). Bir $G \neq \emptyset$ kümesinde tanımlanmış bir $\circ$ ikili işlemi aşağıdaki dört koşulu sağlıyorsa $\langle G, \circ \rangle$ tek işlemli cebirsel yapısına bir **grup** denir:

- I. $\forall a, b \in G$ için $a \circ b \in G$
 II. $\forall a, b, c \in G$ için $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
 III. $\exists e \in G$ öyle ki $\forall a \in G$ için $e \circ a = a \circ e = a$
 IV. $\forall a \in G$ için $\exists a^* \in G$ öyle ki $a^* \circ a = a \circ a^* = e$
 Gruptaki işlem komutatif ise $\langle G, \circ \rangle$ 'ye **komutatif (abelyen) grup** denir.

💡 Toplamsal ve çarpımsal gösterim

Bir $\langle G, \circ \rangle$ grubundaki işlem “+” ile gösteriliyorsa gruba **toplamsal grup**, “.” ile gösteriliyorsa **çarpımsal grup** denir. Toplamsal yazımda birim elemana yapının **sıfırı**, a 'nın tersine $-a$; çarpımsal yazımda birim elemana **birim**, tersine a^{-1} denir. Değişen yalnızca gösterimdir, tanımlar aynı kalır.

1.6 Tanıdık Kümeler Hangi Sınıfa Girer?

Aşağıdaki liste, alışılmış sayı kümelerinin bilinen işlemlere göre yerini gösterir. Burada $\mathbb{Z}_\zeta = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ çift tam sayıları, $\mathbb{Z}_t = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$ tek tam sayıları göstermektedir.

Yapı	Sınıfı	Nedeni
$\langle \mathbb{N}, + \rangle$	komutatif yarı grup	birim elemanı yok
$\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$	komutatif monoid	birimi 1; 2'nin tersi yok
$\langle \mathbb{Z}, + \rangle$	komutatif grup	sıfırı 0, tersi $-a$
$\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$	komutatif monoid	birimi 1; 2'nin tersi yok
$\langle \mathbb{Q}, + \rangle, \langle \mathbb{R}, + \rangle$	komutatif grup	sıfırı 0, tersi $-a$
$\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$	komutatif grup	birimi 1, tersi $1/a$
$\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$	komutatif grup	birimi 1, tersi $1/a$
$\langle \mathbb{R}^+, + \rangle, \langle \mathbb{R}^-, + \rangle$	komutatif yarı grup	sıfırı içermiyor
$\langle \mathbb{R}^+, \cdot \rangle$	komutatif grup	birimi 1, tersi $1/a$
$\langle \mathbb{Z}_\zeta, + \rangle$	komutatif grup	sıfırı 0, tersi $-a$
$\langle \mathbb{Z}_\zeta, \cdot \rangle$	komutatif yarı grup	birimi yok
$\langle \mathbb{Z}_t, \cdot \rangle$	komutatif monoid	yalnız ± 1 tersinir

Burada $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ alınmıştır; $\{0, 1, 2, \dots\}$ alınsaydı sıfır işe karışır ve toplamsal yapı monoide yükselirdi. $\mathbb{Z}_t$ toplamaya göre kapalı bile değildir: $1 + 3 = 4 \notin \mathbb{Z}_t$.

Örnek 1.3 (Sıralı Üçlülerden Bir Grup). $G = \{ (a, b, 2) : a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$ kümesinin

$$(a, b, 2) \circ (c, d, 2) = (ac, bd, 2)$$

işlemine göre komutatif bir grup olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$(1, 1, 2) \in G$ olduğundan $G \neq \emptyset$ 'dir. Dört grup aksiyomunu sırayla denetleyelim.

I. Kapalılık. $(a, b, 2), (c, d, 2) \in G$ olsun. Tanım gereği $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dir. Sıfırdan farklı iki reel sayının çarpımı sıfırdan farklı olduğundan $ac \neq 0$ ve $bd \neq 0$; yani

$$(a, b, 2) \circ (c, d, 2) = (ac, bd, 2) \in G$$

II. Asosyatiflik. $\mathbb{R}$ 'de çarpmanın asosyatifliğinden

$$\begin{aligned} [(a, b, 2) \circ (c, d, 2)] \circ (e, f, 2) &= (ac, bd, 2) \circ (e, f, 2) = ((ac)e, (bd)f, 2) \\ &= (a(ce), b(df), 2) = (a, b, 2) \circ (ce, df, 2) = (a, b, 2) \circ [(c, d, 2) \circ (e, f, 2)] \end{aligned}$$

III. Birim eleman. Her $(a, b, 2) \in G$ için $(x, y, 2) \circ (a, b, 2) = (a, b, 2)$ olacak bir $(x, y, 2)$ arıyoruz:

$$(xa, yb, 2) = (a, b, 2) \implies xa = a, \quad yb = b$$

$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olduğundan $x = 1, y = 1$ bulunur. Demek ki birim eleman $(1, 1, 2) \in G$ 'dir.

IV. Ters eleman. $(a, b, 2) \in G$ için $(a^*, b^*, 2) \circ (a, b, 2) = (1, 1, 2)$ isteniyor:

$$(a^*a, b^*b, 2) = (1, 1, 2) \implies a^*a = 1, \quad b^*b = 1$$

$a \neq 0, b \neq 0$ olduğundan $a^* = \frac{1}{a}, b^* = \frac{1}{b}$ ve ikisi de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dadır. Yani $(a, b, 2)$ 'nin tersi $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 2) \in G$ 'dir.

Komutatiflik. $\mathbb{R}$ 'de çarpmanın komutatifliğinden

$$(a, b, 2) \circ (c, d, 2) = (ac, bd, 2) = (ca, db, 2) = (c, d, 2) \circ (a, b, 2)$$

Dört aksiyom ve komutatiflik sağlandığından $\langle G, \circ \rangle$ komutatif bir gruptur.

■

1.7 Alıştırma

Alıştırma 1.1 (Tek İşlemlili Yapılar).

- $\mathbb{Z}$ kümesinde $a \circ b = a + b - 3$ işlemi tanımlansın. $\langle \mathbb{Z}, \circ \rangle$ 'nin komutatif bir grup olduğunu gösterip birim elemanı ile a 'nın tersini bulunuz.
- $M = \mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{n} : n = 2, 3, \dots\}$ kümesinin $\mathbb{Q}$ 'daki çarpma işlemine göre kapalı olmadığını gösteriniz.
- $\langle \mathbb{Z}_t, \cdot \rangle$ yapısında tersi olan elemanları belirleyiniz.

Çözüm.

a) Dört aksiyomu sırayla denetleyelim.

Kapalılık: $a, b \in \mathbb{Z}$ ise $a + b - 3 \in \mathbb{Z}$ 'dir.

Asosyatiflik: İki tarafı da açalım:

$$(a \circ b) \circ c = (a + b - 3) \circ c = (a + b - 3) + c - 3 = a + b + c - 6$$

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c - 3) = a + (b + c - 3) - 3 = a + b + c - 6$$

İki sonuç aynıdır.

Birim eleman: Her a için $e \circ a = a$ isteniyor:

$$e + a - 3 = a \implies e = 3$$

Bu değer a 'dan bağımsızdır ve $3 \in \mathbb{Z}$ 'dir; birim eleman $e = 3$ 'tür.

Ters eleman: $a^* \circ a = 3$ olacak a^* 'yı arayalım:

$$a^* + a - 3 = 3 \implies a^* = 6 - a \in \mathbb{Z}$$

Komutatiflik: $a \circ b = a + b - 3 = b + a - 3 = b \circ a$.

Dördü de sağlandığından $\langle \mathbb{Z}, \circ \rangle$ komutatif bir gruptur; birim elemanı 3, a 'nın tersi $6 - a$ 'dır.

b) Kapalılığın bozulması için tek bir karşı örnek yeterlidir. $2 \in \mathbb{Z} \subset M$ ve $\frac{1}{3} \in M$ 'dir; fakat

$$2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

sayısı ne bir tam sayıdır ne de $\frac{1}{n}$ biçimindedir. O hâlde $\frac{2}{3} \notin M$ ve M çarpmaya göre kapalı değildir.

c) $\mathbb{Z}_t$ çarpmaya göre kapalıdır (tek $\times$ tek = tek), asosyatif ve komutatiftir; birimi 1'dir. Bir $a \in \mathbb{Z}_t$ elemanının tersi $x \in \mathbb{Z}_t$ ise $ax = 1$ olmalıdır. Bu denklem tam sayılarda ancak

$$a = 1, x = 1 \quad \text{veya} \quad a = -1, x = -1$$

durumlarında çözülebilir; çünkü $|a| \geq 3$ iken $|ax| = |a| |x| \geq 3 > 1$ olur. Demek ki $\langle \mathbb{Z}_t, \cdot \rangle$ 'de yalnızca 1 ve -1 tersinirdir ve her ikisi de kendi tersidir; yapı bir grup değil, komutatif bir monoiddir. ■

Tek işlem yeterince yapı taşıyor: vektörleri toplamak için bir gruba, skalerlerle çarpmak için ikinci bir işleme ihtiyacımız var. Sıradaki adım, iki işlemin aynı küme üzerinde nasıl uyum içinde çalıştığıdır: [halkalar ve cisimler](#).

2. Halkalar ve Cisimler

Bir kümede iki işlem birlikte tanımlandığında, ikisinin birbirinden bağımsız yaşamasını istemeyiz: çarpma toplamayı dağılım kuralıyla tanıyorsa yapı zenginleşir. Bu bölümde tanımlayacağımız halka ve cisim kavramları, tüm dersin zeminidir – çünkü bir vektör uzayı, daima **bir cisim üzerinde** kurulur.

2.1 Halka

Tanım 2.1 (İki İşlemlili Yapı). İçinde iki tane ikili işlem tanımlanmış bir cebirsel yapıya **iki işlemlili cebirsel yapı** denir.

Tanım 2.2 (Halka). İki işlemlili bir H cebirsel yapısı,

- “+” ile göstereceğimiz ve **toplama** adını vereceğimiz birinci işleme göre bir **komutatif grup**,
- “ $\cdot$ ” ile göstereceğimiz ve **çarpma** adını vereceğimiz (komutatif olması gerekmeyen) ikinci işleme göre bir **yarı grup**

ise ve bundan başka çarpma işlemi toplama işlemi üzerine iki yanlı dağılımlı ise, yani

$$\forall a, b, c \in H \quad a(b + c) = ab + ac \quad \text{ve} \quad (b + c)a = ba + ca$$

ise H 'ye bir **halka** denir ve bu halka $\langle H; +, \cdot \rangle$ ile gösterilir.

Tanımı aksiyom listesi olarak açtığımızda bir $H \neq \emptyset$ kümesinin halka olması sekiz koşula iner. İlk beşi $\langle H, + \rangle$ 'nin komutatif grup, sonraki ikisi $\langle H, \cdot \rangle$ 'nin yarı grup olduğunu, sonuncusu da iki işlemin uyumunu söyler.

I. $\forall a, b \in H$ için $a + b \in H$

II. $\forall a, b, c \in H$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$

III. $\forall a, b \in H$ için $a + b = b + a$

IV. $\exists 0_H \in H$ öyle ki $\forall a \in H$ için $0_H + a = a$

V. $\forall a \in H$ için $\exists (-a) \in H$ öyle ki $(-a) + a = 0_H$

VI. $\forall a, b \in H$ için $ab \in H$

VII. $\forall a, b, c \in H$ için $(ab)c = a(bc)$

VIII. $\forall a, b, c \in H$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(b + c)a = ba + ca$

Tanım 2.3 (Halkanın Sıfırı ve Birimi). $\langle H; +, \cdot \rangle$ bir halka olsun. $\langle H, + \rangle$ komutatif grubunun birim elemanına H halkasının **sıfırı** denir ve 0_H ile gösterilir. Eğer $\langle H, \cdot \rangle$ yapısının bir birim elemanı varsa buna H halkasının **birimi** denir, 1_H ile gösterilir; birimi olan halkaya **birimli halka** adı verilir.

$\langle \mathbb{Z}; +, \cdot \rangle$ birimli bir halkadır: $0_{\mathbb{Z}} = 0$ ve $1_{\mathbb{Z}} = 1$ 'dir. Bir $a \in H$ elemanının toplamaya göre tersi $-a$ ile gösterilir; $a + (-b)$ yerine $a - b$ yazılır.

Teorem 2.1 (Sıfırla Çarpım). $\langle H; +, \cdot \rangle$ bir halka ise her $a \in H$ için

$$0_H \cdot a = a \cdot 0_H = 0_H$$

İspat.

Herhangi bir $b \in H$ alalım. $b = b + 0_H$ olduğundan sağdan dağılım kuralıyla

$$(b + 0_H)a = ba + 0_H a \implies ba = ba + 0_H a$$

Her iki tarafa soldan $-(ba)$ ekleyelim:

$$-(ba) + ba = -(ba) + (ba + 0_H a) \implies 0_H = (-(ba) + ba) + 0_H a = 0_H + 0_H a$$

yani $0_H \cdot a = 0_H$ bulunur. Aynı hesabı soldan dağılım kuralıyla tekrarlayalım:

$$a(b + 0_H) = ab + a \cdot 0_H \implies ab = ab + a \cdot 0_H$$

Her iki tarafa $-(ab)$ eklenirse $a \cdot 0_H = 0_H$ elde edilir. İki sonuç birlikte, her $a \in H$ için $0_H a = a \cdot 0_H = 0_H$ olduğunu verir.

■

2.2 Cisim

Tanım 2.4 (Cisim). $\langle K; +, \cdot \rangle$ bir halka olsun. Eğer $K \setminus \{0_K\}$ alt kümesi çarpma işlemine göre bir grup oluşturuyorsa, yani $\langle K \setminus \{0_K\}, \cdot \rangle$ bir grup ise, $\langle K; +, \cdot \rangle$ halkasına bir **cisim** denir.

Bir cismin aksiyomları, halka aksiyomlarına üç koşul daha eklenerek elde edilir:

IX. $\forall a, b \in K \setminus \{0_K\}$ için $ab \in K \setminus \{0_K\}$

X. $\exists 1_K \in K \setminus \{0_K\}$ öyle ki $\forall a \in K$ için $1_K a = a 1_K = a$

XI. $\forall a \in K \setminus \{0_K\}$ için $\exists a^{-1} \in K \setminus \{0_K\}$ öyle ki $a^{-1} a = a a^{-1} = 1_K$

Tanım 2.5 (Komutatif Halka ve Komutatif Cisim). Bir halkanın (cismin) içinde tanımlı çarpma işlemi komutatif ise o halkaya **komutatif halka**, o cisme **komutatif cisim** denir.

$\langle \mathbb{Q}; +, \cdot \rangle$ ve $\langle \mathbb{R}; +, \cdot \rangle$ birer komutatif cisimdir. Bundan sonraki bölümlerde skaler olarak kullanacağımız K daima komutatif bir cisim olacaktır.

2.3 Sıfır Bölener ve Tamlık Bölgesi

Tanım 2.6 (Sıfır Bölensiz Halka). $\langle H; +, \cdot \rangle$ halkasında

$$a \in H \setminus \{0_H\}, b \in H \setminus \{0_H\} \implies ab \in H \setminus \{0_H\}$$

koşulu sağlanıyorsa, başka bir deyişle $a, b \in H$ için

$$ab = 0_H \Leftrightarrow a = 0_H \text{ veya } b = 0_H$$

oluyorsa H 'ye **sıfır bölensiz halka** denir.

Tanım 2.7 (Sıfır Bölensiz Halka). Bir $\langle H; +, \cdot \rangle$ halkasında $a \neq 0_H, b \neq 0_H$ iken $ab = 0_H$ olacak biçimde bir $a, b \in H$ çifti varsa H 'ye **sıfır bölensiz halka** denir.

Tanım 2.8 (Tamlık Bölgesi). Komutatif, birimli ve sıfır bölensiz bir halkaya bir **tamlık bölgesi** denir.

$\langle \mathbb{Z}; +, \cdot \rangle$ bir tamlık bölgesidir; ama cisim değildir, çünkü örneğin $2x = 1$ olacak hiçbir $x \in \mathbb{Z}$ yoktur.

i Cisim ile tamlık bölgesi arasındaki tek yönlü ilişki

Her komutatif cisim bir tamlık bölgesidir: $ab = 0_K$ ve $a \neq 0_K$ ise, a^{-1} ile soldan çarparak $b = 0_K$ bulunur. Ters yön doğru değildir — $\mathbb{Z}$, tamlık bölgesi olup cisim olmayan en tanıdık örnektir.

2.4 Kompleks Sayılar Bir Cisimdir

Örnek 2.1 (Kompleks Sayılar Cismi). $\mathbb{C} = \{ a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \}$ kümesinde

$$(a + bi) \oplus (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) \odot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

işlemleri tanımlanıyor. $\langle \mathbb{C}; \oplus, \odot \rangle$ 'nin komutatif bir cisim olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$1 + 0i \in \mathbb{C}$ olduğundan $\mathbb{C} \neq \emptyset$ 'dir. İki kompleks sayının eşitliği bileşen bileşen okunur: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c$ ve $b = d$.

I. Toplamaya göre kapalılık. $a + c \in \mathbb{R}$ ve $b + d \in \mathbb{R}$ olduğundan $(a + c) + (b + d)i \in \mathbb{C}$ 'dir.

II. Toplamanın asosyatifliği. $\mathbb{R}$ 'de toplamanın asosyatifliğinden

$$\begin{aligned} [(a + bi) \oplus (c + di)] \oplus (e + fi) &= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)i \\ &= (a + (c + e)) + (b + (d + f))i = (a + bi) \oplus [(c + di) \oplus (e + fi)] \end{aligned}$$

III. Toplamanın komutatifliği. $\mathbb{R}$ 'de toplama komutatif olduğundan

$$\begin{aligned} (a + bi) \oplus (c + di) &= (a + c) + (b + d)i \\ &= (c + a) + (d + b)i = (c + di) \oplus (a + bi) \end{aligned}$$

IV. Sıfır. Her $a + bi$ için $(x + yi) \oplus (a + bi) = a + bi$ isteniyor:

$$(x + a) + (y + b)i = a + bi \Rightarrow x + a = a, y + b = b \Rightarrow x = y = 0$$

Demek ki $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$ 'dir.

V. Toplamsal ters. $(a^* + b^*i) \oplus (a + bi) = 0 + 0i$ koşulu

$$a^* + a = 0, \quad b^* + b = 0 \Rightarrow a^* = -a, \quad b^* = -b$$

verir; yani $a + bi$ 'nin toplamsal tersi $-a - bi \in \mathbb{C}$ 'dir. **I-V** ile $\langle \mathbb{C}, \oplus \rangle$ komutatif bir gruptur.

VI. Çarpmaya göre kapalılık. $ac - bd \in \mathbb{R}$ ve $ad + bc \in \mathbb{R}$ olduğundan çarpım yine $\mathbb{C}$ 'dedir.

VII. Çarpmanın asosyatifliği. İki tarafı da açalım:

$$\begin{aligned} [(a + bi) \odot (c + di)] \odot (e + fi) &= ((ac - bd)e - (ad + bc)f) \\ &\quad + ((ac - bd)f + (ad + bc)e)i \\ (a + bi) \odot [(c + di) \odot (e + fi)] &= (a(ce - df) - b(cf + de)) \\ &\quad + (a(cf + de) + b(ce - df))i \end{aligned}$$

Reel sayıların dağılım ve birleşme özellikleriyle iki ifadenin reel kısımları da sanal kısımları da aynıdır.

VIII. Çarpmanın komutatifliği. $\mathbb{R}$ 'de toplama ve çarpma komutatif olduğundan

$$\begin{aligned} (c + di) \odot (a + bi) &= (ca - db) + (cb + da)i \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i = (a + bi) \odot (c + di) \end{aligned}$$

IX. Dağılım. Sol taraf

$$(a + bi) \odot [(c + di) \oplus (e + fi)] = (a(c + e) - b(d + f)) + (a(d + f) + b(c + e))i$$

sağ taraf ise

$$\begin{aligned} [(a + bi) \odot (c + di)] \oplus [(a + bi) \odot (e + fi)] &= ((ac - bd) + (ae - bf)) \\ &\quad + ((ad + bc) + (af + be))i \end{aligned}$$

olur; reel sayılarda $a(c + e) - b(d + f) = (ac - bd) + (ae - bf)$ ve $a(d + f) + b(c + e) = (ad + bc) + (af + be)$ olduğundan iki taraf eşittir. **I-IX** ile $\langle \mathbb{C}; \oplus, \odot \rangle$ komutatif bir halkadır.

X. $\mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$ çarpmaya göre kapalıdır. $a + bi \neq 0_{\mathbb{C}}$, $c + di \neq 0_{\mathbb{C}}$ iken çarpımın sıfır olduğunu varsayalım:

$$(ac - bd) + (ad + bc)i = 0 + 0i \Rightarrow ac = bd, \quad ad = -bc$$

$a + bi \neq 0$ olduğundan a ile b 'den en az biri sıfırdan farklıdır; simetri gereği $a \neq 0$ kabul edebiliriz. Birinci eşitliği c ile, ikincisini d ile çarpalım:

$$ac^2 = bcd, \quad ad^2 = -bcd$$

Taraf tarafa toplanırsa

$$a (c^2 + d^2) = 0 \stackrel{a \neq 0}{\implies} c^2 + d^2 = 0 \implies c = d = 0$$

Bu, $c + di \neq 0_{\mathbb{C}}$ varsayımıyla çelişir. O hâlde çarpım sıfırdan farklıdır.

XI. Birim. $(1 + 0i) \odot (a + bi) = (1 \cdot a - 0 \cdot b) + (1 \cdot b + 0 \cdot a)i = a + bi$ olduğundan $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$ 'dir.

XII. Çarpımsal ters. $a + bi \neq 0_{\mathbb{C}}$ olsun; $(a^* + b^*i) \odot (a + bi) = 1 + 0i$ koşulu

$$aa^* - bb^* = 1, \quad a^*b + b^*a = 0$$

denklemlerini verir. Birinciye a , ikinciye b ile çarpıp toplarsak

$$a^* (a^2 + b^2) = a$$

$a + bi \neq 0$ olduğundan $a^2 + b^2 \neq 0$ 'dır ve $a^* = \frac{a}{a^2 + b^2}$ bulunur. Aynı iki denklemi bu kez $-b$ ve a ile çarpıp toplarsak

$$b^* (a^2 + b^2) = -b \implies b^* = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

a ile b 'den biri sıfırdan farklı olduğu için a^* ile b^* 'den de biri sıfırdan farklıdır; yani

$$a^* + b^*i = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \in \mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$$

X–XII ile $\mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}$ çarpıma göre bir gruptur. Dolayısıyla $\langle \mathbb{C}; \oplus, \odot \rangle$ komutatif bir cisimdir.

■

2.5 Sıfır Bölennli Bir Halka

Örnek 2.2 (Birimsiz ve Sıfır Bölennli Bir Halka). $M = \{ (a, b) : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \}$ kümesinde

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, bd), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac, 1)$$

işlemleri tanımlanıyor. $\langle M; \oplus, \odot \rangle$ 'nin ne tür bir cebirsel yapı olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.

$(1, 1) \in M$ olduğundan $M \neq \emptyset$ 'dir.

I. Toplamaya göre kapalılık. $a, c \in \mathbb{Z}$ için $a + c \in \mathbb{Z}$; $b, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için $bd \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dir.

II–III. Asosyatiflik ve komutatiflik. $\mathbb{Z}$ 'de toplanmanın, $\mathbb{R}$ 'de çarpmanın asosyatif ve komutatiflik olmasından

$$\begin{aligned} (a, b) \oplus [(c, d) \oplus (e, f)] &= (a + (c + e), b(df)) \\ &= ((a + c) + e, (bd)f) = [(a, b) \oplus (c, d)] \oplus (e, f) \end{aligned}$$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, bd) = (c + a, db) = (c, d) \oplus (a, b)$$

IV. Sıfır. $(x, y) \oplus (a, b) = (a, b)$ koşulu $x + a = a$ ve $yb = b$ verir; $b \neq 0$ olduğundan $x = 0, y = 1$ bulunur. Demek ki $0_M = (0, 1)$ 'dir.

V. Toplamsal ters. $(a^*, b^*) \oplus (a, b) = (0, 1)$ koşulu $a^* + a = 0$ ve $b^*b = 1$ verir; buradan $a^* = -a \in \mathbb{Z}$ ve $b^* = \frac{1}{b} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 'dir. Yani (a, b) 'nin toplamsal tersi $(-a, \frac{1}{b})$ 'dir.

VI–VIII. Çarpma. $ac \in \mathbb{Z}$ ve $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olduğundan çarpma kapalıdır. Asosyatiflik ve komutatiflik $\mathbb{Z}$ 'deki çarpımdan gelir:

$$[(a, b) \odot (c, d)] \odot (e, f) = (ac)e, 1 = a(ce), 1 = (a, b) \odot [(c, d) \odot (e, f)]$$

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, 1) = (ca, 1) = (c, d) \odot (a, b)$$

IX. Dağılıma. Sol taraf

$$(a, b) \odot [(c, d) \oplus (e, f)] = (a, b) \odot (c + e, df) = (a(c + e), 1) = (ac + ae, 1)$$

sağ taraf

$$[(a, b) \odot (c, d)] \oplus [(a, b) \odot (e, f)] = (ac, 1) \oplus (ae, 1) = (ac + ae, 1)$$

İkisi eşittir; dolayısıyla $\langle M; \oplus, \odot \rangle$ komutatif bir halkadır.

Sıfır bölen var mı? $(5, 4)$ ve $(0, 3)$ elemanlarının ikisi de $0_M = (0, 1)$ 'den farklıdır; buna karşın

$$(5, 4) \odot (0, 3) = (5 \cdot 0, 1) = (0, 1) = 0_M$$

O hâlde $M \setminus \{0_M\}$ çarpmaya göre kapalı değildir: halka **sıfır bölenlidir**. Dolayısıyla bir cisim ya da tamlık bölgesi olamaz.

Birimi var mı? $(x, y) \odot (a, b) = (xa, 1) = (a, b)$ olması $b = 1$ gerektirir. Oysa $b \neq 1$ olan elemanlar var, örneğin $(0, 3)$. Demek ki birim eleman **yoktur**.

Sonuç: $\langle M; \oplus, \odot \rangle$ komutatif, birimsiz ve sıfır bölünli bir halkadır.

■

2.6 Alıştırma

Alıştırma 2.1 (Halka mı, Cisim mi?).

a) $H = \{ (a, 5^b) : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{Z} \}$ kümesinde

$$(a, 5^b) \oplus (c, 5^d) = (a + c, 5^{b+d}), \quad (a, 5^b) \odot (c, 5^d) = (ac, 1)$$

işlemleri tanımlanıyor. $\langle H; \oplus, \odot \rangle$ ne tür bir cebirsel yapıdır?

b) $H = \{ (a, b) : a \in \mathbb{Z}_6, b \in \mathbb{Z}_t \}$ kümesinde

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d - 1), \quad (a, b) \odot (c, d) = (ac, 1)$$

işlemleri tanımlanıyor. $\langle H; \oplus, \odot \rangle$ ne tür bir cebirsel yapıdır?

Çözüm.

a) $(0, 5^0) = (0, 1) \in H$ olduğundan $H \neq \emptyset$ 'dir.

Toplama. $a + c \in \mathbb{R}$ ve $b + d \in \mathbb{Z}$ olduğundan kapalıdır. Asosiyatiflik ile komutatiflik $\mathbb{R}$ 'de toplamının ve $\mathbb{Z}$ 'de üstlerin toplanmasının aynı özelliklerinden gelir:

$$\begin{aligned} (a, 5^b) \oplus [(c, 5^d) \oplus (e, 5^f)] &= (a + (c + e), 5^{b+(d+f)}) \\ &= [(a, 5^b) \oplus (c, 5^d)] \oplus (e, 5^f) \end{aligned}$$

Sıfır için $(x, 5^y) \oplus (a, 5^b) = (a, 5^b)$ koşulu $x + a = a$ ve $5^{y+b} = 5^b$, yani $x = 0, y = 0$ verir: $0_H = (0, 5^0) = (0, 1)$. Toplamsal ters ise $(-a, 5^{-b})$ 'dir.

Çarpma. $ac \in \mathbb{R}$ ve $1 = 5^0$ olduğundan kapalıdır; $[(a, 5^b) \odot (c, 5^d)] \odot (e, 5^f) = ((ac)e, 1) = (a(ce), 1)$ ile asosiyatif, $(ac, 1) = (ca, 1)$ ile komutatifdir.

Dağılıma.

$$\begin{aligned} (a, 5^b) \odot [(c, 5^d) \oplus (e, 5^f)] &= (a, 5^b) \odot (c + e, 5^{d+f}) \\ &= (a(c + e), 1) = (ac + ae, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(a, 5^b) \odot (c, 5^d)] \oplus [(a, 5^b) \odot (e, 5^f)] &= (ac, 1) \oplus (ae, 1) \\ &= (ac + ae, 5^{0+0}) = (ac + ae, 1) \end{aligned}$$

İkisi eşit olduğundan yapı komutatif bir halkadır.

Birim. $(x, 5^y) \odot (a, 5^b) = (xa, 1) = (a, 5^b)$ olması $5^b = 1$, yani $b = 0$ gerektirir; oysa $b \neq 0$ olan elemanlar vardır, örneğin $(0, 5)$. Birim eleman yoktur.

Sıfır bölen. $(0, 5) \neq 0_H$ ve $(3, 25) \neq 0_H$ iken

$$(0, 5) \odot (3, 25) = (0 \cdot 3, 1) = (0, 1) = 0_H$$

olduğundan yapı sıfır bölennlidir.

Sonuç: $\langle H; \oplus, \odot \rangle$ komutatif, birimsiz ve sıfır bölennli bir halkadır.

b) $(0, 1) \in H$ olduğundan $H \neq \emptyset$ 'dir.

Toplama kapalı mı? a, c çift ise $a + c$ çifttir; b, d tek ise $b + d$ çift, $b + d - 1$ tektir. Kapalıdır.

Asosyatiflik. İkinci bileşenler için

$$[(b + d - 1) + f] - 1 = b + d + f - 2 = b + [(d + f - 1) - 1] + 1 - 1$$

hesabının iki ucu da $b + d + f - 2$ 'dir; birinci bileşenlerde zaten $\mathbb{Z}$ 'de toplanmanın asosyatifliği geçerlidir.

Komutatiflik. $(a + c, b + d - 1) = (c + a, d + b - 1)$.

Sıfır. $(x, y) \oplus (a, b) = (a, b)$ koşulu $x + a = a$ ve $y + b - 1 = b$ verir: $x = 0$ (çift) ve $y = 1$ (tek). Demek ki $0_H = (0, 1)$ 'dir.

Toplamsal ters. $(a^*, b^*) \oplus (a, b) = (0, 1)$ koşulu $a^* = -a$ (çift) ve $b^* + b - 1 = 1$, yani $b^* = 2 - b$ verir; b tek olduğundan $2 - b$ de tektir.

Çarpma. a, c çift ise ac çifttir ve ikinci bileşen 1 tektir; kapalıdır. Asosyatiflik ve komutatiflik $\mathbb{Z}$ 'deki çarpmadan gelir.

Dağılma.

$$\begin{aligned} (a, b) \odot [(c, d) \oplus (e, f)] &= (a, b) \odot (c + e, d + f - 1) \\ &= (a(c + e), 1) = (ac + ae, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(a, b) \odot (c, d)] \oplus [(a, b) \odot (e, f)] &= (ac, 1) \oplus (ae, 1) \\ &= (ac + ae, 1 + 1 - 1) = (ac + ae, 1) \end{aligned}$$

İkisi eşittir; yapı komutatif bir halkadır.

Birim. $(x, y) \odot (a, b) = (xa, 1) = (a, b)$ olması $b = 1$ gerektirir; $b = 3$ olan elemanlar bulunduğundan birim yoktur.

Sıfır bölenn. $(0, 3) \neq 0_H$ ve $(2, 5) \neq 0_H$ iken $(0, 3) \odot (2, 5) = (0, 1) = 0_H$ 'dir.

Sonuç: bu yapı da komutatif, birimsiz ve sıfır bölennli bir halkadır. İki soruda da çarpımın ikinci bileşeni sabit 1 olduğu için birim ve tersinirlik baştan kaybolur.

■

Cisim kavramı elimizde; artık üzerinde çalışacağımız sayıları sabitleyebiliriz. Sıradaki bölümde bu cismin elemanlarını bir tabloya dizip lineer cebirin baş nesnesini kuruyoruz: [matrisler](#).

3. Matrisler ve İşlemleri

Bir cismin elemanlarını dikdörtgen bir tabloya dizmek, ilk bakışta yalnızca bir düzenleme işi gibi görünür. Ama bu tabloya doğru işlemler tanımlandığında ortaya lineer cebirin baş nesnesi çıkar: denklem sistemlerini, dönüşümleri ve geometrik hareketleri aynı dille yazabilen matris. Bu bölümde matrisleri kurup dört temel işlemi tanımlıyoruz.

Bundan sonra K daima **komutatif bir cismi** gösterecektir; 0_K ve 1_K bu cismin sıfırı ve birimidir.

3.1 Matris Nedir?

Tanım 3.1 (Matris). K herhangi bir komutatif cisim ve $a_{ij} \in K$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) olmak üzere

$$A = (a_{ij})_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tablosuna K cismi üzerinde m satırlı, n sütunlu bir **matris** ($A_{(m,n)}$ K -matrisi) denir. a_{ij} elemanına matrisin (i, j) **bileşeni** denir: i satırın, j sütunun numarasıdır.

Tanım 3.2 (Satır ve Sütun Matrisleri). $A_{(1,n)}$ biçimindeki bir matrise K -**satır matrisi**, $A_{(m,1)}$ biçimindeki bir matrise K -**sütun matrisi** denir.

$K = \mathbb{R}$ alındığında

$$A_{(1,4)} = (1 \ 3 \ 4 \ 2), \quad A_{(3,1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

sırasıyla bir satır matrisi, bir sütun matrisi ve 2×3 tipinde bir $\mathbb{R}$ -matristir. K 'nin her elemanı $A_{(1,1)}$ tipinde bir matris olarak düşünülebilir.

Tanım 3.3 (Sıfır Matris). Bütün bileşenleri 0_K olan matrise **sıfır matris** denir ve $O_{(m,n)}$ ile gösterilir.

Tanım 3.4 (Matrislerin Eşitliği). Aynı tipteki iki matris, karşılıklı bütün bileşenleri eşitse **eşittir**:

$$A_{(m,n)} = B_{(m,n)} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

3.2 Toplama ve Skalerle Çarpma

Tanım 3.5 (Matrislerin Toplamı). $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ ve $B = (b_{ij})_{(m,n)}$ **aynı tipte** iki K -matris olsun. Bileşenleri

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

olan $C = (c_{ij})_{(m,n)}$ matrisine A ile B 'nin **toplamı** denir ve $C = A + B$ yazılır.

Farklı tipteki matrisler toplanamaz; toplama işlemi bileşen bileşen, yani K 'deki toplamayla yapılır.

Tanım 3.6 (Skalerle Çarpım). $\lambda \in K$ ve $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ olsun. Bileşenleri $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ olan matrise A 'nın λ skaleriyle çarpımı denir:

$$\lambda A = A\lambda = (\lambda a_{ij})_{(m,n)}$$

Özel olarak $-A = (-a_{ij})_{(m,n)}$ 'dir; burada $-a_{ij}$, a_{ij} 'nin K 'deki toplamsal tersidir.

Örnek 3.1 (Bir Skalerle Çarpım). $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}$ -matrisi ve $\lambda = -\sqrt{2}$ için λA matrisini bulunuz.

Çözüm.

Her bileşen $-\sqrt{2}$ ile çarpılır:

$$-\sqrt{2} A = \begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

■

Teorem 3.1 (Toplama ve Skalerle Çarpmanın Özellikleri). A, B, C aynı tipte K -matrisler ve $k_1, k_2 \in K$ olsun. O hâlde

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$
2. $A + B = B + A$
3. $A + O_{(m,n)} = A$
4. $A + (-A) = O_{(m,n)}$
5. $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$
6. $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
7. $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
8. $1_K A = A$ ve $0_K A = O_{(m,n)}$

İspat.

Bütün özellikler bileşen bileşen doğrulanır; her biri K 'deki karşılık gelen özelliğe indirgenir. Örneğin birinci özelliğe her iki tarafın (i, j) bileşeni

$$[(A + B) + C]_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = [A + (B + C)]_{ij}$$

olur; ortadaki eşitlik K 'de toplamanın asosyatifiğidir. Beşinci özellikte

$$[k_1(A + B)]_{ij} = k_1(a_{ij} + b_{ij}) = k_1a_{ij} + k_1b_{ij} = [k_1A + k_1B]_{ij}$$

olur; kullanılan tek şey K 'de çarpmanın toplama üzerine dağılmasıdır. Diğerleri de aynı yolla, sırasıyla K 'de toplamanın komutatifiği, 0_K 'nin sıfır oluşu, $-a$ 'nın ters oluşu ve çarpmanın asosyatifiği kullanılarak elde edilir.

■

💡 Matrisler toplamaya göre bir grup

İlk dört özellik tam olarak şunu söyler: sabit bir (m, n) tipi için bütün K -matrislerin kümesi, matris toplamasına göre komutatif bir gruptur; sıfırı $O_{(m,n)}$, bir A matrisinin tersi $-A$ 'dır. Kalan dört özellik ise skalerle çarpmanın bu grupla nasıl uyduğunu söyler — ileride göreceğimiz **vektör uzayı** tanımının aksiyomları tam olarak bunlardır.

3.3 Matris Çarpımı

Toplama tanımı beklenen biçimdeydi; çarpım ise satır ile sütunu eşleştirir ve bu yüzden tipler üzerinde bir uyum koşulu getirir.

Tanım 3.7 (Matrislerin Çarpımı). $A = (a_{ij})_{(m,p)}$ ve $B = (b_{ij})_{(p,n)}$ K -matrisler olsun; yani A 'nın sütun sayısı B 'nin satır sayısına eşit olsun. Bileşenleri

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^p a_{it}b_{tj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

olan $C = (c_{ij})_{(m,n)}$ matrisine A ile B 'nin **çarpımı** denir: $C = AB$.

c_{ij} , A 'nın i -inci satırı ile B 'nin j -inci sütununun karşılıklı bileşenleri çarpılıp toplanarak elde edilir. $A_{(m,p)}$ ve $B_{(q,n)}$ matrislerinde $p \neq q$ ise AB çarpımı **tanımlanamaz**.

⚠ Çarpımda kaybolan iki alışkanlık

1. Sıfır bölenler vardır. Sıfır matristen farklı iki matrisin çarpımı sıfır matris olabilir:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq O, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

2. Çarpım komutatif değildir. $A_{(2,3)}$ ve $B_{(3,2)}$ için AB bir 2×2 , BA ise bir 3×3 matristir; tipleri bile farklıdır. Kare matrislerde tipler uyuşsa da eşitlik genel olarak sağlanmaz.

Örnek 3.2 (İki Matrisin Çarpımı). $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ için AB çarpımını hesaplayınız ve $AB \neq BA$ olduğunu gözlemleyiniz.

Çözüm.

A bir 2×3 , B bir 3×2 matristir; AB bir 2×2 matristir. Bileşenleri tek tek yazalım:

$$c_{11} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 2 - 1 + 8 = 9$$

$$c_{12} = 1 \cdot 3 + (-1)(-2) + 2 \cdot 5 = 3 + 2 + 10 = 15$$

$$c_{21} = 3 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + (-2) \cdot 4 = 6 - 3 - 8 = -5$$

$$c_{22} = 3 \cdot 3 + (-3)(-2) + (-2) \cdot 5 = 9 + 6 - 10 = 5$$

Yani

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

BA çarpımı ise tanımlıdır ama 3×3 tipindedir; iki matrisin tipleri farklı olduğundan $AB \neq BA$ 'dır.

■

Teorem 3.2 (Çarpımın Özellikleri). Aşağıdaki çarpımların tanımlı olduğu tiplerde alınmak üzere, $k \in K$ için

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B + C) = AB + AC$
3. $(B + C)A = BA + CA$
4. $k(AB) = (kA)B = (Ak)B = A(kB)$
5. $O_{(p,m)}A_{(m,n)} = O_{(p,n)}$ ve $B_{(m,n)}O_{(n,p)} = O_{(m,p)}$
6. AB matrisinin i -inci satırı, A 'nın i -inci satırı $\cdot B$ çarpımına eşittir.

İspat.

Altıncı özelliği yazalım; diğerleri de aynı biçimde bileşenler üzerinden yürür. $A = (a_{ij})_{(m,p)}$ ve $B = (b_{ij})_{(p,n)}$ olsun. AB 'nin i -inci satırının j -inci bileşeni tanım gereği

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

Öte yandan A 'nın i -inci satırı $(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{ip})$ bir $1 \times p$ matristir; bunu B ile çarparsak elde edilen $1 \times n$ matrisin j -inci bileşeni yine aynı toplamdır. İki satır bileşen bileşen çakıştığından eşittirler.

■

3.4 Birim Matris

Tanım 3.8 (Birim Matris). Esas köşegen üzerindeki bileşenleri 1_K , diğer bütün bileşenleri 0_K olan $n \times n$ matrise n -inci mertebeden **birim matris** denir ve I_n ile gösterilir:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1_K & 0_K & \cdots & 0_K \\ 0_K & 1_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & 0_K & \cdots & 1_K \end{pmatrix}$$

Her $A_{(m,n)}$ için $I_n A = A = A I_n$ 'dir; özel olarak A n -inci mertebeden kare matris ise $I_n A = A I_n = A$ 'dır.

i Kare matrisler bir halka oluşturur

n -inci mertebeden bütün kare K -matrislerin kümesi, matris toplaması ve matris çarpımı işlemleriyle **birimli** bir **halkadır**; birimi I_n 'dir. Bu halka $n \geq 2$ için **komutatif değildir** ve **sıfır bölennlidir** — yukarıdaki iki uyarı tam olarak bunu söylüyordu.

3.5 Transpoze

Tanım 3.9 (Transpoze). $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ matrisinde satırlarla sütunların yeri değiştirilerek elde edilen $n \times m$ matrise A 'nın **transpozesi** denir ve A^t ile gösterilir. Yani A^t 'nin (j, i) bileşeni a_{ij} 'dir.

Örneğin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Teorem 3.3 (Transpozenin Özellikleri). Uygun tiplerde alınmak üzere $k \in K$ için

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. $(kA)^t = kA^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

İspat.

Dördüncü özelliği gösterelim; sıranın tersine dönmesi tam olarak burada ortaya çıkar. $A = (a_{ij})_{(m,p)}$, $B = (b_{ij})_{(p,n)}$ olsun.

AB matrisinin (i, j) bileşeni $a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$ 'dir; dolayısıyla $(AB)^t$ matrisinin (j, i) bileşeni de aynı sayıdır.

$B^t A^t$ matrisinin (j, i) bileşeni ise, B^t 'nin j -inci satırı ile A^t 'nin i -inci sütununun çarpımıdır; bunlar sırasıyla B 'nin j -inci sütunu ile A 'nın i -inci satırıdır:

$$b_{1j}a_{i1} + b_{2j}a_{i2} + \cdots + b_{pj}a_{ip}$$

K komutatif bir cisim olduğundan $b_{tj}a_{it} = a_{it}b_{tj}$ 'dir ve iki ifade terim terim aynıdır. Bileşenler çakıştığından $(AB)^t = B^t A^t$ 'dir.

■

3.6 Alt Matris

Tanım 3.10 (Alt Matris). $A_{(m,n)}$ matrisinin p satırı ve q sütunu ($p < m, q < n$) silinerek elde edilen $(m-p) \times (n-q)$ tipindeki matrise A 'nın bir **alt matrisi** denir.

Örnek 3.3 (Bir Alt Matrisin Bulunması). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ matrisinde ikinci satır ile ikinci ve dördüncü sütunları silerek elde edilen alt matrisi yazınız.

Çözüm.

Geriye birinci ve üçüncü satırlar ile birinci ve üçüncü sütunlar kalır:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

3.7 Alıştırma

Alıştırma 3.1 (Matris İşlemleri).

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ için AB ve BA çarpımlarını hesaplayıp karşılaştırınız.
- $A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ için $(A^t)^t = A$ eşitliğini doğrulayınız ve AA^t çarpımının tipini belirleyip hesaplayınız.
- A ve B n -inci mertebeden kare matrisler olmak üzere $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ eşitliğinin genel olarak doğru olmadığını gösteriniz; hangi ek koşul altında doğru olur?

Çözüm.

a) Önce AB 'yi hesaplayalım:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi BA 'yı hesaplayalım:

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

İki matris aynı tipte olduğu hâlde eşit değildir: matris çarpımı komutatif değildir.

b) Transpozeyi alalım:

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Satırla sütunun yerini iki kez değiştirmek başlangıçtaki matrisi verir. A bir 2×3 , A^t bir 3×2 matris olduğundan AA^t bir 2×2 matristir:

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2^2 + (-1)^2 + 0^2 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 1^2 + 3^2 + 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 26 \end{pmatrix}$$

c) Dağılıma özelliğini iki kez uygulayalım:

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A(A + B) + B(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

Bu ifadenin $A^2 + 2AB + B^2$ olması için $AB + BA = 2AB$, yani $BA = AB$ gerekir. Genel olarak matris çarpımı komutatif olmadığından eşitlik doğru değildir. Somut bir karşı örnek için (a) şıkkındaki matrisleri alalım: orada $AB \neq BA$ olduğundan

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

olur. Eşitlik ancak ve ancak A ile B **değişmeli** olduğunda, yani $AB = BA$ olduğunda geçerlidir.

■

Matrisleri toplayıp çarpmayı öğrendik; şimdi onları sadeleştirmeyi öğreneceğiz. Satırlar üzerinde yapılan üç basit işlem, her matrisi olabildiğince yalın bir biçime indirger: [merdiven matrisler ve satır eşdeğerlik](#).

4. Merdiven Matrisler ve Satır Eşdeğerlik

Bir matrisi sadeleştirmenin standart yolu, satırları üzerinde üç basit işlem yapmaktır. Bu işlemler matrisi tanınmaz hâle getirmez; taşıdığı bilgiyi korurken görünüşünü basamak basamak inen bir merdivene çevirir. Bu bölümde o merdiveni tanımlayıp her matrisin ona indirgenebildiğini göstereceğiz — ilerideki bütün hesap yöntemlerinin (ters bulma, denklem çözme, rank hesabı) motoru budur.

4.1 Merdiven Matrisler

Tanım 4.1 (Merdiven Matris). $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ bir K -matris olsun. $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ olmak üzere

1. $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ bileşenleri 0_K 'dan farklı,
2. $i \leq r$ ve $j < j_i$ için $a_{ij} = 0_K$, ayrıca $i > r$ için bütün $a_{ij} = 0_K$

ise A 'ya bir K -**merdiven matris** (ezelon matris) denir. Buradaki a_{ij_i} bileşenlerine **ayrıcalıklı elemanlar** denir.

Sözle söylersek: ilk r satırın her biri sıfırdan farklı bir bileşenle başlar, bu ilk sıfırdan farklı bileşenlerin sütun numaraları aşağı indikçe kesin artar ve r -inci satırdan sonraki bütün satırlar tamamen sıfırdır.

Tanım 4.2 (Satır İndirgenmiş Merdiven Matris). Bir K -merdiven matriste ayrıca

1. $j_1, j_2, \dots, j_r$ sütunlarında ayrıcalıklı elemanlardan başka 0_K 'dan farklı bileşen yoksa,
2. ayrıcalıklı elemanların hepsi 1_K 'ya eşitse

bu matrise **satır indirgenmiş merdiven matris** denir.

⚠ İki uç örnek

Sıfır matris $O_{(m,n)}$ bir merdiven matris **değildir**: tanım, sıfırdan farklı en az bir ayrıcalıklı eleman ister. Buna karşılık birim matris I_n bir satır indirgenmiş merdiven matristir — ayrıcalıklı elemanları köşegen üzerindeki 1_K 'lardır ve o sütunlarda başka bileşen yoktur.

4.2 Elemanter Satır İşlemleri

Tanım 4.3 (Elemanter Satır İşlemleri). Bir $A_{(m,n)}$ K -matrisi üzerinde tanımlı üç işleme **elemanter satır işlemleri** denir. R_i ile i -inci satır gösterilmek üzere:

$$[e_1]: R_i \leftrightarrow R_j \quad (\text{iki satırın yeri değiştirilir})$$

$$[e_2]: R_i \rightarrow kR_i \quad (k \in K, k \neq 0_K)$$

$$[e_3]: R_i \rightarrow kR_j + R_i \quad (k \in K \setminus \{0_K\}, i \neq j)$$

Tanım 4.4 (Satır Eşdeğerlik). $B_{(m,n)}$ matrisi, $A_{(m,n)}$ matrisine sonlu sayıda elemanter satır işlemi uygulanarak elde ediliyorsa A ile B 'ye **satır eşdeğer** matrisler denir ve

$$A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$$

yazılır.

Üç işlemin de geri alınabilir olduğuna dikkat edin: yer değiştirme kendi tersidir, k ile çarpma k^{-1} ile çarpılarak, $kR_j + R_i$ ise $-kR_j + R_i$ ile geri alınır. Bu yüzden satır eşdeğerlik gerçekten simetrik bir bağıntıdır.

4.3 Her Matris Bir Merdivene İnegelir

Teorem 4.1 (Merdiven Şekline İndirgeme). Sıfır matristen farklı her $A_{(m,n)}$ K -matrisi, bir K -merdiven matrise satır eşdeğerdir.

İspat.

$A \neq O_{(m,n)}$ olduğundan A 'nın 0_K 'dan farklı en az bir bileşeni vardır. 0_K 'dan farklı bileşen içeren ilk sütunun numarası j_1 olsun; tanım gereği j_1 'den önceki bütün sütunlar tamamen sıfırdır.

Durum 1: $a_{1j_1} \neq 0_K$. Her $l = 2, \dots, m$ için $a_{lj_1} \neq 0_K$ olduğunda

$$R_l \rightarrow -\frac{a_{lj_1}}{a_{1j_1}}R_1 + R_l$$

işlemi uygulanır. Bu işlemten sonra j_1 -inci sütunun ilk bileşeni dışındaki bütün bileşenleri 0_K olur.

Durum 2: $a_{1j_1} = 0_K$. j_1 -inci sütunda 0_K 'dan farklı bir a_{tj_1} bileşeni vardır. $R_1 \leftrightarrow R_t$ işlemiyle bu bileşen birinci satıra taşınır ve Durum 1'deki işlemler uygulanır.

Her iki durumda da elde edilen matriste birinci satır j_1 -inci sütunda sıfırdan farklı bir bileşenle başlar ve o sütunun altı tamamen sıfırdır. Şimdi bu matrisin **birinci satırı dışında kalan** $(m-1) \times n$ alt matrisine aynı işlem tekrarlanır. Her adımda geriye kalan alt matrisin satır sayısı bir azaldığından, işlem sonlu adımda ya alt matris sıfır matrise dönerek ya da satırlar tükenerek durur. Duruş anında elde edilen matris, tanımdaki iki koşulu da sağlayan bir merdiven matristir.

■

Tanım 4.5 (Merdiven Şekli). Yukarıdaki teoremle bulunan, A 'ya satır eşdeğer olan merdiven matrise A 'nın bir **merdiven şekli** denir.

Örnek 4.1 (Bir Merdiven Şekli). $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin bir merdiven şeklini bulunuz.

Çözüm.

Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 7 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Şimdi ikinci sütunun altını temizleyelim:

$$R_3 \rightarrow -\frac{7}{3}R_2 + R_3 \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

Ayrıcalıklı elemanlar 1, 3 ve $\frac{7}{3}$ 'tür; sütun numaraları $j_1 = 1 < j_2 = 2 < j_3 = 3$ olarak artmaktadır. Bulunan matris A 'nın bir merdiven şeklidir.

■

⚠ Merdiven şekli tek türlü belirli değildir

Aynı matris, işlemlerin sırasına göre farklı merdiven matrislere indirgenebilir. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi için

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

matrislerinin ikisi de A 'nın birer merdiven şeklidir; ikinci yolda yalnızca ikinci satır $\frac{1}{4}$ ile çarpılmıştır. $B \neq C$ olduğundan merdiven şekli tek değildir.

4.4 Satır Kanonik Şekil

Teorem 4.2 (Satır İndirgenmiş Merdivene İndirgeme). Her K -merdiven matris, bir K -satır indirgenmiş merdiven matrise satır eşdeğerdir. Dolayısıyla sıfır matristen farklı her $A_{(m,n)}$ matrisi bir satır indirgenmiş merdiven matrise satır eşdeğerdir.

İspat.

A 'nın bir merdiven şekli alınsın; ayrıcalıklı elemanları $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$ olsun. Önce her $i = 1, \dots, r$ için

$$R_i \rightarrow (a_{ij_i})^{-1} R_i$$

işlemi uygulanır; $a_{ij_i} \neq 0_K$ ve K bir cisim olduğundan bu tersler vardır ve bütün ayrıcalıklı elemanlar 1_K olur. Ardından $i = r, r-1, \dots, 2$ sırasıyla, j_i -inci sütunda i -inci satırın **üstünde** kalan her a_{lj_i} bileşeni için

$$R_l \rightarrow -a_{lj_i} R_i + R_l \quad (l < i)$$

uygulanır. Altan yukarı doğru ilerlendiğinden, temizlenen bir sütun sonraki adımlarda bozulmaz. Sonuçta ayrıcalıklı sütunlarda tek sıfırdan farklı bileşen 1_K 'lar olarak kalır; bu bir satır indirgenmiş merdiven matristir. ■

Merdiven şeklinin aksine, satır indirgenmiş merdiven şekli **tek türlü** belirlidir; bu yüzden ona A 'nın **satır kanonik şekli** denir.

Örnek 4.2 (Satır Kanonik Şekil). $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ matrisinin satır kanonik şeklini bulunuz.

Çözüm.

Hesabı kolaylaştırmak için ayrıcalıklı eleman olarak 1'i seçelim:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -4 & 1 & -6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & -9 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow 4R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -6R_1 + R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elde edilen matris bir merdiven matristir. Şimdi ayrıcalıklı elemanı 1 yapıp üstünü temizleyelim:

$$R_2 \rightarrow \frac{1}{9}R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad R_1 \rightarrow -2R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Son matris A 'nın satır kanonik şeklidir.

■

Örnek 4.3 (Sıfır Satır İçeren Bir Kanonik Şekil). $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin satır kanonik şeklini bulunuz.

Çözüm.

Birinci sütunun ilk bileşeni sıfır olduğundan önce satır değiştirelim:

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right) \quad R_3 \rightarrow -R_1 + R_3 \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3 \quad \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Bu bir merdiven matristir; üçüncü satırın tamamen sıfır olması tanıma aykırı değildir ($r = 2$). Şimdi kanonik şekle geçelim:

$$R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad R_1 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

■

4.5 Alıştırma

Alıştırma 4.1 (Merdiven ve Kanonik Şekiller).

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin bir merdiven şeklini bulunuz.
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin satır kanonik şeklini bulunuz.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin satır kanonik şeklini bulunuz.

Çözüm.

a) Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

İkinci sütun tamamen sıfır olduğundan sıradaki ayrıcalıklı eleman üçüncü sütundadır ($j_2 = 3$):

$$R_3 \rightarrow -\frac{5}{4}R_2 + R_3 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Ayrıcalıklı elemanların sütunları $j_1 = 1 < j_2 = 3 < j_3 = 4$ olarak arttığından bu bir merdiven matristir.

b) Matris zaten merdiven şeklindedir; ayrıcalıklı elemanlar 2, 3 ve 2'dir. Önce hepsini 1 yapalım:

$$\begin{array}{l} R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1 \\ R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Şimdi alttan yukarı doğru ayrıcalıklı sütunları temizleyelim. Beşinci sütun için

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -\frac{5}{3}R_3 + R_2 \\ R_1 \rightarrow -3R_3 + R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Üçüncü sütun için

$$R_1 \rightarrow -2R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Son matris satır kanonik şekildedir; birinci satırın dördüncü bileşeni $\frac{5}{2} - \frac{4}{3} = \frac{15-8}{6} = \frac{7}{6}$ 'dir.

c) Yukarıdaki örnekte bu matrisin merdiven şeklini bulmuştuk:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{10}{3} \end{array} \right)$$

Ayrıcalıklı elemanları 1 yapalım:

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \rightarrow \frac{3}{7}R_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{array} \right)$$

Üçüncü sütunu temizleyelim:

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow \frac{4}{3}R_3 + R_2 \\ R_1 \rightarrow -3R_3 + R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & \frac{23}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{array} \right)$$

İkinci satırın son bileşeni $\frac{4}{3} - \frac{40}{21} = \frac{28-40}{21} = -\frac{4}{7}$, birinci satırınki ise $-1 + \frac{30}{7} = \frac{23}{7}$ 'dir. Son olarak ikinci sütunu temizleyelim:

$$R_1 \rightarrow 2R_2 + R_1 \quad \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{15}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{7} \end{array} \right)$$

çünkü $\frac{23}{7} - \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ 'dir. Bu, A 'nın satır kanonik şeklidir.

■

Satır işlemleri şimdilik elle uygulanan kurallar gibi duruyor. Sıradaki bölümde kare matrislerin özel ailelerini tanıyacak ve bir matrisin “bölünebilir” olmasının ne demek olduğunu soracağız: [kare matrisler ve ters matris](#).

5. Kare Matrisler ve Ters Matris

Satır ve sütun sayısı eşit olan matrisler ayrı bir dünya kurar: yalnız onlar kendileriyle çarpılabilir, kuvvet alabilir ve — şanslıysa — bölünebilir. Bu bölümde kare matrislerin özel ailelerini tanıyıp lineer cebirin en çok kullanılan kavramlarından birine varıyoruz: ters matris.

5.1 Kare Matrisler ve Esas Köşegen

Tanım 5.1 (Kare Matris). Satır ve sütun sayıları eşit olan bir K -matrise **kare matris** denir. Bir kare matriste birbirine eşit olan satır ve sütun sayısına, kare matrisin **mertebe**si denir.

Tanım 5.2 (Esas Köşegen). $A = (a_{ij})_{(n,n)}$ n -inci mertebeden bir kare K -matris olsun. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ bileşenlerine **esas köşegen** üzerinde bulunan bileşenler denir.

Tanım 5.3 (Üçgensel Matris). Esas köşegeninin altındaki **veya** üstündeki bütün bileşenleri 0_K olan kare matrise **üçgensel matris** denir.

Tanım 5.4 (Köşegen Matris). Esas köşegeninin dışında kalan bütün bileşenleri 0_K olan kare matrise **köşegen matris** denir.

Tanım 5.5 (Skaler Matris). Esas köşegenindeki bileşenlerin tamamı aynı bir $\lambda \neq 0_K$ skalerine eşit olan köşegen matrise **skaler matris** denir. Özel olarak $\lambda = 1_K$ alınırsa **birim matris** I_n elde edilir: birim matris, $\lambda = 1_K$ olan skaler matristir.

Örnekler $K = \mathbb{R}$ üzerinde:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{kare}), & B &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (\text{üçgensel}) \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{üçgensel}), & D &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{köşegen}) \\ E &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{skaler}), & F &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad (\text{birim}) \end{aligned}$$

A matrisinin esas köşegeni üzerindeki bileşenler $a_{11} = 1, a_{22} = 1, a_{33} = 1$ ve $a_{44} = 0$ 'dır.

Teorem 5.1 (Skaler Matrislerin Değişmeliliği). A , n -inci mertebeden bir skaler K -matris ve B de n -inci mertebeden herhangi bir kare K -matris olsun. O hâlde

$$AB = BA$$

Ayrıca herhangi bir $A_{(m,n)}$ için $I_m A = A = A I_n$ 'dir ve bir köşegen matrisin, dolayısıyla birim matrisin transpozesi kendisine eşittir.

İspat.

A skaler olduğundan $\lambda \in K \setminus \{0_K\}$ olmak üzere esas köşegeni λ 'lardan, geri kalanı 0_K 'lerden oluşur. $B = (b_{ij})_{(n,n)}$ alalım. Çarpım tanımında A 'nın i -inci satırının yalnızca i -inci bileşeni sıfırdan farklı olduğundan

$$(AB)_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it}b_{tj} = \lambda b_{ij}$$

Benzer şekilde A 'nın j -inci sütununun yalnızca j -inci bileşeni sıfırdan farklı olduğundan

$$(BA)_{ij} = \sum_{t=1}^n b_{it}a_{tj} = b_{ij}\lambda$$

K komutatif bir cisim olduğundan $\lambda b_{ij} = b_{ij}\lambda$ 'dır; iki matrisin bütün bileşenleri çakışır ve $AB = BA$ olur.

■

5.2 Ters Matris

Tanım 5.6 (Ters Matris). A , n -inci mertebeden bir kare K -matris olsun.

$$AB = BA = I_n$$

olacak şekilde n -inci mertebeden bir kare B K -matrisi varsa, B 'ye A 'nın **tersi** denir ve $B = A^{-1}$ biçiminde gösterilir.

Teorem 5.2 (Tersin Özellikleri).

1. n -inci mertebeden bir A kare K -matrisinin tersi varsa, bu ters tek olarak belirlidir.
2. Ters olan bir A kare matrisi için $(A^{-1})^{-1} = A$ 'dır.
3. A ve B tersleri olan n -inci mertebeden kare matrisler ise $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 'dir.
4. $A_1, A_2, \dots, A_m$ tersleri olan n -inci mertebeden kare matrisler ise

$$(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

İspat.

1. A 'nın birbirinden farklı B ve C gibi iki tersi olduğunu varsayalım:

$$AB = BA = I_n, \quad AC = CA = I_n$$

Matris çarpımının asosyatifliğini kullanalım:

$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_n = C$$

Bu, $B \neq C$ varsayımıyla çelişir. O hâlde ters varsa tektir.

2. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ bağıntısı, A^{-1} için okunduğunda tam olarak A 'nın A^{-1} 'in tersi olduğunu söyler; yani $(A^{-1})^{-1} = A$ 'dır.

3. $B^{-1}A^{-1}$ matrisinin AB 'nin tersi olduğunu doğrudan çarparak görelim:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n$$

Her iki çarpım da I_n verdiğiinden $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ 'dir.

4. Üçüncü özellikten tümevarımla elde edilir: $m = 2$ için iddia üçüncü özelliktir. $m - 1$ çarpan için doğru olduğu varsayılırsa, $A_1 \cdots A_{m-1}$ 'i tek bir matris sayarak

$$(A_1 \cdots A_{m-1} A_m)^{-1} = A_m^{-1} (A_1 \cdots A_{m-1})^{-1} = A_m^{-1} (A_{m-1}^{-1} \cdots A_1^{-1})$$

bulunur; bu da iddia edilen ifadedir.

■

Tanım 5.7 (Regüler ve Singüler Matris). Ters olan bir matrise **regüler** (tersinir) matris, tersi olmayan bir matrise **singüler** matris denir.

⚠ Her kare matrisin tersi yoktur

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi singülerdir. Gerçekten $AB = BA = I_2$ olacak bir $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ olsaydı

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

çıkardı; bu ise $1 \neq 0$ olmasıyla çelişir.

5.3 Matrisin Kuvvetleri

Tanım 5.8 (Matris Kuvvetleri). A , n -inci mertebeden bir kare K -matris ve m bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^{m+1} = A^m A$$

biçiminde tanımlanır. Örneğin $A^2 = AA$ ve $A^3 = A^2 A$ 'dır.

ℓ ve m negatif olmayan tam sayılar olmak üzere

$$A^\ell A^m = A^{\ell+m}, \quad (A^\ell)^m = A^{\ell m}$$

eşitlikleri geçerlidir. A regüler ise negatif tam sayı kuvvetleri de

$$A^{-m} = (A^{-1})^m$$

biçiminde tanımlanır ve $(A^{-1})^m = (A^m)^{-1}$ 'dir.

5.4 Alıştırma

Alıştırma 5.1 (Kare Matrisler ve Ters).

- A ve B n -inci mertebeden köşegen K -matrisler ve $k \in K \setminus \{0_K\}$ olsun. $A + B$, AB ve kA matrislerinin de köşegen olduğunu gösteriniz.
- A kare matrisinin tersi varsa A^t 'nin de tersi olduğunu ve $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ olduğunu gösteriniz.
- $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ köşegen matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşulun her i için $a_{ii} \neq 0_K$ olduğunu gösterip A^{-1} 'i bulunuz.

Çözüm.

a) $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ köşegen olsun; yani $i \neq j$ iken $a_{ij} = b_{ij} = 0_K$ 'dir.

Toplam: $i \neq j$ için $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0_K + 0_K = 0_K$; toplam köşegendir.

Skalerle çarpım: $i \neq j$ için $(kA)_{ij} = k \cdot 0_K = 0_K$; sonuç köşegendir.

Çarpım: Bileşeni açalım:

$$(AB)_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it} b_{tj}$$

A köşegen olduğundan $a_{it} = 0_K$ olmayan tek terim $t = i$ olanıdır; toplam $a_{ii}b_{ij}$ 'ye iner. B de köşegen olduğundan $i \neq j$ iken $b_{ij} = 0_K$ 'dir, yani $(AB)_{ij} = 0_K$ 'dir. Köşegen üzerinde ise $(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ bulunur:

$$\text{diag} (a_{11}, \dots, a_{nn}) \cdot \text{diag} (b_{11}, \dots, b_{nn}) = \text{diag} (a_{11}b_{11}, \dots, a_{nn}b_{nn})$$

b) A regüler olsun: $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Her iki eşitliğin transpozisini alalım ve $(XY)^t = Y^tX^t$ kuralını kullanalım:

$$(AA^{-1})^t = (A^{-1})^tA^t = I_n^t = I_n$$

$$(A^{-1}A)^t = A^t(A^{-1})^t = I_n^t = I_n$$

İki çarpım da I_n verdiğiinden A^t regülerdir ve tanım gereği tersi $(A^{-1})^t$ 'dir. (Burada $I_n^t = I_n$ olduğunu, birim matrisin köşegen olmasından kullandık.)

c) Yeterlik. Her $a_{ii} \neq 0_K$ olsun. K bir cisim olduğundan her a_{ii} 'nin tersi vardır. (a) şıkkındaki köşegen çarpım kuralıyla

$$\text{diag} (a_{11}, \dots, a_{nn}) \cdot \text{diag} (a_{11}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1}) = \text{diag} (1_K, \dots, 1_K) = I_n$$

olur; çarpım köşegen matrislerde değişmeli olduğundan diğer sıra da I_n verir. Demek ki A regülerdir ve

$$A^{-1} = \text{diag} (a_{11}^{-1}, a_{22}^{-1}, \dots, a_{nn}^{-1})$$

Gereklik. Bir k için $a_{kk} = 0_K$ olsun. A köşegen olduğundan k -inci satırının bütün bileşenleri 0_K 'dir. Herhangi bir B matrisi için, çarpımın satırlarına ilişkin kuraldan

$$(AB) \text{ matrisinin } k\text{-inci satırı} = (A \text{ 'nın } k\text{-inci satırı}) \cdot B = (0_K \cdots 0_K)$$

olur. Oysa I_n 'nin k -inci satırında $1_K \neq 0_K$ bulunur; dolayısıyla hiçbir B için $AB = I_n$ olamaz ve A singülerdir.

■

Bir matrisin tersinin olup olmadığını, tanıma dönüp bilinmeyen bir B aramadan anlayabilir miyiz? Ve varsa bu tersi sistemli biçimde hesaplayabilir miyiz? İki sorunun da yanıtı satır işlemlerinde saklı: [elemanter matrisler ve ters hesabı](#).

6. Elemanter Matrisler ve Ters Hesabı

Elemanter satır işlemleri şimdiye kadar “matris üzerinde yapılan hamleler” olarak kaldı. Bu bölümde her hamlenin aslında uygun bir matrisle **soldan çarpmak** olduğunu göreceğiz. Bu tek gözlem, satır işlemlerini matris cebirinin içine taşır ve arkasından iki büyük sonuç gelir: bir matrisin ne zaman regüler olduğunun ölçütü ve tersini hesaplayan sistemli yöntem.

6.1 Elemanter Satır Matrisleri

Tanım 6.1 (Elemanter Satır Matrisi). I_m K -birim matrisine yalnız bir tane **elemanter satır işlemi** uygulanarak elde edilen m -inci mertebeden kare K -matrise **elemanter satır matrisi** denir ve $\hat{E}$ ile gösterilir:

$$e(I_m) =: \hat{E}, \quad e_1(I_m) =: \hat{E}_1, \quad e_2(I_m) =: \hat{E}_2, \quad e_3(I_m) =: \hat{E}_3$$

Bundan sonra “elemanter matris” dendiğinde elemanter satır matrisi anlaşılacaktır.

I_3 üzerinde üç işlemin karşılığı:

$$e_1 : R_2 \leftrightarrow R_3 \Rightarrow \hat{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 : R_3 \rightarrow -6R_3 \Rightarrow \hat{E}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$e_3 : R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2 \Rightarrow \hat{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.2 Satır İşlemi Bir Çarpımdır

Teorem 6.1 (Elemanter İşlem Elemanter Matrisle Çarpımdır). e herhangi bir elemanter satır işlemi, $\hat{E} = e(I_m)$ buna karşılık gelen elemanter satır matrisi ve A bir $A_{(m,n)}$ K -matris olsun. O hâlde

$$e(A) = \hat{E}A$$

İspat.

İspatın tamamı, çarpımın satırlarına ilişkin şu kurala dayanır: $\hat{E}A$ matrisinin i -inci satırı, ($\hat{E}$ 'nin i -inci satırı) $\cdot A$ çarpımına eşittir. Ayrıca $I_m A = A$ 'dır.

1. $e = e_1 (R_i \leftrightarrow R_j)$. $\hat{E}_1$ 'in i -inci satırı, I_m 'nin j -inci satırıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \hat{E}_1 A \text{ 'nin } i\text{-inci satırı} &= (I_m \text{ 'nin } j\text{-inci satırı}) A \\ &= (I_m A) \text{ 'nin } j\text{-inci satırı} = A \text{ 'nin } j\text{-inci satırı} \end{aligned}$$

Bu ise tam olarak $e_1(A)$ 'nin i -inci satırıdır. Aynı hesap j -inci satır için, ve $t \neq i, j$ olan bütün t satırları için (o satırlarda $\hat{E}_1$ ile I_m çakıştığından) tekrarlanır. Bütün satırlar çakıştığından $e_1(A) = \hat{E}_1 A$ 'dır.

2. $e = e_2 (R_i \rightarrow kR_i, k \neq 0_K)$. $\hat{E}_2$ 'nin i -inci satırı, I_m 'nin i -inci satırının k katıdır:

$$\hat{E}_2 A \text{ 'nin } i\text{-inci satırı} = k (I_m \text{ 'nin } i\text{-inci satırı}) A = k (A \text{ 'nin } i\text{-inci satırı})$$

Diğer satırlar değişmez; sonuç $e_2(A)$ 'dır.

3. $e = e_3 (R_i \rightarrow kR_j + R_i)$. $\hat{E}_3$ 'ün i -inci satırı, I_m 'nin j -inci satırının k katı ile i -inci satırının toplamıdır:

$$\hat{E}_3 A \text{ 'nın } i \text{ -inci satırı} = k (A \text{ 'nın } j \text{ -inci satırı}) + (A \text{ 'nın } i \text{ -inci satırı})$$

Bu da $e_3(A)$ 'nın i -inci satırındır; diğer satırlar değişmez.

■

Teorem 6.2 (Elemanter Matrisler Regülerdir). Elemanter satır matrisleri regülerdir ve elemanter satır matrislerinin tersleri de elemanter satır matrisleridir.

İspat.

Her elemanter işlemin, aynı türden bir elemanter işlemle geri alınabildiğini kullanacağız.

1. $e_1 : R_i \leftrightarrow R_j$. Aynı yer değiştirme iki kez uygulanırsa matris değişmez:

$$I_m = e_1 (\hat{E}_1) = e_1(I_m)\hat{E}_1 = \hat{E}_1\hat{E}_1$$

Demek ki $\hat{E}_1$ kendi tersidir.

2. $e_2 : R_i \rightarrow kR_i (k \neq 0_K)$. Bunun geri alınışı $e'_2 : R_i \rightarrow \frac{1}{k}R_i$ 'dir; K bir cisim olduğundan $k^{-1} \in K \setminus \{0_K\}$ 'dir. $\hat{E}'_2 = e'_2(I_m)$ olmak üzere

$$I_m = e'_2 (\hat{E}_2) = \hat{E}'_2\hat{E}_2, \quad I_m = e_2 (\hat{E}'_2) = \hat{E}_2\hat{E}'_2$$

yani $\hat{E}_2$ 'nin tersidir ve kendisi de elemanterdir.

3. $e_3 : R_i \rightarrow kR_j + R_i$. Geri alınışı $e'_3 : R_i \rightarrow -kR_j + R_i$ 'dir ve aynı hesaplara $\hat{E}'_3\hat{E}_3 = \hat{E}_3\hat{E}'_3 = I_m$ bulunur.

■

I_3 üzerinde somut olarak: $R_1 \leftrightarrow R_2$ matrisinin tersi kendisidir; $R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_3$ matrisinin tersi $R_3 \rightarrow 2R_3$ matrisidir; $R_2 \rightarrow 5R_3 + R_2$ matrisinin tersi $R_2 \rightarrow -5R_3 + R_2$ matrisidir.

6.3 Satır Eşdeğerliğin Cebirsel Karşılığı

Teorem 6.3 (Satır Eşdeğerlik ve Regüler Çarpım). $A_{(m,n)}$ ve $B_{(m,n)}$ K -matrisler olsun. A 'nın B 'ye satır eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul, bir takım elemanter satır matrislerinin çarpımı olan regüler bir P matrisiyle

$$B = PA$$

yazılabilmektedir.

İspat.

Gereklik. $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ olsun; A 'yı B 'ye dönüştüren elemanter satır işlemleri sırasıyla $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(p)}$ olsun:

$$e^{(p)} \left(\dots \left(e^{(2)} \left(e^{(1)}(A) \right) \right) \dots \right) = B$$

Her adımda önceki teoremi uygularsak, $\hat{E}^{(i)} = e^{(i)}(I_m)$ olmak üzere

$$\hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(2)} \hat{E}^{(1)} A = B$$

elde edilir; ara adımlarda matris çarpımının asosyatifliği kullanılmıştır. $P = \hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)}$ dersek $PA = B$ olur. Elemanter matrisler regüler ve regüler matrislerin çarpımı regüler olduğundan P regülerdir ve tanım gereği elemanter matrislerin çarpımı biçimindedir.

Yeterlik. $B = (\hat{E}^{(t)} \dots \hat{E}^{(2)} \hat{E}^{(1)}) A$ olacak biçimde elemanter matrisler var olsun. Asosyatiflikle

$$B = \hat{E}^{(t)} \left(\dots \left(\hat{E}^{(2)} \left(\hat{E}^{(1)} A \right) \right) \dots \right) = e^{(t)} \left(\dots \left(e^{(2)} \left(e^{(1)}(A) \right) \right) \dots \right)$$

yazılır; yani B, A 'dan sonlu sayıda elemanter satır işlemiyle elde edilmiştir: $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$.

■

6.4 Regülerliğin Ölçütü

Teorem 6.4 (Regülerlik Ölçütü). Bir $A_{(n,n)}$ K -matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$$A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_n$$

olmasıdır.

İspat.

Yeterlik. $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_n$ olsun. Önceki teoreme göre $PA = I_n$ olacak regüler bir P vardır. O hâlde

$$A = I_n A = (P^{-1}P)A = P^{-1}(PA) = P^{-1}I_n = P^{-1}$$

P regüler olduğundan P^{-1} de regülerdir; yani $A = P^{-1}$ regülerdir ve

$$A^{-1} = (P^{-1})^{-1} = P$$

Gereklik. A regüler olsun. O hâlde $A \neq O_{(n,n)}$ 'dir ve sıfır matristen farklı her matris bir tek satır indirgenmiş merdiven matrise satır eşdeğer olduğundan $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ olacak bir B vardır. Önceki teoremden $B = PA$ biçimindedir; iki regüler matrisin çarpımı regüler olduğundan B regülerdir.

Şimdi $B = I_n$ olduğunu gösterelim. $B \neq I_n$ olsaydı, B satır indirgenmiş bir merdiven matris olduğundan son satırı tamamen 0_K 'lerden ibaret olurdu. B regüler olduğundan B^{-1} vardır ve

$$BB^{-1} \text{ matrisinin son satırı} = (B \text{ 'nin son satırı}) B^{-1} = (0_K \cdots 0_K)$$

olurdu. Oysa $BB^{-1} = I_n$ 'nin son satırında $1_K \neq 0_K$ bulunur — çelişki. Demek ki $B = I_n$, yani $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_n$ 'dir.

■

💡 İspattan çıkan üç sonuç

1. n -inci mertebeden kare matrisler için $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n$ 'dir; dolayısıyla $AB = I_n$ ise doğrudan $B = A^{-1}$ (ve $A = B^{-1}$) denebilir — iki sırayı da denetlemeye gerek yoktur.
2. A^{-1} matrisi, A 'yı I_n 'e dönüştüren elemanter satır matrislerinin çarpımıdır.
3. Herhangi bir satırı veya herhangi bir sütunu tamamen 0_K 'lerden oluşan bir kare matrisin tersi yoktur, çünkü böyle bir matris I_n 'e satır eşdeğer olamaz. Daha genel olarak, A regüler değilse bir satırı tamamen 0_K 'lerden oluşan bir matrise satır eşdeğerdir.

6.5 Blok Matrisler

Yatay ve düşey çizgiler kullanarak bir $A_{(m,n)}$ K -matrisi **blok** adı verilen alt matrislere ayrılabilir; bloklara ayrılmış bir matrise **blok matris** denir. Aynı matris farklı biçimlerde bloklara ayrılabilir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 3 \\ -2 \\ 9 \end{array} \right)$$

Bloklarla işlemler, bileşenlerle işlemlerin birebir kopyasıdır. $A = (A_{ij})$ blok matrisi ve $k \in K$ için $kA = (kA_{ij})$ 'dir. $A = (A_{ij})$ ile $B = (B_{ij})$ **aynı tipte** bloklara ayrılmışsa $A + B = (A_{ij} + B_{ij})$ 'dir. $U = (U_{ik})$ ve $V = (V_{kj})$ blok matrislerinde U_{ik} blokunun sütun sayısı V_{kj} blokunun satır sayısına eşitse

$$W_{ij} = U_{i1}V_{1j} + U_{i2}V_{2j} + \cdots + U_{ip}V_{pj} \Rightarrow UV = (W_{ij})$$

olur — yani bloklar sanki birer bileşenmiş gibi çarpılır.

6.6 Tersin Hesaplanması

Teorem 6.5 (Gauss-Jordan Yöntemiyle Ters). $A_{(n,n)}$ regüler bir K -matris olmak üzere, $n \times 2n$ tipindeki blok matris için

$$(A \mid I_n) \stackrel{\text{satır}}{\sim} (I_n \mid P) \implies P = A^{-1}$$

İspat.

$(A \mid I_n) \stackrel{\text{satır}}{\sim} (I_n \mid P)$ olsun; yani

$$e^{(p)} \left(\dots \left(e^{(1)} \left((A \mid I_n) \right) \right) \dots \right) = (I_n \mid P)$$

olacak elemanter satır işlemleri vardır. Satır işlemleri iki bloka da aynı anda uygulandığından bu tek eşitlik iki eşitliğe ayrılır:

$$e^{(p)} \left(\dots \left(e^{(1)}(A) \right) \dots \right) = I_n, \quad e^{(p)} \left(\dots \left(e^{(1)}(I_n) \right) \dots \right) = P$$

$\hat{E}^{(i)} = e^{(i)}(I_n)$ dersek bunlar

$$\hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)} A = I_n, \quad \hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)} I_n = \hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)} = P$$

biçimini alır. Birincisinden $A^{-1} = \hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)}$, ikincisinden ise bu çarpımın P olduğu okunur; dolayısıyla $A^{-1} = P$ 'dir.

■

Örnek 6.1 (Bir Tersin Hesaplanması). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \mathbb{R}$ -matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm.

