

Konveks Analiz

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 20 Eylül 2026

İçindekiler

Giriş	5
1 İç Çarpım, Norm ve Komşuluklar	7
1.1 $\mathbb{R}^n$ Uzayı ve İç Çarpım	7
1.2 Norm ve Uzaklık	7
1.3 Komşuluklar	9
2 Açık ve Kapalı Kümeler, Diziler	11
2.1 Açık ve Kapalı Kümeler	11
2.2 Diziler, Yığılma Noktaları ve Kapanış	12
2.3 Alt Diziler	15
3 Sınırlılık, Kompaktlık ve Süreklilik	17
3.1 Sınırlılık ve Kompaktlık	17
3.2 Kümeler Üzerinde İşlemler	17
3.3 Reel Sayılarda Supremum ve İnfimum	18
3.4 Süreklilik ve Ekstremum Değerler	19
3.5 Ayrılmış ve Bağlantılı Kümeler	21
4 Afin Kümeler	23
4.1 Doğrular ve Afin Kümeler	23
4.2 Afin Örtü	24
4.3 Lineer Alt Uzaylar ve Paralellik	25
5 Hiperdüzlemler ve Afin Bağımsızlık	29
5.1 Boyut ve Hiperdüzlemler	29
5.2 Afin Bağımsızlık	32
6 Lineer Dönüşümler ve Konveks Kümeler	35
6.1 Lineer Dönüşümler	35
6.2 Konveks Kümeler	36
7 Konvekslik Özelliğinin Korunması	41
7.1 Konveksliği Koruyan İşlemler	41
7.2 Görelî İç	45
8 Konveks Örtü ve Carathéodory Teoremi	47
8.1 Konveks Örtü	47
8.2 Carathéodory Teoremi	49

9	Radon ve Helly Teoremleri	51
9.1	Radon Teoremi	51
9.2	Helly Teoremi	52
9.3	Köşe Noktaları, Politoplar ve Simpleksler	52
10	Ayrılabilme Teoremleri	55
10.1	En Yakın Nokta ve Destek Hiperdüzlemleri	55
10.2	Bir Hiperdüzlem Ne Zaman Ayırır?	57
10.3	Bir Noktayı Konveks Kümeden Ayırmak	58
10.4	İki Konveks Kümeyi Ayırmak	61
11	Konveks Koniler ve Konveks Fonksiyonlar	65
11.1	Koniler	65
11.2	Dual Koni	67
11.3	Tanım Kümesi ve Epigraf	68
11.4	Kiriş Eşitsizliği	69
11.5	Fonksiyonlarda Konveksliği Koruyan İşlemler	72
12	Hessian Matris ve Subdiferansiyel	75
12.1	Konveksliğin Hessian ile Belirlenmesi	75
12.2	Kontrol Reçetesi: Esas Minörler	76
12.3	Seviye Kümeleri	79
12.4	Yönlü Türev	80
12.5	Subgradient ve Subdiferansiyel	81
12.6	Destek, İndikatör ve Pozitif Homojen Fonksiyonlar	83
13	Alıştırmalar ve Problemler	87
13.1	Lineer Dönüşümler	87
13.2	Kapalılık ve Kompaktlık	88
13.3	Afin Kümeler ve Hiperdüzlemler	89
13.4	Konveks Kümeler	91
13.5	Görelî İç ve Konveks Örtü	94
13.6	Koniler ve Dual Koniler	96
13.7	Ayrılabilme	99
13.8	Konveks Fonksiyonlar	100
13.9	Hessian ile Konvekslik Denetimi	104
13.10	Yönlü Türev ve Subdiferansiyel	108

Giriş

Konveks analizin tek bir çekirdek fikri vardır: **bir kümenin iki noktasını birleştiren doğru parçası kümenin dışına çıkmıyorsa, o küme hakkında beklenmedik ölçüde çok şey söylenebilir.** Bu masum görünen koşul, kümeyi dışarıdan bir hiperdüzlemle ayırmayı, içindeki her noktayı sonlu sayıda köşenin ortalaması olarak yazmayı ve türevlenemeyen fonksiyonlarla bile çalışmayı mümkün kılar. Aynı fikir fonksiyonlara, grafiğin üzerinde kalan bölge (epigraf) üzerinden taşınır: konveks fonksiyon, epigrafı konveks küme olan fonksiyondur.

1. İç Çarpım, Norm ve Komşuluklar

Konveks analiz baştan sona uzaklık ve yakınlık üzerine kuruludur: bir kümenin “içi”, “sınırı” ya da bir noktaya “en yakın nokta” derken hep aynı ölçüye başvururuz. Bu haftada o ölçüyü kuruyoruz — iç çarpım, ondan doğan Öklid normu ve normdan doğan metrik — ve bunların ilk topolojik ürünü olan komşuluk kavramını tanımlıyoruz. Buradaki sonuçların çoğu lineer cebir ve analiz derslerinden tanındıktır; amacımız onları tek bir dilde toplamak ve ileride hangi biçimde kullanacağımızı belirlemektir.

1.1 $\mathbb{R}^n$ Uzayı ve İç Çarpım

$x = (x_1, \dots, x_n)$ biçimindeki tüm reel sayı n -lilerinin oluşturduğu kümeyi $\mathbb{R}^n$ ile gösterelim. $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x + y = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \rightarrow \text{toplama}$$

$$\lambda x = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \rightarrow \text{skaler ile çarpma}$$

işlemlerine göre $\mathbb{R}^n$ kümesi bir **vektör uzayı** (lineer uzay) olur.

Herhangi bir karışıklık yaratmayacaksa $\mathbb{R}^n$ uzayının sıfır elemanı ile $\mathbb{R}$ kümesinin sıfır sayısını aynı 0 notasyonu ile göstereceğiz.

$\mathbb{R}^n$ uzayının herhangi bir $x = (x_1, \dots, x_n)$ elemanını, vektör olarak

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

sütun vektörü ile göstereceğiz; buradaki T harfi vektör **transpozisini** ifade etmektedir.

Tanım 1.1 (İç Çarpım). Herhangi iki $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ elemanının **iç çarpımı**

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır.

Önerme 1.1 (İç Çarpımın Özellikleri). Herhangi $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) $\langle x, x \rangle \geq 0$; ve $\langle x, x \rangle = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = 0$ olmasıdır,
- (ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- (iii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$,
- (iv) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.

1.2 Norm ve Uzaklık

Tanım 1.2 (Öklid Normu). Bir $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ elemanının **Öklid normu**

$$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanımları doğrudan kullanarak

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Önerme 1.2 (Normun Özellikleri). Herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) $\|x\| \geq 0$; ve $\|x\| = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = 0$ olmasıdır,
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**üçgen eşitsizliği**),
- (iv) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (**Cauchy-Schwarz eşitsizliği**).

⚠ Eşitlik ne zaman gerçekleşir?

Üçgen ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerinde eşitlik durumu aşağıdaki hâllerde gerçekleşir:

- (i) $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ olması için gerek ve yeter koşul, bir $\alpha \geq 0$ için $x = \alpha y$ olmasıdır,
 - (ii) $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ olması için gerek ve yeter koşul, bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $x = \alpha y$ olmasıdır.
- Birinci koşuldaki $\alpha \geq 0$ ile ikincisindeki $\alpha \in \mathbb{R}$ arasındaki fark önemlidir: üçgen eşitsizliğinde eşitlik için vektörlerin **aynı yöne** bakması gerekir, Cauchy-Schwarz'da ise aynı **doğrultuda** olmaları yeter.

Tanım 1.3 (Açı ve Ortogonallik). $0 \neq x, y \in \mathbb{R}^n$ ve x ile y vektörleri arasındaki açı $0 \leq \theta \leq \pi$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \theta$$

eşitliği geçerlidir. Eğer $\langle x, y \rangle = 0$ ise x ve y vektörleri **ortogonaldir** ya da birbirlerine **diktir** denir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliği, bu eşitlikteki $\cos \theta$ değerinin $[-1, 1]$ aralığında kalmasının bir başka yazılışdır; açı kavramını iyi tanımlı kılan da odur.

Örnek 1.1 (Bir Açı ve Diklik Hesabı). $\mathbb{R}^3$ uzayında $x = (1, 2, 2)$, $y = (2, -2, 1)$ ve $z = (0, 1, -2)$ vektörleri verilsin. x ile y arasındaki açıyı belirleyiniz; z vektörünün bunlardan birine dik olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm.

İç çarpım doğrudan hesaplanır:

$$\langle x, y \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0.$$

Sıfır çıktığından x ile y diktir, yani $\theta = \pi/2$ 'dir.

z için ise

$$\langle x, z \rangle = 0 + 2 - 4 = -2, \quad \langle y, z \rangle = 0 - 2 - 2 = -4$$

olduğundan z vektörü ikisine de dik değildir. Örneğin $\|x\| = 3$ ve $\|z\| = \sqrt{5}$ olduğundan

$$\cos \theta = \frac{\langle x, z \rangle}{\|x\| \cdot \|z\|} = \frac{-2}{3\sqrt{5}}$$

bulunur; değer negatif olması $\theta > \pi/2$ demektir. Cauchy-Schwarz eşitsizliği burada $2 \leq 3\sqrt{5}$ biçimindedir ve eşitlikten uzaktır — vektörler aynı doğrultuda değildir.

Tanım 1.4 (Öklid Metriği). Herhangi iki $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ elemanı arasındaki **Öklid metriği** ya da **uzaklığı**

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanır.

Doğrudan tanım kullanılarak kolayca

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

eşitlikleri elde edilir.

Önerme 1.3 (Metriğin Özellikleri). Herhangi $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ için aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) $d(x, y) \geq 0$; ve $d(x, y) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = y$ olmasıdır,
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (**üçgen eşitsizliği**).

1.3 Komşuluklar

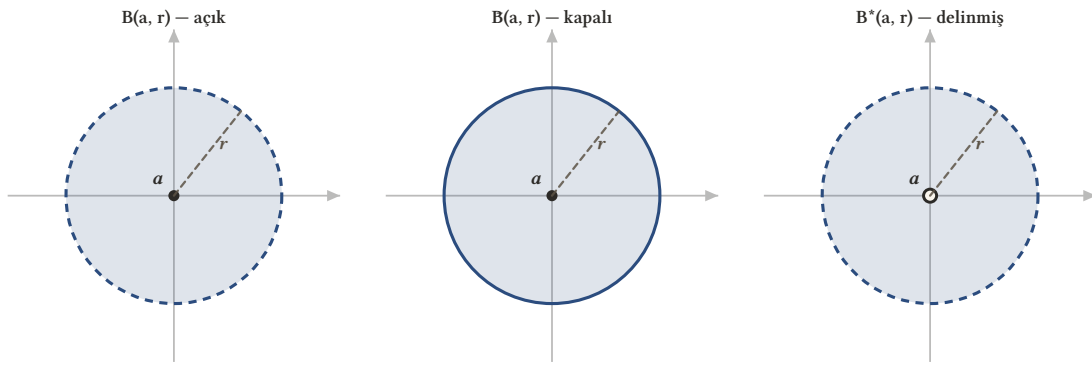
Öklid normu kullanılarak $\mathbb{R}^n$ 'deki **civar** (komşuluk) kavramı tanımlanır; daha sonra da civarlar yardımıyla $\mathbb{R}^n$ uzayındaki diğer topolojik kavramlar elde edilir.

Tanım 1.5 (Komşuluklar). Herhangi bir $a \in \mathbb{R}^n$ noktasının $r > 0$ yarıçaplı komşulukları aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}, \quad \text{açık komşuluk}$$

$$\overline{B(a, r)} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}, \quad \text{kapalı komşuluk}$$

$$B^*(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < \|x - a\| < r\} = B(a, r) \setminus \{a\}, \quad \text{delinmiş komşuluk}$$



Şekil 1.1: Bir a noktasının r yarıçaplı üç komşuluğu. Kesikli çember, çemberin kümeye **ait olmadığını** gösterir: açık komşulukta $\|x - a\| < r$, kapalı komşulukta $\|x - a\| \leq r$ aranır. Delinmiş komşuluk açık komşuluktan merkezin çıkarılmasıyla elde edilir; yığılma noktası tanımında tam olarak bu küme kullanılır.

Komşuluk kavramı elimizde olduğuna göre artık bir kümenin hangi noktalarının içeride, hangilerinin kenarda kaldığını sorabiliriz; bir sonraki haftanın konusu budur.

2. Açık ve Kapalı Kümeler, Diziler

Komşuluklar, $\mathbb{R}^n$ uzayının topolojisini kurmak için gereken tek malzemedir. Bu haftada onlardan açık ve kapalı küme kavramlarını elde ediyor, ardından aynı kavramları diziler diliyle yeniden yazıyoruz: yığılma noktası, kapanış ve sınır. Bu sözlük ileride konveks bir kümenin kapanışını ve içini incelerken sürekli kullanılacaktır.

2.1 Açık ve Kapalı Kümeler

İlk ayrım, bir noktanın kümenin “içinde” mi yoksa “kenarında” mı durduğudur; ikisini de yalnızca komşuluklar cinsinden ifade edeceğiz.

Tanım 2.1 (İç Nokta). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $a \in A$ olmak üzere, eğer

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ öyle ki } B(a, \varepsilon) \subset A$$

gerçekleniyor ise a noktası A kümesinin bir **iç noktasıdır** denir. A kümesinin tüm iç noktalarının kümesini $\text{int } A$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.2 (Açık Küme). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer A kümesinin her noktası A kümesinin bir iç noktası ise A kümesine $\mathbb{R}^n$ uzayında bir **açık küme** denir.

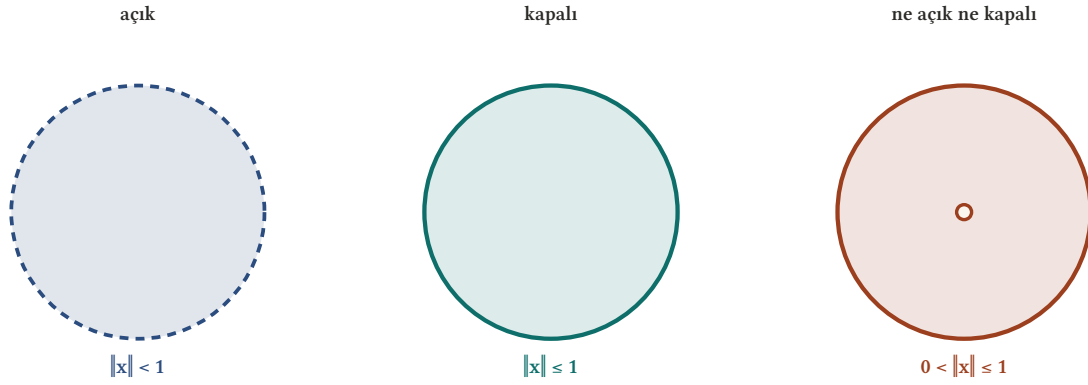
Herhangi bir açık komşuluk, $\emptyset$ ve $\mathbb{R}^n$ kümeleri açık kümelerdir.

Önerme 2.1 (Açıklığın Denk İfadeleri). Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi için aşağıdaki iddialar denktir:

- (i) A kümesi açıktır,
- (ii) her $a \in A$ için $B(a, \varepsilon) \subset A$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır,
- (iii) $\text{int } A = A$.

Tanım 2.3 (Kapalı Küme). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer $\mathbb{R}^n \setminus A$ kümesi açık bir küme ise A kümesine bir **kapalı küme** denir.

Herhangi bir kapalı komşuluk, $\emptyset$ ve $\mathbb{R}^n$ kümeleri kapalı kümelerdir. Açıklık ile kapalılık birbirinin zıddı değildir: bir küme ikisi birden olabileceği gibi, hiçbiri de olmayabilir.



Şekil 2.1: Açık küme sınırının hiçbir noktasını, kapalı küme tümünü içerir. Üçüncü küme ikisi de değildir: çemberi içerdiğinden açık değildir (çember üzerindeki noktalar iç nokta olamaz), sınır noktası olan 0'ı içermediğinden kapalı değildir. Açıklık ile kapallık birbirinin zıddı değil, tümleyen üzerinden tanımlanan iki ayrı özelliktir.

Önerme 2.2 (Birleşim ve Kesişim). $\mathbb{R}^n$ uzayındaki açık ve kapalı kümelerin kesişim ve birleşimlerine dair aşağıdaki önermeler doğrudur:

- (i) herhangi sayıdaki açık kümenin birleşimi açıktır,
- (ii) sonlu sayıdaki açık kümenin kesişimi açıktır,
- (iii) herhangi sayıdaki kapalı kümenin kesişimi kapalıdır,
- (iv) sonlu sayıdaki kapalı kümenin birleşimi kapalıdır.

2.2 Diziler, Yığılma Noktaları ve Kapanış

Tanım 2.4 (Yakınsaklık). Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in \mathbb{R}^n$ gerçekleyen bir $\{x_k\}$ dizisi ve bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası göz önüne alınsın. Eğer

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_0\| = 0$$

gerçekleniyor ise $\{x_k\}$ dizisi x_0 noktasına **yakınsar** denir. x_0 noktasına da $\{x_k\}$ dizisinin **limiti** denir ve bu durum

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$$

yazılarak ifade edilir.

Tanım 2.5 (Yığılma Noktası). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } A \cap B^*(y, \varepsilon) \neq \emptyset$$

gerçekleniyor ise y noktasına A kümesinin bir **yığılma noktası** ya da **limit noktası** denir. A kümesinin tüm yığılma noktalarının kümesini $Yığ A$ göstereceğiz.

Tanım 2.6 (Kapanış Noktası ve Kapanış). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $z \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } A \cap B(z, \varepsilon) \neq \emptyset$$

gerçekleniyor ise z noktası A kümesinin bir **kapanış noktasıdır** denir. Bu durumda z noktasının, elemanları A kümesinden olan yakınsak bir dizinin limiti olacağına dikkat ediniz.

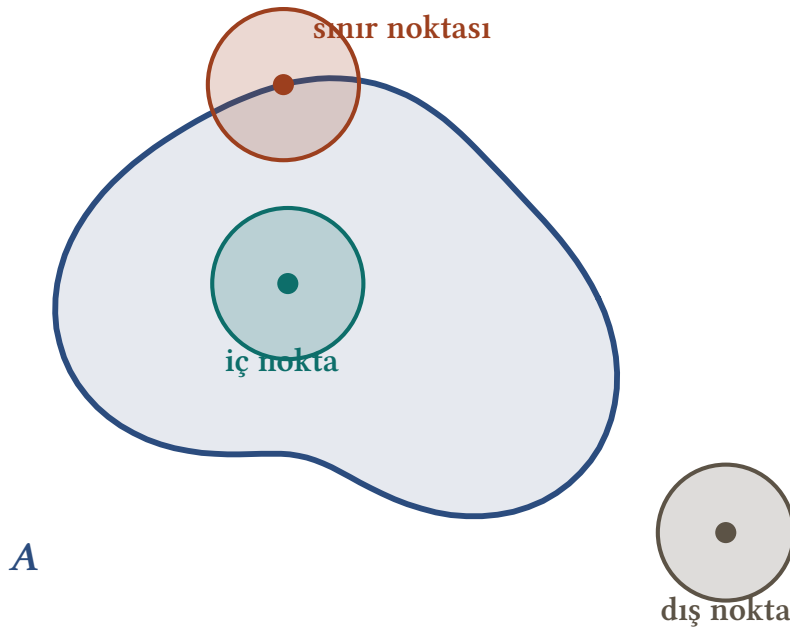
A kümesinin tüm kapanış noktalarının kümesi $\bar{A}$ ile gösterilir ve A kümesinin **kapanışı** olarak adlandırılır.

Dolayısıyla $\bar{A}$ kapanış kümesi, elemanları A kümesinden alınan tüm yakınsak dizilerin limitlerinin kümesidir. Yığılma noktası ile kapanış noktası arasındaki tek fark, birincisinde komşuluğun **delinmiş** olmasıdır: bu yüzden A 'nın yalıtılmış bir noktası kapanış noktasıdır ama yığılma noktası değildir.

Tanım 2.7 (Sınır Noktası). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $s \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } A \cap B(s, \varepsilon) \neq \emptyset \text{ ve } (\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B(s, \varepsilon) \neq \emptyset$$

gerçekleniyor ise s noktasına A kümesinin bir **sınır noktası** denir. A kümesinin tüm sınır noktalarının kümesine A 'nın **sınırı** denir ve $\text{bd } A$ ile gösterilir.



Şekil 2.2: Bir A kümesine göre üç tür nokta. İç noktanın tamamen A 'da kalan bir komşuluğu vardır; dış noktanın A 'ya hiç değmeyen bir komşuluğu vardır; sınır noktasının ise **her** komşuluğu hem A 'dan hem de A dışından nokta içerir. $\text{int } A$ tüm iç noktaların, $\text{bd } A$ tüm sınır noktalarının kümesidir.

Aşağıdaki örnek, üç kavramın (iç, yığılma, kapanış) birbirinden nasıl ayrıldığını tek bir kümede toplar.

Örnek 2.1 (Delinmiş Disk ve Yalıtılmış Nokta). $\mathbb{R}^2$ uzayında q , birim diskten uzakta bir nokta olmak üzere

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|x\| < 1\} \cup \{q\}$$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme için $\text{int } A$, $\text{Yığ } A$, $\bar{A}$ ve $\text{bd } A$ kümelerini belirleyiniz.

Çözüm.

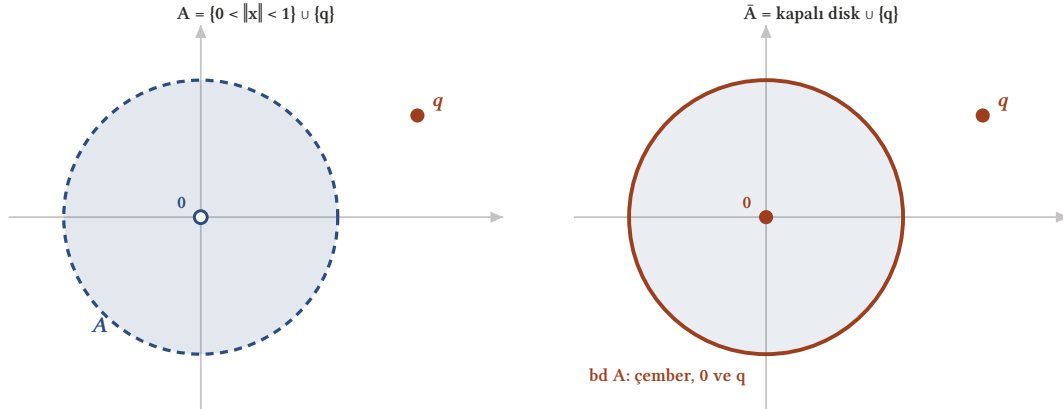
Delinmiş disk açıktır, dolayısıyla her noktası iç noktadır. Buna karşılık q noktasının hiçbir komşuluğu A 'nın içinde kalmaz, çünkü q 'nın etrafında A 'ya ait başka nokta yoktur. Böylece

$$\text{int } A = \{x : 0 < \|x\| < 1\}.$$

Yığılma noktaları için: $\|x\| \leq 1$ koşulunu sağlayan **her** nokta, delinmiş diskten oluşan bir dizinin limiti-
tidir; özellikle A 'ya ait olmayan 0 noktası ve $\|x\| = 1$ çemberi de yığılma noktasıdır. q ise yalıtılmıştır,
çünkü yeterince küçük bir ε için $A \cap B^*(q, \varepsilon) = \emptyset$ olur. Böylece

$$\text{Yığ } A = \{x : \|x\| \leq 1\}.$$

Kapanış $\bar{A} = A \cup \text{Yığ } A$ olduğundan kapalı disk ile q noktasının birleşimidir. Son olarak $\text{bd } A = \bar{A} \setminus \text{int } A$ eşitliği kullanılırsa sınır, $\|x\| = 1$ çemberi ile 0 ve q noktalarından oluşur.



Şekil 2.3: Delinmiş açık disk ile ondan uzakta duran tek bir q noktasının birleşimi. Yığılma noktalarının kümesi kapalı disklerdir: q yalıtılmış olduğundan yığılma noktası **değildir**, buna karşılık kümeye ait olmayan 0 bir yığılma noktasıdır. Kapanış $\bar{A} = A \cup \text{Yığ } A$ olduğundan sağdaki kümeyi verir; sınır ise $\bar{A} \setminus \text{int } A$, yani çember ile 0 ve q noktalarıdır.

Alıştırma 2.1 (Kapanış ve İç Küme Özellikleri). Aşağıdaki önermelerin doğru olduğunu gözleyiniz:

- (i) $\bar{A} = A \cup \text{Yığ } A$,
- (ii) $\bar{A}$ kümesi, A kümesini kapsayan tüm kapalı kümelerin kesişimidir,
- (iii) $\bar{A}$ kümesi, A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümedir,
- (iv) $\text{int } A$ kümesi, A kümesinin kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimidir,
- (v) $\text{int } A$ kümesi, A kümesinin kapsadığı en büyük açık kümedir,
- (vi) A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\text{Yığ } A \subseteq A$ olmasıdır,
- (vii) A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\bar{A} = A$ olmasıdır,
- (viii) daima $\text{int } A \subseteq A \subseteq \bar{A}$ geçerlidir,
- (ix) $\text{bd } A = \bar{A} \setminus \text{int } A$.

Çözüm yolu.

- (i) $z \in \bar{A}$ ve $z \notin A$ ise her $\varepsilon > 0$ için $A \cap B(z, \varepsilon) \neq \emptyset$ olur; bu kesişimdeki nokta z 'den farklı olmak zorunda olduğundan $A \cap B^*(z, \varepsilon) \neq \emptyset$, yani $z \in \text{Yığ } A$. Ters kapsama açıktır.
- (ii) ve (iii) $\bar{A}$ 'nın kapalı olduğu (vi) ile görülür; A 'yı kapsayan her kapalı F kümesi için $\text{Yığ } A \subseteq \text{Yığ } F \subseteq F$ olduğundan $\bar{A} \subseteq F$ elde edilir. Kesişim ile en küçüklük ifadeleri bundan çıkar.
- (iii) ve (v) A 'nın kapsadığı her açık U kümesinin her noktası, tanım gereği A 'nın iç noktasıdır: $U \subseteq \text{int } A$. Öte yandan $\text{int } A$ kendisi açıktır, çünkü bir iç noktanın A 'da kalan komşuluğunun her noktası da iç noktadır.
- (iv) ve (vii) A kapalıysa tümleyeni açıktır; tümleyendeki bir nokta A 'nın yığılma noktası olamaz. Tersine $\text{Yığ } A \subseteq A$ ise tümleyenin her noktasının A 'ya değmeyen bir komşuluğu vardır, yani tümleyen açıktır. (vii), (i) ile (vi)'nın birleşimidir.

- (v) A 'nın her noktası kendisinin bir kapanış noktasıdır; iç noktaların A 'ya ait olduğu tanımdan gelir.
- (vi) Bir s noktasının sınır noktası olması, hem $\overline{A}$ 'da bulunması hem de A 'nın içinde bulunmaması demektir; iki tanım yan yana konduğunda eşitlik doğrudan okunur.

2.3 Alt Diziler

Bir dizinin kendisi yakınsamasa bile, terimlerinin bir kısmını sırasını bozmadan seçerek yakınsak bir dizi elde etmek çoğu zaman mümkündür. Bir sonraki bölümün temel teoremi tam olarak bunu söyleyeceği için, bu seçme işlemine bir ad veriyoruz.

Tanım 2.8 (Alt Dizi). $\{x_k\}$, $\mathbb{R}^n$ 'de bir dizi ve $\{k_l\}$ kesin artan bir doğal sayı dizisi olmak üzere $\{x_{k_l}\}$ dizisine $\{x_k\}$ dizisinin bir **alt dizisi** denir.

Sıra, bu topolojik dilin analizdeki en güçlü iki sonucuna geldi: sınırlılık ile kompaktlığın ilişkisi ve sürekli fonksiyonların kompakt kümeler üzerindeki davranışı.

3. Sınırlılık, Kompaktlık ve Süreklilik

Bu hafta, ileride varlık teoremlerini kurarken dayanacağımız iki temel taşı yerleştiriyoruz: kompaktlık ve süreklilik. Bolzano-Weierstrass teoremiyle kompaktlığın $\mathbb{R}^n$ 'deki basit karakterizasyonunu, ardından da Weierstrass varlık teoremini elde ediyoruz — konveks analizde bir en yakın noktanın ya da bir minimumun var olduğunu göstermek hemen her zaman bu teoreme indirgenecektir. Yol üzerinde kümeler üzerindeki toplama işlemini ve reel sayılardaki supremum-infimum kavramlarını da topluyor, haftayı ayrılmış ve bağlantılı kümelerle kapatıyoruz.

3.1 Sınırlılık ve Kompaktlık

Tanım 3.1 (Sınırlı Küme ve Sınırlı Dizi). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bir küme olmak üzere, eğer $A \subset \overline{B(0, M)}$, yani her $x \in A$ için $\|x\| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ varsa A kümesine bir **sınırlı küme** denir. $\{x_k\}$, $\mathbb{R}^n$ 'de bir dizi olmak üzere, eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_k\| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ varsa $\{x_k\}$ dizisine bir **sınırlı dizi** denir.

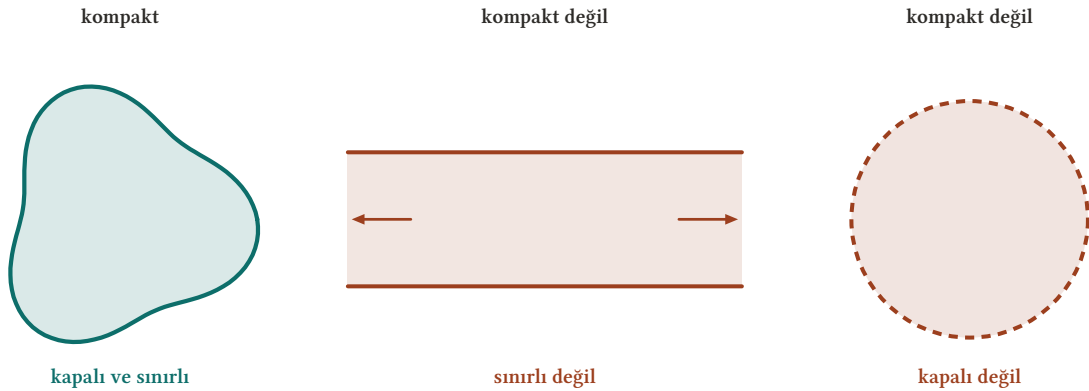
Teorem 3.1 (Bolzano-Weierstrass Teoremi). Her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

Aşağıdaki kompaktlık kavramı analizde ve optimizasyonda çok önemli bir role sahiptir.

Tanım 3.2 (Kompaktlık). Eğer A içerisindeki her dizinin, A içerisindeki bir noktaya yakınsayan bir alt dizisi var ise A kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında **kompakt** denir.

Aşağıdaki teorem Bolzano-Weierstrass teoreminin bir sonucu olarak elde edilir.

Teorem 3.2 (Kompaktlığın Karakterizasyonu). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, A kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul kapalı ve sınırlı olmasıdır.



Şekil 3.1: $\mathbb{R}^n$ uzayında kompaktlık, kapalılık ile sınırlılığın birlikte sağlanmasıdır (Heine-Borel). Ortadaki şerit kapalıdır ama sınırlı değildir; sağdaki açık disk sınırlıdır ama kapalı değildir — her ikisinde de sınıra doğru giden bir dizi kurulabilir, oysa limit kümede yoktur.

3.2 Kümeler Üzerinde İşlemler

Tanım 3.3 (Küme Toplamı ve Skaler Katı). $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere, kümeler üzerinde aşağıdaki toplama ve skaler ile çarpma işlemleri tanımlansın:

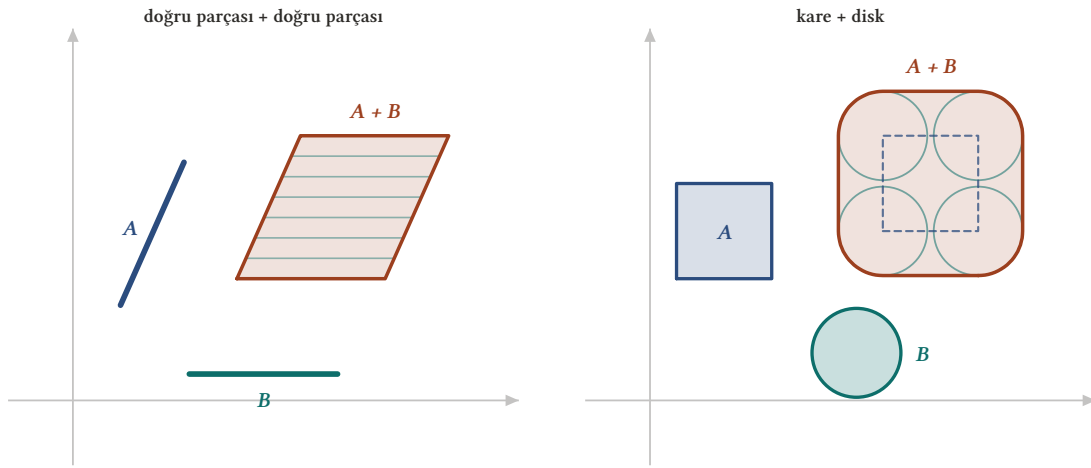
$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}, \quad \lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

Eğer $A = \{x\}$ tek nokta kümesi ise $A + B$ kümesi için $x + B$ yazılışı kullanılır.

- $x + B$ kümesine B kümesinin bir **ötelemesi** denir.
- λA kümesine A kümesinin bir **skaler katı** denir.
- Eğer $\lambda \neq 0$ ise $x + \lambda A$ kümesi A kümesine **homotetiktir** denir.

İki kümenin $A + B$ toplamını görselleştirmeye çalışırken, bu toplamı ötelemelerin birleşimi olarak ifade etmek faydalı olabilir:

$$A + B = \bigcup_{x \in A} (x + B) = \bigcup_{y \in B} (A + y)$$



Şekil 3.2: Toplam kümesi $A + B$, B'nin A'nın her noktasına ötelenmesiyle taranan bölgedir: $A + B = \bigcup_{x \in A} (x + B)$. Solda iki doğru parçasının toplamı bir paralelkenardır; içindeki ince çizgiler B'nin A boyunca kayan kopyalarıdır. Sağda karenin köşelerine oturan disk kopyaları köşeleri yuvarlatır — bir kümeyi diskle toplamak, onu yarıçap kadar her yöne kalınlaştırmak demektir.

Önerme 3.1 (Toplamın Topolojik Özellikleri). $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun.

- A veya B açık ise $A + B$ açıktır.
- A kapalı ve B kompakt ise $A + B$ kapalıdır.

3.3 Reel Sayılarda Supremum ve İnfimum

Şimdi $\mathbb{R}$ uzayındaki alt kümelerin sınırları hakkındaki kavramları hatırlayalım.

Tanım 3.4 (Alt ve Üst Sınır). $D \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x \in D$ için $m \leq x$ gerçekleyen bir $m \in \mathbb{R}$ varsa m sayısı D kümesi için bir **alt sınırdır** ve D kümesine de **alttan sınırlı küme** denir.

Benzer biçimde, her $x \in D$ için $x \leq M$ gerçekleyen bir $M \in \mathbb{R}$ varsa M sayısı D kümesi için bir **üst sınırdır** ve D kümesine de **üstten sınırlı küme** denir.

Aynı zamanda hem alttan hem de üstten sınırlı olan kümeye **sınırlı küme** denir.

Tanım 3.5 (İnfimum ve Supremum). $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ kümesi alttan sınırlı olsun. D kümesinin alt sınırlarının **en büyüğüne** D kümesinin **infimumu** denir ve $\inf D$ ile gösterilir.

$\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ kümesi üstten sınırlı olsun. D kümesinin üst sınırlarının **en küçüğüne** D kümesinin **supremumu** denir ve $\sup D$ ile gösterilir.

Eğer D kümesi alttan sınırlı değil ise $\inf D = -\infty$, üstten sınırlı değil ise $\sup D = +\infty$ yazılır. Ayrıca $\inf \emptyset = +\infty$ ve $\sup \emptyset = -\infty$ kabul edilir.

! Tamlık Aksiyomu

$\mathbb{R}$ uzayındaki boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümenin supremumu vardır; bu supremum bir reel sayıdır.

Tamlık aksiyomunu kullanarak, boştan farklı ve alttan sınırlı bir kümenin reel sayı olarak infimumunun var olduğunu görmek zor değildir: D alttan sınırlıysa $-D = \{-x : x \in D\}$ üstten sınırlıdır ve $\inf D = -\sup(-D)$ olur.

3.4 Süreklilik ve Ekstremum Değerler

Tanım 3.6 (Süreklilik). $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta > 0 \text{ öyle ki } x \in A, \|x - x_0\| < \delta \text{ iken } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gerçekleniyor ise f fonksiyonu x_0 noktasında **süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise f fonksiyonu A **üzerinde süreklidir** denir.

Tanım 3.7 (Dizisel Süreklilik). $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer A kümesi içindeki limiti x_0 olan tüm $\{x_k\}$ dizilerinin f altındaki görüntülerinden oluşan $\{f(x_k)\}$ reel sayı dizilerinin limitleri $f(x_0)$ sayısı ise f fonksiyonu x_0 noktasında **dizisel süreklidir** denir.

Önerme 3.2 (Sürekliliğin İki Yüzü). $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun x_0 noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul, x_0 noktasında dizisel sürekli olmasıdır.

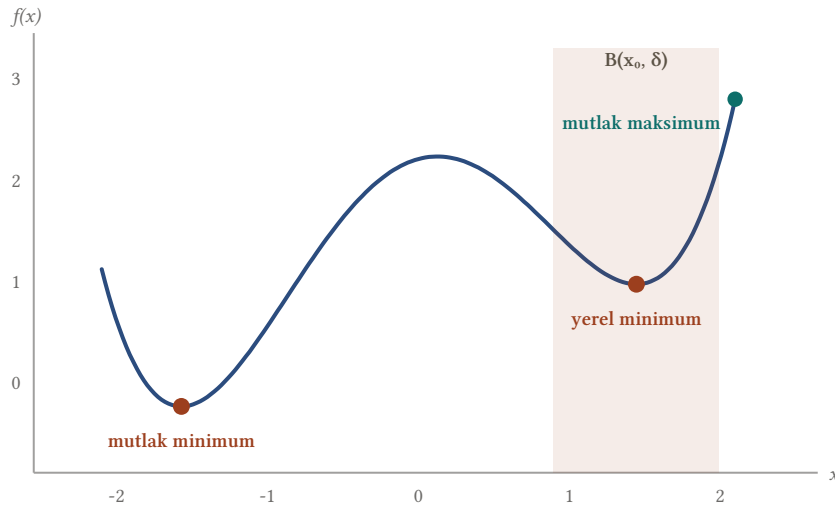
Tanım 3.8 (Yerel ve Mutlak Ekstremum). $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ve $x_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\exists \delta > 0 \text{ öyle ki } \forall x \in B(x_0, \delta) \cap A \text{ için } f(x_0) \leq f(x)$$

gerçekleniyor ise f fonksiyonu A üzerinde x_0 noktasında **yerel minimuma** sahiptir denir. Eğer

$$\forall x \in A \text{ için } f(x_0) \leq f(x)$$

geçerli ise f fonksiyonu A üzerinde x_0 noktasında **mutlak minimuma** sahiptir denir. Yerel maksimum ve mutlak maksimum kavramları benzer biçimde tanımlanır.



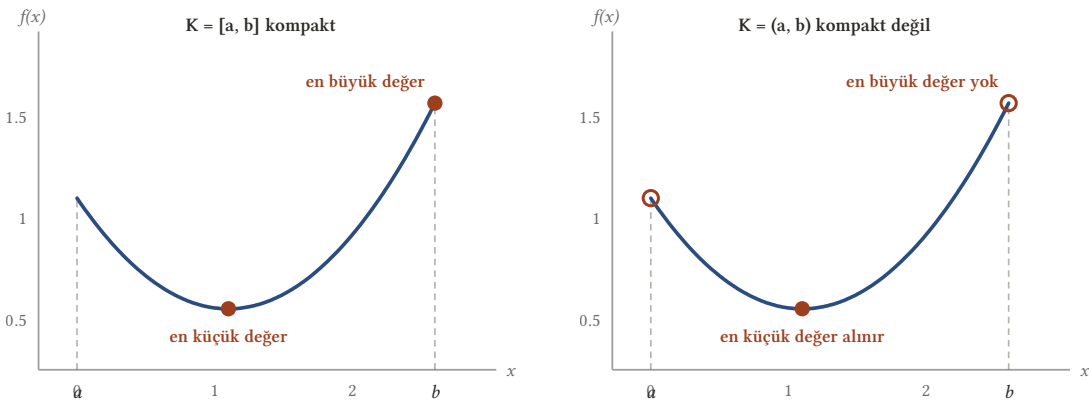
Şekil 3.3: Yerel minimumda $f(x_0) \leq f(x)$ eşitsizliği yalnızca bir $B(x_0, \delta)$ komşuluğunda istenir; mutlak minimumda ise kümenin tamamında. Sağdaki nokta kendi komşuluğunun en alçak noktasıdır ama küresel olarak değildir. Konveks fonksiyonlarda bu ayrımın ortadan kalkacağını ileride göreceğiz.