$(A \mid I_3)$ blok matrisini yazıp sol bloku I_3 yapmaya çalışalım:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -4R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[R_2 \rightarrow -R_2]{R_2 \rightarrow -R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_2 + R_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[R_1 \rightarrow -2R_3 + R_1]{R_2 \rightarrow -R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Sol blok I_3 olduğuna göre sağ blok aranan terstir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sağlama olarak AA^{-1} 'in birinci satırını hesaplayalım: $(1 \ 0 \ 2)$ satırı ile sırasıyla sütunlar çarpıldığında $-11 + 12 = 1$, $2 - 2 = 0$, $2 - 2 = 0$ bulunur.

■

Örnek 6.2 (Singüler Bir Matris). $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ matrisinin singüler olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Regülerlik ölçütü gereği A 'nın satır kanonik şeklinin I_3 olup olmadığına bakmak yeterlidir:

$$\begin{array}{c} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow R_1 + R_3 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elde edilen B matrisi, A 'nın satır indirgenmiş merdiven şeklidir ve $B \neq I_3$ 'tür. Satır kanonik şekil tek türlü belirli olduğundan $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_3$ olamaz; dolayısıyla A singülerdir.

■

6.7 Alıştırma

Alıştırma 6.1 (Ters Hesabı ve Regülerlik).

- a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.
- b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.
- c) Bir $A_{(n,n)}$ matrisinin tersinin olması için gerek ve yeter koşulun, A 'nın bir takım elemanter satır matrislerinin çarpımı biçiminde yazılabildiğini gösteriniz.

Çözüm.

a) $(A \mid I_3)$ üzerinde çalışalım. Önce birinci satırı -1 ile çarparak köşeye 1 getirelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{array}{c} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -4R_1 + R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -R_2 + R_3 \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Üçüncü satırda 1 belirdiğine göre onu ikinci sıraya alalım:

$$R_2 \leftrightarrow R_3 \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -5R_2 + R_3 \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 6 & -5 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -R_3 \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c} R_2 \rightarrow R_3 + R_2 \\ R_1 \rightarrow -3R_3 + R_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -25 & 18 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array} \right)$$

Son olarak ikinci sütunu temizleyelim:

$$R_1 \rightarrow 2R_2 + R_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array} \right)$$

Demek ki

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Sağlama: AA^{-1} 'in birinci satırı $(5+20-24 \quad -4-14+18 \quad 3+12-15) = (1 \ 0 \ 0)$.

b) Aynı yöntemi uygulayalım:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_2 + R_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow -4R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

Üçüncü sütunu temizleyelim:

$$\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_3 + R_2 \\ R_1 \rightarrow \frac{1}{2}R_3 + R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

$$R_1 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2 + R_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array} \right)$$

Yani

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Sağlama: BB^{-1} 'in birinci satırı $(16-5-10 \quad -2+1+1 \quad -6+2+4) = (1 \ 0 \ 0)$.

c) Gereklik. A regüler olsun. Regülerlik ölçütüne göre $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_n$ 'dir; dolayısıyla elemanter matrislerin çarpımı olan bir P ile $PA = I_n$ yazılır. Buradan

$$A = P^{-1}$$

bulunur. $P = \hat{E}^{(p)} \dots \hat{E}^{(1)}$ ise çarpımın tersi kuralıyla

$$A = P^{-1} = (\hat{E}^{(1)})^{-1} \dots (\hat{E}^{(p)})^{-1}$$

olur. Elemanter matrislerin tersleri de elemanter olduğundan A , elemanter matrislerin bir çarpımıdır.

Yeterlik. $A = \hat{E}^{(1)} \hat{E}^{(2)} \dots \hat{E}^{(p)}$ olsun. Her elemanter matris regülerdir ve regüler matrislerin çarpımı regülerdir; nitekim

$$A^{-1} = (\hat{E}^{(p)})^{-1} \dots (\hat{E}^{(1)})^{-1}$$

matrisi A 'nın tersidir. Demek ki A 'nın tersi vardır.

■

Matris makinesi hazır. Şimdi onu asıl işinde kullanacağız: bilinmeyenleri bulmak. Sıradaki bölümde lineer denklemleri ve sistemlerini kurup çözüm kümesinin yapısını inceliyoruz: [lineer denklemler ve sistemleri](#).

7. Lineer Denklemler ve Sistemleri

Lineer cebirin çıkış noktası, adını da veren nesnedir: bilinmeyenlerin yalnızca birinci kuvvetleriyle görüldüğü denklemler. Bu bölümde önce tek bir lineer denklemin ne zaman çözüldüğünü, ardından bir denklem sisteminin çözüm kümesinin nasıl bir yapı taşıdığını inceliyoruz. Çıkacak sonuç şaşırtıcı derecede düzenlidir: bir sistemin bütün çözümleri, tek bir çözümün etrafına dizilmiş olarak bulunur.

7.1 Lineer Denklem

Tanım 7.1 (Lineer Denklem). K komutatif bir cisim olsun. x_i ($i = 1, \dots, n$) bilinmeyenler (değişkenler), $a_i \in K$ ve $b \in K$ olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

ifadesine K cismi üzerinde n bilinmeyenli bir **lineer denklem** denir. a_i 'ye x_i değişkeninin **katsayısı**, b 'ye denklemin **sabit terimi** denir.

x_i yerine $k_i \in K$ konulduğunda

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n = b$$

oluyorsa, $x_1 = k_1, \dots, x_n = k_n$ 'ye (1) denkleminin bir **çözümü** denir ve bu çözüm

$$u = (k_1, k_2, \dots, k_n)$$

biçiminde gösterilir.

Örnek 7.1 (Bir n-li Çözüm mü?). $K = \mathbb{R}$ üzerinde $x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 3$ denklemini için $u = (3, 2, 1, 0)$ ve $v = (1, 2, 4, 5)$ dörtlülerini sınamayız.

Çözüm.

u için bilinmeyenlerin yerine sırayla 3, 2, 1, 0 koyalım:

$$3 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 0 = 3 + 4 - 4 = 3$$

Eşitlik sağlandığından u bir çözümdür. v için ise

$$1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 4 + 5 = 1 + 4 - 16 + 5 = -6 \neq 3$$

olduğundan v bir çözüm **değildir**.

■

Tek bir lineer denklemin çözümleri üç duruma ayrılır.

1. Katsayılarından en az biri sıfırdan farklı. Diyelim $a_1 \neq 0_K$ olsun. K bir cisim olduğundan a_1^{-1} vardır ve denklem

$$x_1 = a_1^{-1}b - a_1^{-1}a_2x_2 - \dots - a_1^{-1}a_nx_n$$

biçiminde yazılabilir. $x_2, \dots, x_n$ bilinmeyenlerine keyfi değerler verilerek x_1 için bir değer bulunur; bu değerlerin tümü birlikte bir çözüm oluşturur. Ayrıca denklemin **her** çözümü bu biçimde elde edilir. Özel olarak tek bilinmeyenli $ax = b$ ($a \neq 0_K$) denkleminin tek çözümü $x = a^{-1}b$ 'dir.

2. Bütün katsayılar sıfır, sabit terim sıfırdan farklı. Denklem

$$0_Kx_1 + \dots + 0_Kx_n = b, \quad b \neq 0_K$$

biçimindedir ve sol taraf hangi değerler için de olsa 0_K olduğundan **çözümü yoktur**.

3. Bütün katsayılar ve sabit terim sıfır. Bu durumda her $(k_1, \dots, k_n)$ n -lisi denklemi sağlar; çözüm kümesi K^n 'in tamamıdır.

Örnek 7.2 (Tek Denklemin Çözümleri). $K = \mathbb{R}$ üzerinde $2x_1 - 4x_2 + x_3 = 8$ denkleminin çözümlerini betimleyiniz ve bir örnek veriniz.

Çözüm.

x_1 'in katsayısı $2 \neq 0$ olduğundan denklem x_1 için çözülebilir:

$$2x_1 = 8 + 4x_2 - x_3 \implies x_1 = 4 + 2x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

x_2 ve x_3 'e herhangi bir değer verildiğinde x_1 'in değeri belirlenir ve üç değer birlikte bir çözüm oluşturur. Örneğin $x_2 = 3, x_3 = 2$ alalım:

$$x_1 = 4 + 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 4 + 6 - 1 = 9$$

Yani $(9, 3, 2)$ denklemin bir çözümüdür.

■

7.2 Lineer Denklem Sistemleri

Tanım 7.2 (Lineer Denklem Sistemi). K komutatif bir cisim, $a_{ij}, b_i \in K$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) olmak üzere $x_1, \dots, x_n$ bilinmeyenlerinden oluşan m tane lineer denklemin oluşturduğu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2)$$

topluluğuna n bilinmeyenli m denklemlili bir **lineer denklem sistemi** denir.

$b_1, b_2, \dots, b_m$ 'nin hepsi birden 0_K değilse sisteme **homojen olmayan**, hepsi 0_K ise **homojen** lineer denklem sistemi denir.

$u = (k_1, \dots, k_n)$ n -lisi (2) sistemindeki denklemlerin **her birini** sağlıyorsa u 'ya sistemin bir **(özel) çözümü** denir. Bütün özel çözümlerin oluşturduğu kümeye sistemin **çözüm kümesi** (veya **genel çözümü**) denir.

(2) sistemindeki sabit terimlerin yerine 0_K konulmasıyla elde edilen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0_K \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0_K \end{aligned} \quad (3)$$

sistemine, (2) ile **ilgili homojen sistem** denir.

i Homojen sistem hiçbir zaman çözümsüz değildir

(3) sisteminin en az bir çözümü daima vardır: $(0_K, 0_K, \dots, 0_K)$ n -lisi bütün denklemleri sağlar. Bu çözüme **sıfır çözüm** veya **triviyal çözüm** denir. Bir homojen sistemin sıfır çözümden farklı çözümleri varsa bunlara **triviyal olmayan çözümler** denir. Homojen sistemlerde asıl soru “çözüm var mı?” değil, “sıfırdan başka çözüm var mı?” sorusudur.

7.3 Katsayılar Matrisi ve Genişletilmiş Matris

Tanım 7.3 (Katsayılar Matrisi). (2) sistemindeki bilinmeyenlerin katsayılarıyla oluşturulan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{(m,n)}$$

matrisine sistemin **katsayılar matrisi** denir.

Tanım 7.4 (Genişletilmiş Matris). Katsayılar matrisine sabit terimlerin bir sütun olarak eklenmesiyle elde edilen

$$(A | b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)_{(m,n+1)}$$

matrisine sistemin **genişletilmiş matrisi** denir.

Genişletilmiş matris, sistemin bütün bilgisini taşıyan tek nesnedir: bilinmeyenlerin adları unutulup yalnızca sayılarla çalışılabilir. Sonraki bölümlerde çözüm yöntemleri tam olarak bu matris üzerinde yürütülecektir.

7.4 Çözüm Kümesinin Yapısı

Teorem 7.1 (Genel Çözümün Yapısı). u , (2) homojen olmayan sisteminin bir özel çözümü ve W da (2) ile ilgili (3) homojen sisteminin genel çözümü olsun. Bu takdirde (2) sisteminin U genel çözümü

$$U = u + W = \{u + w : w \in W\}$$

kümesidir.

İspat.

Teoremin hipotezi gereği $U \neq \emptyset$ 'dir. İki kapsamayı ayrı ayrı göstereceğiz.

$u + W \subseteq U$. $u = (u_1, \dots, u_n)$, (2)'nin bir çözümü olduğundan

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \cdots + a_{in}u_n = b_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4)$$

$w = (w_1, \dots, w_n) \in W$ alalım; w , (3)'ün bir çözümü olduğundan

$$a_{i1}w_1 + a_{i2}w_2 + \cdots + a_{in}w_n = 0_K \quad (i = 1, \dots, m) \quad (5)$$

(4) ve (5) taraf tarafa toplanır ve dağılma özelliği kullanılırsa

$$a_{i1}(u_1 + w_1) + a_{i2}(u_2 + w_2) + \cdots + a_{in}(u_n + w_n) = b_i + 0_K = b_i$$

bulunur. Demek ki $u + w = (u_1 + w_1, \dots, u_n + w_n)$ de (2)'nin bir çözümüdür; her $w \in W$ için bu doğru olduğundan $u + W \subseteq U$ 'dur.

$U \subseteq u + W$. $v = (v_1, \dots, v_n) \in U$ keyfi bir çözüm olsun:

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

v 'yi u 'nun etrafında yazalım:

$$v = (u_1 + (v_1 - u_1), \dots, u_n + (v_n - u_n)) = u + (v - u)$$

Şimdi $v - u = (v_1 - u_1, \dots, v_n - u_n)$ n -lisinin (3)'ü sağladığını görelim. Her i için

$$\begin{aligned} a_{i1}(v_1 - u_1) + \cdots + a_{in}(v_n - u_n) &= (a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n) \\ &\quad - (a_{i1}u_1 + \cdots + a_{in}u_n) \\ &= b_i - b_i = 0_K \end{aligned}$$

Burada K 'nin komutatif bir halka olmasından gelen $-(ab) = a(-b)$ ve $-(c_1 + \dots + c_n) = (-c_1) + \dots + (-c_n)$ kuralları kullanılmıştır. Demek ki $v - u \in W$ ve $v = u + (v - u) \in u + W$ 'dir. İki kapsama birlikte $U = u + W$ verir.

■

Teoremin okunuşu

Homojen olmayan bir sistemin çözüm kümesi, ilgili homojen sistemin çözüm kümesinin **bir vektör kadar kaydırılmış hâlidir**. Bunun iki pratik sonucu var: bir sistemin bütün çözümlerini bulmak için tek bir özel çözüm ile homojen sistemin genel çözümünü bilmek yeterlidir; ve bir sistemin **tek** çözümü olması, ilgili homojen sistemin sıfır çözümünden başka çözümünün olmaması demektir.

7.5 Alıştırma

Alıştırma 7.1 (Denklemler ve Çözüm Kümeleri).

- $K = \mathbb{R}$ üzerinde $3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$ denkleminin bütün çözümlerini betimleyiniz ve iki farklı çözüm yazınız.
- $x + y + z = 6$ denkleminin bir özel çözümünün $(1, 2, 3)$ olduğunu doğrulayınız; ilgili homojen denklemin genel çözümünü bulup denklemin genel çözümünü $u + W$ biçiminde yazınız.
- Homojen olmayan bir sistemin iki farklı çözümü varsa, sonsuz çoklukta çözümü olduğunu gösteriniz. (Burada K sonsuz bir cisim, örneğin $\mathbb{R}$, alınsın.)

Çözüm.

a) x_1 'in katsayısı $3 \neq 0$ olduğundan denklem x_1 için çözülür:

$$3x_1 = 5 + x_2 - 2x_3 \implies x_1 = \frac{5 + x_2 - 2x_3}{3}$$

$x_2 = a, x_3 = b$ serbest bırakılırsa çözüm kümesi

$$\left\{ \left(\frac{5 + a - 2b}{3}, a, b \right) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

olur. $a = 1, b = 0$ için $(2, 1, 0)$; $a = 0, b = 1$ için $(1, 0, 1)$ çözümleri elde edilir. Sağlama: $3 \cdot 2 - 1 + 0 = 5$ ve $3 \cdot 1 - 0 + 2 = 5$.

b) Doğrudan yerine koyalım: $1 + 2 + 3 = 6$ olduğundan $u = (1, 2, 3)$ bir çözümdür.

İlgili homojen denklem $x + y + z = 0$ 'dır. Buradan $x = -y - z$ olur; $y = a, z = b$ serbest bırakılırsa

$$W = \{ (-a - b, a, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

Genel çözüm, teoremin verdiği biçimde

$$U = u + W = \{ (1 - a - b, 2 + a, 3 + b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

olur. Bileşenler toplandığında $1 - a - b + 2 + a + 3 + b = 6$ çıkması, kümenin gerçekten çözümlerden oluştuğunu doğrular.

c) Sistemin $u \neq v$ gibi iki çözümü olsun. Teoremin ispatındaki hesabın aynısıyla $w = v - u$ farkı ilgili homojen sistemin bir çözümüdür ve $u \neq v$ olduğundan $w \neq (0, \dots, 0)$ 'dır.

Şimdi herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ için tw 'nin de homojen sistemi sağladığını görelim: i -inci denklemde

$$a_{i1}(tw_1) + \dots + a_{in}(tw_n) = t(a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n) = t \cdot 0 = 0$$

Demek ki $tw \in W$ 'dir ve teoreme göre $u + tw$ sistemin bir çözümüdür. $w \neq 0$ olduğundan w 'nin sıfırdan farklı bir w_j bileşeni vardır; farklı t değerleri $u + tw$ çözümünün j -inci bileşenini farklı yapar. $\mathbb{R}$ sonsuz olduğundan böylece sonsuz çoklukta farklı çözüm elde edilir.

Bunun tersi de aynı akıl yürütmeyeyle görülür: bir sistemin çözüm sayısı ya sıfırdır, ya birdir, ya da sonsuzdur — “tam olarak iki çözüm” diye bir durum yoktur.

■

Çözüm kümesinin yapısını biliyoruz ama henüz onu bulacak bir yöntemimiz yok. Sıradaki adım, sistemi çözüm kümesini bozmadan sadeleştirmektir: [eşdeğer sistemler ve merdiven şekli](#).

8. Eşdeğer Sistemler ve Merdiven Şekli

Bir denklem sistemini çözmenin klasik yolu, denklemleri birbirinden çıkarıp bilinmeyenleri teker teker yok etmektir. Bu bölümde o hamlenin neden meşru olduğunu – yani çözüm kümesini neden bozmadığını – kanıtlayacak ve sistemi olabildiğince yalın bir biçime, **merdiven şekline** getireceğiz. Bu biçime ulaşıldığında çözümün varlığı ve tekliği tek bir sayıya bakarak okunur.

8.1 Denklemlerin Lineer Birleşimleri

Teorem 8.1 (Denklemlerin Lineer Birleşimi). (2) lineer denklem sistemindeki 1-inci denklemi $c_1 \in K$ ile, 2-inci denklemi $c_2 \in K$ ile, ..., m -inci denklemi $c_m \in K$ ile çarpıp taraf tarafa toplayarak elde edilen

$$\begin{aligned} & (c_1 a_{11} + \dots + c_m a_{m1}) x_1 + \dots + (c_1 a_{1n} + \dots + c_m a_{mn}) x_n \\ & = c_1 b_1 + \dots + c_m b_m \end{aligned} \quad (8)$$

denklemi, (2) sisteminin **her** çözümü tarafından sağlanır.

İspat.

$u = (u_1, \dots, u_n)$, (2) sisteminin bir çözümü olsun. O hâlde her $i = 1, \dots, m$ için

$$a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \dots + a_{in}u_n = b_i$$

(8) denkleminin sol tarafında x_j yerine u_j koyup terimleri satırlara göre gruplayalım:

$$\begin{aligned} & (c_1 a_{11} + \dots + c_m a_{m1}) u_1 + \dots + (c_1 a_{1n} + \dots + c_m a_{mn}) u_n \\ & = c_1 \underbrace{(a_{11}u_1 + \dots + a_{1n}u_n)}_{b_1} + \dots + c_m \underbrace{(a_{m1}u_1 + \dots + a_{mn}u_n)}_{b_m} \\ & = c_1 b_1 + \dots + c_m b_m \end{aligned}$$

Bu ise (8)'in sağ tarafıdır; yani u , (8) denklemini sağlar. Ara adımda yalnızca K 'de çarpmanın toplama üzerine dağılması ve toplamının komutatifliği kullanılmıştır.

■

Tanım 8.1 (Eşdeğer Sistemler). Çözüm kümeleri aynı olan iki lineer denklem sistemine **eşdeğer** (denk) sistemler denir.

8.2 Yok Etme Adımı Çözüm Kümesini Değiştirmez

Teorem 8.2 (Yok Etme Adımı). (2) sistemindeki i -inci denklemi L_i ile gösterelim ($i > 1$) ve $a_{11} \neq 0_K$ olsun. (2) sistemindeki L_i denklemini yerine

$$-a_{i1}L_1 + a_{11}L_i$$

denklemini koymakla elde edilen sistem, (2) sistemiyle eşdeğerdir.

İspat.

Yeni sistemi $(\star)$ ile gösterelim; $(\star)$, L_1 denklemini aynen taşır ve L_i yerine $L'_i = -a_{i1}L_1 + a_{11}L_i$ denklemini içerir; diğer denklemler değişmemiştir.

(2)'nin her çözümü $(\star)$ 'ı sağlar. L'_i denklemini, (2)'nin denklemlerinin bir lineer birleşimidir (L_1 için katsayı $-a_{i1}$, L_i için a_{11} , diğerleri için 0_K). Bir önceki teoreme göre (2)'nin her çözümü bu birleşimi sağlar. Değişmeyen denklemler zaten sağlanır.

($\star$)'ın her çözümü (2)'yi sağlar. $a_{11} \neq 0_K$ ve K bir cisim olduğundan a_{11}^{-1} vardır. L'_i tanımından

$$a_{11}L_i = L'_i + a_{i1}L_1 \implies L_i = a_{11}^{-1}L'_i + a_{11}^{-1}a_{i1}L_1$$

yazılır; yani L_i denklemi, ($\star$) sistemindeki L'_i ve L_1 denklemlerinin bir lineer birleşimidir. Yine önceki teoreme göre ($\star$)'ın her çözümü L_i 'yi sağlar; diğer denklemler ortak olduğundan ($\star$)'ın her çözümü (2)'nin de çözümüdür.

İki kapsama birlikte çözüm kümelerinin eşit olduğunu verir.

■

i Üç pratik uyarı

1. Teoremdeki $a_{11} \neq 0_K$ varsayımı bir kısıtlama değildir: denklemlerin yerleri değiştirilerek bu daima sağlanabilir ve yer değiştirmeye elde edilen sistem – her denklem diğerinin bir lineer birleşimi olduğundan – asıl sistemle eşdeğerdir.
2. Elde edilen sistem $0_Kx_1 + \dots + 0_Kx_n = b$ ($b \neq 0_K$) denklemini içeriyorsa, bu denklemin çözümü olmadığından **sistemin çözümü yoktur**.
3. Elde edilen sistem $0_Kx_1 + \dots + 0_Kx_n = 0_K$ denklemini içeriyorsa, bu denklem her n -li tarafından sağlandığından sistemden **atılabilir**.

8.3 Merdiven Şekli

Yok etme adımı tekrar tekrar uygulanarak (2) sistemi, $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_r$ ve

$$a_{11} \neq 0_K, \quad a_{2j_2} \neq 0_K, \quad \dots, \quad a_{rj_r} \neq 0_K$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \dots + a_{rn}x_n &= b_r \end{aligned} \tag{9}$$

sistemine geçirilebilir. Önceki teoremden (2) ile (9) eşdeğerdir.

Tanım 8.2 (Merdiven Şekli). (9) sistemine (2) sisteminin bir **merdiven şekli** denir.

Tanım 8.3 (Serbest Değişkenler). (9) merdiven şeklindeki

$$x_i \quad (i \neq 1, j_2, \dots, j_r)$$

bilinmeyenlerine, yani hiçbir denklemin başında görünmeyen bilinmeyenlere **serbest değişkenler** denir.

💡 Matris diliyle aynı şey

(9) sisteminin genişletilmiş matrisi, (2) sisteminin genişletilmiş matrisinin bir **merdiven şeklidir**. Yani denklemler üzerinde yapılan yok etme adımları, genişletilmiş matris üzerinde yapılan elemanter satır işlemlerinden başka bir şey değildir. Uygulamada hesap her zaman matris üzerinde yürütülür.

(9) sisteminde $r \leq n$ 'dir: her denklem bir öncekinden daha ileri bir sütunda başladığından denklem sayısı bilinmeyen sayısını aşamaz. Başka bir deyişle **herhangi bir lineer denklem sistemi, denklem sayısı bilinmeyen sayısından küçük veya ona eşit olan bir sisteme eşdeğerdir**.

8.4 Çözümün Varlığı ve Tekliği

Teorem 8.3 (Merdiven Şeklinde Çözüm). (9) merdiven şeklindeki sistemde:

1. $r = n$ ise, yani denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşitse, sistemin çözümü vardır ve bu çözüm **tektir**.
2. $r < n$ ise, $n - r$ tane serbest değişkene keyfi değerler vererek sistemin bir çözümü bulunabilir; bu durumda sistemin **birden fazla** çözümü vardır.

İspat.

1. $r = n$ olsun. Sütun numaraları $1 = j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq n$ kesin arttığından zorunlu olarak $j_i = i$ 'dir; yani sistem üçgen biçimindedir ve i -inci denklem x_i ile başlar. Son denklem

$$a_{nn}x_n = b_n, \quad a_{nn} \neq 0_K$$

biçimindedir ve tek çözümü $x_n = a_{nn}^{-1}b_n$ 'dir. Bu değer bir üstteki denkleme taşınırsa o denklem yalnız x_{n-1} bilinmeyenli birinci dereceden bir denkleme iner ve yine tek biçimde çözülür. Aşağıdan yukarı doğru ilerlenerek $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ değerlerinin her biri tek türlü belirlenir.

2. $r < n$ olsun. Serbest değişkenlere K 'den keyfi değerler atayalım. Bu değerler yerine konduğunda (9) sistemi, $x_1, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ bilinmeyenlerinden oluşan ve birinci durumdaki gibi üçgen biçimde olan r denklemlili bir sisteme dönüşür; yukarıdaki gibi aşağıdan yukarı çözülerek bu bilinmeyenlerin değerleri bulunur. Serbest değişkenlere verilen her farklı değer ailesi bir çözüm ürettiğinden ve serbest değişken sayısı $n - r \geq 1$ olduğundan sistemin birden fazla çözümü vardır.

■

Bu teoremden çıkan üç okuma:

1. (9) sisteminin ve dolayısıyla ona eşdeğer olan (2) sisteminin en az bir çözümü vardır — merdiven şekline inildiyse ve içinde $0_K = b \neq 0_K$ türü bir denklem kalmadıysa.
2. Merdiven şeklinde $r < n$ ise serbest değişkenlere mümkün olan her değer verilebilir; çözüm sayısı birden fazladır.
3. Bir sistemin **tek** çözümünün olması, **genel çözümün yapısı gereği**, ilgili homojen sistemin sıfır çözümünden başka çözümünün olmaması durumunda ortaya çıkar.

8.5 Homojen Sistemler

Teorem 8.4 (Homojen Sistemlerde Triviyal Olmayan Çözüm). K komutatif bir cisim ve $a_{ij} \in K$ olmak üzere (3) homojen sisteminin bir merdiven şekli r denklemlili olsun.

1. $r = n$ ise homojen sistemin sıfır çözümden başka çözümü **yoktur**.
2. $r < n$ ise homojen sistemin sıfır çözümden **farklı** bir çözümü vardır.

İspat.

Homojen bir sistemde bütün sabit terimler 0_K olduğundan, yok etme adımları sabit terimleri 0_K olarak bırakır: merdiven şekli de homojendir.

1. $r = n$ ise bir önceki teoremin birinci maddesine göre çözüm tektir. Sıfır çözüm daima bir çözüm olduğundan, tek olan çözüm sıfır çözümdür.

2. $r < n$ ise en az bir serbest değişken vardır. Bu serbest değişkenlerden birine $1_K \neq 0_K$, diğerlerine 0_K değerini verelim; teoremin ikinci maddesine göre bu atama bir çözüm üretir. Elde edilen n -linin o serbest değişkene karşılık gelen bileşeni $1_K \neq 0_K$ olduğundan çözüm sıfır çözüm değildir.

■

❓ Denklemden çok bilinmeyen varsa

Bilinmeyen sayısı denklem sayısından **büyük** olan bir homojen lineer denklem sisteminin sıfır çözümünden farklı bir çözümü vardır. Gerçekten merdiven şeklindeki denklem sayısı r , başlangıçtaki denklem sayısı m 'yi aşamaz; $m < n$ ise $r \leq m < n$ olur ve teoremin ikinci maddesi uygulanır. Bu küçük gözlem, ilerideki lineer bağımsızlık ve boyut teoremlerinin belkemiğidir.

8.6 Alıştırma

Alıştırma 8.1 (Eşdeğerlik ve Merdiven Şekli).

- a) $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$; $2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8$ sisteminin bir merdiven şeklini bulunuz, serbest değişkenleri belirleyip çözüm kümesini yazınız.
- b) Aşağıdaki homojen sistemlerin sıfır çözümünden farklı çözümünün olup olmadığını, tek bir hesap yapmadan gerektendiriniz:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ & 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ & 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ & 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ \text{(ii)} \quad & x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

- c) İki lineer denklem sisteminin genişletilmiş matrisleri satır eşdeğer ise sistemlerin eşdeğer olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) İkinci denklemden birincinin iki katını çıkaralım, yani $L_2 \rightarrow -2L_1 + L_2$ uygulayalım:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Bu bir merdiven şeklidir: $j_1 = 1 < j_2 = 2$ ve $r = 2$, $n = 3$ 'tür. Serbest değişken sayısı $n - r = 1$ 'dir; serbest değişken x_3 'tür.

$x_3 = a$ alalım. İkinci denklemden $x_2 = 2 - 3a$; birinci denklemden

$$x_1 = 3 - 2x_2 + x_3 = 3 - 2(2 - 3a) + a = 3 - 4 + 6a + a = -1 + 7a$$

Çözüm kümesi

$$\{ (-1 + 7a, 2 - 3a, a) : a \in \mathbb{R} \}$$

Sağlama için $a = 0$ alalım: $(-1, 2, 0)$ için $-1 + 4 - 0 = 3$ ve $-2 + 10 + 0 = 8$ doğrudur.

b) (i) Sistem homojendir; bilinmeyen sayısı $n = 4$, denklem sayısı $m = 3$ 'tür. $n > m$ olduğundan merdiven şeklindeki denklem sayısı $r \leq 3 < 4$ olur ve sıfır çözümünden farklı bir çözüm vardır.

(ii) Burada $n = m = 3$ 'tür; bu tek başına sonucu belirlemez, çünkü merdiven şeklindeki r değeri 3'ten küçük de olabilir. Kısa bir hesap gerekir:

$$\begin{aligned} L_2 &\rightarrow -2L_1 + L_2 : x_2 + 8x_3 = 0 \\ L_3 &\rightarrow -3L_1 + L_3 : -7x_2 + 5x_3 = 0 \end{aligned}$$

Ardından $L_3 \rightarrow 7L_2 + L_3$ ile $61x_3 = 0$ elde edilir. Merdiven şekli

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \quad x_2 + 8x_3 = 0, \quad 61x_3 = 0$$

olup $r = n = 3$ 'tür; dolayısıyla yalnızca sıfır çözüm vardır.

c) İki sistemin genişletilmiş matrisleri $(A \mid b)$ ve $(A' \mid b')$ olsun ve $(A \mid b) \stackrel{\text{satır}}{\sim} (A' \mid b')$ olsun. Satır eşdeğerlik, sonlu sayıda elemanter satır işlemiyle geçiş demektir; her elemanter satır işleminin denklemler üzerindeki karşılığı şudur:

- $R_i \leftrightarrow R_j$: iki denklemin yer değiştirmesi,
- $R_i \rightarrow kR_i$ ($k \neq 0_K$): bir denklemin sıfırdan farklı bir skalerle çarpılması,
- $R_i \rightarrow kR_j + R_i$: bir denklemin, başka bir denklemin k katıyla toplanması.

Üçü de yeni denklemleri eski denklemlerin lineer birleşimi olarak verir; lineer birleşim teoremine göre eski sistemin her çözümü yeni sistemi sağlar. Öte yandan üç işlemin her biri geri alınabilir (sırasıyla aynı yer değiştirme, k^{-1} ile çarpma ve $-kR_j + R_i$); dolayısıyla aynı gerekçeyle yeni sistemin her çözümü de eskisini sağlar. İki çözüm kümesi birbirini kapsadığından eşittir: sistemler eşdeğerdir.

■

Kuram tamamlandı: hangi hamlelerin serbest olduğunu ve merdiven şekline inildiğinde neye bakılacağını biliyoruz. Sırada bunun düzenli bir hesap yöntemine dönüşmesi var: [Gauss yok etme yöntemi](#).

9. Gauss Yok Etme Yöntemi

Kuram hazır: satır işlemleri çözüm kümesini değiştirmiyor ve merdiven şekline inildiğinde her şey okunabiliyor. Geriye bunu düzenli bir hesaba çevirmek kalıyor. Yöntem hep aynıdır – genişletilmiş matrisi yaz, merdiven şekline indir, aşağıdan yukarı geri yerine koy – ve karşılaşılabilecek bütün durumlar üç başlıkta toplanır: çözüm yok, tek çözüm, sonsuz çözüm.

9.1 Yöntemin Adımları

Bir sistemi çözerken izlenecek yol şudur:

1. Sistemin **genişletilmiş matrisi** $(A | b)$ yazılır.
2. Elemanter satır işlemleriyle bu matris bir **merdiven matrise** indirgenir.
3. Merdiven matriste $(0_K \cdots 0_K | b)$, $b \neq 0_K$ biçiminde bir satır varsa sistemin **çözümü yoktur**; işlem burada biter.
4. Aksi hâlde tamamen sıfır satırlar atılır ve kalan denklem sayısı r ile bilinmeyen sayısı n karşılaştırılır. $r = n$ ise **tek çözüm** vardır; $r < n$ ise $n - r$ tane **serbest değişken** belirlenir ve bunlara birer parametre atanır.
5. En alttaki denklemden başlanarak bilinmeyenler yukarı doğru çözülür.

9.2 Çözumsuz Bir Sistem

Örnek 9.1 (Çözümü Olmayan Sistem). $K = \mathbb{R}$ üzerinde

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 5\end{aligned}$$

sistemini çözüyoruz.

Çözüm.

Genişletilmiş matrisi yazıp birinci sütunun altını temizleyelim. Kesirlerden kaçınmak için ikinci ve üçüncü satırları 2 ile çarpıp birinciye çıkaralım – bu, $L_2 \rightarrow -3L_1 + 2L_2$ ve $L_3 \rightarrow -3L_1 + 2L_3$ adımlarına karşılık gelir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 12 & -15 & 7 \end{array} \right)$$

Şimdi ikinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{array}{c} R_3 \rightarrow -3R_2 + R_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right)$$

Son satır

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -8$$

denkleme karşılık gelir; sol taraf hangi değerler için de olsa 0 olduğundan bu denklemin çözümü yoktur. Merdiven şeklindeki sistemin çözümü olmadığına göre, ona eşdeğer olan asıl sistemin de **çözümü yoktur**.

■

9.3 Tek Çözümlü Bir Sistem

Örnek 9.2 (Denklem Sayısı Fazla, Çözüm Tek).

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\x_1 + 3x_2 + x_3 &= 11 \\2x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 13 \\2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 22\end{aligned}$$

sistemini çözünüz.

Çözüm.

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -4 & 13 \\ 2 & 6 & 2 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -2R_1 + R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_3 \rightarrow -R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -2R_2 + R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tamamen sıfır olan son satır atılır. Kalan sistem

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4, \quad x_2 + 4x_3 = 7, \quad -2x_3 = -2$$

olup $r = n = 3$ 'tür; dolayısıyla çözüm tektir. Aşağıdan yukarı çözelim:

$$-2x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$x_2 = 7 - 4x_3 = 7 - 4 = 3$$

$$x_1 = 4 - 2x_2 + 3x_3 = 4 - 6 + 3 = 1$$

Çözüm kümesi $\{(1, 3, 1)\}$ 'dir. Sağlama olarak dördüncü denklemi deneyelim: $2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 2 + 18 + 2 = 22$.

■

9.4 İki Homojen Sistem

Örnek 9.3 (Triviyal Olmayan Çözümü Olan Homojen Sistem).

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0$$

sistemini çözünüz.

Çözüm.

Homojen sistemlerde sabit terim sütunu hep 0 kaldığından yalnızca katsayılar matrisi üzerinde çalışmak yeterlidir; yine de sütunu yazalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_1 + R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kalan sistem

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad -5x_2 + 3x_3 = 0$$

olup $r = 2 < n = 3$ 'tür. Serbest değişken sayısı $n - r = 1$ 'dir; serbest değişken x_3 'tür. $x_3 = a$ alalım:

$$-5x_2 + 3a = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{5}a$$

$$x_1 = -x_2 + x_3 = -\frac{3}{5}a + a = \frac{2}{5}a$$

Çözüm kümesi

$$\left\{ \left(\frac{2}{5}a, \frac{3}{5}a, a \right) : a \in \mathbb{R} \right\}$$

$a = 5$ alınırsa $(2, 3, 5)$ gibi somut bir triviyal olmayan çözüm elde edilir; sağlama: $2 + 3 - 5 = 0$, $4 - 9 + 5 = 0$, $2 - 12 + 10 = 0$.

■

Örnek 9.4 (Yalnızca Sıfır Çözümü Olan Homojen Sistem).

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0, \quad 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \quad 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$$

sistemini çözünüz.

Çözüm.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow \frac{1}{2}R_2 + R_3]{R_2 \rightarrow \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & 0 \end{array} \right)$$

Merdiven şeklinde $r = n = 3$ 'tür; dolayısıyla sistemin tek çözümü vardır ve homojen bir sistemin çözümü daima sıfır çözümü içerdiğinden bu tek çözüm sıfır çözümdür. Nitekim aşağıdan yukarı:

$$\frac{11}{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0, \quad 2x_2 + 0 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \quad x_1 = -x_2 + x_3 = 0$$

Çözüm kümesi $\{(0, 0, 0)\}$ 'dir.

■

9.5 İki Serbest Değişkenli Sistemler

Örnek 9.5 (Zaten Merdiven Şeklinde Bir Sistem).

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= 3 \\ x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_4 - 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

sisteminin çözüm kümesini bulunuz ve bir özel çözüm yazınız.

Çözüm.

Genişletilmiş matris

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 6 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right)$$

zaten bir merdiven matristir: ayrıcalıklı elemanlar 2, 1 ve 1 olup sütunları $j_1 = 1 < j_2 = 2 < j_3 = 4$ olarak artmaktadır. Burada $r = 3 < n = 5$ 'tir; serbest değişken sayısı $n - r = 2$ 'dir ve serbest değişkenler ayrıcalıklı sütunlarda görünmeyen x_3 ile x_5 'tir.

$x_3 = a, x_5 = b$ alalım. Üçüncü denklemden

$$x_4 = 2 + 3b$$

İkinci denklemden

$$x_2 = 1 + 4x_3 - x_4 = 1 + 4a - (2 + 3b) = -1 + 4a - 3b$$

Birinci denklemden

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 3 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 3 + 3(-1 + 4a - 3b) - 6a - 2(2 + 3b) + 5b \\ &= 3 - 3 + 12a - 9b - 6a - 4 - 6b + 5b = 6a - 10b - 4 \end{aligned}$$

Buradan $x_1 = 3a - 5b - 2$ bulunur. Çözüm kümesi

$$\{ (3a - 5b - 2, -1 + 4a - 3b, a, 2 + 3b, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

Özel bir çözüm için $a = 2, b = 1$ alalım: $(-1, 4, 2, 5, 1)$. Sağlama: ikinci denklemden $4 - 8 + 5 = 1$, üçüncüde $5 - 3 = 2$, birincide $-2 - 12 + 12 + 10 - 5 = 3$.

■

Örnek 9.6 (Dört Bilinmeyenli Bir Sistem).

$$x + 2y - 2z + 3w = 2, \quad 2x + 4y - 3z + 4w = 5$$

$$5x + 10y - 8z + 11w = 12$$

sistemini çözünüz.

Çözüm.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

İkinci sütun tamamen boş kaldığından ayrıcalıklı sütunlar $j_1 = 1$ ve $j_2 = 3$ 'tür; serbest değişkenler y ve w 'dir ($n - r = 4 - 2 = 2$).

$y = a, w = b$ alalım. İkinci denklemden

$$z = 1 + 2b$$

Birinci denklemden

$$x = 2 - 2y + 2z - 3w = 2 - 2a + 2(1 + 2b) - 3b = 4 - 2a + b$$

Çözüm kümesi

$$\{ (4 - 2a + b, a, 1 + 2b, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

■

Örnek 9.7 (Bilinmeyen Sırasına Dikkat).

$$x - 3y - 2w + 4z = 5, \quad 2y + w + 5z = 2, \quad y - 3z = 4$$

sistemini x, y, w, z sırasıyla çözünüz.

Çözüm.

Sütunları x, y, w, z sırasında yazalım:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & -6 \end{array} \right)$$

Karşılık gelen sistem

$$x - 3y - 2w + 4z = 5, \quad y - 3z = 4, \quad w + 11z = -6$$

olup $r = 3 < n = 4$ 'tür; tek serbest değişken z 'dir. $z = a$ alalım:

$$w = -6 - 11a, \quad y = 4 + 3a$$

$$\begin{aligned} x &= 5 + 3y + 2w - 4z = 5 + 3(4 + 3a) + 2(-6 - 11a) - 4a \\ &= 5 + 12 + 9a - 12 - 22a - 4a = 5 - 17a \end{aligned}$$

Çözüm kümesi, bileşenler (x, y, w, z) sırasında olmak üzere

$$\{ (5 - 17a, 4 + 3a, -6 - 11a, a) : a \in \mathbb{R} \}$$

■

9.6 Alıştırma

Alıştırma 9.1 (Gauss Yöntemiyle Çözüm).

- $x + 2y - 3z = 6; 2x - y + 4z = 2; 4x + 3y - 2z = 14$ sistemini çözünüz.
- $2x + y - 3z = 5; 3x - 2y + 2z = 5; 5x - 3y - z = 16$ sistemini çözünüz.
- $x + 2y + 3z = 3; 2x + 3y + 8z = 4; 3x + 2y + 17z = 1$ sistemini çözünüz.
- $x + 2y + 2z = 2; 3x - 2y - z = 5; 2x - 5y + 3z = -4; x + 4y + 6z = 0$ sistemini çözünüz.

Çözüm.

a) Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2, R_3 \rightarrow -4R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sıfır satır atılır; kalan iki denklem üç bilinmeyenlidir, yani $n - r = 1$ serbest değişken vardır: $z = a$ alalım. İkinci denklem $-5y + 10a = -10$, yani

$$y = 2 + 2a$$

Birinci denklemden

$$x = 6 - 2y + 3z = 6 - 2(2 + 2a) + 3a = 6 - 4 - 4a + 3a = 2 - a$$

Çözüm kümesi $\{(2 - a, 2 + 2a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ 'dir. Sağlama ($a = 1$, yani $(1, 4, 1)$): $1 + 8 - 3 = 6$, $2 - 4 + 4 = 2$, $4 + 12 - 2 = 14$.

b) Köşeye 1 getirmek için önce ikinci satırdan birinciye çıkaralım:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \rightarrow -R_1 + R_2]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{array}\right)$$

Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -13 & 5 \\ 0 & 12 & -26 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -13 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Üçüncü denklem doğrudan y 'yi verir: $-2y = 6 \Rightarrow y = -3$. İkinci denklemden

$$7(-3) - 13z = 5 \Rightarrow -13z = 26 \Rightarrow z = -2$$

Birinci denklemden

$$x = 3y - 5z = -9 + 10 = 1$$

Çözüm kümesi $\{(1, -3, -2)\}$ 'dir. Sağlama: $2 - 3 + 6 = 5$, $3 + 6 - 4 = 5$, $5 + 9 + 2 = 16$.

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 17 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -4R_2 + R_3]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Serbest değişken z 'dir; $z = a$ alalım. İkinci denklemden $-y + 2a = -2$, yani

$$y = 2 + 2a$$

Birinci denklemden

$$x = 3 - 2y - 3z = 3 - 2(2 + 2a) - 3a = 3 - 4 - 4a - 3a = -1 - 7a$$

Çözüm kümesi $\{(-1 - 7a, 2 + 2a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ 'dir.

d) Dört denklem, üç bilinmeyen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \rightarrow -R_1 + R_4]{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2, R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

Son satırı sadeleştirip ikinci sıraya alalım:

$$\xrightarrow[R_4 \rightarrow \frac{1}{2}R_4]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_4]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & -8 \\ 0 & -8 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

İkinci sütunun altını temizleyelim:

$$\begin{array}{c}
R_3 \rightarrow 9R_2 + R_3 \\
R_4 \rightarrow 8R_2 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 17 & -17 \\
0 & 0 & 9 & -9
\end{array} \right)
\begin{array}{c}
R_3 \rightarrow \frac{1}{17}R_3 \\
R_4 \rightarrow \frac{1}{9}R_4 \\
\sim
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1
\end{array} \right)$$

$$\begin{array}{c}
R_4 \rightarrow -R_3 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right)$$

Sıfır satır atıldığında $r = n = 3$ kalır; çözüm tektir:

$$z = -1, \quad y = -1 - 2z = -1 + 2 = 1, \quad x = 2 - 2y - 2z = 2 - 2 + 2 = 2$$

Çözüm kümesi $\{(2, 1, -1)\}$ 'dir. Sağlama (üçüncü denklem): $4 - 5 - 3 = -4$.

■

Bir sistemin katsayıları sabit sayılar yerine bir parametre içerdiğinde, çözümün varlığı ve tekliği o parametrenin değerine bağlı hâle gelir. Sıradaki bölümde bu ayrımı yapmayı öğreniyoruz: [parametrelili sistemlerin tartışması](#).

10. Parametrelili Sistemlerin Tartışması

Katsayılarından biri sabit bir sayı yerine a ya da k gibi bir parametre olduğunda soru değişir: “çözüm nedir?” yerine “hangi parametre değerinde çözüm vardır, hangisinde yoktur?” diye sorulur. Yöntem yine aynıdır – genişletilmiş matris merdiven şekline indirilir – ama son ayrıcalıklı elemanı sıfırlayan parametre değerlerine ayrı ayrı bakmak gerekir. Bu bölümde o **tartışma** tekniğini kuruyoruz.

10.1 Kritik Değer Nereden Çıkar?

Merdiven şekline inildiğinde en alttaki denklem tipik olarak

$$p(a)x_n = q(a)$$

biçimini alır; burada p ve q , parametreye bağlı ifadelerdir. Üç durum vardır:

- $p(a) \neq 0_K$ ise denklem x_n için tek türlü çözülür; merdiven şeklinde $r = n$ olur ve **çözüm taktır**.
- $p(a) = 0_K$ ve $q(a) \neq 0_K$ ise denklem $0_K = q(a) \neq 0_K$ hâline gelir; **çözüm yoktur**.
- $p(a) = 0_K$ ve $q(a) = 0_K$ ise denklem $0_K = 0_K$ olur ve atılır; geriye kalan denklem sayısı bilinmeyen sayısından küçük olduğundan **birden fazla çözüm** vardır.

Tartışma, tam olarak $p(a) = 0_K$ denkleminin köklerini bulup bu üç dala ayırmaktır.

10.2 Tek Parametrelili Bir Sistem

Örnek 10.1 (a Parametresine Göre Tartışma).

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad 2x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3, \quad x_1 + ax_2 + 3x_3 = 2$$

sisteminde $a \in \mathbb{R}$ değerini, (i) sistemin çözümü yoktur, (ii) sistemin birden fazla çözümü vardır, (iii) sistemin bir tek çözümü vardır hâllerinin her biri için belirleyiniz.

Çözüm.

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\substack{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_1 + R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

İkinci sütunun altını temizleyelim:

$$\xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow -(a-1)R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 - (a-1)(a+2) & 1 - (a-1) \end{array} \right)$$

Üçüncü satırdaki ifadeleri sadeleştirelim:

$$4 - (a-1)(a+2) = 4 - (a^2 + a - 2) = -(a^2 + a - 6) = (a+3)(2-a)$$

$$1 - (a-1) = 2 - a$$

Buna karşılık gelen sistem

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_2 + (a+2)x_3 = 1, \quad (a+3)(2-a)x_3 = 2-a$$

(i) $a = -3$ ise. Üçüncü denklem $0 = 5$ hâline gelir; bu denklemin çözümü olmadığından **sistemin çözümü yoktur**.

(ii) $a = 2$ ise. Üçüncü denklem $0 = 0$ olur ve atılır. Geriye

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1, \quad x_2 + 4x_3 = 1$$

sistemi kalır; burada denklem sayısı 2, bilinmeyen sayısı 3'tür, yani $r < n$ 'dir. Bir serbest değişken vardır ve **birden fazla çözüm** bulunur. $x_3 = t$ alınırsa $x_2 = 1 - 4t$ ve

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - (1 - 4t) + t = 5t$$

olur; çözüm kümesi $\{(5t, 1 - 4t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ 'dir.

(iii) $(a + 3)(2 - a) \neq 0$, yani $a \neq -3$ ve $a \neq 2$ ise. Merdiven şeklinde denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir ($r = n = 3$); **bir tek çözüm** vardır. Üçüncü denklemin iki tarafı $2 - a \neq 0$ ile sadeleştirilirse

$$(a + 3)x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{a + 3}$$

İkinci denklemden

$$x_2 = 1 - (a + 2)x_3 = 1 - \frac{a + 2}{a + 3} = \frac{1}{a + 3}$$

Birinci denklemden

$$x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - \frac{1}{a + 3} + \frac{1}{a + 3} = 1$$

Yani tek çözüm $(1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3})$ 'tür. $a = 0$ için bu $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ verir; sağlama: $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 1$, $2 + 1 + 0 = 3$, $1 + 0 + 1 = 2$.

■

10.3 İki Parametrel Bir Sistem

Örnek 10.2 (a ve b Parametrelerine Göre Tartışma). $\mathbb{R}$ üzerinde

$$2x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + 3x_3 = 0, \quad -ax_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = b$$

sisteminin çözümünü a ve b 'nin değerlerine göre inceleyiniz.

Çözüm.

Genişletilmiş matrisi yazıp köşeye 1 getirelim:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow aR_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Üçüncü ve dördüncü satırların yerini değiştirip son sütunu temizleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -6a & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow 6aR_3 + R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6a & 6ab \end{pmatrix}$$

Karşılık gelen sistem

$$x_1 + 3x_3 = 0, \quad x_2 - 6x_3 = 0, \quad x_3 + x_4 = b, \quad 6ax_4 = 6ab$$

1. $a \neq 0$ ise. Son denklem $x_4 = b$ verir ve merdiven şeklinde $r = n = 4$ 'tür; çözüm tektir. Üçüncü denklemden $x_3 = b - x_4 = 0$, ikinciden $x_2 = 6x_3 = 0$, birinciden $x_1 = -3x_3 = 0$ bulunur:

$$\text{Çözüm kümesi} = \{ (0, 0, 0, b) \}$$

Özel olarak $b = 0$ ise sistem homojendir ve tek çözüm $(0, 0, 0, 0)$, yani sıfır çözümdür – homojen bir sistemin $r = n$ hâlinde triviyal olmayan çözümü olmadığı sonucuyla uyumlu.

2. $a = 0$ ise. Son denklem $0 = 0$ olur ve atılır. Geriye üç denklem kalır:

$$x_1 + 3x_3 = 0, \quad x_2 - 6x_3 = 0, \quad x_3 + x_4 = b$$

Burada $r = 3$, $n = 4$ 'tür; serbest değişken sayısı $n - r = 1$ 'dir ve serbest değişken x_4 'tür. $x_4 = c$ alalım:

$$x_3 = b - c, \quad x_2 = 6(b - c) = 6b - 6c, \quad x_1 = -3(b - c) = 3c - 3b$$

Çözüm kümesi

$$\{ (3c - 3b, 6b - 6c, b - c, c) : c \in \mathbb{R} \}$$

$b = 0, c = 1$ için $(3, -6, -1, 1)$ elde edilir; sağlama: $6 - 6 = 0, 3 - 3 = 0, 0 \cdot (-6) = 0, -1 + 1 = 0$.

■

10.4 Alıştırma

Alıştırma 10.1 (Parametrelili Sistemler).

a) $\mathbb{R}$ üzerinde

$$kx + y + z = 1, \quad x + ky + z = 1, \quad x + y + kz = 1$$

sistemindeki k değerini, (i) bir tek çözüm vardır, (ii) çözüm yoktur, (iii) birden fazla çözüm vardır hâlleri için belirleyiniz.

b) $\mathbb{R}$ üzerinde

$$x + y + kz = 2, \quad 3x + 4y + 2z = k, \quad 2x + 3y - z = 1$$

sistemi için aynı tartışmayı yapınız.

c) $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1; 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2$ sisteminin çözümünün olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

a) Köşeye 1 getirmek için birinci ve üçüncü satırların yerini değiştirelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Birinci sütunun altını temizleyelim:

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -kR_1 + R_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & 1-k & 0 \\ 0 & 0 & 2-k-k^2 & 1-k \end{array} \right)$$

Son satırdaki katsayıyı çarpanlara ayıralım:

$$2 - k - k^2 = - (k^2 + k - 2) = -(k+2)(k-1) = (k+2)(1-k)$$

Yani son denklem $(k+2)(1-k)z = 1-k$ 'dir.

(iii) $k = 1$ ise: İkinci ve üçüncü satırlar tamamen sıfır olur ve atılır. Geriye tek bir denklem, $x + y + z = 1$, kalır. Üç bilinmeyen, bir denklem: iki serbest değişken vardır ve **birden fazla çözüm** bulunur.

$k \neq 1$ ise: Son denklemin iki tarafı $1-k \neq 0$ ile sadeleştirilir: $(k+2)z = 1$.

(ii) $k = -2$ ise: Denklem $0 = 1$ hâline gelir; **çözüm yoktur**.

(i) $k \neq 1$ ve $k \neq -2$ ise: $r = n = 3$ 'tür ve **bir tek çözüm** vardır:

$$z = \frac{1}{k+2}$$

İkinci denklem $(k-1)(y-z) = 0$ biçimindedir; $k \neq 1$ olduğundan $y = z$ 'dir. Birinci denklemden

$$x = 1 - y - kz = 1 - (k+1)z = 1 - \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{k+2}$$

Yani tek çözüm $\left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}\right)$ 'dir; simetrik bir sistemde simetrik bir çözüm bulunması beklenen sonuçtur.

b) İndirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2-3k & k-6 \\ 0 & 1 & -1-2k & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_2 + R_3]{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & 2-3k & k-6 \\ 0 & 0 & k-3 & 3-k \end{pmatrix}$$

Son denklem $(k-3)z = 3-k = -(k-3)$ 'tür.

(i) $k \neq 3$ ise: İki taraf $k-3 \neq 0$ ile sadeleştirilir ve $z = -1$ bulunur; $r = n = 3$ olduğundan **çözüm tektir**. İkinci denklem $y + (2-3k)z = k-6$ idi; $z = -1$ konursa

$$y - (2-3k) = k-6 \implies y = k-6+2-3k = -4-2k$$

bulunur. Birinci denklemden

$$x = 2 - y - kz = 2 + 4 + 2k + k = 6 + 3k$$

Tek çözüm $(6+3k, -4-2k, -1)$ 'dir. $k = 0$ için $(6, -4, -1)$ çıkar; sağlama: $6 - 4 + 0 = 2$, $18 - 16 - 2 = 0$, $12 - 12 + 1 = 1$.

(iii) $k = 3$ ise: Son denklem $0 = 0$ olur ve atılır. Geriye iki denklem, üç bilinmeyen kalır ($r = 2 < n = 3$); **birden fazla çözüm** vardır. $z = t$ alınırsa ikinci denklemden $y = -3 + 7t$ ve birinciden

$$x = 2 - y - 3t = 2 + 3 - 7t - 3t = 5 - 10t$$

bulunur.

(ii) Son denklemin sabit terimi ile katsayısı daima birbirinin ters işaretlisi olduğundan $0 = q \neq 0$ hâli hiçbir k için ortaya çıkmaz: sistemin **çözumsuz olduğu bir k değeri yoktur**.

c) Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & -7 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_2 + R_3]{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -7 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Son satır $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -3$ denklemine karşılık gelir; sol taraf daima 0 olduğundan bu denklemin çözümü yoktur. Merdiven şekli asıl sisteme eşdeğer olduğundan **sistemin çözümü yoktur**.

Aynı sonucu şöyle de okuyabiliriz: ikinci ve üçüncü denklemler indirgeme sonunda aynı sol tarafa $(-7x_2 + 11x_3)$ fakat farklı sabit terimlere (10 ve 7) sahip olmuştur; bir ifade aynı anda iki farklı değer alamaz.



Denklemler sisteminin kuramı ve hesabı tamamlandı. Buradan sonra bakış açısı değişiyor: n -lileri tek tek çözümler olarak değil, üzerinde toplama ve skalerle çarpma tanımlı bir uzayın elemanları olarak göreceğiz. Bu, dersin ikinci yarısının konusu olan **vektör uzayları**dır.

11. Vektör Uzayları

Şimdiye kadar iki farklı yerde aynı hesap kalıbını gördük: sıralı n -lileri toplayıp bir sayıyla çarpmak, matrisleri toplayıp bir sayıyla çarpmak. Her ikisinde de aynı sekiz özellik geçerliydi. Bu bölümde o kalıbı soyutlayıp adını koyuyoruz – **vektör uzayı** – ve böylece bir kez ispatladığımız her şeyin, aynı aksiyomları sağlayan bütün yapılar için geçerli olmasını sağlıyoruz.

11.1 Tanım ve Aksiyomlar

Tanım 11.1 (Vektör Uzayı). K komutatif bir cisim ve V boş olmayan bir küme olsun. V 'de bir **toplama** ve K 'nin elemanlarıyla bir **skalerle çarpma** tanımlansın. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa V 'ye K üzerinde bir **vektör uzayı** (linear uzay) denir ve $V(K)$ ile gösterilir. V 'nin elemanlarına **vektörler**, K 'nin elemanlarına **skalerler** denir.

A1. $\forall u, v \in V$ için $u + v \in V$

A2. $\forall u, v, w \in V$ için $(u + v) + w = u + (v + w)$

A3. $\forall u, v \in V$ için $u + v = v + u$

A4. $\exists 0_V \in V$ öyle ki $\forall u \in V$ için $0_V + u = u$ (**sıfır vektör**)

A5. $\forall u \in V$ için $\exists x \in V$ öyle ki $x + u = 0_V$ (bu x için $-u$ yazılır)

M1. $\forall k \in K, \forall u \in V$ için $ku \in V$

M2. $\forall k \in K, \forall u, v \in V$ için $k(u + v) = ku + kv$

M3. $\forall k_1, k_2 \in K, \forall u \in V$ için $(k_1 + k_2)u = k_1u + k_2u$

M4. $\forall k_1, k_2 \in K, \forall u \in V$ için $(k_1 k_2)u = k_1(k_2u)$

M5. $1_K \in K$ olmak üzere $\forall u \in V$ için $1_K u = u$

A1–A5 aksiyomları tam olarak $\langle V, + \rangle$ 'nin **komutatif bir grup** olduğunu söyler. **M1–M5** ise skalerlerin bu grupla nasıl uyduğunu belirler.

11.2 Sıfır Vektörle İlgili Kurallar

Aksiyomlarda $k \cdot 0_V$ ya da $0_K \cdot u$ çarpımlarının ne olduğu yazmaz; bunlar teorem olarak çıkar.

Teorem 11.1 (Temel Özellikler). $V(K)$ bir vektör uzayı olsun. O hâlde

1. $\forall k \in K$ için $k 0_V = 0_V$
2. $\forall u \in V$ için $0_K u = 0_V$
3. $k \in K, u \in V$ ve $ku = 0_V$ ise $k = 0_K$ veya $u = 0_V$ 'dir
4. $\forall k \in K, \forall u \in V$ için $(-k)u = k(-u) = -(ku)$

İspat.

1. $0_V = 0_V + 0_V$ olduğundan (**A4**), dağılma aksiyomuyla

$$k 0_V = k (0_V + 0_V) = k 0_V + k 0_V$$

Her iki tarafa soldan $-(k 0_V)$ ekleyelim:

$$0_V = -(k 0_V) + (k 0_V + k 0_V) = (-(k 0_V) + k 0_V) + k 0_V = 0_V + k 0_V = k 0_V$$

2. K bir cisim olduğundan $0_K = 0_K + 0_K$ 'dir; **M3** ile

$$0_K u = (0_K + 0_K) u = 0_K u + 0_K u$$

Aynı ekleme yapılırsa $0_K u = 0_V$ bulunur.

3. $ku = 0_V$ olsun ve $k \neq 0_K$ olduğunu varsayalım. K bir cisim olduğundan k^{-1} vardır:

$$u \stackrel{M5}{=} 1_K u = (k^{-1}k) u \stackrel{M4}{=} k^{-1}(ku) = k^{-1} 0_V \stackrel{(1)}{=} 0_V$$

Demek ki $k \neq 0_K$ ise zorunlu olarak $u = 0_V$ 'dir.

4. Birinci özellikten ve M2'den

$$0_V = k 0_V = k(u + (-u)) = ku + k(-u) \implies k(-u) = -(ku)$$

İkinci özellikten ve M3'ten

$$0_V = 0_K u = (k + (-k)) u = ku + (-k)u \implies (-k)u = -(ku)$$

İkisi birlikte $(-k)u = k(-u) = -(ku)$ verir.

■

11.3 Temel Örnekler

Örnek 11.1 (Sıralı n-lilerin Uzayı). K komutatif bir cisim ve

$$V = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in K \}$$

olsun. Toplama ve skalerle çarpma bileşen bileşen tanımlansın:

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$$k(a_1, \dots, a_n) = (ka_1, \dots, ka_n)$$

V 'nin K üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu uzay K^n ile gösterilir.

Çözüm.

$(0_K, \dots, 0_K) \in V$ olduğundan $V \neq \emptyset$ 'dir. On aksiyoğun her biri, bileşenlerde K 'nin bir özelliğine indirgenir.

A1. $a_i + b_i \in K$ olduğundan toplam V 'dedir.

A2–A3. K 'de toplama asosyatif ve komutatif olduğundan, bileşen bileşen

$$[(a_i) + (b_i)] + (c_i) = (a_i + b_i) + c_i = (a_i + (b_i + c_i)) = (a_i) + [(b_i) + (c_i)]$$

A4. $0_V = (0_K, \dots, 0_K)$ 'dir; çünkü $0_K + a_i = a_i$ 'dir.

A5. $(a_1, \dots, a_n)$ 'nin toplamsal tersi $(-a_1, \dots, -a_n)$ 'dir.

M1. $ka_i \in K$ olduğundan $k(a_i) \in V$ 'dir.

M2. K 'de çarpma toplama üzerine dağıldığından $k(a_i + b_i) = ka_i + kb_i$ 'dir.

M3. Yine dağılma özelliğinden $(k_1 + k_2)a_i = k_1 a_i + k_2 a_i$ 'dir.

M4. K 'de çarpma asosyatif olduğundan $(k_1 k_2)a_i = k_1(k_2 a_i)$ 'dir.

M5. $1_K a_i = a_i$ olduğundan $1_K(a_i) = (a_i)$ 'dir.

Demek ki K^n , K üzerinde bir vektör uzayıdır. $K = \mathbb{R}$ alındığında elde edilen $\mathbb{R}^n$, n boyutlu reel Öklid uzayıdır.

■

Örnek 11.2 (Matrislerin Uzayı). Bileşenleri K cisiminden alınmış bütün $A_{(m,n)}$ K -matrislerinin kümesi, **matrislerin toplamı ve skalerle çarpımı** işlemlerine göre K üzerinde bir vektör uzayıdır.

Gerçekten daha önce ispatladığımız sekiz özellik tam olarak A1–A5 ve M2–M5 aksiyomlarıydı: sıfır vektör $O_{(m,n)}$ sıfır matrisi, A 'nın toplamsal tersi $-A$ 'dır. A1 ve M1 ise toplam ve skalerle çarpımın yine aynı tipte bir matris vermesidir.

Örnek 11.3 (Fonksiyonların Uzayı). $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme, K komutatif bir cisim ve

$$V = \{ f \mid f : X \rightarrow K \text{ bir fonksiyon} \}$$

olsun. Toplama ve skalerle çarpma noktasal tanımlansın:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (kf)(x) = k f(x) \quad (\forall x \in X)$$

V 'nin K üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Her $x \in X$ için $0(x) = 0_K$ ile tanımlı **sıfır fonksiyonu** V 'dedir; dolayısıyla $V \neq \emptyset$ 'dir. İki fonksiyonun eşitliği, her noktada aynı değeri almaları demektir; bu yüzden bütün aksiyomlar “her x için” denetlenir.

A1. $f(x) + g(x) \in K$ olduğundan $f + g$ yine X 'ten K 'ye bir fonksiyondur.

A2. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} [(f + g) + h](x) &= (f(x) + g(x)) + h(x) \\ &= f(x) + (g(x) + h(x)) \\ &= [f + (g + h)](x) \end{aligned}$$

A3. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$

A4. $g + f = f$ olması her x için $g(x) + f(x) = f(x)$, yani $g(x) = 0_K$ demektir; o hâlde $0_V = 0$ sıfır fonksiyonudur.

A5. $f^* + f = 0$ koşulu her x için $f^*(x) = -f(x)$ verir; yani $-f$ fonksiyonu $(-f)(x) = -f(x)$ ile tanımlıdır.

M1. $kf(x) \in K$ olduğundan $kf \in V$ 'dir.

M2. Her $x \in X$ için

$$[k(f + g)](x) = k(f(x) + g(x)) = kf(x) + kg(x) = (kf + kg)(x)$$

M3. Her $x \in X$ için

$$[(k_1 + k_2)f](x) = (k_1 + k_2)f(x) = k_1f(x) + k_2f(x) = (k_1f + k_2f)(x)$$

M4. $[(k_1k_2)f](x) = (k_1k_2)f(x) = k_1(k_2f(x)) = [k_1(k_2f)](x)$

M5. $(1_K f)(x) = 1_K f(x) = f(x)$

Bütün aksiyomlar sağlandığından V, K üzerinde bir vektör uzayıdır.

■

💡 Vektör her zaman bir ok değildir

Son örnekte “vektörler” birer fonksiyondur; ondan önceki örnekte birer matris. Vektör uzayı kavramının gücü tam da buradadır: tanım, elemanların ne olduğuna değil, yalnızca nasıl toplandıklarına ve nasıl ölçeklendiklerine bakar. Bu yüzden ileride ispatlayacağımız her teorem — taban, boyut, rank — aynı anda hem $\mathbb{R}^n$ hem matrisler hem de fonksiyonlar için geçerli olacaktır.

11.4 Vektör Uzayı Olmayan Yapılar

Bir aksiyomun tek bir karşı örnekle bozulması, yapının vektör uzayı olmasını engeller.

Örnek 11.4 (Üç Karşı Örnek). $V = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$ kümesinde aşağıdaki işlemlerin tanımlandığı yapıların $\mathbb{R}$ üzerinde birer vektör uzayı **olmadığını** gösteriniz.

a) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ve $k(a, b) = (ka, b)$

b) $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ ve $k(a, b) = (ka, kb)$

c) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ ve $k(a, b) = (k^2a, k^2b)$

Çözüm.

a) M3 aksiyomunu sınavalım. $v = (a, b)$ için

$$(k_1 + k_2)v = ((k_1 + k_2)a, b) = (k_1a + k_2a, b)$$

$$k_1v + k_2v = (k_1a, b) + (k_2a, b) = (k_1a + k_2a, 2b)$$

$b \neq 0$ olan her vektör için $b \neq 2b$ 'dir; örneğin $v = (1, 1)$, $k_1 = k_2 = 1$ alındığında sol taraf $(2, 1)$, sağ taraf $(2, 2)$ çıkar. **M3** sağlanmadığından yapı bir vektör uzayı değildir.

b) A3 aksiyomunu sınavalım. $v = (1, 2)$ ve $w = (3, 4)$ için

$$v + w = (1, 2), \quad w + v = (3, 4)$$

$v + w \neq w + v$ olduğundan toplama komutatif değildir; yapı vektör uzayı değildir. (Aynı işlem **A4** ve **A5**'i de bozar.)

c) Yine M3'ü sınavalım. $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ ve $v = (3, 4)$ alalım:

$$(k_1 + k_2)v = 3v = (3^2 \cdot 3, 3^2 \cdot 4) = (27, 36)$$

$$k_1v + k_2v = 1 \cdot (3, 4) + 2 \cdot (3, 4) = (3, 4) + (12, 16) = (15, 20)$$

İki taraf farklı olduğundan **M3** sağlanmaz; yapı vektör uzayı değildir.

■

11.5 Alıştırma

Alıştırma 11.1 (Vektör Uzayı mı?).

- $V = \mathbb{R}^2$ kümesinde toplama alışıldık biçimde, skalerle çarpma ise $k(a, b) = (ka, 0)$ olarak tanımlansın. Bu yapının bir vektör uzayı olup olmadığını belirleyiniz.
- $V(K)$ bir vektör uzayı, $u, v \in V$ ve $k \in K \setminus \{0_K\}$ olsun. $ku = kv$ ise $u = v$ olduğunu gösteriniz.
- $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 3a\}$ kümesinin, $\mathbb{R}^2$ 'deki alışıldık işlemlerle bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) M5 aksiyomunu sınavalım: her u için $1_K u = u$ olmalıdır. $u = (1, 1)$ alalım:

$$1 \cdot (1, 1) = (1 \cdot 1, 0) = (1, 0) \neq (1, 1)$$

M5 sağlanmadığından yapı bir vektör uzayı değildir. (Diğer dokuz aksiyomun sağlanıyor olması durumu kurtarmaz; tanım hepsini birden ister.)

b) $ku = kv$ olsun. Her iki tarafa $-(kv)$ ekleyip **M2** ve teoremin dördüncü maddesini kullanalım:

$$0_V = ku - kv = ku + k(-v) = k(u + (-v)) = k(u - v)$$

Şimdi teoremin üçüncü maddesini uygulayalım: $k(u - v) = 0_V$ olduğundan ya $k = 0_K$ 'dir ya da $u - v = 0_V$ 'dir. Varsayım gereği $k \neq 0_K$ olduğundan $u - v = 0_V$, yani $u = v$ bulunur.

c) V , düzlemde $b = 3a$ doğrusu üzerindeki noktalardan oluşur; elemanları $(a, 3a)$ biçimindedir. $(0, 0) \in V$ olduğundan $V \neq \emptyset$ 'dir.

A1. $(a, 3a) + (c, 3c) = (a + c, 3a + 3c) = (a + c, 3(a + c)) \in V$

M1. $k(a, 3a) = (ka, 3ka) = (ka, 3(ka)) \in V$

A4. $(0, 0) = (0, 3 \cdot 0) \in V$ ve toplamaya göre etkisizdir.

A5. $(a, 3a)$ 'nın tersi $(-a, -3a) = (-a, 3(-a)) \in V$ 'dir.

Kalan aksiyomlar (**A2**, **A3**, **M2–M5**) $\mathbb{R}^2$ 'de zaten geçerli olduğundan ve $V \subseteq \mathbb{R}^2$ aynı işlemleri taşıdığından bunlar V 'nin elemanları için de sağlanır. Demek ki V bir vektör uzayıdır.

Bu son gözlem bir sonraki bölümün de fikridir: büyük bir uzayın içinde yaşayan ve iki işlem altında kapalı olan her alt küme, kendiliğinden bir vektör uzayıdır.

■

Son alıştırmada gördüğümüz durum o kadar sık karşımıza çıkar ki ayrı bir ad ve kısa bir ölçüt hak eder: **alt uzaylar**.

12. Alt Uzaylar

Bir vektör uzayının içinde, kendisi de vektör uzayı olan alt kümeler bulunur. Bunları bulmak için on aksiyomu baştan denetlemeye gerek yoktur: büyük uzaydan miras alınan özellikler zaten geçerlidir, geriye yalnızca **kapalılık** kalır. Bu bölümde o kısa ölçütü kurup bol örnekle çalıştıracağız.

12.1 Tanım ve Ölçüt

Tanım 12.1 (Alt Uzay). V, K üzerinde bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun. W 'nin kendisi de V 'deki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre K üzerinde bir vektör uzayı ise, W 'ye V 'nin bir **alt uzayı** (alt vektör uzayı) denir.

Teorem 12.1 (Alt Uzay Ölçütü). $V(K)$ bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun. W 'nin V 'nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

1. $\forall v, w \in W$ için $v + w \in W$
2. $\forall k \in K, \forall v \in W$ için $kv \in W$

İspat.

Gereklik. W bir alt uzay, yani kendi başına bir vektör uzayı ise **A1** ve **M1** aksiyomlarını sağlar; bunlar tam olarak (1) ve (2) koşullarıdır.

Yeterlik. (1) ve (2) sağlansın. (1) tam olarak **A1**, (2) tam olarak **M1**'dir. $W \subseteq V$ olduğundan W 'nin elemanları aynı zamanda V 'nin elemanlarıdır ve V 'de geçerli olan **A2, A3, M2, M3, M4, M5** aksiyomları W 'nin elemanları için de geçerlidir. Geriye **A4** ve **A5** kalır.

A4. $W \neq \emptyset$ olduğundan bir $u \in W$ vardır. (2) koşulunda $k = 0_K$ alalım: $0_K u \in W$ 'dir. Öte yandan **temel özellikler teoreminden** $0_K u = 0_V$ 'dir; demek ki $0_V \in W$ 'dir. Her $w \in W \subseteq V$ için $0_V + w = w$ olduğundan 0_V , W 'nin de sıfır vektörüdür.

A5. $w \in W$ olsun. (2) koşulunda $k = -1_K$ alalım: $(-1_K)w \in W$ 'dir. Yine temel özelliklerden $(-1_K)w = - (1_K w) = -w$ 'dir; yani $-w \in W$ 'dir.

Bütün aksiyomlar sağlandığından W , V 'nin bir alt uzayıdır.

■

İki koşul tek bir koşulda birleştirilebilir; uygulamada en çok kullanılan biçim budur.

Teorem 12.2 (Tek Koşullu Ölçüt). $V(K)$ bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq W \subseteq V$ olsun. W 'nin V 'nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul

$$\forall k, l \in K, \forall v, w \in W \quad kv + lw \in W$$

olmasıdır.

İspat.

Gereklik. W alt uzay ise önceki ölçütün (2) koşuluyla $kv \in W$ ve $lw \in W$, ardından (1) koşuluyla $kv + lw \in W$ olur.

Yeterlik. Koşul sağlansın. $k = l = 1_K$ alınırsa

$$v + w = 1_K v + 1_K w \in W$$

elde edilir; bu, önceki ölçütün birinci koşuludur. $l = 0_K$ alınırsa, $0_K w = 0_V$ ve $kv + 0_V = kv$ olduğundan

$$kv \in W$$

bulunur; bu da ikinci koşuldur. Önceki teorem uygulanarak W 'nin alt uzay olduğu sonucuna varılır.

■

12.2 Örnekler

Örnek 12.1 (Aşikâr Alt Uzaylar). Herhangi bir $V(K)$ vektör uzayı için $\{0_V\}$ ve V 'nin kendisi, V 'nin birer alt uzayıdır. Bunlara V 'nin **şikâr alt uzayları** denir. Gerçekten $\{0_V\}$ için $k0_V + l0_V = 0_V + 0_V = 0_V$ 'dir; V için koşul zaten **A1** ve **M1**'dir.

Örnek 12.2 ($\mathbb{R}^3$ İçinde Bir Düzlem). $V = \mathbb{R}^3$ ve $W = \{ (a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R} \}$ olsun. W 'nin $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$(0, 0, 0) \in W$ olduğundan $W \neq \emptyset$ 'dir.

Toplama: $(a_1, b_1, 0) + (a_2, b_2, 0) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0) \in W$

Skalerle çarpma: $k(a, b, 0) = (ka, kb, 0) \in W$

İki koşul da sağlandığından W bir alt uzayıdır. Geometrik olarak W , xy -düzlemidir: başlangıç noktasından geçen bir düzlem.

■

Örnek 12.3 (Homojen Sistemin Çözüm Kümesi). K cismi üzerinde n bilinmeyenli bir **homojen lineer denklem sisteminin** çözüm kümesi W , K^n 'in bir alt uzayıdır.

İspat.

Sistem $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = 0_K$ ($i = 1, \dots, m$) olsun.

Sıfır çözüm daima bir çözüm olduğundan $(0_K, \dots, 0_K) \in W$ ve $W \neq \emptyset$ 'dir. Ayrıca çözümler n -li olduğundan $W \subseteq K^n$ 'dir.

$u = (u_1, \dots, u_n)$ ve $w = (w_1, \dots, w_n)$ iki çözüm olsun. Her i için

$$\begin{aligned} a_{i1}(u_1 + w_1) + \dots + a_{in}(u_n + w_n) \\ = (a_{i1}u_1 + \dots + a_{in}u_n) + (a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n) \\ = 0_K + 0_K = 0_K \end{aligned}$$

oldüğundan $u + w \in W$ 'dir. Benzer şekilde $k \in K$ için

$$a_{i1}(kw_1) + \dots + a_{in}(kw_n) = k(a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n) = k0_K = 0_K$$

oldüğundan $kw \in W$ 'dir. Ölçüt gereği W bir alt uzayıdır.

■

Teorem 12.3 (Alt Uzayların Kesişimi). U ve W , $V(K)$ 'nin iki alt uzayı ise $U \cap W$ de V 'nin bir alt uzayıdır.

İspat.

U ve W birer alt uzay olduğundan $0_V \in U$ ve $0_V \in W$ 'dir; dolayısıyla $0_V \in U \cap W$ ve $U \cap W \neq \emptyset$ 'dir. Ayrıca $U \cap W \subseteq U \subseteq V$ 'dir.

$a, b \in U \cap W$ olsun. $a, b \in U$ ve U alt uzay olduğundan $a + b \in U$ 'dur; aynı biçimde $a + b \in W$ 'dir.

Demek ki $a + b \in U \cap W$ 'dir.

$k \in K$ ve $a \in U \cap W$ olsun. $ka \in U$ ve $ka \in W$ olduğundan $ka \in U \cap W$ 'dir. Ölçüt gereği $U \cap W$ bir alt uzayıdır.

■

Aynı akıl yürütme sonlu sayıda alt uzay için tekrarlanabilir: $U_1, U_2, \dots, U_n$ alt uzaylar ise $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ de bir alt uzayıdır.

12.3 Alt Uzay Olmayan Kümeler

Örnek 12.4 ($\mathbb{R}^3$ 'te Üç Karşı Örnek). $V = \mathbb{R}^3$ için aşağıdaki alt kümelerin alt uzay olmadığını gösteriniz.

- a) $W = \{ (a, b, c) : a \geq 0 \}$
 b) $W = \{ (a, b, c) : a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 \}$
 c) $W = \{ (a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Q} \}$

Çözüm.

a) Skalerle çarpma kapalı değildir. $k = -5 \in \mathbb{R}$ ve $w = (1, 2, 3) \in W$ alalım:

$$kw = (-5, -10, -15)$$

Birinci bileşen $-5 < 0$ olduğundan $kw \notin W$ 'dir.

b) Toplama kapalı değildir. $v = (1, 0, 0) \in W$ ve $w = (0, 1, 0) \in W$ 'dir (her ikisi için de kare toplamı $1 \leq 1$). Buna karşın

$$v + w = (1, 1, 0), \quad 1^2 + 1^2 + 0^2 = 2 > 1$$

olduğundan $v + w \notin W$ 'dir.

c) Skalerle çarpma kapalı değildir; skalerler $\mathbb{R}$ 'den alındığı için irrasyonel bir çarpan seçmek yeter. $k = \sqrt{5} \in \mathbb{R}$ ve $w = (2, 3, 4) \in W$ için

$$kw = (2\sqrt{5}, 3\sqrt{5}, 4\sqrt{5})$$

bileşenleri irrasyoneldir; $kw \notin W$ 'dir.

■

Örnek 12.5 (Fonksiyon Uzayında Alt Uzaylar). $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ vektör uzayı için aşağıdaki alt kümelerin alt uzay olup olmadığını belirleyiniz.

- a) $W = \{f \in V : f(3) = 0\}$
 b) $W = \{f \in V : \forall x, f(-x) = -f(x)\}$ (tek fonksiyonlar)
 c) $W = \{f \in V : \forall x, f(x) \geq 0\}$

Çözüm.

a) Sıfır fonksiyonu $0(3) = 0$ sağladığından $0 \in W$ ve $W \neq \emptyset$ 'dir. $k, l \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in W$ için

$$(kf + lg)(3) = kf(3) + lg(3) = k \cdot 0 + l \cdot 0 = 0$$

olduğundan $kf + lg \in W$ 'dir: W bir **alt uzaydır**.

b) Sıfır fonksiyonu tektir ($0(-x) = 0 = -0(x)$), dolayısıyla $W \neq \emptyset$ 'dir. $f, g \in W$ ve $k, l \in \mathbb{R}$ için her x 'te

$$(kf + lg)(-x) = kf(-x) + lg(-x) = -kf(x) - lg(x) = -(kf + lg)(x)$$

olduğundan $kf + lg$ de tektir: W bir **alt uzaydır**.

c) Toplama kapalıdır ($f, g \geq 0$ ise $f + g \geq 0$), ama skalerle çarpma kapalı değildir. $f(x) = x^2$ fonksiyonu W 'dedir; buna karşın

$$((-1)f)(x) = -x^2$$

fonksiyonu $x \neq 0$ için negatif değer alır, yani $(-1)f \notin W$ 'dir. Demek ki W bir **alt uzay değildir**.

■

 Hızlı eleme: sıfır vektör içeride mi?

Her alt uzay sıfır vektörü içermek zorundadır. Bu yüzden bir kümenin alt uzay olmadığını göstermenin en hızlı yolu çoğu zaman $0_V \notin W$ olduğunu fark etmektir. Örneğin $\{(a, b, c) : a + b + c = 1\}$ kümesi alt uzay olamaz, çünkü $(0, 0, 0)$ denklemi sağlamaz.

12.4 Alıştırma

Alıştırma 12.1 (Alt Uzay mı?).

- a) $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b - c = 0\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.
- b) U ve W , $V(K)$ 'nin alt uzayları olsun. $U \cup W$ 'nin genel olarak alt uzay olmadığını bir karşı örnekle gösteriniz.
- c) V , n -inci mertebeden reel kare matrislerin uzayı olsun. Köşegen matrislerin kümesinin V 'nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $(0, 0, 0)$ için $0 + 0 - 0 = 0$ olduğundan $(0, 0, 0) \in W$ ve $W \neq \emptyset$ 'dir.

$v = (a_1, b_1, c_1)$ ve $w = (a_2, b_2, c_2)$ kümenin elemanları, $k, l \in \mathbb{R}$ olsun:

$$a_1 + 2b_1 - c_1 = 0, \quad a_2 + 2b_2 - c_2 = 0$$

$kv + lw = (ka_1 + la_2, kb_1 + lb_2, kc_1 + lc_2)$ vektörünü denklemde yerine koyalım:

$$\begin{aligned} & (ka_1 + la_2) + 2(kb_1 + lb_2) - (kc_1 + lc_2) \\ &= k \underbrace{(a_1 + 2b_1 - c_1)}_0 + l \underbrace{(a_2 + 2b_2 - c_2)}_0 = 0 \end{aligned}$$

Demek ki $kv + lw \in W$ 'dir ve tek koşullu ölçüt gereği W bir alt uzaydır. (W , tek denklemlili bir homojen sistemin çözüm kümesidir; genel sonuçtan da doğrudan çıkar.)

b) $V = \mathbb{R}^2$ alalım. $U = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$ ve $W = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$ kümelerinin ikisi de birer alt uzaydır (iki koordinat eksenini).

$u = (1, 0) \in U \subseteq U \cup W$ ve $w = (0, 1) \in W \subseteq U \cup W$ 'dir. Buna karşın

$$u + w = (1, 1)$$

vektörü ne U 'da ne de W 'dedir; yani $u + w \notin U \cup W$ 'dir. Toplama kapalı olmadığından $U \cup W$ bir alt uzay değildir.

(İki alt uzayın birleşiminin alt uzay olması, ancak birinin diğerini kapsamaması hâlinde mümkündür. Birleşimin yerini tutacak doğru kavram, bir sonraki bölümde tanımlayacağımız **toplama** $U + W$ 'dir.)

c) Köşegen matrislerin kümesi D olsun; $A \in D$ demek $i \neq j$ iken $a_{ij} = 0$ demektir. Sıfır matris köşegendir, dolayısıyla $D \neq \emptyset$ 'dir.

$A, B \in D$ ve $k, l \in \mathbb{R}$ olsun. $kA + lB$ matrisinin (i, j) bileşeni $ka_{ij} + lb_{ij}$ 'dir. $i \neq j$ için

$$ka_{ij} + lb_{ij} = k \cdot 0 + l \cdot 0 = 0$$

olduğundan $kA + lB$ de köşegendir. Ölçüt gereği D bir alt uzaydır.

■

İki alt uzayın birleşimi işe yaramadı; peki onları içeren en küçük alt uzay nedir? Yanıt, elemanları teker teker toplamaktan geçiyor: **alt uzayların toplamı ve direkt toplam**.

13. Toplamlar ve Direkt Toplam

İki alt uzayın birleşimi genelde alt uzay değildir. Doğru kavram birleşim değil, **toplam**dır: bir uzaydan bir vektör, diğerinden bir vektör alıp toplamak. Bu bölümde toplamın her zaman alt uzay olduğunu göreceğiz, ardından toplamın en düzenli hâlini – yazılışın tek türlü olduğu **direkt toplamı** – tanımlayacağız.

13.1 Alt Uzayların Toplamı

Teorem 13.1 (Toplam Bir Alt Uzaydır). U ve W , $V(K)$ vektör uzayının iki alt uzayı olsun.

$$U + W = \{ u + w : u \in U, w \in W \}$$

kümesi de $V(K)$ 'nin bir alt uzayıdır.

İspat.

U ve W alt uzay olduğundan $0_V \in U$ ve $0_V \in W$ 'dir; buradan

$$0_V = 0_V + 0_V \in U + W$$

olur ve $U + W \neq \emptyset$ 'dir. Ayrıca $U, W \subseteq V$ ve V toplamaya göre kapalı olduğundan $U + W \subseteq V$ 'dir.

Toplama. $u_1 + w_1$ ve $u_2 + w_2$ kümenin iki elemanı olsun ($u_i \in U, w_i \in W$). V 'de toplama asosiyatif ve komutatif olduğundan terimler yeniden gruplanabilir:

$$(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = \underbrace{(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + w_2)}_{\in W} \in U + W$$

Skalerle çarpma. $k \in K$ için **M2** aksiyomuyla

$$k(u + w) = \underbrace{ku}_{\in U} + \underbrace{k w}_{\in W} \in U + W$$

Ölçüt gereği $U + W$ bir alt uzaydır. ■

$U \subseteq U + W$ ve $W \subseteq U + W$ 'dir (birinde $w = 0_V$, diğerinde $u = 0_V$ alınır); dolayısıyla $U + W$, hem U 'yu hem W 'yi içeren bir alt uzaydır – üstelik böyle alt uzayların en küçüğüdür.

13.2 Direkt Toplam

Tanım 13.1 (Direkt Toplam). U ve W , $V(K)$ 'nin alt uzayları olsun. Her $v \in V$ için

$$v = u + w \quad (u \in U, w \in W)$$

biçiminde **bir ve yalnız bir türlü** bir yazılış varsa, V 'ye U ile W 'nin **direkt toplamı** denir ve

$$V = U \oplus W$$

yazılır.

Tanımda iki şey birden isteniyor: yazılışın **var olması** ve **tek olması**. Aşağıdaki teorem bu ikisini denetlenmesi kolay iki koşula çevirir.

Teorem 13.2 (Direkt Toplam Ölçütü). $V = U \oplus W$ olması için gerek ve yeter koşullar şunlardır:

1. $V = U + W$

$$2. U \cap W = \{0_V\}$$

İspat.

Gereklik. $V = U \oplus W$ olsun.

Her $v \in V$ bir $u + w$ olarak yazıldığından $V \subseteq U + W$ 'dir; $U + W \subseteq V$ zaten geçerli olduğundan $V = U + W$ 'dir. Birinci koşul sağlanır.

Şimdi $a \in U \cap W$ alalım. a 'yı iki farklı biçimde yazabiliriz:

$$a = \underbrace{a}_{\in U} + \underbrace{0_V}_{\in W}, \quad a = \underbrace{0_V}_{\in U} + \underbrace{a}_{\in W}$$

Yazılış tek olduğundan bu iki gösterilişin karşılıklı parçaları eşit olmalıdır: $a = 0_V$. Demek ki $U \cap W = \{0_V\}$ 'dir (0_V her iki alt uzayda da bulunduğundan kesişim boş değildir).

Yeterlik. (1) ve (2) sağlansın. $v \in V$ alalım. $V = U + W$ olduğundan

$$v = u + w \quad (u \in U, w \in W)$$

biçiminde bir yazılış **vardır**. Bunun **tek** olduğunu görelim: $v = u' + w'$ ikinci bir yazılış olsun ($u' \in U$, $w' \in W$). O hâlde

$$u + w = u' + w' \implies u - u' = w' - w$$

Sol taraf U 'da, sağ taraf W 'dedir ve ikisi eşit olduğundan bu ortak eleman $U \cap W = \{0_V\}$ 'dedir:

$$u - u' = w' - w = 0_V \implies u = u', \quad w = w'$$

Yazılış tek olduğundan $V = U \oplus W$ 'dir.

■

13.3 Çözümlü Örnekler

Örnek 13.1 (Simetrik ve Antisimetrik Ayrışımı). V , n -inci mertebeden reel kare matrislerin uzayı olsun.

$$U = \{ M \in V : M^t = M \}, \quad W = \{ M \in V : M^t = -M \}$$

U simetrik, W antisimetrik matrislerin kümesidir. $V = U \oplus W$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önce U ve W 'nin birer alt uzay olduğunu görelim: $O^t = O = -O$ olduğundan sıfır matris her ikisinde de ve transpoze işlemi $(kA + lB)^t = kA^t + lB^t$ ile lineer davrandığından her iki koşul da toplam ve skalerle çarpma altında korunur.

1. $V = U + W$. $A \in V$ keyfi bir matris olsun ve şu ayrışımı yazalım:

$$A = \frac{1}{2} (A + A^t) + \frac{1}{2} (A - A^t)$$

Birinci terim simetriktir:

$$\left[\frac{1}{2} (A + A^t) \right]^t = \frac{1}{2} (A^t + A) = \frac{1}{2} (A + A^t)$$

İkinci terim antisimetriktir:

$$\left[\frac{1}{2} (A - A^t) \right]^t = \frac{1}{2} (A^t - A) = -\frac{1}{2} (A - A^t)$$

Demek ki her A matrisi bir simetrik ile bir antisimetriğin toplamıdır: $V = U + W$.

2. $U \cap W = \{O\}$. $A \in U \cap W$ olsun. O hâlde hem $A^t = A$ hem de $A^t = -A$ 'dır; buradan

$$A = -A \implies 2A = O \implies A = O$$

(Reel sayılarda $2 \neq 0$ olduğundan bölme yapılabilir.)
İki koşul da sağlandığından $V = U \oplus W$ 'dir.

■

Örnek 13.2 ($\mathbb{R}^3$ 'te Bir Direkt Toplam). $U = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b = c \}$ ve $W = \{ (0, b, c) : b, c \in \mathbb{R} \}$ olsun. $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1. $\mathbb{R}^3 = U + W$. Keyfi bir (a, b, c) vektörünü şöyle ayıralım:

$$(a, b, c) = \underbrace{(a, a, a)}_{\in U} + \underbrace{(0, b-a, c-a)}_{\in W}$$

Birinci terimin üç bileşeni de eşittir, ikinci terimin ilk bileşeni sıfırdır; ikisi de ait oldukları kümededir.

2. $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$. $(a, b, c) \in U \cap W$ olsun. U 'da olmak $a = b = c$ demektir; W 'de olmak $a = 0$ demektir. İkisi birlikte $a = b = c = 0$ verir.

İki koşul sağlandığından $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ 'dir.

■

Örnek 13.3 (Toplam Direkt Olmayabilir). $U = \{ (a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R} \}$ ve $W = \{ (0, b, c) : b, c \in \mathbb{R} \}$ olsun. $\mathbb{R}^3 = U + W$ olduğunu, fakat toplamın direkt olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Toplam $\mathbb{R}^3$ 'tür. Her (a, b, c) için

$$(a, b, c) = \underbrace{(a, b, 0)}_{\in U} + \underbrace{(0, 0, c)}_{\in W}$$

yazılabilir; dolayısıyla $\mathbb{R}^3 = U + W$ 'dir.

Yazılış tek değildir. $(3, 5, 7)$ vektörünü iki farklı biçimde yazalım:

$$(3, 5, 7) = (3, 1, 0) + (0, 4, 7) = (3, -4, 0) + (0, 9, 7)$$

Her iki ayrışım da birinci terim U 'da, ikinci terim W 'dedir; ama ayrışımalar farklıdır. Demek ki $\mathbb{R}^3$, U ile W 'nin direkt toplamı **değildir**.

Bunun nedenini ölçüt açıkça gösterir:

$$U \cap W = \{ (0, b, 0) : b \in \mathbb{R} \} \neq \{(0, 0, 0)\}$$

Kesişim yalnızca sıfır vektöründen ibaret olmadığı için teklüğün bozulması kaçınılmazdır: kesişimdeki herhangi bir $(0, t, 0)$ vektörü birinci terimden çıkarılıp ikinciye eklenerek yeni bir ayrışım üretilebilir.

■

💡 Kesişim, teklüğün ölçüsüdür

Son iki örnek yan yana konduğunda direkt toplamın ne anlama geldiği netleşir: toplam her zaman vardır, tek olan yazılıştır. Kesişim ne kadar büyükse yazılış o kadar çok çeşitlenir; kesişim yalnızca sıfır vektörüne indiğinde her vektörün tek bir adresi kalır.

13.4 Alıştırma

Alıştırma 13.1 (Toplam ve Direkt Toplam).

a) $U = \{ (a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R} \}$ ve $W = \{ (0, 0, c) : c \in \mathbb{R} \}$ için $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ olduğunu gösteriniz.

- b) $U = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = a\}$ ve $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = -a\}$ için $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ olduğunu gösterip $(5, 1)$ vektörünün ayrışımını bulunuz.
- c) $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ uzayında U çift fonksiyonların, W tek fonksiyonların kümesi olsun. $V = U \oplus W$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Önce ikisinin de alt uzay olduğunu not edelim; her biri bileşenlerinden bazılarının sıfır olmasıyla tanımlıdır ve bu koşul toplam ile skalerle çarpma altında korunur.

Toplam: Her $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(a, b, c) = (a, b, 0) + (0, 0, c)$$

olduğundan $\mathbb{R}^3 = U + W$ 'dir.

Kesişim: $(a, b, c) \in U \cap W$ olsun. U 'da olmak $c = 0$, W 'de olmak $a = b = 0$ demektir; ikisi birlikte $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ verir.

Demek ki $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ 'dir. (Önceki örnekten farkı: orada ikinci uzay $(0, b, c)$ biçimindeydi ve b bileşeni her iki uzayda da serbestti.)

b) $U, y = x$ doğrusu; $W, y = -x$ doğrusudur. İkisi de başlangıçtan geçtiğinden birer alt uzaydır.

Toplam: (a, b) verilsin; $(a, b) = (s, s) + (t, -t)$ olacak s, t arıyoruz:

$$s + t = a, \quad s - t = b \implies s = \frac{a+b}{2}, \quad t = \frac{a-b}{2}$$

Her (a, b) için bu s ve t bulunduğundan $\mathbb{R}^2 = U + W$ 'dir.

Kesişim: $(a, b) \in U \cap W$ ise $b = a$ ve $b = -a$; buradan $a = -a$, yani $a = 0$ ve $b = 0$ 'dır.

Demek ki $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ 'dir. $(5, 1)$ için $s = \frac{5+1}{2} = 3$ ve $t = \frac{5-1}{2} = 2$:

$$(5, 1) = (3, 3) + (2, -2)$$

c) f çift ise $f(-x) = f(x)$, tek ise $f(-x) = -f(x)$ 'tir. Her iki koşul da lineer olduğundan U ve W birer alt uzaydır.

Toplam: Keyfi bir f için

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(-x)}{2}}_{g(x)} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{h(x)}$$

yazalım. $g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$ olduğundan g çifttir; $h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$ olduğundan h tektir. Demek ki $V = U + W$ 'dir.

Kesişim: $f \in U \cap W$ ise her x için $f(x) = f(-x) = -f(x)$, yani $2f(x) = 0$ ve $f(x) = 0$ 'dır. Demek ki f sıfır fonksiyonudur.

Sonuç: $V = U \oplus W$. Bu, simetrik-antisimetrik matris ayrışımının fonksiyonlardaki tam karşılığıdır; ikisinde de aynı $\frac{1}{2}(A \pm A^t)$ hilesi kullanılmıştır.

■

Alt uzayları toplayarak yenilerini üretmeyi öğrendik. Peki elimizde birkaç vektör varsa, onların ürettiği en küçük alt uzay hangisidir? Bu soru bizi dersin merkezindeki kavrama götürür: **lineer kombinasyonlar ve doğuran kümeler**.

14. Lineer Kombinasyonlar ve Doğuran Kümeler

Elimizde birkaç vektör varsa, onlarla ulaşabileceğimiz bütün vektörler nelerdir? Yanıt basittir: her birini bir skalerle çarpıp toplayarak elde edilenler. Bu işleme **lineer kombinasyon** denir ve bu bölümde göstereceğimiz gibi, bir kümenin bütün lineer kombinasyonları o kümeyi içeren **en küçük** alt uzayı oluşturur.

14.1 Lineer Kombinasyon

Tanım 14.1 (Lineer Kombinasyon). $V(K)$ bir vektör uzayı, $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ ve $a_1, a_2, \dots, a_m \in K$ olsun.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m \in V$$

biçiminde yazılan her elemana, $v_1, v_2, \dots, v_m$ vektörlerinin bir **lineer kombinasyonu** denir.

Teorem 14.1 (Gerilen Alt Uzay). $V(K)$ bir vektör uzayı ve $\emptyset \neq S \subseteq V$ olsun. S içindeki elemanların bütün lineer kombinasyonlarının kümesi, V 'nin S 'yi içeren bir alt uzayıdır; bu alt uzay $L(S)$ ile gösterilir. Ayrıca W , V 'nin S 'yi içeren herhangi bir alt uzayı ise $L(S) \subseteq W$ 'dir.

İspat.

$S \subseteq L(S)$ ve $L(S) \neq \emptyset$. Her $v \in S$ için $v = 1_K v$ tek terimli bir lineer kombinondur; dolayısıyla $v \in L(S)$ 'dir.

$L(S)$ bir alt uzayıdır. $u, w \in L(S)$ alalım:

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m, \quad w = b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$$

burada $u_i, w_j \in S$ ve $a_i, b_j \in K$ 'dir. O hâlde

$$u + w = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m + b_1 w_1 + \dots + b_n w_n$$

ifadesi yine S elemanlarının bir lineer kombinasyonudur, yani $u + w \in L(S)$ 'dir. Benzer şekilde $k \in K$ için

$$ku = (ka_1) u_1 + \dots + (ka_m) u_m \in L(S)$$

Ölçüt gereği $L(S)$ bir alt uzayıdır.

En küçüklük. W , S 'yi içeren bir alt uzay olsun. $v_1, \dots, v_m \in S \subseteq W$ ve W bir alt uzay olduğundan, kapalılık tekrar tekrar uygulanarak

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m \in W$$

bulunur. Yani S elemanlarının her lineer kombinasyonu W 'dedir: $L(S) \subseteq W$.

■

$L(S)$ alt uzayına, S tarafından doğurulan (gerilen) alt uzay denir; S 'ye de $L(S)$ 'nin bir **doğuran kümesi** denir. Teoremin son kısmı şunu söyler: $L(S)$, S 'yi içeren bütün alt uzayların en küçüğüdür.

💡 Gösterim

$S = \{v_1, \dots, v_m\}$ sonlu bir küme olduğunda $L(S)$ yerine kısaca $L(v_1, \dots, v_m)$ yazılır. $V = L(v_1, \dots, v_m)$ ifadesi " V uzayı $v_1, \dots, v_m$ vektörleri tarafından doğrulur" diye okunur.

14.2 Standart Doğuran Küme

Örnek 14.1 (K^n 'i Doğuran Vektörler). K komutatif bir cisim olmak üzere K^n uzayında

$$e_1 = (1_K, 0_K, \dots, 0_K), \quad e_2 = (0_K, 1_K, 0_K, \dots, 0_K), \quad \dots, \quad e_n = (0_K, \dots, 0_K, 1_K)$$

vektörlerini ve $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ kümesini alalım. $K^n = L(S)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$L(S)$ bir alt uzay ve $S \subseteq K^n$ olduğundan $L(S) \subseteq K^n$ 'dir.

Ters kapsama için keyfi bir $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n$ alalım. Skalerle çarpma ve toplama bileşen bileşen işlediğinden

$$\begin{aligned} a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n &= (a_1, 0_K, \dots, 0_K) + (0_K, a_2, 0_K, \dots, 0_K) + \dots + (0_K, \dots, 0_K, a_n) \\ &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Demek ki her vektör e_i 'lerin bir lineer kombinasyonudur: $K^n \subseteq L(S)$. İki kapsama birlikte $K^n = L(S)$ verir.

■

14.3 Bir Vektör Lineer Kombinasyon mudur?

Soru her zaman bir denklem sistemine dönüşür: bilinmeyenler skalerlerdir.

Örnek 14.2 ($\mathbb{R}^4$ 'te Bir Sınama). $v = (3, 9, -4, -2) \in \mathbb{R}^4$ vektörü

$$u_1 = (1, -2, 0, 3), \quad u_2 = (2, 3, 0, -1), \quad u_3 = (2, -1, 2, 1)$$

vektörlerinin bir lineer kombinasyonu mudur? Yani $v \in L(u_1, u_2, u_3)$ midir?

Çözüm.

$v = xu_1 + yu_2 + zu_3$ olacak $x, y, z \in \mathbb{R}$ arıyoruz. Sağ tarafı bileşenlerine ayıralım:

$$\begin{aligned} x(1, -2, 0, 3) + y(2, 3, 0, -1) + z(2, -1, 2, 1) \\ = (x + 2y + 2z, -2x + 3y - z, 2z, 3x - y + z) \end{aligned}$$

Bunu v 'ye eşitlemek şu sistemi verir:

$$x + 2y + 2z = 3, \quad -2x + 3y - z = 9, \quad 2z = -4, \quad 3x - y + z = -2$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) & \xrightarrow[R_4 \rightarrow -3R_1 + R_4]{R_2 \rightarrow 2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -7 & -5 & -11 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[R_4 \rightarrow R_2 + R_4]{R_4 \rightarrow R_2 + R_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Sistem tutarlıdır ve $r = n = 3$ olduğundan tek çözüm vardır. Aşağıdan yukarı çözelim:

$$2z = -4 \implies z = -2$$

$$7y + 3(-2) = 15 \implies 7y = 21 \implies y = 3$$

$$x = 3 - 2y - 2z = 3 - 6 + 4 = 1$$

Demek ki

$$v = u_1 + 3u_2 - 2u_3$$

Sağlama:

$$(1, -2, 0, 3) + (6, 9, 0, -3) + (-4, 2, -4, -2) = (3, 9, -4, -2)$$

■

Örnek 14.3 ($\mathbb{R}^3$ 'ü Doğuran Üç Vektör). $\mathbb{R}^3$ uzayının $u = (1, 2, 3)$, $v = (0, 1, 2)$, $w = (0, 0, 1)$ vektörleri tarafından doğrulduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Keyfi bir $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün bu üçünün lineer kombinasyonu olduğunu göstereceğiz:

$$(a, b, c) = xu + yv + zw = (x, 2x + y, 3x + 2y + z)$$

Bileşenler eşitlenirse

$$x = a, \quad 2x + y = b, \quad 3x + 2y + z = c$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a \\ 2 & 1 & 0 & | & b \\ 3 & 2 & 1 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & -2a + b \\ 0 & 2 & 1 & | & -3a + c \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & a \\ 0 & 1 & 0 & | & -2a + b \\ 0 & 0 & 1 & | & a - 2b + c \end{pmatrix}$$

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğundan ($r = n = 3$) sistemin tek çözümü vardır:

$$x = a, \quad y = -2a + b, \quad z = a - 2b + c$$

Bu değerler her (a, b, c) için var olduğuna göre $\mathbb{R}^3 = L(u, v, w)$ 'dir.

Sağlama olarak $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ alalım: $x = 1, y = -2, z = 1$ ve

$$1 \cdot (1, 2, 3) - 2 \cdot (0, 1, 2) + 1 \cdot (0, 0, 1) = (1, 2 - 2, 3 - 4 + 1) = (1, 0, 0)$$

■

14.4 Alıştırma

Alıştırma 14.1 (Lineer Kombinasyonlar).

- $v = (1, -2, 5)$ vektörü $L((1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1))$ alt uzayının bir elemanı mıdır?
- $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün $u = (2, 1, 0)$, $v = (1, -1, 2)$, $w = (0, 3, -4)$ tarafından doğrulan alt uzaya ait olması için a, b, c arasındaki bağıntıyı bulunuz.
- $W = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ alt uzayının $u = (2, -1, 0)$ ve $v = (1, 3, 0)$ tarafından doğrulduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $v = x(1, 1, 1) + y(1, 2, 3) + z(2, -1, 1)$ olacak x, y, z arıyoruz. Bileşenler:

$$x + y + 2z = 1, \quad x + 2y - z = -2, \quad x + 3y + z = 5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 1 & 2 & -1 & | & -2 \\ 1 & 3 & 1 & | & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & | & -3 \\ 0 & 2 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3 \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right)$$

Sistem tutarlıdır; aşağıdan yukarı çözelim:

$$5z = 10 \implies z = 2, \quad y = -3 + 3z = 3$$

$$x = 1 - y - 2z = 1 - 3 - 4 = -6$$

Demek ki v bu alt uzayın bir elemanıdır:

$$(1, -2, 5) = -6(1, 1, 1) + 3(1, 2, 3) + 2(2, -1, 1)$$

Sağlama: $(-6 + 3 + 4, -6 + 6 - 2, -6 + 9 + 2) = (1, -2, 5)$.

b) $(a, b, c) = xu + yv + zw$ koşulunu yazalım:

$$x(2, 1, 0) + y(1, -1, 2) + z(0, 3, -4) = (2x + y, x - y + 3z, 2y - 4z)$$

Sistem:

$$2x + y = a, \quad x - y + 3z = b, \quad 2y - 4z = c$$

Bu kez soru “çözüm var mı?” olduğundan sistemin **tutarlılık koşulunu** arıyoruz. Genişletilmiş matriste köşeye 1 getirelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array} \right)$$

$$R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \quad \sim \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 3 & -6 & a - 2b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array} \right)$$

Üçüncü satırı 3, ikinciyi 2 ile çarpıp çıkaralım — eşdeğer olarak $R_3 \rightarrow -\frac{2}{3}R_2 + R_3$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 3 & -6 & a - 2b \\ 0 & 0 & 0 & c - \frac{2(a-2b)}{3} \end{array} \right)$$

Sistemin çözümü olması için son satırın sabit teriminin sıfır olması gerekir:

$$c - \frac{2a - 4b}{3} = 0 \implies 3c = 2a - 4b \implies 2a - 4b - 3c = 0$$

Aranan bağıntı budur: (a, b, c) vektörü ancak ve ancak $2a - 4b - 3c = 0$ olduğunda $L(u, v, w)$ 'dedir. (Bu, üç vektörün $\mathbb{R}^3$ 'ü doğurmadığını, yalnızca bir düzlem gerdiğini de gösterir.)

c) İki kapsamayı ayrı ayrı görelim.

$L(u, v) \subseteq W$: u ve v 'nin üçüncü bileşeni sıfır olduğundan, her $xu + yv$ kombinasyonunun üçüncü bileşeni de sıfırdır; yani $L(u, v) \subseteq W$ 'dir.

$W \subseteq L(u, v)$: Keyfi bir $(a, b, 0) \in W$ için $xu + yv = (a, b, 0)$ arayalım:

$$x(2, -1, 0) + y(1, 3, 0) = (2x + y, -x + 3y, 0)$$

Üçüncü bileşen kendiliğinden uyuyor; kalan sistem

$$2x + y = a, \quad -x + 3y = b$$

Birinci denklemden $y = a - 2x$; ikincide yerine koyalım:

$$-x + 3(a - 2x) = b \implies -7x = b - 3a \implies x = \frac{3a - b}{7}$$

$$y = a - 2x = \frac{a + 2b}{7}$$

Her $(a, b, 0)$ için bu değerler var olduğundan $W \subseteq L(u, v)$ 'dir. İki kapsama birlikte $W = L(u, v)$ verir.

■

Bir matrisin satırlarına K^n 'in vektörleri gözüyle bakarsak, doğuran küme kavramı doğrudan matris hesabına bağlanır. Sıradaki bölümde bu köprüyü kuruyoruz: **satır uzayı ve sütun uzayı**.

15. Satır Uzayı ve Sütun Uzayı

Bir matrisin satırlarına K^n 'in vektörleri gözüyle bakılabilir. O zaman matrisin taşıdığı bilgi, bu satırların gerdiği alt uzaydır — ve elemanter satır işlemleri bu alt uzayı değiştirmez. Bu gözlem, “iki vektör ailesi aynı alt uzayı mı geriyor?” sorusunu tamamen mekanik bir hesaba indirger.

15.1 Tanım

Tanım 15.1 (Satır Uzayı). $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ bir K -matris olsun. A 'nın satırları

$$R_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n}), \quad \dots, \quad R_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

K^n 'in elemanları olarak düşünülürse, $L(R_1, \dots, R_m) \subseteq K^n$ alt uzayına A 'nın **satır uzayı** denir.

Tanım 15.2 (Sütun Uzayı). $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ matrisinin sütunları

$$C_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}), \quad \dots, \quad C_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$$

K^m 'in elemanları olarak düşünülürse, $L(C_1, \dots, C_n) \subseteq K^m$ alt uzayına A 'nın **sütun uzayı** denir.

15.2 Satır İşlemleri Satır Uzayını Korur

Teorem 15.1 (Satır Eşdeğerlik ve Satır Uzayı). *Satır eşdeğer matrislerin satır uzayları aynıdır.*

İspat.

$A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ olsun. *Elemanter satır işlemlerinin her biri — iki satırın yer değiştirmesi, bir satırın sıfırdan farklı bir skalerle çarpılması, bir satıra başka bir satırın katının eklenmesi — yeni satırları eski satırların lineer kombinasyonu olarak verir. Dolayısıyla B 'nin her satırı ya A 'nın bir satırındır ya da A 'nın satırlarının bir lineer kombinasyonudur; hepsi A 'nın satır uzayındadır.*

A 'nın satır uzayı bir alt uzay olduğundan, gerilen alt uzayın en küçüklüğü gereği

$$B \text{ 'nin satır uzayı} \subseteq A \text{ 'nin satır uzayı}$$

Öte yandan her elemanter satır işlemi geri alınabilir olduğundan B 'ye uygun işlemler uygulanarak A elde edilir; aynı akıl yürütmeyeyle

$$A \text{ 'nin satır uzayı} \subseteq B \text{ 'nin satır uzayı}$$

İki kapsama birlikte eşitliği verir.

■

Teorem 15.2 (Kanonik Şekiller ve Eşitlik). *İki satır indirgenmiş merdiven matrisin satır uzaylarının aynı olması için gerek ve yeter koşul, sıfırdan farklı satırlarının birbirinin aynı olmasıdır.*

Buna bir de şu olguyu ekleyelim: her $A_{(m,n)}$ K -matrisi **bir tek** satır indirgenmiş merdiven matrise satır eşdeğerdir; bu matrise A 'nın **satır kanonik şekli** denir. İkisi birlikte pratik bir ölçüt verir.

❓ İki gerilen uzay eşit mi? Üç adımda yanıt

$L(u_1, \dots, u_p)$ ile $L(v_1, \dots, v_q)$ alt uzaylarının aynı olup olmadığını anlamak için:

1. u_i 'leri satır kabul eden A matrisini, v_j 'leri satır kabul eden C matrisini yaz.
2. Her ikisini de satır kanonik şekline indir.
3. Sıfırdan farklı satırlar birebir aynıysa iki uzay eşittir; değilse farklıdır.

15.3 Çözümlü Örnekler

Örnek 15.1 (İki Uzay Aynı mı?). $u_1 = (1, 2, -1, 3)$, $u_2 = (2, 4, 1, -2)$, $u_3 = (3, 6, 3, -7)$ tarafından doğrulan U ile $v_1 = (1, 2, -4, 11)$, $v_2 = (2, 4, -5, 14)$ tarafından doğrulan V alt uzayları aynı mıdır?

Çözüm.

u_i 'leri satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 6 & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3]{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

(Son adımda $3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$ kullanıldı.) Şimdi v_j 'ler için aynısını yapalım:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow 4R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix} =: D$$

(Burada $11 - \frac{32}{3} = \frac{1}{3}$ tür.)

B ile D 'nin sıfırdan farklı satırları birebir aynıdır; dolayısıyla satır uzayları eşittir. $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ ve $C \stackrel{\text{satır}}{\sim} D$ olduğundan

$$U = A \text{ 'nin satır uzayı} = B \text{ 'nin satır uzayı} \\ = D \text{ 'nin satır uzayı} = C \text{ 'nin satır uzayı} = V$$

İki alt uzay aynıdır.

■

Örnek 15.2 (Üç Matrisin Satır Uzayları).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

matrislerinden hangilerinin satır uzayları aynıdır?

Çözüm.

Üçünün de satır kanonik şeklini bulalım.

$$A \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \xrightarrow{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C \xrightarrow{R_2 \rightarrow -4R_1 + R_2, R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A ile C 'nin sıfırdan farklı satırları $(1 \ 0 \ 2)$ ve $(0 \ 1 \ 3)$ olarak çıkarılır; dolayısıyla A ile C 'nin satır uzayları **aynıdır**.

B 'nin birinci satırı $(1 \ 0 \ 1)$ olup diğerlerinden farklıdır; B 'nin satır uzayı A ile C 'ninkinden **farklıdır**.

■

15.4 Alıştırma

Alıştırma 15.1 (Satır Uzayları).

- a) $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (2, 3, -1)$, $u_3 = (3, 1, -5)$ ve $v_1 = (1, -1, -3)$, $v_2 = (3, -2, -8)$, $v_3 = (2, 1, -3)$ olsun. $L(u_1, u_2, u_3)$ ile $L(v_1, v_2, v_3)$ uzayları $\mathbb{R}^3$ 'ün aynı alt uzayı mıdır?
- b) A bir K -matris ise A 'nın satır uzayının, A^t 'nin sütun uzayına eşit olduğunu gözlemleyiniz.

Çözüm.

a) u_i 'lerin matrisini indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2, R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Şimdi v_j 'ler için:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -8 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2, R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -3R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

İki satır kanonik şekil birebir aynıdır; dolayısıyla iki alt uzay **eşittir**:

$$L(u_1, u_2, u_3) = L(v_1, v_2, v_3) = L((1, 0, -2), (0, 1, 1))$$

b) **Transpoze tanımı** gereği A^t 'nin i -inci sütunu, A 'nın i -inci satırının kendisidir. Aynı vektör ailesi söz konusu olduğundan geldikleri alt uzaylar da aynıdır:

$$A \text{ 'nin satır uzayı} = A^t \text{ 'nin sütun uzayı}$$

Simetrik olarak A 'nın sütun uzayı, A^t 'nin satır uzayına eşittir. Bu gözlem sayesinde sütun uzayıyla ilgili her soru, transpoze alınarak satır uzayı sorusuna çevrilebilir — ve satır uzayında elimizde satır işlemleri gibi güçlü bir araç vardır.

■

Bir alt uzayı doğuran kümede gereksiz vektörler bulunabilir: biri diğerlerinin lineer kombinasyonuysa onu atmak uzayı değiştirmez. “Gereksiz vektör yok” durumunu kesinleştiren kavram sıradaki bölümün konusudur: [lineer bağımlılık ve bağımsızlık](#).

16. Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık

Bir alt uzayı doğuran kümede gereksiz vektörler bulunabilir: bir vektör diğerlerinin lineer kombinasyonuysa, onu atmak gerilen uzayı değiştirmez. “Gereksiz vektör yok” durumunu tam olarak yakalayan kavram **lineer bağımsızlıktır** ve tüm taban-boyut kuramı bunun üzerine kurulur.

16.1 Tanım

Tanım 16.1 (Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık). $V(K)$ bir vektör uzayı ve $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ olsun.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0_V$$

olacak biçimde **hepsi birden sıfır olmayan** $a_1, \dots, a_m \in K$ elemanları varsa, $v_1, \dots, v_m$ vektörlerine K üzerinde **lineer bağımlı** denir.

Eğer bu bağıntı ancak $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0_K$ olması hâlinde gerçekleştirilebiliyorsa, yani

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0_V \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0_K$$

ise $v_1, \dots, v_m$ vektörlerine K üzerinde **lineer bağımsız** denir.

İki basit gözlem:

- $v_1, \dots, v_m$ vektörlerinden biri sıfır vektörü ise bu vektörler **lineer bağımlıdır**. Gerçekten $v_j = 0_V$ ise $0_K v_1 + \dots + 1_K v_j + \dots + 0_K v_m = 0_V$ bağıntısında $1_K \neq 0_K$ 'dir.
- $v \neq 0_V$ ise tek başına v **lineer bağımsızdır**: $av = 0_V$ ve $v \neq 0_V$ iken **temel özellikler teoremi** $a = 0_K$ verir.

💡 Bağımsızlık bir homojen sistem sorusudur

K^n 'de $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$ bağıntısı, bilinmeyenleri $a_1, \dots, a_m$ olan bir **homojen lineer denklem sistemine** dönüşür. Vektörler bağımsızdır $\Leftrightarrow$ sistemin yalnızca sıfır çözümü vardır $\Leftrightarrow$ merdiven şeklindeki denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir. Bütün hesaplı örnekler bu tercümeyle çözülür.

16.2 Çözümlü Örnekler

Örnek 16.1 ($\mathbb{R}^4$ 'te Bağımsız Üç Vektör). $V = \mathbb{R}^4$ olsun. $v_1 = (6, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 5, -3, 1)$, $v_3 = (0, 0, 7, -2)$ vektörlerinin $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere $xv_1 + yv_2 + zv_3 = (0, 0, 0, 0)$ olsun:

$$\begin{aligned} x(6, 2, 3, 4) + y(0, 5, -3, 1) + z(0, 0, 7, -2) \\ = (6x, 2x + 5y, 3x - 3y + 7z, 4x + y - 2z) \end{aligned}$$

Bileşenler sıfıra eşitlenirse şu homojen sistem çıkar:

$$6x = 0, \quad 2x + 5y = 0, \quad 3x - 3y + 7z = 0, \quad 4x + y - 2z = 0$$

Birinci denklemden doğrudan $x = 0$ bulunur. Bunu ikinciye taşıyalım:

$$5y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Üçüncü denklemde $x = y = 0$ konursa

$$7z = 0 \implies z = 0$$

(Dördüncü denklem $4 \cdot 0 + 0 - 0 = 0$ ile kendiliğinden sağlanır.) Merdiven şeklinde denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir ($r = n = 3$); sistemin tek çözümü sıfır çözümdür. Demek ki

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \implies x = y = z = 0$$

yani v_1, v_2, v_3 lineer bağımsızdır.

■

Örnek 16.2 ($\mathbb{R}^3$ 'te Bağımlı Üç Vektör). $u = (1, -1, 0)$, $v = (1, 3, -1)$, $w = (5, 3, -2) \in \mathbb{R}^3$ vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$xu + yv + zw = (0, 0, 0)$ yazalım:

$$x(1, -1, 0) + y(1, 3, -1) + z(5, 3, -2) = (x + y + 5z, -x + 3y + 3z, -y - 2z)$$

Homojen sistem:

$$x + y + 5z = 0, \quad -x + 3y + 3z = 0, \quad -y - 2z = 0$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow \frac{1}{4}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Merdiven şeklinde denklem sayısı $r = 2$, bilinmeyen sayısı $n = 3$ 'tür. $r < n$ olduğundan sistemin sıfır çözümünden farklı çözümleri vardır: serbest değişken z 'dir.

$z = 1$ alalım. İkinci denklemden $y = -2$, birinciden $x = -y - 5z = 2 - 5 = -3$ bulunur. Yani

$$-3u - 2v + w = 0_{\mathbb{R}^3}$$

Katsayılar hepsi birden sıfır olmadığından u, v, w lineer bağımlıdır. Sağlama:

$$\begin{aligned} -3(1, -1, 0) - 2(1, 3, -1) + (5, 3, -2) &= (-3 - 2 + 5, 3 - 6 + 3, 0 + 2 - 2) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

■

16.3 Bağımlılığın Anlamı

Teorem 16.1 (Bağımlılık Ölçütü). $v_1, \dots, v_m \in V(K)$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul, içlerinden birinin diğerlerinin bir lineer kombinasyonu olmasıdır.

İspat.

Gereklik. Vektörler bağımlı olsun; o hâlde hepsi birden sıfır olmayan $b_1, \dots, b_m \in K$ ile

$$b_1v_1 + \dots + b_jv_j + \dots + b_mv_m = 0_V$$

yazılır. Sıfırdan farklı katsayılardan birini, diyelim $b_j \neq 0_K$ olanını seçelim. K bir cisim olduğundan b_j^{-1} vardır; bağıntıyı b_j^{-1} ile çarpalım:

$$(b_j^{-1}b_1)v_1 + \dots + \underbrace{(b_j^{-1}b_j)}_{1_K}v_j + \dots + (b_j^{-1}b_m)v_m = 0_V$$

v_j terimini yalnız bırakalım:

$$v_j = - (b_j^{-1}b_1) v_1 - \dots - (b_j^{-1}b_{j-1}) v_{j-1} - (b_j^{-1}b_{j+1}) v_{j+1} - \dots - (b_j^{-1}b_m) v_m$$

Yani v_j , diğerlerinin lineer kombinezonudur.

Yeterlik. v_j , diğerlerinin bir lineer kombinezonu olsun:

$$v_j = a_1v_1 + \dots + a_{j-1}v_{j-1} + a_{j+1}v_{j+1} + \dots + a_mv_m$$

Bütün terimleri sola alalım:

$$a_1v_1 + \dots + a_{j-1}v_{j-1} + (-1_K) v_j + a_{j+1}v_{j+1} + \dots + a_mv_m = 0_V$$

v_j 'nin katsayısı $-1_K \neq 0_K$ olduğundan katsayılar hepsi birden sıfır değildir; vektörler lineer bağımlıdır. ■

Bir sonraki teorem bu sonucu keskinleştirir: bağımlılık hâlinde, “diğerlerinin” değil doğrudan **kendisinden öncekilerin** kombinezonu olan bir vektör bulunabilir.

Teorem 16.2 (Öncekilerin Kombinezonu). $v_1, \dots, v_m \in V(K)$ ($m \geq 2$) vektörlerinin hiçbirisi sıfır vektörü olmasın. Bu vektörlerin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul, içlerinden birinin, diyelim v_i 'nin ($i \in \{2, \dots, m\}$), kendisinden **öncekilerin** bir lineer kombinezonu olmasıdır:

$$v_i = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} \quad (a_1, \dots, a_{i-1} \in K)$$

İspat.

Gereklik. Vektörler bağımlı olsun:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_mv_m = 0_V$$

katsayılar hepsi birden sıfır olmamak üzere. $a_t \neq 0_K$ koşulunu sağlayan **en büyük** indis t olsun. t 'den sonraki bütün katsayılar sıfır olduğundan bağıntı

$$a_1v_1 + \dots + a_tv_t = 0_V$$

hâline iner.

$t > 1$ olduğunu görelim: $t = 1$ olsaydı $a_1v_1 = 0_V$ ve $a_1 \neq 0_K$ olurdu; buradan $v_1 = 0_V$ çıkardı ve bu, hiçbir vektörün sıfır olmadığı hipoteziyle çelişirdi. Demek ki $t > 1$ 'dir.

Şimdi bağıntıyı a_t^{-1} ile çarpıp v_t 'yi yalnız bırakalım:

$$v_t = - (a_t^{-1}a_1) v_1 - \dots - (a_t^{-1}a_{t-1}) v_{t-1}$$

Yani v_t , kendisinden öncekilerin bir lineer kombinezonudur.

Yeterlik. $v_i = a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1}$ olsun. Terimleri sola alalım:

$$a_1v_1 + \dots + a_{i-1}v_{i-1} + (-1_K) v_i + 0_Kv_{i+1} + \dots + 0_Kv_m = 0_V$$

v_i 'nin katsayısı $-1_K \neq 0_K$ olduğundan vektörler lineer bağımlıdır. ■

16.4 Merdiven Matrisin Satırları

Teorem 16.3 (Merdiven Matrisin Satırları Bağımsızdır). Bir merdiven matrisin sıfırdan farklı satırları lineer bağımsızdır.

İspat.

$A_{(m,n)}$ bir merdiven K -matris ve sıfırdan farklı satırları $R_1, \dots, R_\ell$ olsun. Bu satırların lineer **bağımlı** olduğunu varsayalım.

Satırların hiçbirisi sıfır vektörü olmadığından bir önceki teorem uygulanabilir — satırları $R_\ell, R_{\ell-1}, \dots, R_1$ sırasıyla ele alalım. O hâlde bir R_i satırı, kendisinden **sonraki** satırların bir lineer kombinezonudur:

$$R_t = a_\ell R_\ell + a_{\ell-1} R_{\ell-1} + \cdots + a_{t+1} R_{t+1}$$

R_t 'nin ilk sıfırdan farklı bileşeni, yani ayrıcalıklı elemanı, s -inci sütunda bulunsun. Merdiven matris tanımı gereği ayrıcalıklı elemanların sütun numaraları aşağı indikçe kesin arttığından, $R_{t+1}, \dots, R_\ell$ satırlarının hepsinin s -inci bileşeni 0_K 'dir.

O hâlde yukarıdaki eşitliğin sağ tarafının s -inci bileşeni

$$a_\ell \cdot 0_K + \cdots + a_{t+1} \cdot 0_K = 0_K$$

olur. Ama sol tarafın s -inci bileşeni, tanım gereği 0_K 'dan farklı olan ayrıcalıklı elemandır — çelişki. Demek ki $R_1, \dots, R_\ell$ satırları lineer bağımsızdır.

■

Bu teorem, bir vektör ailesinin bağımsızlığını sınamanın en pratik yolunu verir: vektörleri satır kabul eden matrisi merdiven şekline indir; sıfır satır çıkmıyorsa vektörler bağımsızdır.

16.5 Beş Uyarı

1. $v_1, \dots, v_m$ lineer bağımlı ise $\{v_1, \dots, v_m\}$ kümesine **lineer bağımlı küme**, bağımsız ise **lineer bağımsız küme** denir.
2. Vektörlerden herhangi ikisi eşitse, örneğin $v_1 = v_2$ ise, vektörler lineer bağımlıdır:

$$v_1 - v_2 + 0_K v_3 + \cdots + 0_K v_m = 0_V$$

bağıntısında v_1 'in katsayısı $1_K \neq 0_K$ 'dir.

3. İki vektörün lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul, birinin diğerrinin bir katı olmasıdır: $v_1 = av_2$ ($a \in K$).

4. Lineer bağımlı bir küme içeren kümenin kendisi de lineer bağımlıdır. Bundan dolayı bir lineer bağımsız kümenin her alt kümesi de lineer bağımsızdır.

5. $\{v_1, \dots, v_m\}$ lineer bağımsız ise, indislerin herhangi bir permütasyonu $i_1, \dots, i_m$ için $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ de lineer bağımsızdır: bağımsızlık sıralamaya bağlı değildir.

16.6 Alıştırma

Alıştırma 16.1 (Bağımlı mı, Bağımsız mı?).

- a) $\mathbb{R}^3$ 'te $(1, -2, 1)$, $(2, 1, -1)$, $(7, -4, 1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını belirleyiniz.
- b) $\mathbb{R}^3$ 'te $(1, 2, -3)$, $(1, -3, 2)$, $(2, -1, 5)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını belirleyiniz.
- c) $u, v, w \in V(K)$ lineer bağımsız olsun. $u + v$, $u - v$, $u - 2v + w$ vektörlerinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.
- d) $v = (1 + i, 2i)$ ve $w = (1, 1 + i)$ vektörlerinin $\mathbb{C}^2$ 'de $\mathbb{C}$ üzerinde lineer bağımlı, fakat $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $x(1, -2, 1) + y(2, 1, -1) + z(7, -4, 1) = (0, 0, 0)$ homojen sistemini kuralım:

$$x + 2y + 7z = 0, \quad -2x + y - 4z = 0, \quad x - y + z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow 2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R_2 \rightarrow \frac{1}{5}R_2]{R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$r = 2 < n = 3$ olduğundan sıfırdan farklı çözüm vardır: vektörler **lineer bağımlıdır**. $z = 1$ alınırsa $y = -2$ ve $x = -2y - 7z = 4 - 7 = -3$; yani

$$-3(1, -2, 1) - 2(2, 1, -1) + (7, -4, 1) = (0, 0, 0)$$

b) Aynı yolla:

$$x + y + 2z = 0, \quad 2x - 3y - z = 0, \quad -3x + 2y + 5z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow 3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow R_2 + R_3]{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

$r = n = 3$ olduğundan yalnızca sıfır çözüm vardır ($z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$): vektörler **lineer bağımsızdır**.

c) $a, b, c \in K$ için

$$a(u + v) + b(u - v) + c(u - 2v + w) = 0_V$$

olsun. Terimleri u, v, w 'ye göre toplayalım:

$$(a + b + c)u + (a - b - 2c)v + cw = 0_V$$

u, v, w lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfır olmalıdır:

$$a + b + c = 0_K, \quad a - b - 2c = 0_K, \quad c = 0_K$$

Üçüncü denklemden $c = 0_K$; bunu ilk ikisine taşıyalım:

$$a + b = 0_K, \quad a - b = 0_K$$

İkisini toplarsak $2a = 0_K$, çıkarırsak $2b = 0_K$ olur. (Burada K 'nin karakteristiğinin 2 olmadığını, örneğin $K = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ olduğunu varsayıyoruz.) Buradan $a = b = 0_K$ bulunur. Üç katsayı da sıfır çıktığından verilen vektörler lineer bağımsızdır.

d) $\mathbb{C}$ üzerinde bağımlı. w 'yi $1 + i$ skaleriyle çarpalım:

$$(1 + i)w = (1 + i, (1 + i)^2) = (1 + i, 1 + 2i + i^2) = (1 + i, 2i) = v$$

Demek ki $v = (1 + i)w$ 'dir; biri diğerinin katı olduğundan (üçüncü uyarı) iki vektör $\mathbb{C}$ üzerinde lineer bağımlıdır.

$\mathbb{R}$ üzerinde bağımsız. Bu kez skalerler yalnız reel olabilir. $a, b \in \mathbb{R}$ için $av + bw = (0, 0)$ olsun:

$$a(1 + i) + b = 0, \quad 2ai + b(1 + i) = 0$$

Birinci denklemi reel ve sanal kısımlarına ayıralım:

$$(a + b) + ai = 0 \implies a = 0 \text{ ve } a + b = 0$$

Buradan $a = 0$ ve $b = 0$ bulunur; ikinci denklem de kendiliğinden sağlanır. Katsayılar sıfır olmak zorunda olduğundan vektörler $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsızdır.

Bu örnek önemli bir noktayı gösterir: bağımlılık, vektörlerin kendisi kadar **skalerlerin alındığı cisme** de bağlıdır.

■

Bir uzayı doğuran ve aynı zamanda lineer bağımsız olan bir küme, o uzay için en ekonomik tarif olur. Bu kümeler taban denir ve sıradaki bölümün konusudur: **taban ve boyut**.

17. Taban ve Boyut

Bir uzayı doğuran küme, o uzayı tarif eder; lineer bağımsız bir küme ise içinde fazlalık taşımaz. İkisi birden sağlandığında elde edilen küme, uzayın en ekonomik tarifidir: **taban**. Bu bölümde tabanı tanımlayacak ve dersin en önemli sayısal değişimine varacağız — bir uzayın bütün tabanlarının eleman sayısı aynıdır.

17.1 Taban ve Boyut

Tanım 17.1 (Taban). V , K komutatif cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V 'yi doğuran, yani

$$V = L(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

koşulunu sağlayan **lineer bağımsız** bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subseteq V$ kümesine, V vektör uzayının bir **tabanı** denir.

Tanım 17.2 (Boyut). n elemanlı bir tabanı bulunan V vektör uzayına **n -boyutlu** (sonlu boyutlu) vektör uzayı denir ve $\dim V = n$ yazılır.

İki uç durum tanıma iliştilir:

- $\{0_V\}$ vektör uzayının boyutu sıfır kabul edilir: $\dim\{0_V\} = 0$.
- Sonlu boyutlu olmayan bir vektör uzayına **sonsuz boyutlu** vektör uzayı denir.

Örnek 17.1 (K^n 'in Standart Tabanı). K komutatif bir cisim olsun. K^n vektör uzayında

$$e_1 = (1_K, 0_K, \dots, 0_K), \quad e_2 = (0_K, 1_K, 0_K, \dots, 0_K), \quad \dots, \quad e_n = (0_K, \dots, 0_K, 1_K)$$

vektörlerinin K^n 'in bir tabanını oluşturduğunu ve $\dim K^n = n$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Doğurma. $K^n = L(e_1, \dots, e_n)$ olduğunu daha önce gösterdik: her $(a_1, \dots, a_n)$ vektörü $a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ biçiminde yazılır.

Bağımsızlık. Bu vektörleri satır kabul eden matris

$$A = \begin{pmatrix} 1_K & 0_K & \cdots & 0_K \\ 0_K & 1_K & \cdots & 0_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & 0_K & \cdots & 1_K \end{pmatrix} = I_n$$

birim matristir ve bir merdiven matristir. **Merdiven matrisin sıfırdan farklı satırları lineer bağımsız** olduğundan $e_1, \dots, e_n$ bağımsızdır.

İki koşul birlikte $\{e_1, \dots, e_n\}$ 'in bir taban olduğunu verir; eleman sayısı n olduğundan $\dim K^n = n$ 'dir. Bu tabana K^n 'in **standart** (doğal) tabanı denir.

■

$K = \mathbb{R}$ ve $n = 3$ alındığında $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanıdır ve $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ 'tür.

Örnek 17.2 (Aynı Uzayın Başka Bir Tabanı). $\{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\}$ kümesinin de $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Doğurma. Bu üç vektörün $\mathbb{R}^3$ 'ü doğurduğunu **daha önce** hesaplamıştık: her (a, b, c) için

$$(a, b, c) = a(1, 2, 3) + (-2a + b)(0, 1, 2) + (a - 2b + c)(0, 0, 1)$$

Bağımsızlık. Vektörleri satır kabul eden matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bir merdiven matristir; ayrıcalıklı elemanları 1, 1, 1 olup sütun numaraları $1 < 2 < 3$ olarak artar. Dolayısıyla satırları lineer bağımsızdır.

Küme hem doğuruyor hem bağımsız olduğundan $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanıdır.

■

i Taban tek türlü belirli değildir

Son iki örnek $\mathbb{R}^3$ 'ün birbirinden farklı iki tabanını verdi. Genel olarak sonlu boyutlu bir $V(K)$ vektör uzayının birden fazla tabanı olabilir; taban **tek türlü belirli değildir**. Değişmeyen şey, birazdan göreceğimiz gibi, tabandaki eleman sayısıdır.

17.2 Doğuran Kümeyi Sadeleştirmek

Teorem 17.1 (Doğuran Kümeye Ekleme ve Çıkarma). $\{v_1, \dots, v_n\}$ kümesi bir $V(K)$ vektör uzayını doğursun, yani $V = L(v_1, \dots, v_n)$ olsun. O hâlde:

1. $w \in V$ olmak üzere $\{w, v_1, \dots, v_n\}$ kümesi lineer bağımlıdır ve V 'yi doğurur:

$$V = L(w, v_1, \dots, v_n)$$

2. v_i ($i \in \{2, \dots, n\}$) kendisinden öncekilerin bir lineer kombinasyonu ise $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n\}$ kümesi de V 'yi doğurur.

İspat.

1. $w \in V = L(v_1, \dots, v_n)$ olduğundan w, v_i 'lerin bir lineer kombinasyonudur; **bağımlılık ölçütü** gereği $\{w, v_1, \dots, v_n\}$ lineer bağımlıdır.

Doğurma için: $v \in V$ alalım. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ yazılır ve buna sıfır katsayılı bir terim eklemek serbesttir:

$$v = 0_K w + a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in L(w, v_1, \dots, v_n)$$

Demek ki $V \subseteq L(w, v_1, \dots, v_n)$ 'dir. Ters kapsama, w ve v_i 'lerin hepsi V 'de olduğundan ve V bir alt uzay olduğundan geçerlidir. İki kapsama eşitliği verir.

2. $v_i = a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1}$ olsun. $L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n) \subseteq V$ açıktır. Ters kapsama için $v \in V$ alalım:

$$v = t_1 v_1 + \dots + t_i v_i + \dots + t_n v_n$$

v_i yerine yukarıdaki ifadeyi koyup terimleri gruplayalım:

$$\begin{aligned} v &= t_1 v_1 + \dots + t_{i-1} v_{i-1} + t_i (a_1 v_1 + \dots + a_{i-1} v_{i-1}) + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_n v_n \\ &= (t_1 + t_i a_1) v_1 + \dots + (t_{i-1} + t_i a_{i-1}) v_{i-1} + t_{i+1} v_{i+1} + \dots + t_n v_n \end{aligned}$$

Sağ tarafta v_i görünmüyor; yani $v \in L(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ 'dir.

■

17.3 Değişirme Teoremi

Teorem 17.2 (Değişirme Teoremi). $\{v_1, \dots, v_n\}$ kümesi $V(K)$ vektör uzayını doğursun ve $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq V$ lineer bağımsız bir küme olsun. O hâlde

$$m \leq n$$

ve $V(K)$, uygun $n - m$ tane v vektörü seçilerek elde edilen

$$\{w_1, \dots, w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}}\}$$

kümesi tarafından doğrulur. Dolayısıyla V 'de $n + 1$ veya daha fazla vektör daima lineer bağımlıdır.

İspat.

$\{w_1, \dots, w_m\}$ bağımsız olduğundan hiçbir w_j sıfır vektörü değildir. Gerekirse sıfır olan v_i 'ler atılarak v_i 'lerin de hiçbirinin sıfır olmadığı varsayılabilir (sıfır vektörünü atmak gerilen uzayı değiştirmez).

Birinci adım. $w_1 \in V = L(v_1, \dots, v_n)$ olduğundan, önceki teoremin birinci maddesiyle

$$\{w_1, v_1, \dots, v_n\} \text{ lineer bağımlıdır ve } V = L(w_1, v_1, \dots, v_n)$$

Bu kümenin hiçbir elemanı sıfır olmadığından **öncekilerin kombinezonu teoremi** uygulanır: kümedeki bir vektör, kendisinden öncekilerin lineer kombinezonudur. Bu vektör w_1 olamaz, çünkü listede w_1 'den önce hiçbir vektör yoktur ve $w_1 \neq 0_V$ 'dir. O hâlde bu vektör bir v_j 'dir. Önceki teoremin ikinci maddesiyle v_j atılabilir:

$$V = L(w_1, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

İkinci adım. Aynı işlemi w_2 ile tekrarlayalım:

$$\{w_1, w_2, v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n\} \text{ bağımlıdır ve } V \text{ 'yi doğurur}$$

Yine bir vektör öncekilerin kombinezonudur. Bu vektör w_1 olamaz; w_2 de olamaz, çünkü w_2 'nin öncesinde yalnızca w_1 vardır ve $\{w_1, w_2\}$ bağımsız olduğundan w_2, w_1 'in katı değildir. Demek ki yine bir v_t 'dir ve atılabilir.

Genel adım. Bu şekilde devam edildiğinde her adımda bir w eklenir ve bir v atılır. Atılan vektör hiçbir zaman bir w olamaz: $\{w_1, \dots, w_m\}$ bağımsız olduğundan hiçbir w_k kendisinden önceki w 'lerin kombinezonu değildir.

$m \leq n$. $m > n$ olsaydı n adım sonra bütün v 'ler tükenir ve

$$V = L(w_1, \dots, w_n)$$

olurdu. O zaman $w_{n+1} \in V$, $w_1, \dots, w_n$ 'in bir lineer kombinezonu olur ve $\{w_1, \dots, w_m\}$ lineer bağımlı çıkardı — hipotezle çelişir. Demek ki $m \leq n$ 'dir.

$m \leq n$ olduğunda işlem m adımda biter ve geriye $n - m$ tane v kalır:

$$V = L(w_1, \dots, w_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-m}})$$

Son iddia da buradan çıkar: V 'de $n + 1$ veya daha fazla vektör bağımsız olsaydı $m \geq n + 1 > n$ olurdu, bu ise az önce dışlandı.

■

17.4 Boyut İyi Tanımlıdır

Teorem 17.3 (Tabanların Eleman Sayısı). Sonlu boyutlu bir $V(K)$ vektör uzayının her tabanında aynı sayıda eleman vardır.

İspat.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\{f_1, \dots, f_m\}$, $V(K)$ 'nin iki tabanı olsun.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ bir taban olduğundan $V = L(e_1, \dots, e_n)$ 'dir, yani V 'yi doğurur. $\{f_1, \dots, f_m\}$ bir taban olduğundan lineer bağımsızdır. Değişirme teoremini bu ikili için uygulayalım:

$$m \leq n$$

Şimdi rolleri değiştirelim: $\{f_1, \dots, f_m\}$ V 'yi doğurur ve $\{e_1, \dots, e_n\}$ lineer bağımsızdır. Aynı teorem

$$n \leq m$$

verir. İki eşitsizlik birlikte $m = n$ sonucunu doğurur.

■

Bu teorem sayesinde $\dim V$ gerçekten uzaya ait bir sayıdır: hangi taban seçilirse seçilsin değişmez.

17.5 Alıştırma

Alıştırma 17.1 (Taban ve Boyut).

- $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanı olduğunu gösteriniz.
- $\{(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanı olmadığını gösteriniz.
- $\mathbb{R}^4$ 'te $L((1, -2, 3, -1), (1, 1, -2, 3))$ alt uzayının boyutunu bulunuz.
- $\mathbb{R}^4$ 'te $L((3, -6, 3, -9), (-2, 4, -2, 6))$ alt uzayının boyutunu bulunuz.

Çözüm.

a) $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ olduğundan üç elemanlı bir kümenin taban olması için lineer bağımsız olması yeterlidir; yine de burada doğrudan hesaplalarla ilerleyelim. Vektörleri satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Elde edilen matris bir merdiven matristir ve sıfır satırı yoktur; dolayısıyla üç vektör lineer bağımsızdır. Ayrıca merdivenin satır uzayı, ilk matrisin satır uzayına eşittir ve üç ayrıcalıklı eleman üç sütunu da kapsadığından bu uzay $\mathbb{R}^3$ 'ün tamamıdır. Küme hem bağımsız hem doğuran olduğundan bir tabandır.

b) Aynı yöntemi uygulayalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -5R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow 2R_2 + R_3]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bir satır tamamen sıfır olduğundan üç vektör lineer **bağımlıdır**; bağımlı bir küme taban olamaz. (Nitekim gerilen uzayın boyutu 2'dir, $\mathbb{R}^3$ 'ün tamamı değildir.)

c) İki vektörü satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow -R_1 + R_2]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Merdiven şeklinde iki sıfırdan farklı satır kaldı; bunlar lineer bağımsızdır ve satır uzayı değişmediğinden alt uzayın bir tabanını oluştururlar. Demek ki

$$\dim L((1, -2, 3, -1), (1, 1, -2, 3)) = 2$$

(Aynı sonuç doğrudan da görülür: hiçbirinin katı olmadığından iki vektör bağımsızdır.)

d) Burada ikinci vektör birincinin bir katıdır:

$$-\frac{2}{3}(3, -6, 3, -9) = (-2, 4, -2, 6)$$

Dolayısıyla iki vektör lineer bağımlıdır ve gerdikleri uzay tek bir vektörün gerdiği uzaydır:

$$L((3, -6, 3, -9), (-2, 4, -2, 6)) = L((3, -6, 3, -9))$$

Sıfırdan farklı tek bir vektör bağımsız olduğundan bu küme bir tabandır ve boyut 1'dir.



Boyutun iyi tanımlı olduğunu biliyoruz. Şimdi bu sayının nasıl kullanıldığına bakalım: bağımsız kümeleri tabana tamamlamak, alt uzayların boyutlarını karşılaştırmak ve iki alt uzayın toplamının boyutunu hesaplamak. Sıradaki bölüm bunları veriyor: [boyut teoremleri](#).

18. Boyut Teoremleri

Boyutun iyi tanımlı bir sayı olduğunu biliyoruz. Bu bölümde onu bir araca dönüştürüyoruz: bağımsız bir küme ne zaman tabana tamamlanır, bir alt uzayın boyutu ana uzayınkinden nasıl küçük kalır ve iki alt uzayın toplamının boyutu nasıl hesaplanır? Son sorunun yanıtı, kesişimi de hesaba katan zarif bir formüldür.

18.1 Maksimal Bağımsız Alt Küme

Tanım 18.1 (Maksimal Bağımsız Alt Küme). S , bir $V(K)$ vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\{v_1, \dots, v_m\}$ kümesine S 'nin bir **maksimal bağımsız alt kümesi** denir:

Koşul 1. $\{v_1, \dots, v_m\}$, S 'nin lineer bağımsız bir alt kümesidir.

Koşul 2. Her $w \in S$ için $\{v_1, \dots, v_m, w\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

Teorem 18.1 (Bağımlılıktan Kombinezona). $\{v_1, \dots, v_m\}$, $V(K)$ 'nin lineer bağımsız bir alt kümesi olsun. $w \in V$ için $\{v_1, \dots, v_m, w\}$ kümesi lineer bağımlı ise w , $v_1, \dots, v_m$ vektörlerinin bir lineer kombinezonudur.

İspat.

Bağımlılık gereği, hepsi birden sıfır olmayan $a_1, \dots, a_m, b \in K$ ile

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m + b w = 0_V$$

yazılır. Eğer $b = 0_K$ olsaydı bağıntı $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0_V$ hâline gelirdi ve katsayılar hepsi birden sıfır olmadığından $\{v_1, \dots, v_m\}$ bağımlı çıkardı — hipotezle çelişir. Demek ki $b \neq 0_K$ 'dir.

K bir cisim olduğundan b^{-1} vardır; w 'yi yalnız bırakalım:

$$w = - (b^{-1} a_1) v_1 - \dots - (b^{-1} a_m) v_m \in L(v_1, \dots, v_m)$$

■

Teorem 18.2 (Sonlu Doğuran Kümeden Taban). $V(K)$ vektör uzayı, boş kümeden farklı sonlu bir S kümesi tarafından doğrulsun ($V = L(S)$). Bu takdirde V sonlu boyutludur ve S 'nin bir alt kümesi V 'nin bir tabanıdır.

İspat.

S 'nin bütün elemanları 0_V ise $V = L(S) = \{0_V\}$ 'dir ve tanım gereği $\dim V = 0$ 'dır; iddia bu durumda geçerlidir.

Aksi hâlde S , sıfırdan farklı bir vektör içerir ve bu vektör tek başına lineer bağımsız bir alt küme oluşturur. S sonlu olduğundan S 'nin lineer bağımsız alt kümeleri de sonlu sayıdadır; bunlar arasında **eleman sayısı en büyük** olanı seçelim ve $\{v_1, \dots, v_m\}$ diyelim.

Bu küme S 'nin maksimal bağımsız alt kümesidir: $w \in S$ için $\{v_1, \dots, v_m, w\}$ bağımsız olsaydı, daha çok elemanlı bağımsız bir alt küme bulunmuş olurdu ve bu seçimimizle çelişirdi (eğer w zaten v_i 'lerden biriye küme tekrar eden vektör içerdiğinden bağımlıdır). Bir sonraki teorem bu kümenin bir taban olduğunu verir.

■

Teorem 18.3 (Maksimal Bağımsız Alt Küme Bir Tabandır). $\{v_1, \dots, v_m\}$, $V(K)$ 'yi doğuran bir S kümesinin ($V = L(S)$) maksimal bağımsız alt kümesi ise $\{v_1, \dots, v_m\}$, V 'nin bir tabanıdır.

İspat.

Küme zaten lineer bağımsızdır; geriye V 'yi doğurduğunu göstermek kalır.

$w \in S$ alalım. **Koşul 2** gereği $\{v_1, \dots, v_m, w\}$ lineer bağımlıdır; $\{v_1, \dots, v_m\}$ bağımsız olduğundan bir önceki teorem uygulanır:

$$w \in L(v_1, \dots, v_m)$$

Bu her $w \in S$ için doğru olduğundan $S \subseteq L(v_1, \dots, v_m)$ 'dir. $L(v_1, \dots, v_m)$ bir alt uzay olduğundan, *gerilen uzayın en küçüklüğü gereği*

$$L(S) \subseteq L(v_1, \dots, v_m)$$

$V = L(S)$ olduğundan $V \subseteq L(v_1, \dots, v_m)$ 'dir; ters kapsama $v_i \in V$ olmasından gelir. Demek ki $V = L(v_1, \dots, v_m)$ 'dir ve küme hem bağımsız hem doğuran olduğundan bir tabandır.

■

18.2 Boyutun Üç Sonucu

Teorem 18.4 (Sonlu Boyutlu Uzaylarda Üç Sonuç). $V(K)$, n -boyutlu bir vektör uzayı olsun. O hâlde:

1. V 'de $n + 1$ veya daha fazla elemanlı bir küme lineer bağımlıdır.
2. Herhangi bir lineer bağımsız küme, $V(K)$ 'nin bir tabanının alt kümesidir; yani bir tabana tamamlanabilir.
3. n elemanlı lineer bağımsız bir küme, $V(K)$ 'nin bir tabanıdır.

İspat.

$\{e_1, \dots, e_n\}$, $V(K)$ 'nin bir tabanı olsun.

1. Taban V 'yi doğurduğundan, *değiştirme teoremi* gereği V 'de bağımsız bir kümenin eleman sayısı n 'yi aşamaz. Dolayısıyla $n + 1$ veya daha fazla elemanlı her küme bağımlıdır.

2. $\{v_1, \dots, v_r\}$ lineer bağımsız olsun. Değiştirme teoremi, uygun $n - r$ tane taban vektörü seçilerek

$$V = L(v_1, \dots, v_r, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-r}})$$

olduğunu verir. Sağdaki küme S olsun; S sonludur ve $V = L(S)$ 'dir. Bir önceki teoreme göre S 'nin bir alt kümesi V 'nin tabanıdır. S 'nin eleman sayısı n 'dir ve V 'nin her tabanında n eleman bulunduğundan bu alt küme S 'nin kendisidir. Demek ki S bir tabandır ve $\{v_1, \dots, v_r\}$ 'yi içerir.

3. T , V 'nin n elemanlı bağımsız bir alt kümesi olsun. (2)'ye göre T , bir tabanın alt kümesidir; her tabanda n eleman bulunduğundan ve T de n elemanlı olduğundan T 'nin kendisi o tabandır.

■

Teorem 18.5 (Alt Uzayın Boyutu). $V(K)$ n -boyutlu bir vektör uzayı ve W , V 'nin bir alt vektör uzayı olsun. O hâlde

$$\dim W \leq n$$

Ayrıca $\dim W = n$ ise $W = V$ 'dir.

İspat.

$W \subseteq V$ olduğundan W 'nin bir tabanı, aynı zamanda V 'de lineer bağımsız bir kümedir. Bir önceki teoremin birinci maddesine göre V 'de bağımsız bir kümenin eleman sayısı n 'yi aşamaz; dolayısıyla W 'nin tabanı en çok n elemanlıdır, yani $\dim W \leq n$ 'dir.

$\dim W = n$ olsun ve $\{w_1, \dots, w_n\}$, W 'nin bir tabanı olsun. Bu küme V 'nin n elemanlı lineer bağımsız bir alt kümesidir; önceki teoremin üçüncü maddesiyle V 'nin de bir tabanıdır. O hâlde

$$V = L(w_1, \dots, w_n) = W$$

■

18.3 Boyut Formülü

Teorem 18.6 (Boyut Formülü). U ve W , $V(K)$ 'nin sonlu boyutlu alt vektör uzayları olsun. O hâlde $U + W$ de sonlu boyutludur ve

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Özel olarak $V = U \oplus W$ ise $\dim V = \dim U + \dim W$ 'dir.

İspat.

$U \cap W$, hem U 'nun hem W 'nin bir alt uzayıdır; $\dim(U \cap W) = k$ olsun ve $\{z_1, \dots, z_k\}$ bunun bir tabanı olsun.

Bu küme U 'da bağımsızdır; önceki teoremin ikinci maddesiyle U 'nun bir tabanına tamamlanabilir:

$$\{z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_p\} \text{ tabanı} \implies \dim U = k + p$$

Aynı biçimde W 'nin bir tabanına da tamamlanabilir:

$$\{z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_q\} \text{ tabanı} \implies \dim W = k + q$$

Şimdi

$$B = \{z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q\}$$

kümesinin $U + W$ 'nin bir tabanı olduğunu gösterelim.

B , $U + W$ 'yi doğurur. $U + W$ 'nin keyfi bir elemanı $u + w$ biçimindedir. $u \in U$, z 'ler ve u 'lar cinsinden; $w \in W$, z 'ler ve w 'ler cinsinden yazıldığından toplamaları B 'nin elemanlarının bir lineer kombinasyonudur.

B lineer bağımsızdır. Skalerler a_i, b_j, c_ℓ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^k a_i z_i + \sum_{j=1}^p b_j u_j + \sum_{\ell=1}^q c_\ell w_\ell = 0_V$$

olsun. Terimleri ayıralım:

$$x := \sum_{i=1}^k a_i z_i + \sum_{j=1}^p b_j u_j = - \sum_{\ell=1}^q c_\ell w_\ell$$

Sol taraf U 'nun, sağ taraf W 'nin bir elemanıdır; eşit olduklarına göre $x \in U \cap W$ 'dir. O hâlde x , $\{z_1, \dots, z_k\}$ cinsinden yazılır: $x = \sum d_i z_i$. Buradan

$$\sum_{i=1}^k d_i z_i + \sum_{\ell=1}^q c_\ell w_\ell = 0_V$$

elde edilir. $\{z_1, \dots, z_k, w_1, \dots, w_q\}$, W 'nin tabanı olduğundan bağımsızdır; dolayısıyla bütün d_i ve c_ℓ katsayıları sıfırdır. $c_\ell = 0_K$ olduğu bilindiğine göre başlangıçtaki bağıntı

$$\sum_{i=1}^k a_i z_i + \sum_{j=1}^p b_j u_j = 0_V$$

hâline iner. Bu kez $\{z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_p\}$, U 'nun tabanı olduğundan bağımsızdır ve bütün a_i, b_j katsayıları sıfır çıkar. Demek ki B bağımsızdır.

Sonuç. B bir taban olduğundan

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= k + p + q = (k + p) + (k + q) - k \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) \end{aligned}$$

$V = U \oplus W$ ise **direkt toplam ölçütü** gereği $U \cap W = \{0_V\}$ ve $\dim(U \cap W) = 0$ 'dır; formül $\dim V = \dim U + \dim W$ 'ye iner.

■

18.4 Çözümlü Örnekler

Örnek 18.1 (K^4 'te Dört Vektör). K komutatif bir cisim olmak üzere K^4 'te

$$(1_K, 1_K, 1_K, 1_K), \quad (0_K, 1_K, 1_K, 1_K) \\ (0_K, 0_K, 1_K, 1_K), \quad (0_K, 0_K, 0_K, 1_K)$$

vektörlerinin K^4 'ün bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bu vektörler

$$A = \begin{pmatrix} 1_K & 1_K & 1_K & 1_K \\ 0_K & 1_K & 1_K & 1_K \\ 0_K & 0_K & 1_K & 1_K \\ 0_K & 0_K & 0_K & 1_K \end{pmatrix}$$

matrisinin satırlarıdır ve A bir merdiven matristir (ayrıcalıklı elemanların sütunları $1 < 2 < 3 < 4$).

Merdiven matrisin satırları bağımsız olduğundan dört vektör lineer bağımsızdır.

$\dim K^4 = 4$ olduğundan, 4 elemanlı lineer bağımsız bir küme kendiliğinden bir tabandır (üç sonuç teoreminin üçüncü maddesi). Demek ki verilen küme K^4 'ün bir tabanıdır.

■

Örnek 18.2 (Boyut Bir Üst Sınırdır). $\mathbb{R}^3$ 'te

$$v_1 = (257, -132, 58), \quad v_2 = (43, 0, -17) \\ v_3 = (521, -317, 94), \quad v_4 = (328, -512, -731)$$

vektörlerinin lineer bağımlı olduğunu tek satırda gerektiriniz.

Çözüm.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$ 'tür ve n -boyutlu bir uzayda $n + 1$ veya daha fazla vektör daima lineer bağımlıdır. Burada $3 + 1 = 4$ vektör verildiğinden v_1, v_2, v_3, v_4 lineer bağımlıdır – sayıların ne olduğuna bakmaya bile gerek yoktur.

■

Örnek 18.3 (Taban Bulma ve Tabana Tamamlama). W , $\mathbb{R}^4$ 'ün $(1, -2, 5, -3)$, $(2, 3, 1, -4)$, $(3, 8, -3, -5)$ vektörleri tarafından doğrulan alt uzayı olsun.

a) W 'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

b) Bulduğunuz tabanı $\mathbb{R}^4$ 'ün bir tabanına genişletiniz.

Çözüm.

a) Vektörleri satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

$A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ olduğundan **satır uzayları aynıdır**:

$$W = B \text{ 'nin satır uzayı} = L \left((1, -2, 5, -3), (0, 7, -9, 2) \right)$$

B bir merdiven matris olduğundan sıfırdan farklı iki satırı lineer bağımsızdır. Demek ki

$$\{ (1, -2, 5, -3), (0, 7, -9, 2) \}$$

W 'nin bir tabanıdır ve $\dim W = 2$ 'dir.

b) Bağımsız bir küme her zaman bir tabana tamamlanabilir; burada tamamlamayı merdiven yapısını koruyacak biçimde seçelim. $(0, 0, 1, 1)$ ve $(0, 0, 0, 1)$ vektörlerini ekleyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu bir merdiven matristir (ayrıcılık sütunlar $1 < 2 < 3 < 4$); dolayısıyla dört satırı lineer bağımsızdır. $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ olduğundan 4 elemanlı bağımsız küme bir tabandır:

$$\{ (1, -2, 5, -3), (0, 7, -9, 2), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1) \}$$

kümesi $\mathbb{R}^4$ 'ün bir tabanıdır ve W 'nin tabanını içerir.

■

Örnek 18.4 (Kesişimin Boyutunu Formülle Bulmak). $U = L((1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1))$ ve $W = L((1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3))$, $\mathbb{R}^4$ 'ün alt uzayları olsun. $\dim(U + W)$ ve $\dim(U \cap W)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$\dim(U + W)$. $U + W$, altı vektörün tamamının gerdiği uzaydır; hepsini satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_1 + R_4 \\ R_5 \rightarrow -2R_1 + R_5 \\ R_6 \rightarrow -R_1 + R_6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_2 + R_4 \\ R_5 \rightarrow -R_2 + R_5 \\ R_6 \rightarrow -2R_2 + R_6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_5 \rightarrow -R_4 + R_5 \\ R_6 \rightarrow -2R_4 + R_6 \\ R_3 \leftrightarrow R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı üç satır kaldığından $\dim(U + W) = 3$ 'tür ve

$$\{ (1, 1, 0, -1), (0, 1, 3, 1), (0, 0, -1, -2) \}$$

$U + W$ 'nin bir tabanıdır.

$\dim U$. U 'nin üç doğuran vektörünü indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim U = 2$ 'dir.

$\dim W$. Aynı işlem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_1 + R_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim W = 2$ 'dir.

Kesişim. Boyut formülünü kullanalım:

$$3 = 2 + 2 - \dim(U \cap W) \implies \dim(U \cap W) = 1$$

Kesişimin bir tabanını bulmadan boyutunu öğrenmiş olduk.

■

18.5 Alıştırma

Alıştırma 18.1 (Boyut Hesapları).

- a) V , K üzerinde bir vektör uzayı ve $\dim V = 6$ olsun. U ve W , V 'nin birbirinden farklı gerçek alt uzayları ($U \subsetneq V$, $W \subsetneq V$, $U \neq W$) ve $\dim U = \dim W = 4$ olsun. $\dim(U \cap W)$ 'nin alabileceği bütün değerleri bulunuz.
- b) $U = L((1, 3, -2, 2, 3), (1, 4, -3, 4, 2), (2, 3, -1, -2, 9))$ ve $W = L((1, 3, 0, 2, 1), (1, 5, -6, 6, 3), (2, 5, 3, 2, 1))$, $\mathbb{R}^5$ 'in alt uzayları olsun. $U + W$ 'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

a) $d = \dim(U \cap W)$ diyelim. Boyut formülü

$$\dim(U + W) = 4 + 4 - d = 8 - d$$

verir.