Kompaktlık, sürekli dönüşümler altında korunan bir özelliktir: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sürekli bir fonksiyon ve $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt bir küme ise $f(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ görüntü kümesi de kompakt olur. Dolayısıyla matematik analizin ve optimizasyon teorisinin temel sonuçlarından biri olan aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.3 (Weierstrass Varlık Teoremi). $\emptyset \neq K$ kompakt bir küme ve $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu kompakt K kümesi üzerinde mutlak ekstremum değerlerine ulaşır; yani

$$\exists x_0, y_0 \in K \text{ öyle ki } f(x_0) = \min\{f(x) : x \in K\} \text{ ve } f(y_0) = \max\{f(x) : x \in K\}$$

geçerlidir.



Şekil 3.4: Weierstrass varlık teoremi kompaktlığı zorunlu kılar. Solda kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli fonksiyon hem en küçük hem en büyük değerine ulaşır. Sağda aralık açıldığında en büyük değer aday uç noktadadır ama o nokta kümede olmadığından ulaşamaz; supremum vardır, maksimum yoktur.

Bu teorem, ileride kuracağımız eniyileme problemlerinin **çözümünün var olduğunu** garanti eden temel araçtır: konveks analizde bir minimumun varlığını göstermek çoğu zaman kısıt kümesinin kompakt, amaç fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermeye indirgenir.

3.5 Ayrılmış ve Bağlantılı Kümeler

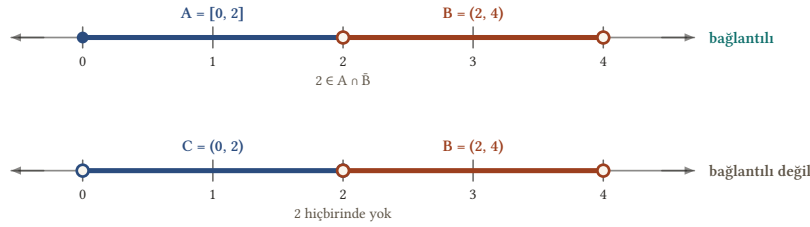
Tanım 3.9 (Ayrılmış ve Bağlantılı Kümeler). $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri için $A \cap \bar{B} = \emptyset = B \cap \bar{A}$ geçerli ise A ve B kümeleri **ayrılmıştır** denir.

Eğer bir küme, boştan farklı iki ayrılmış kümenin birleşimi olarak ifade edilemiyorsa o kümeye bir **bağlantılı küme** denir.

Örnek 3.1 (Ayrık Olmak ile Ayrılmış Olmak). $\mathbb{R}$ uzayında $A = [0, 2]$, $B = (2, 4)$ ve $C = (0, 2)$ kümelerini göz önüne alalım. $A \cup B$ ile $C \cup B$ kümelerinden hangisi bağlantılıdır?

Çözüm.

Dikkat edilirse $2 \in \bar{B}$ olduğundan $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ olur; böylece A ile B **ayrık** olmalarına karşın **ayrılmış** kümeler değildirler. Öte yandan $C \cap \bar{B} = \emptyset = B \cap \bar{C}$ gerçekleştiğinden C ile B ayrılmış kümelerdir. Dolayısıyla $A \cup B = [0, 2] \cup (2, 4) = [0, 4)$ kümesi bağlantılıdır; buna karşılık $C \cup B = (0, 2) \cup (2, 4)$ kümesi bağlantılı değildir.



Şekil 3.5: Ayrık olmak ile ayrılmış olmak farklı şeylerdir. Üstte 2 noktası A 'ya ait ve aynı zamanda B 'de olduğundan $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$; kümeler ayrılmış değildir ve birleşimleri $[0, 4)$ bağlantılıdır. Altta 2 noktası hiçbirine ait değildir, iki küme birbirinin kapanışına da değmez: birleşim bağlantılı değildir.

Bu bölümde toplanan kavramların hepsi, bundan sonra tek bir amaç için kullanılacaktır: konveksliğin getirdiği ek yapının, bu genel topolojik çerçevede ne kadar güçlü sonuçlar doğurduğunu görmek. İlk adım, doğruları içeren kümeleri — yani afin kümeleri — incelemektir.

4. Afin Kümeler

Bir kümeyi “düz” yapan şey nedir? İki farklı yanıt vardır: küme herhangi iki noktasından geçen **doğrunun tamamını** içeriyorsa afin, yalnızca aradaki **doğru parçasını** içeriyorsa konveks olur. Bu tek harflik fark, iki bambaşka teori doğurur. Bu haftada bunların ilkinin kuruyor ve afin kümelerin lineer cebirle bağıntı keskinleştiriyoruz: her afin küme, bir lineer alt uzayın ötelenmişidir.

4.1 Doğrular ve Afin Kümeler

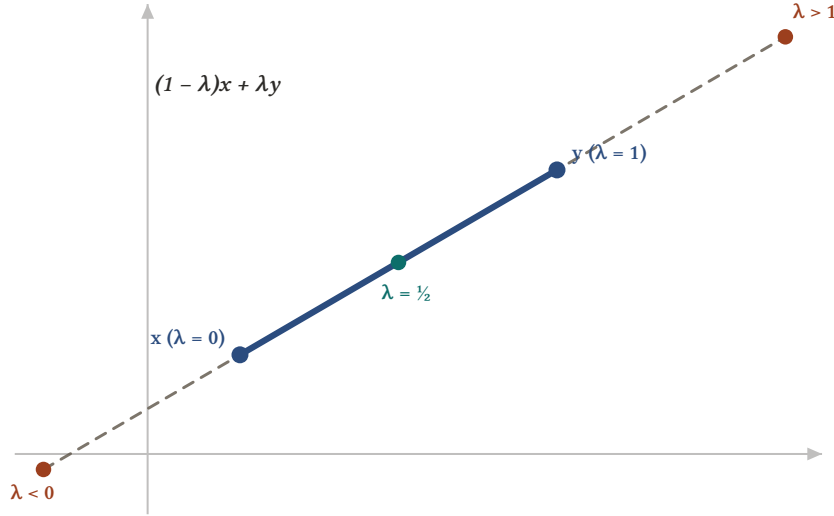
Tanım 4.1 (Doğru). $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\{(1 - \lambda)x + \lambda y : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

veya başka bir yazılış ile

$$\{\lambda_1 x + \lambda_2 y : \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

kümesine x ve y noktalarından geçen **doğru** denir.



Şekil 4.1: İki noktanın $(1 - \lambda)x + \lambda y$ kombinasyonu, λ bütün reel sayıları dolaştığında **x ile y'den geçen doğruyu** çizer. λ yalnızca $[0, 1]$ aralığında kaldığında ise **doğru parçası** elde edilir: afin kümeleri doğrulara, konveks kümeleri doğru parçalarına duyarlı yapan fark tam olarak budur.

Tanım 4.2 (Afin Küme). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $x, y \in A$ için

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

gerçekleniyor ise A kümesine $\mathbb{R}^n$ 'de bir **afin küme** denir. Başka bir deyişle, herhangi iki noktasından geçen doğruyu içeren kümelere afin küme denir.

$\emptyset$, $\mathbb{R}^n$, tek nokta kümeleri, doğrular ve düzlemler birer afin küme örneğidir.

Tanım 4.3 (Afin Kombinasyon). $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ve $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ olmak üzere

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$$

noktasına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının **afin kombinasyonu** denir.

Afin kombinasyon kavramını kullanarak, afin kümeleri herhangi iki noktasının afin kombinasyonunu içeren kümeler olarak tanımlamak mümkündür. Aşağıdaki teorem, “iki nokta” ile “sonlu çok nokta” arasında fark olmadığını söyler.

Teorem 4.1 (Afin Kümeler Bütün Afin Kombinasyonları İçerir). Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin afin olması için gerek ve yeter koşul, elemanlarının tüm afin kombinasyonlarını içermesidir.

İspat.

Yeterlilik. A kümesi elemanlarının tüm afin kombinasyonlarını içersin; bu durumda herhangi iki noktasının afin kombinasyonunu da içerir, dolayısıyla A afin küme olur.

Gereklilik. Tersine A bir afin küme olsun ve $m > 2$ olmak üzere A kümesinin $m - 1$ tane elemanının afin kombinasyonunu içerdiğini kabul edelim (tümevarım hipotezi). Şimdi $x_1, \dots, x_m \in A$ ve $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ olsun. Amacımız $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in A$ olduğunu göstermektir. $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ olduğundan λ_i 'lerden en az biri 1'den farklıdır; genelliği bozmadan $\lambda_m \neq 1$ olsun. Bu durumda

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i x_i + \lambda_m x_m = (1 - \lambda_m) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_m} x_i \right)}_{=: y} + \lambda_m x_m$$

yazılabilir. Burada

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_m} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_{m-1}}{1 - \lambda_m} = \frac{1 - \lambda_m}{1 - \lambda_m} = 1$$

olduğundan y noktası, A kümesinin $m - 1$ tane x_i elemanının afin kombinasyonudur ve tümevarım hipotezi gereği $y \in A$ 'dır. Böylece $x = (1 - \lambda_m)y + \lambda_m x_m$ noktası A 'nın iki elemanının afin kombinasyonu olduğundan A kümesine aittir. Tümevarımla, bir afin kümenin elemanlarının herhangi bir afin kombinasyonunu içerdiği gösterilmiş olur. ■

4.2 Afin Örtü

Tanım 4.4 (Afin Örtü). Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm afin kümelerin kesişimine, yani I herhangi bir indis kümesi olmak üzere

$$\bigcap_{i \in I} \{A_i : A \subseteq A_i \text{ ve her } i \in I \text{ için } A_i \text{ afindir}\}$$

kesişim kümesine A kümesinin **afin örtüsü** ya da **afin zarfı** denir ve $\text{aff}(A)$ ile gösterilir.

Sonuç 4.1 (Afin Örtü En Küçüktür). $A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\text{aff}(A)$ kümesi, A kümesini kapsayan en küçük afin kümedir.

Neden?

Afin kümelerin kesişimi yine afindir: kesişimin iki noktası her A_i 'de bulunduğundan, bu iki noktadan geçen doğru da her A_i 'de, dolayısıyla kesişimde kalır. Böylece $\text{aff}(A)$ afindir ve tanımı gereği A 'yı kapsar. A 'yı kapsayan herhangi bir F afin kümesi ise kesişimdeki çarpanlardan biridir; dolayısıyla $\text{aff}(A) \subseteq F$ olur.

Teorem 4.2 (Afin Örtünün İçeriği). Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi için $\text{aff}(A)$ afin örtü kümesi, A kümesinin elemanlarının tüm afin kombinasyonlarının kümesine eşittir.

İspat.

A kümesinin elemanlarının tüm afin kombinasyonlarının kümesi W ile gösterilsin. Her $x \in A$ için $x = 1 \cdot x$ yazılabildiğinden $A \subseteq W$ 'dir. Ayrıca W afin bir kümedir: iki afin kombinasyonun afin kombinasyonu, katsayıları toplamı yine 1 olan bir afin kombinasyondur. Dolayısıyla $\text{aff}(A) \subseteq W$ geçerlidir.

Öte yandan $\text{aff}(A)$ kümesi afin olduğundan [Teorem 4.1](#) nedeniyle elemanlarının tüm afin kombinasyonlarını içerir. $A \subset \text{aff}(A)$ olduğundan özel olarak A kümesinin elemanlarının tüm afin kombinasyonlarını, yani W kümesini de kapsar; böylece $W \subseteq \text{aff}(A)$ olur. Sonuç olarak $\text{aff}(A) = W$ elde edilir.

■

Örnek 4.1 (Bir Afin Örtü Hesabı). $\mathbb{R}^3$ uzayında $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ noktalarının afin örtüsünü belirleyiniz.

Çözüm.

[Teorem 4.2](#) gereği afin örtü, bu üç noktanın tüm afin kombinasyonlarının kümesidir. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ olduğundan katsayılar üzerindeki $\sum \lambda_i = 1$ koşulu doğrudan noktanın bileşenleri üzerine düşer:

$$\text{aff}\{v_1, v_2, v_3\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}.$$

Bu düzlem 0 noktasını içermediğinden bir lineer alt uzay değildir. Paralel olduğu alt uzayı bulmak için [Teorem 4.3](#) uyarınca kümeden bir noktası — örneğin v_1 — çıkarılır:

$$L = \text{aff}\{v_1, v_2, v_3\} - v_1 = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}.$$

L alt uzayının bir tabanı $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1\}$, dolayısıyla boyutu 2'dir. Afin kümenin boyutu paralel alt uzayın boyutu olarak tanımlandığından afin örtünün boyutu da 2'dir.

4.3 Lineer Alt Uzaylar ve Paralellik

Tanım 4.5 (Lineer Kombinasyon). $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$$

noktasına $x_1, \dots, x_m$ noktalarının **lineer kombinasyonu** denir.

Afin kombinasyondan tek farkı, katsayılar üzerinde hiçbir kısıt bulunmamasıdır.

Tanım 4.6 (Lineer Alt Uzay). $L \subseteq \mathbb{R}^n$ bir küme olmak üzere

- (i) $x_1, x_2 \in L$ için $x_1 + x_2 \in L$,
- (ii) $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda x \in L$

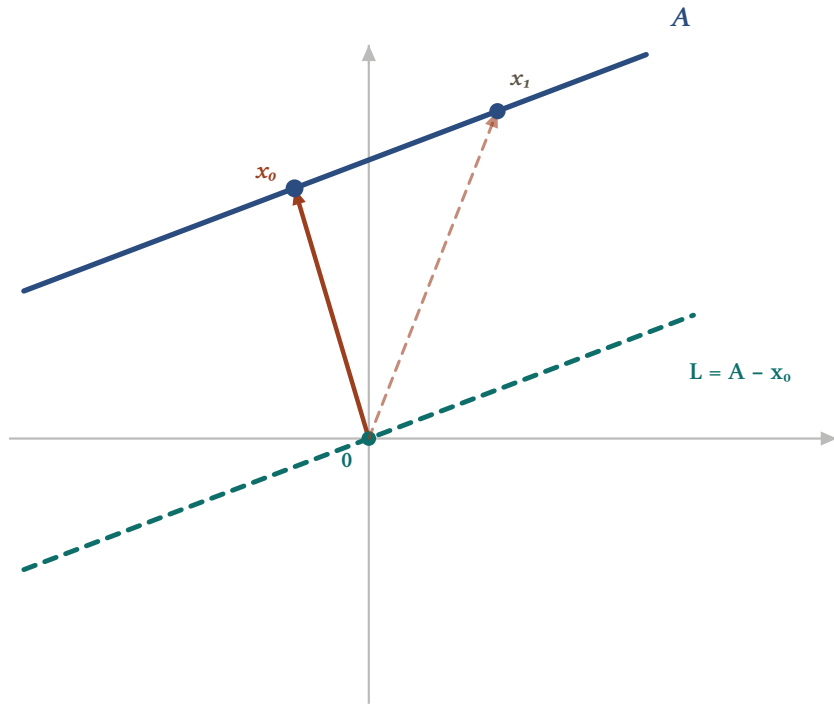
gerçekleniyorsa — ya da eşdeğer olarak $x_1, x_2 \in L$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in L$ gerçekleşiyorsa, yani herhangi iki noktasının lineer kombinasyonunu içeriyorsa — L kümesine bir **lineer alt uzay** denir.

Dikkat edilirse her lineer alt uzay aynı zamanda bir afin kümedir. Ancak her afin kümenin lineer alt uzay olması gerekmez: orijinden geçmeyen bir doğru afindir ama 0'ı içermediğinden alt uzay değildir.

Tanım 4.7 (Paralellik). $A, B \subset \mathbb{R}^n$ iki afin küme olsun. Bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $A = B + x_0$ ise A kümesi B kümesine **paraleldir** ya da A kümesi B kümesinin x_0 **ötelemesidir** denir. $B = A - x_0$ yazılabildiğinden B kümesinin de A kümesine paralel olduğuna dikkat ediniz.

Aşağıdaki teorem afin kümeler ile lineer alt uzaylar arasındaki ilişkiyi tam olarak ifade eder: afin kümeler, alt uzayların ötelenmişlerinden başka bir şey değildir.

Teorem 4.3 (Afin Küme = Alt Uzayın Ötelemesi). $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. A kümesinin afin olması için gerek ve yeter koşul, A 'nın **tek bir** L lineer alt uzayına paralel olmasıdır.



Şekil 4.2: Boştan farklı bir afin küme, bir lineer alt uzayın ötelenmişidir. A üzerinden herhangi bir x_0 seçilip $A - x_0$ kurulduğunda daima orijinden geçen aynı L alt uzayı çıkar — şekilde x_1 ile ötelemek de aynı doğruyu verir. Bu yüzden A 'nın boyutu, paralel olduğu L alt uzayının boyutu olarak tanımlanır.

İspat.

Gereklilik. A afin olsun ve bir $x_0 \in A$ seçilsin. Bu durumda $L = A - x_0$ bir lineer alt uzaydır. Gerçekten: (i) $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in L = A - x_0$ olsun. Dolayısıyla $x = a - x_0$ olacak biçimde bir $a \in A$ vardır. A bir afin küme olduğundan $\alpha a + (1 - \alpha)x_0 \in A$ geçerlidir. Böylece

$$\alpha x = \alpha(a - x_0) = \alpha a - \alpha x_0 + x_0 - x_0 = \underbrace{[\alpha a + (1 - \alpha)x_0]}_{\in A} - x_0 \in L,$$

yani $\alpha x \in L$ sağlanır.

(ii) $x_1, x_2 \in L = A - x_0$ ise $x_1 = a_1 - x_0$ ve $x_2 = a_2 - x_0$ olacak biçimde $a_1, a_2 \in A$ vardır. Bu durumda

$$x_1 + x_2 = a_1 + a_2 - 2x_0 = 2 \left(\underbrace{\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2}_{\in A} - x_0 \right) \in L$$

elde edilir; burada A afin olduğundan $\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \in A$ olup parantez içindeki nokta L 'ye aittir, (i) nedeniyle de bu noktanın 2 katı L kümesine aittir.

Sonuçta L kümesi toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre kapalıdır, yani bir lineer alt uzaydır. $L = A - x_0$ ise $A = L + x_0$ olduğundan A kümesi L alt uzayına paraleldir.

Yeterlilik. Tersine A kümesi bir L lineer alt uzayına paralel olsun, yani belli bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $A = L + x_0$ olsun. $x_1, x_2 \in A$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olsun. $x_1, x_2 \in A$ ise $x_1 = y_1 + x_0$ ve $x_2 = y_2 + x_0$ olacak biçimde $y_1, y_2 \in L$ vardır. Böylece

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \underbrace{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}_{\in L} + \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)x_0}_{=1} = A$$

olur; bu ise A kümesinin afin olması demektir.

Teklik. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve L_1, L_2 lineer alt uzayları için $A = L_1 + x_1 = L_2 + x_2$ olsun. Bu durumda $L_1 = L_2 + (x_2 - x_1)$ olur. Öte yandan L_1 bir lineer alt uzay olduğu için $0 \in L_1$, dolayısıyla $0 \in L_2 + (x_2 - x_1)$ olacağından $-(x_2 - x_1) \in L_2$ ve alt uzay olması nedeniyle $x_2 - x_1 \in L_2$ olmalıdır. Sonuçta

$$L_1 = L_2 + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\in L_2} = L_2$$

bulunur.

■

Sonuç 4.2 (Alt Uzaylar Orijini İçerir). Lineer alt uzaylar, orijini içeren afin kümelerdir.

Neden?.

Her alt uzay afindir ve 0 'ı içerir. Tersine A afin ve $0 \in A$ ise [Teorem 4.3](#) gereği $A = L + x_0$ yazılır; $x_0 = 0$ seçilebileceğinden $A = L$ olur.

Bu bağ, bir afin kümeye boyut atamamızı sağlar. Bir sonraki haftada boyutu tam olarak $n - 1$ olan afin kümeleri — hiperdüzlemleri — ayrı bir başlık altında inceleyeceğiz; bütün ayırma teoremlerinin sahnesi onlar olacak.

5. Hiperdüzlemler ve Afin Bağımsızlık

Bir afin kümeye boyut atayabildiğimize göre artık en ilginç durumu ayırabiliriz: boyutu, içinde bulunduğu uzayın boyutundan yalnızca bir eksik olan afin kümeler. Bunlara hiperdüzlem denir ve tek bir lineer denklemle yazılırlar — ayırma teoremlerinin bütün ağırlığını taşıyacak olan yapı budur. Haftanın ikinci konusu olan afin bağımsızlık ise, bir nokta kümesinin afin örtüsünün boyutunu okumanın aracıdır.

5.1 Boyut ve Hiperdüzlemler

Tanım 5.1 (Doğurma, Lineer Bağımsızlık, Taban ve Boyut). V kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı ve $A \subseteq V$ olmak üzere, eğer her $v \in V$ elemanı A kümesinin elemanlarının bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılabiliyor ise A kümesi V uzayını **doğurur** ya da **gerer** denir.

Eğer $v_1, \dots, v_m \in V$ vektörleri için

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

denklemi yalnızca $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ için sağlanıyor ise $v_1, \dots, v_m$ vektörleri **lineer bağımsızdır** denir; aksi hâlde **lineer bağımlıdır** denir.

Bir V vektör uzayını doğuran lineer bağımsız vektörler kümesine V uzayının bir **tabanı** denir. Eğer V vektör uzayı k tane elemanı olan sonlu bir tabana sahipse, V 'nin tüm tabanları da k tane elemana sahiptir; bu k sayısına V vektör uzayının **boyutu** denir ve $\dim(V) = k$ ile gösterilir.

$L \subseteq V$ bir lineer alt uzay ise boyutlar arasında $\dim(L) \leq \dim(V)$ eşitsizliği geçerlidir. Aynı boyut kavramı, ötelenmiş hâlleri olan afin kümelerle de taşınır.

Tanım 5.2 (Afin Kümenin Boyutu). Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ **afin kümesinin boyutu**, A afin kümesine paralel olan lineer alt uzayın boyutu olarak tanımlanır ve $\dim(A)$ ile gösterilir.

Teorem 4.3 bu tanımı iyi tanımlı kılar: paralel alt uzay tektir.

Alıştırma 5.1 (Küçük Boyutlu Uzayların Alt Uzayları). $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ uzaylarının her biri için bir taban belirleyip lineer alt uzaylarını boyutlarına göre sınıflandırınız.

Çözüm.

Standart tabanlar sırasıyla $\{1\}$, $\{e_1, e_2\}$ ve $\{e_1, e_2, e_3\}$ 'tür; boyutlar 1, 2 ve 3'tür. Bir lineer alt uzay orijini içermek zorunda olduğundan sınıflandırma boyuta göre şöyledir:

- $\mathbb{R}$ 'de: $\{0\}$ (boyut 0) ve $\mathbb{R}$ (boyut 1).
- $\mathbb{R}^2$ 'de: $\{0\}$; orijinden geçen doğrular (boyut 1); $\mathbb{R}^2$ (boyut 2).
- $\mathbb{R}^3$ 'te: $\{0\}$; orijinden geçen doğrular (boyut 1); orijinden geçen düzlemler (boyut 2); $\mathbb{R}^3$ (boyut 3).

Afin kümeler ise bunların ötelenmişleridir: örneğin $\mathbb{R}^3$ 'te afin kümeler tek noktalar, doğrular, düzlemler ve uzayın kendisidir — orijinden geçme koşulu olmaksızın.

Tanım 5.3 (Hiperdüzlem). $\mathbb{R}^n$ uzayında boyutu $n - 1$ olan her afin kümeye bir **hiperdüzlem** denir.

Alıştırma 5.2 (Küçük Boyutlu Uzaylarda Hiperdüzlemler). $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}^3$ uzaylarındaki hiperdüzlemleri belirleyiniz.

Çözüm.

Hiperdüzlem, uzayın boyutundan bir eksik boyutlu afin kümedir:

- $\mathbb{R}^1$ 'de boyut 0: **tek noktalar**, yani $\{a\}$ kümeleri.
- $\mathbb{R}^2$ 'de boyut 1: **doğrular** — orijinden geçmek zorunda değildirler.
- $\mathbb{R}^3$ 'te boyut 2: **düzlemler**.

Üç durumda da hiperdüzlem, tek bir lineer denklemin çözüm kümesidir: sırasıyla $ax = b$, $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ ve $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ (katsayı vektörü sıfırdan farklı olmak üzere).

Tanım 5.4 (Ortogonal Tümleyen). Bir $L \subseteq \mathbb{R}^n$ lineer alt uzayı için

$$L^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle = 0, \forall x \in L\}$$

şeklinde tanımlanan küme de bir lineer alt uzay olup L lineer alt uzayının **ortogonal tümleyeni** olarak adlandırılır.

Her $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü $x_1 \in L$, $x_2 \in L^\perp$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$ şeklinde tek türlü yazılır ve $\dim(L) + \dim(L^\perp) = n$ geçerlidir. Özel olarak L bir hiperdüzlem (boyutu $n - 1$ olan alt uzay) olduğunda $L^\perp$ alt uzayı 1 boyutlu bir doğru olur.

Teorem 5.1 (Hiperdüzlemin Denklemi). Herhangi bir $H \subset \mathbb{R}^n$ hiperdüzlemi, belli bir $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ vektörü ve $b \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = b\}$$

kümesi ile gösterilebilir. Üstelik bu biçimde verilen her küme bir hiperdüzlemdir.

İspat.

H kümesi $\mathbb{R}^n$ 'de bir hiperdüzlem olsun. Bu durumda H 'nin boyutu $n - 1$ 'dir ve Teorem 4.3 nedeniyle $n - 1$ boyutlu bir L lineer alt uzayı ile belli bir $x_0 \in H$ için $H = L + x_0$ geçerlidir. $\dim(L) = n - 1$ olduğundan $\dim(L^\perp) = 1$ olur; dolayısıyla bir $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ vektörü için $L^\perp = \{\lambda a : \lambda \in \mathbb{R}\}$ geçerlidir. Böylece

$$x \in H \Leftrightarrow x - x_0 \in L \Leftrightarrow \langle a, x - x_0 \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a, x \rangle = \langle a, x_0 \rangle$$

elde edilir. $b := \langle a, x_0 \rangle$ denirse $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = b\}$ bulunur.

■

Tanım 5.5 (Normal Vektör). Hiperdüzlemlerin $H = \{x : \langle a, x \rangle = b\}$ yazılışlarındaki $0 \neq a$ vektörüne H hiperdüzleminin bir **normal vektörü** denir.

Normal vektör tek değildir: sıfırdan farklı her t için ta vektörü de aynı hiperdüzlemin normalidir, yeter ki sağ taraf tb olarak güncellensin.

Örnek 5.1 (Düzlemde Bir Hiperdüzlem ve Paralelleri). $\mathbb{R}^2$ uzayında $x + 2y = 4$ denkleminin belirlediği H hiperdüzlemini yazınız. H hiperdüzleminin paralel olduğu L alt uzayını belirleyiniz. $H_1 = (1, -4) + H$ paralel hiperdüzlemini bulunuz.

Çözüm.

Denklem bir iç çarpım olarak okunursa normal vektör doğrudan görülür:

$$H = \{(x, y) : x + 2y = 4\} = \{(x, y) : \langle (x, y), (1, 2) \rangle = 4\}.$$

Paralel alt uzay, aynı normal ile orijinden geçen hiperdüzlemdir:

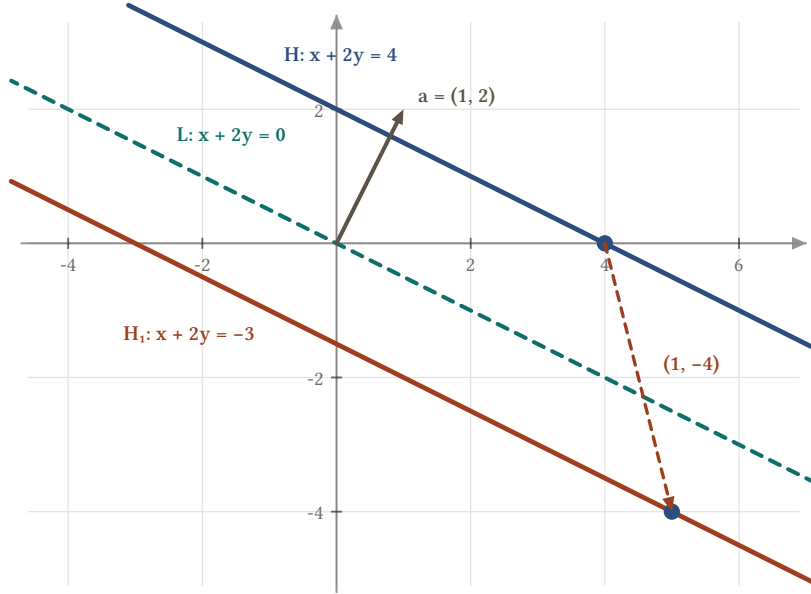
$$L = \{(x, y) : \langle (x, y), (1, 2) \rangle = 0\}.$$

Öteleme için $(x, y) \in H$ noktalarına $(1, -4)$ eklenir. $k = x + 1$, $t = y - 4$ dönüşümü ile $x = k - 1$, $y = t + 4$ yazılırsa

$$H_1 = (1, -4) + H = \{(k, t) : (k - 1) + 2(t + 4) = 4\} = \{(k, t) : k + 2t + 7 = 4\}$$

$$= \{(x, y) : x + 2y = -3\} = \{(x, y) : \langle (x, y), (1, 2) \rangle = -3\}.$$

Üç doğru da $(1, 2)$ vektörüne diktir; öteleme yalnızca sağ taraftaki sayıyı değiştirmiştir.



Şekil 5.1: $x + 2y = 4$ hiperdüzlemi, ona paralel olan L alt uzayı ($x + 2y = 0$) ve $(1, -4)$ ötelemesiyle elde edilen H_1 ($x + 2y = -3$). Üç doğru da $a = (1, 2)$ vektörüne diktir; öteleme sabit terimi değiştirir, normalini değiştirmez. Paralel hiperdüzlemler yalnızca sağ taraftaki b sayısı ile ayrılır.

İ Sonuç

Trivial çözüme sahip olmayan bir lineer denklemin çözüm kümesi bir hiperdüzlemdir.

Teorem 5.2 (Afin Kümeler Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Kümeleridir). A bir $m \times n$ matris ve $b \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere $M = \{x : Ax = b\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında bir afin kümedir; ayrıca herhangi bir afin küme bu şekilde ifade edilebilir.

İspat.

Önce $M = \{x : Ax = b\}$ kümesinin afin olduğunu gösterelim. $x, y \in M$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $z := (1 - \lambda)x + \lambda y$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$Az = (1 - \lambda)Ax + \lambda Ay = (1 - \lambda)b + \lambda b = b$$

geçerli olur. Böylece $z \in M$ gerçekleştiğinden M kümesi bir afin kümedir.

Şimdi $\emptyset \neq M$ kümesi $\mathbb{R}^n$ uzayında herhangi bir afin küme olsun. Teorem 4.3 nedeniyle M kümesinin paralel olduğu bir L lineer alt uzayı vardır. $\{a_1, \dots, a_m\}$ vektör kümesi $L^\perp$ uzayının bir tabanı olsun. Bu durumda

$$L = (L^\perp)^\perp = \{x : x \perp a_1, \dots, x \perp a_m\} = \{x : \langle a_i, x \rangle = 0, i = 1, \dots, m\} = \{x : Ax = 0\}$$

geçerlidir; burada A , satırları $a_1, \dots, a_m$ olan $m \times n$ matrisini göstermektedir. M afin kümesi L alt uzayına paralel olduğundan, bir $x_0 \in M$ için

$$M = L + x_0 = \{x : A(x - x_0) = 0\} = \{x : Ax = Ax_0\} = \{x : Ax = b\}$$

geçerli olur; burada $b := Ax_0$ alınmıştır.

■

Teorem 5.2'ndeki afin küme aşağıdaki biçimde de ifade edilebilir:

$$M = \{x : \langle x, a_i \rangle = b_i, i = 1, \dots, m\} = \bigcap_{i=1}^m H_i$$

Burada a_i ile A matrisinin i . satırı, b_i ile $b \in \mathbb{R}^m$ vektörünün i . bileşeni ve H_i ile $H_i = \{x : \langle x, a_i \rangle = b_i\}$ kümesi gösterilmektedir. Her bir H_i kümesi bir hiperdüzlemdir. Dolayısıyla:

i Sonuç

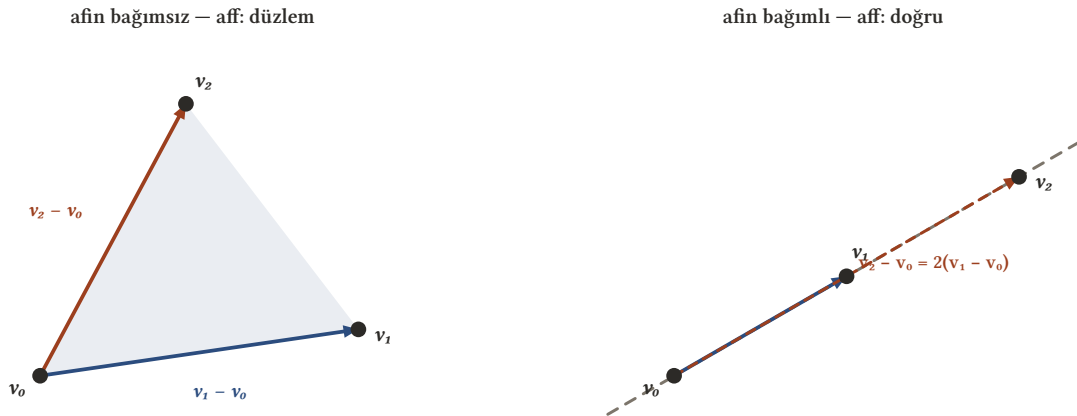
$\mathbb{R}^n$ uzayının her afin alt kümesi, sonlu sayıdaki hiperdüzlemin bir kesişimidir.

5.2 Afin Bağımsızlık

Tanım 5.6 (Afin Bağımsızlık). $m \geq 1$ olmak üzere $v_0, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ noktaları için

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0 \text{ ve } \sum_{i=0}^m \lambda_i = 0 \implies \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$$

gerektirmesi doğru oluyor ise $v_0, v_1, \dots, v_m$ noktaları **afin bağımsızdır** denir.



Şekil 5.2: v_0, v_1, v_2 noktalarının afin bağımsız olması, $v_1 - v_0$ ile $v_2 - v_0$ farklarının lineer bağımsız olması demektir. Solda iki fark farklı doğrultudadır, afin örtü düzlemin tamamıdır (boyut 2). Sağda biri diğerinin katı olduğundan üç nokta bir doğru üzerindedir ve afin örtü yalnızca o doğrudur (boyut 1).

Teorem 5.3 (Afin Bağımsızlığın Lineer Karşılığı). $m \geq 1$ olmak üzere $v_0, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ noktalarının afin bağımsız olabilmesi için gerek ve yeter koşul, $v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_m - v_0$ vektörlerinin lineer bağımsız olmasıdır.

İspat.

Gerekliklik. $v_0, \dots, v_m$ noktaları afin bağımsız olsun ve

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (v_i - v_0) = 0$$

denklemini ele alalım. $\lambda_0 := -\sum_{i=1}^m \lambda_i$ olarak tanımlansın; böylece $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$ olur. Dikkat edilirse

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (v_i - v_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i - \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right) v_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \lambda_0 v_0 = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$$

geçerlidir. $v_0, \dots, v_m$ noktaları afin bağımsız olduğundan her $i = 0, 1, \dots, m$ için $\lambda_i = 0$ olur. Dolayısıyla $v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0$ vektörleri lineer bağımsızdır.

Yeterlilik. Tersine $v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0$ vektörleri lineer bağımsız olsun. $\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = 0$ ve $\sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$ olsun. İkinci eşitlikten $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^m \lambda_i$ yazılıp birincide yerine konursa

$$0 = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i - \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \right) v_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i (v_i - v_0)$$

elde edilir. Lineer bağımsızlık nedeniyle $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$, buradan da $\lambda_0 = 0$ bulunur.

■

Bundan sonra bir $C \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi tarafından doğurulan uzay $\text{span}(C)$ ile gösterilecektir. $\text{span}(C)$ kümesi, C kümesinin elemanlarının tüm lineer kombinasyonlarının oluşturduğu küme olduğundan bir lineer alt uzaydır.

Lemma 5.1 (Afin Örtüye Paralel Alt Uzay). $v_0, v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ ve $K := \text{aff}\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ ise $\text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$ kümesi K kümesine paralel olan alt uzaydır.

İspat.

K afin kümesine paralel olan alt uzay L ile gösterilsin. $v_0 \in K$ olduğundan $K - v_0 = L$ olur; dolayısıyla her $i = 1, \dots, m$ için $v_i - v_0 \in L$ ve L bir alt uzay olduğundan bu elemanların tüm lineer kombinasyonlarını içerir. Bu ise

$$\text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0\} \subseteq L$$

kapsamasının geçerli olması demektir.

Tersine, sabit bir $v \in L$ için $v + v_0 \in K$ geçerlidir. Dolayısıyla K 'nın tanımı gereği $v + v_0$ elemanı, v_i 'lerin bir afin kombinasyonu şeklinde yazılır:

$$v + v_0 = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i, \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1.$$

Bu ise

$$v = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i - v_0 = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i - \left(\sum_{i=0}^m \lambda_i \right) v_0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i (v_i - v_0) \in \text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$$

içermesinin, dolayısıyla da $L \subseteq \text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$ kapsamasının doğru olduğunu söyler. Sonuçta $K - v_0 = \text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$ elde edilir.

■

Sonuç 5.1 (Afin Bağımsızlık ve Boyut). $m \geq 1$ olmak üzere $v_0, v_1, \dots, v_m$ noktalarının afin bağımsız olması için gerek ve yeter koşul, $\text{aff}\{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ kümesinin m boyutlu olmasıdır.

Neden?

Lemma 5.1 gereği bu afin örtüye paralel alt uzay $\text{span}\{v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0\}$ 'dır; boyutu, bu m vektörün lineer bağımsız olması hâlinde tam olarak m 'dir. **Teorem 5.3** ile birleştirilirse iddia elde edilir.

Hiperdüzlemler ile afin bağımsızlık, konveks kümelerle geçmeden önce ihtiyacımız olan son afin araçlardı. Bir sonraki haftada bu yapıları koruyan dönüşümleri tanımlayıp dersin asıl nesnesine geçiyoruz.

6. Lineer Dönüşümler ve Konveks Kümeler

Bu hafta iki iş yapıyoruz. Önce lineer dönüşümleri tanımlayıp her birinin bir matris olduğunu ve sürekli olduğunu gösteriyoruz; bu süreklilik, hiperdüzlemlerin ve yarı uzayların kapalılığını daha bu hafta içinde kullanmamızı sağlayacak. Ardından dersin asıl nesnesini tanımlıyoruz: konveks kümeler. Afin kümelerden tek farkları, doğrunun tamamı yerine yalnızca doğru parçasını istemeleridir.

6.1 Lineer Dönüşümler

Afin ve konveks kümelerin yapısını koruyan dönüşümlerin en basiti lineer dönüşümlerdir; afin dönüşümleri, konveksliğin korunmasını incelediğimiz gelecek haftaya bırakıyoruz.

Tanım 6.1 (Lineer Dönüşüm). $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ olmak üzere

- (i) her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $T(x + y) = T(x) + T(y)$,
- (ii) her $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

koşullarını – veya eşdeğer olarak her $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ koşulunu – sağlayan T fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ 'den $\mathbb{R}^m$ 'e bir **lineer dönüşüm** denir. Eğer bir lineer dönüşüm $\mathbb{R}^n$ 'den $\mathbb{R}^n$ 'ye tanımlanmış ise özel olarak bu dönüşüm **lineer fonksiyonel** olarak adlandırılır.

Teorem 6.1 (Her Lineer Dönüşüm Bir Matristir). $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda $T(x) = Ax$ gerçekleyen bir $A_{m \times n}$ matrisi vardır.

İspat.

$x \in \mathbb{R}^n$ olsun. $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektörleri $\mathbb{R}^n$ 'in standart tabanı olmak üzere bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü standart taban cinsinden

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla lineerlik ile

$$T(x) = T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2) + \dots + x_n T(e_n) \quad (1)$$

geçerlidir. Bu yazılıştan $T(x)$ vektörünü belirleyebilmek için $T(e_1), \dots, T(e_n)$ vektörlerini bilmek yeterlidir. $j = 1, \dots, n$ için $T(e_j) \in \mathbb{R}^m$ vektörünün i . bileşenini a_{ij} ile gösterirsek (1) nedeniyle

$$T(x) = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = Ax$$

olur; buradaki A matrisi aranan matristir.

■

i Sonuç

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli için $T(x) = \langle a, x \rangle$ gerçekleyen bir $a \in \mathbb{R}^n$ vardır. Kısacası her lineer fonksiyonel, uygun bir $a \in \mathbb{R}^n$ yardımıyla $\langle a, x \rangle$ biçiminde ifade edilebilir.

Lemma 6.1 (Lineer Dönüşümler Süreklidir). Herhangi bir $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineer dönüşümü süreklidir.