Üst sınır: $U + W$, V 'nin bir alt uzayı olduğundan $\dim(U + W) \leq 6$ 'dır:

$$8 - d \leq 6 \implies d \geq 2$$

Alt sınır: $U \cap W \subseteq U$ olduğundan $d \leq \dim U = 4$ 'tür. $d = 4$ olsaydı, $U \cap W$, U 'nin $\dim U$ boyutlu bir alt uzayı olurdu ve alt uzay boyutu teoremine göre $U \cap W = U$ çıkardı. Aynı gerekçeyle $U \cap W = W$ olurdu, dolayısıyla $U = W$ – bu ise $U \neq W$ varsayımıyla çelişir. Demek ki $d \leq 3$ 'tür.

İki koşul birlikte $d \in \{2, 3\}$ verir. Her iki değer de gerçekleşebilir: $\mathbb{R}^6$ 'da $U = L(e_1, e_2, e_3, e_4)$ alıp $W = L(e_1, e_2, e_3, e_5)$ seçilirse $d = 3$; $W = L(e_1, e_2, e_5, e_6)$ seçilirse $d = 2$ olur.

b) Altı doğuran vektörün tamamını satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\begin{matrix} R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_1 + R_4 \\ R_5 \rightarrow -R_1 + R_5 \\ R_6 \rightarrow -2R_1 + R_6 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

İkinci sütunu temizleyelim:

$$\begin{array}{l} R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3 \\ R_5 \rightarrow -2R_2 + R_5 \\ R_6 \rightarrow R_2 + R_6 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Dördüncü satırı ayrıcalıklı satır olarak kullanalım:

$$\begin{array}{l} R_5 \rightarrow R_4 + R_5 \\ R_6 \rightarrow -3R_4 + R_6 \\ R_3 \leftrightarrow R_4 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı üç satır kaldı; bunlar bir merdiven matrisin satırları olduğundan lineer bağımsızdır ve satır uzayı korunduğundan $U + W$ 'yi doğururlar. Demek ki

$$\{ (1, 3, -2, 2, 3), (0, 1, -1, 2, -1), (0, 0, 2, 0, -2) \}$$

$U + W$ 'nin bir tabanıdır ve $\dim(U + W) = 3$ 'tür.

■

Bir matrisin satır uzayının boyutu, o matrisin taşıdığı “bağımsız bilgi” miktarını ölçer. Bu sayıya rank denir ve denklem sistemleri hakkındaki her şeyi tek bir sayıya bağlar: [rank ve denklem sistemleri](#).

19. Rank ve Denklem Sistemleri

Bir matrisin satırlarının gerdiği uzayın boyutu, o matriste kaç tane “bağımsız satır” bulunduğunu söyler. Bu sayı — **rank** — şaşırtıcı biçimde sütunlar için de aynı çıkar ve lineer denklem sistemleri hakkındaki bütün soruları tek bir sayıya bağlar: çözüm var mı, kaç tane var, çözüm kümesinin boyutu nedir?

19.1 Rank

Tanım 19.1 (Satır Rankı). Bir $A_{(m,n)}$ K -matrisinin **satır uzayının** boyutuna A 'nın **satır rankı** denir.

Tanım 19.2 (Sütun Rankı). Bir $A_{(m,n)}$ K -matrisinin sütun uzayının boyutuna A 'nın **sütun rankı** denir.

Teorem 19.1 (Satır Rankı Sütun Rankına Eşittir). Bir $A_{(m,n)}$ K -matrisinin *satır rankı, sütun rankına eşittir.*

Bu ortak sayıya A matrisinin **rankı** denir ve $\text{rank}(A)$ ile gösterilir:

$$\text{rank}(A) = A \text{ 'nın satır rankı} = A \text{ 'nın sütun rankı}$$

💡 Rank nasıl hesaplanır?

A 'yı elemanter satır işlemleriyle bir merdiven matrise indirgeyin. Satır uzayı korunduğundan ve **merdivenin sıfırdan farklı satırları lineer bağımsız** olduğundan, bu satırlar satır uzayının bir tabanını oluşturur. Yani

$$\text{rank}(A) = \text{bir merdiven şeklindeki sıfırdan farklı satır sayısı}$$

Örnek 19.1 (Bir Rank Hesabı). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}$ -matrisinin rankını bulunuz.

Çözüm.

Merdiven şekline indirgeyelim:

$$\begin{matrix} R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

$A \stackrel{\text{satır}}{\sim} B$ olduğundan satır uzayları aynıdır:

$$A \text{ 'nın satır uzayı} = L \left((1, 2, 0, -1), (0, 2, -3, -1) \right)$$

B bir merdiven matris olduğundan bu iki satır lineer bağımsızdır ve satır uzayının bir tabanını oluşturur. Demek ki satır uzayının boyutu 2'dir:

$$\text{rank}(A) = 2$$

■

19.2 Denklem Sistemlerine Uygulama

K cismi üzerinde m denklemlilik, n bilinmeyenli bir lineer denklem sistemi matrislerle

$$AX = B$$

biçiminde yazılır; burada $A_{(m,n)}$ katsayılar matrisi, $X_{(n,1)}$ bilinmeyenler sütunu, $B_{(m,1)}$ sabit terimler sütunudur:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Sistemin genişletilmiş matrisi $(A, B)_{(m, n+1)}$ 'dir.

Teorem 19.2 (Çözülebilirliğin Rank Ölçütü). $AX = B$ denklem sisteminin çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter koşul, A katsayılar matrisinin rankının, (A, B) genişletilmiş matrisinin rankına eşit olmasıdır:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A, B)$$

Bu ölçüt, Gauss yönteminde gördüğümüz “çözumsuzlük işareti”nin cebirsel karşılığıdır: merdiven şeklinde sol tarafı tamamen sıfır, sağ tarafı sıfırdan farklı bir satır belirmesi, genişletilmiş matriste fazladan bir sıfırdan farklı satır bulunması demektir; o zaman $\text{rank}(A, B) = \text{rank}(A) + 1$ olur.

19.3 Homojen Sistemin Çözüm Uzayı

$AX = 0$ homojen sisteminin çözüm kümesi W 'nin K^n 'in bir alt uzayı olduğunu biliyoruz. Boyutu, rank tarafından belirlenir.

Teorem 19.3 (Çözüm Uzayının Boyutu). $AX = 0$ lineer homojen denklem sisteminin W çözüm uzayının boyutu

$$\dim W = n - r$$

dir; burada n bilinmeyenlerin sayısı, $r = \text{rank}(A)$ 'dır.

i Not

Bu teoremin ispatı için henüz elimizde uygun araç yok; dönüşümler ve denklem sistemleri bölümünde boyut teoremiyle birkaç satırda ispatlayacağız.

Bu teorem, merdiven şeklindeki **serbest değişken sayısı** ile çözüm uzayının boyutunun aynı şey olduğunu söyler. Bir taban da doğrudan okunur: serbest değişkenlerden birine 1_K , diğerlerine 0_K verilerek bulunan çözümler bir taban oluşturur.

Örnek 19.2 (Beş Bilinmeyenli Bir Homojen Sistem). $\mathbb{R}$ üzerinde

$$\begin{aligned} x + 2y - 4z + 3r - s &= 0 \\ x + 2y - 2z + 2r + s &= 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3r + 4s &= 0 \end{aligned}$$

sisteminin W çözüm uzayının boyutunu ve bir tabanını bulunuz.

Çözüm.

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim (sütunlar x, y, z, r, s sırasında):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

$$R_3 \rightarrow -3R_2 + R_3 \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Merdiven şeklindeki sistem

$$x + 2y - 4z + 3r - s = 0, \quad 2z - r + 2s = 0$$

olup $r = \text{rank}(A) = 2$ ve $n = 5$ 'tir. Demek ki

$$\dim W = n - r = 5 - 2 = 3$$

Ayrıcalıklı sütunlar birinci ve üçüncü sütunlardır; serbest değişkenler y, r ve s 'tir. Her birine sırayla 1, diğerlerine 0 vererek üç çözüm üretelim.

$y = 1, r = 0, s = 0$: İkinci denklemden $2z = 0$, yani $z = 0$; birinciden $x = -2y = -2$. Çözüm

$$w_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)$$

$y = 0, r = 1, s = 0$: İkinciden $2z - 1 = 0$, yani $z = \frac{1}{2}$; birinciden

$$x = 4z - 3r + s - 2y = 2 - 3 = -1 \Rightarrow w_2 = \left(-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$y = 0, r = 0, s = 1$: İkinciden $2z + 2 = 0$, yani $z = -1$; birinciden

$$x = 4z - 3r + s - 2y = -4 + 1 = -3 \Rightarrow w_3 = (-3, 0, -1, 0, 1)$$

$\{w_1, w_2, w_3\}$, W 'nin bir tabanıdır.

■

Örnek 19.3 (Denklemlerle Verilmiş İki Alt Uzay). $\mathbb{R}^4$ 'te

$$U = \{ (a, b, c, d) : b + c + d = 0 \}, \quad W = \{ (a, b, c, d) : a + b = 0, c = 2d \}$$

alt uzayları veriliyor. U, W ve $U \cap W$ 'nin boyutlarını ve birer tabanını bulunuz.

Çözüm.

Üçü de birer homojen sistemin çözüm uzayıdır; her birinde $n = 4$ 'tür.

U . Tek denklem $0a + b + c + d = 0$ 'dır; katsayılar matrisi $(0 \ 1 \ 1 \ 1)$ bir merdiven matristir ve rankı 1'dir. O hâlde

$$\dim U = 4 - 1 = 3$$

Serbest değişkenler a, c, d 'dir:

$$a = 1, c = 0, d = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow u_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$a = 0, c = 1, d = 0 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow u_2 = (0, -1, 1, 0)$$

$$a = 0, c = 0, d = 1 \Rightarrow b = -1 \Rightarrow u_3 = (0, -1, 0, 1)$$

$\{u_1, u_2, u_3\}$, U 'nin bir tabanıdır.

W . Denklemler $a + b = 0$ ve $c - 2d = 0$ 'dır; katsayılar matrisi

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

bir merdiven matristir ve rankı 2'dir:

$$\dim W = 4 - 2 = 2$$

Serbest değişkenler b ve d 'dir:

$$b = 1, d = 0 \implies a = -1, c = 0 \implies w_1 = (-1, 1, 0, 0)$$

$$b = 0, d = 1 \implies a = 0, c = 2 \implies w_2 = (0, 0, 2, 1)$$

$\{w_1, w_2\}$, W 'nin bir tabanıdır.

$U \cap W$. Bir vektörün her iki kümede de olması, üç denklemi birden sağlaması demektir:

$$b + c + d = 0, \quad a + b = 0, \quad c - 2d = 0$$

Katsayılar matrisini merdiven şekline getirelim (sütunlar a, b, c, d):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bu bir merdiven matristir ve rankı 3'tür:

$$\dim(U \cap W) = 4 - 3 = 1$$

Tek serbest değişken d 'dir. $d = 1$ alalım: üçüncü denklemden $c = 2$, ikinciden $b = -c - d = -3$, birinciden $a = -b = 3$. Demek ki

$$v = (3, -3, 2, 1)$$

ve $\{v\}$, $U \cap W$ 'nin bir tabanıdır. Sağlama: $-3 + 2 + 1 = 0$, $3 - 3 = 0$, $2 = 2 \cdot 1$.

Boyut formülü de tutarlıdır: $\dim(U + W) = 3 + 2 - 1 = 4$, yani $U + W = \mathbb{R}^4$ 'tür.

■

19.4 Alıştırma

Alıştırma 19.1 (Rank ve Çözüm Uzayı).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin rankını bulunuz.

c) $x + 3y + 2z = 0$; $x + 5y + z = 0$; $3x + 5y + 8z = 0$ homojen sisteminin çözüm uzayının boyutunu ve bir tabanını bulunuz.

d) $x - 2y + 7z = 0$; $2x + 3y - 2z = 0$; $2x - y + z = 0$ homojen sisteminin çözüm uzayının boyutunu bulunuz.

Çözüm.

a) Merdiven şekline indirgeyelim:

$$\begin{matrix} R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -3R_1 + R_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \rightarrow 3R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow R_2 + R_4 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı iki satır kaldığından $\text{rank}(A) = 2$ 'dir.

b) Aynı yöntemle:

$$\begin{array}{l}
R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\
R_3 \rightarrow 2R_1 + R_3 \\
R_4 \rightarrow R_1 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
R_3 \rightarrow R_2 + R_3 \\
R_4 \rightarrow 2R_2 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
R_4 \rightarrow -\frac{7}{3}R_3 + R_4 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı üç satır kaldığından $\text{rank}(A) = 3$ 'tür. (A bir 4×3 matris olduğundan rank en çok 3 olabilirdi; bu üst sınıra ulaşılmıştır.)

c) Katsayılar matrisini indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\
R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
R_3 \rightarrow 2R_2 + R_3 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rank 2 ve $n = 3$ olduğundan

$$\dim W = 3 - 2 = 1$$

Serbest değişken z 'dir. Kesirlerden kaçınmak için $z = -2$ alalım: ikinci denklem $2y - z = 0$ 'dan $y = \frac{z}{2} = -1$; birinciden

$$x = -3y - 2z = 3 + 4 = 7$$

Demek ki $\{(7, -1, -2)\}$, W 'nin bir tabanıdır. Sağlama: $7 - 3 - 4 = 0$, $7 - 5 - 2 = 0$, $21 - 5 - 16 = 0$.

d) Katsayılar matrisini indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2 \\
R_3 \rightarrow -2R_1 + R_3 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 7 & -16 \\ 0 & 3 & -13 \end{pmatrix}
\begin{array}{l}
R_3 \rightarrow -\frac{3}{7}R_2 + R_3 \\
\sim
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 7 & -16 \\ 0 & 0 & -\frac{43}{7} \end{pmatrix}$$

(Son bileşen $-13 + \frac{48}{7} = \frac{-91+48}{7} = -\frac{43}{7}$ 'dir.)

Rank 3 ve $n = 3$ olduğundan

$$\dim W = 3 - 3 = 0$$

Yani sistemin yalnızca sıfır çözümü vardır: $W = \{(0, 0, 0)\}$.

■

Vektör uzayları kuramı tamamlandı. Şimdi bu uzaylar arasındaki yapıyı koruyan fonksiyonlara geçiyoruz – lineer cebirin asıl nesnesi vektör uzayları değil, onlar arasındaki dönüşümlerdir: [lineer dönüşümler](#).

20. Lineer Dönüşümler

Vektör uzaylarını tanıdık; şimdi aralarındaki fonksiyonlara bakıyoruz. Ama her fonksiyon değil: uzayların taşıdığı iki işlemi — toplama ve skalerle çarpma — bozmayanlar. Bunlara **lineer dönüşüm** denir ve lineer cebirin asıl konusu, uzaylardan çok bu dönüşümlerdir.

20.1 Tanım

Tanım 20.1 (Lineer Dönüşüm). U ve V , aynı bir K komutatif cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olsun. Bir

$$F : V \rightarrow U$$

dönüşümüne, aşağıdaki iki koşul gerçekleştiğinde bir **lineer dönüşüm** (veya vektör uzayı homomorfizmi) denir:

- i. $\forall v, w \in V$ için $F(v + w) = F(v) + F(w)$
- ii. $\forall k \in K$ ve $\forall v \in V$ için $F(kv) = kF(v)$

Tanımın iki doğrudan sonucu vardır.

1. İkinci koşulda $k = 0_K$ alınırsa

$$F(0_V) = F(0_K v) = 0_K F(v) = 0_U$$

elde edilir: **her lineer dönüşüm sıfır vektörü sıfır vektöre götürür.**

2. İki koşul birleştirilirse, her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$F(av + bw) \stackrel{i}{=} F(av) + F(bw) \stackrel{ii}{=} aF(v) + bF(w)$$

olur. Tümevarımla bu, herhangi sonlu bir lineer kombinezona genişler:

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \dots + a_n F(v_n)$$

❓ Lineer dönüşüm neyi korur?

Son eşitlik, lineer dönüşümlerin neden bu kadar kullanışlı olduğunu özetler: bir vektörü taban vektörleri cinsinden yazıp dönüşümü uygularsanız, katsayılar olduğu gibi kalır. Yani bir lineer dönüşümü bilmek için onu yalnızca **taban vektörlerinde** bilmek yeter — bu gözlem ilerideki bölümün ana teoremidir.

20.2 Örnekler

Örnek 20.1 (Bir İzdeşim Lineerdir). $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

- i. $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned} F((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \\ &= (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) \\ &= F(x_1, y_1, z_1) + F(x_2, y_2, z_2) \end{aligned}$$

ii. $k \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} F(k(x, y, z)) &= F(kx, ky, kz) = (kx, ky, 0) \\ &= k(x, y, 0) = kF(x, y, z) \end{aligned}$$

İki koşul da sağlandığından F lineerdir. Geometrik olarak F , uzaydaki her noktayı xy -düzlemine dik olarak düşürür.

■

Örnek 20.2 (Öteleme Lineer Değildir). $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 1, y + 2)$ dönüşümünün lineer olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Her lineer dönüşüm sıfır vektörü sıfır vektöre götürmek zorundadır. Oysa burada

$$F(0_{\mathbb{R}^2}) = F(0, 0) = (1, 2) \neq (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

Demek ki F bir lineer dönüşüm **değildir**. (Öteleme, doğruları doğrulara götürmesine rağmen başlangıç noktasını yerinden oynattığı için lineer sayılmaz.)

■

Örnek 20.3 (Sıfır Dönüşümü ve Birim Dönüşüm). U ve V , K üzerinde iki vektör uzayı olsun.

- a) Her $v \in V$ için $F(v) = 0_U$ ile tanımlı $F : V \rightarrow U$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.
b) Her $v \in V$ için $I(v) = v$ ile tanımlı $I : V \rightarrow V$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) $v, w \in V$ ve $k \in K$ için

$$F(v + w) = 0_U = 0_U + 0_U = F(v) + F(w)$$

$$F(kv) = 0_U = k 0_U = kF(v)$$

(İkinci satırda $k 0_U = 0_U$ olduğu **temel özellikler teoreminden** gelir.) Bu dönüşüme **sıfır lineer dönüşümü** denir ve 0 ile gösterilir.

b) $v, w \in V$ ve $k \in K$ için

$$I(v + w) = v + w = I(v) + I(w), \quad I(kv) = kv = kI(v)$$

Bu dönüşüme **identik (birim) lineer dönüşüm** denir.

■

Örnek 20.4 (Matrisle Verilen Dönüşüm). K komutatif bir cisim ve A bir $A_{(m,n)}$ K -matrisi olsun. K^n ve K^m 'in elemanları sütun matrisler olarak düşünölmek üzere

$$T : K^n \rightarrow K^m, \quad v \mapsto Av$$

dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Matris çarpımının **dağılma ve skalerle uyum özellikleri** doğrudan sonucu verir. $v, w \in K^n$ ve $k \in K$ için

$$T(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = T(v) + T(w)$$

$$T(kv) = A(kv) = k(Av) = kT(v)$$

Demek ki T lineerdir. İleride göreceğimiz gibi, sonlu boyutlu uzaylar arasındaki **her** lineer dönüşüm uygun bir matrisle bu biçimde temsil edilebilir.

■

20.3 Ters Dönüşüm

Teorem 20.1 (Ters Dönüşüm de Lineerdir). U ve V , K üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bire bir ve örten bir lineer dönüşüm olsun. O hâlde ters dönüşüm

$$F^{-1} : U \rightarrow V$$

de bir lineer dönüşümdür.

İspat.

Toplama. $u, u' \in U$ alalım. F örten olduğundan $F(v) = u$ ve $F(v') = u'$ olacak $v, v' \in V$ vardır. F lineer olduğundan

$$F(v + v') = F(v) + F(v') = u + u'$$

Ters dönüşümün tanımıyla $F^{-1}(u) = v$, $F^{-1}(u') = v'$ ve $F^{-1}(u + u') = v + v'$ 'dir. Demek ki

$$F^{-1}(u + u') = v + v' = F^{-1}(u) + F^{-1}(u')$$

Skalerle çarpma. $k \in K$ ve $u \in U$ alalım. F örten olduğundan $F(v) = u$ olacak bir $v \in V$ vardır. F lineer olduğundan

$$F(kv) = kF(v) = ku$$

Buradan $F^{-1}(ku) = kv = kF^{-1}(u)$ bulunur.

İki koşul da sağlandığından F^{-1} lineerdir. (Bire birlik, F^{-1} 'in bir fonksiyon olarak tanımlı olmasını sağlar.)

■

Tanım 20.2 (İzomorfizm). U ve V , K üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun.

- F bire bir ise F 'ye V 'nin U içine bir (vektör uzayı) **izomorfizmi** denir.
- F hem bire bir hem de örten ise F 'ye V 'nin U üzerine bir (vektör uzayı) **izomorfizmi** denir.

20.4 Alıştırma

Alıştırma 20.1 (Lineerlik Sınamaları).

- $T, F : V \rightarrow W$ birer lineer dönüşüm olsun. Her $v \in V$ için $(T + F)(v) = T(v) + F(v)$ ile tanımlanan $T + F$ dönüşümünün de lineer olduğunu gösteriniz.
- $T : V \rightarrow W$ lineer bir dönüşüm ve $a \in K$ olsun. Her $v \in V$ için $(aT)(v) = aT(v)$ ile tanımlanan aT dönüşümünün de lineer olduğunu gösteriniz.
- $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (y - z, x + y, z - 2x)$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.
- $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ dönüşümünün lineer olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

a) $v, w \in V$ ve $k \in K$ olsun. Tanımı açıp T ile F 'nin lineerliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} (T + F)(v + w) &= T(v + w) + F(v + w) \\ &= (T(v) + T(w)) + (F(v) + F(w)) \end{aligned}$$

W 'de toplama asosyatif ve komutatif olduğundan terimler yeniden gruplanabilir:

$$= (T(v) + F(v)) + (T(w) + F(w)) = (T + F)(v) + (T + F)(w)$$

Skalerle çarpma için:

$$\begin{aligned}(T + F)(kv) &= T(kv) + F(kv) = kT(v) + kF(v) \\ &= k(T(v) + F(v)) = k(T + F)(v)\end{aligned}$$

Son adımda **M2** aksiyomu kullanıldı. Demek ki $T + F$ lineerdir.

b) $v, w \in V$ ve $k \in K$ olsun:

$$\begin{aligned}(aT)(v + w) &= aT(v + w) = a(T(v) + T(w)) \\ &= aT(v) + aT(w) = (aT)(v) + (aT)(w)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(aT)(kv) &= aT(kv) = a(kT(v)) = (ak)T(v) \\ &= (ka)T(v) = k(aT(v)) = k(aT)(v)\end{aligned}$$

Burada K 'nin komutatif olması ($ak = ka$) ve **M4** aksiyomu kullanıldı. Demek ki aT lineerdir.

c) $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ olsun:

$$\begin{aligned}T(v_1 + v_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= ((y_1 + y_2) - (z_1 + z_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (z_1 + z_2) - 2(x_1 + x_2))\end{aligned}$$

Her bileşende terimleri indislere göre ayıralım:

$$\begin{aligned}&= (y_1 - z_1, x_1 + y_1, z_1 - 2x_1) + (y_2 - z_2, x_2 + y_2, z_2 - 2x_2) \\ &= T(v_1) + T(v_2)\end{aligned}$$

Skalerle çarpma için:

$$\begin{aligned}T(k(x, y, z)) &= T(kx, ky, kz) = (ky - kz, kx + ky, kz - 2kx) \\ &= k(y - z, x + y, z - 2x) = kT(x, y, z)\end{aligned}$$

Demek ki T lineerdir. (Genel kural: bileşenleri değişkenlerin **sabit katsayılı birinci dereceden** ifadeleri olan ve sabit terim içermeyen her dönüşüm lineerdir.)

d) Toplama koşulunu tek bir karşı örnekle bozalım. $v = (1, 0)$ ve $w = (0, 1)$ alalım:

$$F(v + w) = F(1, 1) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$F(v) + F(w) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$1 \neq 0$ olduğundan $F(v + w) \neq F(v) + F(w)$ 'dir; F lineer değildir. (Bu dönüşüm sıfır vektörünü sıfıra götürüyor olmasına rağmen lineer değildir — sıfır koşulu gerekli olmakla birlikte yeterli değildir.)

■

Bir lineer dönüşümü taban vektörlerindeki değerleri belirliyordu. Bu fikri sağlamlaştırmak için önce vektörleri tabana göre sayılarla adreslemeyi öğrenmeliyiz: [koordinatlar ve izomorfizm](#).

21. Koordinatlar ve İzomorfizm

Sonlu boyutlu bir uzayda taban seçmek, her vektöre bir sayı listesi adresi vermek demektir. Bu bölümde önce bu adresin tek türlü belirli olduğunu gösterecek, ardından iki büyük sonuca varacağız: n -boyutlu **her** vektör uzayı aslında K^n 'dir ve bir lineer dönüşüm, taban vektörlerindeki değerleriyle tamamen belirlenir.

21.1 Koordinatlar

Tanım 21.1 (İzomorf Uzaylar). U ve V , aynı bir K komutatif cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı olsun. V 'nin U **üzerine** bir izomorfizmi varsa " V, U 'ya **izomorf**" denir ve

$$V \cong U$$

biçiminde gösterilir.

V, K üzerinde n -boyutlu bir vektör uzayı, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ bir tabanı ve $v \in V$ olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$ uzayı doğurduğundan v , bu vektörlerin bir lineer kombinasyonudur:

$$v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n \quad (a_i \in K)$$

Bu gösteriliş **tektir**. Gerçekten $v = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ ikinci bir gösteriliş olsaydı, iki ifadeyi taraf tarafa çıkararak

$$(a_1 - b_1) e_1 + (a_2 - b_2) e_2 + \dots + (a_n - b_n) e_n = 0_V$$

bulunurdu. $\{e_1, \dots, e_n\}$ bir taban, dolayısıyla lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfır olmalıdır:

$$a_i - b_i = 0_K \implies a_i = b_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Tanım 21.2 (Koordinatlar). Yukarıdaki $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ skalerleri, E tabanı ve v vektörü tarafından tamamen belirlidir. Bu skalerlere v 'nin $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ tabanına göre **koordinatları** denir ve

$$[v]_E = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

biçiminde gösterilir.

! Peki buradaki v hangi tabanda? — Hiçbirinde

En sık sorulan soru şudur: " $[v]_E = (a_1, \dots, a_n)$ yazdığımızda, $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ eşitliğindeki v standart tabanda mı?" Hayır. v , uzayın bir **elemanıdır** — bir ok, bir polinom, bir matris — ve hiçbir tabana bağlı değildir. Eşitlik, vektörlerin kendileri arasındadır; taban seçmek v 'yi değiştirmez, yalnızca v 'ye **hangi sayı listesiyle ad verdiğimizizi** değiştirir.

$\mathbb{R}^n$ 'de kafa karıştıran incelik şudur: $v = (3, 5)$ yazımının kendisi zaten standart tabana göre koordinatlarıdır, çünkü

$$(3, 5) = 3(1, 0) + 5(0, 1)$$

Yani standart taban s için $[v]_s = (3, 5) = v$ 'dir — vektörle koordinatları çakışır. Başka bir taban seçildiğinde bu çakışma bozulur: $f_1 = (1, 1), f_2 = (1, 2)$ tabanında aynı vektör

$$(3, 5) = 1 \cdot (1, 1) + 2 \cdot (1, 2) \implies [v]_f = (1, 2)$$

olur. Vektör aynı vektördür; değişen yalnızca adresidir.

Örnek 21.1 (Koordinatların Bulunması). $v = (3, 1, -4) \in \mathbb{R}^3$ vektörünün $\mathbb{R}^3$ 'ün $E = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ tabanına göre koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.

$e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ olsun ve $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$ yazalım:

$$(3, 1, -4) = x(1, 1, 1) + y(0, 1, 1) + z(0, 0, 1) = (x, x + y, x + y + z)$$

Bileşenler eşitlenirse

$$x = 3, \quad x + y = 1, \quad x + y + z = -4$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow -R_2 + R_3]{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğundan tek çözüm vardır:

$$x = 3, \quad y = -2, \quad z = -5$$

Demek ki $v = 3e_1 - 2e_2 - 5e_3$ ve

$$[v]_E = (3, -2, -5)$$

Sağlama:

$$3(1, 1, 1) - 2(0, 1, 1) - 5(0, 0, 1) = (3, 3 - 2, 3 - 2 - 5) = (3, 1, -4)$$

■

21.2 Koordinatları Bir Tabandan Diğereine Çevirmek

İki taban, aynı vektöre iki farklı sayı listesi verir. Birinden diğereine geçmenin en yalın yolu iki adımdır ve yeni hiçbir araç gerektirmez.

💡 İki adımda taban değişimi

$f = \{f_1, \dots, f_n\}$ ve $g = \{g_1, \dots, g_n\}$, V 'nin iki tabanı olsun; $[v]_f = (a_1, \dots, a_n)$ verilsin ve $[v]_g$ istensin.

1. **Vektörü kurun:** $v = a_1 f_1 + \dots + a_n f_n$ toplamını hesaplayın; artık v 'nin kendisi elinizdedir.
2. **Yeni tabanda çözün:** $v = x_1 g_1 + \dots + x_n g_n$ denklemini $x_1, \dots, x_n$ için çözün; çıkan liste $[v]_g$ 'dir.

Örnek 21.2 (İki Adımın Uygulanması). $\mathbb{R}^2$ 'de $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 2)$ ve $g_1 = (2, 1)$, $g_2 = (1, 1)$ tabanları veriliyor. $[v]_f = (1, 2)$ olduğuna göre $[v]_g$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

1. adım. Vektörü kuralım:

$$v = 1 \cdot f_1 + 2 \cdot f_2 = (1, 1) + 2(1, 2) = (3, 5)$$

2. adım. $v = xg_1 + yg_2$ yazalım:

$$(3, 5) = x(2, 1) + y(1, 1) = (2x + y, x + y)$$

$2x + y = 3$ ve $x + y = 5$ denklemlerinden, taraf tarafa çıkararak $x = -2$, buradan $y = 7$ bulunur:

$$[v]_g = (-2, 7)$$

Kontrol. $-2(2, 1) + 7(1, 1) = (-4 + 7, -2 + 7) = (3, 5) \checkmark$

■

i Not

Bu iki adım her zaman çalışır; ama aynı taban çiftiyle çok sayıda vektör çevrilecekse her seferinde sistem çözmek israftır. İki adımı tek bir matris çarpımına sıkıştıran araç **geçiş matrisidir**; onu **taban değiştirme** bölümünde kuracağız, hesap pratiği ise **Problemler** bölümünde toplanmıştır.

21.3 Her n-Boyutlu Uzay K^n 'dir

Teorem 21.1 (n-Boyutlu Uzaylar K^n 'e İzomorfizm). V, K üzerinde n -boyutlu bir vektör uzayı ise V, K^n 'e izomorfizmdir:

$$V \cong K^n$$

İspat.

$E = \{e_1, \dots, e_n\}$, V 'nin bir tabanı olsun. Her $v \in V$

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \quad (a_i \in K)$$

biçiminde tek türlü yazıldığından

$$F : V \rightarrow K^n, \quad v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \mapsto (a_1, \dots, a_n) = [v]_E$$

dönüşümü tanımlanabilir. Bunun bir izomorfizm olduğunu dört adımda görelim.

1. F iyi tanımlıdır. $v = w$ olsun. Koordinatlar tek türlü belirli olduğundan v 'nin ve w 'nin katsayı listeleri çakışır, yani $[v]_E = [w]_E$ ve $F(v) = F(w)$ 'dir.

2. F örtendir. Herhangi bir $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ verildiğinde $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \in V$ vektörü kurulabilir ve $F(v) = (a_1, \dots, a_n)$ 'dir.

3. F bire birdir. $v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ ve $w = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$ için $F(v) = F(w)$ olsun. O hâlde

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \implies a_i = b_i \quad (i = 1, \dots, n) \implies v = w$$

4. F lineerdir. Aynı gösterimlerle

$$\begin{aligned} F(v + w) &= F((a_1 + b_1)e_1 + \dots + (a_n + b_n)e_n) \\ &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = F(v) + F(w) \end{aligned}$$

ve $k \in K$ için

$$\begin{aligned} F(kv) &= F((ka_1)e_1 + \dots + (ka_n)e_n) = (ka_1, \dots, ka_n) \\ &= k(a_1, \dots, a_n) = kF(v) \end{aligned}$$

Dört adım birlikte F 'nin V 'den K^n üzerine bir izomorfizm olduğunu verir: $V \cong K^n$.

■

 Teoremin anlamı

K üzerinde n -boyutlu bütün vektör uzayları — matrisler, polinomlar, fonksiyonların uygun alt uzayları — cebirsel olarak K^n 'in aynısıdır. Bir taban seçmek, o uzayı K^n 'e çevirmekten başka bir şey değildir. Bu yüzden sonlu boyutlu uzaylarda çalışırken sıralı n -lilerle uğraşmak genellik kaybı yaratmaz.

21.4 Dönüşüm Tabanda Belirlenir

Teorem 21.2 (Lineer Dönüşümün Tabanla Belirlenmesi). V ve U , aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, V 'nin bir tabanı ve $u_1, u_2, \dots, u_n$ da U 'nun herhangi n elemanı olsun. O hâlde

$$F(v_1) = u_1, \quad F(v_2) = u_2, \quad \dots, \quad F(v_n) = u_n$$

olacak biçimde bir $F : V \rightarrow U$ lineer dönüşümü vardır ve bu dönüşüm tek olarak belirlidir.

İspat.

1. Dönüşüm tanımlanabilir. $\{v_1, \dots, v_n\}$ bir taban olduğundan her $v \in V$

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

biçiminde tek türlü yazılır. Bu katsayıları kullanarak

$$F(v) := a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n \in U$$

tanımını yapalım. Katsayılar tek türlü belirli olduğundan F iyi tanımlıdır: $v = w$ ise katsayılar aynıdır ve $F(v) = F(w)$ 'dir.

Ayrıca her i için

$$v_i = 0_K v_1 + \dots + 1_K v_i + \dots + 0_K v_n$$

$$\implies F(v_i) = 0_K u_1 + \dots + 1_K u_i + \dots + 0_K u_n = u_i$$

yani istenen koşullar sağlanır.

2. F lineerdir. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ ve $w = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$ olsun. Toplamın koordinatları katsayıların toplamıdır:

$$\begin{aligned} F(v + w) &= F((a_1 + b_1)v_1 + \dots + (a_n + b_n)v_n) \\ &= (a_1 + b_1)u_1 + \dots + (a_n + b_n)u_n \\ &= (a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) + (b_1 u_1 + \dots + b_n u_n) \\ &= F(v) + F(w) \end{aligned}$$

$k \in K$ için

$$\begin{aligned} F(kv) &= F((ka_1)v_1 + \dots + (ka_n)v_n) = (ka_1)u_1 + \dots + (ka_n)u_n \\ &= k(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = kF(v) \end{aligned}$$

3. F tektir. $G : V \rightarrow U$ de lineer olsun ve $G(v_i) = u_i$ ($i = 1, \dots, n$) koşulunu sağlasın. Herhangi bir $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in V$ için G 'nin lineerliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} G(v) &= a_1 G(v_1) + a_2 G(v_2) + \dots + a_n G(v_n) \\ &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n = F(v) \end{aligned}$$

Her $v \in V$ için $G(v) = F(v)$ olduğundan $G = F$ 'dir.

■

Örnek 21.3 (Dönüşümü Taban Değerlerinden Kurmak). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lineer dönüşümü $T(1, 1) = 3$ ve $T(0, 1) = -2$ koşullarını sağlasın. Böyle bir dönüşüm var mıdır? Varsa $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ için $T(a, b)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Önce $\{(1, 1), (0, 1)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanı olduğunu görelim: iki vektör de sıfırdan farklıdır ve hiçbirinin katı değildir, dolayısıyla bağımsızdır; $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ olduğundan iki elemanlı bağımsız küme bir tabandır.

Taban vektörlerindeki değerler verildiğine göre, önceki teorem gereği böyle bir T **vardır ve tektir**. $T(a, b)$ 'yi hesaplamak için (a, b) 'yi taban cinsinden yazalım:

$$(a, b) = x(1, 1) + y(0, 1) = (x, x + y) \implies x = a, \quad x + y = b$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b - a \end{array} \right)$$

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğundan tek çözüm vardır: $x = a, y = b - a$. Şimdi T 'nin lineerliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} T(a, b) &= T(x(1, 1) + y(0, 1)) = xT(1, 1) + yT(0, 1) = 3x - 2y \\ &= 3a - 2(b - a) = 5a - 2b \end{aligned}$$

Demek ki $T(a, b) = 5a - 2b$ 'dir. Sağlama: $T(1, 1) = 5 - 2 = 3$ ve $T(0, 1) = 0 - 2 = -2$.

■

21.5 Alıştırma

Alıştırma 21.1 (Koordinatlar ve Tabanla Belirlenme).

a) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü

$$T(2, 0, 0, 0) = (4, 0), \quad T(2, 2, 0, 0) = (1, -1)$$

$$T(2, 2, 2, 0) = (0, -2), \quad T(2, 2, 2, 2) = (-4, 0)$$

koşullarını sağlasın. Böyle bir dönüşüm var mıdır? Varsa $T(8, 6, 4, 2)$ 'yi bulunuz.

b) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü

$$T(3, 0, 0, 0) = (1, -1), \quad T(3, 3, 0, 0) = (0, -1)$$

$$T(3, 3, 3, 0) = (2, 0), \quad T(3, 3, 3, 3) = (0, 2)$$

koşullarını sağlasın. $T(12, 9, 6, 3)$ 'ü bulunuz.

c) $F : V \rightarrow W$ üzerine bir vektör uzayı izomorfizmi olsun ($V \cong W$). $\{v_1, \dots, v_n\}$, V 'nin bir tabanı ise $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ 'in de W 'nin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Önce verilen dört vektörün bir taban olduğunu görelim. Bunları satır kabul eden matris

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

alt üçgenseldir; ikinci satırdan birinciye, üçüncüden ikinciye, dördüncüden üçüncüyü çıkarırsak

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

merdiven matrisi elde edilir; dört vektör lineer bağımsızdır. $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ olduğundan bir tabandır ve dönüşüm vardır, üstelik tektir.

Şimdi $(8, 6, 4, 2)$ 'yi bu taban cinsinden yazalım:

$$(8, 6, 4, 2) = a(2, 0, 0, 0) + b(2, 2, 0, 0) + c(2, 2, 2, 0) + d(2, 2, 2, 2)$$

Bileşenleri sondan başa doğru okuyalım:

$$2d = 2 \implies d = 1$$

$$2c + 2d = 4 \implies c = 1$$

$$2b + 2c + 2d = 6 \implies b = 1$$

$$2a + 2b + 2c + 2d = 8 \implies a = 1$$

Yani dördünün toplamı. T lineer olduğundan

$$\begin{aligned} T(8, 6, 4, 2) &= T(2, 0, 0, 0) + T(2, 2, 0, 0) + T(2, 2, 2, 0) + T(2, 2, 2, 2) \\ &= (4, 0) + (1, -1) + (0, -2) + (-4, 0) = (1, -3) \end{aligned}$$

b) Aynı yapı: dört vektör yine bir tabandır (aynı üçgen argüman, çarpan 3 ile). $(12, 9, 6, 3)$ 'ü yazalım:

$$3d = 3 \implies d = 1, \quad 3c + 3d = 6 \implies c = 1$$

$$3b + 3c + 3d = 9 \implies b = 1$$

$$3a + 3b + 3c + 3d = 12 \implies a = 1$$

Yine dördünün toplamı çıktı:

$$T(12, 9, 6, 3) = (1, -1) + (0, -1) + (2, 0) + (0, 2) = (3, 0)$$

c) İki koşulu ayrı ayrı denetleyelim.

Doğurma. $w \in W$ alalım. F örten olduğundan $F(v) = w$ olacak bir $v \in V$ vardır. v 'yi taban cinsinden yazalım: $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. F lineer olduğundan

$$w = F(v) = a_1F(v_1) + \dots + a_nF(v_n)$$

Demek ki $W = L(F(v_1), \dots, F(v_n))$ 'dir.

Bağımsızlık. $a_1F(v_1) + \dots + a_nF(v_n) = 0_W$ olsun. F lineer olduğundan sol taraf

$$F(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = 0_W$$

biçiminde yazılır. Öte yandan her lineer dönüşüm için $F(0_V) = 0_W$ 'dir ve F bire bir olduğundan 0_W 'ye giden tek vektör 0_V 'dir:

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0_V$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ bağımsız olduğundan bütün a_i 'ler sıfırdır. Demek ki $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ bağımsızdır. İki koşul birlikte kümenin W 'nin bir tabanı olduğunu verir. Bunun bir sonucu da şudur: izomorf uzayların boyutları eşittir. ■

Bir lineer dönüşümü incelemenin iki doğal yolu vardır: hangi vektörleri sıfıra gönderdiğine bakmak ve hangi vektörlere ulaştığına bakmak. Sıradaki bölüm bu iki alt uzayı tanıtıyor: **çekirdek ve görüntü**.

22. Çekirdek ve Görüntü

Bir lineer dönüşümü iki alt uzay özetler: hangi vektörleri sıfıra ezdiği ve hangi vektörlere ulaştığı. Birincisi dönüşümün kaybettiği bilgiyi, ikincisi ürettiği bilgiyi ölçer. Bu bölümde ikisini de tanımlayıp hesaplamayı öğreneceğiz.

22.1 Tanım

Tanım 22.1 (Görüntü). U ve V , aynı bir K komutatif cismi üzerinde tanımlanmış iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. U 'nin

$$\text{Im } F = \{ F(v) \in U : v \in V \}$$

alt kümesine F 'nin **görüntüsü** (resmi) denir.

Tanım 22.2 (Çekirdek). $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olmak üzere V 'nin

$$\text{Ker } F = \{ v \in V : F(v) = 0_U \}$$

alt kümesine F 'nin **çekirdeği** denir.

Teorem 22.1 (Çekirdek ve Görüntü Birer Alt Uzaydır). U ve V , K üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde $\text{Im } F$, U 'nin bir alt uzayı; $\text{Ker } F$ de V 'nin bir alt uzayıdır.

İspat.

$\text{Im } F \leq U$. Her lineer dönüşüm için $F(0_V) = 0_U$ olduğundan $0_U \in \text{Im } F$ 'dir; dolayısıyla $\text{Im } F \neq \emptyset$ ve tanım gereği $\text{Im } F \subseteq U$ 'dur.

$a, b \in K$ ve $u, u' \in \text{Im } F$ alalım. Tanım gereği $F(v) = u$ ve $F(v') = u'$ olacak $v, v' \in V$ vardır. V bir vektör uzayı olduğundan $av + bv' \in V$ 'dir ve F lineer olduğundan

$$F(av + bv') = aF(v) + bF(v') = au + bu'$$

Sol taraf $\text{Im } F$ 'de olduğuna göre $au + bu' \in \text{Im } F$ 'dir. **Tek koşullu ölçüt** gereği $\text{Im } F$ bir alt uzaydır.

$\text{Ker } F \leq V$. Yine $F(0_V) = 0_U$ olduğundan $0_V \in \text{Ker } F$ 'dir ve $\text{Ker } F \neq \emptyset$ 'dir; ayrıca $\text{Ker } F \subseteq V$ 'dir. $a, b \in K$ ve $v, w \in \text{Ker } F$ alalım; yani $F(v) = 0_U$ ve $F(w) = 0_U$ 'dur. F lineer olduğundan

$$F(av + bw) = aF(v) + bF(w) = a0_U + b0_U = 0_U + 0_U = 0_U$$

Demek ki $av + bw \in \text{Ker } F$ 'dir ve $\text{Ker } F$ bir alt uzaydır.

■

22.2 Görüntüyü Doğuran Küme

Teorem 22.2 (Doğuran Kümenin Görüntüsü). $F : V \rightarrow U$ lineer bir dönüşüm ve $v_1, \dots, v_n \in V$ vektörleri V 'yi doğursun, yani $V = L(v_1, \dots, v_n)$ olsun. O hâlde $F(v_1), \dots, F(v_n)$ vektörleri de $\text{Im } F$ 'yi doğurur:

$$\text{Im } F = L(F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n))$$

İspat.

$\text{Im } F \subseteq L(F(v_1), \dots, F(v_n))$. $u \in \text{Im } F$ olsun; $F(v) = u$ olacak bir $v \in V$ vardır. v 'yi doğuran küme cinsinden yazalım:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \quad (a_i \in K)$$

F lineer olduğundan

$$u = F(v) = a_1 F(v_1) + \cdots + a_n F(v_n) \in L(F(v_1), \dots, F(v_n))$$

Ters kapsama. Her i için $F(v_i) \in \text{Im } F$ 'dir ve $\text{Im } F$ bir alt uzay olduğundan, *gerilen uzayın en küçüklüğü gereği*

$$L(F(v_1), \dots, F(v_n)) \subseteq \text{Im } F$$

İki kapsama birlikte eşitliği verir.

■

Teorem 22.3 (Bağımsızlık Geri Taşınır). $T : V \rightarrow U$ lineer bir dönüşüm ve $v_1, \dots, v_n \in V$ olsun. $T(v_1), \dots, T(v_n) \in U$ vektörleri lineer bağımsız ise $v_1, \dots, v_n \in V$ vektörleri de lineer bağımsızdır.

İspat.

$a_1, \dots, a_n \in K$ olmak üzere

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0_V$$

olsun. Her iki tarafa T uygulayalım; T lineer olduğundan ve $T(0_V) = 0_U$ olduğundan

$$0_U = T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \cdots + a_n T(v_n)$$

$T(v_1), \dots, T(v_n)$ lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfırdır:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0_K$$

Demek ki $v_1, \dots, v_n$ lineer bağımsızdır.

■

⚠ Ters yön genel olarak doğru değildir

Teorem yalnızca bir yönde çalışır: görüntülerin bağımsızlığı, orijinalerin bağımsızlığını gerektirir. Ters doğru değildir — sıfır dönüşümünü düşünün: V 'de ne kadar bağımsız vektör alırsanız alın, hepsinin görüntüsü 0_U 'dur ve bunlar bağımlıdır. Ters yönün de geçerli olması için $\text{Ker } T = \{0_V\}$ olması gerekir.

22.3 Görüntü Hesabı

Az önceki teorem, görüntüyü bulmayı tamamen mekanik bir işe çevirir.

💡 Görüntü üç adımda

$F : K^n \rightarrow K^m$ lineer dönüşümü verilsin.

1. Standart taban vektörlerinin görüntülerini $F(e_1), \dots, F(e_n)$ hesaplayın; doğuran kümenin görüntüsü teoremi gereği bu vektörler $\text{Im } F$ 'yi doğurur.
2. Bu görüntüleri **satır** kabul eden matrisi merdiven şekline indirin; **satır işlemleri satır uzayını değiştirmez**.
3. Sıfırdan farklı satırlar $\text{Im } F$ 'nin bir tabanıdır; sayıları da $\dim(\text{Im } F)$ 'yi verir.

Örnek 22.1 (Görüntünün Bulunması). $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$F(x, y, s, t) = (x + y + s, x + 2y - t, 2x + 3y + s - t)$$

biçiminde tanımlanıyor.

- a) $\text{Im } F$ 'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.
 b) $u = (1, 2, 3)$ ve $w = (1, 1, 1)$ vektörlerinin $\text{Im } F$ 'de olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.

a) Standart taban vektörlerinin görüntülerini hesaplayalım:

$$F(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 2), \quad F(0, 1, 0, 0) = (1, 2, 3)$$

$$F(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 1), \quad F(0, 0, 0, 1) = (0, -1, -1)$$

Doğuran kümenin görüntüsü teoremi gereği bu dört vektör $\text{Im } F$ 'yi doğurur. Bunları satır kabul eden matrisi merdiven şekline indirelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_1 + R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\sim]{\substack{R_3 \rightarrow R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow R_2 + R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satır uzayı değişmediğinden ve merdiven matrisin sıfırdan farklı satırları lineer bağımsız olduğundan

$$\{ (1, 1, 2), (0, 1, 1) \} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Im } F) = 2$$

b) Taban elimizde olduğuna göre üyelik sorusu iki bilinmeyenli bir sisteme iner:

$$a(1, 1, 2) + b(0, 1, 1) = (a, a + b, 2a + b)$$

$u = (1, 2, 3)$ için $a = 1, a + b = 2$ yani $b = 1$; üçüncü bileşen $2a + b = 3$ ✓ sağlanır. Demek ki

$$u = (1, 1, 2) + (0, 1, 1) \in \text{Im } F$$

$w = (1, 1, 1)$ için $a = 1, a + b = 1$ yani $b = 0$; ama üçüncü bileşen $2a + b = 2 \neq 1$ olur. Sistem tutarsızdır:

$$w = (1, 1, 1) \notin \text{Im } F$$

Yani F hangi girdiyle beslenirse beslensin çıktısı asla $(1, 1, 1)$ olamaz.

■

22.4 Çekirdek Hesabı

Çekirdeği bulmak, bir homojen lineer denklem sistemi çözmektir.

Örnek 22.2 (Çekirdeği Yalnız Sıfır Olan Bir Dönüşüm). $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dönüşümü

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\text{Ker } T$ 'yi ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, 0, 0, 0)$ koşulu şu homojen sistemi verir:

$$a_1 = 0, \quad a_1 + a_2 = 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{\begin{array}{l} R_2 \rightarrow -R_1 + R_2 \\ R_3 \rightarrow -R_1 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_1 + R_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[\sim]{\begin{array}{l} R_3 \rightarrow -R_2 + R_3 \\ R_4 \rightarrow -R_2 + R_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{R_4 \rightarrow -R_3 + R_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşittir ($r = n = 4$); homojen sistemin sıfır çözümünden başka çözümü yoktur:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

Demek ki

$$\text{Ker } T = \{ (0, 0, 0, 0) \} = \{ 0_{\mathbb{R}^4} \}, \quad \dim(\text{Ker } T) = 0$$

■

Örnek 22.3 (Çekirdeği Bir Doğru Olan Dönüşüm). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\text{Ker } T$ 'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

$T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ koşulu şu sistemi verir:

$$x + 2y - z = 0, \quad y + z = 0, \quad x + y - 2z = 0$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow -R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[\sim]{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Kalan sistem

$$x + 2y - z = 0, \quad y + z = 0$$

olup $n = 3, r = 2$ 'dir. **Çözüm uzayının boyutu**

$$\dim(\text{Ker } T) = n - r = 3 - 2 = 1$$

Serbest değişken z 'dir. $z = a$ alalım:

$$y = -a, \quad x = -2y + z = 2a + a = 3a$$

Demek ki

$$\text{Ker } T = \{ (3a, -a, a) : a \in \mathbb{R} \} = L \left((3, -1, 1) \right)$$

ve $\{(3, -1, 1)\}$, $\text{Ker } T$ 'nin bir tabanıdır. Sağlama: $3 - 2 - 1 = 0, -1 + 1 = 0, 3 - 1 - 2 = 0$.

Geometrik okuma: T , başlangıçtan geçen bir doğruyu tamamen sıfıra ezmektedir.

■

22.5 Alıştırma

Alıştırma 22.1 (Çekirdek Hesapları).

- a) $F : V \rightarrow W$ lineer bir dönüşüm ve $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olsun. $v_1, \dots, v_n \in V$ lineer bağımsız ise $F(v_1), \dots, F(v_n) \in W$ vektörlerinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.
- b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y - z, x + y, z - 2x)$ dönüşümünün çekirdeğini ve boyutunu bulunuz.
- c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (z - 3y, 4x, x + 2y - z)$ dönüşümünün çekirdeğini ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

a) $a_1, \dots, a_n \in K$ için

$$a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \dots + a_n F(v_n) = 0_W$$

olsun. F lineer olduğundan sol taraf tek bir görüntü olarak yazılır:

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = 0_W$$

Bu, $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ vektörünün $\text{Ker } F$ 'de olduğu anlamına gelir. Varsayım gereği $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olduğundan

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0_V$$

$v_1, \dots, v_n$ lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfırdır: $a_1 = \dots = a_n = 0_K$. Demek ki $F(v_1), \dots, F(v_n)$ lineer bağımsızdır.

Bu, “bağımsızlık geri taşınır” teoreminin tersidir ve tam olarak $\text{Ker } F = \{0_V\}$ koşulu altında geçerlidir. Nitekim $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olması, F 'nin bire bir olmasıyla eşdeğerdir:

$$F(v) = F(w) \Rightarrow F(v - w) = 0_W \Rightarrow v - w \in \text{Ker } F = \{0_V\} \Rightarrow v = w$$

b) $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ koşulu:

$$y - z = 0, \quad x + y = 0, \quad z - 2x = 0$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim (sütunlar x, y, z):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow 2R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow -2R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$r = n = 3$ olduğundan yalnızca sıfır çözüm vardır: $z = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$. Demek ki

$$\text{Ker } T = \{ (0, 0, 0) \}, \quad \dim(\text{Ker } T) = 0$$

c) $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ koşulu:

$$z - 3y = 0, \quad 4x = 0, \quad x + 2y - z = 0$$

İkinci denklem doğrudan $x = 0$ verir. Birinci denklemden $z = 3y$; bunu üçüncüye taşıyalım:

$$0 + 2y - 3y = 0 \Rightarrow -y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 3 \cdot 0 = 0$$

Demek ki

$$\text{Ker } T = \{ (0, 0, 0) \}, \quad \dim(\text{Ker } T) = 0$$

(Aynı sonuç matris diliyle de görülür: katsayılar matrisinin rankı 3'tür, $\dim(\text{Ker } T) = 3 - 3 = 0$. Çekirdeğin yalnız sıfırdan ibaret olması, bu iki dönüşümün de bire bir olduğunu söyler.)

■

Buraya kadar bir lineer dönüşümün iki temel alt uzayını tanıdık. Sıradaki bölüm bu ikisinin boyutlarını tek bir eşitlikle birbirine bağlıyor.

23. Boyut Teoremi, Rank ve Nullity

Bir lineer dönüşüm tanım kümesindeki bilginin bir kısmını yok eder, kalanını görüntüye taşır. Yok edilen kısmı çekirdek, taşınan kısmı görüntü ölçer. Bu bölümün teoremi bu iki ölçünün toplamının, tanım kümesinin boyutunu tam olarak verdiğini söyler – hiçbir şey kaybolmaz, yalnızca yer değişir.

23.1 Görüntü, Matrisin Sütun Uzayıdır

Boyut teoremine geçmeden önce, matrislerle tanımlanan dönüşümlerde görüntünün ne olduğunu görelim.

Örnek 23.1 (Matris Dönüşümünün Görüntüsü). K komutatif bir cisim, $A = (a_{ij})$ (m, n) tipinde bir K -matris ve

$$T : K^n \rightarrow K^m, \quad v \mapsto A \cdot v$$

bu matrisin belirlediği lineer dönüşüm olsun. $\text{Im } T$ nedir?

Çözüm.

K^n 'in elemanlarını sütun matris olarak düşünelim ve

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1_K \\ 0_K \\ \vdots \\ 0_K \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0_K \\ 1_K \\ \vdots \\ 0_K \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0_K \\ \vdots \\ 0_K \\ 1_K \end{pmatrix}$$

standart tabanını alalım. Bu vektörler K^n 'i doğurduğundan, **doğuran kümenin görüntüsü** teoremi gereği $T(e_1), \dots, T(e_n)$ vektörleri $\text{Im } T$ 'yi doğurur.

Öte yandan $A \cdot e_i$ çarpımı, A 'nın i . sütununu verir:

$$T(e_1) = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad T(e_2) = A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots$$

Demek ki $\text{Im } T$ 'yi doğuran vektörler tam olarak A 'nın sütunlarıdır:

$$\text{Im } T = A \text{ matrisinin sütun uzayı}$$

■

i Not

Bu gözlem, bir matris dönüşümünün görüntüsünü hesaplamayı tamamen mekanik hâle getirir: sütunları alın, **satır uzayı yöntemiyle** bir taban bulun. $\text{Im } T$ 'nin boyutu da A 'nın rankıdır.

23.2 Boyut Teoremi

Teorem 23.1 (Boyut Teoremi). V ve U , aynı bir K komutatif cismi üzerinde iki vektör uzayı, V sonlu boyutlu ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde

$$\dim V = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$$

İspat.

$\dim V = n$ olsun. $\text{Ker } F$, V 'nin bir alt uzayı olduğundan sonlu boyutludur; $\dim(\text{Ker } F) =: r$ diyelim. *Alt uzayın boyutu* gereği $r \leq n$ 'dir. Teoremi ispatlamak için $\dim(\text{Im } F) = n - r$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\{w_1, \dots, w_r\}$, $\text{Ker } F$ 'nin bir tabanı olsun. Bu küme V 'de lineer bağımsız olduğundan, *taban genişletme* ile V 'nin bir tabanına tamamlanabilir:

$$\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_{n-r}\}$$

Şimdi

$$B := \{ F(v_1), \dots, F(v_{n-r}) \}$$

kümesinin $\text{Im } F$ 'nin bir tabanı olduğunu gösterelim.

(i) **B , $\text{Im } F$ 'yi doğurur.** $u \in \text{Im } F$ olsun; $F(v) = u$ olacak bir $v \in V$ vardır. v 'yi yukarıdaki taban cinsinden yazalım:

$$v = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 v_1 + \dots + b_{n-r} v_{n-r}$$

F lineer olduğundan

$$u = F(v) = a_1 F(w_1) + \dots + a_r F(w_r) + b_1 F(v_1) + \dots + b_{n-r} F(v_{n-r})$$

Fakat $w_i \in \text{Ker } F$ olduğundan $F(w_1) = \dots = F(w_r) = 0_U$ 'dur. Geriye

$$u = b_1 F(v_1) + \dots + b_{n-r} F(v_{n-r})$$

kalır; yani $u \in L(B)$ 'dir. Demek ki $\text{Im } F = L(B)$ 'dir.

(ii) **B lineer bağımsızdır.** $a_1, \dots, a_{n-r} \in K$ olmak üzere

$$a_1 F(v_1) + \dots + a_{n-r} F(v_{n-r}) = 0_U$$

olsun. F lineer olduğundan

$$F(a_1 v_1 + \dots + a_{n-r} v_{n-r}) = 0_U$$

olur; yani

$$a_1 v_1 + \dots + a_{n-r} v_{n-r} \in \text{Ker } F$$

bulunur.

$\{w_1, \dots, w_r\}$ çekirdeği doğurduğundan, uygun $b_1, \dots, b_r \in K$ için

$$a_1 v_1 + \dots + a_{n-r} v_{n-r} = b_1 w_1 + \dots + b_r w_r$$

yazılır, yani

$$a_1 v_1 + \dots + a_{n-r} v_{n-r} - b_1 w_1 - \dots - b_r w_r = 0_V$$

$\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_{n-r}\}$ kümesi V 'nin bir tabanı, dolayısıyla lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfırdır:

$$a_1 = \dots = a_{n-r} = b_1 = \dots = b_r = 0_K$$

Özel olarak $a_1 = \dots = a_{n-r} = 0_K$ 'dir; B lineer bağımsızdır.

(i) ve (ii) birlikte B 'nin $\text{Im } F$ 'nin bir tabanı olduğunu verir. B 'nin eleman sayısı $n - r$ olduğundan

$$\dim(\text{Im } F) = n - r = \dim V - \dim(\text{Ker } F)$$

■

23.3 Rank ve Nullity

Tanım 23.1 (Bir Dönüşümün Rankı). V ve U , K üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. F 'nin **rankı**, görüntüsünün boyutudur:

$$\text{rank}(F) = \dim(\text{Im } F)$$

Tanım 23.2 (Nullity). $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olmak üzere F 'nin **Nullity'si**, çekirdeğinin boyutudur:

$$\text{Nullity}(F) = \dim(\text{Ker } F)$$

i Not

Genel kültür: bazı Türkçe kaynaklar Nullity (F) için **sıfırlık** terimini kullanır; ikisi aynı sayıdır. Bu notlarda Nullity gösterimine bağlı kalacağız.

Bu dille boyut teoremi şu kısa biçimi alır: V sonlu boyutlu ise

$$\dim V = \text{Nullity}(F) + \text{rank}(F)$$

💡 Teoremi nasıl okumalı?

Nullity, dönüşümün ezdiği yönlerin sayısıdır; rank ise ayakta kalan yönlerin sayısı. Toplamları sabittir: tanım kümesinin boyutu. Bu yüzden bir dönüşüm ne kadar çok ezerse görüntüsü o kadar dar olur — ikisini aynı anda büyütmek mümkün değildir.

23.4 Boyutları Kısa Yoldan Bulmak

Bir soru yalnızca $\dim(\text{Im } F)$ ve $\dim(\text{Ker } F)$ değerlerini istiyorsa, ne görüntünün ne de çekirdeğin bir tabanını hesaplamak gerekir.

💡 Tek indirgeme, iki boyut

$F : K^n \rightarrow K^m$ lineer dönüşümü verilsin.

- Standart taban vektörlerinin görüntülerini $F(e_1), \dots, F(e_n)$ satır kabul eden matrisi yazın ve merdiven şekline indirin.
- Sıfırdan farklı satır sayısı r olsun. Bu sayı F 'nin rankıdır: $\dim(\text{Im } F) = r$.
- Çekirdeğin boyutu boyut teoreminden bedavaya gelir: $\dim(\text{Ker } F) = n - r$. Homojen sistemi çözmeye gerek yoktur.

Çekirdeğin sistemini zaten merdivene indirdiyseniz ikinci bir kısa yol daha vardır: $\dim(\text{Ker } F)$, sistemin **serbest değişken sayısına** eşittir.

Örnek 23.2 (Taban Hesaplamadan İki Boyut). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + 2y + z)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\dim(\text{Im } T)$ ve $\dim(\text{Ker } T)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

Standart taban görüntüleri $T(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1, 2)$ ve $T(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$ 'dir. Bunları satır yazalım ve indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı satır sayısı 2 olduğundan

$$\dim(\text{Im } T) = \text{rank } (T) = 2, \quad \dim(\text{Ker } T) = 3 - 2 = 1$$

Ne çekirdeğin denklemleri çözüldü ne de görüntü için ayrıca bir taban seçildi; iki boyut da tek indirgemenen okundu.

■

23.5 Hesap Örnekleri

Örnek 23.3 (Çekirdek ve Görüntünün Birlikte Hesabı). $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$F(x, y, s, t) = (x - y + s + t, x + 2s - t, x + y + 3s - 3t)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\text{Im } F$ ve $\text{Ker } F$ 'nin birer tabanını ve boyutlarını bulunuz.

Çözüm.

Görüntü. $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ vektörleri $\mathbb{R}^4$ 'ü doğurduğundan, görüntüleri de $\text{Im } F$ 'yi doğurur:

$$F(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1), \quad F(0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$$

$$F(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 3), \quad F(0, 0, 0, 1) = (1, -1, -3)$$

Bu dört vektörü satır kabul eden matrisi merdiven şekline indirgeyelim:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

A ile B satır eşdeğer olduğundan satır uzayları aynıdır ve bu uzay $\text{Im } F$ 'dir. B 'nin sıfırdan farklı satırları bir merdiven matrisin satırları olduğundan lineer bağımsızdır:

$$\{(1, 1, 1), (0, 1, 2)\} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Im } F) = 2$$

Çekirdek. $F(x, y, s, t) = (0, 0, 0)$ koşulu şu homojen sistemi verir:

$$x - y + s + t = 0, \quad x + 2s - t = 0, \quad x + y + 3s - 3t = 0$$

Genişletilmiş matrisi indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Eşdeğer sistem

$$x - y + s + t = 0, \quad y + s - 2t = 0$$

olup bilinmeyen sayısı $n = 4$, denklem sayısı $r = 2$ 'dir. Serbest değişken sayısı $n - r = 2$ ve serbest değişkenler s ile t 'dir; dolayısıyla $\dim(\text{Ker } F) = 2$.

Bir taban için serbest değişkenlere sırayla 1 ve 0 verelim:

- $s = 1, t = 0$: $y = -1, x = y - s - t = -2$, yani $(-2, -1, 1, 0) \in \text{Ker } F$
- $s = 0, t = 1$: $y = 2, x = y - s - t = 1$, yani $(1, 2, 0, 1) \in \text{Ker } F$

$\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ çekirdeğin bir tabanıdır

Kontrol. Boyut teoremi sağlanıyor:

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F) \quad \Rightarrow \quad 4 = 2 + 2$$

■

Örnek 23.4 (Rankı İki Olan Bir Operatör). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z)$$

biçiminde tanımlanıyor. $\text{Im } T$ 'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

Standart taban vektörlerinin görüntüleri $\text{Im } T$ 'yi doğurur: $T(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 1)$ ve $T(0, 0, 1) = (-1, 1, -2)$. Bunları satır kabul eden matrisi indirgeyelim:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B$$

B bir merdiven matris olduğundan sıfırdan farklı satırları lineer bağımsızdır ve A ile B 'nin satır uzayları aynıdır:

$$\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Im } T) = 2$$

Bu dönüşümün çekirdeğinin $L((3, -1, 1))$, yani boyutunun 1 olduğunu daha önce hesaplamıştık. Boyut teoremi yine tutuyor: $3 = 1 + 2$.

■

23.6 Alıştırma

Alıştırma 23.1 (Boyut Teoremi Uygulamaları).

1. V sonlu boyutlu ve $F : V \rightarrow U$ lineer olsun. $\dim V = \dim(\text{Im } F)$ olması için gerek ve yeter koşulun $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olduğunu gösteriniz.
2. $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dönüşümü şöyle tanımlansın:

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$$

Bu dönüşümün rankını bulunuz.

3. Bir $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü için Nullity (T) en az kaç olabilir?

Çözüm.

1. Boyut teoremi gereği

$$\dim V = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$$

oldüğundan

$$\dim V = \dim(\text{Im } F) \Leftrightarrow \dim(\text{Ker } F) = 0 \Leftrightarrow \text{Ker } F = \{0_V\}$$

Son denklik, boyutu sıfır olan tek uzayın sıfır uzayı olmasından gelir.

2. Bu dönüşümün çekirdeğinin yalnız sıfır vektöründen ibaret olduğunu, yani $\dim(\text{Ker } T) = 0$ olduğunu çekirdek hesabında bulmuştuk. Boyut teoreminden

$$\text{rank } (T) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\text{Ker } T) = 4 - 0 = 4$$

3. $\text{Im } T$, $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt uzayı olduğundan $\dim(\text{Im } T) \leq 3$ 'tür. Boyut teoreminden

$$\text{Nullity } (T) = 5 - \dim(\text{Im } T) \geq 5 - 3 = 2$$

Demek ki $\text{Nullity } (T)$ en az 2'dir; özel olarak böyle bir dönüşümün çekirdeği hiçbir zaman yalnız sıfırdan ibaret olamaz.

■

24. Singüler Olmayan Dönüşümler

Bir lineer dönüşümün sıfırdan farklı bir vektörü sıfıra ezip ezmediği, dönüşümün bilgi kaybedip kaybetmediğini belirler. Bu bölümde bu ayrımı adlandırıyor, bire birlikle ve lineer bağımsızlığın korunmasıyla nasıl aynı şey olduğunu görüyoruz.

24.1 Tanım

Tanım 24.1 (Singüler ve Singüler Olmayan Dönüşüm). V ve U , aynı bir K komutatif cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer

$$F(v) = 0_U \text{ olacak şekilde bir } v \in V \setminus \{0_V\}$$

varsa F 'ye **singüler** denir. Eğer

$$F(v) = 0_U \Leftrightarrow v = 0_V,$$

yani başka bir deyişle $\text{Ker } F = \{0_V\}$ ise F 'ye **singüler değil** (singüler olmayan) denir.

i Not

Her lineer dönüşüm 0_V 'yi 0_U 'ya götürür; bu kaçınılmazdır. Singüler olmak, bunun *dışında* da sıfıra giden bir vektörün bulunması demektir.

24.2 Bire Birlikle Denkliği

Teorem 24.1 (Singüler Olmama Ölçütü). V ve U , K üzerinde iki vektör uzayı olsun. Bir $F : V \rightarrow U$ lineer dönüşümünün bir izomorfizm, yani bire bir olması için gerek ve yeter koşul F 'nin singüler olmamasıdır.

İspat.

Gereklik. F bir izomorfizm, yani bire bir olsun. $v \in \text{Ker } F$ alalım; $F(v) = 0_U$ 'dur. Öte yandan her lineer dönüşüm için $F(0_V) = 0_U$ olduğundan $F(v) = F(0_V)$ olur. F bire bir olduğundan $v = 0_V$ 'dir. Demek ki $\text{Ker } F = \{0_V\}$, yani F singüler değildir.

Yeterlik. F singüler olmasın, yani $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olsun. $v, w \in V$ için $F(v) = F(w)$ olduğunu varsayalım. O hâlde

$$\begin{aligned} F(v) - F(w) = 0_U &\Rightarrow F(v - w) = 0_U \\ &\Rightarrow v - w \in \text{Ker } F = \{0_V\} \end{aligned}$$

Buradan $v - w = 0_V$, yani $v = w$ elde edilir. Demek ki F bire birdir. ■

24.3 Lineer Bağımsızlığın Korunması

Singüler olmayan dönüşümleri tanımanın ikinci yolu, bağımsız kümelere ne yaptıklarına bakmaktır.

Teorem 24.2 (Bağımsızlık İleri Taşınır). $F : V \rightarrow U$ singüler olmayan bir lineer dönüşüm olsun. $\{v_1, \dots, v_n\}$, V 'nin lineer bağımsız bir alt kümesi ise $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ de U 'nun lineer bağımsız bir alt kümesidir.

İspat.

$a_1, \dots, a_n \in K$ olmak üzere

$$a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \dots + a_n F(v_n) = 0_U$$

olsun. F lineer olduğundan

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = 0_U \Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \in \text{Ker } F$$

F singüler olmadığından $\text{Ker } F = \{0_V\}$ 'dir; dolayısıyla

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0_V$$

$v_1, \dots, v_n$ lineer bağımsız olduğundan bütün katsayılar sıfırdır:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0_K$$

Demek ki $F(v_1), \dots, F(v_n)$ lineer bağımsızdır.

■

Bu özelliğin tersi de doğrudur; birlikte tam bir karakterizasyon verirler.

Teorem 24.3 (Bağımsızlık Korunmasıyla Karakterizasyon). $F : V \rightarrow U$ bir lineer dönüşüm olsun. F 'nin singüler olmaması için gerek ve yeter koşul, V 'nin lineer bağımsız her alt kümesinin F altındaki görüntüsünün U 'nun lineer bağımsız bir alt kümesi olmasıdır.

İspat.

Gereklik. Bir önceki teoremdir.

Yeterlik. V 'nin her lineer bağımsız alt kümesinin görüntüsü lineer bağımsız olsun. $v \in V \setminus \{0_V\}$ alalım. Tek elemanlı $\{v\}$ kümesi, $v \neq 0_V$ olduğundan lineer bağımsızdır. Varsayım gereği $\{F(v)\}$ de lineer bağımsızdır; tek elemanlı bir kümenin bağımsız olması ise

$$F(v) \neq 0_U$$

demektir. Sıfırdan farklı hiçbir vektör sıfıra gitmediğinden $\text{Ker } F = \{0_V\}$, yani F singüler değildir.

■

🔗 Kısaca

Singüler olmayan lineer dönüşümler — yani izomorfizmler — lineer bağımsız kümeleri lineer bağımsız kümelere götürürler. Tersine, herhangi bir lineer bağımsız kümeyi yine lineer bağımsız bir kümeye götüren bir lineer dönüşüm singüler değildir.

24.4 Boyut Engeli

Bazı uzay çiftleri arasında singüler olmayan bir dönüşüm kurmak, boyutlar yüzünden baştan imkânsızdır.

Örnek 24.1 (Singüler Olmayan Bir Dönüşümün Bulunmadığı Durum). Bütün singüler olmayan $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümlerini bulunuz.

Çözüm.

$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ herhangi bir lineer dönüşüm olsun. Tanım kümesi $V = \mathbb{R}^4$ için

$$\dim V = \dim \mathbb{R}^4 = 4$$

Öte yandan $\text{Im } T$, $\mathbb{R}^3$ 'ün bir alt uzayı olduğundan

$$\dim(\text{Im } T) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Buradan $\dim \mathbb{R}^4 \neq \dim(\text{Im } T)$ çıkar. **Boyut teoreminin sonucu** gereği $\dim V = \dim(\text{Im } T)$ ile T 'nin singüler olmaması denk olduğundan, T singülerdir.

Demek ki **her** $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü singülerdir; başka bir ifadeyle singüler olmayan bir $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü **yoktur**. ■

⚠ Genel kural

$\dim V > \dim U$ ise V 'den U 'ya giden **her** lineer dönüşüm singülerdir: boyut teoremi gereği böyle bir dönüşümün Nullity'si en az $\dim V - \dim U > 0$ olur, yani çekirdek yalnız sıfırdan ibaret kalmaz. Dar bir uzaya sığmak için mutlaka bilgi kaybetmek gerekir.

24.5 Alıştırma

Alıştırma 24.1 (Singülerlik Üzerine).

1. V ve U , K üzerinde iki vektör uzayı; $T : V \rightarrow U$ lineer bir dönüşüm ve $k \in K \setminus \{0_K\}$ olsun. T 'nin singüler olması için gerek ve yeter koşulun kT dönüşümünün singüler olması olduğunu gösteriniz. (Burada kT , her $v \in V$ için $(kT)(v) = kT(v)$ ile tanımlıdır.)
2. $F : V \rightarrow W$ lineer ve $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olsun. $v_1, \dots, v_n \in V$ lineer bağımsız ise $F(v_1), \dots, F(v_n)$ vektörlerinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.
3. $F : V \rightarrow W$ üzerine bir izomorfizm olsun. $\{v_1, \dots, v_n\}$, V 'nin bir tabanı ise $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ kümesinin W 'nin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1. Gereklik. T singüler olsun. O hâlde $T(v) = 0_U$ olacak bir $v \in V \setminus \{0_V\}$ vardır. Bu v için

$$(kT)(v) = kT(v) = k0_U = 0_U$$

olur; yani kT de sıfırdan farklı bir vektörü sıfıra götürür ve singülerdir.

Yeterlik. kT singüler olsun; $(kT)(w) = 0_U$ olacak bir $w \in V \setminus \{0_V\}$ vardır. T lineer olduğundan

$$T(kw) = kT(w) = (kT)(w) = 0_U$$

$k \neq 0_K$ ve $w \neq 0_V$ olduğundan $kw \neq 0_V$ 'dir, yani $kw \in V \setminus \{0_V\}$ 'dir. Demek ki T sıfırdan farklı bir vektörü sıfıra götürüyor: T singülerdir.

2. $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olması F 'nin singüler olmaması demektir; iddia doğrudan **bağımsızlığın ileri taşınması** teoremidir.

3. F bire bir olduğundan singüler değildir; (2) gereği $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ lineer bağımsızdır. Ayrıca $V = L(v_1, \dots, v_n)$ olduğundan **doğuran kümenin görüntüsü** gereği

$$\text{Im } F = L(F(v_1), \dots, F(v_n))$$

F örten olduğundan $\text{Im } F = W$ 'dir, yani bu vektörler W 'yi doğurur. Hem doğuran hem lineer bağımsız olduklarından $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$, W 'nin bir tabanıdır. ■

25. Dönüşümler ve Denklem Sistemleri

Bir lineer denklem sistemi, aslında bir lineer dönüşümün belirli bir değeri aldığı noktaları sormaktan başka bir şey değildir. Bu bakış açısı, sistemler hakkında daha önce ölçütlerle kurduğumuz sonuçları tek bir teoremden — boyut teoreminden — türetmeyi sağlar.

25.1 Sistemin Dönüşüm Dili

K komutatif bir cisim olmak üzere, m lineer denklemlili ve n bilinmeyenli

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

sistemini ele alalım. [Matris gösterimiyle](#) bu sistem

$$AX = B$$

biçiminde yazılır; burada $A = (a_{ij})$ katsayılar matrisi (m, n) tipinde, $X = (x_1, \dots, x_n)^t$ bilinmeyenler matrisi $(n, 1)$ tipinde ve $B = (b_1, \dots, b_m)^t$ sabitler matrisi $(m, 1)$ tipindedir. Şimdi bu matrisin belirlediği lineer dönüşümü düşünelim:

$$T : K^n \rightarrow K^m, \quad v \mapsto A \cdot v$$

Bu dilde sistemin çözüm kümesi

$$\{ X \in K^n : T(X) = AX = B \}$$

kümesidir; yani B vektörünün T altındaki ters görüntüsüdür. İlgili homojen sistemin çözüm uzayı ise

$$W = \{ X \in K^n : T(X) = AX = O \} = \text{Ker } T$$

olur.

i Not

İki gözlem sistemin bütün yapısını verir: **çözüm uzayı bir çekirdektir** ve **görüntü, A 'nın sütun uzayıdır**. Birincisi çözümlerin sayısını, ikincisi sistemin çözülebilirliğini yönetir.

25.2 Çözüm Uzayının Boyutu

Teorem 25.1 (Homojen Sistemin Çözüm Uzayının Boyutu). $AX = O$ homojen lineer denklem sisteminin W çözüm uzayının boyutu

$$\dim W = n - r$$

dir; burada n bilinmeyenlerin sayısı, $r = \text{rank } (A)$ 'dır.

İspat.

$T : K^n \rightarrow K^m, v \mapsto A \cdot v$ lineer dönüşümünü alalım. Yukarıda gördüğümüz gibi

$$W = \text{Ker } T$$

dir. K^n sonlu boyutlu olduğundan [boyut teoremi](#) uygulanabilir:

$$\dim K^n = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T)$$

Buradan

$$\dim(\text{Ker } T) = \dim K^n - \dim(\text{Im } T)$$

elde edilir. Sağ taraftaki iki terimi de tanıyoruz:

- $\dim K^n = n$, yani sistemdeki bilinmeyenlerin sayısı;
- $\text{Im } T$, A 'nın sütun uzayı olduğundan $\dim(\text{Im } T) = \text{rank } (A) = r$ 'dir.

Demek ki

$$\dim W = \dim(\text{Ker } T) = n - r$$

■

💡 Kapanan halka

Bu formülü [rank bölümünde](#) merdiven şeklinden okuyarak kullanmıştık: serbest değişken sayısı $n - r$ 'dir. Yukarıdaki ispat, aynı formülün merdiven hesabından bağımsız, tamamen yapısal bir nedeni olduğunu gösteriyor.

25.3 Kare Sistemler

Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğunda ($m = n$) T bir operatör, yani K^n 'i kendi içine götüren bir lineer dönüşüm olur. Bu durumda homojen sistemin tek bir sorusu bütün sistemin kaderini belirler.

Örnek 25.1 (Kare Sistemde Homojen Sistemin Rolü). K üzerinde n denklemlili ve n bilinmeyenli bir $AX = B$ sisteminde, ilgili $AX = O$ homojen sisteminin yalnız sıfır çözümü olsun. Sistemin çözüm sayısı hakkında ne söylenebilir?

Çözüm.

$T : K^n \rightarrow K^n, v \mapsto A \cdot v$ dönüşümünü alalım; bu bir lineer operatördür. Varsayım gereği

$$\text{Ker } T = \{ X \in K^n : AX = O \} = \{0_{K^n}\}$$

olduğundan T [singüler değildir](#), dolayısıyla bire birdir. Ayrıca boyut teoreminden

$$\dim(\text{Im } T) = \dim K^n - \dim(\text{Ker } T) = n - 0 = n$$

olup $\text{Im } T$, K^n 'in n boyutlu bir alt uzayı, yani K^n 'in kendisidir: T örtendir.

T hem bire bir hem örten olduğundan, her $B \in K^n$ için $T(X) = AX = B$ olacak **bir ve yalnız bir** $X \in K^n$ vardır. Demek ki sistem hangi sabitler matrisiyle kurulursa kurulsun tek çözümlüdür.

■

Bu gözlemin tam karşılığını, tersinir operatörleri tanımladıktan sonra [bir teorem olarak](#) yazacağız.

25.4 Alıştırma

Alıştırma 25.1 (Dönüşüm Diliyle Sistemler).

1. A , $(3, 5)$ tipinde bir $\mathbb{R}$ -matris ve $\text{rank } (A) = 3$ olsun. $AX = O$ sisteminin çözüm uzayının boyutunu bulunuz.
2. $AX = O$ homojen sisteminde denklem sayısı bilinmeyen sayısından küçükse ($m < n$), sistemin sıfırdan farklı bir çözümü olduğunu gösteriniz.
3. A , (m, n) tipinde bir K -matris olsun. $AX = B$ sisteminin her $B \in K^m$ için çözülebilir olması ile $\text{rank } (A) = m$ olmasının denk olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1. Bilinmeyen sayısı $n = 5$, rank $r = 3$ 'tür. Boyut formülünden

$$\dim W = n - r = 5 - 3 = 2$$

2. $T : K^n \rightarrow K^m, v \mapsto A \cdot v$ dönüşümünü alalım. $\text{Im } T, K^m$ 'in bir alt uzayı olduğundan

$$r = \dim(\text{Im } T) \leq m < n$$

Boyut teoreminden

$$\dim(\text{Ker } T) = n - r > 0$$

Boyutu sıfırdan büyük bir uzay yalnız sıfır vektöründen ibaret olamaz; dolayısıyla $\text{Ker } T$ sıfırdan farklı bir vektör içerir. Bu vektör, sistemin sıfırdan farklı bir çözümüdür.

3. $T : K^n \rightarrow K^m, v \mapsto A \cdot v$ olsun. Sistem her $B \in K^m$ için çözülebilirdir ancak ve ancak her B bir $T(X)$ değeri olarak yazılabilirse, yani

$$\text{Im } T = K^m$$

ise. $\text{Im } T, K^m$ 'in bir alt uzayı olduğundan bu eşitlik

$$\dim(\text{Im } T) = \dim K^m = m$$

ile denktir. $\text{Im } T, A$ 'nın sütun uzayı olduğundan $\dim(\text{Im } T) = \text{rank } (A)$ 'dır; koşul $\text{rank } (A) = m$ 'e indirgenir.

■

26. Dönüşümlerin Uzayı

Şimdiye kadar lineer dönüşümleri tek tek inceledik. Bu bölümde onları bir arada, tek bir kümenin elemanları olarak ele alıyoruz: iki lineer dönüşüm toplanabilir, bir dönüşüm skalerle çarpılabilir ve bu işlemler altında bütün lineer dönüşümler kümesi kendisi de bir vektör uzayı olur.

26.1 İki İşlem

Teorem 26.1 (Toplam ve Skalerle Çarpım Lineerdir). V ve U , aynı bir K komutatif cismi üzerinde iki vektör uzayı; $F : V \rightarrow U$ ve $G : V \rightarrow U$ iki lineer dönüşüm ve $k \in K$ olsun. Bu durumda

$$F + G : V \rightarrow U, \quad v \mapsto (F + G)(v) = F(v) + G(v)$$

$$kF : V \rightarrow U, \quad v \mapsto (kF)(v) = k F(v)$$

biçiminde tanımlanan dönüşümlerin ikisi de lineerdir.

İspat.

$F + G$ lineerdir. Her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$\begin{aligned} (F + G)(av + bw) &= F(av + bw) + G(av + bw) \\ &= aF(v) + bF(w) + aG(v) + bG(w) \\ &= a (F(v) + G(v)) + b (F(w) + G(w)) \\ &= a (F + G)(v) + b (F + G)(w) \end{aligned}$$

İkinci satırda F ile G 'nin lineerliği kullanıldı.

kF lineerdir. Her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$\begin{aligned} (kF)(av + bw) &= k F(av + bw) = k (aF(v) + bF(w)) \\ &= a kF(v) + b kF(w) = a (kF)(v) + b (kF)(w) \end{aligned}$$

■

26.2 Hom(V, U)

Teorem 26.2 (Lineer Dönüşümlerin Vektör Uzayı). V ve U , bir K komutatif cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Bu durumda V 'den U 'ya tanımlanmış tüm lineer dönüşümlerin oluşturduğu küme, yani

$$\{ F : V \rightarrow U : F \text{ lineer} \}$$

yukarıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı $\text{Hom}(V, U)$ ile gösterilir.

i Not

“Hom” kısaltması *homomorfi* kelimesinden gelir; lineer dönüşümlerin bir başka adı vektör uzayı homomorfisidir.

Uzayın sıfırı ve ters elemanı doğrudan okunur.

Örnek 26.1 (Hom(V, U)'nın Sıfırı ve Ters Elemanı). $\text{Hom}(V, U)$ vektör uzayının sıfırını ve herhangi bir $F \in \text{Hom}(V, U)$ elemanının toplama işlemine göre tersini bulunuz.

Çözüm.**Sıfır.** Sıfır lineer dönüşümü

$$0 : V \rightarrow U, \quad v \mapsto 0_U$$

uzayın sıfırıdır. Gerçekten her $F \in \text{Hom}(V, U)$ ve her $v \in V$ için

$$(F + 0)(v) = F(v) + 0(v) = F(v) + 0_U = F(v)$$

$$(0 + F)(v) = 0(v) + F(v) = 0_U + F(v) = F(v)$$

olduğundan $F + 0 = 0 + F = F$ 'dir.**Ters eleman.** $-F := (-1)F$, yani her $v \in V$ için $(-F)(v) = -F(v)$ olarak tanımlansın. Bir lineer dönüşümün skaler katı lineer olduğundan $-F \in \text{Hom}(V, U)$ 'dur ve her $v \in V$ için

$$(-F + F)(v) = -F(v) + F(v) = 0_U = 0(v)$$

$$(F + (-F))(v) = F(v) - F(v) = 0_U = 0(v)$$

olduğundan

$$-F + F = F + (-F) = 0$$

dır; yani $-F$, F 'nin toplama işlemine göre tersidir.

■

 Lineer kombinezonların değeri $F_1, \dots, F_n \in \text{Hom}(V, U)$, $a_1, \dots, a_n \in K$ ve $v \in V$ için

$$(a_1 F_1 + \dots + a_n F_n)(v) = a_1 F_1(v) + \dots + a_n F_n(v)$$

olur. Yani dönüşümler arasındaki bir lineer kombinezonun bir noktadaki değeri, o noktadaki değerlerin aynı lineer kombinezonudur. Bağımsızlık hesaplarında hep bu kullanılır.

26.3 Boyut

Teorem 26.3 (Hom(V,U)'nun Boyutu). V ve U sonlu boyutlu, $\dim V = m$ ve $\dim U = n$ olsun. Bu durumda $\text{Hom}(V, U)$ de sonlu boyutludur ve

$$\dim \text{Hom}(V, U) = m \cdot n$$

İspat. $\{v_1, \dots, v_m\}$, V 'nin bir tabanı ve $\{u_1, \dots, u_n\}$, U 'nin bir tabanı olsun. *Dönüşümün tabanda belirlenmesi* teoremi gereği, her $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, n$ için

$$F_{ij}(v_i) = u_j \quad \text{ve} \quad F_{ij}(v_k) = 0_U \quad (k \neq i)$$

olacak biçimde bir tek $F_{ij} : V \rightarrow U$ lineer dönüşümü vardır. Bu dönüşümlerin sayısı $m \cdot n$ 'dir. Şimdi

$$\{F_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}$$

kümesinin $\text{Hom}(V, U)$ 'nin bir tabanı olduğunu gösterelim.**(i) Kümemiz $\text{Hom}(V, U)$ 'yu doğurur.** $F \in \text{Hom}(V, U)$ olsun ve

$$F(v_k) =: w_k \quad (k = 1, \dots, m)$$

diyelim. $w_k \in U$ ve $\{u_1, \dots, u_n\}$, U 'nin tabanı olduğundan uygun $a_{k1}, \dots, a_{kn} \in K$ için

$$w_k = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n \quad (k = 1, \dots, m)$$

yazılır. Şimdi

$$G = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij} \in \text{Hom}(V, U)$$

dönüşümünü alalım. $k \neq i$ için $F_{ij}(v_k) = 0_U$ ve $F_{kj}(v_k) = u_j$ olduğundan, toplamda yalnız $i = k$ terimleri sağ kalır:

$$\begin{aligned} G(v_k) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij}(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{kj}F_{kj}(v_k) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{kj}u_j = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n = w_k \end{aligned}$$

Demek ki F ile G lineer dönüşümleri V 'nin bir tabanının her elemanında aynı değeri alıyor:

$$F(v_k) = w_k = G(v_k) \quad (k = 1, \dots, m)$$

Tabanda belirlenme teoreminin teklik kısmı gereği $F = G$ 'dir. Böylece her F , F_{ij} 'lerin bir lineer kombinasyonu olarak yazıldı.

(ii) **Kümemiz lineer bağımsızdır.** $a_{ij} \in K$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij} = 0$$

olsun; burada sağ taraf sıfır lineer dönüşümüdür. Her $k = 1, \dots, m$ için bu eşitliğin v_k 'daki değerine bakalım:

$$0_U = 0(v_k) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}F_{ij}(v_k) = \sum_{j=1}^n a_{kj}u_j$$

yani

$$a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \cdots + a_{kn}u_n = 0_U$$

$\{u_1, \dots, u_n\}$, U 'nun bir tabanı, dolayısıyla lineer bağımsız olduğundan

$$a_{k1} = a_{k2} = \cdots = a_{kn} = 0_K \quad (k = 1, \dots, m)$$

Demek ki bütün a_{ij} 'ler sıfırdır; küme lineer bağımsızdır.

(i) ve (ii)'den $\{F_{ij}\}$ kümesi $\text{Hom}(V, U)$ 'nin bir tabanıdır. Eleman sayısı $m \cdot n$ olduğundan

$$\dim \text{Hom}(V, U) = m \cdot n$$

■

26.4 Çözümlü Örnekler

Örnek 26.2 (Dönüşümler Arasında İşlemler). $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ve $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümleri

$$F(x, y, z) = (2x, y + z), \quad G(x, y, z) = (x - z, y)$$

biçiminde tanımlanıyor. $F + G$, $3F$ ve $2F - 5G$ dönüşümlerini bulunuz.

Çözüm.

Her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için değerleri doğrudan hesaplayalım.

$$(F + G)(x, y, z) = (2x, y + z) + (x - z, y) = (3x - z, 2y + z)$$

$$(3F)(x, y, z) = 3(2x, y + z) = (6x, 3y + 3z)$$

$$\begin{aligned} (2F - 5G)(x, y, z) &= 2(2x, y + z) - 5(x - z, y) \\ &= (4x, 2y + 2z) + (-5x + 5z, -5y) \\ &= (-x + 5z, -3y + 2z) \end{aligned}$$

■

Örnek 26.3 (Üç Dönüşümün Lineer Bağımsızlığı). $F, G, H \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ dönüşümleri

$$F(x, y, z) = (x + y + z, x + y), \quad G(x, y, z) = (2x + z, x + y)$$

$$H(x, y, z) = (2y, x)$$

biçiminde tanımlanıyor. Bu üç vektörün $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$aF + bG + cH = 0$$

olsun; burada $0, \mathbb{R}^3$ 'ten $\mathbb{R}^2$ 'ye sıfır lineer dönüşümüdür. Bu bir dönüşüm eşitliği olduğundan, her noktada sağlanmalıdır; uygun noktalar seçelim.

(1, 0, 0) noktası.

$$\begin{aligned} (aF + bG + cH)(1, 0, 0) &= aF(1, 0, 0) + bG(1, 0, 0) + cH(1, 0, 0) \\ &= a(1, 1) + b(2, 1) + c(0, 1) = (a + 2b, a + b + c) \end{aligned}$$

Bu $(0, 0)$ 'a eşit olmalı:

$$a + 2b = 0 \quad \text{ve} \quad a + b + c = 0 \quad (1)$$

(0, 1, 0) noktası.

$$\begin{aligned} (aF + bG + cH)(0, 1, 0) &= aF(0, 1, 0) + bG(0, 1, 0) + cH(0, 1, 0) \\ &= a(1, 1) + b(0, 1) + c(2, 0) = (a + 2c, a + b) \end{aligned}$$

Bu da $(0, 0)$ 'a eşit olmalı:

$$a + 2c = 0 \quad \text{ve} \quad a + b = 0 \quad (2)$$

(1)'in birinci denklemi ile (2)'nin ikinci denklemini birlikte alalım: $a + 2b = 0$ ve $a + b = 0$ 'dan $b = 0$, dolayısıyla $a = 0$ bulunur. (2)'nin birinci denkleminde $c = 0$ çıkar.

Demek ki

$$aF + bG + cH = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

olup F, G, H vektörleri $\mathbb{R}$ üzerinde lineer bağımsızdır.

■

i Not

Bu örnekte $\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2) = 3 \cdot 2 = 6$ 'dır; bulduğumuz üç bağımsız dönüşüm, altı boyutlu bir uzayın üç boyutlu bir alt uzayını gerer.

26.5 Alıştırma

Alıştırma 26.1 (Dönüşüm Uzayı Üzerine).

1. $T, F : V \rightarrow W$ lineer dönüşümler olsun. $T + F$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.
2. $T : V \rightarrow W$ lineer ve $a \in K$ olsun. aT dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.
3. $\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$ ve $\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ boyutlarını bulunuz.

Çözüm.

1. Her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$\begin{aligned}
 (T + F)(av + bw) &= T(av + bw) + F(av + bw) \\
 &= aT(v) + bT(w) + aF(v) + bF(w) \\
 &= a(T(v) + F(v)) + b(T(w) + F(w)) \\
 &= a(T + F)(v) + b(T + F)(w)
 \end{aligned}$$

olduğundan $T + F$ lineerdir.

2. Her $b, c \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$\begin{aligned}
 (aT)(bv + cw) &= aT(bv + cw) = a(bT(v) + cT(w)) \\
 &= b aT(v) + c aT(w) = b(aT)(v) + c(aT)(w)
 \end{aligned}$$

olduğundan aT lineerdir.

3. Boyut formülünden

$$\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3) = 4 \cdot 3 = 12$$

$$\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = n \cdot 1 = n$$

İkincisi, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki lineer fonksiyonların uzayının yine n boyutlu olduğunu söyler.

■

27. Bileşke ve Operatörler Cebri

Lineer dönüşümler toplanıp skalerle çarpılabildiği gibi, uygun oldukları yerde birbirleriyle bileşke de yapılabilir. Bir vektör uzayını kendi içine götüren dönüşümler için bu bileşke her zaman tanımlıdır ve uzaya bir çarpma işlemi kazandırır. Ortaya çıkan yapıya cebir denir.

27.1 Bileşke

Teorem 27.1 (Bileşke Lineerdir). V, U ve W , aynı bir K komutatif cismi üzerinde üç vektör uzayı; $F : V \rightarrow U$ ve $G : U \rightarrow W$ iki lineer dönüşüm olsun. Bu durumda bileşke fonksiyon

$$G \circ F : V \rightarrow W, \quad v \mapsto (G \circ F)(v) = G (F(v))$$

bir lineer dönüşümdür.

İspat.

Her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için

$$\begin{aligned} (G \circ F)(av + bw) &= G (F(av + bw)) = G (aF(v) + bF(w)) \\ &= a G (F(v)) + b G (F(w)) \\ &= a (G \circ F)(v) + b (G \circ F)(w) \end{aligned}$$

İlk satırda F 'nin, ikinci satırda G 'nin lineerliği kullanıldı.

■

Teorem 27.2 (Bileşkenin İşlemlerle Uyumu). V, U, W üç vektör uzayı; $F, F' : V \rightarrow U$ ve $G, G' : U \rightarrow W$ lineer dönüşümler ve $k \in K$ olsun. Bu durumda

- i. $G \circ (F + F') = G \circ F + G \circ F'$
- ii. $(G + G') \circ F = G \circ F + G' \circ F$
- iii. $k(G \circ F) = (kG) \circ F = G \circ (kF)$

İspat.

Bütün eşitlikler dönüşüm eşitliği olduğundan her $v \in V$ için değerleri karşılaştırmak yeterlidir.

(i)

$$\begin{aligned} (G \circ (F + F'))(v) &= G ((F + F')(v)) \\ &= G (F(v) + F'(v)) \\ &= G (F(v)) + G (F'(v)) \\ &= (G \circ F)(v) + (G \circ F')(v) \\ &= (G \circ F + G \circ F')(v) \end{aligned}$$

G 'nin lineerliği, $G (F(v) + F'(v))$ değerini iki terime ayırırken kullanıldı.

(ii)

$$\begin{aligned} ((G + G') \circ F)(v) &= (G + G') (F(v)) \\ &= G (F(v)) + G' (F(v)) \\ &= (G \circ F)(v) + (G' \circ F)(v) \\ &= (G \circ F + G' \circ F)(v) \end{aligned}$$

(iii) Önce birinci eşitlik:

$$\begin{aligned} (k(G \circ F))(v) &= k(G \circ F)(v) = kG(F(v)) \\ &= (kG)(F(v)) = ((kG) \circ F)(v) \end{aligned}$$

Sonra ikincisi; burada G 'nin lineerliği kullanılır:

$$\begin{aligned} (k(G \circ F))(v) &= kG(F(v)) = G(kF(v)) \\ &= G((kF)(v)) = (G \circ (kF))(v) \end{aligned}$$

■

27.2 Lineer Operatörler

Tanım 27.1 (Lineer Operatör). V , bir K komutatif cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V 'yi kendi içine götüren bir

$$T : V \rightarrow V$$

lineer dönüşümüne **V üzerinde bir lineer operatör** denir. V 'den V 'ye tanımlanmış tüm lineer dönüşümlerin oluşturduğu vektör uzayı, yani $\text{Hom}(V, V)$,

$$A(V) := \text{Hom}(V, V)$$

ile gösterilir.

Dönüşümlerin uzayı bölümündeki iki teoremden hemen şunlar çıkar: $A(V)$, K üzerinde bir vektör uzayıdır ve V n boyutlu ise

$$\dim A(V) = n \cdot n = n^2$$

Ayrıca $A(V)$ 'nin iki elemanının bileşkesi yine $A(V)$ 'dedir. Bu, $A(V)$ üzerinde bir **çarpma** işlemi verir:

$$ST := S \circ T \in A(V) \quad (S, T \in A(V))$$

27.3 Cebir Yapısı

Tanım 27.2 (Cebir). $\mathcal{A}$, bir K komutatif cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\mathcal{A}$ 'da bir “ $\cdot$ ” (çarpma) işlemi tanımlanmış olsun. Eğer her $F, G, H \in \mathcal{A}$ ve her $k \in K$ için

- i. $F(G + H) = FG + FH$
- ii. $(G + H)F = GF + HF$
- iii. $k(GF) = (kG)F = G(kF)$

sağlanıyorsa $\mathcal{A}$ 'ya **K üzerinde bir cebir** denir.

Tanım 27.3 (Asosyatif Cebir). K üzerinde bir $\mathcal{A}$ cebri, ayrıca her $F, G, H \in \mathcal{A}$ için

$$(FG)H = F(GH)$$

koşulunu da sağlıyorsa $\mathcal{A}$ 'ya bir **asosyatif cebir** denir.

Teorem 27.3 ($A(V)$ Bir Asosyatif Cebirdir). V, K üzerinde bir vektör uzayı olsun. $A(V)$, $ST = S \circ T$ çarpma işlemine göre K üzerinde bir asosyatif cebirdir. $A(V)$ 'ye **V üzerindeki lineer operatörler cebri** denir.

İspat.

Cebir tanımının üç koşulu, bileşkenin işlemlerle uyumunu veren teoremin üç maddesinin ta kendisidir.

Geriye asosyatiflik kalıyor. $F, G, H \in A(V)$ olsun; $F, G, H : V \rightarrow V$ birer lineer dönüşümdür ve dolaşısıyla $(F \circ G) \circ H$ ile $F \circ (G \circ H)$ de V 'den V 'ye lineer dönüşümlerdir. Her $v \in V$ için

$$\begin{aligned} ((FG)H)(v) &= ((F \circ G) \circ H)(v) = (F \circ G)(H(v)) = F(G(H(v))) \\ (F(GH))(v) &= (F \circ (G \circ H))(v) = F((G \circ H)(v)) = F(G(H(v))) \end{aligned}$$

İki sağ taraf aynı olduğundan her $v \in V$ için değerler eşittir, yani

$$(FG)H = F(GH)$$

Öyleyse $A(V)$ bir asosyatif cebirdir.

■

⚠ Çarpım komutatif değildir

$A(V)$ bir cebirdir ama komutatif bir cebir değildir: genel olarak $ST \neq TS$ 'dir. Dahası çarpımın sıfır bölenleri de vardır – $TS = 0$ iken $ST \neq 0$ olabilir. Aşağıdaki örnekler her ikisini de gösteriyor.

27.4 Birim, Kuvvetler ve Polinomlar

V üzerindeki identik lineer dönüşüm

$$I : V \rightarrow V, \quad v \mapsto v$$

$A(V)$ 'nin elemanıdır ve her $T \in A(V)$ için

$$TI = IT = T$$

sağlanır; yani I , çarpmanın birim elemanıdır.

Bir T lineer operatörünün **kuvvetleri** şöyle tanımlanır:

$$T^1 = T, \quad T^2 = TT = T \circ T, \quad T^3 = T \circ T \circ T, \quad \dots$$

genel olarak n bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{n \text{ tane}}$$

Tanım 27.4 (Operatör Polinomu). $p(x)$, K üzerinde herhangi bir polinom olsun:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, a_i \in K$$

Bu durumda V üzerindeki $p(T)$ lineer operatörü

$$p(T) := a_0I + a_1T + a_2T^2 + \dots + a_nT^n$$

olarak tanımlanır.

Tanım 27.5 (Polinomun Kökü). T , V üzerinde bir lineer operatör ve $p(x)$, K üzerinde bir polinom olsun. Eğer $p(T) = 0$ ise T 'ye $p(x)$ polinomunun bir **kökü** (sıfırı) denir; buradaki 0 , V üzerindeki sıfır operatörüdür.

i Not

Sabit terimin a_0 değil a_0I olarak yazıldığına dikkat edin: a_0 bir skaler, $p(T)$ ise bir operatördür. Skalere operatöre çeviren şey birim operatördür.

27.5 Çözümlü Örnekler

Örnek 27.1 (Bir Polinomun Kökü Olan Operatör). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operatörü $T(x, y, z) = (0, x, y)$ biçiminde tanımlanıyor. $T + I$ ve T^3 operatörlerini bulunuz.

Çözüm.

Her $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned}(T + I)(a, b, c) &= T(a, b, c) + I(a, b, c) \\ &= (0, a, b) + (a, b, c) = (a, a + b, b + c)\end{aligned}$$

Kuvvetleri sırayla hesaplayalım:

$$T^2(a, b, c) = T(T(a, b, c)) = T(0, a, b) = (0, 0, a)$$

$$T^3(a, b, c) = T(T^2(a, b, c)) = T(0, 0, a) = (0, 0, 0)$$

Demek ki T^3 , her vektörü sıfıra götüren operatördür:

$$T^3 = 0$$

Başka bir ifadeyle T , $p(x) = x^3$ polinomunun bir köküdür.

■

Örnek 27.2 (Çarpımın Komutatif Olmaması). $\mathbb{R}^2$ üzerinde $S(x, y) = (y, x)$ ve $T(x, y) = (0, x)$ lineer operatörleri veriliyor. $S + T$, $2S - 3T$, ST , TS , S^2 ve T^2 operatörlerini bulunuz.

Çözüm.

Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için:

$$(S + T)(x, y) = (y, x) + (0, x) = (y, 2x)$$

$$(2S - 3T)(x, y) = 2(y, x) - 3(0, x) = (2y, -x)$$

$$(ST)(x, y) = S(T(x, y)) = S(0, x) = (x, 0)$$

$$(TS)(x, y) = T(S(x, y)) = T(y, x) = (0, y)$$

Görüldüğü gibi $ST \neq TS$ 'dir.

$$S^2(x, y) = S(S(x, y)) = S(y, x) = (x, y) \Rightarrow S^2 = I$$

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(0, x) = (0, 0) \Rightarrow T^2 = 0$$

■

Örnek 27.3 (Operatör Çarpımında Sıfır Bölenler). $\mathbb{R}^2$ üzerinde $S(x, y) = (0, x)$ ve $T(x, y) = (x, 0)$ operatörleri veriliyor. $TS = 0$ olduğunu, buna karşılık $ST \neq 0$ olduğunu ve $T^2 = T$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(TS)(x, y) = T(S(x, y)) = T(0, x) = (0, 0)$$

olduğundan $TS = 0$ 'dır; burada 0 , $\mathbb{R}^2$ üzerindeki sıfır operatörüdür.

Öte yandan

$$(ST)(x, y) = S(T(x, y)) = S(x, 0) = (0, x)$$

olup $x \neq 0$ için $(0, x) \neq (0, 0)$ olacağından $ST \neq 0$ 'dır.

Son olarak

$$T^2(x, y) = T (T(x, y)) = T(x, 0) = (x, 0) = T(x, y)$$

olduğundan $T^2 = T$ 'dir.

■

💡 Ne öğrendik?

İki sıfırdan farklı operatörün çarpımı sıfır olabiliyor ($TS = 0$), üstelik çarpanların sırası değişince sonuç değişebiliyor ($ST \neq 0$). $A(V)$, sayılarla çalışmaya alışkın sezginin geçerli olmadığı bir cebirdir; buna karşılık kare matrislerin cebri de tam olarak böyledir. Bu benzerlik tesadüf değil — [matris gösterimi bölümünde](#) ikisinin aynı yapı olduğunu göreceğiz.

27.6 Alıştırma

Alıştırma 27.1 (Operatör Cebri Üzerine).

1. $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (2x, y + z)$ ve $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x, y) = (y, x)$ olsun. $G \circ F$ dönüşümünü bulunuz; $F \circ G$ tanımlı mıdır?
2. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (0, x)$ olsun. T 'nin kökü olduğu bir polinom bulunuz.
3. $S, T \in A(V)$ olsun. $(S + T)^2 = S^2 + ST + TS + T^2$ olduğunu gösteriniz. Bu ifade neden $S^2 + 2ST + T^2$ değildir?

Çözüm.

1. $G \circ F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tanımlıdır ve her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$(G \circ F)(x, y, z) = G (F(x, y, z)) = G(2x, y + z) = (y + z, 2x)$$

$F \circ G$ ise **tanımlı değildir**: G 'nin görüntü kümesi $\mathbb{R}^2$, F 'nin tanım kümesi ise $\mathbb{R}^3$ 'tür, dolayısıyla F bir $G(x, y)$ değerine uygulanamaz.

2. Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$T^2(x, y) = T(0, x) = (0, 0)$$

olduğundan $T^2 = 0$ 'dır. Demek ki T , $p(x) = x^2$ polinomunun bir köküdür.

3. Cebir aksiyomlarındaki dağılma özelliklerini kullanalım:

$$\begin{aligned} (S + T)^2 &= (S + T)(S + T) \\ &= S(S + T) + T(S + T) && \text{(sağdan dağılma)} \\ &= SS + ST + TS + TT && \text{(soldan dağılma)} \\ &= S^2 + ST + TS + T^2 \end{aligned}$$

Ortadaki iki terimi $2ST$ olarak birleştirebilmek için $ST = TS$ olması gerekirdi; oysa operatör çarpımı genel olarak komutatif değildir. Yukarıdaki örnekte $S(x, y) = (y, x)$ ve $T(x, y) = (0, x)$ için $ST(x, y) = (x, 0)$ iken $TS(x, y) = (0, y)$ bulmuştuk; bu iki operatör eşit olmadığından açılım dört terimli kalır.

■

28. Tersinir Operatörler

Bir lineer operatörün tersinin olması, uyguladığı dönüşümün geri alınabilmesi demektir. Sonlu boyutlu uzaylarda bunun tek bir engeli vardır: sıfırdan farklı bir vektörü sıfıra ezmek. Bu bölüm o engelin gerçekten tek engel olduğunu gösteriyor.

28.1 Tanım

Tanım 28.1 (Tersinir Operatör). $T : V \rightarrow V$ bir lineer operatör, yani $T \in A(V)$ olsun. Eğer

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

olacak şekilde bir $T^{-1} \in A(V)$ varsa, T^{-1} lineer operatörüne T 'nin **tersi** denir. Ters olan bir $T \in A(V)$ operatörüne de **tersinir operatör** denir.

28.2 Tersinirlik Ölçütü

Teorem 28.1 (Tersinirlik Ölçütü). V , bir K komutatif cismi üzerinde **sonlu boyutlu** bir vektör uzayı ve $T \in A(V)$ olsun. Bu durumda T 'nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul T 'nin **singüler olmamasıdır**.

İspat.

Gereklik. T tersinir olsun. Bir fonksiyonun tersinin olması için gerek ve yeter koşul bire bir ve örten olmasıdır; özel olarak T bire birdir. **Singüler olmama ölçütü** gereği $\text{Ker } T = \{0_V\}$, yani T singüler değildir.

Yeterlik. T singüler olmasın. O hâlde $\text{Ker } T = \{0_V\}$ 'dir ve T bire birdir. V sonlu boyutlu olduğundan **boyut teoremi** uygulanabilir:

$$\dim V = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T) = 0 + \dim(\text{Im } T) = \dim(\text{Im } T)$$

$\text{Im } T$, V 'nin bir alt uzayıdır ve boyutu V 'nin boyutuna eşittir; dolayısıyla

$$\text{Im } T = V$$

yani T örtendir. T hem bire bir hem örten olduğundan tersi vardır; ters fonksiyonun da lineer olduğunu **daha önce** görmüştük, yani $T^{-1} \in A(V)$ 'dir.

■

Teorem 28.2 (Sonlu Boyutta Üç Denk Koşul). V sonlu boyutlu ve $T \in A(V)$ olsun. Aşağıdaki üç koşul birbirine denktir:

- i. T tersinirdir;
- ii. T bire birdir;
- iii. T örtendir.

İspat.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii). Tersinirlik ölçütü gereği

$$T \text{ tersinirdir} \Leftrightarrow T \text{ singüler değildir}$$

$$\Leftrightarrow \text{Ker } T = \{0_V\} \Leftrightarrow T \text{ bire birdir}$$

Son denklik singüler olmama ölçütüdür.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii). Boyut teoreminden

$$\dim V = \dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T) \quad (*)$$

$\text{Im } T, V$ 'nin bir alt uzayı olduğundan

$$T \text{ örtendir} \Leftrightarrow \text{Im } T = V \Leftrightarrow \dim(\text{Im } T) = \dim V$$

(*) gereği bu son eşitlik $\dim(\text{Ker } T) = 0$, yani $\text{Ker } T = \{0_V\}$ ile denktir. O da T 'nin singüler olmaması, dolayısıyla tersinir olmasıdır.

■

⚠ Sonlu boyut şartı vazgeçilmezdir

Bu denkliklerin hepsi V 'nin sonlu boyutlu olmasına dayanır. Sonsuz boyutlu uzaylarda bire bir olup örten olmayan operatörler vardır; örneğin bütün reel dizilerin uzayında $(a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$ kaydırma operatörü bire birdir ama örten değildir.

28.3 Ters Operatörün Hesabı

Ters operatörü bulmak bir denklem sistemi çözmektir: $T(v) = w$ eşitliğinde v 'yi w cinsinden yazmak yeterlidir.

Örnek 28.1 (Düzlemde Bir Ters Operatör). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörü $T(x, y) = (y, 2x - y)$ biçiminde tanımlanıyor. T 'nin tersinir olduğunu gösteriniz ve T^{-1} 'i bulunuz.

Çözüm.

Tersinirlik. $T(x, y) = (0, 0)$ koşulu

$$y = 0 \quad \text{ve} \quad 2x - y = 0$$

verir; buradan $y = 0$ ve $x = 0$ bulunur. Demek ki

$$\text{Ker } T = \{(0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

olup T singüler değildir; tersinirlik ölçütü gereği T 'nin tersi vardır.

Tersin hesabı. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$T(x, y) = (s, t) \Leftrightarrow T^{-1}(s, t) = (x, y)$$

olduğundan $T(x, y) = (s, t)$ eşitliğini çözelim:

$$(y, 2x - y) = (s, t) \Rightarrow y = s, \quad 2x - y = t$$

İkinci denklemde $y = s$ yerine konursa $2x = s + t$, yani

$$x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t, \quad y = s$$

Öyleyse

$$T^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (s, t) \mapsto \left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}t, s \right)$$

■

Örnek 28.2 (Uzayda Bir Ters Operatör). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operatörü

$$T(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$$

biçiminde tanımlanıyor. T 'nin tersinir olduğunu gösteriniz ve T^{-1} 'i bulunuz.

Çözüm.**Tersinirlik.** $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$ koşulu

$$2x = 0, \quad 4x - y = 0, \quad 2x + 3y - z = 0$$

homojen sistemini verir. Birinci denklemden $x = 0$, ikinciden $y = 4x = 0$, üçüncüden $z = 2x + 3y = 0$ bulunur; sistemin tek çözümü sıfır çözümüdür. Demek ki

$$\text{Ker } T = \{(0, 0, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

olup T singüler değildir ve tersi vardır.

Tersin hesabı. $T(x, y, z) = (r, s, t)$ eşitliğini çözelim:

$$2x = r, \quad 4x - y = s, \quad 2x + 3y - z = t$$

Üç bilinmeyenli ve üç denklemlili bu sistemin tek çözümü vardır. Sırayla:

$$x = \frac{r}{2}, \quad y = 4x - s = 2r - s$$

$$z = 2x + 3y - t = r + 3(2r - s) - t = 7r - 3s - t$$

Öyleyse

$$T^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, s, t) \mapsto \left(\frac{r}{2}, 2r - s, 7r - 3s - t \right)$$

■

28.4 Kare Denklemler Sistemleri

Tersinir operatörler, denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olan sistemleri tek bir soruya indirger.

Teorem 28.3 (Kare Sistemlerin Çözüm Sayısı). K komutatif bir cisim olmak üzere, n lineer denklemlili ve n bilinmeyenli

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (*)$$

sistemini ele alalım. Bu durumda:

- (*) ile ilgili homojen sistemin yalnız sıfır çözümü varsa, (*)'in **tek çözümü vardır**.
- Homojen sistemin sıfırdan farklı bir çözümü varsa, (*)'in ya **çözümü yoktur** ya da **birden fazla çözümü vardır**.

İspat.

Sistemi $AX = B$ matris denklemi olarak yazalım; $A = (a_{ij})$ artık n . mertebeden bir kare matristir. Bu matrisin belirlediği

$$T : K^n \rightarrow K^n, \quad v \mapsto A \cdot v$$

lineer operatörünü alalım.

(i) $AX = O$ homojen sisteminin yalnız sıfır çözümü olsun. Bu, çözüm uzayının

$$W = \{ X \in K^n : T(X) = AX = O \} = \text{Ker } T = \{0_{K^n}\}$$

olması demektir; yani T singüler değildir. Tersinirlik ölçütü gereği T 'nin tersi vardır, dolayısıyla T bire bir ve örtendir. O hâlde her $B \in K^n$ için

$$T(X) = AX = B$$

olacak biçimde bir ve yalnız bir $X \in K^n$ vardır; (*)'in **tek çözümü vardır**.

(ii) $AX = O$ homojen sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü olsun. Bu durumda

$$\text{Ker } T \neq \{0_{K^n}\}$$

olup T singülerdir ve bire bir değildir. Tersinirlik ölçütü gereği T 'nin tersi yoktur, dolayısıyla T örten de değildir. İki durum mümkündür:

- Ya $T(X) = AX = B$ olacak hiçbir $X \in K^n$ yoktur; bu durumda $(*)$ 'in çözümü yoktur.
- Ya da böyle bir X vardır. Bu durumda, $AX_0 = O$ olan sıfırdan farklı bir X_0 alınırsa

$$A(X + X_0) = AX + AX_0 = B + O = B$$

olduğundan $X + X_0 \neq X$ de bir çözümdür; yani $(*)$ 'in birden fazla çözümü vardır.

■

💡 Pratikte ne işe yarar?

Kare bir sistemde sabitler matrisi B ne olursa olsun çözüm sayısını belirleyen tek şey, katsayılar matrisidir. Homojen sistemi bir kez çözmek, o katsayı tablosuyla kurulabilecek **bütün** sistemler hakkında bilgi verir. Bu, **regülerlik ölçütüyle** de örtüşür: A 'nın regüler olması, homojen sistemin yalnız sıfır çözümü olmasıyla aynı şeydir.

28.5 Alıştırma

Alıştırma 28.1 (Tersinir Operatörler Üzerine).

1. V sonlu boyutlu ve $S, T \in A(V)$ tersinir olsun. ST 'nin de tersinir olduğunu ve $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ olduğunu gösteriniz.
2. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ operatörünün tersinir olup olmadığını belirleyiniz.
3. $T \in A(V)$ ve $T^2 = 0$, $T \neq 0$ olsun. T 'nin tersinir olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

1. S ve T tersinir olduğundan $S^{-1}, T^{-1} \in A(V)$ vardır. $T^{-1}S^{-1}$ elemanının ST 'nin tersi olduğunu doğrudan çarparak görelim; asosyatiflik serbestçe kullanılabilir:

$$(ST) (T^{-1}S^{-1}) = S (TT^{-1}) S^{-1} = S I S^{-1} = SS^{-1} = I$$

$$(T^{-1}S^{-1}) (ST) = T^{-1} (S^{-1}S) T = T^{-1} I T = T^{-1}T = I$$

Demek ki ST tersinirdir ve $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$ 'dir.

2. $T(x, y) = (0, 0)$ koşulu

$$x + y = 0 \quad \text{ve} \quad 2x + 2y = 0$$

verir. İkinci denklem birincinin iki katı olduğundan sistem tek bir denkleme, $x + y = 0$ 'a indirgenir. Bu denklemin $(1, -1)$ gibi sıfırdan farklı çözümleri vardır:

$$T(1, -1) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad (1, -1) \in \text{Ker } T$$

Demek ki $\text{Ker } T \neq \{(0, 0)\}$ 'dir; T singülerdir ve **tersinir değildir**.

3. T tersinir olsaydı, $T^2 = 0$ eşitliğini soldan T^{-1} ile çarparak

$$T^{-1} (TT) = T^{-1} 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad (T^{-1}T) T = 0 \quad \Rightarrow \quad IT = T = 0$$

elde ederdik. Bu, $T \neq 0$ varsayımıyla çelişir. Öyleyse T tersinir değildir.

■

29. Bir Operatörün Matrisi

Sonlu boyutlu bir uzayda bir taban seçmek, her vektörü bir sayı dizisiyle temsil etmek demektir. Aynı seçim, o uzay üzerindeki her lineer operatörü de bir kare matrisle temsil etmemizi sağlar. Bu bölümde bu temsili kuruyor ve operatörün bir vektöre uygulanmasının, matrisin koordinat vektörüyle çarpılmasına karşılık geldiğini gösteriyoruz.

29.1 Koordinat Vektörünü Hatırlayalım

V , K üzerinde bir vektör uzayı; $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ bir tabanı ve $v \in V$ olsun. v 'yi

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \quad (a_i \in K)$$

olarak **tek türlü yazabiliyorduk**. Bu bölümde koordinatları **sütun matris** olarak yazacağız:

$$[v]_e = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

29.2 Matris Gösterimi

Tanım 29.1 (Bir Lineer Operatörün Matris Gösterimi). V , bir K komutatif cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı; $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ bir tabanı ve $T \in A(V)$ bir lineer operatör olsun. $T(e_1), \dots, T(e_n) \in V$ vektörlerini, $a_{ij} \in K$ olmak üzere

$$\begin{aligned} T(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n \\ T(e_2) &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n \\ &\vdots \\ T(e_n) &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

biçiminde **tek türlü** yazabiliriz. Bu durumda

$$[T]_e := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

K -matrisine, V üzerindeki T lineer operatörünün e tabanına göre **matris gösterimi**, kısaca **T 'nin e tabanındaki matrisi** denir.

💡 Kuralı akılda tutmanın yolu

Yukarıdaki katsayı tablosunun **devriği** alınıyor. Pratikte tek bir cümle yeter:

$[T]_e$ 'nin j . **sütunu**, $T(e_j)$ vektörünün e tabanındaki koordinatlarıdır.

Yani $[T]_e$ 'nin sütunları sırayla $[T(e_1)]_e, [T(e_2)]_e, \dots, [T(e_n)]_e$ 'dir.

i Not

Bundan sonraki örneklerde e harfini **standart taban** için, f harfini standart olmayan tabanlar için kullanacağız. Tanımdaki e ise herhangi bir tabanı gösteren genel simgedir.

Örnek 29.1 (Bir Matris Gösteriminin Hesabı). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörü $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$ biçiminde tanımlanıyor. $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 0)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2\}$ tabanına göre $[T]_f$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Önce f 'nin gerçekten bir taban olduğunu görelim: f_1 ile f_2 lineer bağımsızdır ve $\mathbb{R}^2$ iki boyutlu olduğundan lineer bağımsız iki vektör bir taban oluşturur.

Şimdi taban vektörlerinin görüntülerini yine f cinsinden yazalım:

$$T(f_1) = T(1, 1) = (4 - 2, 2 + 1) = (2, 3)$$

$(2, 3) = x(1, 1) + y(-1, 0) = (x - y, x)$ denkleminde $x = 3$ ve $x - y = 2$, yani $y = 1$ bulunur:

$$T(f_1) = 3(1, 1) + 1 \cdot (-1, 0) = 3f_1 + f_2$$

Benzer biçimde

$$T(f_2) = T(-1, 0) = (-4, -2)$$

ve $(-4, -2) = x(1, 1) + y(-1, 0)$ denkleminde $x = -2$, $x - y = -4$, yani $y = 2$:

$$T(f_2) = -2(1, 1) + 2(-1, 0) = -2f_1 + 2f_2$$

Sütunları bu koordinatlardan kurarak

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

■

29.3 Standart Tabanda: Matrisin Kendisi

Örnek 29.2 (Matris Dönüşümünün Standart Tabandaki Matrisi). K komutatif bir cisim, $A = (a_{ij})$ n . mertebeden bir kare K -matris ve

$$T : K^n \rightarrow K^n, \quad v \mapsto A \cdot v$$

lineer operatörü olsun. K^n 'in standart tabanı $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ olmak üzere $[T]_e = A$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

K^n 'in elemanlarını sütun matris olarak düşünüyoruz; e_i , i . bileşeni 1_K , diğerleri 0_K olan sütun matristir. $A \cdot e_i$ çarpımı A 'nın i . sütununu verir:

$$T(e_i) = A \cdot e_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \dots + a_{ni}e_n$$

Demek ki $T(e_i)$ 'nin standart tabandaki koordinatları A 'nın i . sütunudur. $[T]_e$ 'nin i . sütunu tam olarak bu koordinatlardan kurulduğuna göre

$$[T]_e = A$$

■

i Not

Bu, gösterimin tutarlı olduğunu söyler: bir matrisin belirlediği operatörün standart tabandaki matrisi yine o matristir. Başka bir taban seçildiğinde ise farklı bir matris çıkar — [taban değiştirme bölümünde](#) ikisinin nasıl bağlandığını göreceğiz.

29.4 Temel Teorem

Matris gösterimi bir isimlendirme değil, bir hesap aracıdır: operatörü uygulamak, matrisle çarpmaya dönüşür.

Teorem 29.1 (Operatörün Uygulanması Matrisle Çarpımdır). V sonlu boyutlu, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ bir tabanı ve $T \in A(V)$ olsun. Bu durumda

$$\text{her } v \in V \text{ için } [T]_e \cdot [v]_e = [T(v)]_e$$

İspat.

$i = 1, \dots, n$ için

$$T(e_i) = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + \dots + a_{in}e_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$$

olsun; tanım gereği $[T]_e, (a_{ij})$ tablosunun devriğidir.

$v \in V$ ve $k_i \in K$ olmak üzere

$$v = k_1e_1 + k_2e_2 + \dots + k_ne_n = \sum_{i=1}^n k_ie_i$$

olsun; o hâlde $[v]_e = (k_1, k_2, \dots, k_n)^t$ 'dir. T lineer olduğundan

$$\begin{aligned} T(v) &= T\left(\sum_{i=1}^n k_ie_i\right) = \sum_{i=1}^n k_i T(e_i) = \sum_{i=1}^n k_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}k_i\right) e_j = \sum_{j=1}^n (a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \dots + a_{nj}k_n) e_j \end{aligned}$$

Öyleyse $T(v)$ 'nin e tabanına göre koordinat vektörü

$$[T(v)]_e = \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{n1}k_n \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{n2}k_n \\ \vdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \dots + a_{nn}k_n \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

Öte yandan matris çarpımını yapalım:

$$\begin{aligned} [T]_e \cdot [v]_e &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{n1}k_n \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{n2}k_n \\ \vdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \dots + a_{nn}k_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

İki sütun matris aynı olduğundan

$$[T]_e \cdot [v]_e = [T(v)]_e$$

■

Örnek 29.3 (Teoremin Sayısal Doğrulaması). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$ ve $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 0)$ olsun. $v = (5, 7)$ için teoremi doğrulayınız.

Çözüm.

Koordinat vektörleri. v 'yi f cinsinden yazalım: $(5, 7) = x(1, 1) + y(-1, 0) = (x - y, x)$ 'ten $x = 7$, $y = 2$ bulunur:

$$v = (5, 7) = 7f_1 + 2f_2 \quad \Rightarrow \quad [v]_f = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$T(v)$ 'yi hesaplayıp onu da f cinsinden yazalım:

$$T(v) = T(5, 7) = (20 - 14, 10 + 7) = (6, 17)$$

$(6, 17) = x(1, 1) + y(-1, 0)$ 'dan $x = 17$, $y = 11$:

$$T(v) = 17f_1 + 11f_2 \quad \Rightarrow \quad [T(v)]_f = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Çarpım. $[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ olduğunu yukarıda hesaplamıştık:

$$[T]_f \cdot [v]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 - 4 \\ 7 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix} = [T(v)]_f$$

■

29.5 Çözümlü Örnekler

Örnek 29.4 (Standart Tabanda Matris Gösterimleri). $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerinde aşağıdaki operatörlerin $e = \{e_1, e_2\}$ tabanına göre matris gösterimlerini bulunuz.

- $T(x, y) = (2y, 3x - y)$
- $T(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$

Çözüm.

(i)

$$T(e_1) = T(1, 0) = (0, 3) = 0e_1 + 3e_2$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (2, -1) = 2e_1 - e_2$$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$T(e_1) = T(1, 0) = (3, 1) = 3e_1 + e_2$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (-4, 5) = -4e_1 + 5e_2$$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Her iki durumda da matris, operatörün katsayı tablosunun kendisidir; standart tabanda bu hep böyledir.

■

Örnek 29.5 (Standart Olmayan Bir Tabanda). $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (2, 5)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2\}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanıdır. Yukarıdaki iki operatörün f tabanına göre matris gösterimlerini bulunuz.

Çözüm.

Her iki şıkta da (a, b) 'yi f cinsinden yazmamız gerekecek:

$$(a, b) = x(1, 3) + y(2, 5) = (x + 2y, 3x + 5y)$$

$$\Rightarrow x + 2y = a, 3x + 5y = b$$

Birinci denklemi 3 ile çarpıp ikinciden çıkaralım: $y = 3a - b$, buradan $x = a - 2y = 2b - 5a$. Yani

$$(a, b) = (2b - 5a)f_1 + (3a - b)f_2 \quad (\star)$$

(i) $T(x, y) = (2y, 3x - y)$.

$$T(f_1) = T(1, 3) = (6, 0)$$

($\star$)'da $a = 6$, $b = 0$: katsayılar $2 \cdot 0 - 5 \cdot 6 = -30$ ve $3 \cdot 6 - 0 = 18$, yani $T(f_1) = -30f_1 + 18f_2$.

$$T(f_2) = T(2, 5) = (10, 1)$$

($\star$)'da $a = 10$, $b = 1$: katsayılar $2 - 50 = -48$ ve $30 - 1 = 29$, yani $T(f_2) = -48f_1 + 29f_2$.

$$[T]_f = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

(ii) $T(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$.

$$T(f_1) = T(1, 3) = (3 - 12, 1 + 15) = (-9, 16)$$

($\star$): katsayılar $32 + 45 = 77$ ve $-27 - 16 = -43$, yani $T(f_1) = 77f_1 - 43f_2$.

$$T(f_2) = T(2, 5) = (6 - 20, 2 + 25) = (-14, 27)$$

($\star$): katsayılar $54 + 70 = 124$ ve $-42 - 27 = -69$, yani $T(f_2) = 124f_1 - 69f_2$.

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 77 & 124 \\ -43 & -69 \end{pmatrix}$$

■

⚠ Matris tabana bağlıdır

Aynı operatörün iki farklı tabandaki matrisleri bambaşka görünebilir — yukarıdaki $T(x, y) = (2y, 3x - y)$ operatörü standart tabanda $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, f tabanında ise $\begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$ matrisiyle temsil ediliyor. Matris gösterimini yazarken alt indiste hangi tabanın kullanıldığını belirtmek bu yüzden şart.

29.6 İki Uzay Arasında: Dikdörtgen Matris Gösterimi

Şimdiye kadar bir uzayı kendi içine götüren operatörleri ele aldık; bu durumda tek bir taban seçmek yetiyordu. $T : V \rightarrow U$ gibi **iki farklı uzay** arasındaki bir dönüşüm için ise iki taban seçilir: biri V 'de, biri U 'da.

Tanım 29.2 (İki Tabana Göre Matris Gösterimi). V ve U , K üzerinde sırasıyla m ve n boyutlu iki vektör uzayı; $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ V 'nin, $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ ise U 'nun bir tabanı ve $T : V \rightarrow U$ lineer bir dönüşüm olsun. j . sütunu $[T(v_j)]_C$ olan

$$[T]_{C,B} := \left([T(v_1)]_C \mid [T(v_2)]_C \mid \dots \mid [T(v_m)]_C \right)_{(n,m)}$$

K -matrisine, T 'nin B ve C tabanlarına göre **matris gösterimi** denir.

İ Not

Boyutlara dikkat: $[T]_{C,B}$ matrisi (n, m) tipindedir – satır sayısı **varış** uzayının, sütun sayısı **çıkış** uzayının boyutudur. $V = U$ ve $B = C = e$ alınırsa $[T]_{e,e} = [T]_e$ olur ve önceki tanıma dönülür.

Temel teoremin karşılığı aynen geçerlidir; ispatı da operatör durumundakiyle sözcüğü sözcüğüne aynıdır:

$$\text{her } v \in V \text{ için } [T]_{C,B} \cdot [v]_B = [T(v)]_C$$

Örnek 29.6 (Bir Dikdörtgen Matris Gösterimi). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$T(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y)$$

biçiminde tanımlanıyor. $B, \mathbb{R}^3$ 'ün standart tabanı ve $C = \{u_1, u_2\}$ ile $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (1, 1)$ olmak üzere $[T]_{C,B}$ matrisini bulunuz ve $v = (1, 1, 1)$ için temel eşitliği doğrulayınız.

Çözüm.

Sütunlar. Önce $\mathbb{R}^2$ 'de C tabanına göre koordinat almayı hazırlayalım: $(p, q) = a(1, 0) + b(1, 1) = (a + b, b)$ olduğundan $b = q$ ve $a = p - q$ 'dur.

$$T(1, 0, 0) = (1, 3) \Rightarrow b = 3, a = 1 - 3 = -2$$

$$\Rightarrow [T(1, 0, 0)]_C = (-2, 3)^t$$

$$T(0, 1, 0) = (2, -1) \Rightarrow b = -1, a = 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow [T(0, 1, 0)]_C = (3, -1)^t$$

$$T(0, 0, 1) = (-1, 0) \Rightarrow b = 0, a = -1$$

$$\Rightarrow [T(0, 0, 1)]_C = (-1, 0)^t$$

Bu üç sütunu yan yana koyalım:

$$[T]_{C,B} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

Doğrulama. $v = (1, 1, 1)$ için B standart taban olduğundan $[v]_B = (1, 1, 1)^t$ 'dir:

$$[T]_{C,B} \cdot [v]_B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3 - 1 \\ 3 - 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Öte yandan $T(1, 1, 1) = (1 + 2 - 1, 3 - 1) = (2, 2)$ olup bunun C koordinatları $b = 2$, $a = 2 - 2 = 0$, yani $(0, 2)^t$ 'dir:

$$[T(v)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = [T]_{C,B} \cdot [v]_B \checkmark$$

■

🔗 Taban değişirse

Burada kullanılan **geçiş matrisi** kavramı **taban değiştirme** bölümünde tanımlanacak, aşağıdaki formül de **iki uzay arasında matris gösterimi** bölümünde ispatlanacak; şimdilik sonucu ileriye dönük bir not olarak kaydediyoruz. V 'de B 'den B' 'ne geçiş matrisi P , U 'da C 'den C' 'ne geçiş matrisi Q olmak üzere

$$[T]_{C',B'} = Q^{-1} \cdot [T]_{C,B} \cdot P$$

Operatör durumunda $V = U$, $B = C$ ve $B' = C'$ olduğundan $Q = P$ çıkar ve bu formül tanınık $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ benzerlik bağıntısına indirgenir.

i Not

Dönüşümlerin uzayı bölümünde $\dim \text{Hom}(V, U) = m \cdot n$ olduğunu ispatlarken kurduğumuz F_{ij} dönüşümleri, bu gösterimde tam olarak tek bir girdisi 1_K , kalanı 0_K olan matrislere karşılık gelir. Boyut sayımının neden $m \cdot n$ çıktığı böylece somutlaşır: (n, m) tipinde bir matrisin $m \cdot n$ tane girdisi vardır.

29.7 Alıştırma

Alıştırma 29.1 (Matris Gösterimi Hesapları).

1. $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir T operatörü şöyle tanımlansın:

$$T(x, y, z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z)$$

Bu operatörün standart tabandaki matrisini bulunuz.

2. Standart tabanı kullanarak aşağıdaki operatörlerin matrislerini yazınız:

- a. $T(x, y, z) = (2x - 3y + 4z, 5x - y + 2z, 4x + 7y)$
 b. $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$

3. $\mathbb{R}^3$ üzerinde $T(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ ve $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 0, 0)$ olsun. $[T]_f$ matrisini bulunuz ve $v = (a, b, c)$ için $[T]_f \cdot [v]_f = [T(v)]_f$ eşitliğini doğrulayınız.

Çözüm.

1. Standart taban vektörlerinin görüntüleri:

$$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (a_1, b_1, c_1) = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$$

$$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (a_2, b_2, c_2) = a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$$

$$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (a_3, b_3, c_3) = a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3$$

Sütunları bu koordinatlardan kurunca

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

yani katsayı tablosunun kendisi çıkar.

2. Birinci şıktan doğrudan okunur:

$$\text{a. } [T]_e = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b. } [T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Önce (a, b, c) 'nin f tabanındaki koordinatlarını bulalım:

$$(a, b, c) = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0) = (x + y + z, x + y, x)$$

Buradan $x = c$, $x + y = b$ yani $y = b - c$, ve $x + y + z = a$ yani $z = a - b$:

$$(a, b, c) = c f_1 + (b - c) f_2 + (a - b) f_3 \quad (\star \star)$$

Şimdi taban vektörlerinin görüntülerini yazalım:

$$T(f_1) = T(1, 1, 1) = (2 + 1, 1 - 4, 3) = (3, -3, 3)$$

$(\star \star)$: $c = 3$, $b - c = -3 - 3 = -6$, $a - b = 3 - (-3) = 6$, yani $T(f_1) = 3f_1 - 6f_2 + 6f_3$.

$$T(f_2) = T(1, 1, 0) = (2, -3, 3) \Rightarrow T(f_2) = 3f_1 - 6f_2 + 5f_3$$

$$T(f_3) = T(1, 0, 0) = (0, 1, 3) \Rightarrow T(f_3) = 3f_1 - 2f_2 - f_3$$

Sütunları kurarak

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Doğrulama. $v = (a, b, c)$ için $(\star \star)$ gereği $[v]_f = (c, b - c, a - b)^t$ 'dir. Öte yandan

$$T(v) = (2b + c, a - 4b, 3a)$$

olup $(\star \star)$ bu vektöre uygulanırsa katsayılar sırayla $3a$, $(a - 4b) - 3a = -2a - 4b$ ve $(2b + c) - (a - 4b) = -a + 6b + c$ çıkar:

$$[T(v)]_f = \begin{pmatrix} 3a \\ -2a - 4b \\ -a + 6b + c \end{pmatrix}$$

Çarpımı yapalım:

$$\begin{aligned} [T]_f \cdot [v]_f &= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b - c \\ a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c + 3(b - c) + 3(a - b) \\ -6c - 6(b - c) - 2(a - b) \\ 6c + 5(b - c) - (a - b) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3a \\ -2a - 4b \\ -a + 6b + c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

İki sütun aynı olduğundan eşitlik doğrulanmış olur.

■

30. Operatör Cebri ile Matris Cebri

Bir taban seçtiğimizde her operatöre bir kare matris karşılık geliyordu. Bu karşılık gelme yalnızca bir etiketleme değil: operatörlerle yapılan her işlem, matrislerle yapılan karşılık gelen işleme dönüşür. Bu bölümde bunu üç eşitlikle kesinleştiriyoruz.

30.1 Toplama ve Skalerle Çarpma

Teorem 30.1 (A(V) ile Matris Uzayının İzomorfluluğu). *V, bir K komutatif cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ bir tabanı olsun. A(V) ile V üzerindeki lineer operatörlerin K üzerinde oluşturdıkları cebri, $\mathcal{A}$ ile de n. mertebeden kare K-matrislerin K üzerinde oluşturdıkları cebri gösterelim. Bu durumda*

$$A(V) \rightarrow \mathcal{A}, \quad T \mapsto [T]_e$$

dönüşümü A(V)'den $\mathcal{A}$ üzerine bir **vektör uzayı izomorfizmidir**; yani bire bir ve örtendir, ayrıca her $S, T \in A(V)$ ve $k \in K$ için

$$[S + T]_e = [S]_e + [T]_e \quad \text{ve} \quad [kT]_e = k [T]_e$$

İspat.

Dönüşüm bire birdir. Farklı operatörlerin matrisleri farklıdır: $S \neq T$ ise V'nin bir taban vektöründe $S(e_i) \neq T(e_i)$ olmalıdır (aksi hâlde **tabanda belirlenme** gereği $S = T$ olurdu), dolayısıyla matrislerin i. sütunları farklıdır ve $[S]_e \neq [T]_e$ 'dir.

Dönüşüm örtendir. $M \in \mathcal{A}$ verilsin ve $(m_{ij}) = M^t$ olsun.

$$F(e_i) = \sum_{j=1}^n m_{ij} e_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

koşuluyla belirlenen bir $F : V \rightarrow V$ lineer operatörü, tabanda belirlenme teoremi gereği vardır ve tektir; tanım gereği $[F]_e = M$ 'dir.

İşlemlerle uyum. $S, T \in A(V)$ için

$$S(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j, \quad T(e_i) = \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

olsun; $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ diyelim. O hâlde tanım gereği $[S]_e = A^t$ ve $[T]_e = B^t$ 'dir. Toplam için:

$$(S + T)(e_i) = S(e_i) + T(e_i) = \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) e_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

Katsayı tablosu $(a_{ij} + b_{ij}) = A + B$ olduğundan

$$[S + T]_e = (A + B)^t = A^t + B^t = [S]_e + [T]_e$$

Skalerle çarpım için, $k \in K$ olmak üzere:

$$(kT)(e_i) = kT(e_i) = k \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j = \sum_{j=1}^n (kb_{ij}) e_j$$

Katsayı tablosu $(kb_{ij}) = kB$ olduğundan

$$[kT]_e = (kB)^t = k B^t = k [T]_e$$

■

30.2 Çarpma

Teorem 30.2 (Bileşkenin Matrisi Matrislerin Çarpımıdır). V sonlu boyutlu, e bir tabanı olsun. Her $S, T \in A(V)$ için

$$[ST]_e = [S]_e \cdot [T]_e$$

İspat.

$T(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j$ ve $S(e_j) = \sum_{k=1}^n b_{jk} e_k$ olsun; $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ diyelim. Tanım gereği $[T]_e = A^t$ ve $[S]_e = B^t$ 'dir.

$ST = S \circ T$ operatörünün taban vektörlerindeki değerlerini hesaplayalım; S lineer olduğundan

$$\begin{aligned} (ST)(e_i) &= S(T(e_i)) = S\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^n a_{ij} S(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n b_{jk} e_k\right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}\right) e_k \end{aligned}$$

Matris çarpımının tanımı gereği $A \cdot B = (c_{ik})$ matrisinin girdileri

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

olduğundan, ST 'nin katsayı tablosu tam olarak $A \cdot B$ 'dir. Öyleyse **transpozenin çarpımla uyumu** kullanılarak

$$[ST]_e = (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t = [S]_e \cdot [T]_e$$

■

💡 Neden devrik alınıyor?

$[T]_e$ 'yi katsayı tablosunun devriği olarak tanımlamamızın nedeni tam olarak bu teoremdir. Devrik alınmasaydı $(A \cdot B)^t = B^t A^t$ kuralı yüzünden çarpımların sırası ters dönerdi; bu tanımla ise bileşkenin sırası matris çarpımının sırasıyla birebir örtüşür.

Üç eşitliği bir araya getirince şu sonuç çıkar: **$A(V)$ ile n . mertebeden kare matrisler cebri, bir taban seçimiyle aynı yapıdır.** Operatörlerle yapılan bütün hesaplar matrislerle, matrislerle yapılan bütün hesaplar operatörlerle yürütülebilir.

📖 Not

Bu izomorfizm, **operatör cebri**nde karşılaştığımız tuhaflıkların matrislerdekiyle aynı olmasını açıklar: matris çarpımının komutatif olmaması ve sıfır bölünlerinin bulunması ile operatör çarpımınıninkiler aynı olgunun iki yüzüdür. Boyut sayımı da tutar: $\dim A(V) = n^2$ ve n . mertebeden kare matrislerin uzayının boyutu da n^2 'dir.

30.3 İki Boyutlu Durumda Açık Hesap

Örnek 30.1 (dim $V = 2$ İçin Üç Eşitliğin Doğrulanması). V, K üzerinde iki boyutlu bir vektör uzayı ve $e = \{e_1, e_2\}$ bir tabanı olsun. $T, S \in A(V)$ operatörleri

$$T(e_1) = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad T(e_2) = b_1 e_1 + b_2 e_2$$

$$S(e_1) = c_1 e_1 + c_2 e_2, \quad S(e_2) = d_1 e_1 + d_2 e_2$$

ile verilsin. $[T + S]_e$, $[kT]_e$ ve $[ST]_e$ matrislerini hesaplayınız.

Çözüm.

Tanım gereği

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad [S]_e = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Toplam.

$$(T + S)(e_1) = T(e_1) + S(e_1) = (a_1 + c_1)e_1 + (a_2 + c_2)e_2$$

$$(T + S)(e_2) = T(e_2) + S(e_2) = (b_1 + d_1)e_1 + (b_2 + d_2)e_2$$

$$\begin{aligned} [T + S]_e &= \begin{pmatrix} a_1 + c_1 & b_1 + d_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 + d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = [T]_e + [S]_e \end{aligned}$$

Skalerle çarpım. $k \in K$ için

$$(kT)(e_1) = (ka_1)e_1 + (ka_2)e_2, \quad (kT)(e_2) = (kb_1)e_1 + (kb_2)e_2$$

$$[kT]_e = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ ka_2 & kb_2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = k [T]_e$$

Çarpım. S lineer olduğundan

$$\begin{aligned} (ST)(e_1) &= S(T(e_1)) = S(a_1 e_1 + a_2 e_2) = a_1 S(e_1) + a_2 S(e_2) \\ &= a_1(c_1 e_1 + c_2 e_2) + a_2(d_1 e_1 + d_2 e_2) \\ &= (a_1 c_1 + a_2 d_1)e_1 + (a_1 c_2 + a_2 d_2)e_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ST)(e_2) &= S(T(e_2)) = b_1 S(e_1) + b_2 S(e_2) \\ &= (b_1 c_1 + b_2 d_1)e_1 + (b_1 c_2 + b_2 d_2)e_2 \end{aligned}$$

Sütunları kurarak

$$\begin{aligned} [ST]_e &= \begin{pmatrix} a_1 c_1 + a_2 d_1 & b_1 c_1 + b_2 d_1 \\ a_1 c_2 + a_2 d_2 & b_1 c_2 + b_2 d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = [S]_e \cdot [T]_e \end{aligned}$$

■

30.4 Alıştırma

Alıştırma 30.1 (İzomorfizmin Kullanımı).

- $\mathbb{R}^2$ üzerinde $S(x, y) = (y, x)$ ve $T(x, y) = (0, x)$ operatörlerinin standart tabandaki matrislerini bulunuz; $[ST]_e$ ile $[TS]_e$ 'yi hem doğrudan hem de matris çarpımıyla hesaplayıp karşılaştırınız.
- $T \in A(V)$ tersinir ve e bir taban olsun. $[T^{-1}]_e = ([T]_e)^{-1}$ olduğunu gösteriniz.
- $\dim V = n$ olsun. Bir $T \in A(V)$ operatörünün tersinir olması için gerek ve yeter koşulun $[T]_e$ matrisinin regüler olması olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1. Standart tabanda

$$S(e_1) = S(1, 0) = (0, 1) = e_2, \quad S(e_2) = S(0, 1) = (1, 0) = e_1$$

$$T(e_1) = T(1, 0) = (0, 1) = e_2, \quad T(e_2) = T(0, 1) = (0, 0)$$

olduğundan

$$[S]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Doğrudan hesapla $(ST)(x, y) = S(0, x) = (x, 0)$ ve $(TS)(x, y) = T(y, x) = (0, y)$ bulunur; bunların matrisleri

$$[ST]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [TS]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matris çarpımıyla da aynı sonuçlar çıkar:

$$[S]_e[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_e[S]_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

İki matris farklı olduğundan $ST \neq TS$ 'dir.

2. Önce birim operatörün matrisini bulalım: $I(e_i) = e_i$ olduğundan $[I]_e = I_n$ 'dir. Şimdi $TT^{-1} = T^{-1}T = I$ eşitliklerinin matrisini alalım; çarpım teoremi gereği

$$[T]_e \cdot [T^{-1}]_e = [TT^{-1}]_e = [I]_e = I_n$$

$$[T^{-1}]_e \cdot [T]_e = [T^{-1}T]_e = [I]_e = I_n$$

Bu, $[T^{-1}]_e$ matrisinin $[T]_e$ 'nin tersi olduğunu söyler:

$$[T^{-1}]_e = ([T]_e)^{-1}$$

3. Gereklik. T tersinir ise (2) gereği $[T]_e$ 'nin tersi vardır, yani $[T]_e$ regülerdir.

Yeterlik. $[T]_e$ regüler olsun; $[T]_e \cdot M = M \cdot [T]_e = I_n$ olacak bir M kare matrisi vardır. İzomorfizm örten olduğundan $[F]_e = M$ olacak bir $F \in A(V)$ bulunur. O hâlde

$$[TF]_e = [T]_e \cdot [F]_e = I_n = [I]_e, \quad [FT]_e = [F]_e \cdot [T]_e = I_n = [I]_e$$

İzomorfizm bire bir olduğundan $TF = I$ ve $FT = I$ 'dir; yani $F = T^{-1}$ ve T tersinirdir.

■

31. Taban Değiştirme

Bir operatörün matrisi seçilen tabana bağlıdır. Peki tabanı değiştirdiğimizde matris nasıl değişir? Bu bölümün cevabı tek bir formüldür ve lineer cebirin en çok kullanılan bağıntılarından biridir: uygun bir matrisle sağdan ve tersiyle soldan çarpmak.

31.1 Geçiş Matrisi

Tanım 31.1 (Geçiş Matrisi). V , bir K komutatif cismi üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı; $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\{f_1, \dots, f_n\}$ ise V 'nin iki tabanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \dots + a_{1n}e_n \\ f_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{2n}e_n \\ &\vdots \\ f_n &= a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

biçiminde tek türlü yazılır ($a_{ij} \in K$). Bu durumda

$$P := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{(n,n)}$$

kare K -matrisine, $\{e_1, \dots, e_n\}$ tabanından $\{f_1, \dots, f_n\}$ tabanına **geçiş matrisi** denir.

🔗 Kural aynı

Operatör matrisinde olduğu gibi burada da devrik alınıyor; sonuç yine sütunlarla ifade edilir:

P 'nin j . sütunu, f_j vektörünün e tabanındaki koordinatlarıdır.

Geçiş matrisinin tersi her zaman vardır. Gerçekten $f_1, \dots, f_n$ vektörleri lineer bağımsız olduğundan, katsayı tablosu P^t satır kanonik şekli birim matris olan bir matristir; **regülerlik ölçütü** gereği P^t regülerdir, dolayısıyla P de regülerdir. Ayrıca:

📌 Not

P^{-1} matrisi, $\{f_1, \dots, f_n\}$ tabanından $\{e_1, \dots, e_n\}$ tabanına geçiş matrisidir. İki taban arasındaki geçiş, hangi yönde okunursa okunsun aynı matris çiftini kullanır.

Örnek 31.1 (Düzlemde İki Yönlü Geçiş). $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ olmak üzere $e = \{e_1, e_2\}$ ve $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 0)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2\}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin iki tabanıdır. Her iki yöndeki geçiş matrislerini bulunuz.

Çözüm.
 e' 'den f' 'ye.

$$f_1 = (1, 1) = e_1 + e_2, \quad f_2 = (-1, 0) = -e_1 + 0e_2$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

f 'den e 'ye.

$$e_1 = (1, 0) = 0(1, 1) - (-1, 0) = 0f_1 - f_2$$

$$e_2 = (0, 1) = (1, 1) + (-1, 0) = f_1 + f_2$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Çarpım.

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

olup Q , P 'nin tersidir.

■

31.2 Koordinatların Değişimi

Teorem 31.1 (Koordinat Vektörlerinin Dönüşümü). V n boyutlu; $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ve $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ iki tabanı; P ise e tabanından f tabanına geçiş matrisi olsun. Bu durumda

$$\text{her } v \in V \text{ için } P \cdot [v]_f = [v]_e$$

başka bir ifadeyle

$$[v]_f = P^{-1} \cdot [v]_e$$

İspat.

$f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_j$ ($i = 1, \dots, n$) olsun; tanım gereği P , (a_{ij}) tablosunun devriğidir. $v \in V$ ve $k_i \in K$ olmak üzere

$$v = k_1f_1 + k_2f_2 + \dots + k_nf_n = \sum_{i=1}^n k_if_i$$

olsun; o hâlde $[v]_f = (k_1, \dots, k_n)^t$ 'dir. Şimdi v 'yi e tabanı cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^n k_if_i = \sum_{i=1}^n k_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}k_i \right) e_j \\ &= \sum_{j=1}^n (a_{1j}k_1 + a_{2j}k_2 + \dots + a_{nj}k_n) e_j \end{aligned}$$

Öyleyse

$$[v]_e = \begin{pmatrix} a_{11}k_1 + a_{21}k_2 + \dots + a_{n1}k_n \\ a_{12}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{n2}k_n \\ \vdots \\ a_{1n}k_1 + a_{2n}k_2 + \dots + a_{nn}k_n \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

Bu sütun matris, tam olarak $P \cdot [v]_f$ çarpımıdır:

$$P \cdot [v]_f = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = [v]_e$$

P regüler olduğundan her iki tarafı soldan P^{-1} ile çarparak $[v]_f = P^{-1}[v]_e$ elde edilir.

■

Örnek 31.2 (Koordinat Dönüşümünün Doğrulanması). $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$; $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 0)$ ve $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Yukarıdaki teoremi doğrulayınız.

Çözüm.

Koordinatlar. $v = (a, b) = a e_1 + b e_2$ olduğundan $[v]_e = (a, b)^t$ dir. f tabanı için

$$(a, b) = x(1, 1) + y(-1, 0) = (x - y, x) \Rightarrow x = b, y = b - a$$

yani $v = b f_1 + (b - a) f_2$ ve $[v]_f = (b, b - a)^t$ dir.

Doğrulama. Bir önceki örnekte $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu:

$$P \cdot [v]_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - (b - a) \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = [v]_e$$

$$P^{-1} \cdot [v]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ b - a \end{pmatrix} = [v]_f$$

■

31.3 Operatör Matrisinin Değişimi

Teorem 31.2 (Taban Değişimi Altında Operatör Matrisi). V n boyutlu; e ve f iki tabanı; P ise e tabanından f tabanına geçiş matrisi olsun. Bu durumda V üzerindeki her T lineer operatörü için

$$[T]_f = P^{-1} \cdot [T]_e \cdot P$$

İspat.

Her $v \in V$ için aşağıdaki zinciri kuralım:

$$\begin{aligned} P^{-1} [T]_e P [v]_f &= P^{-1} [T]_e [v]_e \\ &= P^{-1} [T(v)]_e \\ &= [T(v)]_f \\ &= [T]_f [v]_f \end{aligned}$$

Birinci ve üçüncü adımda koordinat dönüşümü ($P[v]_f = [v]_e$ ile $P^{-1}[w]_e = [w]_f$), ikinci ve dördüncü adımda ise “operatörün uygulanması matrisle çarpımdır” teoremi kullanıldı.

Demek ki her $v \in V$ için

$$(P^{-1} [T]_e P) \cdot [v]_f = [T]_f \cdot [v]_f$$

$v \mapsto [v]_f$ dönüşümü V ’den K^n üzerine örten olduğundan, bu eşitlik her $X \in K^n$ sütun matrisi için geçerlidir:

$$(P^{-1} [T]_e P) \cdot X = [T]_f \cdot X$$

Burada X olarak sırayla K^n ’in standart taban sütunları $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ alınırsa (bunlar V ’deki e tabanıyla karıştırılmamalıdır), iki matrisin karşılıklı sütunlarının aynı olduğu görülür. Öyleyse

$$P^{-1} \cdot [T]_e \cdot P = [T]_f$$

■

💡 Hesap pratiği

Bu bölümdeki iki formülün — koordinat dönüşümü ve $P^{-1}[T]_e P$ bağıntısı — hesap pratiği, geçiş matrisini kısa yoldan bulma yöntemi ve ikisi de standart olmayan tabanlarla kurulmuş sorular bir sonraki **Problemler** bölümünde toplanmıştır.

Örnek 31.3 (Formülün Sayısal Doğrulaması). $\mathbb{R}^2$ üzerinde $T(x, y) = (4x - 2y, 2x + y)$ operatörü veriliyor. $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ ve $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (-1, 0)$ olmak üzere $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

Standart tabandaki matris:

$$T(e_1) = T(1, 0) = (4, 2) = 4e_1 + 2e_2$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (-2, 1) = -2e_1 + e_2$$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

P ve P^{-1} 'i yukarıdan alarak çarpımı yapalım:

$$\begin{aligned} P^{-1}[T]_e P &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bu, aynı operatörün f tabanındaki matrisi olarak doğrudan hesapladığımız

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisiyle aynıdır.

■

31.4 Tabanı Neden Değiştiririz?

Buraya kadar taban değişiminin *nasıl* yapıldığını gördük. Peki neden yapılır? Cevap tek bir cümlede: **doğru taban, operatörün matrisini basitleştirir.**

Örnek 31.4 (Yansımanın Köşegen Matrisi). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x)$ operatörü, düzlemin $y = x$ doğrusuna göre yansımasıdır. Bu operatörün standart tabandaki ve $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, -1)$ tabanındaki matrislerini karşılaştırınız.

Çözüm.

Standart tabanda. $T(e_1) = T(1, 0) = (0, 1) = e_2$ ve $T(e_2) = T(0, 1) = (1, 0) = e_1$ olduğundan

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

f tabanında. $f_1 = (1, 1)$ yansıma doğrusunun üzerindedir, $f_2 = (1, -1)$ ise doğruya diktir:

$$\begin{aligned}
T(f_1) &= T(1, 1) = (1, 1) = f_1 = 1 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 \\
T(f_2) &= T(1, -1) = (-1, 1) = -f_2 = 0 \cdot f_1 + (-1) \cdot f_2 \\
[T]_f &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Benzerlik bağıntısıyla kontrol. e standart taban olduğundan P 'nin sütunları doğrudan f_1 ve f_2 'dir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tersini blok indirgemeye bulalım:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&P^{-1}[T]_e = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&(\ P^{-1}[T]_e \) \ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [T]_f \quad \checkmark
\end{aligned}$$

■

💡 Köşegen matrisin anlamı

$[T]_f$ **köşegen** çıktı; bu, T 'nin f_1 yönünü olduğu gibi bıraktığını (1 katı), f_2 yönünü ise ters çevirdiğini (-1 katı) doğrudan okutuyor. Bir operatörü köşegen yapan bir taban aramak, lineer cebirin en verimli sorularından biridir; sistematik cevabı **özdeğer ve özvektör** kuramıdır.

31.5 Alıştırma

Alıştırma 31.1 (Taban Değiştirme Hesapları). $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ ve $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (2, 5)$ olmak üzere e ve f , $\mathbb{R}^2$ 'nin iki tabanıdır.

- e 'den f 'ye geçiş matrisi P 'yi ve f 'den e 'ye geçiş matrisi Q 'yu bulup $Q = P^{-1}$ olduğunu gösteriniz.
- Her $v \in \mathbb{R}^2$ için $[v]_f = P^{-1}[v]_e$ olduğunu doğrulayınız.
- $T(x, y) = (2y, 3x - y)$ operatörü için $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

1. Geçiş matrisleri:

$$\begin{aligned}
f_1 &= (1, 3) = e_1 + 3e_2, & f_2 &= (2, 5) = 2e_1 + 5e_2 \\
\Rightarrow P &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ters yön için $(a, b) = xf_1 + yf_2$ denklemini çözelim: $x + 2y = a$ ve $3x + 5y = b$ 'den

$$x = 2b - 5a, \quad y = 3a - b \quad (\star)$$

$(a, b) = (1, 0)$ için $x = -5, y = 3$; $(a, b) = (0, 1)$ için $x = 2, y = -1$:

$$e_1 = -5f_1 + 3f_2, \quad e_2 = 2f_1 - f_2 \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Çarpalım:

$$P \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+6 & 2-2 \\ -15+15 & 6-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Demek ki $Q = P^{-1}$ 'dir.

2. $v = (a, b)$ için $[v]_e = (a, b)^t$ 'dir. $(\star)$ gereği $[v]_f = (2b - 5a, 3a - b)^t$ 'dir. Öte yandan

$$P^{-1}[v]_e = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a + 2b \\ 3a - b \end{pmatrix} = [v]_f$$

3. Standart tabanda $T(e_1) = (0, 3)$ ve $T(e_2) = (2, -1)$ olduğundan

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

f tabanında ise $T(f_1) = T(1, 3) = (6, 0)$ ve $T(f_2) = T(2, 5) = (10, 1)$ olup $(\star)$ ile

$$T(f_1) = -30f_1 + 18f_2, \quad T(f_2) = -48f_1 + 29f_2$$

$$\Rightarrow [T]_f = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix}$$

Şimdi formülü sınavalım:

$$\begin{aligned} P^{-1}[T]_e P &= \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{pmatrix} = [T]_f \end{aligned}$$

■

Alıştırma 31.2 (Ters Yönde Sorular).

1. $\mathbb{R}^2$ 'de e standart taban olmak üzere, e 'den bir f tabanına geçiş matrisi $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ olarak veriliyor. f tabanını bulunuz.
2. $\{(1, 2), (2, 4)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanı mıdır? Bu küme için geçiş matrisi kurmaya çalışırsanız ne ters gider?

Çözüm.

1. e standart taban olduğunda geçiş matrisinin tanımı basitleşir: P 'nin j . sütunu, f_j 'nin standart tabandaki koordinatlarıdır — yani f_j 'nin kendisidir. Sütunları okuyalım:

$$f_1 = (2, 3), \quad f_2 = (1, 2)$$

Bunların gerçekten bir taban oluşturduğunu P 'nin regülerliğinden biliyoruz — bir geçiş matrisi tanım gereği regülerdir. Doğrudan da görülebilir: $x(2, 3) + y(1, 2) = (0, 0)$ denklemi $2x + y = 0$ ve $3x + 2y = 0$ verir; birinciden $y = -2x$, ikincide yerine konursa $3x - 4x = 0$, yani $x = 0$ ve $y = 0$ çıkar. İki vektör lineer bağımsız olduğundan ve $\mathbb{R}^2$ iki boyutlu olduğundan bir taban oluştururlar.