İspat.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ 'in standart tabanı ve $v_i := T(e_i)$, $i = 1, \dots, n$ olsun. $x = (x_1, \dots, x_n)$ olmak üzere herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda üçgen eşitsizliği ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği yardımıyla

$$\|T(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n x_i v_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|v_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \underbrace{\sqrt{\sum_{i=1}^n \|v_i\|^2}}_{=: M > 0} = M \|x\|$$

kısacası, $M > 0$ sabit bir sayı olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\|T(x)\| \leq M \|x\|$ eşitsizliği geçerlidir. Böylece her $p, k \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|T(p) - T(k)\| = \|T(p - k)\| \leq M \|p - k\|$$

eşitsizliği gerçekleşir; bu ise T dönüşümünün bir Lipschitz fonksiyonu, dolayısıyla da düzgün sürekli ve sonuçta sürekli olması demektir. ■

Özel olarak $\mathbb{R}^n$ 'de tanımlı her lineer fonksiyonel sürekli; bu, birazdan hiperdüzlemlerin kapalı, yarı uzayların ise kapalı veya açık olduğunu söylerken kullanacağımız gözlemdir.

6.2 Konveks Kümeler

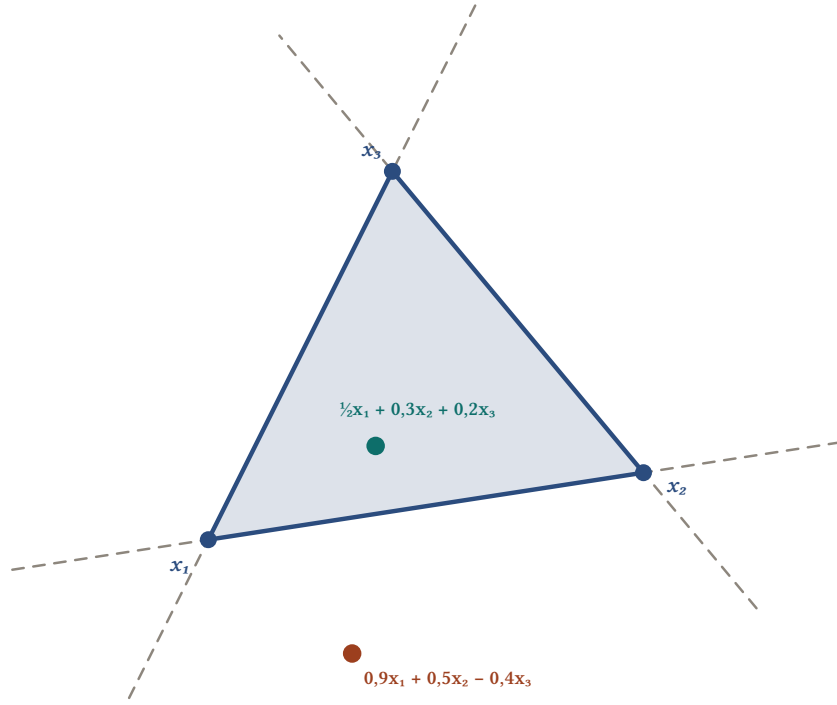
Tanım 6.2 (Konveks Kombinasyon ve Doğru Parçası). $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ ve $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ olmak üzere $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ toplamına $x_1, \dots, x_m$ noktalarının bir **konveks kombinasyonu** denir.

Özel olarak x ve y gibi iki noktanın bir konveks kombinasyonunu $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $(1 - \lambda)x + \lambda y$ yazılışı ile ifade etmek mümkündür. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\{(1 - \lambda)x + \lambda y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

kümesine x ve y noktalarını birleştiren **doğru parçası** denir.

Konveks kombinasyonun afin kombinasyondan (Tanım 4.3) tek farkı, katsayıların negatif olmamasıdır.



Şekil 6.1: Üç noktanın katsayıları toplamı 1 olan kombinasyonları düzlemin tamamını (afin örtüyü) tarar; katsayıların hepsi negatif olmadığında ise yalnızca üçgen, yani **konveks örtü** elde edilir. Turuncu noktanın katsayıları da 1'e toplanır ama biri negatif olduğundan nokta üçgenin dışına düşer.

Tanım 6.3 (Yıldız Biçimli Küme). Sabit bir $x_0 \in C \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer her $y \in C$ ve her $0 \leq \lambda \leq 1$ için $(1 - \lambda)x_0 + \lambda y \in C$ gerçekleşiyor ise C kümesi x_0 noktasına göre **yıldız biçimli** bir kümedir denir.

Tanım 6.4 (Konveks Küme). $C \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, eğer

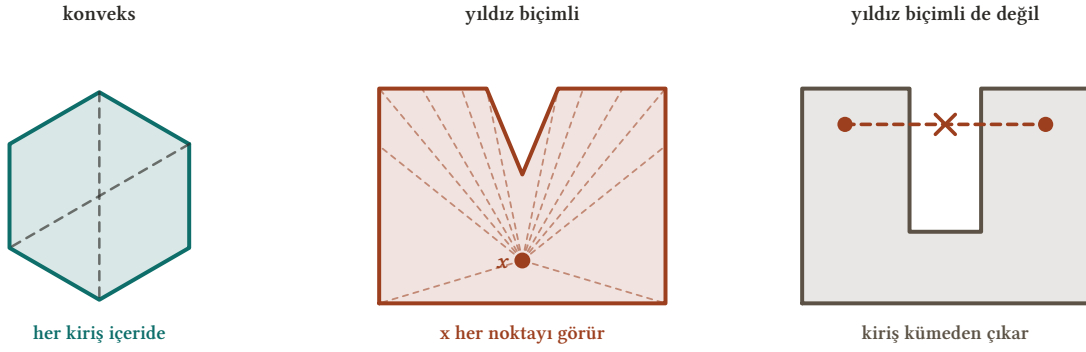
$$\forall x, y \in C, 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ için } (1 - \lambda)x + \lambda y \in C$$

içermesi gerçekleşiyor ise C kümesine bir **konveks küme** denir.

Yukarıdaki tanıma eşdeğer olarak, konveks bir küme aşağıdaki ifadelerden herhangi biri ile de tanımlanabilir:

- herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını içeren küme,
- herhangi iki elemanın konveks kombinasyonlarını içeren küme,
- **her bir** elemanına göre yıldız biçimli olan küme.

Son ifade, konvekslik ile yıldız biçimlilik arasındaki farkı tam olarak yakalar: yıldız biçimlilik **bir** noktadan bütün kümenin görülmesini, konvekslik ise **her** noktadan bütün kümenin görülmesini ister.



Şekil 6.2: Konveks küme, herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını tamamen içerir. Ortadaki küme konveks değildir ama x noktasına göre yıldız biçimlidir: **bir** nokta bütün kümeyi görür. Sağdaki kümede böyle bir nokta yoktur; iki kolun uçları arasındaki kiriş her seçimde boşluktan geçer. Bir kümenin konveks olması, **her** noktasına göre yıldız biçimli olmasıyla aynı şeydir.

Teorem 6.2 (Konveks Kümelerin Kesişimi). I herhangi bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $C_i \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri konveks ise $\bigcap_{i \in I} C_i$ kesişim kümesi de konvekstir.

İspat.

$x_1, x_2 \in \bigcap_{i \in I} C_i$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $x_1 \in C_i$ ve $x_2 \in C_i$ geçerlidir. Her C_i konveks olduğundan $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in C_i$ ve dolayısıyla $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \bigcap_{i \in I} C_i$ gerçekleşir.

■

Bu basit sonuç, bu bölümün en çok kullanılan aracıdır: konveks olduğunu bildiğimiz kümelerin kesişimi olarak yazabildiğimiz her küme konvekstir.

6.2.1 Konveks Küme Örnekleri

Örnek 6.1 (Temel Konveks Kümeler). Aşağıdaki kümelerin konveks olduğunu gösteriniz: (1) $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ ve tek nokta kümeleri; (2) kapalı birim yuvar $\overline{B(0, 1)}$; (3) hiperdüzlemler; (4) yarı uzaylar; (5) polihedral kümeler.

Çözüm.

1. $\mathbb{R}^n$ ve tek nokta kümesi için koşul aşıkâr biçimde sağlanır; $\emptyset$ için de sağlanır, çünkü kontrol edilecek nokta çifti yoktur.

2. $x_1, x_2 \in \overline{B(0, 1)}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere üçgen eşitsizliği ve normun homojenliği ile

$$\| (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \| \leq |1 - \lambda| \cdot \|x_1\| + |\lambda| \cdot \|x_2\| \leq (1 - \lambda) + \lambda = 1,$$

yani $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in \overline{B(0, 1)}$ geçerlidir.

3. **Teorem 5.1** nedeniyle herhangi bir hiperdüzlem $H = \{x : \langle a, x \rangle = b\}$ ile gösterilebilir. $x_1, x_2 \in H$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\langle a, (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \rangle = (1 - \lambda)\langle a, x_1 \rangle + \lambda\langle a, x_2 \rangle = (1 - \lambda)b + \lambda b = b$$

olacağından $(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \in H$ elde edilir.

4. Yarı uzaylar için aynı hesap, eşitlik yerine eşitsizlikle tekrarlanır: $\langle a, x_1 \rangle \leq b$ ve $\langle a, x_2 \rangle \leq b$ ise ağırlıklı ortalama da b 'yi aşmaz. Kesin eşitsizlik için de aynısı geçerlidir.

5. Polihedral küme, sonlu sayıda kapalı yarı uzayın kesişimidir; her biri konveks olduğundan **Teorem 6.2** gereği kesişim de konvekstir. Ayrıca lineer fonksiyoneller sürekli olduğundan (**Lemma 6.1**) her $\{x : \langle a_i, x \rangle \leq b_i\}$ kümesi kapalıdır ve kapalı kümelerin kesişimi kapalı olduğundan polihedral kümeler kapalıdır.

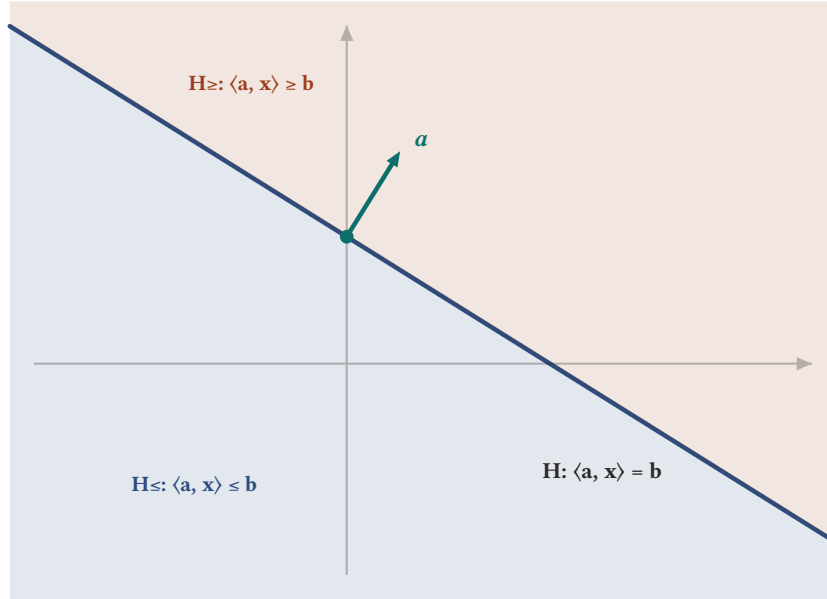
Tanım 6.5 (Yarı Uzaylar). Bir $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = b\}$ hiperdüzlemi $\mathbb{R}^n$ uzayını

$$H^{\leq} = \{x : \langle a, x \rangle \leq b\} \quad \text{ya da} \quad H^{<} = \{x : \langle a, x \rangle < b\}$$

ve

$$H^{\geq} = \{x : \langle a, x \rangle \geq b\} \quad \text{ya da} \quad H^{>} = \{x : \langle a, x \rangle > b\}$$

olmak üzere iki **yarı uzaya** ayırır. $H^{\leq}$ ve $H^{\geq}$ uzaylarına H hiperdüzleminin belirlediği **kapalı yarı uzaylar**, $H^{<}$ ve $H^{>}$ uzaylarına da **açık yarı uzaylar** denir.

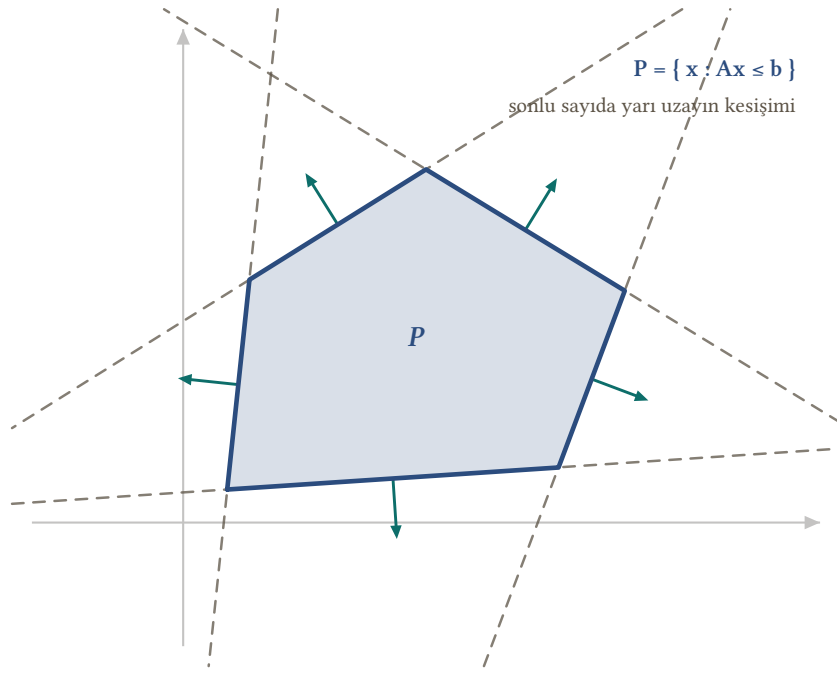


Şekil 6.3: Bir hiperdüzlem $H = \{x : \langle a, x \rangle = b\}$, uzayı iki kapalı yarı uzaya böler. Normal vektör a , H 'ye diktir ve $\langle a, x \rangle$ değerinin arttığı yönü gösterir; bu yüzden a 'nın işaret ettiği taraf $H^{\geq}$, ters taraf $H^{\leq}$ olur. $\mathbb{R}^n$ uzayında H 'nin boyutu $n - 1$ 'dir.

Tanım 6.6 (Polihedral Küme). $A_{m \times n}$ bir matris, $b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $Ax \leq b$ şeklinde verilen n bilinmeyenli m tane sonlu eşitsizlik sisteminin çözüm kümesi olan

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$$

kümesine bir **polihedral küme** veya bir **çok yüzlü küme** denir.



Şekil 6.4: Polihedral (çok yüzlü) küme, sonlu sayıda kapalı yarı uzayın kesişimidir. Her $\langle a_i, x \rangle \leq b_i$ eşitsizliği bir doğrunun bir yanını keser; okla gösterilen dışa doğru normaller yasak yönü işaret eder. Kapalı yarı uzaylar hem kapalı hem konveks olduğundan kesişimleri de kapalı ve konvektir.

Her hiperdüzlem aynı zamanda bir polihedral kümedir: $\langle a, x \rangle = b$ koşulu, $\langle a, x \rangle \leq b$ ve $\langle -a, x \rangle \leq -b$ eşitsizlik çiftine denktir.

Tanım 6.7 (Konveks Kümenin Boyutu). Bir $C \subseteq \mathbb{R}^n$ **konveks kümesinin boyutu**, C kümesinin afin örtüsü olan $\text{aff}(C)$ afin kümesinin paralel olduğu lineer alt uzayın boyutudur ve $\dim(C)$ ile gösterilir.

Konveks kümenin tanımı ve ilk örnekleri elimizde. Bir sonraki hafta bu özelliğin hangi işlemler altında korunduğunu sistematik olarak inceleyeceğiz.

7. Konvekslik Özelliğinin Korunması

Yeni konveks kümeler üretmenin en pratik yolu, elimizdekilerden yola çıkmaktır. Bu hafta konveksliğin hangi işlemler altında korunduğunu topluca inceliyoruz: toplama, skaler ile çarpma, kartezyen çarpım, lineer ve afin dönüşümler, kapanış ve iç alma. Kesişimin konveksliği geçen hafta kurulmuştu ve bu bölümün de en çok kullanılan aracı olmayı sürdürecektir.

7.1 Konveksliği Koruyan İşlemler

Konvekslik özelliği bir takım işlemler altında değişmeden korunur. Aşağıdaki teoremler, hangi işlemler altında konveksliğin korunduğuna ilişkindir.

Teorem 7.1 (Toplam Kümesi). $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise $C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ toplam kümesi de konvektir.

İspat.

$x, y \in C_1 + C_2$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. $x = x_1 + x_2$ ve $y = y_1 + y_2$ olacak biçimde $x_1, y_1 \in C_1$ ve $x_2, y_2 \in C_2$ vardır. Bu durumda

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \underbrace{(1 - \lambda)x_1 + \lambda y_1}_{\in C_1} + \underbrace{(1 - \lambda)x_2 + \lambda y_2}_{\in C_2} \in C_1 + C_2$$

içermesi geçerlidir.

■

Teorem 7.2 (Skaler Kat). $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $C \subseteq \mathbb{R}^n$ bir konveks küme ise $\alpha C = \{\alpha x : x \in C\}$ skaler kat kümesi de konvektir.

İspat.

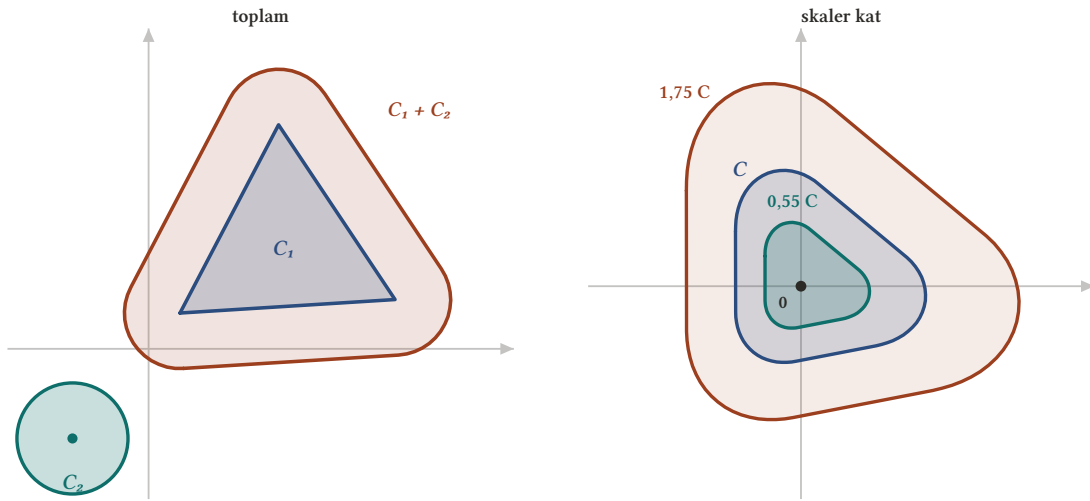
$x, y \in \alpha C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. $x = \alpha x_1$ ve $y = \alpha x_2$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in C$ vardır. Bu durumda

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \alpha \left[\underbrace{(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2}_{\in C} \right] \in \alpha C$$

içermesi geçerlidir.

■

Sonuç 7.1 (Lineer Birleşimler). $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ de konvektir. Özel olarak $C_1 - C_2$ konvektir.



Şekil 7.1: Konvekslik toplama ve skaler ile çarpma altında korunur. Solda bir üçgen ile bir diskin toplamı, üçgenin yarıçap kadar her yöne kalınlaştırılmış hâlidir. Sağda αC kümeleri, C 'nin orijine göre büyütülüp küçültülmüş kopyalarıdır. Aynı şey kesişim için de geçerlidir; buna karşılık iki konveks kümenin birleşimi genellikle konveks olmaz.

Teorem 7.3 (Kartezyen Çarpım). $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks ise $C_1 \times C_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ kartezyen çarpım kümesi de konvektir.

İspat.