2. $(2, 4) = 2 \cdot (1, 2)$ olduğundan bu iki vektör lineer bağımlıdır; küme bir taban **değildir**.

Yine de sütunları bu vektörler olan matrisi kursaydık

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olurdu. M 'nin satır kanonik şekli birim matris olmadığından **regülerlik ölçütü** gereği M singülerdir ve tersi yoktur. Oysa geçiş matrisi tanım gereği regülerdir — nitekim P^{-1} 'in varlığı, koordinatları geri çevirebilmemizin tek güvencesiydi. Somut olarak: $(1, 2)$ ile $(2, 4)$ yalnızca $y = 2x$ doğrusunu gerdiğinden, bu doğrunun dışındaki hiçbir vektörün “koordinatları” yazılamaz; doğru üzerindeki vektörlerin ise koordinatları tek türlü belirli değildir.

■

32. Problemler

Buraya kadar lineer dönüşümleri, çekirdek ve görüntülerini, dönüşüm uzaylarını, operatör matrisini ve taban değiştirmeyi kurduk. Bu bölüm bir ara duraktır: yeni bir kavram tanıtmaz, öğrendiklerimizi çözümlü problemler üzerinde çalıştırır. Önce hesap tekniklerini adım adım geliştiriyor, sonra karma problemlere geçiyoruz.

i Not

Bazı kaynaklarda ve derslerde **taban** yerine **baz** denir; ikisi aynı şeydir. Bu notlarda “taban” terimini kullanacağız. Aynı şekilde “geçiş matrisi” yerine kimi kaynaklarda “baz değişim matrisi” ya da “taban dönüşüm matrisi” adları geçer.

32.1 Bir Vektörün Koordinatlarını Bulmak

Her şey buna dayanır: $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ bir taban ve v bir vektörse, $[v]_f$ 'yi bulmak

$$v = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n$$

denklemini $x_1, \dots, x_n$ için çözmektir. Bu bir lineer denklem sistemidir ve f bir taban olduğundan **tek çözümü** vardır.

💡 Üç adımda koordinat

1. $v = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$ yazın ve bileşenleri eşitleyerek sistemi kurun.
2. Sistemi çözün – genişletilmiş matris $(f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n \ | \ v)$ 'yi satır kanonik şekle indirmek en hızlısıdır; burada f_j 'ler **sütun** olarak yazılır.
3. Çıkan $(x_1, \dots, x_n)$ değerlerini **sütun** olarak yazın: $[v]_f = (x_1, \dots, x_n)^t$.

Örnek 32.1 (Verilen Tabana Göre Koordinatlar). $\mathbb{R}^3$ 'te $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (1, 0, 1)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2, f_3\}$ bir tabandır. $v = (3, 5, 4)$ vektörünün f tabanına göre koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.

$x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} v &= x f_1 + y f_2 + z f_3 = x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1) + z(1, 0, 1) \\ &= (x + z, x + y, y + z) \end{aligned}$$

Bileşenleri eşitleyelim:

$$x + z = 3, \quad x + y = 5, \quad y + z = 4$$

Üç denklemi toplarsak $2(x + y + z) = 12$, yani $x + y + z = 6$ bulunur. Şimdi her denklemi bu toplamdan çıkaralım:

$$y = 6 - 3 = 3, \quad z = 6 - 5 = 1, \quad x = 6 - 4 = 2$$

Kontrol. Bulunan katsayılar aranan vektörü verir ✓

$$2(1, 1, 0) + 3(0, 1, 1) + 1(1, 0, 1) = (2 + 1, 2 + 3, 3 + 1) = (3, 5, 4)$$

$$[v]_f = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■

⚠ Sıraya dikkat

Koordinatlar taban vektörlerinin **sırasına** bağlıdır. Aynı kümeyi $\{f_3, f_1, f_2\}$ sırasıyla alsaydık aynı vektörün koordinatları $(1, 2, 3)^t$ olurdu. Bu yüzden taban bir küme değil, **sıralı** bir listedir; soruda verilen sırayı bozmayın.

32.2 Geçiş Matrisini Kısa Yoldan Hesaplamak

$\mathbb{R}^n$ 'de tabanlardan biri standart taban değilse, geçiş matrisini tanımdan hesaplamak her bir f_j için ayrı bir denklem sistemi çözmek demektir. Bunun yerine tek bir matris çarpımı yeter.

Teorem 32.1 (Geçiş Matrisinin Çarpanlara Ayrılması). $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ve $f = \{f_1, \dots, f_n\}$, K^n 'in iki tabanı olsun. M_e ile sütunları $e_1, \dots, e_n$ olan matrisi, M_f ile sütunları $f_1, \dots, f_n$ olan matrisi gösterelim. Bu durumda e tabanından f tabanına geçiş matrisi

$$P = M_e^{-1} \cdot M_f$$

İspat.

s ile K^n 'in standart tabanını gösterelim. Sütunları e_j olan M_e matrisi, tanım gereği s tabanından e tabanına geçiş matrisidir; benzer biçimde M_f de s 'den f 'ye geçiş matrisidir. **Koordinat vektörlerinin dönüşümü** teoremi gereği her $v \in K^n$ için

$$M_e \cdot [v]_e = [v]_s \quad \text{ve} \quad M_f \cdot [v]_f = [v]_s$$

Sağ taraflar aynı olduğundan

$$M_e \cdot [v]_e = M_f \cdot [v]_f$$

M_e regüler olduğundan her iki tarafı soldan M_e^{-1} ile çarpalım:

$$[v]_e = M_e^{-1} M_f \cdot [v]_f$$

Öte yandan aynı teorem, e 'den f 'ye geçiş matrisi P için $P \cdot [v]_f = [v]_e$ olduğunu söylüyordu. Demek ki her v için

$$(M_e^{-1} M_f) \cdot [v]_f = P \cdot [v]_f$$

$v \mapsto [v]_f$ dönüşümü K^n üzerine örten olduğundan bu eşitlik her sütun matris için geçerlidir; sırayla standart taban sütunları alınırsa iki matrisin bütün sütunlarının aynı olduğu görülür:

$$P = M_e^{-1} M_f$$

■

💡 Formülü akılda tutmak

Sağdaki matris **varılan** tabanı, soldaki tersi alınan matris **çıkılan** tabanı taşır. Özel olarak e standart taban ise $M_e = I_n$ olur ve $P = M_f$ çıkar — yani bilinen kural: **sütunlar hedef tabanın vektörleridir**.

Aynı fikir ikiden çok tabana da genişler.

Teorem 32.2 (Geçişlerin Zincirlenmesi). e, f ve g, V 'nin üç tabanı; P_1 e 'den f 'ye, P_2 ise f 'den g 'ye geçiş matrisi olsun. Bu durumda e 'den g 'ye geçiş matrisi

$$P_1 \cdot P_2$$

çarpımıdır.

İspat.

Koordinat vektörlerinin dönüşümü teoremi gereği her $v \in V$ için

$$P_1 \cdot [v]_f = [v]_e \quad \text{ve} \quad P_2 \cdot [v]_g = [v]_f$$

İkinciye birincide yerine koyalım:

$$(P_1 P_2) \cdot [v]_g = P_1 (P_2 [v]_g) = P_1 \cdot [v]_f = [v]_e$$

Demek ki $P_1 P_2$ matrisi, her $v \in V$ için g koordinatlarını e koordinatlarına çeviriyor. Burada v olarak sırayla $g_1, \dots, g_n$ alalım: $[g_j]_g$ tam olarak K^n 'in j . standart taban sütunu olduğundan sol taraf $P_1 P_2$ 'nin j . sütununu verir. Öyleyse $P_1 P_2$ 'nin j . sütunu $[g_j]_e$ 'dir; **geçiş matrisi tanımı** gereği bu, e 'den g 'ye geçiş matrisidir.

■

Not

Burada $g = e$ alınırsa $P_1 P_2 = I_n$ çıkar, yani $P_2 = P_1^{-1}$: “ f 'den e 'ye geçiş matrisi P^{-1} 'dir” kuralı bu genel sonucun özel hâlidir. Zincir kuralı, üç veya daha çok taban içeren sorularda ara adımları tek tek hesaplamak yerine matrisleri çarpmayı sağlar.

Örnek 32.2 (İkisi de Standart Olmayan İki Taban). $\mathbb{R}^2$ 'de $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$ ve $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (1, 4)$ olsun. e tabanından f tabanına geçiş matrisini bulunuz.

Çözüm.

Sütunları taban vektörleri olan matrisleri yazalım:

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

M_e^{-1} 'i Gauss-Jordan yöntemiyle, yani $(M_e \mid I_2)$ blok matrisini indirgeyerek bulalım:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \rightarrow -2R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \\ &\quad M_e^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Öyleyse

$$\begin{aligned} P &= M_e^{-1} M_f = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+6 & -3+8 \\ 2-3 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kontrol. P 'nin sütunları f_j 'nin e tabanındaki koordinatları olmalıydı:

$$3e_1 - e_2 = 3(1, 2) - (2, 3) = (1, 3) = f_1 \checkmark$$

$$5e_1 - 2e_2 = 5(1, 2) - 2(2, 3) = (1, 4) = f_2 \checkmark$$

■

Örnek 32.3 (Gauss-Jordan ile Geçiş Matrisi). $\mathbb{R}^3$ 'te $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$ ve $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ olsun. e 'den f 'ye geçiş matrisi P 'yi bulunuz.

Çözüm.

$P = M_e^{-1}M_f$ olduğuna göre, M_e^{-1} 'i ayrıca hesaplamak yerine $(M_e | M_f)$ blok matrisini satır kanonik şekle indirgeyebiliriz; sol blok I_3 olduğunda sağ blok P 'yi verir:

$$(M_e | M_f) \sim (I_3 | M_e^{-1}M_f) = (I_3 | P)$$

Matrisleri kuralım (sütunlar taban vektörleridir):

$$(M_e | M_f) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Sol blok zaten üst üçgen; yukarı doğru temizleyelim.

$R_2 \rightarrow R_2 - R_3$ ve $R_1 \rightarrow R_1 - R_3$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$R_1 \rightarrow R_1 - R_2$:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Sol blok birim matris oldu; sağ blok aradığımız matristir:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. P 'nin birinci sütunu $(0, 0, 1)^t$, yani $f_1 = 0e_1 + 0e_2 + 1e_3 = (1, 1, 1) \checkmark$. İkinci sütun $(-1, 0, 1)^t$, yani

$$-e_1 + e_3 = -(1, 0, 0) + (1, 1, 1) = (0, 1, 1) = f_2 \checkmark$$

Üçüncü sütun $(0, -1, 1)^t$, yani $-e_2 + e_3 = -(1, 1, 0) + (1, 1, 1) = (0, 0, 1) = f_3 \checkmark$

■

32.3 Koordinatları Bir Tabandan Diğere Taşımak

En sık karşılaşılan soru tipi budur: bir vektörün bir tabandaki koordinatları verilir, başka bir tabandaki koordinatları istenir.

❓ Hangi formül?

P , e 'den f 'ye geçiş matrisi olmak üzere

$$P \cdot [v]_f = [v]_e \quad \Leftrightarrow \quad [v]_f = P^{-1} \cdot [v]_e$$

Yönü karıştırmamak için şu cümleyi hatırlayın: **P , f koordinatlarını e koordinatlarına çevirir.** (P 'nin sütunları f 'nin vektörlerinin e 'deki koordinatları olduğundan bu doğaldır.)

Örnek 32.4 (Koordinat Dönüşümü Sorusu). $\mathbb{R}^3$ 'te $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 1, 1)$ ve $f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$ tabanları veriliyor. Bir v vektörünün e tabanındaki koordinatları

$$[v]_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

olduğuna göre $[v]_f$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Birinci yol: doğrudan hesap. Önce v 'yi bulalım:

$$\begin{aligned} v &= 2e_1 - e_2 + 3e_3 = 2(1, 0, 0) - (1, 1, 0) + 3(1, 1, 1) \\ &= (2 - 1 + 3, -1 + 3, 3) = (4, 2, 3) \end{aligned}$$

Şimdi v 'yi f cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} v &= af_1 + bf_2 + cf_3 = a(1, 1, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 1) \\ &= (a, a + b, a + b + c) \end{aligned}$$

Bileşenleri eşitleyelim: $a = 4$, $a + b = 2$ yani $b = -2$, $a + b + c = 3$ yani $c = 1$. Öyleyse

$$[v]_f = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

İkinci yol: geçiş matrisiyle. Bir önceki örnekte $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bulunmuştu. Formül $[v]_f = P^{-1}[v]_e$ olduğuna göre P^{-1} 'e ihtiyacımız var; onu da ters yöndeki geçiş matrisi olarak, yani $P^{-1} = M_f^{-1}M_e$ ile hesaplayabiliriz. Daha kısası, P^{-1} 'in sütunlarının e_j 'lerin f tabanındaki koordinatları olduğunu kullanmaktır:

$$e_1 = (1, 0, 0) = f_1 - f_2 \Rightarrow (1, -1, 0)^t$$

$$e_2 = (1, 1, 0) = f_1 - f_3 \Rightarrow (1, 0, -1)^t$$

$$e_3 = (1, 1, 1) = f_1 \Rightarrow (1, 0, 0)^t$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Şimdi çarpalım:

$$P^{-1}[v]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 + 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

İki yol aynı sonucu verdi.

■

i Not

İkinci yol tek bir vektör için birincisinden uzun görünebilir; ama aynı taban çiftiyle **birden çok** vektör sorulduğunda P^{-1} bir kez hesaplanır ve her vektör için yalnızca bir matris çarpımı kalır. “Aşağıdaki vektörlerin f tabanındaki koordinatlarını bulunuz” biçiminde çok şıklı bir soruda ikinci yol çok daha hızlıdır.

Örnek 32.5 (Aynı Taban Çiftiyle İki Yönlü Soru). $\mathbb{R}^2$ 'de $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$ ve $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (1, 4)$ tabanlarını yeniden ele alalım; e 'den f 'ye geçiş matrisinin

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

olduğunu yukarıda, ikisi de standart olmayan iki taban örneğinde hesaplamıştık.

- a) $[v]_f = (1, -1)^t$ olan v vektörünün e tabanındaki koordinatlarını ve v 'nin kendisini bulunuz.
b) $[w]_e = (4, -1)^t$ olan w vektörünün f tabanındaki koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.

a) İstenen yön tam olarak P 'nin yönüdür: $P \cdot [v]_f = [v]_e$.

$$[v]_e = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektörün kendisi:

$$v = -2e_1 + e_2 = -2(1, 2) + (2, 3) = (0, -1)$$

Kontrol. f koordinatlarıyla da aynı vektör çıkmalı: $f_1 - f_2 = (1, 3) - (1, 4) = (0, -1) \checkmark$

b) Bu kez ters yön gerekiyor: $[w]_f = P^{-1}[w]_e$. Önce P^{-1} 'i blok indirgemeye bulalım:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow -2R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Şimdi çarpalım:

$$[w]_f = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-5 \\ -4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. İki taraftan da vektörü kuralım:

$$w = 4e_1 - e_2 = 4(1, 2) - (2, 3) = (2, 5)$$

$$3f_1 - f_2 = 3(1, 3) - (1, 4) = (2, 5) \checkmark$$

■

32.4 Operatörün Matrisini Yeni Tabanda Yazmak

Örnek 32.6 (Operatör Matrisinin Taban Değişimi). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörü $T(x, y) = (2x + 3y, x - y)$ biçiminde tanımlanıyor. $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 2)$ olmak üzere $[T]_f$ matrisini

- a) benzerlik bağıntısıyla,
- b) doğrudan tanımdan

hesaplayıp karşılaştırınız.

Çözüm.

a) Benzerlik bağıntısıyla. Standart taban e için katsayı tablosu doğrudan okunur:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e standart taban olduğundan e 'den f 'ye geçiş matrisi, sütunları f_j olan matristir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Tersini yine blok indirgemeye bulalım:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Şimdi $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ çarpımını soldan sağa yapalım:

$$P^{-1}[T]_e = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 & 6+1 \\ -2+1 & -3-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}[T]_e) P = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+7 & 3+14 \\ -1-4 & -1-8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}$$

b) Doğrudan tanımdan. Taban vektörlerinin görüntülerini yine f cinsinden yazalım:

$$T(f_1) = T(1, 1) = (2 + 3, 1 - 1) = (5, 0)$$

$(5, 0) = a(1, 1) + b(1, 2) = (a + b, a + 2b)$ denkleminde $a + b = 5$ ve $a + 2b = 0$; çıkarma ile $b = -5$, buradan $a = 10$:

$$T(f_1) = 10f_1 - 5f_2$$

$$T(f_2) = T(1, 2) = (2 + 6, 1 - 2) = (8, -1)$$

$a + b = 8$, $a + 2b = -1$ denklemlerinden $b = -9$, $a = 17$:

$$T(f_2) = 17f_1 - 9f_2$$

Sütunları bu koordinatlardan kurarak

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}$$

İki yol aynı matrisi verdi.

■

Örnek 32.7 (Ters Yön: Yeni Tabandan Standart Tabana). Bir $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörünün $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 2)$ tabanındaki matrisi

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ -5 & -9 \end{pmatrix}$$

olarak veriliyor. T 'nin standart tabandaki matrisini ve $T(x, y)$ kuralını bulunuz.

Çözüm.

$[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ eşitliğini $[T]_e$ için çözelim: her iki tarafı soldan P , sağdan P^{-1} ile çarparsak

$$[T]_e = P [T]_f P^{-1}$$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ile:

$$\begin{aligned} P [T]_f &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ -5 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 5 & 17 - 9 \\ 10 - 10 & 17 - 18 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (P [T]_f) P^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 8 & -5 + 8 \\ 0 + 1 & 0 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Standart tabandaki matris katsayı tablosunun kendisi olduğundan

$$T(x, y) = (2x + 3y, x - y)$$

■

⚠ En sık yapılan hata

$[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ ile $[T]_e = P[T]_f P^{-1}$ formüllerini karıştırmak. Şu kontrolü yapın: P , e 'den f 'ye geçiş matrisidir ve $P \cdot [v]_f = [v]_e$ eşitliğini sağlar — yani P soldan uygulandığında **f koordinatlarını e 'ye taşır**. O hâlde f tabanındaki matrisi elde etmek için, önce P ile f 'den e 'ye geçilir, $[T]_e$ uygulanır, sonra P^{-1} ile e 'den f 'ye dönülür; sağdan sola okunan bu sıra tam olarak $P^{-1}[T]_e P$ 'dir. Emin değilseniz sonucu bir taban vektöründe deneyin: $[T]_f$ 'nin birinci sütunu $T(f_1)$ 'in f koordinatlarını vermelidir.

Örnek 32.8 ($\mathbb{R}^3$ 'te Dönüşüm Matrisi). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ operatörü

$$T(x, y, z) = (x + y - z, 2y + z, x - z)$$

biçiminde tanımlanıyor. $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$ olmak üzere $[T]_f$ matrisini

- doğrudan tanımdan,
- benzerlik bağıntısıyla

hesaplayıp karşılaştırınız.

Çözüm.

a) Doğrudan tanımdan. Bir (p, q, r) vektörünü f cinsinden yazmak kolaydır, çünkü

$$af_1 + bf_2 + cf_3 = (a + b + c, b + c, c)$$

olduğundan bileşenler **sondan başa** okunarak çözülür: $c = r, b = q - r, a = p - q$.

$$T(f_1) = T(1, 0, 0) = (1, 0, 1) \Rightarrow c = 1, b = -1, a = 1$$

$$T(f_2) = T(1, 1, 0) = (2, 2, 1) \Rightarrow c = 1, b = 1, a = 0$$

$$T(f_3) = T(1, 1, 1) = (1, 3, 0) \Rightarrow c = 0, b = 3, a = -2$$

Bulunan koordinatlar sütunlara yazılır:

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Benzerlik bağıntısıyla. Standart tabandaki matris katsayı tablosundan okunur; e standart taban olduğundan geçiş matrisi de sütunları f_j olan matristir:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P^{-1} 'i blok indirgemeyle bulalım; sol blok üst üçgen olduğundan yalnız yukarı temizlik gerekir. $R_2 \rightarrow R_2 - R_3$ ve $R_1 \rightarrow R_1 - R_3$, ardından $R_1 \rightarrow R_1 - R_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Çarpımı soldan sağa yapalım:

$$P^{-1}[T]_e = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}[T]_e)P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

İki yol aynı matrisi verdi.

Kontrol. $[T]_f$ 'nin birinci sütunu $T(f_1)$ 'in f koordinatları olmalı:

$$f_1 - f_2 + f_3 = (1, 0, 0) - (1, 1, 0) + (1, 1, 1) = (1, 0, 1) = T(f_1) \checkmark$$

■

32.5 $\mathbb{R}^n$ Dışında: Polinom Uzayı

Taban değiştirme yalnızca $\mathbb{R}^n$ 'e özgü değildir; koordinat vektörü tanımlanabilen her sonlu boyutlu uzayda aynı şekilde çalışır.

Örnek 32.9 (Polinom Uzayında Taban Değiştirme). Derecesi en çok 2 olan reel polinomların uzayı $P_2(\mathbb{R})$ 'de

$$e = \{1, x, x^2\}, \quad f = \{1, x-1, (x-1)^2\}$$

tabanları veriliyor.

- a) e 'den f 'ye geçiş matrisi P 'yi bulunuz.
b) $p(x) = 2x^2 - 5x + 3$ polinomunun f tabanındaki koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.

a) P 'nin sütunları, f 'nin vektörlerinin e tabanındaki koordinatlarıdır. e tabanında bir polinomun koordinatları katsayılarıdır (sabit, x 'in katsayısı, x^2 'nin katsayısı sırasıyla):

$$f_1 = 1 = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow (1, 0, 0)^t$$

$$f_2 = x - 1 = -1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 \Rightarrow (-1, 1, 0)^t$$

$$f_3 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 = 1 - 2x + x^2 \Rightarrow (1, -2, 1)^t$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$p(x) = a + b(x - 1) + c(x - 1)^2$$

yazalım ve sağ tarafı düzenleyelim:

$$a + b(x - 1) + c(x^2 - 2x + 1) = c x^2 + (b - 2c) x + (a - b + c)$$

$p(x) = 2x^2 - 5x + 3$ ile katsayıları eşitleyelim:

$$c = 2, \quad b - 2c = -5, \quad a - b + c = 3$$

İkinciden $b = -5 + 4 = -1$; üçüncüden $a = 3 + b - c = 3 - 1 - 2 = 0$. Öyleyse

$$[p]_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kontrol. $[p]_e = (3, -5, 2)^t$ olduğuna göre $P[p]_f = [p]_e$ olmalı:

$$P[p]_f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 1 + 2 \\ -1 - 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = [p]_e \quad \checkmark$$

■

i Not

(b) şıkkının yaptığı iş aslında $p(x)$ 'i $x = 1$ noktası etrafında yeniden yazmaktır: $p(x) = -(x - 1) + 2(x - 1)^2$. Taban değiştirmenin somut bir anlamı budur — aynı nesneyi başka bir “ölçü takımıyla” ifade etmek.

32.6 Çekirdek, Görüntü ve Boyut

Aşağıdaki iki problem aynı kalıptadır: bir dönüşümün lineer olduğu gösterilir, sonra görüntü ve çekirdeğin birer tabanı ile boyutları bulunur. **Boyut teoremi** her adımda bir kontrol noktası verir.

Örnek 32.10 (Düzleme Giden Bir Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü, her $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ için

$$F(x, y, z) = (x + y, y + z)$$

biçiminde tanımlanıyor.

- F 'nin lineer olduğunu gösteriniz.
- $\text{Im } F$ görüntü uzayının bir tabanını ve boyutunu bulunuz.
- $\text{Ker } F$ çekirdeğinin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm.

a) $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$ olsun.

$$\begin{aligned} F(v + w) &= F(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\ &= ((v_1 + w_1) + (v_2 + w_2), (v_2 + w_2) + (v_3 + w_3)) \\ &= ((v_1 + v_2) + (w_1 + w_2), (v_2 + v_3) + (w_2 + w_3)) \\ &= (v_1 + v_2, v_2 + v_3) + (w_1 + w_2, w_2 + w_3) = F(v) + F(w) \end{aligned}$$

$k \in \mathbb{R}$ için

$$F(kv) = (kv_1 + kv_2, kv_2 + kv_3) = k(v_1 + v_2, v_2 + v_3) = kF(v)$$

İki koşul da sağlandığından F lineerdir.

b) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ 'ü doğurduğundan, **doğuran kümenin görüntüsü** gereği görüntülerinin oluşturduğu küme $\text{Im } F$ 'yi doğurur:

$$F(1, 0, 0) = (1, 0), \quad F(0, 1, 0) = (1, 1), \quad F(0, 0, 1) = (0, 1)$$

Bu üç vektörden hangilerinin bağımsız olduğunu bulmak için satır olarak yazıp merdiven şekline indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow -R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sıfırdan farklı iki satır kaldığından

$$\{(1, 0), (0, 1)\} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Im } F) = 2$$

(Görüntü bütün $\mathbb{R}^2$ 'dir, yani F örtendir.)

c) Tanım gereği

$$\begin{aligned} \text{Ker } F &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (0, 0) \} \\ &= \{ (x, y, z) : x + y = 0, \quad y + z = 0 \} \end{aligned}$$

Birinciden $y = -x$, ikinciden $z = -y = x$ çıkar; x serbest değişkendir. $x = 1$ alalım:

$$\text{Ker } F = \{ k(1, -1, 1) : k \in \mathbb{R} \}, \quad \{(1, -1, 1)\} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Ker } F) = 1$$

Kontrol. Boyut teoremi: $\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Ker } F) + \dim(\text{Im } F)$, yani $3 = 1 + 2$ ✓

■

Örnek 32.11 (Uzayı Kendi İçine Götüren Bir Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü

$$F(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$$

biçiminde tanımlanıyor. F 'nin lineer olduğunu gösteriniz; $\text{Im } F$ ile $\text{Ker } F$ 'nin birer tabanını ve boyutlarını bulunuz.

Çözüm.

Lineerlik. Her bileşen, değişkenlerin sabit katsayılı bir toplamıdır; bir önceki problemdeki hesabın aynısı yapılırsa

$$F(v + w) = F(v) + F(w), \quad F(kv) = kF(v)$$

elde edilir. (Genel kural: bileşenleri x, y, z 'nin homojen birinci dereceden ifadeleri olan her dönüşüm lineerdir.)

Görüntü. Standart taban vektörlerinin görüntüleri:

$$F(1, 0, 0) = (1, 0, 1), \quad F(0, 1, 0) = (2, 1, 0), \quad F(0, 0, 1) = (0, -1, 2)$$

Bunları satır olarak yazıp indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_2 + R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{ (1, 0, 1), (0, 1, -2) \} \text{ bir tabandır,} \quad \dim(\text{Im } F) = 2$$

Çekirdek. $F(x, y, z) = (0, 0, 0)$ denklemini çözelim:

$$x + 2y = 0, \quad y - z = 0, \quad x + 2z = 0$$

İkinciden $y = z$; birinciden $x = -2y = -2z$. Üçüncü denklem $-2z + 2z = 0$ ile kendiliğinden sağlanır. $z = 1$ alalım:

$$\text{Ker } F = \{ k(-2, 1, 1) : k \in \mathbb{R} \}, \quad \dim(\text{Ker } F) = 1$$

Kontrol. $3 = 1 + 2$ ✓ Ayrıca $\dim(\text{Ker } F) \neq 0$ olduğundan F singülerdir ve tersi yoktur.

■

32.7 Dönüşümü Taban Değerlerinden Kurmak

Bir lineer dönüşüm, bir taban üzerindeki değerleriyle tamamen belirlenir. Bu, iki yönlü bir araçtır: taban değerleri verilince dönüşümün formülü bulunabilir, matris gösterimi verilince de dönüşüm geri kurulabilir.

Örnek 32.12 (Verilen İki Değerden Dönüşümü Bulmak). $T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ ve $T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ olacak şekilde bir $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü var mıdır? Varsa $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ için $T \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Varlık. $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanı olduğunu görelim: iki vektör lineer bağımsızdır (biri diğerinin katı değil) ve $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ 'dir. **Dönüşümün tabanla belirlenmesi** teoremi gereği, bir tabanın vektörlerine istenen değerler verilerek **tek türlü belirli** bir lineer dönüşüm elde edilir. Öyleyse böyle bir T vardır ve tektir.

Formül. Önce (a, b) 'yi taban cinsinden yazalım:

$$(a, b) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (x, 2x + y)$$

Bileşenleri eşitlersek $x = a$ ve $2a + y = b$, yani $y = b - 2a$ çıkar. Şimdi T 'nin lineerliğini kullanalım:

$$\begin{aligned} T \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right) &= T \left(a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (b - 2a) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = a T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + (b - 2a) T \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= a(3, -1, 5) + (b - 2a)(2, 1, -1) \\ &= (3a, -a, 5a) + (2b - 4a, b - 2a, -b + 2a) \\ &= (-a + 2b, -3a + b, 7a - b) \end{aligned}$$

Kontrol. $(a, b) = (1, 2)$ için $(-1 + 4, -3 + 2, 7 - 2) = (3, -1, 5) \checkmark$ ve $(a, b) = (0, 1)$ için $(2, 1, -1) \checkmark$
■

Örnek 32.13 (Matris Gösteriminden Formüle). $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, -1)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2\}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanıdır. Bir $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operatörünün bu tabana göre matris gösterimi

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

olduğuna göre $T(x, y)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Taban vektörlerinin görüntüleri. $[T]_f$ 'nin sütunları $T(f_j)$ 'nin f koordinatlarıdır:

$$T(f_1) = 2f_1 + 0f_2 = 2(1, 1) = (2, 2)$$

$$T(f_2) = 0f_1 - 3f_2 = -3(1, -1) = (-3, 3)$$

Genel vektör. $(x, y) = af_1 + bf_2 = (a + b, a - b)$ olsun. İki denklemi toplayıp çıkararak

$$a = \frac{x + y}{2}, \quad b = \frac{x - y}{2}$$

Formül. T lineer olduğundan

$$\begin{aligned} T(x, y) &= aT(f_1) + bT(f_2) = \frac{x + y}{2}(2, 2) + \frac{x - y}{2}(-3, 3) \\ &= \left(x + y, x + y \right) + \left(\frac{-3x + 3y}{2}, \frac{3x - 3y}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2x + 2y - 3x + 3y}{2}, \frac{2x + 2y + 3x - 3y}{2} \right) = \left(\frac{-x + 5y}{2}, \frac{5x - y}{2} \right) \end{aligned}$$

Kontrol. $T(1, 1) = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{5-1}{2} \right) = (2, 2) \checkmark$ ve $T(1, -1) = \left(\frac{-1-5}{2}, \frac{5+1}{2} \right) = (-3, 3) \checkmark$
■

💡 Köşegen matrisin okunuşu

Bu problemde $[T]_f$ köşegendi ve bu, T 'nin f_1 yönünü 2 katına çıkardığını, f_2 yönünü ise -3 katına götürdüğünü doğrudan okuttu. Standart tabandaki formül ise kesirli ve karmaşık göründü. Doğru tabanın operatörü nasıl sadeleştirdiğinin somut bir örneğidir.

32.8 Matris Gösterimi ve Taban Değişimi

Örnek 32.14 (Kompleks Sayılar Üzerinde Bir Operatör). Kompleks sayılar cismi $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$, reel sayılar cismi $\mathbb{R}$ üzerinde 2 boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde, her $a + bi \in \mathbb{C}$ için

$$T(a + bi) = a - bi$$

lineer operatörü (eşlenik alma) veriliyor.

- a) $E = \{1, i\}$, $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{R}$ üzerinde bir tabanıdır. $[T]_E$ matris gösterimini bulunuz.
 b) Her $v \in \mathbb{C}$ için $[T]_E [v]_E = [T(v)]_E$ olduğunu gösteriniz.
 c) $F = \{1 + i, 1 + 2i\}$ de $\mathbb{C}$ 'nin $\mathbb{R}$ üzerinde bir tabanıdır. $[T]_F$ 'yi bulunuz.
 d) E tabanından F tabanına geçiş matrisi P 'yi bulunuz.
 e) Her $v \in \mathbb{C}$ için $[v]_E = P [v]_F$ olduğunu gösteriniz.
 f) $[T]_F = P^{-1} [T]_E P$ olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

a) Taban vektörlerinin görüntülerini E cinsinden yazalım:

$$T(1) = T(1 + 0i) = 1 - 0i = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot i \Rightarrow [T(1)]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(i) = T(0 + 1i) = 0 - 1i = -i = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot i \Rightarrow [T(i)]_E = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $v = a + bi$ olsun. E tabanına göre koordinatlar katsayılarıdır: $[v]_E = (a, b)^t$. Çarpalım:

$$[T]_E [v]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

Öte yandan $T(v) = a - bi$ olduğundan $[T(v)]_E = (a, -b)^t$ 'dir. İki taraf eşittir.

c) Önce F tabanına göre koordinat almayı hazırlayalım. $p + qi = x(1 + i) + y(1 + 2i) = (x + y) + (x + 2y)i$ olduğundan

$$x + y = p, \quad x + 2y = q \Rightarrow y = q - p, \quad x = p - y = 2p - q$$

Şimdi taban vektörlerinin görüntülerini bu kuralla yazalım:

$$T(1 + i) = 1 - i \Rightarrow p = 1, q = -1 \Rightarrow x = 2 + 1 = 3, y = -1 - 1 = -2$$

$$T(1 + 2i) = 1 - 2i \Rightarrow p = 1, q = -2 \Rightarrow x = 2 + 2 = 4, y = -2 - 1 = -3$$

$$[T]_F = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

d) Geçiş matrisinin sütunları, F vektörlerinin E tabanındaki koordinatlarıdır:

$$1 + i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 1 + 2i \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e) $v = a + bi$ olsun; (c) şıkkındaki kuralla $[v]_F = (2a - b, b - a)^t$ 'dir. Çarpalım:

$$P[v]_F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a - b \\ b - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2a - b) + (b - a) \\ (2a - b) + 2(b - a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = [v]_E \checkmark$$

(Bu, **koordinat vektörlerinin dönüşümü** teoreminin bu örnekteki doğrulamasıdır.)

f) $|P| = 2 - 1 = 1$ olduğundan

$$P^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Önce $[T]_E P$ 'yi hesaplayalım:

$$[T]_E P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sonra soldan P^{-1} ile çarpalım:

$$P^{-1} ([T]_E P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 2+2 \\ -1-1 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = [T]_F \checkmark$$

■

Örnek 32.15 (Standart Olmayan Bir Tabanda Operatör Matrisi). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (5x + y, 3x - 2y)$ operatörü veriliyor. $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$ olmak üzere $e = \{e_1, e_2\}$, $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanıdır.

- a) $[T]_e$ matris gösterimini bulunuz.
b) Her $v \in \mathbb{R}^2$ için $[T]_e[v]_e = [T(v)]_e$ olduğunu gösteriniz.
c) $f_1 = (1, 3)$, $f_2 = (1, 4)$ olmak üzere $f = \{f_1, f_2\}$ de bir tabandır. e tabanından f tabanına geçiş matrisi P 'yi bulunuz.

Çözüm.

a) Önce e tabanına göre koordinat kuralını çıkaralım: $(p, q) = \alpha(1, 2) + \beta(2, 3) = (\alpha + 2\beta, 2\alpha + 3\beta)$ olduğundan

$$\alpha + 2\beta = p, \quad 2\alpha + 3\beta = q$$

Birinciye 2 ile çarpıp ikinciden çıkaralım: $-\beta = q - 2p$, yani $\beta = 2p - q$; buradan $\alpha = p - 2\beta = p - 4p + 2q = -3p + 2q$.

$$[(p, q)]_e = \begin{pmatrix} -3p + 2q \\ 2p - q \end{pmatrix}$$

Şimdi taban vektörlerinin görüntülerini hesaplayıp bu kuralı uygulayalım:

$$T(e_1) = T(1, 2) = (5 + 2, 3 - 4) = (7, -1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -21 - 2 \\ 14 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T(2, 3) = (10 + 3, 6 - 6) = (13, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} -39 + 0 \\ 26 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$[T]_e = \begin{pmatrix} -23 & -39 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$$

Kontrol. Birinci sütun $T(e_1)$ 'i geri verir $\checkmark$

$$-23(1, 2) + 15(2, 3) = (-23 + 30, -46 + 45) = (7, -1) = T(e_1)$$

b) $v = (p, q)$ olsun; koordinat kuralıyla $[v]_e = (-3p + 2q, 2p - q)^t$ 'dir. Çarpalım:

$$[T]_e[v]_e = \begin{pmatrix} -23 & -39 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3p + 2q \\ 2p - q \end{pmatrix}$$

Birinci satır:

$$-23(-3p + 2q) - 39(2p - q) = 69p - 46q - 78p + 39q = -9p - 7q$$

İkinci satır:

$$15(-3p + 2q) + 26(2p - q) = -45p + 30q + 52p - 26q = 7p + 4q$$

Öte yandan $T(v) = (5p + q, 3p - 2q)$ 'dur; koordinat kuralını buna uygulayalım:

$$-3(5p + q) + 2(3p - 2q) = -15p - 3q + 6p - 4q = -9p - 7q$$

$$2(5p + q) - (3p - 2q) = 10p + 2q - 3p + 2q = 7p + 4q$$

İki taraf da $(-9p - 7q, 7p + 4q)^t$ çıktı ✓

c) Geçiş matrisinin sütunları f_j 'nin e tabanındaki koordinatlarıdır; (a) şıkkındaki kuralı kullanalım:

$$f_1 = (1, 3) \Rightarrow \begin{pmatrix} -3+6 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = (1, 4) \Rightarrow \begin{pmatrix} -3+8 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bu, aynı taban çifti için yukarıda **İkisi de Standart Olmayan İki Taban** örneğinde $M_e^{-1}M_f$ çarpımıyla bulunan matrisin aynısıdır; iki yol da aynı sonucu verir.

■

Örnek 32.16 (Türev Operatörünün İki Tabandaki Matrisi). Derecesi en çok 2 olan reel polinomların uzayı $P_2(\mathbb{R})$ üzerinde türev operatörünü ele alalım:

$$D : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R}), \quad D(p) = p'$$

- a) $e = \{1, x, x^2\}$ tabanına göre $[D]_e$ matrisini bulunuz.
b) $\text{Ker } D$ ile $\text{Im } D$ 'nin boyutlarını bulup boyut teoremini doğrulayınız.
c) $f = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ tabanına göre $[D]_f$ matrisini hem doğrudan hem de taban değişimi formülüyle hesaplayınız.

Çözüm.

a) Taban vektörlerinin türevlerini alıp e cinsinden yazalım (e tabanında koordinatlar katsayılarıdır):

$$D(1) = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)^t, \quad D(x) = 1 \Rightarrow (1, 0, 0)^t, \quad D(x^2) = 2x \Rightarrow (0, 2, 0)^t$$

$$[D]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $D(p) = 0$ olması p 'nin sabit polinom olması demektir:

$$\text{Ker } D = \{ a : a \in \mathbb{R} \} = L(1), \quad \dim(\text{Ker } D) = 1$$

Görüntü, $[D]_e$ 'nin sıfırdan farklı sütunlarının gerdiği uzaydır; $(1, 0, 0)^t$ ve $(0, 2, 0)^t$ lineer bağımsız olduğundan

$$\text{Im } D = L(1, x), \quad \dim(\text{Im } D) = 2$$

Kontrol. $\dim P_2(\mathbb{R}) = 3 = 1 + 2$ ✓

c) **Doğrudan hesap.** Önce f tabanına göre koordinat kuralını çıkaralım:

$$a + bx + cx^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(1+x) + \gamma(1+x+x^2) = (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + \gamma)x + \gamma x^2$$

Sondan başlayarak: $\gamma = c, \beta = b - c, \alpha = a - b$.

Şimdi f 'nin vektörlerinin türevlerini alalım:

$$D(1) = 0 \Rightarrow (0, 0, 0)^t$$

$$D(1+x) = 1 \Rightarrow a = 1, b = c = 0 \Rightarrow (1, 0, 0)^t$$

$$D(1+x+x^2) = 1+2x \Rightarrow a = 1, b = 2, c = 0 \Rightarrow (1-2, 2-0, 0)^t = (-1, 2, 0)^t$$

$$[D]_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Taban değişimi formülüyle. P 'nin sütunları f vektörlerinin e koordinatlarıdır:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(P üst üçgen olduğundan tersi de üst üçgendir; çarpımla doğrulanabilir.)

$$[D]_e P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} ([D]_e P) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [D]_f \checkmark$$

■

Örnek 32.17 (Üç Taban ve Zincir Kuralı). $\mathbb{R}^2$ 'de e standart taban; $f = \{(1, 1), (1, 2)\}$ ve $g = \{(2, 1), (3, 2)\}$ olsun.

- e 'den f 'ye geçiş matrisi P 'yi ve e 'den g 'ye geçiş matrisi R 'yi yazınız.
- f 'den g 'ye geçiş matrisi Q 'yu doğrudan hesaplayınız.
- $R = PQ$ olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.

a) e standart taban olduğundan geçiş matrislerinin sütunları doğrudan hedef tabanın vektörleridir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Q 'nun sütunları, g vektörlerinin f tabanındaki koordinatlarıdır.

$$g_1 = (2, 1) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 2) = (\alpha + \beta, \alpha + 2\beta)$$

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha + 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = -1, \alpha = 3$$

$$g_2 = (3, 2) : \quad \alpha + \beta = 3, \quad \alpha + 2\beta = 2 \Rightarrow \beta = -1, \alpha = 4$$

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Zincir kuralına göre e 'den g 'ye geçiş, PQ çarpımı olmalıdır:

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 4-1 \\ 3-2 & 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = R \checkmark$$

■

32.9 İspat Problemleri

Örnek 32.18 (İzomorfizm Tabanı Tabana Götürür). V ve W , bir K komütatif cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $F : V \rightarrow W$ bir **üzerine** (örten) vektör uzayı izomorfizmi olsun. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ kümesi V 'nin K üzerinde bir tabanı ise, $\{F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)\}$ kümesinin de W 'nin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bir tabanın iki özelliğini ayrı ayrı gösterelim.

Doğurma. $w \in W$ olsun. F örten olduğundan $F(v) = w$ olacak biçimde bir $v \in V$ vardır. $\{v_1, \dots, v_n\}$ bir taban olduğundan uygun $a_1, \dots, a_n \in K$ skalerleriyle

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

yazılır. F 'yi uygulayalım; F lineer olduğundan

$$w = F(v) = a_1 F(v_1) + a_2 F(v_2) + \cdots + a_n F(v_n)$$

Demek ki her $w \in W$, $F(v_i)$ 'lerin bir lineer kombinasyonudur.

Lineer bağımsızlık. $a_1 F(v_1) + \cdots + a_n F(v_n) = 0_W$ olsun. Lineerlikten

$$F(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = 0_W$$

F bir izomorfizm, dolayısıyla bire birdir; bire bir lineer dönüşümün çekirdeği yalnız sıfırdan oluşur:

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0_V$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ lineer bağımsız olduğundan $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0_K$ 'dir.

İki özellik birlikte $\{F(v_1), \dots, F(v_n)\}$ 'nin W 'nin bir tabanı olduğunu verir.

■

i Not

Bu sonucun doğrudan bir çıkarımı vardır: izomorf iki sonlu boyutlu uzayın boyutları eşittir. Tabanın eleman sayısı boyut olduğundan $\dim W = n = \dim V$ 'dir.

Örnek 32.19 (Singüler Olmayanların Bileşkesi). U ve V , aynı bir K komütatif cismi üzerinde iki vektör uzayı; $F : V \rightarrow U$ ve $G : U \rightarrow V$ iki lineer dönüşüm olsun. F ve G 'nin her ikisi de singüler değilse, $G \circ F$ lineer dönüşümünün de singüler olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

Singüler olmama ölçütü gereği bir lineer dönüşümün singüler olmaması, çekirdeğinin yalnız sıfır vektöründen oluşması demektir. Varsayımımız

$$\text{Ker } F = \{0_V\}, \quad \text{Ker } G = \{0_U\}$$

$G \circ F : V \rightarrow V$ dönüşümünün çekirdeğini inceleyelim:

$$\text{Ker } (G \circ F) = \{ v \in V : G(F(v)) = 0_V \}$$

$v \in \text{Ker } (G \circ F)$ olsun, yani $G(F(v)) = 0_V$ olsun. $F(v)$, G 'nin çekirdeğinde bir vektördür; $\text{Ker } G = \{0_U\}$ olduğundan

$$F(v) = 0_U$$

Bu kez v , F 'nin çekirdeğindedir; $\text{Ker } F = \{0_V\}$ olduğundan

$$v = 0_V$$

Demek ki $\text{Ker } (G \circ F) = \{0_V\}$ 'dir ve $G \circ F$ singüler değildir.

■

💡 Aynı ifadenin başka okunuşları

Sonlu boyutlu uzaylarda singüler olmama, bire bir olmayla ve (boyutlar eşitse) örten olmayla denktir. Bu problem, “bire bir iki dönüşümün bileşkesi bire birdir” biçiminde de okunabilir. Matris diliyle karşılığı da tanındıktır: iki regüler matrisin çarpımı regülerdir.

32.10 Alıştırma

Alıştırma 32.1 (Koordinat ve Taban Soruları).

- $\mathbb{R}^2$ 'de $f_1 = (2, 1)$, $f_2 = (1, 1)$ olsun. $v = (5, 3)$ vektörünün f tabanındaki koordinatlarını bulunuz.
- $\mathbb{R}^2$ 'de $e_1 = (1, 1)$, $e_2 = (1, -1)$ ve $f_1 = (2, 1)$, $f_2 = (1, 1)$ tabanları veriliyor. e 'den f 'ye geçiş matrisi P 'yi bulunuz. $[v]_e = (3, 1)^t$ ise $[v]_f$ nedir?
- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, 3x)$ operatörünün $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (2, 1)$ tabanındaki matrisini bulunuz.
- $P_2(\mathbb{R})$ 'de $f = \{1, x + 1, (x + 1)^2\}$ tabanına göre $p(x) = x^2 + 4x + 1$ polinomunun koordinatlarını bulunuz.
2. mertebeden reel kare matrislerin uzayı $M_2(\mathbb{R})$ 'de

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bir tabandır. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin bu tabana göre koordinatlarını bulunuz. 6. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (z, x, y)$ operatörünün $f_1 = (1, 0, 0)$, $f_2 = (1, 1, 0)$, $f_3 = (1, 1, 1)$ tabanındaki matrisini bulunuz.

Çözüm.

- $xf_1 + yf_2 = (2x + y, x + y) = (5, 3)$ denkleminde

$$2x + y = 5, \quad x + y = 3$$

Birinciden ikinciye çıkarırsak $x = 2$, buradan $y = 1$:

$$[v]_f = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. $2(2, 1) + (1, 1) = (5, 3)$ ✓

- Sütunları taban vektörleri olan matrisler:

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M_e^{-1} 'i blok indirgemeyeyle bulalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow -\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \rightarrow -R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_e^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P = M_e^{-1}M_f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Kontrol. P 'nin birinci sütunu f_1 'in e 'deki koordinatları olmalı:

$$\frac{3}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 = \frac{3}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) = (2, 1) = f_1 \quad \checkmark$$

$[v]_f$ için önce v 'yi bulmak en kısıası: $v = 3e_1 + e_2 = 3(1, 1) + (1, -1) = (4, 2)$. Şimdi

$$(4, 2) = x(2, 1) + y(1, 1) = (2x + y, x + y)$$

$$\Rightarrow 2x + y = 4, \quad x + y = 2$$

Buradan $x = 2, y = 0$:

$$[v]_f = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aynı sonucu $P^{-1}[v]_e$ ile de alabilirdiniz.

3. Doğrudan tanımdan gidelim.

$$T(f_1) = T(1, 1) = (1 + 2, 3) = (3, 3)$$

$(3, 3) = a(1, 1) + b(2, 1) = (a + 2b, a + b)$ denkleminde $a + 2b = 3, a + b = 3$; çıkarma ile $b = 0, a = 3$:

$$T(f_1) = 3f_1 + 0f_2$$

$$T(f_2) = T(2, 1) = (2 + 2, 6) = (4, 6)$$

$a + 2b = 4, a + b = 6$ denklemlerinden $b = -2, a = 8$:

$$T(f_2) = 8f_1 - 2f_2$$

$$[T]_f = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. $p(x) = a + b(x + 1) + c(x + 1)^2$ yazalım:

$$a + b(x + 1) + c(x^2 + 2x + 1) = cx^2 + (b + 2c)x + (a + b + c)$$

$p(x) = x^2 + 4x + 1$ ile eşitleyelim:

$$c = 1, \quad b + 2c = 4, \quad a + b + c = 1$$

İkinciden $b = 2$; üçüncüden $a = 1 - b - c = 1 - 2 - 1 = -2$:

$$[p]_f = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. Bulunan katsayılar $p(x)$ 'i geri verir ✓

$$-2 + 2(x + 1) + (x + 1)^2 = -2 + 2x + 2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + 4x + 1$$

5. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ yazalım ve sağ tarafı toplayalım:

$$af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = \begin{pmatrix} a + b + c + d & b + c + d \\ c + d & d \end{pmatrix}$$

Bunu A ile karşılaştıralım:

$$\begin{pmatrix} a + b + c + d & b + c + d \\ c + d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sağ alttan başlayarak geriye doğru çözelim:

$$d = 4, \quad c + d = 3 \implies c = -1, \quad b + c + d = 2 \implies b = -1$$

$$a + b + c + d = 1 \implies a = 1 - (-1) - (-1) - 4 = -1$$

$$[A]_f = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Kontrol.

$$\begin{aligned} -f_1 - f_2 - f_3 + 4f_4 &= \begin{pmatrix} -1 - 1 - 1 + 4 & 0 - 1 - 1 + 4 \\ 0 + 0 - 1 + 4 & 0 + 0 + 0 + 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \checkmark \end{aligned}$$

6. Bir (p, q, r) vektörünün bu tabandaki koordinatları, $af_1 + bf_2 + cf_3 = (a + b + c, b + c, c)$ eşitliği sondan başa okunarak bulunur: $c = r, b = q - r, a = p - q$.

$$T(f_1) = (0, 1, 0) \Rightarrow (-1, 1, 0)^t$$

$$T(f_2) = (0, 1, 1) \Rightarrow (-1, 0, 1)^t$$

$$T(f_3) = (1, 1, 1) \Rightarrow (0, 0, 1)^t$$

$$[T]_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. Birinci sütun: $-f_1 + f_2 = -(1, 0, 0) + (1, 1, 0) = (0, 1, 0) = T(f_1) \checkmark$

■

33. Benzerlik ve İz

Taban değiştirme bölümü tek bir formülle kapanmıştı: aynı operatörün iki tabandaki matrisleri $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ bağıntısıyla birbirine bağlıdır. şimdi bu bağıntıyı operatörden bağımsız olarak, matrisler arasında bir ilişki gibi ele alıyoruz. Ortaya çıkan **benzerlik** kavramı, “bir matrisin hangi özellikleri taban seçimine bağlı değildir?” sorusunun doğru çerçevesidir; bu bölümde bu özelliklerden ikisini — rank ve iz — inceleyip, dersin geri kalanının etrafında döndüğü soruyu soruyoruz: bir operatörün matrisi hangi durumda köşegen yapılabilir?

33.1 Benzer Matrisler

Tanım 33.1 (Benzer Matrisler). A ve B , K üzerinde n . mertebeden iki kare matris olsun. Eğer

$$B = P^{-1}AP$$

olacak şekilde regüler bir P matrisi varsa, A ile B 'ye **benzer matrisler** denir ve $A \sim B$ yazılır.

Taban değişimi teoremi, aynı operatörün farklı tabanlardaki matrislerinin daima benzer olduğunu söylüyordu. Tersisi de doğrudur.

Teorem 33.1 (Benzer Matrisler Aynı Operatörü Temsil Eder). $A \sim B$ ise, K^n üzerinde uygun iki taban seçilerek A ile B 'nin aynı operatörün matrisleri olduğu görülebilir.

İspat.

$B = P^{-1}AP$ olacak biçimde regüler bir P olsun. e ile K^n 'in standart tabanını gösterelim ve

$$T : K^n \rightarrow K^n, \quad v \mapsto A \cdot v$$

operatörünü alalım; *standart tabandaki matris* sonucundan $[T]_e = A$ 'dır.

P regüler olduğundan sütunları lineer bağımsızdır; n tane lineer bağımsız vektör K^n 'in bir tabanını oluşturur. Bu sütunları $f_1, \dots, f_n$ diye adlandıralım; $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ bir tabandır ve sütunları f_j olan matris tam olarak P olduğundan P , e 'den f 'ye geçiş matrisidir.

Taban değişimi teoremi gereği

$$[T]_f = P^{-1}[T]_e P = P^{-1}AP = B$$

Demek ki A ile B , aynı T operatörünün sırasıyla e ve f tabanlarındaki matrisleridir.

■

Teorem 33.2 (Benzerlik Bir Denklik Bağıntısıdır). K üzerinde n . mertebeden kare matrisler kümesinde benzerlik bağıntısı yansıyan, simetrik ve geçişkendir.

İspat.

Yansıma. $P = I_n$ alalım; $I_n^{-1}AI_n = A$ olduğundan $A \sim A$ 'dır.

Simetri. $B = P^{-1}AP$ olsun. Her iki tarafı soldan P , sağdan P^{-1} ile çarparsak

$$A = PBP^{-1} = (P^{-1})^{-1}B(P^{-1})$$

P^{-1} de regüler olduğundan $B \sim A$ 'dır.

Geçişme. $B = P^{-1}AP$ ve $C = Q^{-1}BQ$ olsun. Yerine koyalım:

$$C = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (Q^{-1}P^{-1})A(PQ) = (PQ)^{-1}A(PQ)$$

Son adımda *ters matrisin özellikleri* gereği $(PQ)^{-1} = Q^{-1}P^{-1}$ kullanıldı. PQ iki regüler matrisin çarpımı olarak regülerdir; öyleyse $A \sim C$ 'dir.

■

Benzer matrislerin ortak yanları, temsil ettikleri operatörün tabandan bağımsız özellikleridir. En temeli ranktır.

Teorem 33.3 (Benzer Matrislerin Rankı Eşittir). V sonlu boyutlu, e bir tabanı ve $T \in A(V)$ olsun. O zaman

$$\text{rank} ([T]_e) = \dim(\text{Im } T)$$

Özel olarak benzer iki matrisin rankı eşittir.

İspat.

$e = \{e_1, \dots, e_n\}$ olsun. $\{e_1, \dots, e_n\}$ V 'yi doğurduğundan *doğuran kümenin görüntüsü* gereği

$$\text{Im } T = L (T(e_1), \dots, T(e_n))$$

$[T]_e$ 'nin sütunları tam olarak $[T(e_1)]_e, \dots, [T(e_n)]_e$ olduğundan, $[T]_e$ 'nin sütun uzayı bu koordinat vektörlerinin gerdiği uzaydır.

$v \mapsto [v]_e$ dönüşümü V 'den K^n üzerine bir *izomorfizmdir*; izomorfizmler lineer bağımsızlığı ve doğuran olmayı koruduğundan $\text{Im } T$ ile onun koordinat görüntüsü aynı boyuttadır:

$$\dim(\text{Im } T) = \dim ([T]_e \text{ 'nin sütun uzayı}) = \text{rank} ([T]_e)$$

Şimdi $A \sim B$ olsun. **Benzer Matrisler Aynı Operatörü Temsil Eder** teoremi gereği A ile B , aynı T operatörünün iki farklı tabandaki matrisleridir. Sağ taraf $\dim(\text{Im } T)$ tabandan bağımsız olduğundan

$$\text{rank} (A) = \dim(\text{Im } T) = \text{rank} (B)$$

■

i Not

Bu, benzerliği çürütmek için pratik bir ölçüt verir: **rankları farklı olan iki matris benzer olamaz.** Ölçüt tek yönlüdür — rankları eşit olan iki matris benzer olmak zorunda değildir. Aynı işi gören, tabandan bağımsız iki büyüklük daha vardır: bu bölümde tanımlayacağımız **iz** ve determinantlar bölümünde tanımlayacağımız **determinant**.

Son olarak, benzerlik kuvvet almayla uyumludur; bu da operatör kuvvetlerini hesaplamayı kolaylaştırır.

Teorem 33.4 (Benzerlik ve Kuvvetler). $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ olsun. Bu durumda her $m \in \mathbb{Z}^+$ için

$$([T]_f)^m = P^{-1} ([T]_e)^m P$$

ve K üzerinde her $p(x)$ polinomu için

$$[p(T)]_f = P^{-1} p ([T]_e) P$$

İspat.

Kuvvet. Çarpımı açıp ortadaki PP^{-1} çiftlerini sadeleştirelim:

$$\begin{aligned} (P^{-1}[T]_e P)^m &= (P^{-1}[T]_e P) (P^{-1}[T]_e P) \cdots (P^{-1}[T]_e P) \\ &= P^{-1}[T]_e (PP^{-1}) [T]_e (PP^{-1}) \cdots [T]_e P \\ &= P^{-1} [T]_e [T]_e \cdots [T]_e P = P^{-1} ([T]_e)^m P \end{aligned}$$

Polinom. $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ olsun. *Matris gösteriminin toplama ve skalerle çarpımla uyumu* ile $[T^k]_f = ([T]_f)^k$ eşitliğini birlikte kullanalım:

$$\begin{aligned}
[p(T)]_f &= a_0[I]_f + a_1[T]_f + \cdots + a_m [T^m]_f \\
&= a_0 I_n + a_1 P^{-1}[T]_e P + \cdots + a_m P^{-1} ([T]_e)^m P \\
&= P^{-1} \left(a_0 I_n + a_1 [T]_e + \cdots + a_m ([T]_e)^m \right) P = P^{-1} p([T]_e) P
\end{aligned}$$

İkinci satırda $[I]_f = I_n = P^{-1} I_n P$ olduğu kullanıldı.

💡 Ne işe yarar?

Taban değiştirme bölümündeki yansıma örneğinde $[T]_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ köşegen çıkmıştı; böyle bir matrisin kuvvetini almak bir satırlık iştir: $([T]_f)^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^m \end{pmatrix}$. Yukarıdaki teorem sayesinde standart tabandaki $[T]_e$ 'nin kuvveti de tek bir çarpımla bulunur: $([T]_e)^m = P ([T]_f)^m P^{-1}$. Köşegenleştirmenin bütün pratik değeri buradadır.

33.2 Bir Matrisin İzi

Tanım 33.2 (İz). $A = (a_{ij})$, K üzerinde n . mertebeden bir kare matris olsun. A 'nın köşegeni üzerindeki elemanların toplamına A 'nın **izi** denir ve $\text{iz}(A)$ ile gösterilir:

$$\text{iz}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

İz, matristen bir sayı üreten en basit işlemdir: yalnızca köşegene bakar, çarpma bile gerektirmez. Buna rağmen taban değişimi altında korunur; bunu görmek için önce çarpımın izine bakalım.

Teorem 33.5 (Çarpımın İzi Sıra Değiştirir). A ve B , K üzerinde n . mertebeden iki kare matris olsun. O zaman

$$\text{iz}(AB) = \text{iz}(BA)$$

İspat.

$A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ olsun. Çarpımın köşegen elemanı

$$(AB)_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$$

olduğundan

$$\text{iz}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji}$$

Aynı hesabı BA için yapalım:

$$\text{iz}(BA) = \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij}$$

K komütatif olduğundan $b_{ji} a_{ij} = a_{ij} b_{ji}$ 'dir; sonlu bir çift toplamda terimlerin sırası da değiştirilebilir. Öyleyse iki toplam aynı terimlerden oluşur ve eşittir.

⚠ Dikkat

Teorem $AB = BA$ demiyor – matris çarpımı değişmeli değildir. Söylenen yalnızca iki çarpımın **izlerinin** eşit olduğudur; matrislerin kendileri farklı olabilir.

Sonuç 33.1 (Benzer Matrislerin İzi Eşittir). $A \sim B$ ise $\text{iz}(A) = \text{iz}(B)$ 'dir.

İspat.

$B = P^{-1}AP$ olsun. Çarpımı $(P^{-1})(AP)$ biçiminde ikiye ayırıp bir önceki teoremi uygulayalım:

$$\text{iz}(B) = \text{iz}(P^{-1}(AP)) = \text{iz}((AP)P^{-1}) = \text{iz}(A(P P^{-1})) = \text{iz}(A)$$

■

Rankta olduğu gibi, izin de tabandan bağımsız olması onu operatörün kendisine ait bir büyüklük yapar.

Tanım 33.3 (Bir Operatörün İzi). V sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $T \in A(V)$ ve e , V 'nin herhangi bir tabanı olsun. T 'nin **izi**

$$\text{iz}(T) := \text{iz}([T]_e)$$

biçiminde tanımlanır. T 'nin herhangi iki matris gösterimi benzer olduğundan ve benzer matrislerin izi eşit olduğundan, bu tanım e tabanının seçiminden bağımsızdır.

Örnek 33.1 (İki Operatörün İzi). Aşağıdaki iki operatörün izini bulunuz.

a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ şöyle tanımlansın:

$$T(x, y, z) = (a_1x + a_2y + a_3z, b_1x + b_2y + b_3z, c_1x + c_2y + c_3z)$$

b) 2. mertebeden reel kare matrislerin uzayı $V = M_2(\mathbb{R})$ üzerinde $T(A) = M \cdot A$, burada $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Çözüm.

a) Standart tabanda hesaplayalım. $T(e_1) = (a_1, b_1, c_1)$, $T(e_2) = (a_2, b_2, c_2)$, $T(e_3) = (a_3, b_3, c_3)$ olduğundan bu vektörler doğrudan $[T]_e$ 'nin sütunlarıdır:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{iz}(T) = a_1 + b_2 + c_3$$

b) V 'nin standart tabanını alalım:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dört çarpımı yapalım:

$$T(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1E_1 + 3E_3$$

$$T(E_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 1E_2 + 3E_4$$

$$T(E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2E_1 + 4E_3$$

$$T(E_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2E_2 + 4E_4$$

Katsayıları **sütun** olarak yazalım:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{iz}(T) = 1 + 1 + 4 + 4 = 10$$

$\text{iz}(M) = 1 + 4 = 5$ olduğuna dikkat edin: $\text{iz}(T) = 2 \text{iz}(M)$ çıktı. Bu bir rastlantı değildir; $M_2(K)$ üzerinde $A \mapsto MA$ operatörünün matrisi, M 'in iki kopyasını köşegen bloklar hâlinde taşır.

■

33.3 Köşegenleştirilebilir Operatörler

Taban değiştirmenin bütün amacı, operatörün matrisini olabildiğince sade bir biçime sokmaktır. En sade biçim köşegen matristir.

Tanım 33.4 (Köşegenleştirilebilir Operatör). V, K üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı ve $T \in A(V)$ olsun. $[T]_f$ matrisi köşegen olacak biçimde V 'nin bir f tabanı varsa T 'ye **köşegenleştirilebilir** operatör, f tabanına da T 'yi **köşegenleştiren taban** denir.

Teorem 33.6 (Köşegenleştirilebilirliğin Matris Ölçütü). V, n boyutlu bir vektör uzayı, $T \in A(V)$ ve A, T 'nin herhangi bir matris gösterimi olsun. T 'nin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul,

$$P^{-1}AP$$

köşegen olacak biçimde regüler bir P matrisinin var olmasıdır.

İspat.

$A = [T]_e$ olsun.

Gereklik. T köşegenleştirilebilir olsun, yani $[T]_f$ köşegen olacak biçimde bir f tabanı bulunsun. P, e 'den f 'ye geçiş matrisi olsun; P regülerdir ve taban değişimi teoremi gereği

$$P^{-1}AP = P^{-1}[T]_eP = [T]_f$$

sağ taraf köşegendir.

Yeterlik. P regüler ve $D = P^{-1}AP$ köşegen olsun. $P = (p_{ij})$ olmak üzere

$$f_j = p_{1j}e_1 + p_{2j}e_2 + \cdots + p_{nj}e_n \quad (j = 1, \dots, n)$$

vektörlerini tanımlayalım; yani f_j, P 'nin j . sütununu e tabanındaki koordinat vektörü olarak okuyan vektördür. P regüler olduğundan sütunları K^n 'de lineer bağımsızdır; $v \mapsto [v]_e$ bir izomorfizm olduğundan $f_1, \dots, f_n$ de V 'de lineer bağımsızdır. n tane lineer bağımsız vektör n boyutlu V 'nin bir tabanıdır, öyleyse $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ bir tabandır ve tanımı gereği P, e 'den f 'ye geçiş matrisidir. Taban değişimi teoremi gereği

$$[T]_f = P^{-1}[T]_eP = P^{-1}AP = D$$

köşegendir; demek ki T köşegenleştirilebilirdir.

■

Aynı ifade matris diliyle şöyle okunur: **bir kare matrisin köşegenleştirilebilir olması, köşegen bir matrise benzer olması demektir.**

i Sıradaki soru

Ölçüt doğru ama henüz kullanışlı değil: “böyle bir P var mı?” sorusunu cevaplamak için P 'yi arayıp durmak gerekiyor. $[T]_f$ 'nin köşegen olması, f tabanının her vektörü için

$$T(f_j) = k_j f_j$$

demektir — yani T , f_j 'yi yalnızca bir katsayıyla ölçekliyor, yönünü değiştirmiyor. Böyle vektörlere **özvektör**, karşılardaki k_j sayılarına **özdeğer** denir. Köşegenleştirme sorusunun sistematik cevabı bu iki kavramdadır ve **Özdeğerler ve Özvektörler** bölümünde verilecektir.

33.4 Alıştırma

Alıştırma 33.1 (Benzerlik ve İz Üzerine).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ve $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrislerinin benzer olmadığını gösteriniz.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ile $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ matrisleri benzer midir?
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisleri benzer midir?
4. A ile B benzer ise A^t ile B^t 'nin de benzer olduğunu gösteriniz.
5. $\text{iz}(A + B) = \text{iz}(A) + \text{iz}(B)$ ve $\text{iz}(kA) = k \text{iz}(A)$ olduğunu gösteriniz.
6. $K = \mathbb{R}$ olmak üzere $AB - BA = I_2$ olacak biçimde 2. mertebeden A, B kare matrislerinin bulunamayacağını gösteriniz.

Çözüm.

1. İz tabandan bağımsızdır, dolayısıyla benzer matrislerin izleri eşit olmalıdır:

$$\text{iz}(A) = 1 + 4 = 5, \quad \text{iz}(B) = 0 + 0 = 0$$

İzler farklı olduğundan $A \not\sim B$ 'dir.

2. $A = 2I_2$ bir **skaler matristir**. Herhangi bir regüler P için

$$P^{-1}AP = P^{-1}(2I_2)P = 2P^{-1}I_2P = 2P^{-1}P = 2I_2 = A$$

olur; yani A yalnızca kendisine benzerdir. $B \neq A$ olduğundan A ile B **benzer değildir**.

Dikkat: bu örnekte ne rank ne de iz ölçütü işe yarar — her iki matrisin de rankı 2, izi 4'tür. Bu iki ölçüt benzerlik için gerek koşuldur, yeter koşul değildir.

3. Rankları karşılaştıralım: $\text{rank}(A) = 2$, $\text{rank}(C) = 1$ 'dir. Benzer matrislerin rankı eşit olmak zorunda olduğundan A ile C **benzer değildir**. (İz de ayırt eder: $\text{iz}(A) = 2$ ve $\text{iz}(C) = 1$ 'dir.)

4. $B = P^{-1}AP$ olsun. Transpozeyi alalım; $(XY)^t = Y^t X^t$ olduğundan

$$B^t = (P^{-1}AP)^t = P^t A^t (P^{-1})^t$$

$(P^{-1})^t = (P^t)^{-1}$ olduğunu kullanalım ve $Q = (P^t)^{-1}$ diyelim; bu durumda $P^t = Q^{-1}$ olur ve

$$B^t = Q^{-1}A^tQ$$

Q regüler olduğundan $A^t \sim B^t$ 'dir.

5. İkisi de köşegen elemanların toplamı üzerinden doğrudan görülür: $(A + B)_{ii} = a_{ii} + b_{ii}$ ve $(kA)_{ii} = k a_{ii}$ olduğundan

$$\text{iz}(A + B) = \sum_i (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_i a_{ii} + \sum_i b_{ii} = \text{iz}(A) + \text{iz}(B)$$

$$\text{iz}(kA) = \sum_i k a_{ii} = k \sum_i a_{ii} = k \text{iz}(A)$$

6. Böyle A, B bulunduğunu varsayalım. Her iki tarafın izini alalım; iz toplamsal olduğundan (5. şık) ve $\text{iz}(AB) = \text{iz}(BA)$ olduğundan

$$\text{iz } (AB - BA) = \text{iz } (AB) - \text{iz } (BA) = 0$$

Öte yandan $\text{iz } (I_2) = 1 + 1 = 2$ 'dir. $0 = 2$ çelişkisi, varsayımın yanlış olduğunu gösterir.

■

34. İki Uzay Arasında Matris Gösterimi

Bir operatörün matrisi bölümünde $T : V \rightarrow U$ dönüşümünün iki tabana göre matris gösterimini tanımlamış, bir örnek üzerinde hesaplamıştık. Bu bölümde o gösterimin bütün cebirsel özelliklerini kuruyoruz: matris çarpımının bileşkeye, matris toplamının dönüşüm toplamına karşılık geldiğini gösterecek ve dönemin en çarpıcı sonucuna varacağız – tabanlar uygun seçilirse her lineer dönüşümün matrisi yalnızca **rankına** bağlı, son derece sade bir biçime iner.

Bölüm boyunca V ile U , K üzerinde sırasıyla m ve n boyutlu vektör uzayları; $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ V 'nin, $C = \{u_1, \dots, u_n\}$ ise U 'nun bir tabanıdır. Hatırlatalım: $[T]_{C,B}$ matrisinin j . sütunu $[T(v_j)]_C$ 'dir ve matris (n, m) tipindedir.

34.1 Temel Eşitlik

Teorem 34.1 (Dönüşümün Uygulanması Matrisle Çarpımdır). $T : V \rightarrow U$ lineer olsun. Her $v \in V$ için

$$[T]_{C,B} \cdot [v]_B = [T(v)]_C$$

İspat.

$v \in V$ olsun ve B tabanına göre koordinatlarını $[v]_B = (x_1, \dots, x_m)^t$ ile gösterelim; yani

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_m v_m$$

T lineer olduğundan

$$T(v) = x_1 T(v_1) + x_2 T(v_2) + \dots + x_m T(v_m)$$

Koordinat almak da lineer bir işlemdir (*koordinat izomorfizmi*); her iki tarafın C tabanına göre koordinatlarını alalım:

$$[T(v)]_C = x_1 [T(v_1)]_C + x_2 [T(v_2)]_C + \dots + x_m [T(v_m)]_C$$

Sağ taraf, sütunları $[T(v_j)]_C$ olan matrisin $(x_1, \dots, x_m)^t$ sütunuyla çarpımından başka bir şey değildir:

$$[T(v)]_C = \left([T(v_1)]_C \mid \dots \mid [T(v_m)]_C \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = [T]_{C,B} \cdot [v]_B$$

■

i Not

Bu eşitlik, matris gösteriminin bütün anlamıdır: V ile U soyut uzaylar olsa bile, taban seçildikten sonra T 'yi uygulamak K^m 'den K^n 'e bir matris çarpımına dönüşür. Aşağıdaki üç teoremin ispatı da hep aynı fikri kullanır – iki matrisin eşit olduğunu göstermek için her ikisinin de aynı sütun vektörlerini ürettiğini görmek yeter.

💡 Sütunlar nasıl okunur

İki matrisin eşitliğini sütun sütun denetlemenin pratik yolu şudur: $[v_j]_B$, K^m 'in j . standart taban sütunudur. Bir matrisi bu sütunla çarpmak, matrisin j . sütununu almak demektir. Öyleyse “her v için $M_1[v]_B = M_2[v]_B$ ” bilgisinden, $v = v_j$ alarak M_1 ile M_2 'nin bütün sütunlarının eşit olduğu, yani $M_1 = M_2$ olduğu çıkar.

34.2 Dönüşüm Uzayı ile Matris Uzayı

Dönüşümlerin uzayı bölümünde $\text{Hom}(V, U)$ 'nin bir vektör uzayı olduğunu ve boyutunun $m \cdot n$ çıktığını görmüştük. Matris gösterimi bu iki uzayı birebir örtüştürür.

Teorem 34.2 (Hom(V,U) ile Matris Uzayının İzomorfluğu). $M_{n,m}(K)$ ile K üzerindeki (n, m) tipindeki matrislerin uzayını gösterelim. O zaman

$$\Phi : \text{Hom}(V, U) \rightarrow M_{n,m}(K), \quad \Phi(T) = [T]_{C,B}$$

bir vektör uzayı izomorfizmidir.

İspat.

Lineerlik. $T, S \in \text{Hom}(V, U)$ ve $k \in K$ olsun. $(T + S)(v_j) = T(v_j) + S(v_j)$ ve koordinat almak lineer olduğundan

$$[(T + S)(v_j)]_C = [T(v_j)]_C + [S(v_j)]_C$$

Bu, $[T + S]_{C,B}$ 'nin j . sütununun $[T]_{C,B}$ ile $[S]_{C,B}$ 'nin j . sütunlarının toplamı olduğunu söyler; bütün j 'ler için doğru olduğundan

$$[T + S]_{C,B} = [T]_{C,B} + [S]_{C,B}$$

Aynı hesap kT için $[kT]_{C,B} = k[T]_{C,B}$ verir. Öyleyse Φ lineerdir.

Bire birlik. $\Phi(T) = 0$ olsun, yani $[T]_{C,B}$ sıfır matris olsun. O zaman her j için $[T(v_j)]_C = 0$, dolayısıyla $T(v_j) = 0_U$ 'dur. Bir lineer dönüşüm taban üzerindeki değerleriyle belirlendiğinden (*tabanla belirlenme*) T sıfır dönüşümüdür. Çekirdeği yalnız sıfır olan lineer dönüşüm bire birdir.

Örtenlik. $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(K)$ verilsin. Tabanla belirlenme teoremi gereği

$$T(v_j) := a_{1j}u_1 + a_{2j}u_2 + \cdots + a_{nj}u_n \quad (j = 1, \dots, m)$$

koşulunu sağlayan tek bir $T \in \text{Hom}(V, U)$ vardır. Bu T için $[T(v_j)]_C$ tam olarak A 'nın j . sütunudur, yani $\Phi(T) = A$ 'dır.

■

i Not

İzomorf uzayların boyutları eşit olduğundan bu teorem, $\dim \text{Hom}(V, U) = \dim M_{n,m}(K) = m \cdot n$ eşitliğinin ikinci bir ispatını verir. $V = U$ ve $B = C$ alınırsa, **operatör cebri ile matris cebri** bölümündeki $A(V) \cong M_n(K)$ izomorfizmine dönülür.

34.3 Bileşkenin Matrisi

Teorem 34.3 (Bileşkenin Matrisi Matrislerin Çarpımıdır). V, U ve W sonlu boyutlu uzaylar; B, C ve D sırasıyla bunların birer tabanı olsun. $F : V \rightarrow U$ ve $G : U \rightarrow W$ lineer dönüşümleri için

$$[G \circ F]_{D,B} = [G]_{D,C} \cdot [F]_{C,B}$$

İspat.

Her $v \in V$ için temel eşitliği üst üste iki kez uygulayalım:

$$\begin{aligned} [(G \circ F)(v)]_D &= [G(F(v))]_D = [G]_{D,C} \cdot [F(v)]_C \\ &= [G]_{D,C} \cdot ([F]_{C,B} \cdot [v]_B) = ([G]_{D,C} [F]_{C,B}) \cdot [v]_B \end{aligned}$$

Son adımda matris çarpımının birleşme özelliği kullanıldı. Öte yandan temel eşitlik doğrudan $G \circ F$ dönüşümüne uygulanırsa

$$[(G \circ F)(v)]_D = [G \circ F]_{D,B} \cdot [v]_B$$

Demek ki her v için $[G \circ F]_{D,B}[v]_B = ([G]_{D,C}[F]_{C,B})[v]_B$ 'dir. Yukarıdaki sütun okuma kuralı gereği (v yerine sırayla $v_1, \dots, v_m$ alınır) iki matrisin bütün sütunları eşittir:

$$[G \circ F]_{D,B} = [G]_{D,C}[F]_{C,B}$$

■

💡 Boyutlar tutuyor mu?

$\dim V = m$, $\dim U = n$, $\dim W = p$ olsun. $[G]_{D,C}$ matrisi (p, n) , $[F]_{C,B}$ ise (n, m) tipindedir; çarpımları (p, m) tipindedir ve $G \circ F : V \rightarrow W$ dönüşümünün matrisi de tam olarak (p, m) tipinde olmalıdır. Ortadaki n 'lerin sadeleşmesi, bileşkenin ancak " U ortak uzayı" üzerinden kurulabilmesinin matris dilindeki karşılığıdır.

34.4 İki Tabanın Birden Değişmesi

Operatörlerde tek bir taban vardı ve taban değişimi $[T]_f = P^{-1}[T]_e P$ formülünü vermişti. İki uzay söz konusu olduğunda iki geçiş matrisi devreye girer.

Teorem 34.4 (Dikdörtgen Gösterimde Taban Değişimi). B ile B' , V 'nin; C ile C' , U 'nun tabanları olsun. P , V 'de B 'den B' 'ne; Q ise U 'da C 'den C' 'ne geçiş matrisi olmak üzere her $F \in \text{Hom}(V, U)$ için

$$[F]_{C',B'} = Q^{-1} \cdot [F]_{C,B} \cdot P$$

İspat.

Geçiş matrisinin tanımı gereği her $v \in V$ ve her $u \in U$ için

$$P \cdot [v]_{B'} = [v]_B \quad \text{ve} \quad Q \cdot [u]_{C'} = [u]_C$$

İkincisinden $[u]_{C'} = Q^{-1}[u]_C$ çıkar. Şimdi $u = F(v)$ alıp temel eşitliği kullanalım:

$$\begin{aligned} [F]_{C',B'} \cdot [v]_{B'} &= [F(v)]_{C'} = Q^{-1} [F(v)]_C \\ &= Q^{-1} ([F]_{C,B} \cdot [v]_B) = Q^{-1} [F]_{C,B} P \cdot [v]_{B'} \end{aligned}$$

Bu eşitlik her $v \in V$ için geçerlidir; v yerine B' tabanının vektörlerini alarak iki matrisin sütunlarının eşit olduğu görülür.

■

i Not

İki özel hâl sık kullanılır. Yalnızca varış uzayında taban değişirse ($B = B'$, yani $P = I_m$) $[F]_{C',B} = Q^{-1}[F]_{C,B}$; yalnızca çıkış uzayında değişirse ($C = C'$, yani $Q = I_n$) $[F]_{C,B'} = [F]_{C,B}P$ olur. $V = U$, $B = C$ ve $B' = C'$ alındığında $Q = P$ olur ve formül tanıtık benzerlik bağıntısına iner.

34.5 Kanonik Form

İki tabanı birden serbestçe seçebilmek, operatör durumunda olmayan büyük bir esneklik verir. Bu esneklik sonuna kadar kullanılırsa şaşırtıcı derecede sade bir matris elde edilir.

Teorem 34.5 (Rankın Belirlediği Kanonik Form). $F : V \rightarrow U$ lineer ve $\text{rank } F = r$ olsun. O zaman V 'nin bir B tabanı ve U 'nun bir C tabanı vardır öyle ki

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Burada I_r , r . mertebeden birim matris; kalan bloklar sıfır matrislerdir.

İspat.

Boyut teoremi gereği $\dim(\text{Ker } F) = m - r$ 'dir. $\text{Ker } F$ 'nin bir tabanı $\{w_1, \dots, w_{m-r}\}$ olsun. Bir alt uzayın tabanı bütün uzayın tabanına genişletilebildiğinden

$$B = \{v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{m-r}\}$$

V 'nin bir tabanı olacak biçimde $v_1, \dots, v_r$ vektörleri bulunabilir.

Şimdi $u_i := F(v_i)$ diyelim ($i = 1, \dots, r$). Bu r vektörün $\text{Im } F$ 'nin bir tabanı olduğunu görelim.