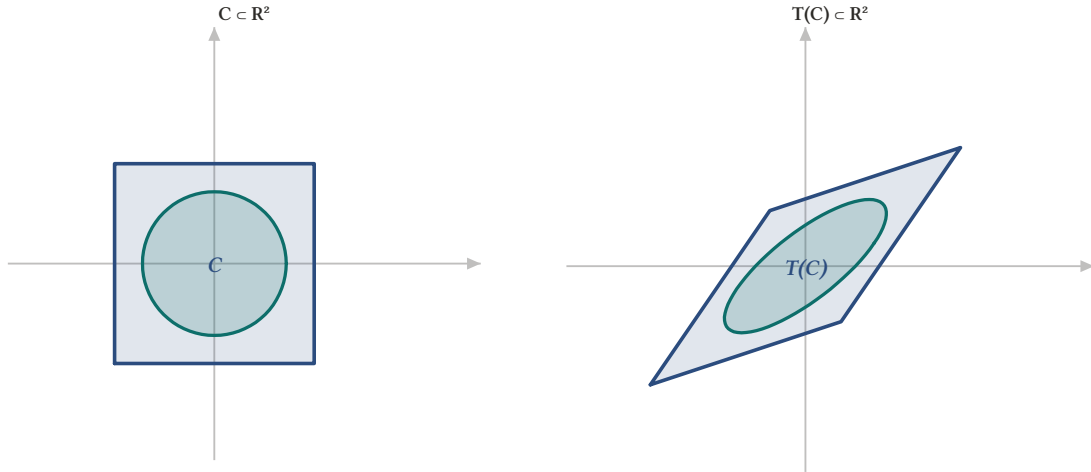
$(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in C_1 \times C_2$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Konveks kombinasyon bileşen bileşen alındığından

$$(1 - \lambda)(x_1, x_2) + \lambda(y_1, y_2) = \left(\underbrace{(1 - \lambda)x_1 + \lambda y_1}_{\in C_1}, \underbrace{(1 - \lambda)x_2 + \lambda y_2}_{\in C_2} \right) \in C_1 \times C_2$$

elde edilir.

■

Teorem 7.4 (Lineer Dönüşüm Altında Görüntü). $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineer dönüşüm ve $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks olsun. Bu durumda $T(C) = \{T(x) : x \in C\}$ görüntü kümesi $\mathbb{R}^m$ 'de konvektir.



Şekil 7.2: Lineer (ve daha genel olarak afin) bir dönüşüm konveksliği korur: $T((1-\lambda)x + \lambda y) = (1-\lambda)T(x) + \lambda T(y)$ olduğundan bir doğru parçasının görüntüsü yine doğru parçasıdır. Kare paralelkenara, disk elipse dönüşür; her ikisi de konveks kalır. Ters görüntü $T^{-1}(D)$ için de aynı sonuç geçerlidir.

İspat.

$y_1, y_2 \in T(C)$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. $y_1 = T(x_1)$ ve $y_2 = T(x_2)$ olacak biçimde $x_1, x_2 \in C$ vardır. Böylece lineerlik ile

$$(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 = (1-\lambda)T(x_1) + \lambda T(x_2) = T\left(\underbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}_{\in C}\right) \in T(C)$$

doğru olur.

■

Alıştırma 7.1 (Ters Görüntünün Konveksliği). $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineer dönüşüm ve $D \subseteq \mathbb{R}^m$ konveks olsun. Bu durumda $T^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n : T(x) \in D\}$ ters görüntü kümesinin $\mathbb{R}^n$ 'de konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$x_1, x_2 \in T^{-1}(D)$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. O hâlde $T(x_1), T(x_2) \in D$ olur. Lineerlik nedeniyle

$$T\left((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2\right) = (1-\lambda)T(x_1) + \lambda T(x_2)$$

yazılır; D konveks olduğundan sağ taraf D 'ye aittir. Bu ise $(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in T^{-1}(D)$ demektir.

Tanım 7.1 (Afin Dönüşüm). $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümüne, her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$F\left((1-\lambda)x + \lambda y\right) = (1-\lambda)F(x) + \lambda F(y)$$

gerçekliyorsa **afin dönüşüm** denir.

Her lineer dönüşüm bir afin dönüşümdür; bu, lineerliğin doğrudan bir sonucudur. Tersisi ise doğru değildir: sabit bir öteleme afindir ama $F(0) = 0$ koşulunu sağlamadığı sürece lineer değildir. Aşağıdaki iki sonuç, aradaki farkın tam olarak bir ötelemeden ibaret olduğunu gösterir.

Lemma 7.1 (Orijini Sabitleyen Afin Dönüşüm Lineerdir). $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ afin dönüşümü için $F(0) = 0$ ise F bir lineer dönüşümdür.

İspat.

F bir afin dönüşüm olmak üzere $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$F(\alpha x) = F(\alpha x + (1 - \alpha) \cdot 0) = \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(0) = \alpha F(x)$$

gerçeklenir. Şimdi $x, y \in \mathbb{R}^n$ olsun:

$$\begin{aligned} F(x + y) &= F\left(2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) + (-1) \cdot 0\right) = 2F\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) + (-1)F(0) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2}F(x) + 2 \cdot \frac{1}{2}F(y) = F(x) + F(y) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla F bir lineer dönüşüm olur.

■

Teorem 7.5 (Afin Dönüşümlerin Yapısı). $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm ve $a \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ şeklinde tanımlanmış her afin dönüşüm $F(x) = T(x) + a$ biçimindedir.

İspat.

F bir afin dönüşüm olsun. $a := F(0) \in \mathbb{R}^m$ ve $T(x) := F(x) - a$ seçilirse T dönüşümü de afin bir dönüşüm olur (sabit bir vektörün çıkarılması afinliği bozmaz). Öte yandan $T(0) = F(0) - a = 0$ geçerlidir. Bu durumda [Lemma 7.1](#) nedeniyle T bir lineer dönüşümdür; dolayısıyla $F(x) = T(x) + a$ biçimindedir. Tersine, $a \in \mathbb{R}^m$ ve T lineer dönüşüm olmak üzere $F(x) = T(x) + a$ ise $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} F((1 - \lambda)x + \lambda y) &= T((1 - \lambda)x + \lambda y) + a = (1 - \lambda)T(x) + \lambda T(y) + a \\ &= (1 - \lambda)(F(x) - a) + \lambda(F(y) - a) + a = (1 - \lambda)F(x) + \lambda F(y) \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla F bir afin dönüşümdür.

■

İ Sonuç

Bir $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümünün afin olması için gerek ve yeter koşul, $T(x) = F(x) - F(0)$ şeklinde tanımlanmış $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümünün lineer olmasıdır. Buradan, afin dönüşümlerin de konveksliği koruduğu çıkar: öteleme konveksliği bozmaz.

Teorem 7.6 (Kapanışın Konveksliği). $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks ise $\overline{C}$ kümesi de konvektir.

İspat.

$x, y \in \overline{C}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Elemanları C kümesinde olan öyle $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$ dizileri vardır ki $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ gerçekleşir. C konveks olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için $(1 - \lambda)x_k + \lambda y_k \in C$ 'dir. Limite geçilirse

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ((1 - \lambda)x_k + \lambda y_k) = (1 - \lambda)x + \lambda y \in \overline{C}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\overline{C}$ kapanış kümesi konvektir.

■

Teorem 7.7 (İç Kümenin Konveksliği). $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks ise $\text{int}(C)$ kümesi de konvektir.

İspat.

$x, y \in \text{int}(C)$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Bu durumda $B(x, r_1) \subset C$ ve $B(y, r_2) \subset C$ gerçekleyen $r_1, r_2 > 0$ sayıları vardır. $r = \min\{r_1, r_2\}$ olsun. $B((1 - \lambda)x + \lambda y, r) \subset C$ kapsamasının geçerli olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Önce $B((1 - \lambda)x + \lambda y, r) = B(x, r) + \lambda(y - x)$ olduğunu gösterelim:

$$z \in B((1-\lambda)x + \lambda y, r) \Leftrightarrow \text{parallel} z - ((1-\lambda)x + \lambda y) \text{parallel} < r \Leftrightarrow \text{parallel} \underbrace{z - \lambda(y-x) - x}_{=:t} \text{parallel} < r$$

$$\Leftrightarrow t \in B(x, r) \Leftrightarrow z - \lambda(y-x) \in B(x, r) \Leftrightarrow z \in B(x, r) + \lambda(y-x)$$

olduğundan eşitlik doğrudur.

Şimdi $w \in B((1-\lambda)x + \lambda y, r)$, dolayısıyla $w \in B(x, r) + \lambda(y-x)$ olsun. Bu durumda $w = w_1 + \lambda(y-x)$ olacak biçimde bir $w_1 \in B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset C$ vardır.

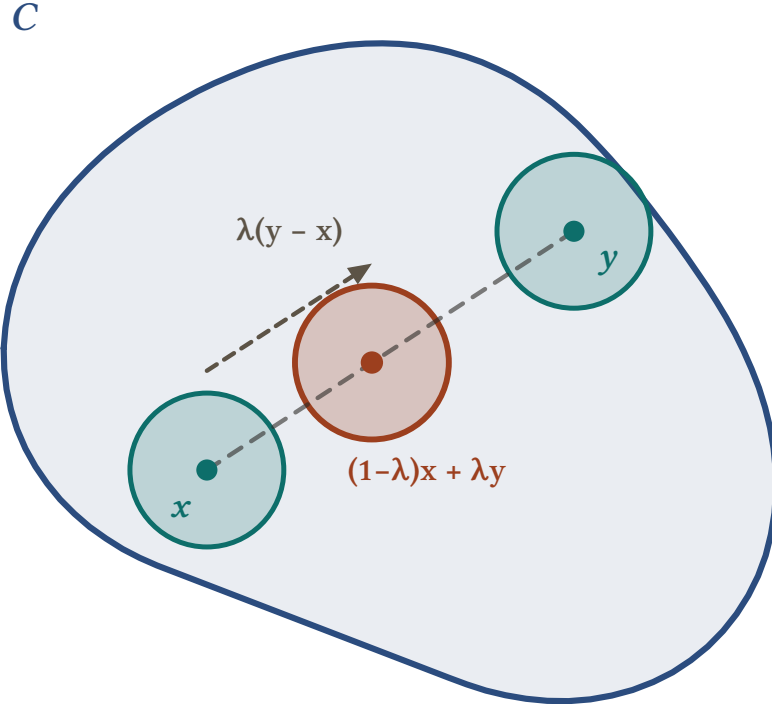
Benzer bir hesaplama $B(x, r) + (y-x) = B(y, r)$ olduğu da gözlenir:

$$z \in B(y, r) \Leftrightarrow \|z - y\| < r \Leftrightarrow \text{parallel} \underbrace{z - (y-x) - x}_{=:t} \text{parallel} < r \Leftrightarrow z \in B(x, r) + (y-x).$$

Bu durumda $w_1 + (y-x) \in B(x, r) + (y-x) = B(y, r) \subset C$ geçerlidir. C konveks olduğundan

$$w = w_1 + \lambda(y-x) = \underbrace{(1-\lambda)w_1}_{\in C} + \lambda \underbrace{(w_1 + (y-x))}_{\in C} \in C$$

yani $w \in C$ elde edilir. Böylece $B((1-\lambda)x + \lambda y, r) \subset C$ kapsaması geçerli olur.



Şekil 7.3: int C kümesinin konveksliğinin ispatındaki fikir. x ve y iç noktaysa, her ikisinin de yarıçapı r olan bir yuvarı C 'de kalır. Aradaki noktanın yuvarı $B(x, r)$ yuvarının $\lambda(y-x)$ kadar ötelenmişidir ve C konveks olduğundan bu öteleme de C 'nin içinde kalır; dolayısıyla ara nokta da bir iç noktadır.

■

7.2 Göreli İç

Konveks bir kümenin içi boş olabilir: düzlemde bir doğru parçasının hiçbir iç noktası yoktur, çünkü her komşuluğu doğrunun dışına taşar. Oysa aynı doğru parçasına **kendi** afin örtüsü içinden bakıldığında

uç noktaları dışındaki her noktası içeridedir. Bu ayrımı yakalayan kavram, komşuluğun tamamı yerine yalnızca afin örtü ile kesişimini kullanır.

Tanım 7.2 (Görelî İç). $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olmak üzere

$$\text{ri}(C) = \{ x \in C : \exists \varepsilon > 0 \text{ öyle ki } B(x, \varepsilon) \cap \text{aff}(C) \subseteq C \}$$

kümesine C kümesinin **görelî içi** denir.

İç nokta tanımından tek fark, $B(x, \varepsilon)$ komşuluğunun tamamının değil, yalnızca $\text{aff}(C)$ ile kesişiminin C içinde kalmasının istenmesidir. Dolayısıyla daima

$$\text{int}(C) \subseteq \text{ri}(C) \subseteq C \subseteq \overline{C}$$

kapsamaları geçerlidir. $\dim(C) = n$, yani $\text{aff}(C) = \mathbb{R}^n$ olduğunda iki kavram çakışır; boyut düştüğünde ise $\text{int}(C)$ boşalırken $\text{ri}(C)$ boş kalmaz. Nitekim boştan farklı her konveks kümenin görelî içi boş değildir – konveks kümelerde “kalınlık” ancak bulunduğu uzaya göre kaybolur, kendi afin örtüsüne göre değil.

Örnek 7.1 (İçî Boş, Görelî İçî Dolu Bir Küme). $\mathbb{R}^3$ uzayında xy -düzlemine oturan

$$C = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

birim diski için $\text{int}(C)$ ve $\text{ri}(C)$ kümelerini belirleyiniz.

Çözüm.

Bir $(x, y, 0) \in C$ noktasının $\mathbb{R}^3$ uzayındaki her $B((x, y, 0), \varepsilon)$ komşuluğu üçüncü bileşeni sıfırdan farklı noktalar içerir ve bunların hiçbirisi C kümesinde değildir. Dolayısıyla hiçbir nokta iç nokta olamaz:

$$\text{int}(C) = \emptyset.$$

Öte yandan $\text{aff}(C) = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$, yani xy -düzlemidir. Komşuluk bu düzlemle kesiştirildiğinde geriye düzlem içinde bir disk kalır ve $x^2 + y^2 < 1$ olan her nokta için yeterince küçük ε bu diski C içinde tutar; buna karşılık $x^2 + y^2 = 1$ olan noktalarda komşuluk çemberin dışına taşar. Böylece

$$\text{ri}(C) = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 < 1\}$$

bulunur. Küme $\mathbb{R}^3$ içinde “ince” olduğundan içî boştur, ama kendi düzlemine göre bakıldığında kalınlığını korur.

Bu araçlarla artık ters yönde bir soru sorabiliriz: verilen herhangi bir kümeyi kapsayan **en küçük** konveks küme nedir? Bir sonraki haftanın konusu budur.

8. Konveks Örtü ve Carathéodory Teoremi

Konveks olmayan bir kümeyi konveks yapmanın en ekonomik yolu, onu kapsayan en küçük konveks kümeyi almaktır. Bu haftada konveks örtüyü tanımlıyor, onun tam olarak kümenin elemanlarının konveks kombinasyonlarından oluştuğunu gösteriyor ve Carathéodory teoremiyle bu kombinasyonlarda kaç noktanın yeterli olduğunu belirliyoruz: uzayın boyutu n ise $n + 1$ nokta her zaman yeter.

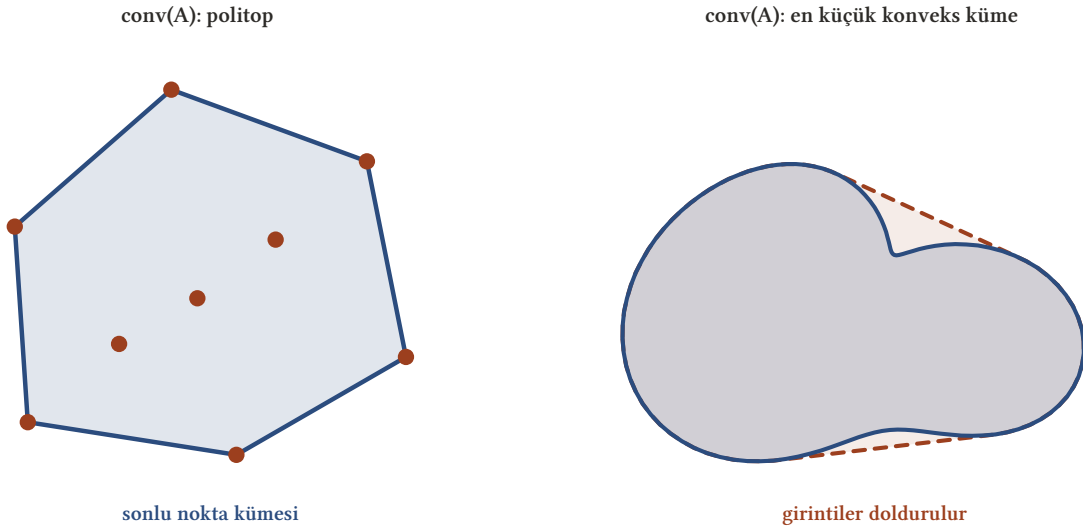
8.1 Konveks Örtü

Konveks kümelerin kesişimi yine konveks olduğundan, bir kümeyi kapsayan bütün konveks kümeleri kesiştirmek anlamlı bir işlemdir; sonuç, o kümeyi kapsayan en küçük konveks küme olur.

Tanım 8.1 (Konveks Örtü). Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine, yani I herhangi bir indis kümesi olmak üzere

$$\bigcap_{i \in I} \{A_i : \text{her } i \in I \text{ için } A_i \text{ konveks ve } A \subseteq A_i\}$$

kesişim kümesine A kümesinin **konveks örtüsü** veya **konveks zarfı** denir ve bu küme $\text{conv}(A)$ ile gösterilir.



Şekil 8.1: Konveks örtü $\text{conv}(A)$, A 'yı kapsayan bütün konveks kümelerin kesişimi — yani A 'yı kapsayan **en küçük** konveks kümedir. Solda sonlu bir nokta kümesinin etrafına gerilen lastik bir politop verir; sağda girintili bir bölgenin çukurları doldurulur. $\text{conv}(A)$, A elemanlarının bütün konveks kombinasyonlarının kümesine eşittir.

Teorem 6.2 nedeniyle $\text{conv}(A)$ konvekstir; dolayısıyla A kümesini kapsayan **en küçük** konveks kümedir. Daima $A \subseteq \text{conv}(A)$ geçerlidir; A konveks bir küme ise $\text{conv}(A) \subseteq A$ gerçekleşeceğinden $\text{conv}(A) = A$ elde edilir.

Teorem 8.1 (Konveks Kümeler Bütün Konveks Kombinasyonları İçerir). $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul, elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarını içermesidir.

İspat.

İspat, Teorem 4.1 ile birebir aynı tümevarımdır; tek fark katsayıların negatif olmamasının korunmasıdır. Yeterlilik yönü açıktır. Gereklik için C konveks olsun ve C 'nin $m - 1$ tane elemanının konveks kombinasyonlarını içerdiğini kabul edelim. $x_1, \dots, x_m \in C$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ verilsin. Eğer $\lambda_m = 1$ ise diğer katsayılar sıfırdır ve toplam $x_m \in C$ 'ye eşittir. Aksi hâlde $1 - \lambda_m > 0$ olup

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = (1 - \lambda_m) \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_m} x_i \right)}_{=: y} + \lambda_m x_m$$

yazılır. Burada $\lambda_i / (1 - \lambda_m) \geq 0$ ve bunların toplamı 1 olduğundan y , C 'nin $m - 1$ elemanının bir konveks kombinasyonudur; hipotez gereği $y \in C$ 'dir. C konveks ve $0 \leq \lambda_m \leq 1$ olduğundan $(1 - \lambda_m)y + \lambda_m x_m \in C$ bulunur.

■

Bundan sonra bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının kümesini $K(A)$ ile göstereceğiz. $K(A)$ konvekstir ve $A \subseteq K(A)$ 'dır; bir A kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul $A = K(A)$ olmasıdır.

Teorem 8.2 (Konveks Örtünün İçeriği). $A \subset \mathbb{R}^n$ için $\text{conv}(A) = K(A)$ geçerlidir.

İspat.

İspat Teorem 4.2 ile aynı akışı izler. $K(A)$ konveks ve A 'yı kapsayan bir küme olduğundan $\text{conv}(A) \subseteq K(A)$ olur. Tersine $\text{conv}(A)$ konveks olduğundan Teorem 8.1 nedeniyle elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarını içerir; $A \subseteq \text{conv}(A)$ olduğundan özel olarak $K(A) \subseteq \text{conv}(A)$ elde edilir.

■

Böylece bir kümenin konveks olması için gerek ve yeter koşul $A = \text{conv}(A)$ olmasıdır.

Örnek 8.1 (İki Konveks Örtü). Aşağıdaki konveks örtüleri belirleyiniz: (1) $\mathbb{R}^2$ 'de aynı doğru üzerinde bulunmayan üç noktanın konveks örtüsü, (2) birim çemberin konveks örtüsü.

Çözüm.

1. Teorem 8.2 gereği $\text{conv}\{v_1, v_2, v_3\}$ kümesi, $\lambda_i \geq 0$ ve $\sum \lambda_i = 1$ olmak üzere $\sum \lambda_i v_i$ noktalarının kümesidir. Katsayılar afin örtüdekilerle aynıdır, üstelik negatif olmama koşuluyla sınırlanmıştır; bu da afin örtü olan düzlemden yalnızca köşeleri v_1, v_2, v_3 olan kapalı üçgensel bölgeyi seçer.

2. $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ olsun. Kapalı birim yuvar konveks olduğundan ve S kümesini kapsadığından $\text{conv}(S) \subseteq \overline{B(0, 1)}$ geçerlidir. Ters yönde, $\|x\| \leq 1$ olan bir x noktasından geçen herhangi bir doğru çemberi iki noktada keser ve x bu iki noktanın konveks kombinasyonudur; dolayısıyla $x \in \text{conv}(S)$ olur. Sonuçta

$$\text{conv}(S) = \overline{B(0, 1)}$$

elde edilir. Dikkat edilirse burada Carathéodory teoreminin izin verdiği $n + 1 = 3$ nokta yerine 2 nokta yetmiştir: teorem bir üst sınır verir, her noktada gerçekten gereken sayıyı değil.

Tanım 8.2 (Kapalı Konveks Örtü). $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm kapalı ve konveks kümelerin kesişimine C kümesinin **kapalı konveks örtüsü** denir ve bu küme $\overline{\text{conv}}(C)$ ile gösterilir.

Önerme 8.1 (Kapalı Konveks Örtü ile Kapanış). $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ için $\overline{\text{conv}}(C) = \overline{\text{conv}(C)}$ geçerlidir.

İspat.

$\text{conv}(C)$ kümesi C kümesini içeren kapalı ve konveks bir kümedir — konvekslik Teorem 7.6'ten gelir. Dolayısıyla $\overline{\text{conv}}(C) \subseteq \overline{\text{conv}(C)}$ kapsamı geçerlidir.

Öte yandan, tanımı gereği $\overline{\text{conv}}(C)$ kümesi C 'yi kapsayan bir konveks küme olduğundan $\text{conv}(C) \subseteq \overline{\text{conv}}(C)$ kapsamı geçerlidir. Bu kapsamada her tarafın kapanışı alınır ve $\overline{\text{conv}}(C)$ kümesinin kapalı olduğuna dikkat edilirse

$$\overline{\text{conv}}(C) \subseteq \overline{\overline{\text{conv}}(C)} = \overline{\text{conv}}(C)$$

elde edilir.

■

8.2 Carathéodory Teoremi

Konveks örtü, tanımı gereği **sonsuz** çok noktanın kombinasyonlarını içerebilir. Carathéodory teoremi, uzayın boyutunun bu sayıya kesin bir üst sınır koyduğunu söyler.

Teorem 8.3 (Carathéodory Teoremi). $A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun. $\text{conv}(A)$ kümesinin herhangi bir elemanı, A kümesinin $n + 1$ 'den daha fazla olmayan sayıdaki elemanının konveks kombinasyonu şeklinde yazılabilir.

İspat.

$x \in \text{conv}(A) = K(A)$ olsun; dolayısıyla $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ sayıları ve $x_i \in A$ noktaları için $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ yazılabilir. Bu yazılıştan $m > n + 1$, dolayısıyla $m - 1 > n$ olsun.

$\mathbb{R}^n$ uzayında en fazla n tane vektörün lineer bağımsız olabileceği bilgisi kullanılırsa, $m - 1$ tane olan

$$x_1 - x_m, x_2 - x_m, \dots, x_{m-1} - x_m$$

vektörlerinin lineer bağımlı olmak zorunda olduğu sonucu elde edilir. Bu ise hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$ sayıları için

$$\alpha_1(x_1 - x_m) + \dots + \alpha_{m-1}(x_{m-1} - x_m) = 0 \quad (*)$$

eşitliğinin sağlanmasını gerektirir. $\alpha_m := -\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i$ denirse $(*)$ eşitliğinden

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i - \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \right) x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i x_i + \alpha_m x_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$$

elde edilir. Böylece her $t \in \mathbb{R}$ için

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i - t \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^m (\lambda_i - t \alpha_i) x_i$$

yazılabilir. Şimdi amacımız, her i için $\lambda_i - t_0 \alpha_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^m (\lambda_i - t_0 \alpha_i) = 1$ olacak, üstelik en az bir katsayıyı sıfır yapacak bir $t_0 \in \mathbb{R}$ bulmaktır.

α_i 'lerin hepsi birden sıfır değil ve $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$ olduğundan, α_i 'lerden en az biri pozitifdir; böylece $I := \{i : \alpha_i > 0\}$ indis kümesi boş değildir. Dolayısıyla

$$t_0 := \frac{\lambda_{i_0}}{\alpha_{i_0}} := \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} : i \in I \right\} \geq 0$$

sayısı iyi tanımlıdır. Bu şekilde belirlenen t_0 için:

- $i \in I$ ise $\lambda_i - t_0 \alpha_i = \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\alpha_i} - t_0 \right) \geq 0$; özel olarak $i = i_0$ için $\lambda_{i_0} - t_0 \alpha_{i_0} = 0$,
- $i \notin I$ ise $\alpha_i \leq 0$ ve $t_0 \geq 0$ olduğundan $\lambda_i - t_0 \alpha_i \geq 0$ olur.

Ayrıca

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_i - t_0 \alpha_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i - t_0 \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 - t_0 \cdot 0 = 1$$

gerçeklenir. Sonuçta $x = \sum_{i=1}^m (\lambda_i - t_0 \alpha_i) x_i$ noktası, A kümesinin noktalarının bir konveks kombinasyonudur ve en az bir i_0 için katsayı sıfır olduğundan x noktası A kümesinin $m - 1$ tane elemanının konveks kombinasyonu şeklinde yazılmış olur.

Eğer $m - 1 = n + 1$ ise ispat biter; $m - 1 > n + 1$ ise ispatın başındaki m yerine $m - 1$ yazılarak aynı işlemler tekrar edilir. Bu indirgeme, konveks kombinasyondaki eleman sayısı $n + 1$ olana kadar devam ettirilebilir.

■

Teorem 8.4 (Kompakt Kümenin Konveks Örtüsü). $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi kompakt ise $\text{conv}(C)$ kümesi de kompakttır.

İspat.

C kompakt, yani kapalı ve sınırlı bir küme ve $x \in \text{conv}(C)$ olsun.

Sınırlılık. Carathéodory teoremi nedeniyle $x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i$ olacak biçimde $x_i \in C$ noktaları ve $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$ sağlayan $0 \leq \alpha_i \leq 1$ sayıları vardır. C sınırlı olduğundan her i için $\|x_i\| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ vardır. Böylece

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \|x_i\| \leq M \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = M$$

nedeniyle $\text{conv}(C)$ kümesi sınırlı olur.

Kapalılık. $\text{conv}(C)$ kümesinden yakınsak bir $\{x_k\}$ dizisi alalım ve $x_k \rightarrow x_0$ olsun. Carathéodory teoremi nedeniyle her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ki} x_{ki} \quad (2)$$

olacak biçimde $x_{k1}, \dots, x_{k(n+1)} \in C$ noktaları ve $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{ki} = 1$ sağlayan $\alpha_{ki} \geq 0$ sayıları vardır. $\{\alpha_{ki}\}$ dizileri $[0, 1]$ aralığında, $\{x_{ki}\}$ dizileri ise sınırlı C kümesinde kaldıklarından sınırlıdır; Bolzano-Weierstrass teoremi nedeniyle yakınsak alt dizilere sahiptirler. Genelliği bozmaksızın bu yakınsak dizileri elimizdeki diziler olarak alalım. C kompakt, dolayısıyla kapalı olduğundan $x_{ki} \rightarrow x_{0i}$ olacak şekilde $x_{0i} \in C$ noktaları vardır; ayrıca $\alpha_{ki} \rightarrow \alpha_{0i} \geq 0$ ve limitte $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{0i} = 1$ olur. Şimdi (2) eşitliğinde $k \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{0i} x_{0i}$$

elde edilir. Böylece x_0 noktası C kümesindeki $n + 1$ tane noktanın bir konveks kombinasyonu olarak yazılabildiğinden $\text{conv}(C)$ kümesine aittir; yani $\text{conv}(C)$ kapalıdır.

Hem sınırlı hem kapalı olduğundan $\text{conv}(C)$ kompakttır.

■

Carathéodory teoremi, görünüşte sonsuz bir işlemi sonlu bir işleme indirger. Aynı sonlu boyut fikrinin iki güçlü akrabası — Radon ve Helly teoremleri — bir sonraki haftanın konusudur.

9. Radon ve Helly Teoremleri

Bu haftanın iki teoremi de aynı basit gözlemden beslenir: $\mathbb{R}^n$ uzayında n taneden fazla vektör lineer bağımsız olamaz. Radon teoremi bunu bir nokta kümesini ikiye ayırmak, Helly teoremi ise konveks kümelerden oluşan bir ailenin ortak noktasının varlığını göstermek için kullanır. Haftanın sonunda konveks kümelerin köşe yapısına bakıyoruz: köşe noktaları, politoplar ve simpleksler.

9.1 Radon Teoremi

Radon teoremi, düzlemde dört noktanın – daha genel olarak $\mathbb{R}^n$ 'de $n + 2$ noktanın – hiçbir zaman “dağınık” duramayacağını söyler: nokta kümesi daima, konveks örtüleri kesişen iki parçaya bölünebilir.

Teorem 9.1 (Radon Teoremi). $C = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ 'de sonlu noktalı herhangi bir küme olsun. Eğer $r \geq n + 2$ ise C kümesi, $\text{conv}(C_1) \cap \text{conv}(C_2) \neq \emptyset$ sağlanacak biçimde ayrık iki C_1 ve C_2 alt kümesine parçalanabilir.

İspat.

$r \geq n + 2$ olduğundan Teorem 5.3 gereği C kümesi afin bağımlıdır: $r - 1 \geq n + 1$ tane fark vektörü $\mathbb{R}^n$ 'de lineer bağımsız olamaz. Bu durumda hepsi birden sıfır olmayan öyle $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sayıları vardır ki

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Toplamları sıfır olup hepsi birden sıfır olmadığından, bu α_i sayılarının en az biri pozitif ve en az biri negatiftir. Dolayısıyla, genelliği bozmaksızın $1 \leq k < r$ sağlayan bir k için

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0, \quad \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_r < 0$$

gerçeklendiğini kabul edebiliriz. Öte yandan α_i 'lerin toplamı 0 olduğundan

$$\alpha := \alpha_1 + \dots + \alpha_k = -(\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_r)$$

şeklinde tanımlanan α sayısı pozitiftir. Şimdi aşağıdaki biçimde tanımlanmış x noktasını göz önüne alalım:

$$0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + \sum_{i=k+1}^r \alpha_i x_i \Rightarrow x := \sum_{i=1}^k \frac{\alpha_i}{\alpha} x_i = \sum_{i=k+1}^r \left(-\frac{\alpha_i}{\alpha}\right) x_i.$$

Sol taraftaki katsayılar negatif değildir ve toplamları 1'dir; sağ taraftaki katsayılar da pozitiftir ve toplamları 1'dir. Böylece x noktası hem $x_1, \dots, x_k$ noktalarının hem de $x_{k+1}, \dots, x_r$ noktalarının bir konveks kombinasyonudur; yani

$$x \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \cap \text{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_r\}.$$

$C_1 := \{x_1, \dots, x_k\}$ ve $C_2 := \{x_{k+1}, \dots, x_r\}$ kümeleri tanımlırsa $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ ve $\text{conv}(C_1) \cap \text{conv}(C_2) \neq \emptyset$ gerçekleşir.

■

Örnek 9.1 (Düzlemde Dört Nokta). $\mathbb{R}^2$ uzayında dört nokta verildiğinde ($n = 2, r = 4 = n + 2$) Radon parçalanışının hangi biçimleri alabileceğini inceleyiniz.

Çözüm.

İki durum vardır.

Dördü de dışbükey konumdaysa, yani hiçbir diğeri üçünün oluşturduğu üçgenin içinde değilse, noktalar bir dörtgenin köşeleridir. Parçalanış köşegenlere göre yapılır: C_1 bir köşegenin iki ucu, C_2 diğeri köşegenin iki ucu alınır. Bu durumda $\text{conv}(C_1)$ ile $\text{conv}(C_2)$ kümeleri köşegenlerin kendisidir ve dışbükey bir dörtgenin köşegenleri kesiştiğinden

$$\text{conv}(C_1) \cap \text{conv}(C_2) \neq \emptyset$$

gerçeklenir.

Biri diğer üçünün üçgeninin içindeyse o nokta tek başına C_1 , kalan üç nokta C_2 olarak alınır. Bu kez $\text{conv}(C_1)$ tek noktalı, $\text{conv}(C_2)$ ise üçgensel bölgedir; nokta üçgenin içinde bulunduğundan kesişim yine boş değildir.

Üç nokta ile aynıısını yapmak mümkün değildir: bir üçgenin köşelerini iki gruba ayırdığımızda gruplardan biri tek nokta, diğeri bir kenar olur ve bir köşe karşı kenarın üzerinde bulunmaz. Radon teoremindeki $r \geq n + 2$ koşulu bu nedenle keskindir.

9.2 Helly Teoremi

Radon teoreminin en ünlü sonucu, konveks kümelerden oluşan bir ailenin ortak noktasının varlığını yalnızca **küçük** alt ailelere bakarak garanti eden Helly teoremidir.

Teorem 9.2 (Helly Teoremi). $C_1, \dots, C_r \subset \mathbb{R}^n$, $r \geq n + 1$ ve her $i = 1, \dots, r$ için C_i kümeleri konveks olsun. Eğer bu konveks kümelerden herhangi $n + 1$ tanesinin kesişimi boş değil ise $\bigcap_{i=1}^r C_i \neq \emptyset$ gerçeklenir.

İspat.

İspatı r üzerinden tümevarım ile yapalım. Eğer $r = n + 1$ ise kanıtlanacak bir şey yoktur. Şimdi $r - 1 \geq n + 1$ olmak üzere hipotezin $r - 1$ tane konveks küme için doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $1 \leq i \leq r$ için, i . kümeyi dışarıda bırakan $r - 1$ tanelik aileye tümevarım hipotezi uygulanarak

$$x_i \in C_1 \cap \dots \cap C_{i-1} \cap C_{i+1} \cap \dots \cap C_r$$

gerçekleyen bir x_i noktası bulunur.

$r \geq n + 2$ olduğundan $S := \{x_1, \dots, x_r\}$ kümesine Radon teoremini uygulayarak $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ve $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$ sağlayan S_1 ve S_2 kümelerini elde edebiliriz. Genelliği kaybetmeksizin $1 \leq k < r$ olmak üzere $S_1 := \{x_1, \dots, x_k\}$ ve $S_2 := \{x_{k+1}, \dots, x_r\}$ varsayabiliriz. $\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset$ nedeniyle var olan

$$x \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \cap \text{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_r\}$$

noktasının her $i = 1, \dots, r$ için $x \in C_i$ olduğunu gösterelim. Gerçekten de $i \leq k$ olduğunda $x_i \in C_{k+1} \cap \dots \cap C_r$ geçerlidir. C_i 'ler konveks olduğundan konveks kombinasyonlar da bu kesişimde kalır:

$$x \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_k\} \subset C_{k+1} \cap \dots \cap C_r.$$

Benzer biçimde $i \geq k + 1$ olduğunda $x_i \in C_1 \cap \dots \cap C_k$ ve dolayısıyla

$$x \in \text{conv}\{x_{k+1}, \dots, x_r\} \subset C_1 \cap \dots \cap C_k$$

gerçeklenir. Sonuçta $x \in C_1 \cap \dots \cap C_r$ olur; bu ise istenendir.

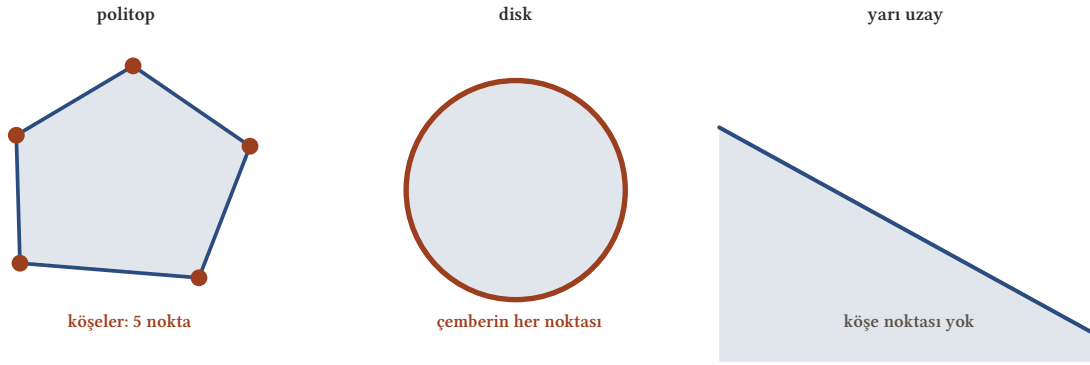
■

9.3 Köşe Noktaları, Politoplar ve Simpleksler

Tanım 9.1 (Köşe Noktası). $M \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme olmak üzere, eğer bir $x \in M$ noktası için

$$x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2, \quad x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2$$

olacak biçimde x_1, x_2 noktaları bulunamıyor ise x noktasına M kümesinin bir **köşe noktası** (uç noktası) denir. Eşdeğer olarak: x , M 'nin içinde kalan hiçbir doğru parçasının iç noktası değildir.



Şekil 9.1: Bir köşe noktası, kümenin başka iki noktasının ortası olarak yazılamayan noktadır. Politopta yalnızca köşeler bu özelliği taşır; diskte çemberin **her** noktası bir köşe noktasıdır; yarı uzayda ise hiç yoktur, çünkü her nokta bir doğru parçasının içinde kalır. Kompakt konveks kümeler köşe noktalarının konveks örtüsüdür.

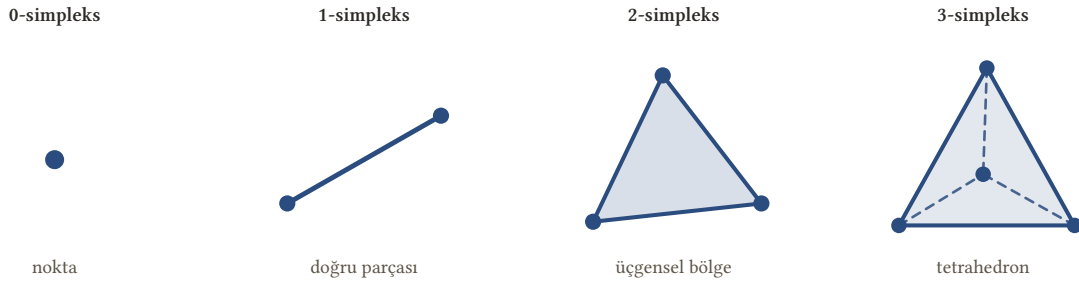
Tanım 9.2 (Politop). Sonlu noktalı bir kümenin konveks örtüsüne bir **politop** denir.

Tanım 9.3 (Simpleks). $x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ noktaları afin bağımsız (yani $x_2 - x_1, \dots, x_{k+1} - x_1$ lineer bağımsız) olmak üzere

$$\text{conv} \{x_1, \dots, x_{k+1}\} = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k+1 \right\}$$

kümesine $\mathbb{R}^n$ 'de $x_1, \dots, x_{k+1}$ köşe noktalı bir k -(**boyutlu**) **simpleks** denir.

Örnek 9.2 (Düşük Boyutlu Simpleksler). 0-simpleks bir noktadır, 1-simpleks bir doğru parçasıdır, 2-simpleks bir üçgensel bölgedir, 3-simpleks bir tetrahedrondur.



Şekil 9.2: k -simpleks, afin bağımsız $k + 1$ noktanın konveks örtüsüdür; boyutu tam olarak k 'dir. Bir nokta ekledikçe boyut bir artar. Simpleksler, Carathéodory teoreminin geometrik karşılığıdır: $\mathbb{R}^n$ 'de bir konveks örtünün her noktası, köşeleri kümeden seçilen bir n -simpleksin içindedir.

Buraya kadar konveks kümelere içeriden baktık. Bir sonraki hafta dışarıdan bakacağız: bir konveks kümeyi çevresinden bir hiperdüzlemle ayırmak.

10. Ayrılabilme Teoremleri

Konveks analizin en güçlü fikri şudur: **konveks bir kümenin dışındaki her nokta, kümeden bir lineer eşitsizlikle ayırt edilebilir**. Bu haftada önce bu iddianın dayanağını kuruyoruz — kapalı konveks bir kümenin dışındaki bir noktaya en yakın nokta vardır ve tektir — sonra bu tek sonuçtan ayırma teoreminin dört farklı biçimini türetiyoruz.