Doğurma. B bir taban olduğundan **doğuran kümenin görüntüsü** gereği $\text{Im } F$, $F(v_1), \dots, F(v_r), F(w_1), \dots, F(w_{m-r})$ vektörleri tarafından doğurulur. Son $m - r$ tanesi sıfırdır ($w_j \in \text{Ker } F$), dolayısıyla $\text{Im } F = L(u_1, \dots, u_r)$ 'dir.

Bağımsızlık. r tane vektör r boyutlu $\text{Im } F$ 'yi doğuruyorsa lineer bağımsızdır. (Doğrudan da görülebilir: $\sum a_i u_i = 0$ ise $F(\sum a_i v_i) = 0$, yani $\sum a_i v_i \in \text{Ker } F$ olur; bu vektör w_j 'lerin bir kombinezonu olarak yazılınca B 'nin bağımsızlığı bütün a_i 'lerin sıfır olmasını gerektirir.)

$\{u_1, \dots, u_r\}$ lineer bağımsız olduğundan U 'nun bir tabanına genişletilebilir:

$$C = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$$

Artık matrisi yazabiliriz. $i \leq r$ için $F(v_i) = u_i$ olduğundan $[F(v_i)]_C$, K^n 'in i . standart taban sütunudur. $j = 1, \dots, m - r$ için $F(w_j) = 0$ olduğundan karşılık gelen sütun sıfırdır. Sütunları sırayla yan yana koyarsak

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

İlk r sütun sırasıyla K^n 'in ilk r standart taban sütunu, kalan $m - r$ sütun ise tamamen sıfırdır.

❓ Ne söylüyor?

Uygun tabanlarda her lineer dönüşümün matrisi yalnızca $r = \text{rank } F$ sayısına bağlıdır. Yani iki uzay arasındaki lineer dönüşümlerin *tek* değişmezi ranktır: rankları eşit iki dönüşüm, uygun tabanlarda tamamen aynı matrisle temsil edilir. Operatörlerde durum böyle değildir — orada taban tek olduğundan seçim özgürlüğü yarıya iner ve rank tek başına yetmez; hangi büyüklüklerin gerektiği **özdeğerler** bölümünün konusudur.

34.6 Çözümlü Örnekler

Örnek 34.1 (İki Tabana Göre Matris ve Doğrulaması). $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü

$$F(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$$

biçiminde tanımlanıyor. $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ ve $C = \{(1, 3), (2, 5)\}$ tabanları veriliyor.

a) $[F]_{C,B}$ matrisini bulunuz.

b) Herhangi bir $v = (x, y, z)$ için $[F]_{C,B}[v]_B = [F(v)]_C$ eşitliğini doğrulayınız.

Çözüm.

a) Önce $\mathbb{R}^2$ 'de C tabanına göre koordinat almayı bir kez hazırlayalım. $(p, q) = a(1, 3) + b(2, 5)$ ise

$$a + 2b = p, \quad 3a + 5b = q$$

Birinciye 3 ile çarpıp ikinciden çıkaralım: $b = 3p - q$; buradan $a = p - 2b = p - 2(3p - q) = -5p + 2q$. Yani

$$(p, q) \mapsto [(p, q)]_C = \begin{pmatrix} -5p + 2q \\ 3p - q \end{pmatrix}$$

Şimdi taban vektörlerinin görüntülerini hesaplayıp bu kuralı uygulayalım:

$$F(1, 1, 1) = (3 + 2 - 4, 1 - 5 + 3) = (1, -1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 - 2 \\ 3 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$F(1, 1, 0) = (3 + 2, 1 - 5) = (5, -4) \Rightarrow \begin{pmatrix} -25 - 8 \\ 15 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$$F(1, 0, 0) = (3, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -15 + 2 \\ 9 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Üç sütunu yan yana koyalım:

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$$

b) Önce $[v]_B$ 'yi bulalım. $v = (x, y, z)$ vektörünü B tabanında açalım:

$$v = (x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, 1, 0) + c(1, 0, 0) = (a + b + c, a + b, a)$$

Bileşenleri eşitlersek

$$a = z, \quad b = y - z, \quad c = x - y \quad \Rightarrow \quad [v]_B = \begin{pmatrix} z \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix}$$

Çarpalım:

$$[F]_{C,B}[v]_B = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y - z \\ x - y \end{pmatrix}$$

Birinci satır: $-7z - 33(y - z) - 13(x - y) = -13x - 20y + 26z$.

İkinci satır: $4z + 19(y - z) + 8(x - y) = 8x + 11y - 15z$.

$$[F]_{C,B}[v]_B = \begin{pmatrix} -13x - 20y + 26z \\ 8x + 11y - 15z \end{pmatrix}$$

Şimdi sağ tarafı hesaplayalım. $F(v) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$ olduğuna göre (a) şıkkındaki koordinat kuralıyla $p = 3x + 2y - 4z$ ve $q = x - 5y + 3z$ alalım:

$$-5p + 2q = -5(3x + 2y - 4z) + 2(x - 5y + 3z) = -15x - 10y + 20z + 2x - 10y + 6z = -13x - 20y + 26z$$

$$3p - q = 3(3x + 2y - 4z) - (x - 5y + 3z) = 9x + 6y - 12z - x + 5y - 3z = 8x + 11y - 15z$$

İki taraf aynı çıktı: $[F]_{C,B}[v]_B = [F(v)]_C$ ✓

■

Örnek 34.2 (Standart Tabanlarda Matris Katsayı Matrisidir). $F : K^m \rightarrow K^n$ dönüşümü

$$F(x_1, \dots, x_m) = \left(\sum_j a_{1j}x_j, \sum_j a_{2j}x_j, \dots, \sum_j a_{nj}x_j \right)$$

biçiminde verilsin. B ve C standart tabanlar olmak üzere $[F]_{C,B} = (a_{ij})$ olduğunu gösteriniz ve aşağıdaki dönüşümlerin standart tabanlara göre matrislerini yazınız.

- a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (3x - y, 2x + 4y, 5x - 6y)$
b) $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, s, t) = (3x - 4y + 2s - 5t, 5x + 7y - s - 2t)$
c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $F(x, y, z) = (2x + 3y - 8z, x + y + z, 4x - 5z, 6y)$

Çözüm.

Genel durum. B standart taban olduğundan j . taban vektörü e_j 'nin görüntüsü, formülde $x_j = 1$ ve diğerleri 0 alınarak bulunur:

$$F(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$$

C de standart taban olduğundan bir vektörün koordinatları bileşenlerinin kendisidir; öyleyse $[F]_{C,B}$ 'nin j . sütunu $(a_{1j}, \dots, a_{nj})^t$ 'dir. Bu sütunlar yan yana konduğunda tam olarak (a_{ij}) matrisi elde edilir.

Kural. Katsayıları oldukları gibi yazmak yeter; **satırlar** çıkıştaki bileşenlere, **sütunlar** değişkenlere karşılık gelir.

a) İki değişken, üç bileşen: $(3, 2)$ tipinde bir matris.

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

b) Dört değişken, iki bileşen: $(2, 4)$ tipinde.

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Üç değişken, dört bileşen: $(4, 3)$ tipinde. Görünmeyen katsayılar sıfırdır.

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Örnek 34.3 (Aynı Uzay, İki Farklı Taban). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x - 3y, x + 4y)$ olsun. Çıkışta standart taban e , varışta ise $f = \{(1, 3), (2, 5)\}$ tabanı kullanılarak $[T]_{f,e}$ matrisini bulunuz.

Çözüm.

Bir önceki örnekte f tabanına göre koordinat kuralını çıkarmıştık:

$$[(p, q)]_f = \begin{pmatrix} -5p + 2q \\ 3p - q \end{pmatrix}$$

Standart taban vektörlerinin görüntülerini bu kuralla yazalım:

$$T(e_1) = T(1, 0) = (2, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -10 + 2 \\ 6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T(0, 1) = (-3, 4) \Rightarrow \begin{pmatrix} 15 + 8 \\ -9 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{f,e} = \begin{pmatrix} -8 & 23 \\ 5 & -13 \end{pmatrix}$$

Kontrol. Birinci sütun $T(e_1)$ 'in f koordinatları olmalıydı:

$$-8(1, 3) + 5(2, 5) = (-8 + 10, -24 + 25) = (2, 1) = T(e_1) \checkmark$$

■

⚠ Bu bir operatör matrisi değildir

Yukarıdaki T bir operatördür ($V = U = \mathbb{R}^2$), ama çıkışta ve varışta **farklı** tabanlar kullanıldığından $[T]_{f,e}$ matrisi $[T]_e$ ya da $[T]_f$ ile karıştırılmamalıdır. Özel olarak benzerlik bağıntısı bu matris için geçerli değildir; benzerlikten söz edebilmek için iki tarafta da aynı taban kullanılmalıdır.

Örnek 34.4 (Bir Matris Dönüşümünün İki Gösterimi). $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ olmak üzere $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(v) = A \cdot v$ dönüşümünü ele alalım (vektörler sütun olarak yazılıyor).

- a) B ve C standart tabanlar iken $[F]_{C,B}$ nedir?
b) $B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ ve $C' = \{(1, 3), (2, 5)\}$ tabanlarına göre $[F]_{C',B'}$ matrisini bulunuz.

Çözüm.

a) $F(e_j) = Ae_j$, yani A 'nın j . sütunudur; standart tabanda koordinatlar bileşenlerin kendisi olduğundan

$$[F]_{C,B} = A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Bir matris dönüşümünün standart tabanlardaki matrisi matrisin kendisidir.

b) Görüntüleri hesaplayalım:

$$F(1, 1, 1) = (2 + 5 - 3, 1 - 4 + 7) = (4, 4)$$

$$F(1, 1, 0) = (2 + 5, 1 - 4) = (7, -3)$$

$$F(1, 0, 0) = (2, 1)$$

C' tabanına göre koordinat kuralı yine $[(p, q)]_{C'} = (-5p + 2q, 3p - q)^t$ dir:

$$(4, 4) \Rightarrow \begin{pmatrix} -20 + 8 \\ 12 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad (7, -3) \Rightarrow \begin{pmatrix} -35 - 6 \\ 21 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$(2, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -10 + 2 \\ 6 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$[F]_{C',B'} = \begin{pmatrix} -12 & -41 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{pmatrix}$$

Kontrol. Taban değişimi teoremi de aynı sonucu vermelidir. B' 'den B'' 'ne geçiş matrisi P 'nin sütunları B' vektörlerinin standart koordinatlarıdır; C' 'den C'' 'ne geçiş matrisi Q için de aynısı geçerlidir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(Q^{-1} , 2×2 ters alma kuralıyla bulundu: $\det Q = 5 - 6 = -1$.)

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20+8 & -35-6 & -10+2 \\ 12-4 & 21+3 & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -41 & -8 \\ 8 & 24 & 5 \end{pmatrix} \checkmark$$

■

34.7 Alıştırma

Alıştırma 34.1 (İki Uzay Arasında Hesaplar).

1. $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x + y, y + z)$ dönüşümünün standart tabanlara göre matrisini yazınız ve rankını bulunuz.
2. Aynı F için, kanonik form teoremindeki gibi $[F]_{C,B} = (I_2 \ 0)$ olacak biçimde $\mathbb{R}^3$ 'ün bir B ve $\mathbb{R}^2$ 'nin bir C tabanını bulunuz.
3. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, x + y, y)$ ve $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $G(x, y, z) = (x - z, y)$ olsun. $[G \circ F]$ matrisini hem doğrudan hem de çarpım teoremiyle hesaplayıp karşılaştırınız (bütün tabanlar standart).

Çözüm.

1. Katsayıları yazmak yeter:

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

İki satır lineer bağımsız olduğundan (biri diğerinin katı değil) rank 2'dir. Boyut teoremi gereği $\dim(\text{Ker } F) = 3 - 2 = 1$ 'dir.

2. Önce çekirdeği bulalım: $x + y = 0$ ve $y + z = 0$, yani $y = -x$ ve $z = -y = x$. Öyleyse $\text{Ker } F = L((1, -1, 1))$ ve $w_1 = (1, -1, 1)$ bir tabanıdır.

$r = 2$ olduğundan $\{v_1, v_2, w_1\}$ bir taban olacak biçimde iki vektör seçmeliyiz; en kolayı $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ denemektir. Sütunları bu üç vektör olan matris $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ üst üçgendir ve köşegeninde sıfır bulunmadığından regülerdir; öyleyse üç vektör lineer bağımsızdır. Öyleyse

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1)\}$$

Şimdi $u_1 = F(v_1) = (1, 0)$ ve $u_2 = F(v_2) = (1, 1)$ alalım; bunlar lineer bağımsızdır ve $\mathbb{R}^2$ 'nin bir tabanını oluşturur:

$$C = \{(1, 0), (1, 1)\}$$

Bu tabanlarla $F(v_1) = u_1$, $F(v_2) = u_2$ ve $F(w_1) = 0$ olduğundan

$$[F]_{C,B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (I_2 \ 0)$$

3. Doğrudan. $(G \circ F)(x, y) = G(x, x + y, y) = (x - y, x + y)$ olduğundan

$$[G \circ F] = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Çarpımla. Katsayı matrisleri

$$[F] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [G] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[G][F] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

■

35. Permütasyonlar

Determinant, bir kare matrise bir sayı karşılık getiren işlemdir; 2. mertebede $ad - bc$ olarak tanıdığımız bu sayının genel tanımı, matrisin her satırından ve her sütunundan birer eleman seçilerek kurulan çarpımların işaretli toplamıdır. “Her satırdan ve her sütundan bir eleman” seçmenin kaç yolu olduğunu ve her seçimin hangi işareti alacağını söyleyen kavram **permütasyon**dur. Bu kısa bölümde determinanti tanımlamak için gereken kadarını kuruyoruz.

35.1 Tanım ve Gösterim

Tanım 35.1 (Permütasyon). $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinden kendisine tanımlı bire bir (dolayısıyla örten) bir σ fonksiyonuna bir **permütasyon** denir. Bütün bu permütasyonların kümesi S_n ile gösterilir.

Bir permütasyon iki biçimde yazılır. **İki satırlı gösterimde** üstte girdiler, altta görüntüleri sıralanır:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Üst satır her zaman aynı olduğundan çoğu zaman yalnızca alt satır yazılır; buna **tek satırlı gösterim** denir:

$$\sigma = \sigma(1) \sigma(2) \dots \sigma(n)$$

Örnek 35.1 (Küçük Permütasyon Kümeleri). S_2 ve S_3 ’ün elemanlarını tek satırlı gösterimle yazınız.

Çözüm.

S_2 ’de 1 ve 2’yi iki türlü sıralayabiliriz:

$$S_2 = \{12, 21\}$$

S_3 ’te ilk sıraya 3, kalan iki sıraya 2 seçenek düşer:

$$S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$$

■

Önerme 35.1 (S_n ’in Eleman Sayısı). S_n kümesinin $n!$ tane elemanı vardır.

İspat.

Bir permütasyonu tek satırlı gösterimde kurmak, $1, 2, \dots, n$ sayılarını bir sıraya dizmek demektir. Birinci sıraya n sayıdan herhangi biri, ikinci sıraya kalan $n - 1$ sayıdan herhangi biri, üçüncü sıraya kalan $n - 2$ sayıdan herhangi biri konabilir ve bu böyle sürer. Öyleyse toplam seçenek sayısı

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

■

Permütasyonlar fonksiyon olduğundan bileşke alınabilir ve her permütasyonun tersi vardır; bileşke yine bire bir ve örten olduğundan S_n ’de kalır. Birim permütasyon $I = 12 \dots n$ olmak üzere $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = I$ ’dır. Kısacası S_n , bileşke işlemiyle bir **gruptur**; $n \geq 3$ için değişmeli değildir.

Örnek 35.2 (Bileşke ve Ters Hesabı). S_5 'te $\sigma = 24513$ ve $\tau = 41352$ olsun. $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, σ^{-1} ve τ^{-1} permütasyonlarını bulunuz.

Çözüm.

Gösterimi okuyalım: $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 5$, $\sigma(4) = 1$, $\sigma(5) = 3$; benzer biçimde $\tau(1) = 4$, $\tau(2) = 1$, $\tau(3) = 3$, $\tau(4) = 5$, $\tau(5) = 2$.

$\sigma \circ \tau$. Önce τ , sonra σ uygulanır:

$$(\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(4) = 1, \quad (\sigma \circ \tau)(2) = \sigma(1) = 2, \quad (\sigma \circ \tau)(3) = \sigma(3) = 5$$

$$(\sigma \circ \tau)(4) = \sigma(5) = 3, \quad (\sigma \circ \tau)(5) = \sigma(2) = 4$$

$$\sigma \circ \tau = 12534$$

$\tau \circ \sigma$. Bu kez önce σ uygulanır:

$$(\tau \circ \sigma)(1) = \tau(2) = 1, \quad (\tau \circ \sigma)(2) = \tau(4) = 5, \quad (\tau \circ \sigma)(3) = \tau(5) = 2$$

$$(\tau \circ \sigma)(4) = \tau(1) = 4, \quad (\tau \circ \sigma)(5) = \tau(3) = 3$$

$$\tau \circ \sigma = 15243$$

İki sonuç farklıdır; bileşke değişmeli değildir.

Tersler. $\sigma^{-1}(j)$, “ j sayısı σ 'nın kaçınıcı sırasında?” sorusunun cevabıdır. $\sigma = 24513$ dizisinde 1 dördüncü, 2 birinci, 3 beşinci, 4 ikinci, 5 üçüncü sıradadır:

$$\sigma^{-1} = 41523$$

$\tau = 41352$ dizisinde 1 ikinci, 2 beşinci, 3 üçüncü, 4 birinci, 5 dördüncü sıradadır:

$$\tau^{-1} = 25314$$

■

35.2 İşaret

Determinanttaki her çarpımın önüne bir artı ya da eksi konacak; bu işareti belirleyen sayı şudur.

Tanım 35.2 (Ters Sayısı, Çift ve Tek Permütasyon). $\sigma = j_1 j_2 \dots j_n$ bir permütasyon olsun. $i > k$ olduğu hâlde i sayısının dizide k 'dan önce geldiği (i, k) ikililerine σ 'nın **tersleri** (inversiyonları) denir. Ters sayısı çift ise σ 'ya **çift**, tek ise **tek** permütasyon denir. σ 'nın **işareti** şöyle tanımlanır:

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma \text{ çift ise} \\ -1, & \sigma \text{ tek ise} \end{cases}$$

💡 Ters saymanın pratik yolu

Diziyi soldan sağa tarayın; her sayı için **sağında kalan kendisinden küçük** sayıları sayın ve bu sayıları toplayın. Toplam, ters sayısıdır.

Örnek 35.3 (İki Permütasyonun İşareti).

- S_5 'te $\sigma = 35142$ permütasyonunun işaretini bulunuz.
- S_6 'da $\tau = 542163$ permütasyonunun işaretini bulunuz.

Çözüm.

a) Her sayının sağındaki küçükleri sayalım:

Sayı	Sağında kalan küçükler	Adet
3	1, 2	2
5	1, 4, 2	3
1	—	0
4	2	1
2	—	0

Toplam $2 + 3 + 0 + 1 + 0 = 6$; çift sayıda ters vardır, öyleyse σ çifttir ve $\text{sgn}(\sigma) = +1$ 'dir.

b) Aynı sayımı $\tau = 542163$ için yapalım:

Sayı	Sağında kalan küçükler	Adet
5	4, 2, 1, 3	4
4	2, 1, 3	3
2	1	1
1	—	0
6	3	1
3	—	0

Toplam $4 + 3 + 1 + 0 + 1 + 0 = 9$; tek sayıda ters vardır, öyleyse τ tektir ve $\text{sgn}(\tau) = -1$ 'dir.

■

i Not

Birim permütasyon $I = 12 \cdots n$ artan sıralı olduğundan hiç tersi yoktur; I çifttir ve $\text{sgn}(I) = +1$ 'dir. S_3 'te 123, 231, 312 çift; 132, 213, 321 tektir — çift ve tek permütasyonların sayısı eşittir. Bu, $n \geq 2$ için her zaman böyledir.

35.3 İşaretin Çarpımsallığı

İşaretin determinant hesabındaki bütün gücü, bileşkeyle uyumlu olmasından gelir. Bunu doğrudan ters sayarak göstermek zahmetlidir; kısa yol, işareti bir polinom üzerinden okumaktır.

Tanım 35.3 (Fark Polinomu). n değişkenli

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

polinomuna **fark polinomu** denir; çarpım, $1 \leq i < j \leq n$ koşulunu sağlayan bütün ikililer üzerinden alınır. Bir σ permütasyonu için

$$\sigma(g) := \prod_{i < j} (x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)})$$

yazalım; bu, g 'de her x_i değişkeninin yerine $x_{\sigma(i)}$ konarak elde edilen polinomdur.

Lemma 35.1 (Fark Polinomu İşareti Görür). Her $\sigma \in S_n$ için

$$\sigma(g) = \text{sgn}(\sigma) \cdot g$$

İspat.

$\sigma(g)$ 'nin çarpanları, $i < j$ olan her ikili için $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}$ biçimindedir. σ bire bir olduğundan $\{\sigma(i), \sigma(j)\}$ ikilileri, $\{1, \dots, n\}$ 'in bütün ikili alt kümelerini tam bir kez tarar. Öyleyse $\sigma(g)$ ile g aynı çarpanlardan oluşur; tek fark bazı çarpanların ters işaretli yazılmış olmasıdır:

- $\sigma(i) < \sigma(j)$ ise $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}$ çarpanı g 'de aynen bulunur;
- $\sigma(i) > \sigma(j)$ ise $x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)} = - (x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)})$ olur ve bir (-1) çıkar.

İkinci durum tam olarak σ 'nın terslerinde ortaya çıkar: $i < j$ olduğu hâlde $\sigma(i) > \sigma(j)$ olması, büyük sayının dizide küçükten önce gelmesi demektir. Ters sayısı t ise

$$\sigma(g) = (-1)^t g = \text{sgn}(\sigma) \cdot g$$

■

Teorem 35.1 (İşaret Çarpımsaldır). Her $\sigma, \tau \in S_n$ için

$$\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = \text{sgn}(\tau) \cdot \text{sgn}(\sigma) \quad \text{ve} \quad \text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$$

İspat.

Çarpımsallık. $\sigma(g)$ işlemi “her x_i yerine $x_{\sigma(i)}$ yaz” demektir. Bu yer değiştirmeyi önce σ , sonra τ için art arda uygularsak, x_i önce $x_{\sigma(i)}$, o da $x_{\tau(\sigma(i))}$ olur; yani iki işlemin art arda uygulanması $\tau \circ \sigma$ permütasyonunun yer değiştirmesidir:

$$(\tau \circ \sigma)(g) = \tau(\sigma(g))$$

Şimdi önceki lemmayı iki kez kullanalım. Sağ tarafta önce içteki $\sigma(g) = \text{sgn}(\sigma)g$ yazılır; sabit bir katsayı yer değiştirmeden etkilenmediğinden

$$\tau(\sigma(g)) = \tau(\text{sgn}(\sigma)g) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \tau(g) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) \cdot g$$

Sol taraf ise yine lemma gereği $\text{sgn}(\tau \circ \sigma) \cdot g$ 'dir. g sıfır polinomu olmadığından katsayılar eşittir:

$$\text{sgn}(\tau \circ \sigma) = \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\sigma)$$

Ters. $\sigma \circ \sigma^{-1} = I$ ve $\text{sgn}(I) = 1$ olduğundan, az önceki eşitlikle

$$\text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\sigma^{-1}) = 1$$

İşaretler yalnızca $+1$ ya da -1 olabildiğinden bu ancak iki işaret eşitken mümkündür.

■

En basit permütasyonlardan biri, yalnızca iki sayının yerini değiştirip kalanına dokunmayan permütasyondur. Determinantın işaret kuralı bunun işaretine dayanır.

Tanım 35.4 (Transpozisyon). $k \neq l$ olmak üzere $\tau(k) = l$, $\tau(l) = k$ ve $i \neq k, l$ için $\tau(i) = i$ olan τ permütasyonuna bir **transpozisyon** denir.

Teorem 35.2 (Her Transpozisyon Tektir). Her transpozisyonun işareti -1 'dir.

İspat.

$k < l$ olsun. τ 'nın tek satırlı gösterimi, birim permütasyonun k . ve l . sıralarındaki sayıların yer değiştirmiş hâlidir:

$$\tau = 1 \ 2 \ \dots \ (k-1) \ \underbrace{l}_{k. \text{ sıra}} \ (k+1) \ \dots \ (l-1) \ \underbrace{k}_{l. \text{ sıra}} \ (l+1) \ \dots \ n$$

Terslerini sayalım. Yerinde duran sayılar kendi aralarında artan sırada olduğundan aralarında ters yoktur; ters ancak k ya da l içeren ikililerde ortaya çıkar:

- (l, k) ikilisi: $l > k$ ve l dizide önce geliyor -1 ters.
- l ile aradaki $k + 1, \dots, l - 1$ sayıları: l bunların hepsinden büyük ve hepsinden önce geliyor $-l - k - 1$ ters.
- Aradaki $k + 1, \dots, l - 1$ sayıları ile k : her biri k 'dan büyük ve k 'dan önce geliyor $-l - k - 1$ ters.

Toplam ters sayısı

$$1 + 2(l - k - 1)$$

Bu sayı her zaman tektir; öyleyse τ tektir ve $\text{sgn}(\tau) = -1$ 'dir.

■

i Nerede kullanacağız?

Determinantın tanımında her permütasyon bir işaretle çarpılacak. Bu bölümün üç sonucu bir sonraki bölümde şu üç özelliğe dönüşür: işaretin çarpımsallığı $|AB| = |A| |B|$ eşitliğinin, transpozisyonun tek olması “iki satır yer değiştirince determinantın işaret değişmesi”nin, $\text{sgn}(\sigma^{-1}) = \text{sgn}(\sigma)$ eşitliği ise $|A^t| = |A|$ 'nın temelidir.

35.4 Alıştırma

Alıştırma 35.1 (Permütasyon Hesapları).

1. S_4 'ün bütün elemanlarını tek satırlı gösterimle yazınız ve kaçının çift olduğunu bulunuz.
2. S_6 'da $\sigma = 341625$ permütasyonunun işaretini ve σ^{-1} 'i bulunuz.
3. σ tek, τ çift ise $\sigma \circ \tau$ ve $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ permütasyonlarının işaretlerini belirleyiniz.

Çözüm.

1. $|S_4| = 4! = 24$ 'tür. Birinci sıradaki sayıya göre gruplayalım:

1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432

2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431

3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421

4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

Çift ve tek permütasyonların sayısı eşit olduğundan 12 tanesi çifttir. (Neden eşit olduğunu görmek için: τ sabit bir transpozisyon olsun; $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ eşlemesi çiftleri teklere, teklere çiftlere birebir götürür.)

2. Sağdaki küçükleri sayalım: $3 \rightarrow \{1, 2\}$: 2; $4 \rightarrow \{1, 2\}$: 2; $1 \rightarrow$ yok: 0; $6 \rightarrow \{2, 5\}$: 2; $2 \rightarrow$ yok: 0; $5 \rightarrow$ yok: 0. Toplam 6, çift; $\text{sgn}(\sigma) = +1$.

Ters için “hangi sayı kaçınıcı sırada?” sorusunu cevaplayalım: $\sigma = 341625$ dizisinde 1 üçüncü, 2 beşinci, 3 birinci, 4 ikinci, 5 altıncı, 6 dördüncü sıradadır:

$$\sigma^{-1} = 351264$$

3. İşaret çarpımsal olduğundan

$$\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) = (-1)(+1) = -1$$

yani $\sigma \circ \tau$ tektir. İkincisi için üç çarpımı birleştirelim ve $\text{sgn}(\tau^{-1}) = \text{sgn}(\tau)$ olduğunu kullanalım:

$$\text{sgn}(\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}) = \text{sgn}(\tau) \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) = (\text{sgn}(\tau))^2 \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma) = -1$$

öyleyse $\tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$ de tektir.

■

36. Determinant ve Özellikleri

Bir kare matrise, satırlarının “bağımsız olup olmadığını” tek bir sayıyla bildiren bir büyüklük karşılık getirmek istiyoruz. İkinci mertebede bu sayıyı zaten tanıyoruz: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi ancak ve ancak $ad - bc \neq 0$ iken tersinirdir. Bu bölümde aynı sayının her merteye için tanımını verip özelliklerini çıkarıyoruz.

36.1 Tanım

Tanım 36.1 (Determinant). K komütatif bir cisim ve $A = (a_{ij})$, K üzerinde n . mertebeden bir kare matris olsun. A ’nın **determinantı**

$$|A| = \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

biçiminde tanımlanır. Toplam, S_n ’in bütün $n!$ permütasyonu üzerinden alınır.

Tanımı okuyalım: her terim, matrisin **her satırından ve her sütunundan tam olarak bir** eleman seçilerek kurulan bir çarpımdır. Birinci çarpan birinci satırdan, ikinci çarpan ikinci satırdan gelir; hangi sütunlardan alındığını σ belirler ve σ bire bir olduğundan hiçbir sütun iki kez kullanılmaz. Terimin işareti ise σ ’nın işaretidir.

⚠ Determinant yalnız kare matrisler için tanımlıdır

Tanım, satır sayısı ile sütun sayısının eşit olmasına dayanır. Dikdörtgen bir matrisin determinantından söz edilemez.

36.2 Küçük Mertebeler

Birinci mertebe. S_1 tek elemanlıdır, o da birim permütasyondur:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

İkinci mertebe. $S_2 = \{12, 21\}$; birincisi çift, ikincisi tektir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Üçüncü mertebe. S_3 ’ün üç çift (123, 231, 312) ve üç tek (132, 213, 321) elemanı vardır:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Üçüncü mertebeyi hatırlamak

Altı terim şöyle gruplanabilir:

$$|A| = a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

yani birinci satırın elemanları, sırasıyla $+$, $-$, $+$ işaretleriyle, kendi satır ve sütunları silindiğinde kalan 2×2 determinantlarla çarpılıp toplanıyor. Bu, **kofaktör açılımı** bölümünde her merteye için ispatlanacak kuralın üçüncü mertebedeki hâlidir.

Örnek 36.1 (İkinci ve Üçüncü Mertebeden Hesaplar). Aşağıdaki determinantları hesaplayınız.

- a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$
b) $\begin{vmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{vmatrix}$
c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$
d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

Çözüm.

a) $3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23.$

b) $(a-b)(a+b) - a \cdot a = a^2 - b^2 - a^2 = -b^2.$

c) Üçüncü merteye kuralını uygulayalım:

$$\begin{aligned} & 2(6 \cdot 1 - 7 \cdot 9) - 3(5 \cdot 1 - 7 \cdot 8) + 4(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) \\ &= 2(6 - 63) - 3(5 - 56) + 4(45 - 48) = 2(-57) - 3(-51) + 4(-3) \\ &= -114 + 153 - 12 = 27 \end{aligned}$$

d) İlk satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} & 2((-4)(5) - 2(-1)) - 3(0 \cdot 5 - 2 \cdot 1) + (-4)(0 \cdot (-1) - (-4) \cdot 1) \\ &= 2(-20 + 2) - 3(0 - 2) - 4(0 + 4) = -36 + 6 - 16 = -46 \end{aligned}$$

■

i Not

Tanımdaki terim sayısı $n!$ 'dir: $n = 4$ için 24, $n = 5$ için 120, $n = 10$ için 3 628 800. Tanımdan doğrudan hesaplamak bu yüzden pratik değildir. Aşağıdaki özellikler, determinantı satır işlemleriyle hesaplamayı – yani n^3 mertebesinde bir işle bitirmeyi – mümkün kılar.

36.3 Transpoze

Teorem 36.1 (Bir Matris ile Transpozisinin Determinantları Eşittir). Her n . mertebeden kare A matrisi için $|A^t| = |A|$ 'dır.

İspat.

$B = A^t$ diyelim; tanım gereği $b_{ij} = a_{ji}$ 'dir. Determinant tanımını B için yazalım:

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Sabit bir σ için çarpanları yeniden sıralayalım. K komütatif olduğundan çarpanların sırası önemsizdir; $a_{\sigma(i)}$ çarpanında $j = \sigma(i)$, yani $i = \sigma^{-1}(j)$ diyelim. σ bire bir olduğundan j , 1'den n 'e kadar bütün değerleri bir kez alır:

$$a_{\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n)} = a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

Ayrıca $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma^{-1})$ 'dir. Öyleyse

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

$\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ eşlemesi S_n 'i kendisine birebir götürdüğünden, σ^{-1} yerine τ yazıp toplamı τ üzerinden almak aynı toplamı verir:

$$|A^t| = \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)} = |A|$$

■

i Satır neyse sütun odur

Bu teoremin pratik değeri büyüktür: aşağıda satırlar için ispatlanan her özellik, transpoze alınarak sütunlar için de geçerli olur. Bir determinant hesabında satır işlemleri kadar sütun işlemleri de serbestçe kullanılabilir.

36.4 Satır Değişimi

Önerme 36.1 (İki Satır Yer Değiştirirse İşaret Değişir). B matrisi, A 'nın iki satırının yer değiştirmesiyle elde edilsin. O zaman $|B| = -|A|$ 'dir.

İspat.

Yer değiştiren satırlar k ve l olsun ve τ , k ile l 'yi değiştiren transpozisyonu göstereyin. Bu durumda B 'nin satırları $b_{ij} = a_{\tau(i)j}$ eşitliğiyle verilir. Determinant tanımından

$$|B| = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\tau(i)\sigma(i)}$$

Çarpımda i yerine $\tau(i)$ yazarak satır indislerini artan sıraya alalım; $\tau \circ \tau = I$ olduğundan

$$\prod_i a_{\tau(i)\sigma(i)} = \prod_i a_{i\sigma(\tau(i))} = \prod_i a_{i(\sigma \circ \tau)(i)}$$

İşaretlerin çarpımsallığı ve $\text{sgn}(\tau) = -1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\text{sgn}(\sigma) = -\text{sgn}(\sigma \circ \tau)$$

Öyleyse

$$|B| = - \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma \circ \tau) \prod_i a_{i(\sigma \circ \tau)(i)}$$

$\sigma \mapsto \sigma \circ \tau$ eşlemesi S_n 'i kendisine birebir götürdüğünden, toplam bütün permütasyonlar üzerinden alınan aynı toplamdır:

$$|B| = - \sum_{\rho} \text{sgn}(\rho) \prod_i a_{i\rho(i)} = -|A|$$

■

36.5 Sıfır Satır, Eşit Satırlar, Üçgensellik

Teorem 36.2 (Determinantın Üç Temel Özelliği). A , n . mertebeden bir kare matris olsun.

(i) A 'nın bir satırı (ya da bir sütunu) tamamen sıfırlardan oluşuyorsa $|A| = 0$ 'dır.

(ii) A 'nın iki satırı (ya da iki sütunu) birbirinin aynı ise $|A| = 0$ 'dır.

(iii) A üçgensel ise $|A|$, esas köşegen elemanlarının çarpımıdır:

$$|A| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Özel olarak $|I_n| = 1$ 'dir.

İspat.

(i) Determinantın her terimi her satırdan bir çarpan içerir; sıfır satırdan gelen çarpan 0 olduğundan bütün terimler sıfırdır.

(ii) k ve l satırları aynı olsun: her j için $a_{kj} = a_{lj}$. τ , k ile l 'yi değiştiren transpozisyon olsun. S_n 'in elemanlarını $\{\sigma, \sigma \circ \tau\}$ ikilileri hâlinde eşleyelim; $\tau \neq I$ olduğundan $\sigma \neq \sigma \circ \tau$ 'dur ve her permütasyon tam olarak bir ikilide bulunur, yani $n!/2$ ikili oluşur.

Bir ikilinin iki teriminin toplamına bakalım. $\rho = \sigma \circ \tau$ olsun; $\rho(k) = \sigma(l)$, $\rho(l) = \sigma(k)$ ve $i \neq k, l$ için $\rho(i) = \sigma(i)$ 'dir. ρ 'nun terimindeki çarpımda k ve l satırlarından gelen çarpanlar

$$a_{k\sigma(l)} \text{ ve } a_{l\sigma(k)}$$

olur. İki satır aynı olduğundan $a_{k\sigma(l)} = a_{l\sigma(l)}$ ve $a_{l\sigma(k)} = a_{k\sigma(k)}$ 'dir; yani ρ 'nun çarpımı σ 'ninkiyile aynı sayıdır. İşaretler ise zıttır: $\text{sgn}(\rho) = -\text{sgn}(\sigma)$. Demek ki her ikilinin iki terimi birbirini götürür ve toplam sıfırdır.

(iii) A üst üçgensel olsun, yani $i > j$ için $a_{ij} = 0$. Bir terimin sıfırdan farklı olabilmesi için her i 'de $a_{i\sigma(i)} \neq 0$, yani $\sigma(i) \geq i$ olmalıdır. $i = n$ için $\sigma(n) \geq n$, yani $\sigma(n) = n$ 'dir. $i = n-1$ için $\sigma(n-1) \geq n-1$ ve n değeri kullanıldığından $\sigma(n-1) = n-1$ 'dir. Aynı akıl yürütme yukarı doğru sürdürülürse $\sigma = I$ çıkar. Geriye tek bir terim kalır:

$$|A| = \text{sgn}(I) a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Alt üçgensel durum, transpoze alınarak buna indirgenir. I_n köşegeninde 1'ler bulunan üçgensel bir matris olduğundan $|I_n| = 1$ 'dir.

■

36.6 Satır İşlemleri

Teorem 36.3 (Determinant Satır İşlemleri Altında). A , n . mertebeden bir kare matris olsun.

(i) B , A 'nın bir satırının $c \in K$ ile çarpılmasıyla elde edilirse $|B| = c|A|$ 'dir.

(ii) B , A 'nın bir satırının c katının başka bir satıra eklenmesiyle elde edilirse $|B| = |A|$ 'dir.

İspat.

(i) k . satır c ile çarpılmış olsun. Determinantın her terimi k . satırdan tam olarak bir çarpan içerdiğinden her terim c ile çarpılır:

$$|B| = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (c a_{k\sigma(k)}) \cdots a_{n\sigma(n)} = c |A|$$

(ii) Önce bir ara adım: determinant her satırda toplamsaldır. A 'nın k . satırı iki satırın toplamı, yani $a_{kj} = u_j + v_j$ biçiminde olsun. A' ile k . satırı (u_j) , A'' ile k . satırı (v_j) olan (kalan satırları A ile aynı) matrisleri gösterelim. Her terimde k . satırdan gelen çarpanı ayırıp dağıtalım:

$$|A| = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) (u_{\sigma(k)} + v_{\sigma(k)}) \prod_{i \neq k} a_{i\sigma(i)} = |A'| + |A''|$$

Şimdi B , A 'nın l . satırının c katının k . satıra eklenmesiyle elde edilsin ($k \neq l$). B 'nin k . satırı $(a_{kj} + c a_{lj})$ 'dir. Yukarıdaki toplamsallıkla

$$|B| = |A| + |C|$$

Burada C , k . satırı $(c \ a_{lj})$ olan matristir. (i) gereği $|C| = c |D|$ 'dir; D ise k . satırı l . satırın aynısı olan matristir. İki satırı aynı olan bir matrisin determinanı sıfır olduğundan $|D| = 0$, dolayısıyla

$$|B| = |A| + c \cdot 0 = |A|$$

■

💡 Hesap yöntemi

Bu iki özellik ile satır değişimi kuralı, determinant hesabının pratik yöntemini verir: matrisi elemanter satır işlemleriyle üçgensel şekle indirgeyin, sonra köşegeni çarpın. Yalnız iki noktaya dikkat edin — satır değişimi işareti çevirir, bir satırı c ile çarpmak determinanı c katına çıkarır. Bir satırın katını başka bir satıra eklemek ise determinanı hiç değiştirmez; hesabın omurgası budur.

Örnek 36.2 (Satır İşlemleriyle Determinant). $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -4 \end{vmatrix}$ determinantını satır işlemleriyle hesaplayınız.

Çözüm.

Birinci sütunu temizleyelim; kullanılan işlemler bir satırın katını başka bir satıra eklemek olduğundan determinant değişmez:

$$R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2, \quad R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Şimdi $R_3 \rightarrow 2R_2 + R_3$:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 5 = -5$$

Kontrol. Üçüncü mertebe kuralı da aynı sonucu verir ✓

$$\begin{aligned} & 1(3 \cdot (-4) - 1 \cdot 8) - 2(2 \cdot (-4) - 1 \cdot 3) + (-1)(2 \cdot 8 - 3 \cdot 3) \\ &= 1(-20) - 2(-11) - 1(7) \\ &= -20 + 22 - 7 = -5 \end{aligned}$$

■

36.7 Regülerlik Ölçütü

Önerme 36.2 (Elemanter Matrisle Çarpım). $\hat{E}$ bir *elemanter matris* ve A aynı mertebeden bir kare matris olsun. O zaman

$$|\hat{E}A| = |\hat{E}| \cdot |A|$$

Ayrıca $|\hat{E}| \neq 0$ 'dır.

İspat.

$\hat{E}A$ matrisi, A 'ya karşılık gelen elemanter satır işleminin uygulanmasıyla elde edilir. Üç işlemi tek tek ele alalım; $\hat{E}$ 'nin determinanı, aynı işlemin I_n 'e uygulanmasıyla bulunur.

Satır değişimi. $|\hat{E}| = -|I_n| = -1$ ve $|\hat{E}A| = -|A|$ 'dır; eşitlik sağlanır.

Bir satırı $c \neq 0$ ile çarpmak. $\hat{E}$ köşegeninde bir tane c , kalanında 1 bulunan köşegen bir matristir, yani $|\hat{E}| = c$; ayrıca $|\hat{E}A| = c|A|$ 'dır.

Bir satırın katını başka satıra eklemek. $\hat{E}$ üçgenseldir ve köşegeni bütünüyle 1'lerden oluşur, yani $|\hat{E}| = 1$; ayrıca $|\hat{E}A| = |A|$ 'dir. Üç durumda da $|\hat{E}| \in \{-1, c, 1\}$ sıfırdan farklıdır.

■

Teorem 36.4 (Regülerliğin Determinant Ölçütü). n . mertebeden bir A kare matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul $|A| \neq 0$ olmasıdır.

İspat.

A , satır işlemleriyle bir R satır kanonik şekline indirgensin. Her satır işlemi bir elemanter matrisle soldan çarpmaya karşılık geldiğinden

$$R = \hat{E}_m \cdots \hat{E}_2 \hat{E}_1 A$$

Determinant alıp bir önceki önermeyi ardışık olarak uygulayalım:

$$|R| = |\hat{E}_m| \cdots |\hat{E}_1| \cdot |A|$$

Baştaki çarpanların hepsi sıfırdan farklı olduğundan

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow |R| \neq 0$$

Şimdi iki hâli ayıralım. **Regülerlik ölçütü** gereği A regülerse $R = I_n$ 'dir ve $|R| = 1 \neq 0$ olur. A regüler değilse aynı sonucun notunda belirtildiği gibi R 'nin bir satırı tamamen sıfırdır ve $|R| = 0$ olur. İki hâl birleştirilirse

$$A \text{ regüler} \Leftrightarrow |R| \neq 0 \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

■

i Denk koşullar listesi

A , n . mertebeden bir kare matris olmak üzere aşağıdaki ifadeler denktir:

1. A regülerdir (tersi vardır).
2. $A \stackrel{\text{satır}}{\sim} I_n$ 'dir.
3. $A \cdot x = 0$ homojen sisteminin yalnız sıfır çözümü vardır.
4. $\text{rank}(A) = n$ 'dir, yani satırları (ve sütunları) lineer bağımsızdır.
5. A elemanter matrislerin bir çarpımıdır.
6. $|A| \neq 0$ 'dır.

İlk beşi **regülerlik ölçütü** ve **rank** bölümlerinde kurulmuştu; determinant listeye altıncı ve hesaplanması en kolay olan maddeyi ekler.

36.8 Çarpımın Determinantı

Teorem 36.5 (Çarpımın Determinantı Determinantların Çarpımıdır). Aynı mertebeden her A, B kare matrisleri için

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

İspat.

Birinci hâl: A regüler değil. O zaman $|A| = 0$ olduğundan sağ taraf sıfırdır; sol tarafın da sıfır olduğunu görelim. A regüler olmadığından $\text{rank}(A) < n$ 'dir. Öte yandan AB 'nin j . sütunu, A ile B 'nin j . sütununun çarpımıdır; yani AB 'nin her sütunu A 'nın sütunlarının bir lineer kombinasyonudur. Demek ki AB 'nin sütun uzayı A 'nın sütun uzayının içinde kalır:

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) < n$$

Öyleyse AB de regüler değildir ve $|AB| = 0$ 'dır. İki taraf da sıfırdır.

İkinci hâl: A regüler. Bu durumda A , elemanter matrislerin bir çarpımıdır:

$$A = \hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_m$$

Elemanter matrisle çarpım önermesini ardışık olarak uygulayalım. Önce $B = I_n$ alarak

$$|A| = |\hat{E}_1| |\hat{E}_2| \cdots |\hat{E}_m|$$

Sonra aynı önermeyi AB çarpımına uygulayalım:

$$|AB| = |\hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_m B| = |\hat{E}_1| |\hat{E}_2| \cdots |\hat{E}_m| \cdot |B| = |A| \cdot |B|$$

■

Sonuç 36.1 (Ters Matrisin Determinantı). A regüler ise

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

İspat.

$AA^{-1} = I_n$ eşitliğinin determinantını alalım:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |I_n| = 1$$

A regüler olduğundan $|A| \neq 0$ 'dır; her iki tarafı $|A|$ 'ya bölmek yeter.

■

⚠ Toplam için benzer bir kural yoktur

$|A + B|$ ile $|A| + |B|$ genellikle farklıdır. Örneğin $A = I_2$ ve $B = -I_2$ için $|A| + |B| = 1 + 1 = 2$ iken $A + B$ sıfır matristir ve $|A + B| = 0$ 'dır.

36.9 Alıştırma

Alıştırma 36.1 (Determinant Hesapları).

1. $\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 0$ olacak biçimdeki bütün $k \in \mathbb{R}$ değerlerini bulunuz.
2. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.
3. $A = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}$ için $|A| = 0$ denklemini çözünüz.
4. A ve B aynı mertebeden regüler matrisler olsun. $|A^{-1}BA| = |B|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1. $|A| = 2k^2 - 4k = 2k(k - 2)$ olduğundan $k = 0$ ya da $k = 2$ 'dir.

2. Kesirlerden kurtulmak için birinci satırı 6, ikinci satırı 4 ile çarpalım. Her çarpma determinantı o çarpanla büyüttüğünden, sonuçta çıkan sayıyı 24'e bölmemiz gerekecek:

$$24|A| = \begin{vmatrix} 3 & -6 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

Sağdaki determinanı üçgensel şekle indirgeyerek hesaplayalım. Önce $R_1 \leftrightarrow R_3$ ile başa 1 getirelim; satır değişimi işareti çevirir:

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix}$$

$R_2 \rightarrow -3R_1 + R_2$ ve $R_3 \rightarrow -3R_1 + R_3$ (determinant değişmez):

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$R_3 \rightarrow -\frac{3}{7}R_2 + R_3$ ile üçgensel şekle inelim; son köşe $-5 + 3 = -2$ olur:

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - (1 \cdot 14 \cdot (-2)) = 28$$

Öyleyse $24 |A| = 28$ ve $|A| = \frac{28}{24} = \frac{7}{6}$ 'dır.

3. Determinantı, üçüncü mertebe kuralını birinci satıra göre gruplayarak açalım:

$$\begin{aligned} |A| &= (t+3) [(t-3)(t+4)+6] - (-1) [5(t+4)-6] + 1 [-30-6(t-3)] \\ &= (t+3) [t^2+t-12+6] + [5t+14] + [-30-6t+18] \\ &= (t+3) (t^2+t-6) + 5t+14-6t-12 \\ &= (t+3)(t+3)(t-2) - t+2 \\ &= (t+3)^2(t-2) - (t-2) = (t-2) [(t+3)^2-1] \end{aligned}$$

Köşeli parantezi çarpanlara ayıralım: $(t+3)^2-1 = (t+3-1)(t+3+1) = (t+2)(t+4)$. Öyleyse

$$|A| = (t-2)(t+2)(t+4)$$

ve $|A| = 0$ denkleminin çözümleri $t = 2, t = -2, t = -4$ 'tür.

4. Çarpımın determinantı kuralını iki kez ve ters matrisin determinantı sonucunu bir kez kullanalım:

$$|A^{-1}BA| = |A^{-1}| \cdot |B| \cdot |A| = \frac{1}{|A|} \cdot |B| \cdot |A| = |B|$$

(Skalerler değişmeli olduğundan sıralama serbesttir.) Bu, **benzer matrislerin determinantlarının eşit olduğunu** söyler; iz ve rank gibi determinant da tabandan bağımsız bir büyüklüktür.

■

37. Kofaktör Açılımı ve Ters Matris

Determinantı tanımından hesaplamak $n!$ terim yazmak demektir. Bir önceki bölümde satır işlemleriyle üçgensel şekle inip köşegeni çarpmanın çok daha kısa olduğunu gördük. Bu bölümde üçüncü bir yol kuruyoruz: n . mertebeden bir determinantı, $(n - 1)$. mertebeden n tane determinanta indirgeyen **kofaktör açılımı**. Bu açılım, hem hesap için hem de ters matrisin kapalı formülü için kullanılacak.

37.1 Minör ve Kofaktör

Tanım 37.1 (Minör ve Kofaktör). $A = (a_{ij})$, n . mertebeden bir kare matris olsun ($n \geq 2$). A 'nın i . satırı ile j . sütunu silinerek elde edilen $(n - 1)$. mertebeden kare matris M_{ij} ile gösterilir; $|M_{ij}|$ sayısına a_{ij} elemanının **minörü** denir.

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

sayısına ise a_{ij} elemanının **kofaktörü** (işaretli minörü) denir.

İşaret şablonu

$(-1)^{i+j}$ çarpanı, satranç tahtası gibi dizilen bir işaret şablonundan okunur:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Sol üst köşe daima $+$ 'dır; komşu her adımda işaret değişir.

Örnek 37.1 (Bir Kofaktörün Hesabı).

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinde $a_{23} = 7$ elemanının kofaktörünü bulunuz.

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & -4 & 7 & -2 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinde $b_{23} = 7$ elemanının kofaktörünü bulunuz.

Çözüm.

a) İkinci satır ile üçüncü sütunu silelim:

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_{23}| = 18 - 24 = -6$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}(-6) = (-1)(-6) = 6$$

b) İkinci satır ile üçüncü sütun silinince

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

kalır. Üçüncü mertebe kuralıyla:

$$\begin{aligned}
 |M_{23}| &= 2(0 \cdot 2 - (-3)(-2)) - 1(4 \cdot 2 - (-3) \cdot 3) + 4(4(-2) - 0 \cdot 3) \\
 &= 2(-6) - 1(8 + 9) + 4(-8) = -12 - 17 - 32 = -61 \\
 B_{23} &= (-1)^{2+3}(-61) = 61
 \end{aligned}$$

■

37.2 Laplace Açılımı

Teorem 37.1 (Bir Satıra veya Sütuna Göre Açılım). A , n . mertebeden bir kare matris olsun ($n \geq 2$). Her i için

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

ve her j için

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

Yani determinant, herhangi bir satırın (ya da sütunun) elemanları kendi kofaktörleriyle çarpılıp toplanarak hesaplanabilir.

İspat.

İspatı üç adımda kuruyoruz.

1. Adım: sol üst köşe. A 'nın birinci satırı $(a_{11}, 0, \dots, 0)$ olsun. Determinant tanımındaki terimlerden $\sigma(1) \neq 1$ olanların hepsi sıfırdır (birinci satırdan gelen çarpan sıfır olur). Geriye $\sigma(1) = 1$ olan permütasyonlar kalır; bunlar $\{2, \dots, n\}$ kümesinin permütasyonlarıyla birebir eşleşir ve $\sigma(1) = 1$ hiçbir ters üretmediğinden işaretleri de aynıdır. Öyleyse

$$|A| = a_{11} \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \text{sgn}(\sigma') a_{2\sigma'(2)} \dots a_{n\sigma'(n)} = a_{11} |M_{11}|$$

2. Adım: tek elemanlı satır, genel yer. Şimdi A 'nın i . satırı, yalnız j . sütununda a_{ij} bulunan, kalanı sıfır olan bir satır olsun. i . satırı, komşu satırlarla $i - 1$ kez yer değiştirerek en üste taşıyalım; sonra j . sütunu, komşu sütunlarla $j - 1$ kez yer değiştirerek en sola taşıyalım. Her yer değiştirme determinantın işaretini çevirdiğinden toplam işaret çarpanı

$$(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i+j}$$

olur. Bu taşımalar kalan satır ve sütunların **görelî sırasını bozmaz**; dolayısıyla elde edilen matrisin sol üst köşesi a_{ij} , geri kalanı ise tam olarak M_{ij} 'dir. 1. adım gereği

$$|A| = (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}| = a_{ij} A_{ij}$$

3. Adım: satırda toplamsallık. Herhangi bir A matrisinin i . satırını

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = (a_{i1}, 0, \dots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, a_{in})$$

biçiminde n satırın toplamı olarak yazalım. **Determinantın her satırda toplamsal olduğunu** bir önceki bölümde göstermiştik; öyleyse

$$|A| = \sum_{j=1}^n |A^{(j)}|$$

Burada $A^{(j)}$, i . satırı yalnız j . sütunda a_{ij} taşıyan matristir. 2. adım gereği $|A^{(j)}| = a_{ij} A_{ij}$ 'dir; toplarsak satıra göre açılım elde edilir.

Sütun hâli. $|A| = |A^t|$ olduğundan, satır açılımını A^t 'ye uygulamak sütun açılımını verir.

■

❓ Hangi satırı seçmeli?

Açılım her satır ve sütun için geçerli olduğundan, **en çok sıfır içeren** satırı ya da sütunu seçmek en kısa hesabı verir. Daha da iyisi: önce satır (ya da sütun) işlemleriyle bir satırda tek bir sıfırdan farklı eleman bırakmak, sonra ona göre açmaktır. Bir satırın katını başka bir satıra eklemek determinanti değiştirmedikinden bu adım bedavadır.

Örnek 37.2 (Dördüncü Mertebeden Bir Determinant).

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm.

Dördüncü satırın ilk elemanı 1; bunu kullanarak birinci sütunun kalanını sıfırlayalım. Kullanılan işlemler determinanti değiştirmez:

$$R_1 \rightarrow -5R_4 + R_1, \quad R_2 \rightarrow -2R_4 + R_2, \quad R_3 \rightarrow 9R_4 + R_3$$

Satırları tek tek hesaplayalım:

$$R_1 : (5, 4, 2, 1) - 5(1, -2, -1, 4) = (0, 14, 7, -19)$$

$$R_2 : (2, 3, 1, -2) - 2(1, -2, -1, 4) = (0, 7, 3, -10)$$

$$R_3 : (-5, -7, -3, 9) + 5(1, -2, -1, 4) = (0, -17, -8, 29)$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 14 & 7 & -19 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & -17 & -8 & 29 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Birinci sütunda yalnız $a_{41} = 1$ sıfırdan farklı; bu sütuna göre açalım. İşaret $(-1)^{4+1} = -1$ 'dir:

$$= 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 14 & 7 & -19 \\ 7 & 3 & -10 \\ -17 & -8 & 29 \end{vmatrix}$$

Kalan üçüncü mertebeden determinanti birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} & 14 (3 \cdot 29 - (-10)(-8)) - 7 (7 \cdot 29 - (-10)(-17)) + (-19) (7(-8) - 3(-17)) \\ &= 14(87 - 80) - 7(203 - 170) - 19(-56 + 51) = 14(7) - 7(33) - 19(-5) \\ &= 98 - 231 + 95 = -38 \end{aligned}$$

Öyleyse determinant $(-1)(-38) = 38$ 'dir.

■

Örnek 37.3 (Önce Sıfır Üretmek). $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ determinantını hesaplayınız.

Çözüm.

İkinci satırda zaten bir sıfır var. Sütun işlemi yaparak ikinci satırı tek elemanlı hâle getirelim: $C_3 \rightarrow 2C_1 + C_3$ (sütun işlemleri de determinanti değiştirmez, çünkü $|A| = |A^t|$):

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4+6 \\ 1 & 0 & -2+2 \\ -2 & 3 & 3-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Şimdi ikinci satıra göre açalım; yalnız $a_{21} = 1$ kaldı ve işareti $(-1)^{2+1} = -1$ 'dir:

$$= 1 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 6) = 8$$

■

37.3 Ek Matris

Kofaktör açılımı yalnızca bir hesap yöntemi değildir; ters matrisin kapalı formülünü de verir. Bunun için kofaktörleri bir matrise yerleştiriyoruz — dikkat: **transpoze alarak**.

Tanım 37.2 (Ek (Adjoint) Matris). A , n . mertebeden bir kare matris ve A_{ij} , a_{ij} elemanının kofaktörü olsun. Kofaktörler matrisinin transpozesine A 'nın **ek matrisi** denir ve ek A ile gösterilir:

$$\text{ek } A = (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Yani ek A matrisinin (i, j) girdisi A_{ji} 'dir.

Örnek 37.4 (Bir Ek Matrisin Hesabı). $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin ek matrisini bulunuz.

Çözüm.

Dokuz kofaktörü işaret şablonuna dikkat ederek hesaplayalım:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 + 2 = -18, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2$$

$$A_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 4 = 4, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 4) = -11$$

$$A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 4 = 14, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 3) = 5$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 0) = -4$$

$$A_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$$

Kofaktörler matrisini yazıp transpozmesini alalım:

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -18 & 2 & 4 \\ -11 & 14 & 5 \\ -10 & -4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ek } A = \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

■

Teorem 37.2 (Ek Matris Çarpımı). n . mertebeden her A kare matrisi için

$$A \cdot \text{ek } A = \text{ek } A \cdot A = |A| \cdot I_n$$

İspat.

$A \cdot \text{ek } A$ çarpımının (i, k) girdisini yazalım. $\text{ek } A$ 'nın (j, k) girdisi A_{kj} olduğundan

$$(A \cdot \text{ek } A)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}$$

Köşegen üzerinde ($i = k$). Toplam, $|A|$ 'nin i . satıra göre kofaktör açılımıdır:

$$\sum_j a_{ij} A_{ij} = |A|$$

Köşegen dışında ($i \neq k$). A matrisinin k . satırını silip yerine i . satırının bir kopyasını koyarak elde edilen matrise B diyelim. B 'nin i . ve k . satırları aynı olduğundan $|B| = 0$ 'dır. Öte yandan B 'nin k . satırı $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ 'dir ve k . satır dışındaki satırlar A ile aynı olduğundan B 'nin k . satıra ait kofaktörleri A 'nın kilerle birebir aynıdır: $B_{kj} = A_{kj}$. $|B|$ 'yi k . satıra göre açalım:

$$0 = |B| = \sum_j b_{kj} B_{kj} = \sum_j a_{ij} A_{kj}$$

Demek ki çarpımın köşegen girdileri $|A|$, diğer girdileri 0'dır:

$$A \cdot \text{ek } A = |A| I_n$$

$\text{ek } A \cdot A$ için aynı hesap sütun açılımıyla yapılır.

■

Sonuç 37.1 (Tersin Ek Matrisle Formülü). $|A| \neq 0$ ise A regülerdir ve

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ek } A$$

İspat.

$|A| \neq 0$ olduğundan $A \cdot \text{ek } A = |A| I_n$ eşitliğinin iki tarafını $|A|$ 'ya bölebiliriz:

$$A \cdot \left(\frac{1}{|A|} \text{ek } A \right) = I_n$$

Kare matrisler için $AB = I_n$ olması $B = A^{-1}$ demek olduğundan sonuç çıkar.

■

Örnek 37.5 (Ek Matrisle Ters Hesabı). Bir önceki örnekteki $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

Çözüm.

Determinantı, birinci sütuna göre açarak hesaplayalım (bu sütunda bir sıfır var):

$$|A| = 2 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} = 2(-18) + 1(-10) = -46$$

$|A| = -46 \neq 0$ olduğundan A regülerdir:

$$A^{-1} = \frac{1}{-46} \begin{pmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{5}{23} \\ -\frac{1}{23} & -\frac{7}{23} & \frac{2}{23} \\ -\frac{2}{23} & -\frac{5}{46} & \frac{4}{23} \end{pmatrix}$$

Kontrol. Birinci satır ile birinci sütunu çarpalım:

$$2 \cdot \frac{9}{23} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{23}\right) + (-4) \left(-\frac{2}{23}\right) = \frac{18 - 3 + 8}{23} = \frac{23}{23} = 1 \checkmark$$

■

⚠ Hangi yöntem?

Ek matris formülü **kuramsal** olarak değerlidir: tersin girdilerinin, A 'nın girdilerinin bir polinomu (bölü $|A|$) olduğunu gösterir. Hesap için ise pahalıdır $-n$. mertebede n^2 tane $(n-1)$. mertebeden determinant istenir. Sayısal hesapta **Gauss-Jordan yöntemi** tercih edilir. Formül asıl olarak 2×2 ve 3×3 matrislerde ve teorik akıl yürütmelerde kullanılır.

Örnek 37.6 (İkinci Mertebede Ek Matris). $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ olsun. ek A 'yı ve ek (ek A)'yı bulunuz.

Çözüm.

İkinci mertebede minörler tek elemanlıdır: a_{11} 'in minörü d , a_{12} 'ninki c , a_{21} 'inki b , a_{22} 'ninki a 'dır. İşaret şablonuyla

$$A_{11} = d, \quad A_{12} = -c, \quad A_{21} = -b, \quad A_{22} = a$$

Kofaktörler matrisi $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$; transpozisini alalım:

$$\text{ek } A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Bu, “köşegeni değiştir, diğer ikisinin işaretini çevir” biçiminde bilinen kuraldır; $|A| = ad - bc \neq 0$ iken

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Aynı kuralı ek A 'ya uygularsak

$$\text{ek (ek } A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

yani ikinci mertebede ek matris almak, iki kez uygulandığında matrisi geri verir.

■

37.4 Alıştırma

Alıştırma 37.1 (Determinant Hesapları). Aşağıdaki determinantları hesaplayınız.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix}$

$$6. \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

Çözüm.

1. Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} & 1 \left((-2)(-1) - 3 \cdot 5 \right) - 2 \left(4(-1) - 3 \cdot 2 \right) + 3 \left(4 \cdot 5 - (-2) \cdot 2 \right) \\ & = (2 - 15) - 2(-4 - 6) + 3(20 + 4) = -13 + 20 + 72 = 79 \end{aligned}$$

2. Birinci satırda bir sıfır var; yine birinci satıra göre açalım:

$$2 \left(2 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 \right) - 0 + 1 \left(4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \right) = 2(2 + 9) + (12 - 10) = 22 + 2 = 24$$

3. Aynı biçimde:

$$2 \left(2 \cdot 5 - (-3)(-3) \right) - 0 + 1 \left(3(-3) - 2(-1) \right) = 2(10 - 9) + (-9 + 2) = 2 - 7 = -5$$

4. Birinci satırda iki sıfır var; açılımda tek terim kalır:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$$

5. Bu kez ikinci **sütuna** göre açmak en kısasıdır; o sütunda yalnız $a_{32} = -3$ sıfırdan farklıdır ve işareti $(-1)^{3+2} = -1$ 'dir:

$$-(-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(4 + 3) = 21$$

6. Önce köşede bir 1 üretelim: $R_1 \rightarrow R_3 + R_1$ işlemi determinanti değiştirmez ve

$$R_1 : (3, -2, -5, 4) + (-2, 4, 7, -3) = (1, 2, 2, 1)$$

verir. Şimdi bu satırla birinci sütunun kalanını temizleyelim:

$$R_2 \rightarrow 5R_1 + R_2 = (0, 12, 18, 0)$$

$$R_3 \rightarrow 2R_1 + R_3 = (0, 8, 11, -1)$$

$$R_4 \rightarrow -2R_1 + R_4 = (0, -7, -9, 6)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 12 & 18 & 0 \\ 0 & 8 & 11 & -1 \\ 0 & -7 & -9 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 18 & 0 \\ 8 & 11 & -1 \\ -7 & -9 & 6 \end{vmatrix}$$

Kalan determinanti birinci satıra göre açalım (üçüncü elemanı sıfırdır):

$$\begin{aligned} & 12 \left(11 \cdot 6 - (-1)(-9) \right) - 18 \left(8 \cdot 6 - (-1)(-7) \right) = 12(66 - 9) - 18(48 - 7) \\ & = 12(57) - 18(41) = 684 - 738 = -54 \end{aligned}$$

■

Alıştırma 37.2 (Kofaktör ve Ek Matris). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ matrisi veriliyor.

1. $|A|$ determinantını hesaplayınız.
2. ek A matrisini bulunuz.
3. $A \cdot \text{ek } A = |A| I_3$ eşitliğini doğrulayınız.

4. A^{-1} matrisini bulunuz.

Çözüm.

1. Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} |A| &= 1(3 \cdot 7 - 4 \cdot 5) - 2(2 \cdot 7 - 4 \cdot 1) + 3(2 \cdot 5 - 3 \cdot 1) \\ &= 1(21 - 20) - 2(14 - 4) + 3(10 - 3) = 1 - 20 + 21 = 2 \end{aligned}$$

2. Dokuz kofaktör:

$$A_{11} = +(21 - 20) = 1, \quad A_{12} = -(14 - 4) = -10, \quad A_{13} = +(10 - 3) = 7$$

$$A_{21} = -(14 - 15) = 1, \quad A_{22} = +(7 - 3) = 4, \quad A_{23} = -(5 - 2) = -3$$

$$A_{31} = +(8 - 9) = -1, \quad A_{32} = -(4 - 6) = 2, \quad A_{33} = +(3 - 4) = -1$$

Kofaktörler matrisinin transpozesi:

$$\text{ek } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Çarpalım:

$$A \cdot \text{ek } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Birinci satır: $(1 - 20 + 21, 1 + 8 - 9, -1 + 4 - 3) = (2, 0, 0)$.

İkinci satır: $(2 - 30 + 28, 2 + 12 - 12, -2 + 6 - 4) = (0, 2, 0)$.

Üçüncü satır: $(1 - 50 + 49, 1 + 20 - 21, -1 + 10 - 7) = (0, 0, 2)$.

$$A \cdot \text{ek } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 = |A| I_3 \checkmark$$

4. $|A| = 2$ olduğundan

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -10 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 2 & 1 \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

■

38. Cramer Kuralı ve Operatörün Determinantı

Determinantı, ortaya çıkışına yakın bir soruya döndürüyoruz: bir lineer denklem sistemini çözmek. Denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit olduğunda çözüm, tümüyle determinantlarla yazılabilir. Bölümün ikinci yarısında ise determinantın matristen operatöre taşınmasını tamamlıyoruz.

38.1 Cramer Kuralı

n bilinmeyenli n denklemden oluşan bir sistemi ele alalım:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

Matris diliyle bu sistem $A \cdot x = b$ 'dir; burada $A = (a_{ij})$ katsayı matrisi, x ve b ise sütun matrislerdir.

Tanım 38.1 (Sistemin Determinantları). Yukarıdaki sistem için

$$\Delta := |A|$$

sayısına **sistemin determinanı** denir. Ayrıca Δ_i , A 'nın i . sütunu b sütunuyla değiştirilerek elde edilen matrisin determinantıdır:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (b \text{ sütunu } i. \text{ sırada})$$

Teorem 38.1 (Cramer Kuralı). Yukarıdaki sistemin **tek** çözümünün olması için gerek ve yeter koşul $\Delta \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda çözüm

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

İspat.

Tek çözüm ölçütü. Sistem $Ax = b$ biçimindedir. A regülerse her iki tarafı soldan A^{-1} ile çarpmak $x = A^{-1}b$ verir; bu tek çözümdür. A regüler değilse $Ax = 0$ homojen sisteminin sıfırdan farklı bir x_0 çözümü vardır (*denk koşullar listesi*); bu durumda sistemin ya hiç çözümü yoktur ya da bir x^* çözümü varsa $x^* + x_0$ da çözümdür, yani çözüm tek değildir. Demek ki tek çözümün varlığı A 'nın regülerliğine, o da $\Delta = |A| \neq 0$ koşuluna denktir.

Formül. $\Delta \neq 0$ olsun. Tersin ek matrisle formülü gereği

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\Delta} \text{ ek } A \cdot b$$

ek A 'nın (i, j) girdisi A_{ji} olduğundan, x 'in i . bileşeni

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n A_{ji} b_j$$

Sağdaki toplama bakalım. A 'nın i . sütununu b ile değiştirerek elde edilen matrise C diyelim. C ile A , i . sütun dışında aynı olduğundan C 'nin i . sütununa ait kofaktörleri A 'ninkilerle birebir aynıdır (i . sütun silindiğinde kalan matris değişmez). $|C|$ 'yi i . sütuna göre açalım:

$$\Delta_i = |C| = \sum_{j=1}^n c_{ji} C_{ji} = \sum_{j=1}^n b_j A_{ji}$$

İki eşitliği birleştirirsek $x_i = \Delta_i / \Delta$ bulunur.

■

⚠ İki uyarı

1. Kural yalnızca **denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit** olduğunda kullanılabilir; aksi hâlde A kare olmadığından Δ tanımlı bile değildir.
2. $\Delta = 0$ ise kural hiçbir şey söylemez: sistemin çözümü olmayabilir de, sonsuz çözümü olabilir de. Bu durumda **Gauss yok etme yöntemine** dönmek gerekir.

Örnek 38.1 (İki Bilinmeyenli Sistemler). Aşağıdaki sistemleri Cramer kuralıyla çözünüz.

- a) $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} ax - 2by = c \\ ab \neq 0 \text{ olmak üzere } 3ax - 5by = 2c \end{cases}$

Çözüm.

a) Üç determinantı yazalım:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9 = 19, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 35 + 3 = 38$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 21 = -19$$

$\Delta = 19 \neq 0$ olduğundan tek çözüm vardır:

$$x = \frac{38}{19} = 2, \quad y = \frac{-19}{19} = -1$$

Kontrol. $2(2) - 3(-1) = 7 \checkmark$ ve $3(2) + 5(-1) = 1 \checkmark$

b)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 3 = -13, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 4 = -39$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$$

$$x = \frac{-39}{-13} = 3, \quad y = \frac{-13}{-13} = 1$$

c)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -2b \\ 3a & -5b \end{vmatrix} = -5ab + 6ab = ab$$

$ab \neq 0$ olduğundan tek çözüm vardır.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & -2b \\ 2c & -5b \end{vmatrix} = -5bc + 4bc = -bc, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ 3a & 2c \end{vmatrix} = 2ac - 3ac = -ac$$

$$x = \frac{-bc}{ab} = -\frac{c}{a}, \quad y = \frac{-ac}{ab} = -\frac{c}{b}$$

■

Örnek 38.2 (Üç Bilinmeyenli Bir Sistem).

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

sistemini Cramer kuralıyla çözünüz.

Çözüm.

Sistemin determinanı. Birinci satıra göre açalım:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(15 - 4) - 3(9 + 2) + (-1)(6 + 5) = 22 - 33 - 11 = -22$$

$\Delta \neq 0$ olduğundan sistemin tek çözümü vardır.

Δ_x . Birinci sütun b ile değiştirilir:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1(15 - 4) - 3(24 - 2) + (-1)(16 - 5) = 11 - 66 - 11 = -66$$

Δ_y . İkinci sütun değiştirilir:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(24 - 2) - 1(9 + 2) + (-1)(3 + 8) = 44 - 11 - 11 = 22$$

Δ_z . Üçüncü sütun değiştirilir:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(5 - 16) - 3(3 + 8) + 1(6 + 5) = -22 - 33 + 11 = -44$$

Bölelim:

$$x = \frac{-66}{-22} = 3, \quad y = \frac{22}{-22} = -1, \quad z = \frac{-44}{-22} = 2$$

Kontrol. $2(3) + 3(-1) - 2 = 1$ ✓, $3(3) + 5(-1) + 2(2) = 8$ ✓, $-3 + 2(-1) + 3(2) = 1$ ✓

■

38.2 Homojen Sistemler

Teorem 38.2 (Homojen Sistemin Sıfırdan Farklı Çözümü). n bilinmeyenli n denklemden oluşan $A \cdot x = 0$ homojen sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün bulunması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta = |A| = 0$$

olmasıdır.

İspat.

Homojen sistemin her zaman $x = 0$ çözümü vardır. Cramer kuralına göre $\Delta \neq 0$ ise çözüm tektir, yani yalnız sıfır çözümü bulunur. Tersine $\Delta = 0$ ise A regüler değildir; *denk koşullar listesi* gereği bu, $Ax = 0$ sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün olması demektir.

i Not

Bu ölçüt, ilerideki bölümlerin en çok kullanılan aracıdır: bir sayının **özdeğer** olması, tam olarak uygun bir homojen sistemin sıfırdan farklı çözümü olması demektir ve bu da bir determinantın sıfır olmasına indirgenir.

38.3 Bir Lineer Operatörün Determinantı

Rank ve iz gibi determinant da taban seçiminden bağımsızdır; bunu göstermek için tek gereken çarpım kuralıdır.

Teorem 38.3 (Benzer Matrislerin Determinantları Eşittir). $A \sim B$ ise $|A| = |B|$ 'dir.

İspat.

$B = P^{-1}AP$ olsun; P regüler olduğundan $|P| \neq 0$ 'dır. Çarpımın determinantı kuralını iki kez uygulayalım:

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = \frac{1}{|P|} \cdot |A| \cdot |P| = |A|$$

Determinantlar K 'nın elemanları, yani skalerler olduğundan sıraları serbestçe değiştirilebilir.

Tanım 38.2 (Bir Operatörün Determinantı). V sonlu boyutlu bir vektör uzayı, $T \in A(V)$ ve e, V 'nin herhangi bir tabanı olsun. T 'nin **determinantı**

$$\det(T) := |[T]_e|$$

biçiminde tanımlanır. T 'nin iki matris gösterimi benzer ve benzer matrislerin determinantları eşit olduğundan tanım e tabanının seçiminden bağımsızdır.

Teorem 38.4 (Operatör Determinantının Özellikleri). V sonlu boyutlu ve $S, T \in A(V)$ olsun.

(i) $\det(S \circ T) = \det(S) \cdot \det(T)$

(ii) T 'nin tersinir olması için gerek ve yeter koşul $\det(T) \neq 0$ olmasıdır; bu durumda

$$\det(T^{-1}) = \frac{1}{\det(T)}$$

İspat.

e, V 'nin bir tabanı olsun.

(i) *Bileşkenin matrisi matrislerin çarpımı* olduğundan $[S \circ T]_e = [S]_e[T]_e$ 'dir. Determinant alıp çarpım kuralını kullanalım:

$$\det(S \circ T) = |[S]_e[T]_e| = |[S]_e| \cdot |[T]_e| = \det(S) \det(T)$$

(ii) $T \mapsto [T]_e$ eşlemesi bir cebir izomorfizmi olduğundan T tersinirdir ancak ve ancak $[T]_e$ regülerse. Regülerlik ölçütü gereği bu da $|[T]_e| \neq 0$, yani $\det(T) \neq 0$ demektir.

T tersinir olsun. $T \circ T^{-1} = I$ ve $\det(I) = |I_n| = 1$ olduğundan (i) gereği

$$\det(T) \cdot \det(T^{-1}) = 1$$

$\det(T) \neq 0$ olduğundan iki tarafı bölmek yeter.

■

Örnek 38.3 (İki Operatörün Determinantı). Aşağıdaki operatörlerin determinantlarını bulunuz.

- a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (2x - z, x + 2y - 4z, 3x - 3y + z)$
b) $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, S(x, y, z) = (2x - 4y + z, x - 2y + 3z, 5x + y - z)$

Çözüm.

a) Standart tabanda matris, katsayı matrisidir:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} \det(T) &= 2 (2 \cdot 1 - (-4)(-3)) - 0 + (-1) (1(-3) - 2 \cdot 3) \\ &= 2(2 - 12) - 1(-3 - 6) = -20 + 9 = -11 \end{aligned}$$

$\det(T) = -11 \neq 0$ olduğundan T tersinirdir.

b)

$$[S]_e = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(S) &= 2 ((-2)(-1) - 3 \cdot 1) - (-4) (1(-1) - 3 \cdot 5) + 1 (1 \cdot 1 - (-2) \cdot 5) \\ &= 2(2 - 3) + 4(-1 - 15) + (1 + 10) = -2 - 64 + 11 = -55 \end{aligned}$$

■

38.4 Alıştırma

Alıştırma 38.1 (Cramer Kuralı ve Operatör Determinantı).

- $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{cases}$ sistemini Cramer kuralıyla çözünüz.
- $\begin{cases} kx + y = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$ homojen sisteminin sıfırdan farklı bir çözümünün bulunduğu k değerlerini belirleyiniz.
- $T \in A(V)$ singüler ise $\det(T) = 0$ olduğunu gösteriniz.
- $\det(kT) = k^n \det(T)$ olduğunu gösteriniz ($n = \dim V$).

Çözüm.

1. Katsayı matrisinin determinantını birinci satıra göre açalım:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1(1 - 3) - 2(-2 - 3) + 1(2 + 1) = -2 + 10 + 3 = 11$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(1 - 3) - 2(-5 - 0) + 1(5 - 0) = -6 + 10 + 5 = 9$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-5 - 0) - 3(-2 - 3) + 1(0 - 5) = -5 + 15 - 5 = 5$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0 - 5) - 2(0 - 5) + 3(2 + 1) = -5 + 10 + 9 = 14$$

$$x = \frac{9}{11}, \quad y = \frac{5}{11}, \quad z = \frac{14}{11}$$

Kontrol. Üçüncü denklem: $\frac{9}{11} + \frac{5}{11} - \frac{14}{11} = 0$ ✓

2. $\Delta = k^2 - 1$ 'dir. Sıfırdan farklı çözümün bulunması için $\Delta = 0$, yani $k = 1$ ya da $k = -1$ olmalıdır.

3. T singüler ise $\text{Ker } T \neq \{0\}$ 'dir, yani $T(v) = 0$ olacak biçimde bir $v \neq 0$ vardır. e bir taban olmak üzere temel eşitlik gereği

$$[T]_e \cdot [v]_e = [T(v)]_e = 0$$

$v \neq 0$ olduğundan $[v]_e \neq 0$ 'dır; demek ki $[T]_e x = 0$ homojen sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü vardır. Homojen sistem ölçütü gereği $|[T]_e| = 0$, yani $\det(T) = 0$ 'dır.

4. $[kT]_e = k[T]_e$ 'dir. Bir matrisin bütün girdilerini k ile çarpmak, n satırın her birini k ile çarpmak demektir; her satır çarpımı determinanı k katına çıkardığından

$$\det(kT) = |k[T]_e| = k^n |[T]_e| = k^n \det(T)$$

■

39. Matris ve Operatör Polinomları

Bir kare matrisin kuvvetleri tanımlıydı ve skalerle çarpılıp toplanabiliyordu; bu iki işlem bir arada, bir polinomu bir matriste “hesaplama” imkânı verir. Sonraki bölümlerin bütün araçları — karakteristik polinom, Cayley-Hamilton teoremi, köşegenleştirme ölçütü — bu basit fikrin üzerine kurulur.

39.1 Bir Matriste Polinom

Tanım 39.1 (Matris Polinomu). K üzerinde

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

bir polinom ve A , m . mertebeden bir kare K -matris olsun. f 'nin A 'daki değeri

$$f(A) := a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_m$$

kare matrisidir. Burada $A^0 = I_m$ olarak alınır; yani sabit terim birim matrisle çarpılır.

⚠ Sabit terim skaler değil, skaler matristir

$f(A)$ bir matristir; toplamın her terimi de matris olmalıdır. Bu yüzden sabit terim a_0 değil $a_0 I_m$ 'dir. $f(A) = 0$ yazıldığında da sağ taraf sıfır **matris**idir.

Örnek 39.1 (İki Polinomun Değeri). $f(t) = 2t^2 - 3t + 7$ ve $g(t) = t^2 - 5t - 2$ polinomları ile $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisi veriliyor. $f(A)$ ve $g(A)$ 'yı hesaplayınız.

Çözüm.

Önce A^2 'yi bulalım:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$

$f(A)$:

$$\begin{aligned} f(A) &= 2A^2 - 3A + 7I_2 = \begin{pmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14-3+7 & 20-6+0 \\ 30-9+0 & 44-12+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 21 & 39 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$g(A)$:

$$g(A) = A^2 - 5A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

Tanım 39.2 (Bir Polinomun Kökü Olan Matris). $f(A) = 0$ ise A matrisine $f(t)$ polinomunun bir kökü (sıfırı) denir.

Yukarıdaki örnekte $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matrisi $g(t) = t^2 - 5t - 2$ polinomunun bir köküdür. Bu bir rastlantı değildir: ilerideki bölümlerde her kare matrisin, kendi **karakteristik polinomunun** bir kökü olduğunu göreceğiz — g tam olarak bu matrisin karakteristik polinomudur.

39.2 İşlemlerle Uyum

Teorem 39.1 (Değerlendirme İşlemleri Korur). $f(t)$ ve $g(t)$, K üzerinde polinomlar; A bir kare K -matris ve $k \in K$ olsun. O zaman

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A), \quad (f \cdot g)(A) = f(A) \cdot g(A), \quad (kf)(A) = k f(A)$$

İspat.

$f(t) = \sum_i a_i t^i$ ve $g(t) = \sum_j b_j t^j$ olsun.

Toplam. $(f + g)(t) = \sum_i (a_i + b_i) t^i$ olduğundan

$$(f + g)(A) = \sum_i (a_i + b_i) A^i = \sum_i a_i A^i + \sum_i b_i A^i = f(A) + g(A)$$

Çarpım. $(f \cdot g)(t) = \sum_i \sum_j a_i b_j t^{i+j}$ ’dir. Değerlendirirsek

$$(f \cdot g)(A) = \sum_i \sum_j a_i b_j A^{i+j}$$

Öte yandan matris çarpımı toplama üzerine dağıldığından

$$f(A) \cdot g(A) = \left(\sum_i a_i A^i \right) \left(\sum_j b_j A^j \right) = \sum_i \sum_j a_i b_j A^i A^j = \sum_i \sum_j a_i b_j A^{i+j}$$

İki taraf aynıdır. Burada $A^i A^j = A^{i+j}$ eşitliği kullanıldı.

Skalerle çarpım. $(kf)(t) = \sum_i (ka_i) t^i$ olduğundan $(kf)(A) = \sum_i ka_i A^i = k f(A)$ ’dir.

■

Sonuç 39.1 (Aynı Matrisin Polinomları Değişmelidir). Her f, g polinomu ve her kare A matrisi için

$$f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A)$$

İspat.

Polinom çarpımı değişmelidir: $f \cdot g = g \cdot f$. Bir önceki teoremi iki yönde de uygulayalım:

$$f(A)g(A) = (f \cdot g)(A) = (g \cdot f)(A) = g(A)f(A)$$

■

i Not

Matris çarpımı genel olarak değişmeli değildir; ama **aynı** matristen üretilen polinomlar birbiriyle değişir. Sebep basittir: $A^i A^j = A^j A^i$ ’dir. Bu, ileride çarpanlara ayırma yaparken serbestçe kullanacağımız bir kolaylıktır.

39.3 Operatör Polinomları

Aynı tanım lineer operatörler için **operatörler cebri** bölümünde verilmişti: $f(t) = a_n t^n + \dots + a_0$ ve $T \in A(V)$ olmak üzere

$$f(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \dots + a_1 T + a_0 I$$

operatörü tanımlanıyor ve $f(T) = 0$ olduğunda T 'ye f 'nin bir kökü deniyordu. Tek fark, birim matrisin yerini birim operatörün almasıdır.

Matrisler için yukarıda ispatlanan üç eşitlik, operatörler için de aynen geçerlidir; ispatları sözcüğü sözcüğüne aynıdır, çünkü operatörler cebri de toplama, skalerle çarpma ve bileşke işlemleriyle matris cebriyle aynı kuralları sağlar. Aşağıdaki teorem bu benzerliğin tesadüf olmadığını gösterir.

Teorem 39.2 (Polinom Matris Gösterimiyle Değişir). V sonlu boyutlu, e bir tabanı ve $T \in A(V)$ olsun. $A = [T]_e$ olmak üzere her f polinomu için

$$[f(T)]_e = f(A)$$

Özel olarak

$$f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$$

İspat.

Operatör cebri ile matris cebri bölümünde $T \mapsto [T]_e$ eşleminin bir **cebiri izomorfizmi** olduğunu görmüştük: toplamı toplama, skalerle çarpımı skalerle çarpıma, bileşkeyi matris çarpımına götürür ve birim operatörü birim matrise gönderir. Bileşkeyi koruduğundan kuvvetleri de korur:

$$[T^i]_e = ([T]_e)^i = A^i$$

$f(t) = \sum_i a_i t^i$ olsun. Toplama ve skalerle çarpma korunduğundan

$$[f(T)]_e = \left[\sum_i a_i T^i \right]_e = \sum_i a_i [T^i]_e = \sum_i a_i A^i = f(A)$$

Son ifade için: eşleme bire bir olduğundan $f(T)$ sıfır operatörü olması ile $[f(T)]_e$ sıfır matris olması aynı şeydir. ■

🔍 Neden önemli?

Bu teorem, operatörlerle ilgili polinom sorularını matris hesabına çevirir. “ T şu polinomun kökü müdür?” sorusunu cevaplamak için bir taban seçip matrisi yazmak ve sayısal bir hesap yapmak yeter; üstelik hangi tabanın seçildiği sonucu değiştirmez, çünkü farklı tabanlardaki matrisler benzerdir ve benzerlik polinom almayla uyumludur: $[f(T)]_f = P^{-1} f([T]_e) P$.

Örnek 39.2 (İki Hesap).

- a) $f(t) = t^2 - 3t + 7$ ve $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ için $f(A)$ 'yı bulunuz.
- b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin $f(t) = t^2 - 4t - 5$ polinomunun bir kökü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-8 & -2-10 \\ 4+20 & -8+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(A) &= A^2 - 3A + 7I_2 = \begin{pmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7-3+7 & -12+6 \\ 24-12 & 17-15+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 & 4+12 \\ 2+6 & 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = A^2 - 4A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Demek ki A , $f(t)$ 'nin bir köküdür.

■

39.4 Alıştırma

Alıştırma 39.1 (Polinom Hesapları).

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ve $f(t) = t^2 - 5t + 6$ için $f(A)$ 'yı hesaplayınız.
2. A köşegen bir matris ve köşegen elemanları $d_1, \dots, d_n$ ise $f(A)$ 'nın da köşegen olduğunu ve köşegen elemanlarının $f(d_1), \dots, f(d_n)$ olduğunu gösteriniz.
3. A , $f(t)$ 'nin bir kökü ve P regüler ise $P^{-1}AP$ matrisinin de $f(t)$ 'nin bir kökü olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2-3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = A^2 - 5A + 6I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A üçgensel olduğundan köşegeni 2 ve 3'tür; $f(t) = (t-2)(t-3)$ polinomu bu iki sayıda sıfırlanıyor. Bir sonraki alıştırma bunun neden beklendiğini açıklıyor.

2. Köşegen matrislerin çarpımı köşegendir ve köşegen elemanları çarpılır; tümevarımla

$$A^i = \text{diag} (d_1^i, d_2^i, \dots, d_n^i)$$

Skalerle çarpma ve toplama da köşegen üzerinde ayrı ayrı yapıldığından

$$f(A) = \sum_i a_i A^i = \text{diag} \left(\sum_i a_i d_1^i, \dots, \sum_i a_i d_n^i \right) = \text{diag} (f(d_1), \dots, f(d_n))$$

3. Benzerlik ve kuvvetler teoremi gereği her i için $(P^{-1}AP)^i = P^{-1}A^iP$ 'dir. Öyleyse

$$f(P^{-1}AP) = \sum_i a_i P^{-1}A^iP = P^{-1} \left(\sum_i a_i A^i \right) P = P^{-1}f(A)P = P^{-1} \cdot 0 \cdot P = 0$$

(Sabit terimde $a_0 I_n = P^{-1}a_0 I_n P$ olduğu kullanıldı.)

■

40. Özdeğerler ve Özvektörler

Bir operatörün matrisini köşegen yapan taban aramak, [benzerlik](#) bölümünde ortaya çıkan sorumuzdu. $[T]_f$ matrisinin köşegen olması, f tabanının her f_j vektörü için

$$T(f_j) = k_j f_j$$

demektir: T , f_j 'nin yönünü değiştirmiyor, yalnızca bir katsayıyla ölçekliyor. Böyle vektörleri ve karşılardaki katsayıları incelemeye başlıyoruz.

40.1 Tanım

Tanım 40.1 (Özdeğer ve Özvektör). V , K üzerinde bir vektör uzayı ve $T \in A(V)$ olsun. Bir $\lambda \in K$ skaleri için

$$T(v) = \lambda v$$

olacak biçimde **sıfırdan farklı** bir $v \in V$ vektörü varsa, λ 'ya T 'nin bir **özdeğeri**, v 'ye de λ özdeğerine ait bir **özvektörü** denir.

⚠ Sıfır vektör özvektör değildir

$T(0) = 0 = \lambda \cdot 0$ eşitliği her λ için doğrudur; sıfır vektörü özvektör saysaydık her skaler özdeğer olurdu ve kavram anlamsızlaşırdı. Buna karşılık $\lambda = 0$ **özdeğer olabilir**: $T(v) = 0$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir v varsa, yani T singülerse, 0 bir özdeğerdir.

Bir özvektörün sıfırdan farklı her katı yine aynı özdeğere ait bir özvektördür: $T(kv) = kT(v) = k\lambda v = \lambda(kv)$. Dahası, aynı özdeğere ait özvektörler sıfır vektörüyle birlikte bir alt uzay oluşturur.

Önerme 40.1 (Öz Uzay). $\lambda \in K$ ve

$$V_\lambda := \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$$

olsun. V_λ , V 'nin bir alt uzayıdır ve

$$V_\lambda = \text{Ker} (\lambda I - T)$$

λ bir özdeğer ise V_λ 'ya λ 'nın **öz uzayı** denir.

İspat.

$v \in V$ için

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda v - T(v) = 0 \Leftrightarrow (\lambda I - T)(v) = 0$$

olduğundan V_λ , $\lambda I - T$ lineer operatörünün çekirdeğidir. Çekirdek bir alt uzay olduğundan V_λ bir alt uzayıdır. ■

Teorem 40.1 (Özdeğerin Singülerlik Ölçütü). $\lambda \in K$ skalerinin T 'nin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul, $\lambda I - T$ operatörünün **singüler** olmasıdır.

İspat.

λ bir özdeğerdir $\Leftrightarrow T(v) = \lambda v$ olacak biçimde $v \neq 0$ vardır $\Leftrightarrow (\lambda I - T)(v) = 0$ olacak biçimde $v \neq 0$ vardır $\Leftrightarrow \text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\} \Leftrightarrow \lambda I - T$ singülerdir.

■

Örnek 40.1 (İki Basit Örnek).

- a) Birim operatör I_V 'nin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.
- b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, x)$ operatörünün (yani $y = x$ doğrusuna göre yansımanın) özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz.

Çözüm.

a) Her v için $I_V(v) = v = 1 \cdot v$ olduğundan sıfırdan farklı her vektör bir özvektördür ve tek özdeğer $\lambda = 1$ 'dir. Öz uzay bütün V 'dir.

b) $T(x, y) = \lambda(x, y)$ eşitliğini yazalım:

$$y = \lambda x, \quad x = \lambda y$$

Birinciye ikincide yerine koyalım: $x = \lambda^2 x$. $x = 0$ olursa birinci denklemden $y = 0$ çıkar; bu sıfır vektörüdür, kabul edilmez. Öyleyse $x \neq 0$ ve $\lambda^2 = 1$, yani $\lambda = 1$ ya da $\lambda = -1$ 'dir.

$\lambda = 1$ için $y = x$; öz uzay $y = x$ doğrusudur ve $(1, 1)$ bir özvektördür.

$\lambda = -1$ için $y = -x$; öz uzay $y = -x$ doğrusudur ve $(1, -1)$ bir özvektördür.

Geometrik olarak beklenen sonuç: yansıma, ayna doğrusu üzerindeki vektörleri değiştirmez, doğruya dik olanları ters çevirir. $\{(1, 1), (1, -1)\}$ tabanında T 'nin matrisi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ köşegen matrisidir.

■

40.2 Matrisler İçin

A , n . mertebeden bir kare K -matris olsun. A 'yı, K^n üzerinde $v \mapsto A \cdot v$ operatörü olarak okuyabiliriz; bu operatörün özdeğer ve özvektörlerine A 'nın özdeğer ve özvektörleri denir. Açık yazılışı:

$$A \cdot v = \lambda v, \quad v \neq 0$$

Bu denklemi $(\lambda I_n - A) v = 0$ biçiminde yazarsak, aradığımız şey bir **homojen sistemin sıfırdan farklı çözümü** olur. **Homojen sistem ölçütü** tam olarak bu durumu bir determinanta bağlar:

$$\lambda, A \text{ 'nın bir özdeğeridir} \Leftrightarrow |\lambda I_n - A| = 0$$

Örnek 40.2 (İkinci Mertebeden Bir Matrisin Özdeğerleri). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve her özdeğere ait öz uzayı bulunuz.

Çözüm.

Özdeğerler. $(tI_2 - A) v = 0$ homojen sisteminin sıfırdan farklı çözümü olması için determinantı sıfır olmalıdır:

$$|tI_2 - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2) - 6 = t^2 - 3t - 4$$

$$t^2 - 3t - 4 = (t-4)(t+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 4 \text{ veya } t = -1$$

$\lambda = 4$ için öz uzay. $t = 4$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad 3x - 2y = 0$$

İki denklem birbirinin katıdır; serbest değişkene keyfi değer verelim. $x = 2$ için $y = 3$:

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \{kv : k \in \mathbb{R}\}$$

Kontrol. $A v = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4v \checkmark$
 $\lambda = -1$ için öz uzay. $t = -1$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + y = 0$$

$x = 1$ için $y = -1$:

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_{-1} = \{k w : k \in \mathbb{R}\}$$

Kontrol. $A w = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -w \checkmark$

■

💡 Hesabın iskeleti

Bir matrisin özdeğer ve özvektörlerini bulmak daima üç adımdır:

1. $|tI_n - A| = 0$ denklemini kurup köklerini bulun — bunlar özdeğerlerdir.
2. Her özdeğer λ için t yerine λ koyup $(\lambda I_n - A)x = 0$ homojen sistemini çözün.
3. Çözüm uzayının bir tabanını yazın; bu, λ 'nın öz uzayının tabanıdır.

İkinci adımda sistemin **her zaman** sıfırdan farklı çözümü vardır; çıkmıyorsa birinci adımda ya da çözümde bir hesap hatası var demektir.

40.3 Farklı Özdeğerler, Bağımsız Özvektörler

Köşegenleştirmeye giden yolun kilit taşı aşağıdaki teoremdir.

Teorem 40.2 (Farklı Özdeğerlere Ait Özvektörler Lineer Bağımsızdır). $v_1, v_2, \dots, v_m, T$ operatörünün sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ özdeğerlerine ait özvektörleri olsun. Özdeğerler ikişer ikişer farklı ise ($i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$) $v_1, \dots, v_m$ lineer bağımsızdır.

İspat.

m üzerinden tümevarım yapalım.

Başlangıç. $m = 1$ için: $v_1 \neq 0$ olduğundan tek elemanlı $\{v_1\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

Adım. İddia $m - 1$ için doğru olsun ve

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0 \quad (*)$$

olsun. T 'yi uygulayalım; T lineer ve $T(v_i) = \lambda_i v_i$ olduğundan

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_m \lambda_m v_m = 0 \quad (**)$$

Şimdi $(*)$ 'i λ_m ile çarpıp $(**)$ 'dan çıkaralım. Son terimler birbirini götürür:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_m)v_2 + \dots + a_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} = 0$$

Tümevarım varsayımı gereği $v_1, \dots, v_{m-1}$ lineer bağımsızdır; öyleyse bütün katsayılar sıfırdır:

$$a_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0 \quad (i = 1, \dots, m-1)$$

Özdeğerler farklı olduğundan $\lambda_i - \lambda_m \neq 0$ 'dır ve K bir cisim olduğundan $a_i = 0$ çıkar. Bunları $(*)$ 'da yerine koyarsak $a_m v_m = 0$ kalır; $v_m \neq 0$ olduğundan $a_m = 0$ 'dır. Bütün katsayılar sıfır olduğuna göre $v_1, \dots, v_m$ lineer bağımsızdır.

■

Sonuç 40.1 (n Farklı Özdeğer). $\dim V = n$ ve $T \in A(V)$ operatörünün n tane farklı özdeğeri varsa, bu özdeğerlere ait özvektörler V 'nin bir tabanını oluşturur.

İspat.

n tane farklı özdeğere ait n özvektör, yukarıdaki teorem gereği lineer bağımsızdır. n boyutlu bir uzayda n tane lineer bağımsız vektör bir taban oluşturur.

■

⚠ Tersini doğru değildir

Teorem, farklı özdeğerlere ait özvektörlerin bağımsız olduğunu söyler; bunun tersi, yani “lineer bağımsız özvektörlerin özdeğerleri farklıdır” ifadesi **yanlıştır**. Aynı özdeğere ait öz uzay birden çok boyutlu olabilir; o zaman aynı özdeğerin lineer bağımsız birden çok özvektörü bulunur. Birim operatör bunun en uç örneğidir: tek özdeğeri 1’dir, ama sıfırdan farklı her vektör özvektörüdür.

40.4 Alıştırma

Alıştırma 40.1 (Özdeğer ve Özvektör Hesapları).

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve öz uzaylarını bulunuz.
2. λ , T 'nin bir özdeğeri ve v buna ait bir özvektör ise, her $m \in \mathbb{Z}^+$ için λ^m 'nin T^m 'nin bir özdeğeri ve v 'nin buna ait bir özvektörü olduğunu gösteriniz.
3. $0 \in K$ skalerinin T 'nin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşulun T 'nin singüler olması olduğunu gösteriniz.
4. T tersinir ve λ bir özdeğeri ise $\lambda \neq 0$ olduğunu ve λ^{-1} 'in T^{-1} 'in bir özdeğeri olduğunu gösteriniz.
5. λ , A 'nın bir özdeğeri ise her f polinomu için $f(\lambda)$ 'nin $f(A)$ 'nin bir özdeğeri olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1.

$$|tI_2 - A| = \begin{vmatrix} t-2 & -2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3) - 2 = t^2 - 5t + 4 = (t-1)(t-4)$$

Özdeğerler 1 ve 4’tür.

$$t = 1: \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x + 2y = 0. y = 1 \text{ için } x = -2:$$

$$V_1 = \{ k(-2, 1) : k \in \mathbb{R} \}$$

$$t = 4: \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0. x = 1 \text{ için } y = 1:$$

$$V_4 = \{ k(1, 1) : k \in \mathbb{R} \}$$

2. $T(v) = \lambda v$ olsun. T 'yi bir kez daha uygulayalım:

$$T^2(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda^2 v$$

Aynı adımı tekrarlayarak (tümevarımla) her m için $T^m(v) = \lambda^m v$ elde edilir. $v \neq 0$ olduğundan λ^m , T^m 'nin bir özdeğeri.

3. Tanımı $\lambda = 0$ için yazalım:

$$0, T \text{ 'nin özdeğeri } \Leftrightarrow T(v) = 0 \cdot v = 0 \text{ olacak biçimde } v \neq 0 \text{ vardır}$$

Sağ taraf, $\text{Ker } T \neq \{0\}$ demektir; bu da tanım gereği T 'nin **singüler** olmasıdır.

4. $\lambda = 0$ olsaydı 3. şık gereği T singüler, yani tersinmez olurdu. Öyleyse $\lambda \neq 0$ 'dır ve λ^{-1} vardır.

$T(v) = \lambda v$ eşitliğine soldan T^{-1} uygulayalım:

$$v = T^{-1}(\lambda v) = \lambda T^{-1}(v) \Rightarrow T^{-1}(v) = \lambda^{-1} v$$

$v \neq 0$ olduğundan λ^{-1}, T^{-1} 'in bir özdeğeridir.

5. $f(t) = \sum_i a_i t^i$ olsun. 2. sıktaki hesabın matris hâli her i için $A^i v = \lambda^i v$ verir ($A^0 v = I v = v = \lambda^0 v$). Toplayalım:

$$f(A) v = \sum_i a_i A^i v = \sum_i a_i \lambda^i v = \left(\sum_i a_i \lambda^i \right) v = f(\lambda) v$$

$v \neq 0$ olduğundan $f(\lambda), f(A)$ 'nın bir özdeğeridir.

■

41. Karakteristik Polinom ve Cayley-Hamilton Teoremi

Önceki bölümde özdeğerleri $|tI_n - A| = 0$ denkleminin kökleri olarak bulmuştuk. Soldaki ifade, t değişkenine bağlı bir polinomdur ve matrisin en önemli tek değişmezini oluşturur. Bu bölümde onu adlandırıp özelliklerini çıkarıyoruz.

41.1 Karakteristik Polinom

Tanım 41.1 (Karakteristik Matris ve Karakteristik Polinom). $A = (a_{ij})$, K üzerinde n . mertebeden bir kare matris ve t bir değişken olsun.

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & t - a_{nn} \end{pmatrix}$$

matrisine A 'nın **karakteristik matrisi**, determinantına ise A 'nın **karakteristik polinomu** denir:

$$\Delta_A(t) := |tI_n - A|$$

$\Delta_A(t) = 0$ denkleminin A 'nın **karakteristik denklemi** denir.

Önerme 41.1 (Karakteristik Polinomun Baş ve Son Katsayıları). $\Delta_A(t)$, katsayıları K 'dan olan n . dereceden bir polinomdur ve

$$\Delta_A(t) = t^n - \text{iz}(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$$

İspat.

Derece ve baş katsayı. Determinant tanımındaki her terim, her satırdan bir çarpan alır. Değişken t yalnızca köşegende bulunduğundan, en yüksek dereceli terim ancak bütün çarpanlar köşegenden alındığında ortaya çıkar; bu da birim permütasyona karşılık gelen

$$(t - a_{11})(t - a_{22})\cdots(t - a_{nn})$$

çarpımıdır. Başka her permütasyon köşegen dışından en az iki çarpan aldığından derecesi en çok $n - 2$ 'dir. Öyleyse t^n ve t^{n-1} katsayıları yalnız yukarıdaki çarpımdan gelir. Çarpımı açarsak t^n 'nin katsayısı 1, t^{n-1} 'in katsayısı ise

$$-(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = -\text{iz}(A)$$

Sabit terim. Bir polinomun sabit terimi, $t = 0$ konarak bulunur:

$$\Delta_A(0) = |0 \cdot I_n - A| = |-A|$$

$-A$, A 'nın her satırının -1 ile çarpılmasıyla elde edilir; n satır için

$$|-A| = (-1)^n |A|$$

■

i Not

İki katsayı, iki tanıdık büyüklüğü geri veriyor: t^{n-1} 'in katsayısı $-\text{iz}(A)$, sabit terim $(-1)^n |A|$. Bu, hesabın doğruluğunu denetlemenin en hızlı yoludur: karakteristik polinomu bulduktan sonra iki katsayıyı iz ve determinantla karşılaştırın.

Örnek 41.1 (Üçüncü Mertebeden Bir Karakteristik Polinom). $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu bulunuz.

Çözüm.

Karakteristik matrisi yazalım:

$$tI_3 - A = \begin{pmatrix} t-1 & -3 & 0 \\ 2 & t-2 & 1 \\ -4 & 0 & t+2 \end{pmatrix}$$

Birinci satıra göre açalım (üçüncü elemanı sıfır olduğundan iki terim kalır):

$$\begin{aligned} \Delta_A(t) &= (t-1) \begin{vmatrix} t-2 & 1 \\ 0 & t+2 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & t+2 \end{vmatrix} \\ &= (t-1)(t-2)(t+2) + 3(2(t+2) + 4) \\ &= (t-1)(t^2 - 4) + 3(2t + 8) = t^3 - 4t - t^2 + 4 + 6t + 24 \\ \Delta_A(t) &= t^3 - t^2 + 2t + 28 \end{aligned}$$

Kontrol. $\text{iz}(A) = 1 + 2 - 2 = 1$ olduğundan t^2 'nin katsayısı -1 olmalıydı ✓. Determinant

$$|A| = 1(2(-2) - (-1) \cdot 0) - 3((-2)(-2) - (-1) \cdot 4) + 0 = -4 - 3(8) = -28$$

olduğundan sabit terim $(-1)^3(-28) = 28$ olmalıydı ✓

■

41.2 Özdeğerler Karakteristik Polinomun Kökleridir

Teorem 41.1 (Özdeğerlerin Karakterizasyonu). A, K üzerinde n . mertebeden bir kare matris olsun. Bir $\lambda \in K$ skalerinin A 'nın bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta_A(\lambda) = 0$$

olmasıdır.

İspat.

Zincirleme denklikleri yazalım:

$$\begin{aligned} \lambda, A \text{ 'nın özdeğeri} &\Leftrightarrow (\lambda I_n - A)v = 0 \text{ olacak biçimde } v \neq 0 \text{ vardır} \\ &\Leftrightarrow \lambda I_n - A \text{ singülerdir} \\ &\Leftrightarrow |\lambda I_n - A| = 0 \Leftrightarrow \Delta_A(\lambda) = 0 \end{aligned}$$

İkinci denklik özdeğerin singülerlik ölçütü, üçüncüsü ise **regülerliğin determinant ölçütüdür.**

■

❓ Kaç özdeğer olabilir?

$\Delta_A(t)$, n . dereceden bir polinomdur; bir cisim üzerinde n . dereceden bir polinomun en çok n kökü olduğundan, n . mertebeden bir matrisin **en çok n farklı özdeğeri** vardır. Kaç tane olduğu K 'ya bağlıdır. $K = \mathbb{C}$ ise cebir esas teoremi gereği her polinomun en az bir kompleks kökü vardır; öyleyse **her kompleks kare matrisin en az bir özdeğeri vardır**. $K = \mathbb{R}$ ise durum farklıdır: $t^2 + 1$ gibi reel kökü olmayan bir karakteristik polinom, hiç reel özdeğeri olmayan bir matris demektir.

Teorem 41.2 (Benzer Matrislerin Karakteristik Polinomları Aynıdır). $A \sim B$ ise $\Delta_A(t) = \Delta_B(t)$ 'dir.

İspat.

$B = P^{-1}AP$ olacak biçimde regüler bir P olsun. $P^{-1}(tI_n)P = tI_n$ olduğuna dikkat ederek yazalım:

$$\begin{aligned}\Delta_B(t) &= |tI_n - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tI_n)P - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(tI_n - A)P| = |P^{-1}| \cdot |tI_n - A| \cdot |P| \\ &= \frac{1}{|P|} \cdot |tI_n - A| \cdot |P| = \Delta_A(t)\end{aligned}$$

■

Tanım 41.2 (Bir Operatörün Karakteristik Polinomu). V , n boyutlu bir vektör uzayı ve $T \in A(V)$ olsun. T 'nin **karakteristik polinomu**, T 'nin herhangi bir matris gösteriminin karakteristik polinomudur:

$$\Delta_T(t) := \Delta_{[T]_e}(t)$$

T 'nin iki matris gösterimi benzer olduğundan ve benzer matrislerin karakteristik polinomları aynı olduğundan tanım taban seçiminden bağımsızdır. $\Delta_T(t)$ 'nin derecesi $n = \dim V$ 'dir ve bir $\lambda \in K$ skalerinin T 'nin özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul $\Delta_T(\lambda) = 0$ olmasıdır.

⚠ Tersı doğru değildir

“Benzer matrislerin karakteristik polinomları aynıdır” ifadesinin tersi yanlıştır: aynı karakteristik polinoma sahip iki matris benzer olmak zorunda değildir. [Köşegenleştirme](#) bölümünde, karakteristik polinomları özdeş olduğu hâlde biri köşegenleştirilebilen, diğeri köşegenleştirilemeyen iki matris göreceğiz; bunlar benzer olamaz.

41.3 Cayley-Hamilton Teoremi

Teorem 41.3 (Cayley-Hamilton Teoremi). Her kare matris, kendi karakteristik polinomunun bir köküdür:

$$\Delta_A(A) = 0$$

İspat.

$\Delta_A(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1t + c_0$ olsun.

$B(t)$ ile $tI_n - A$ karakteristik matrisinin *ek matrisini* gösterelim. $B(t)$ 'nin girdileri, $tI_n - A$ 'nın $(n-1)$. mertebeden minörleri olduğundan t 'nin derecesi en çok $n-1$ olan polinomlardır. Öyleyse $B(t)$, girdileri sabit olan matrislerle

$$B(t) = B_{n-1}t^{n-1} + B_{n-2}t^{n-2} + \dots + B_1t + B_0$$

biçiminde yazılabilir; burada $B_0, \dots, B_{n-1}$ sabit n . mertebeden kare matrislerdir. *Ek matris çarpımı* teoremini $tI_n - A$ matrisine uygulayalım:

$$(tI_n - A) B(t) = |tI_n - A| I_n = \Delta_A(t) I_n$$

Sol tarafı açalım:

$$(tI_n - A) B(t) = B_{n-1}t^n + (B_{n-2} - AB_{n-1})t^{n-1} + \dots \\ \dots + (B_0 - AB_1)t - AB_0$$

Sağ taraf ise

$$\Delta_A(t)I_n = I_n t^n + c_{n-1}I_n t^{n-1} + \dots + c_1 I_n t + c_0 I_n$$

İki polinom matrisi eşitse aynı dereceli katsayı matrisleri eşittir:

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I_n \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= c_{n-1}I_n \\ &\vdots \\ B_0 - AB_1 &= c_1 I_n \\ -AB_0 &= c_0 I_n \end{aligned}$$

Şimdi bu eşitlikleri sırasıyla soldan $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I_n$ ile çarpıp taraf tarafa toplayalım. Sağ tarafların toplamı

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I_n = \Delta_A(A)$$

Sol tarafların toplamında ise ardışık terimler birbirini götürür:

$$A^n B_{n-1} + (A^{n-1} B_{n-2} - A^n B_{n-1}) + \dots + (AB_0 - A^2 B_1) - AB_0 = 0$$

Demek ki $\Delta_A(A) = 0$ 'dır.

■

⚠ Sık yapılan hata

“ $\Delta_A(t) = |tI - A|$ ifadesinde t yerine A yazalım: $\Delta_A(A) = |AI - A| = |0| = 0$ ” akıl yürütmesi **geçersizdir**. $|tI - A|$ ifadesinde t bir skalerdir; yerine bir matris koymak tanımsızdır. Yukarıdaki ispat tam da bu boşluğu kapatmak için yapılır.

Örnek 41.2 (Teoremin Sayısal Doğrulaması). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi için Cayley-Hamilton teoremini doğrulayınız.

Çözüm.

Karakteristik polinom bir önceki bölümde bulunmuştu:

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -3 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2) - 6 = t^2 - 3t - 4$$

Şimdi t yerine A koyalım. Önce A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & 2+4 \\ 3+6 & 6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_A(A) = A^2 - 3A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

■

41.4 Cayley-Hamilton ile Ters Hesabı

Teoremin en kullanışlı sonucu, tersi bir polinom hesabına indirger.

Sonuç 41.1 (Tersin Cayley-Hamilton'la Bulunması). $\Delta_A(t) = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1t + c_0$ ve $c_0 \neq 0$ olsun. O zaman A regülerdir ve

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0} \left(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \dots + c_2A + c_1I_n \right)$$

İspat.

Sabit terim $c_0 = (-1)^n |A|$ olduğundan $c_0 \neq 0$ olması $|A| \neq 0$, yani A 'nın regüler olması demektir. Cayley-Hamilton teoremi gereği

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1A + c_0I_n = 0$$

Sabit terimi karşıya atalım ve kalan terimlerin ortak çarpanı olarak A 'yı ayıralım:

$$A \left(A^{n-1} + c_{n-1}A^{n-2} + \dots + c_1I_n \right) = -c_0I_n$$

İki tarafı $-c_0$ 'a bölersek, A ile çarpımı I_n veren matris ortaya çıkar; kare matrisler için bu matris A^{-1} 'dir. ■

Örnek 41.3 (Cayley-Hamilton ile Ters). $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini Cayley-Hamilton teoremiyle bulunuz.

Çözüm.

Karakteristik polinom:

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2)(t-1) - 1 = t^2 - 3t + 1$$

Teorem gereği $A^2 - 3A + I_2 = 0$ 'dır. Buradan

$$\begin{aligned} A^2 - 3A &= -I_2 \quad \Rightarrow \quad A(A - 3I_2) = -I_2 \\ \Rightarrow \quad A(3I_2 - A) &= I_2 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = 3I_2 - A \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kontrol. $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$ ■

41.5 Alıştırma

Alıştırma 41.1 (Karakteristik Polinom Üzerine).

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomunu bulunuz ve reel özdeğerlerinin olup olmadığını araştırınız.
2. A ile A^t 'nin karakteristik polinomlarının aynı olduğunu gösteriniz.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ matrisinin kökü olduğu bir polinom bulunuz.
4. Üçgensel bir matrisin özdeğerlerinin köşegen elemanları olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

1.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 2 \\ -4 & t+1 \end{vmatrix} = (t-3)(t+1) + 8 = t^2 - 2t + 5$$

Diskriminant $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ olduğundan polinomun reel kökü yoktur; A 'nın reel özdeğeri yoktur. (Kompleks sayılar cismi üzerinde bakılırsa kökler $1 \pm 2i$ 'dir.)

Kontrol. iz $(A) = 3 - 1 = 2$ ve $|A| = -3 + 8 = 5$; katsayılar -2 ve $(+1)^2 \cdot 5 = 5$ olmalıydı ✓

2. $(tI_n - A)^t = tI_n^t - A^t = tI_n - A^t$ 'dir. Bir matrisle transpozisinin determinantları eşit olduğundan

$$\Delta_A(t) = |tI_n - A| = |(tI_n - A)^t| = |tI_n - A^t| = \Delta_{A^t}(t)$$

3. Cayley-Hamilton teoremi gereği her matris kendi karakteristik polinomunun köküdür; öyleyse

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -5 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix} = (t-2)(t+3) - 5 = t^2 + t - 11$$

polinomu aranan polinomlardan biridir.

Doğrulama. $A^2 = \begin{pmatrix} 4+5 & 10-15 \\ 2-3 & 5+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -1 & 14 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$A^2 + A - 11I_2 = \begin{pmatrix} 9+2-11 & -5+5 \\ -1+1 & 14-3-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

4. A üçgensel ise $tI_n - A$ da üçgenseldir ve köşegeni $t - a_{11}, \dots, t - a_{nn}$ 'dir. Üçgensel bir matrisin determinantı köşegeninin çarpımı olduğundan

$$\Delta_A(t) = (t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn})$$

Bu polinomun kökleri $a_{11}, \dots, a_{nn}$ 'dir; özdeğerler karakteristik polinomun kökleri olduğundan iddia ispatlanmıştır.

■

42. Köşegenleştirme

Bütün bölümün sorusuna geldik: bir operatörün matrisi ne zaman köşegen yapılabilir? Benzerlik bölümünde ölçütü matris diliyle yazmıştık — $P^{-1}AP$ köşegen olacak biçimde regüler bir P var mı? Özdeğer ve özvektör kavramları elimizde olduğuna göre artık bu soruya tam bir cevap verebiliriz.

42.1 Ölçüt

Teorem 42.1 (Köşegenleştirmenin Özvektör Ölçütü). V, K üzerinde n boyutlu bir vektör uzayı ve $T \in A(V)$ olsun. T 'nin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter koşul, V 'nin T 'nin **özvektörlerinden oluşan** bir tabanının bulunmasıdır.

Bu durumda $f = \{v_1, \dots, v_n\}$ böyle bir taban ve v_i, k_i özdeğerine ait bir özvektör olmak üzere

$$[T]_f = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

yani köşegen üzerindeki elemanlar özdeğerlerdir.

İspat.

Tanım gereği $[T]_f$ matrisinin j . sütunu $[T(v_j)]_f$ 'dir.

Gereklik. $[T]_f$ köşegen ve köşegen elemanları $k_1, \dots, k_n$ olsun. j . sütunda yalnız j . satırda k_j bulunduğundan

$$T(v_j) = 0 \cdot v_1 + \cdots + k_j v_j + \cdots + 0 \cdot v_n = k_j v_j$$

Taban vektörleri sıfırdan farklı olduğundan her v_j bir özvektördür; yani f , özvektörlerden oluşan bir tabandır.

Yeterlik. $f = \{v_1, \dots, v_n\}$ özvektörlerden oluşan bir taban ve $T(v_j) = k_j v_j$ olsun. O zaman $[T(v_j)]_f$, yalnız j . bileşeni k_j olan sütundur; bu sütunlar yan yana konduğunda köşegen matris elde edilir.

■

Aynı ifadenin matris dilindeki karşılığı, hesapta doğrudan kullanacağımız biçimdir.

Sonuç 42.1 (Köşegenleştiren Matris). A , n . mertebeden bir kare K -matris olsun. A 'nın köşegen bir matrise benzer olması için gerek ve yeter koşul, A 'nın n tane **lineer bağımsız özvektörünün** bulunmasıdır. Bu durumda sütunları bu özvektörler olan P matrisi regülerdir ve

$$P^{-1}AP = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

Burada k_i, P 'nin i . sütunundaki özvektörün ait olduğu özdeğerdir.

İspat.

A 'yı K^n üzerinde $v \mapsto Av$ operatörü olarak okuyalım; standart tabanda matrisi A 'dır. Yukarıdaki teorem gereği bu operatör köşegenleştirilebilirdir ancak ve ancak K^n 'in özvektörlerden oluşan bir tabanı, yani n tane lineer bağımsız özvektör varsa.

$v_1, \dots, v_n$ böyle bir taban olsun ve P , sütunları bu vektörler olan matris olsun. P 'nin sütunları lineer bağımsız olduğundan P regülerdir ve tanımı gereği standart tabandan $\{v_1, \dots, v_n\}$ tabanına geçiş matrisidir. **Taban değişimi teoremi** gereği $P^{-1}AP$, operatörün yeni tabandaki matrisidir; teoremin ikinci kısmı bunun $\text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ olduğunu söyler.

■

💡 Köşegenleştirme adımları

1. $\Delta_A(t) = |tI_n - A|$ karakteristik polinomunu bulun ve köklerini (özdeğerleri) belirleyin.
2. Her özdeğer için $(\lambda I_n - A)x = 0$ sistemini çözüp öz uzayın bir tabanını bulun.
3. Bulunan özvektörleri sayın. Toplam sayı n ise matris köşegenleştirilebilir; n 'den azsa köşegenleştirilemez.
4. P 'yi bu özvektörleri **sütun** olarak yazarak kurun; $P^{-1}AP$ köşegen matrisinin köşegeni, sütunlarla **aynı sırada** özdeğerlerdir.

Sonuç 42.2 (n Farklı Özdeğer Yeter). n . mertebeden bir A matrisinin karakteristik polinomunun K 'da n tane **farklı** kökü varsa A köşegenleştirilebilir.

İspat.

Her farklı özdeğere ait birer özvektör seçelim; **farklı özdeğerlere ait özvektörler lineer bağımsız olduğundan** n tane lineer bağımsız özvektör elde edilir.

■

⚠️ Koşul yeter, gerek değil

n farklı özdeğer bulunması köşegenleştirilebilirlik için yeterlidir ama gerekli değildir. Birim matris tek bir özdeğere (1) sahiptir, buna rağmen zaten köşegendir. Aşağıdaki üçüncü mertebeden örnek de iki özdeğerle köşegenleştirilebilen bir matris gösterecek. Belirleyici olan özdeğerlerin sayısı değil, **lineer bağımsız özvektörlerin** sayısıdır.

42.2 Çözümlü Örnekler

Örnek 42.1 (İkinci Mertebeden Bir Köşegenleştirme). $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisini köşegenleştiriniz; yani $P^{-1}AP$ köşegen olacak biçimde regüler bir P bulunuz.

Çözüm.

Özdeğerler bölümünde bu matrisin özdeğerlerinin 4 ve -1 , karşılık gelen özvektörlerin ise

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 4), \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\lambda = -1)$$

olduğunu bulmuştuk. İki farklı özdeğere ait bu iki özvektör lineer bağımsızdır; 2. mertebede iki tane lineer bağımsız özvektör bulunduğuna göre A köşegenleştirilebilir.

P 'yi sütunları v ve w olacak biçimde kuralım:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad |P| = -2 - 3 = -5 \neq 0$$

$$P^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Şimdi çarpımı yapalım. Önce AP :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6 & 1-2 \\ 6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8+12}{5} & \frac{-1+1}{5} \\ \frac{24-24}{5} & \frac{-3-2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Köşegende, sütunlarla aynı sırada özdeğerler çıktı.

i Not

Aslında P^{-1} 'i hesaplamaya gerek yoktu: AP 'nin sütunları $Av = 4v$ ve $Aw = -w$ olduğundan $AP = P \operatorname{diag}(4, -1)$ 'dir; soldan P^{-1} ile çarpmak sonucu doğrudan verir. Yukarıdaki hesap yalnızca doğrulama amacıyla açık yapılmıştır.

■

Örnek 42.2 (Üçüncü Mertebeden Bir Köşegenleştirme). $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ matrisini köşegenleştiriniz.

Çözüm.

1. Karakteristik polinom. Karakteristik matris

$$tI_3 - A = \begin{pmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{pmatrix}$$

Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} \Delta_A(t) &= (t-1) [(t+5)(t-4) + 18] - 3 [-3(t-4) - 18] - 3 [-18 + 6(t+5)] \\ &= (t-1) (t^2 + t - 20 + 18) - 3(-3t + 12 - 18) - 3(6t + 12) \\ &= (t-1)(t^2 + t - 2) + 9t + 18 - 18t - 36 \\ &= (t-1)(t+2)(t-1) - 9t - 18 \end{aligned}$$

Son satırda $t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1)$ ayrıştırması yapıldı. Şimdi ortak çarpanı görelim: $-9t - 18 = -9(t+2)$ olduğundan

$$\Delta_A(t) = (t+2) [(t-1)^2 - 9] = (t+2)(t-1-3)(t-1+3) = (t+2)^2(t-4)$$

Kontrol. iz $(A) = 1 - 5 + 4 = 0$; polinomu açarsak $t^3 - 12t - 16$ çıkar ve t^2 'nin katsayısı gerçekten 0'dır ✓

Özdeğerler -2 (iki katlı) ve 4 'tür.

2. $\lambda = -2$ öz uzayı. Karakteristik matriste $t = -2$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Üç denklem de $x - y + z = 0$ 'a indirgenir. İki serbest değişken vardır:

$$y = 1, z = 0 \Rightarrow x = 1 : u = (1, 1, 0)$$

$$y = 0, z = -1 \Rightarrow x = 1 : v = (1, 0, -1)$$

$\{u, v\}$ lineer bağımsızdır (biri diğerinin katı değil) ve V_{-2} iki boyutludur.

3. $\lambda = 4$ öz uzayı. $t = 4$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & 9 & -3 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Üçüncü denklem $x = y$ verir; birinci denklem $x + y - z = 0$ 'dan $z = 2x$ çıkar. $x = 1$ alalım:

$$w = (1, 1, 2), \quad V_4 \text{ bir boyutludur}$$

4. Sonuç. u, v ve w lineer bağımsızdır: u ile v aynı öz uzayda bağımsız, w ise farklı bir özdeğere ait olduğundan onların gerdiği uzayın dışındadır. Üç tane lineer bağımsız özvektör bulunduğuna göre A köşegenleştirilebilir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Kontrol. AP 'nin sütunlarını hesaplayalım:

$$Au = (1 - 3, 3 - 5, 6 - 6) = (-2, -2, 0) = -2u \checkmark$$

$$Av = (1 - 3, 3 - 3, 6 - 4) = (-2, 0, 2) = -2v \checkmark$$

$$Aw = (1 - 3 + 6, 3 - 5 + 6, 6 - 6 + 8) = (4, 4, 8) = 4w \checkmark$$

Demek ki $AP = P \text{ diag } (-2, -2, 4)$, yani $P^{-1}AP$ yukarıdaki köşegen matristir.

■

42.3 Köşegenleştirilemeyen Matrisler

Örnek 42.3 (Aynı Karakteristik Polinom, Farklı Sonuç). $B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilip köşegenleştirilemeyeceğini araştırınız.

Çözüm.

Karakteristik polinom. Karakteristik matris

$$tI_3 - B = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -6 & t+2 \end{pmatrix}$$

Üçüncü sütuna göre açalım:

$$\begin{aligned} \Delta_B(t) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & t-5 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} t+3 & -1 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} + (t+2) \begin{vmatrix} t+3 & -1 \\ 7 & t-5 \end{vmatrix} \\ &= (-42 - 6t + 30) - (-6t - 18 + 6) + (t+2)(t^2 - 2t - 15 + 7) \\ &= (-6t - 12) - (-6t - 12) + (t+2)(t^2 - 2t - 8) \\ &= (t+2)(t+2)(t-4) = (t+2)^2(t-4) \end{aligned}$$

Bir önceki örnekteki A matrisiyle **aynı** karakteristik polinom çıktı.

$\lambda = -2$ öz uzayı. $t = -2$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -7 & 1 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Üçüncü denklem $x = y$ verir; birinci denklem bununla birlikte $z = 0$ verir. Serbest değişken tek olduğundan öz uzay **bir** boyutludur:

$$u = (1, 1, 0), \quad V_{-2} = \{ku\}$$

$\lambda = 4$ öz uzayı. $t = 4$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Üçüncü denklem $x - y + z = 0$, birinci denklem $7x - y + z = 0$ 'dır; farkları $6x = 0$, yani $x = 0$ ve $y = z$ verir:

$$v = (0, 1, 1), \quad V_4 \text{ bir boyutludur}$$

Sonuç. B 'nin yalnızca **iki** lineer bağımsız özvektörü vardır; üç boyutlu uzayın özvektörlerden oluşan bir tabanı kurulamaz. Öyleyse B köşegenleştirilemez.

i İki sonuç birden

Son iki örnek birlikte iki şey söyler.

1. Karakteristik polinom köşegenleştirilebilirliği belirlemez: A ile B 'nin karakteristik polinomları aynı olduğu hâlde A köşegenleştirilebilir, B değildir. Belirleyici olan, katlı bir kökün öz uzayının **boyutudur**.

2. Benzer matrislerin karakteristik polinomları aynıdır ama tersi doğru değildir: $A \sim B$ 'dir, çünkü A köşegen bir matrise benzerken B benzeyemez — benzerlik geçişken olduğundan $A \sim B$ olsaydı B de köşegenleştirilebilirdi.

Örnek 42.4 (Reel Özdeğeri Olmayan Bir Matris). $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ matrisini önce $\mathbb{R}$, sonra $\mathbb{C}$ üzerinde inceleyiniz.

Çözüm.

$$\Delta_B(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ -2 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) + 2 = t^2 + 1$$

$\mathbb{R}$ üzerinde. $t^2 + 1$ polinomunun reel kökü yoktur; B 'nin reel özdeğeri yoktur, dolayısıyla reel özvektörü de yoktur ve köşegenleştirilemez.

$\mathbb{C}$ üzerinde. Kökler i ve $-i$ 'dir; iki farklı özdeğer bulunduğu için B kompleks sayılar üzerinde köşegenleştirilebilirdir.

$t = i$ için:

$$\begin{pmatrix} i-1 & 1 \\ -2 & i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (i-1)x + y = 0$$

$x = 1$ alırsak $y = 1 - i$ ve $v = (1, 1 - i)$ olur.

$t = -i$ için:

$$\begin{pmatrix} -i-1 & 1 \\ -2 & -i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (i+1)x - y = 0$$

$x = 1$ alırsak $y = 1 + i$ ve $w = (1, 1 + i)$ olur.

■

Örnek 42.5 (Tek Özdeğer, Tek Boyutlu Öz Uzay). $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilemeyeceğini gösteriniz. Kompleks sayılar üzerinde çalışmak sonucu değiştirir mi?

Çözüm.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-3 & 1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-3)(t-1) + 1 = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$$

Tek özdeğer $\lambda = 2$ 'dir. Öz uzayı bulalım:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -x + y = 0$$

Tek serbest değişken vardır; $x = 1$ için $v = (1, 1)$ ve $V_2 = \{kv\}$ bir boyutludur. İki boyutlu uzayda yalnız bir lineer bağımsız özvektör bulunduğundan A köşegenleştirilemez.

Kompleks sayılar üzerinde. Karakteristik polinom $(t - 2)^2$ olarak aynı kalır; kökü de yine yalnız 2'dir ve öz uzay hesabı birebir aynı çıkar. Demek ki cismi büyütmek burada bir şey değiştirmez — sorun kökün kompleks olmasında değil, **kathı** olmasındadır.

■

Örnek 42.6 (Bir Operatörün İncelenmesi). $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z)$ operatörünün özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz; köşegenleştirilebilir midir?

Çözüm.

Matris gösterimi. Standart tabanda sütunlar $T(e_1) = (2, 0, 0)$, $T(e_2) = (1, 1, 2)$, $T(e_3) = (0, -1, 4)$ 'tür:

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Karakteristik polinom. Birinci sütunda yalnız bir eleman sıfırdan farklı; bu sütuna göre açalım:

$$\begin{aligned} \Delta_T(t) &= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 0 & -2 & t-4 \end{vmatrix} = (t-2) [(t-1)(t-4) + 2] \\ &= (t-2) (t^2 - 5t + 6) = (t-2)(t-2)(t-3) = (t-2)^2(t-3) \end{aligned}$$

Özdeğerler 2 (iki katlı) ve 3'tür.

$\lambda = 2$ öz uzayı.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = 0, y + z = 0$$

Buradan $y = z = 0$ ve x serbesttir: $u = (1, 0, 0)$ ve V_2 bir boyutludur.

$\lambda = 3$ öz uzayı.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x - y = 0, 2y + z = 0$$

$y = 1$ alırsak $x = 1, z = -2$: $v = (1, 1, -2)$ ve V_3 bir boyutludur.

Sonuç. Toplam iki lineer bağımsız özvektör var; $\mathbb{R}^3$ 'ün özvektörlerden oluşan bir tabanı kurulamaz. T köşegenleştirilemez.

■

42.4 Alıştırma

Alıştırma 42.1 (Köşegenleştirme Alıştırmaları).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisini köşegenleştiriniz.
2. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin köşegenleştirilemeyeceğini gösteriniz.
3. A köşegenleştirilebilir ve $P^{-1}AP = D$ ise, her $m \in \mathbb{Z}^+$ için $A^m = PD^mP^{-1}$ olduğunu gösteriniz ve 1. şıktaki matris için A^3 'ü hesaplayınız.

Çözüm.

1.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-3) - 8 = t^2 - 4t - 5 = (t-5)(t+1)$$

Özdeğerler 5 ve -1'dir.

 $t = 5: \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x - y = 0$; özvektör $v = (1, 1)$. $t = -1: \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x + 2y = 0$; $y = -1$ için $x = 2$, özvektör $w = (2, -1)$.İki farklı özdeğer bulunduğundan A köşegenleştirilebilir:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kontrol. $Av = (1 + 4, 2 + 3) = (5, 5) = 5v$ ✓ ve $Aw = (2 - 4, 4 - 3) = (-2, 1) = -w$ ✓

2.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-5 & 1 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-5)(t-3) + 1 = t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2$$

Tek özdeğer 4'tür. Öz uzay:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x = y$$

Öz uzay bir boyutludur; iki boyutlu uzayda iki lineer bağımsız özvektör bulunamadığından A köşegenleştirilemez.3. $P^{-1}AP = D$ eşitliğinden $A = PDP^{-1}$ çıkar. Kuvvet alalım; ortadaki $P^{-1}P$ çiftleri sadeleşir:

$$A^m = (PDP^{-1})^m = PD(P^{-1}P)D \dots DP^{-1} = PD^mP^{-1}$$

1. şıktaki matris için $D = \text{diag}(5, -1)$ olduğundan $D^3 = \text{diag}(125, -1)$ 'dir. P^{-1} 'i bulalım: $|P| = -1 - 2 = -3$ olduğundan

$$P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$PD^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 125 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & -2 \\ 125 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 125 & -2 \\ 125 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{125-2}{3} & \frac{250+2}{3} \\ \frac{125+1}{3} & \frac{250-1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 84 \\ 42 & 83 \end{pmatrix}$$

Kontrol. $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 8 & 17 \end{pmatrix}$ olduğundan

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 9+32 & 36+48 \\ 8+34 & 32+51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 84 \\ 42 & 83 \end{pmatrix} \checkmark$$

■

43. Problemler

Kitabın son bölümü yeni bir kavram tanıtmaz; buraya kadar kurulan bütün araçları karma problemler üzerinde bir arada çalıştırır. Sorular kabaca işlenişteki sıraya göre dizilmiştir: önce lineer dönüşümler ve boyut hesapları, sonra determinantlar ve ters matris, ardından özdeğerler ve köşegenleştirme; bölüm, birinci dönemin vektör uzayı konularına dönen bir genel tekrar kısmıyla kapanır.

43.1 Çekirdek, Görüntü, Rank ve Sıfırlık

Örnek 43.1 (Bir Operatörün Rankı ve Sıfırlığı). $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü

$$L(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x + z, x - 2y + 2z)$$

biçiminde veriliyor. L 'nin çekirdek ve görüntü uzaylarını belirleyerek rank (L) ile Nullity (L) değerlerini bulunuz. (Bazı kaynaklarda Nullity yerine **sıfırlık** terimi geçer; ikisi aynı sayıdır.)

Çözüm.

Görüntü. Standart taban vektörlerinin görüntüleri $\text{Im } L$ 'yi doğurur:

$$L(1, 0, 0) = (1, 2, 1), \quad L(0, 1, 0) = (2, 0, -2), \quad L(0, 0, 1) = (-1, 1, 2)$$

Bu üç vektörü satır olarak yazıp merdiven şekline indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow R_1 + R_3]{R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

İkinci satırı -4 'e bölüp üçüncü satırdan çıkaralım:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \rightarrow -3R_2 + R_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\{ (1, 2, 1), (0, 1, 1) \} \text{ bir tabandır,} \quad \text{rank } (L) = \dim(\text{Im } L) = 2$$

Çekirdek. $L(x, y, z) = (0, 0, 0)$ denklem sistemini çözelim:

$$x + 2y - z = 0, \quad 2x + z = 0, \quad x - 2y + 2z = 0$$

İkinciden $z = -2x$. Bunu birincide yerine koyalım: $x + 2y + 2x = 0$, yani $3x + 2y = 0$ ve $y = -\frac{3}{2}x$. Üçüncü denklem kendiliğinden sağlanır:

$$x - 2\left(-\frac{3}{2}x\right) + 2(-2x) = x + 3x - 4x = 0 \checkmark$$

Kesirden kurtulmak için $x = 2$ alalım: $y = -3$, $z = -4$.

$$\text{Ker } L = \{ k(2, -3, -4) : k \in \mathbb{R} \}, \quad \text{Nullity } (L) = \dim(\text{Ker } L) = 1$$

Kontrol. Boyut teoremi: $3 = 1 + 2 \checkmark$ Ayrıca $L(2, -3, -4) = (2 - 6 + 4, 4 - 4, 2 + 6 - 8) = (0, 0, 0)$
 $\checkmark$

Nullity sıfırdan farklı olduğundan L singülerdir; buna denk olarak $[L]_e$ matrisinin determinantı sıfırdır.

■

43.2 Determinantlar ve Ters Matris

Örnek 43.2 (Ek Matrisle Ters ve Belirlediği Dönüşüm). $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini ek matris yardımıyla bulunuz ve A^{-1} matrisinin $\mathbb{R}^3$ üzerinde belirlediği lineer dönüşümü yazınız.

Çözüm.

Determinant. Birinci satıra göre açalım:

$$|A| = 1(2 \cdot 5 - 1 \cdot 3) - 3(2 \cdot 5 - 1 \cdot 0) + 4(2 \cdot 3 - 2 \cdot 0) = 7 - 30 + 24 = 1$$

$|A| = 1 \neq 0$ olduğundan A regülerdir.

Kofaktörler. İşaret şablonuna dikkat ederek dokuz kofaktörü yazalım:

$$A_{11} = +(10 - 3) = 7, \quad A_{12} = -(10 - 0) = -10, \quad A_{13} = +(6 - 0) = 6$$

$$A_{21} = -(15 - 12) = -3, \quad A_{22} = +(5 - 0) = 5, \quad A_{23} = -(3 - 0) = -3$$

$$A_{31} = +(3 - 8) = -5, \quad A_{32} = -(1 - 8) = 7, \quad A_{33} = +(2 - 6) = -4$$

Ek matris. Kofaktörler matrisinin transpozisini alalım:

$$\text{ek } A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -5 \\ -10 & 5 & 7 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ek } A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -5 \\ -10 & 5 & 7 \\ 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Kontrol. A 'nın birinci satırı ile A^{-1} 'in sütunlarını çarpalım:

$$(1, 3, 4) \cdot (7, -10, 6) = 7 - 30 + 24 = 1, \quad (1, 3, 4) \cdot (-3, 5, -3) = -3 + 15 - 12 = 0$$

$$(1, 3, 4) \cdot (-5, 7, -4) = -5 + 21 - 16 = 0 \checkmark$$

Belirlediği dönüşüm. Bir matrisin sütun vektörleri üzerinde belirlediği dönüşüm $v \mapsto A^{-1}v$ 'dir; bileşenleri açalım:

$$T(x, y, z) = (7x - 3y - 5z, -10x + 5y + 7z, 6x - 3y - 4z)$$

Bu dönüşüm, A 'nın belirlediği $v \mapsto Av$ dönüşümünün tersidir.

■

Örnek 43.3 (Dördüncü Mertebeden Bir Determinant).

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

Çözüm.

Üçüncü satırın ilk elemanı 1'dir; onu kullanarak birinci sütunun kalanını sıfırlayalım. Bir satırın katını başka bir satıra eklemek determinantı değiştirmez:

$$R_1 \rightarrow -2R_3 + R_1, \quad R_2 \rightarrow 2R_3 + R_2, \quad R_4 \rightarrow R_3 + R_4$$

Satırları tek tek hesaplayalım:

$$R_1 : (2, 5, -3, -2) - 2(1, 3, -2, 2) = (0, -1, 1, -6)$$

$$R_2 : (-2, -3, 2, -5) + 2(1, 3, -2, 2) = (0, 3, -2, -1)$$

$$R_4 : (-1, -6, 4, 3) + (1, 3, -2, 2) = (0, -3, 2, 5)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Birinci sütunda yalnız $a_{31} = 1$ sıfırdan farklıdır; bu sütuna göre açalım. İşaret $(-1)^{3+1} = +1$ 'dir:

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Kalan determinanı birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} &= -1 \left((-2)(5) - (-1)(2) \right) - 1 \left(3 \cdot 5 - (-1)(-3) \right) + (-6) \left(3 \cdot 2 - (-2)(-3) \right) \\ &= -1(-10 + 2) - 1(15 - 3) - 6(6 - 6) = 8 - 12 - 0 = -4 \end{aligned}$$

■

43.3 Dönüşüm Uzayında Lineer Bağımsızlık

Örnek 43.4 (Üç Dönüşümün Lineer Bağımsızlığı). $L_1, L_2, L_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümleri

$$L_1(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 2a_1, a_2)$$

$$L_2(a_1, a_2) = (a_2 - a_1, 2a_1 + a_2, a_1)$$

$$L_3(a_1, a_2) = (3a_1, -2a_2, a_1 + 2a_2)$$

biçiminde veriliyor. $S = \{L_1, L_2, L_3\}$ kümesinin $\text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ uzayında lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha L_1 + \beta L_2 + \gamma L_3 = 0$$

olsun; buradaki 0, **dönüşüm uzayının** sıfır elemanı, yani her vektörü $(0, 0, 0)$ 'a götüren sıfır dönüşümüdür. Bu eşitlik **her** $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ için geçerli olmalıdır; özel olarak taban vektörlerinde de geçerlidir. **(1, 0) vektöründe.** Üç dönüşümün değerleri:

$$L_1(1, 0) = (1, 2, 0), \quad L_2(1, 0) = (-1, 2, 1), \quad L_3(1, 0) = (3, 0, 1)$$

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(-1, 2, 1) + \gamma(3, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

Bileşenleri eşitleyelim:

$$\alpha - \beta + 3\gamma = 0, \quad 2\alpha + 2\beta = 0, \quad \beta + \gamma = 0$$

İkinciden $\beta = -\alpha$, üçüncüden $\gamma = -\beta = \alpha$ çıkar. Bunları birincide yerine koyalım:

$$\alpha + \alpha + 3\alpha = 5\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$$

Buradan $\beta = 0$ ve $\gamma = 0$ bulunur.

Bütün katsayılar sıfır olmak zorunda olduğundan S lineer bağımsızdır.

Not. Yalnızca $(1, 0)$ vektörünü kullanmak sonuca ulaşmaya yetti. $(0, 1)$ vektörü de denenebilirdi:

$$L_1(0, 1) = (1, 0, 1), \quad L_2(0, 1) = (1, 1, 0), \quad L_3(0, 1) = (0, -2, 2)$$

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ bu denklemleri de sağlar; bir çelişki çıkmaz.

■

i Not

$\dim \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3) = 2 \cdot 3 = 6$ olduğundan bu üç dönüşüm, altı boyutlu bir uzayda lineer bağımsız bir üçlüdür; bir tabana genişletilebilir ama tek başına taban değildir.

43.4 Özdeğerler ve Köşegenleştirme

Örnek 43.5 (Bir Operatörün Özdeğer ve Özvektörleri). $\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3)$$

biçiminde veriliyor. θ 'nın özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri belirleyiniz.

Çözüm.

Matris gösterimi. Standart tabanda matris, katsayı matrisidir:

$$A = [\theta]_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Karakteristik polinom.

$$tI_3 - A = \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -2 \\ -1 & t-2 & -2 \\ -1 & -1 & t-3 \end{pmatrix}$$

Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} \Delta_\theta(t) &= (t-2) [(t-2)(t-3) - 2] + 1 [-(t-3) - 2] - 2 [1 + (t-2)] \\ &= (t-2) (t^2 - 5t + 4) + (-t+1) - 2(t-1) \\ &= (t-2)(t-1)(t-4) - (t-1) - 2(t-1) \\ &= (t-1) [(t-2)(t-4) - 3] = (t-1) (t^2 - 6t + 5) \\ &= (t-1)(t-1)(t-5) = (t-1)^2(t-5) \end{aligned}$$

Kontrol. iz $(A) = 2 + 2 + 3 = 7$; köklerin toplamı $1 + 1 + 5 = 7$ ✓

Özdeğerler $\lambda = 1$ (iki katlı) ve $\lambda = 5$ 'tir.

$\lambda = 1$ öz uzayı. Karakteristik matriste $t = 1$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

Üç denklem de aynıdır; iki serbest değişken vardır:

$$x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 : \quad u = (-1, 1, 0)$$

$$x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -2 : \quad v = (-2, 0, 1)$$

V_1 iki boyutludur ve $\{u, v\}$ bir tabanıdır.

$\lambda = 5$ öz uzayı. $t = 5$ yazalım:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Üçüncü denklem $x_1 + x_2 = 2x_3$, birinci denklem $3x_1 - x_2 = 2x_3$ verir. İkisini toplarsak $4x_1 = 4x_3$, yani $x_1 = x_3$; buradan $x_2 = 2x_3 - x_1 = x_3$ çıkar. $x_3 = 1$ alalım:

$$w = (1, 1, 1), \quad V_5 \text{ bir boyutludur}$$

Kontrol. $\theta(1, 1, 1) = (2 + 1 + 2, 1 + 2 + 2, 1 + 1 + 3) = (5, 5, 5) = 5w$ ✓ ve $\theta(-1, 1, 0) = (-2 + 1, -1 + 2, -1 + 1) = (-1, 1, 0) = u$ ✓

Ek gözlem. Toplam üç tane lineer bağımsız özvektör bulundu; öyleyse θ köşegenleştirilebilirdir ve sütunları u, v, w olan P matrisi için $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 1, 5)$ 'tir.

■

Örnek 43.6 (Bir Operatörün Köşegenleştirilmesi). $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(a, b) = (b - a, a - 3b)$ lineer dönüşümünün belirlediği matrisi bularak köşegenleştiriniz ve bir P regüler matrisi için $P^{-1}AP = D$ eşitliğini sağlayınız.

Çözüm.

Matris. Standart tabanda $T(1, 0) = (-1, 1)$ ve $T(0, 1) = (1, -3)$ olduğundan bunlar sütunlardır:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Karakteristik polinom.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t+1 & -1 \\ -1 & t+3 \end{vmatrix} = (t+1)(t+3) - 1 = t^2 + 4t + 2$$

Kökleri bulalım:

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Kontrol. Köklerin toplamı $-4 = \text{iz}(A)$ ✓; çarpımları $(-2)^2 - 2 = 2 = |A| = 3 - 1$ ✓
İki farklı reel özdeğer olduğundan A köşegenleştirilebilirdir.

Özvektörler. $\lambda I_2 - A$ matrisinin birinci satırı $(\lambda + 1, -1)$ 'dir; denklem

$$(\lambda + 1)x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = (\lambda + 1)x$$

$x = 1$ alalım.

$$\lambda_1 = -2 + \sqrt{2} : \quad v_1 = (1, \sqrt{2} - 1)$$

$$\lambda_2 = -2 - \sqrt{2} : \quad v_2 = (1, -\sqrt{2} - 1)$$

Kontrol. Önce Av_1 'i hesaplayalım:

$$Av_1 = (-1 + (\sqrt{2} - 1), 1 - 3(\sqrt{2} - 1)) = (\sqrt{2} - 2, 4 - 3\sqrt{2})$$

Öte yandan

$$\lambda_1 v_1 = (-2 + \sqrt{2})(1, \sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2} - 2, (-2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1))$$

$$(-2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = -2\sqrt{2} + 2 + 2 - \sqrt{2} = 4 - 3\sqrt{2} \quad \checkmark$$

Köşegenleştirme. Sütunları özvektörler olan matrisi kuralım:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2}-1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}, \quad |P| = -\sqrt{2}-1-\sqrt{2}+1 = -2\sqrt{2} \neq 0$$

P regülerdir ve $Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Av_2 = \lambda_2 v_2$ olduğundan

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

■

❓ Özdeğerler tam sayı olmak zorunda değildir

Ders kitaplarındaki örneklerde özdeğerler çoğu zaman tam sayı çıkar; bu, sorunun kolay hesaplanabilmesi için özellikle seçilmiş olmasındandır. Yukarıdaki gibi karakteristik polinomun kökleri irrasyonel de olabilir. Böyle durumlarda P^{-1} 'i açıkça hesaplamak yerine $AP = PD$ eşitliğini doğrulamak çok daha kısadır.

Örnek 43.7 (Özdeğerlerden Okunanlar). 3. mertebeden bir A reel kare matrisinin özdeğerlerinin 1, 2 ve -3 olduğu biliniyor. Buna göre

- A 'nın karakteristik polinomunu,
- $\text{iz}(A)$ ve $|A|$ değerlerini,
- $|A^{-1}|$ ve $\text{iz}(A^2)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

a) Karakteristik polinom 3. dereceden, baş katsayısı 1 olan ve kökleri verilen sayılar olan polinomdur:

$$\Delta_A(t) = (t-1)(t-2)(t+3) = t^3 - 7t + 6$$

Açılımı görelim: $(t-1)(t-2) = t^2 - 3t + 2$ olduğundan çarpım şu polinomu verir:

$$(t^2 - 3t + 2)(t+3) = t^3 + 3t^2 - 3t^2 - 9t + 2t + 6 = t^3 - 7t + 6$$

b) Karakteristik polinomda t^2 'nin katsayısı $-\text{iz}(A)$, sabit terim ise $(-1)^3 |A| = -|A|$ 'dir. Açılımda t^2 terimi yoktur ve sabit terim 6'dır:

$$\text{iz}(A) = 0, \quad |A| = -6$$

Doğrulama. İz, özdeğerlerin toplamı: $1 + 2 - 3 = 0$ ✓ Determinant, özdeğerlerin çarpımı: $1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6$ ✓

c) $|A| = -6 \neq 0$ olduğundan A regülerdir ve

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{6}$$

λ , A 'nın bir özdeğeri ise λ^2 , A^2 'nin bir özdeğeridir. A 'nın özvektörlerinden oluşan bir taban bulunduğu bilinmese bile, karakteristik polinomun kökleri toplamının iz olduğu her zaman geçerlidir; A^2 'nin özdeğerleri 1, 4 ve 9 olduğundan

$$\text{iz}(A^2) = 1 + 4 + 9 = 14$$

■

Örnek 43.8 (Köşegenleştirmeye Kuvvet Hesabı). $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ matrisi için A^n 'yi n cinsinden bulunuz.

Çözüm.

Özdeğerler.

$$\Delta_A(t) = \begin{vmatrix} t-4 & -1 \\ -2 & t-3 \end{vmatrix} = (t-4)(t-3) - 2 = t^2 - 7t + 10 = (t-5)(t-2)$$

Özdeğerler 5 ve 2'dir.

Özvektörler.

$t = 5$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x - y = 0$; özvektör $(1, 1)$.

$t = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow 2x + y = 0$; $x = 1$ için $y = -2$, özvektör $(1, -2)$.

Köşegenleştirme.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad |P| = -3, \quad P^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Kuvvet. $A = PDP^{-1}$ olduğundan $A^n = PD^nP^{-1}$ 'dir:

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^n & 2^n \\ 5^n & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 2^n \\ 5^n & -2 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n + 2^n & 5^n - 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2 \cdot 2^n & 5^n + 2 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

Kontrol. $n = 1$ için

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 + 2 & 5 - 2 \\ 10 - 4 & 5 + 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A \checkmark$$

■

43.5 Cayley-Hamilton Uygulaması

Örnek 43.9 (Cayley-Hamilton ile Ters Matris). Cayley-Hamilton teoremini ifade ediniz ve $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin tersini bu teorem yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.

Teorem. Her kare matris, kendi karakteristik polinomunun bir köküdür: $\Delta_A(A) = 0$.

Karakteristik polinom.

$$tI_3 - A = \begin{pmatrix} t-1 & 1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ 0 & -1 & t-1 \end{pmatrix}$$

Birinci sütunda bir sıfır var; bu sütuna göre açalım:

$$\begin{aligned} \Delta_A(t) &= (t-1) \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= (t-1) [(t-2)(t-1) - 1] + [(t-1) - 1] \\ &= (t-1) (t^2 - 3t + 1) + t - 2 \\ &= t^3 - 3t^2 + t - t^2 + 3t - 1 + t - 2 = t^3 - 4t^2 + 5t - 3 \end{aligned}$$

Kontrol. $\text{iz}(A) = 1 + 2 + 1 = 4$ olduğundan t^2 'nin katsayısı -4 olmalıydı ✓ Sabit terim $(-1)^3 |A| = -|A|$; gerçekten

$$|A| = 1(2-1) + 1(1-0) + 1(1-0) = 3$$

ve -3 çıktı ✓

Ters. Cayley-Hamilton teoremi gereği

$$A^3 - 4A^2 + 5A - 3I_3 = 0$$

Sabit terimi karşıya atıp A 'yı ortak çarpan yapalım:

$$A(A^2 - 4A + 5I_3) = 3I_3 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{3}(A^2 - 4A + 5I_3)$$

Önce A^2 'yi hesaplayalım:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(Örneğin birinci satır: $(1, -1, 1)$ ile sütunların çarpımları $1 - 1 + 0 = 0$, $-1 - 2 + 1 = -2$, $1 - 1 + 1 = 1$ 'dir.)

$$A^2 - 4A + 5I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Kontrol. A 'nın birinci satırı $(1, -1, 1)$ ile $3A^{-1}$ 'in sütunlarını çarpalım:

$$(1, -1, 1) \cdot (1, -1, 1) = 3, \quad (1, -1, 1) \cdot (2, 1, -1) = 0, \quad (1, -1, 1) \cdot (-3, 0, 3) = 0$$

$\frac{1}{3}$ çarpanıyla birlikte birinci satır $(1, 0, 0)$ çıktı ✓

■

43.6 Genel Tekrar: Vektör Uzayları

Son üç problem, dönemin başındaki vektör uzayı kavramlarına dönüyor: alt uzay, direkt toplam, lineer bağımsızlık ve taban.

Örnek 43.10 (Alt Uzaylar ve Direkt Toplam).

$$U = \{ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0 \}, \quad W = \{ (a, 0, 0) : a \in \mathbb{R} \}$$

olsun.

- a) U ve W kümelerinin $\mathbb{R}^3$ 'ün birer alt uzayı olduğunu gösteriniz.
b) $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ midir?

Çözüm.

a) U bir alt uzaydır. $(0, 1, -1) \in U$ olduğundan U boş değildir.

Toplama. $u = (a, b, c)$ ve $u' = (a', b', c')$, U 'da olsun; yani $a + b + c = 0$ ve $a' + b' + c' = 0$ 'dır. Toplamlarının bileşenleri toplanır:

$$u + u' = (a + a', b + b', c + c')$$

$$(a + a') + (b + b') + (c + c') = (a + b + c) + (a' + b' + c') = 0 + 0 = 0$$

Öyleyse $u + u' \in U$ 'dur.

Skalerle çarpım. $k \in \mathbb{R}$ için $ku = (ka, kb, kc)$ ve

$$ka + kb + kc = k(a + b + c) = k \cdot 0 = 0$$

Öyleyse $ku \in U$ 'dur.

W bir alt uzaydır. $(0, 0, 0) \in W$ olduğundan boş değildir. $w = (a, 0, 0)$ ve $w' = (a', 0, 0)$ için

$$w + w' = (a + a', 0, 0) \in W, \quad kw = (ka, 0, 0) \in W$$

b) Direkt toplam için iki koşul gerekir.

$\mathbb{R}^3 = U + W$. Herhangi bir $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ vektörünü yazalım:

$$(a, b, c) = \underbrace{(-b - c, b, c)}_{\in U} + \underbrace{(a + b + c, 0, 0)}_{\in W}$$

Birinci vektörün bileşenleri toplamı $-b - c + b + c = 0$ olduğundan U 'dadır; ikincisi tanımı gereği W 'dedir. Öyleyse $\mathbb{R}^3 \subseteq U + W$; ters kapsama açık olduğundan $\mathbb{R}^3 = U + W$ 'dir.

$U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$. $(a, b, c) \in U \cap W$ olsun. W 'de olmak $b = c = 0$ demektir; U 'da olmak ise $a + b + c = 0$, yani $a = 0$ demektir. Öyleyse kesişim yalnız sıfır vektöründen oluşur.

İki koşul da sağlandığından $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ 'dir.

■

Örnek 43.11 (Dört Boyutlu Uzayda Bağımsızlık). $\mathbb{R}^4$ 'te

$$w_1 = (1, 4, -1, 3), \quad w_2 = (2, 1, -3, -1), \quad w_3 = (0, 2, 1, -5)$$

vektörleri veriliyor.

- a) w_1, w_2, w_3 vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadığını araştırınız.
b) $W = L(w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere $(1, -6, -1, 2) \in \mathbb{R}^4$ vektörünün W 'ye ait olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.

a) Üç vektörü satır olarak yazıp merdiven şekline indirgeyelim:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \rightarrow -2R_1 + R_2]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \rightarrow \frac{2}{7}R_2 + R_3]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} & -7 \end{pmatrix}$$

Üç satır da sıfırdan farklı kaldı; merdiven matrisin sıfırdan farklı satırları lineer bağımsız olduğundan w_1, w_2, w_3 lineer bağımsızdır ve $\dim W = 3$ 'tür.

b) $(1, -6, -1, 2) = x w_1 + y w_2 + z w_3$ olacak x, y, z arayalım. Bileşenleri eşitlersek:

$$x + 2y = 1, \quad 4x + y + 2z = -6, \quad -x - 3y + z = -1, \quad 3x - y - 5z = 2$$

Birinciden $x = 1 - 2y$. Üçüncüde yerine koyalım:

$$-(1 - 2y) - 3y + z = -1 \Rightarrow -1 + 2y - 3y + z = -1 \Rightarrow z = y$$

İkincide yerine koyalım:

$$4(1 - 2y) + y + 2y = -6 \Rightarrow 4 - 5y = -6 \Rightarrow y = 2$$

Buradan $z = 2$ ve $x = 1 - 4 = -3$ çıkar. Şimdi dördüncü denklemi denetleyelim:

$$3(-3) - 2 - 5(2) = -9 - 2 - 10 = -21 \neq 2$$

Dördüncü denklem sağlanmıyor; sistemin çözümü yoktur. Öyleyse

$$(1, -6, -1, 2) \notin W$$

■

Örnek 43.12 (Taban mıdır?).

$$\{ (1, 3, -4), (1, 4, -3), (2, 3, -11) \}$$

kümesi $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanı mıdır? Sebebiyle birlikte açıklayınız.

Çözüm.

$\mathbb{R}^3$ üç boyutlu olduğundan üç vektörden oluşan bir küme, ancak lineer bağımsızsa taban olur. Bağımsızlığı sınavalım:

$$x(1, 3, -4) + y(1, 4, -3) + z(2, 3, -11) = (0, 0, 0)$$

$$x + y + 2z = 0, \quad 3x + 4y + 3z = 0, \quad -4x - 3y - 11z = 0$$

Birinciden $x = -y - 2z$; ikincide yerine koyalım:

$$3(-y - 2z) + 4y + 3z = 0 \Rightarrow y - 3z = 0 \Rightarrow y = 3z$$

Buradan $x = -3z - 2z = -5z$ çıkar. Üçüncü denklem kendiliğinden sağlanır:

$$-4(-5z) - 3(3z) - 11z = 20z - 9z - 11z = 0 \checkmark$$

z serbest kaldığından sistemin sıfırdan farklı çözümleri vardır; örneğin $z = 1$ için $(x, y, z) = (-5, 3, 1)$:

$$-5(1, 3, -4) + 3(1, 4, -3) + (2, 3, -11) = (-5 + 3 + 2, -15 + 12 + 3, 20 - 9 - 11) = (0, 0, 0)$$

Küme lineer bağımlıdır, dolayısıyla $\mathbb{R}^3$ 'ün bir tabanı **değildir**.

Aynı sonucun determinantla görülüşü. Sütunları bu üç vektör olan matrisin determinanı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & -3 & -11 \end{vmatrix} = 1(-44 + 9) - 1(-33 + 12) + 2(-9 + 16) = -35 + 21 + 14 = 0$$

sıfır olduğundan matris regüler değildir; sütunları lineer bağımlıdır.

■

43.7 Alıştırma

Alıştırma 43.1 (Karma Sorular).

1. V bir vektör uzayı ve $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, V 'nin lineer bağımsız bir alt kümesi olsun. S 'nin her alt kümesinin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini bulunuz ve köşegenleştirilebilir olup olmadığını belirleyiniz.
3. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$ operatörünün determinantını hesaplayıp tersinir olup olmadığını söyleyiniz.

Çözüm.

1. S 'nin lineer bağımlı bir $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_m}\}$ alt kümesi ($m \leq n$) bulunduğunu varsayalım. O zaman hepsi birden sıfır olmayan $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ skalerleriyle

$$a_{i_1}v_{i_1} + \dots + a_{i_m}v_{i_m} = 0$$

yazılabilirdi. Bu eşitliğe, S 'nin geri kalan vektörlerini sıfır katsayıyla ekleyelim:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = 0$$

Burada alt kümede bulunmayan indislerin katsayıları sıfırdır; ama en az bir a_{i_j} sıfırdan farklı olduğundan katsayıların hepsi sıfır değildir. Bu, S 'nin lineer bağımlı olması demektir ve varsayım ile çelişir. Öyleyse S 'nin her alt kümesi lineer bağımsızdır.

2. A alt üçgenseldir; üçgensel bir matrisin özdeğerleri köşegen elemanlarıdır:

$$\Delta_A(t) = (t - 2)(t - 3)(t - 5)$$

Özdeğerler 2, 3 ve 5'tir. Üç tane **farklı** özdeğer bulunduğundan A köşegenleştirilebilir.

3. Standart tabanda matris

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Birinci satıra göre açalım:

$$\det(T) = 1(1 - 0) - 1(0 - 1) + 0 = 1 + 1 = 2$$

$\det(T) = 2 \neq 0$ olduğundan T tersinirdir.

■