10.1 En Yakın Nokta ve Destek Hiperdüzlemleri

Ayırma teoremlerine giden kapıyı, kümeye **en yakın nokta** kavramı açar. Bu bölümün ilk iki sonucunu ifade edebilmek için önce bir noktanın bir kümeye uzaklığını adlandıralım.

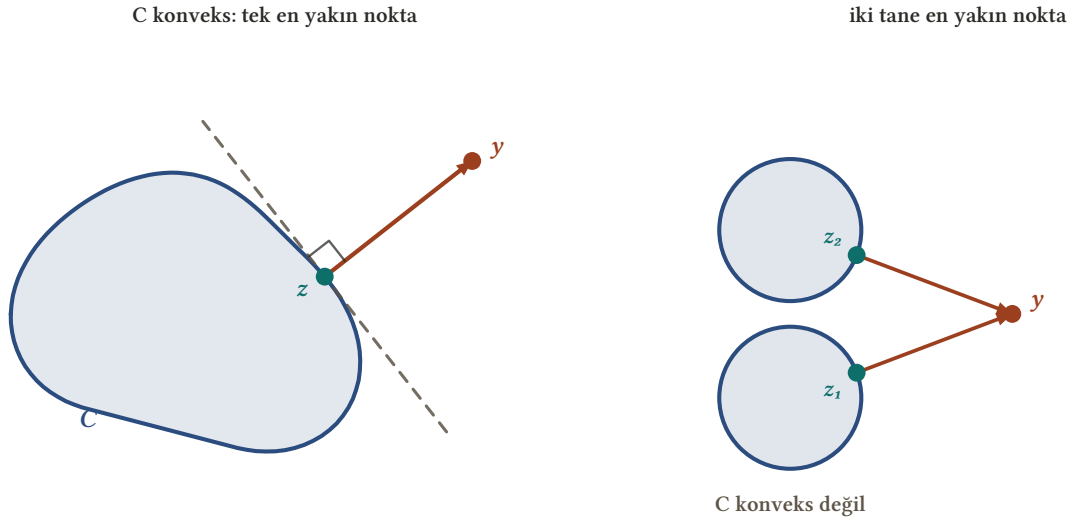
Tanım 10.1 (Bir Noktanın Bir Kümeye Uzaklığı). $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\rho(C, y) := \inf\{\|x - y\| : x \in C\}$$

sayısına y noktasının C kümesine **uzaklığı** denir.

Bu infimumun gerçekten bir noktada alınıp alınmadığı ve alınıyorsa o noktanın tek olup olmadığı, aşağıdaki iki teoremin konusudur.

Teorem 10.1 (En Yakın Noktanın Tekliği). $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme ve $y \notin C$ olsun. Eğer C kümesinin y noktasına en yakın noktası varsa bu nokta tektir; yani $\rho(C, y) = \|z - y\|$ olacak biçimde bir $z \in C$ varsa z tektir.



Şekil 10.1: Kapalı ve konveks bir C kümesinin, dışındaki bir y noktasına en yakın noktası **vardır ve tektir**. İki aday olsaydı ortalarını almak — konvekslik sayesinde C 'de kalan bir nokta — daha kısa bir uzaklık verirdi. Sağdaki küme konveks olmadığından teklik bozulur: iki ayrı en yakın nokta ortaya çıkar. Solda z 'den y 'ye giden vektörün C 'yi destekleyen doğruya dik olduğuna dikkat ediniz.

İspat.

Varsayalım ki $x_1, x_2 \in C$ noktaları $y \notin C$ noktasına en yakın olan iki nokta olsun; yani

$$\rho(C, y) = \|x_1 - y\| \stackrel{(1)}{=} \|x_2 - y\|.$$

C konveks olduğundan $\frac{x_1+x_2}{2} \in C$ olup

$$\rho(C, y) \leq \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} - y \right\| = \frac{1}{2} \text{parallel}(x_1 - y) + (x_2 - y) \text{parallel} \leq \frac{1}{2} (\|x_1 - y\| + \|x_2 - y\|) = \rho(C, y)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Baştaki ve sondaki terimler eşit olduğundan aradaki tüm eşitsizlikler eşitlikler; özellikle

$$\text{parallel}(x_1 - y) + (x_2 - y) \text{parallel} = \|x_1 - y\| + \|x_2 - y\|,$$

yani üçgen eşitsizliğinin eşitlik hâli geçerlidir. Böylece bir $\alpha \geq 0$ için $x_1 - y = \alpha(x_2 - y)$ gerçekleşir. (1) eşitliği nedeniyle $\alpha = 1$, dolayısıyla $x_1 - y = x_2 - y$, buradan da $x_1 = x_2$ bulunur.

■

Teorem 10.2 (En Yakın Noktanın Varlığı). $\emptyset \neq C \subset \mathbb{R}^n$ kapalı küme ve $y \notin C$ olsun. Bu durumda C kümesinin y noktasına en yakın olan bir $a \in C$ noktası vardır.

İspat.

$x_0 \in C$ ve $r > \|x_0 - y\|$ olsun. Bu durumda $C_1 := \overline{B(y, r)} \cap C$ kümesi iyi tanımlıdır: $x_0 \in C_1$ olduğundan C_1 boş değildir ve kapalı bir yuvar ile kapalı bir kümenin kesişimi olduğundan kapalı ve sınırlı, yani kompakttır.

$$C_1 \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \quad x \mapsto \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon C_1 üzerinde sürekli olduğundan [Teorem 3.3](#) gereği mutlak minimum değerini bir $a \in C_1 \subseteq C$ noktasında alır. Dolayısıyla her $x \in C_1$ için $\|x - y\| \geq \|a - y\|$ gerçekleşir. $x \in C$ ve $x \notin C_1$ durumunda ise $\|x - y\| > r$ olur; $r > \|x_0 - y\| \geq \|a - y\|$ olduğundan yine $\|x - y\| > \|a - y\|$ geçerlidir. Böylece a noktası C kümesinin tamamı üzerinde en yakın noktadır.

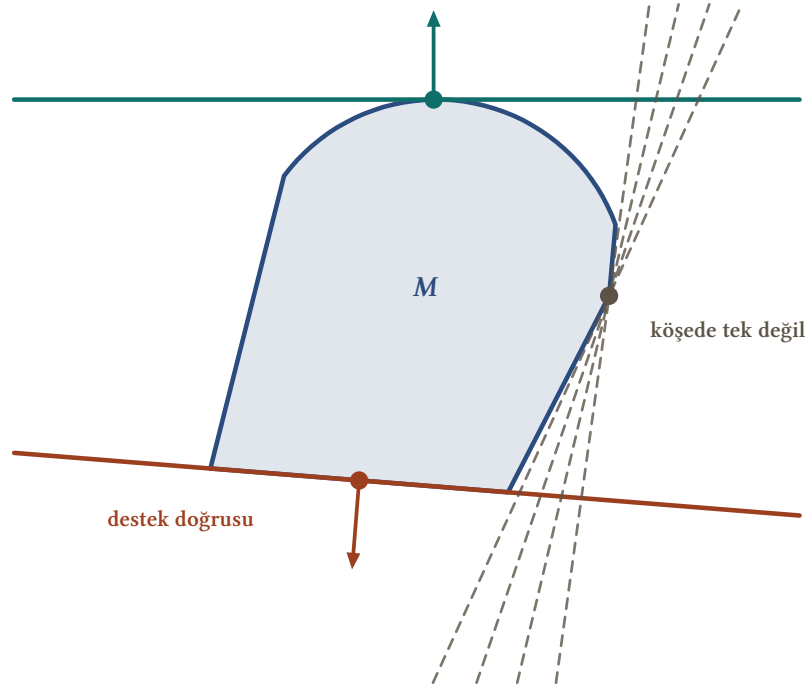
■

! Sonuç

[Teorem 10.1](#) ve [Teorem 10.2](#) nedeniyle, $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks ve kapalı bir küme ve $y \notin C$ ise C kümesinin y noktasına en yakın **tek** bir noktası vardır. Bu nokta, bölümün devamındaki ayırma teoremlerinin çıkış noktasıdır.

Tanım 10.2 (Destek Hiperdüzlemi). Eğer bir $H = \{x : \langle a, x \rangle = b\}$ hiperdüzlemi bir M kümesinin bir sınır noktasını içeriyor ve bu M kümesinin tamamı H hiperdüzleminin bir tarafında kalıyorsa — yani H 'nin doğurduğu yarı uzaylardan yalnızca biri tarafından kapsanıyorsa — H hiperdüzlemi M kümesi için bir **destek hiperdüzlemdir** denir.

Başka bir deyişle, her $m \in M$ için $\langle a, m \rangle \leq b$ ya da $\langle a, m \rangle \geq b$ eşitsizliklerinden biri, eşitlik hâliyle birlikte gerçekleşiyor ise H hiperdüzlemi M kümesini **destekler** denir.



Şekil 10.2: Destek hiperdüzlemi, kümenin bir sınır noktasından geçen ve kümenin tamamını bir yanında bırakan hiperdüzlemdir. Düz kenarda ve düzgün sınır noktasında tektir; köşede ise sonsuz çoktur — kesikli doğruların hepsi kümeyi destekler. Ayırma teoremleri, dışarıdaki bir noktayı kümeden ayıran hiperdüzlemi tam olarak bu şekilde üretir.

Destek hiperdüzlemi, kümeyi “dışarıdan yaslanarak” tanımlar. Bölümün geri kalanında bu fikri, iki kümeyi birbirinden ayıran bir hiperdüzlem üretmek için kullanacağız.

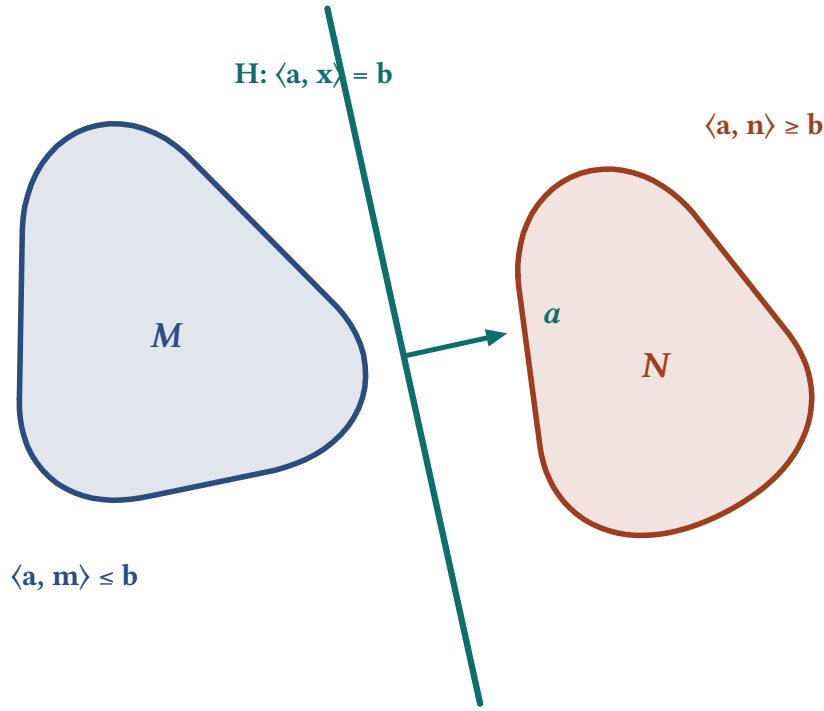
10.2 Bir Hiperdüzlem Ne Zaman Ayırır?

Tanım 10.3 (Ayıran Hiperdüzlem). $M, N \subset \mathbb{R}^n$, $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $m \in M$ ve her $n \in N$ için

$$\langle a, m \rangle \leq b \leq \langle a, n \rangle$$

eşitsizliği gerçekleşiyor ise $H = \{x : \langle a, x \rangle = b\}$ hiperdüzlemi M ve N kümelerini **ayırır** denir.

Dikkat edilirse $M \subset \{x : \langle a, x \rangle \leq b\}$ ve $N \subset \{x : \langle a, x \rangle \geq b\}$ gerçekleştiğinden M ve N kümeleri, H hiperdüzleminin belirlediği iki farklı yarı uzay tarafından kapsanır.



Şekil 10.3: Bir H hiperdüzlemi, M'nin bütün noktalarını $\langle a, x \rangle \leq b$, N'nin bütün noktalarını $\langle a, x \rangle \geq b$ yarı uzayında bırakıyorsa iki kümeyi **ayırır**. Ayırma, iki kümeyi tek bir lineer eşitsizlikle birbirinden ayırt edebilmek demektir; konveks analizin dualite kuramı bu fikrin üzerine kurulur.

Ayırmanın iki derecesi vardır ve aralarındaki fark bu bölümün ana konusudur. [Tanım 10.3](#)'daki eşitsizlikler kümelerin hiperdüzleme değmesine izin verir; aşağıdaki güçlü biçim ise arada pozitif genişlikte bir boşluk bırakır.

Tanım 10.4 (Kesin Ayıran Hiperdüzlem). $M, N \subset \mathbb{R}^n$, $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı için her $m \in M$ ve her $n \in N$ 'de

$$\langle a, m \rangle \leq b - \varepsilon_0 \quad \text{ve} \quad \langle a, n \rangle \geq b$$

eşitsizlikleri gerçekleşiyor ise $H = \{x : \langle a, x \rangle = b\}$ hiperdüzlemi M ve N kümelerini **kesin ayırır** denir.

10.3 Bir Noktayı Konveks Kümeden Ayırmak

Teorem 10.3 (Kapanışın Dışındaki Bir Noktanın Kesin Ayrılması). $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $x_0 \notin \overline{M}$ olsun. Bu durumda öyle bir $a \neq 0$ vektörü ve bir $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır ki her $x \in \overline{M}$ için

$$\langle a, x \rangle \leq \langle a, x_0 \rangle - \varepsilon_0$$

eşitsizliği gerçekleşir.

İspat.

$\overline{M}$ kümesi kapalı ve konvekstir ([Teorem 7.6](#)) ve $x_0 \notin \overline{M}$ olduğundan, x_0 noktasına en yakın olan tek bir $y \in \overline{M}$ noktası vardır. Dolayısıyla her $x \in \overline{M}$ için

$$\|x - x_0\| \geq \|y - x_0\| \quad (*)$$

geçerlidir.

$\overline{M}$ konveks olduğundan $x \in \overline{M}$ ve $0 < \lambda < 1$ için $(1 - \lambda)y + \lambda x \in \overline{M}$ 'dir. (*) eşitsizliğini bu noktaya uygularsak

$$\|y - x_0\|^2 \leq \inf_{x \in \bar{M}} \|y - x\|^2 = \inf_{x \in \bar{M}} \|y - x_0 + \lambda(x - y)\|^2$$

$$= \|y - x_0\|^2 + 2\lambda \langle x - y, y - x_0 \rangle + \lambda^2 \|x - y\|^2$$

gerçeklenir. İki taraftan $\|y - x_0\|^2$ atılıp $\lambda > 0$ ile bölünürse, her $x \in \bar{M}$ ve her $0 < \lambda < 1$ için

$$2\langle x - y, y - x_0 \rangle + \lambda \|x - y\|^2 \geq 0$$

geçerli olur. Burada $\lambda \rightarrow 0^+$ için limite geçilirse her $x \in \bar{M}$ için

$$\langle x - y, y - x_0 \rangle \geq 0 \quad (1)$$

elde edilir.

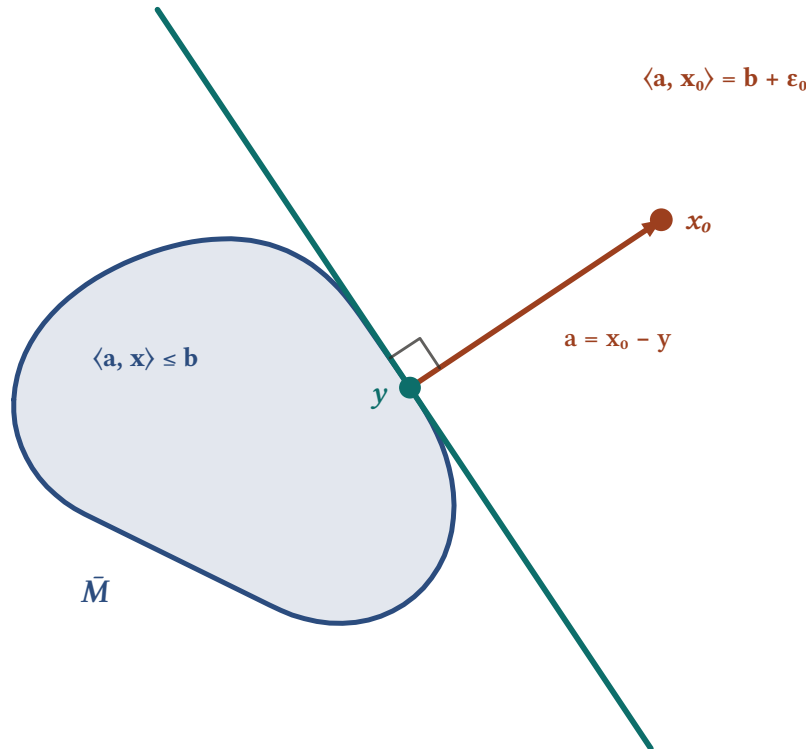
Şimdi $a := x_0 - y$ ve $\varepsilon_0 := \|a\|^2 = \langle a, a \rangle$ diyelim. $x_0 \notin \bar{M}$ olduğundan $a \neq 0$ ve $\varepsilon_0 > 0$ olur. Dolayısıyla (1) eşitsizliği nedeniyle her $x \in \bar{M}$ için

$$\langle x - y, -a \rangle \geq 0 \Leftrightarrow \langle a, x \rangle \leq \langle a, y \rangle = \langle a, x_0 - a \rangle = \langle a, x_0 \rangle - \langle a, a \rangle = \langle a, x_0 \rangle - \varepsilon_0$$

elde edilir. $b := \langle a, x_0 \rangle - \varepsilon_0$ denirse her $x \in \bar{M}$ için

$$\langle a, x \rangle \leq b < \langle a, x_0 \rangle$$

eşitsizlikleri geçerlidir; bu ise $\{x_0\}$ tek nokta konveks kümesi ile M konveks kümesinin $\{x : \langle a, x \rangle = b\}$ hiperdüzlemi tarafından **kesin** ayrıldığı anlamına gelir.



Şekil 10.4: Kapalı konveks bir $\bar{M}$ kümesi ile dışındaki bir x_0 noktası daima **kesin** ayrılır. İspatın kuruluşu şekilde görülüyor: y , x_0 'a en yakın nokta; $a = x_0 - y$ ise ayıran hiperdüzlemin normali. Hiperdüzlem y 'den geçer ve a 'ya diktir; bütün $\bar{M}$ bir yanda kalırken x_0 , $\varepsilon_0 = \|a\|^2$ kadar öte yandadır.

■

Ayrıran hiperdüzlemin nasıl kurulduğuna dikkat ediniz: normal vektör $a = x_0 - y$, yani en yakın noktadan dış noktaya giden vektördür; hiperdüzlem ise y noktasından geçer ve a 'ya diktir. Bu inşa, aynı zamanda $\overline{M}$ için y noktasında bir **destek hiperdüzlemi** verir.

Örnek 10.1 (Bir Noktayı Yuvardan Ayırmak). $\mathbb{R}^2$ uzayında $C = \overline{B(0, 1)}$ kapalı birim yuvarı ile $x_0 = (3, 4)$ noktası verilsin. x_0 noktasını C kümesinden kesin ayıran hiperdüzlemleri belirleyiniz.

Çözüm.

İspattaki reçeteyi izleyelim: önce en yakın nokta, sonra normal vektör, sonra sağ taraf.

$\|x_0\| = \sqrt{9 + 16} = 5 > 1$ olduğundan $x_0 \notin C$ 'dir ve C kümesinin x_0 noktasına en yakın noktası, x_0 doğrultusundaki birim vektördür:

$$y = \frac{x_0}{\|x_0\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right).$$

Normal vektör $a = x_0 - y = \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5} \right)$ olur; yalnızca doğrultusu önemli olduğundan bunun yerine $a = (3, 4)$ almak da serbesttir. Bu a ile her $x \in C$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$\langle a, x \rangle \leq \|a\| \cdot \|x\| \leq 5 \cdot 1 = 5$$

verir; öte yandan $\langle a, x_0 \rangle = 9 + 16 = 25$ 'tir. Dolayısıyla $5 < b < 25$ koşulunu sağlayan her b için

$$H = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 4x_2 = b\}$$

hiperdüzlemi C kümesi ile $\{x_0\}$ kümesini kesin ayırır; bırakılan boşluk $\varepsilon_0 = 25 - b > 0$ olarak okunur. $b = 5$ seçimi ise ayırmayı kesin olmaktan çıkarır: bu hiperdüzlem y noktasında C kümesine değdiği için onun y noktasındaki **destek hiperdüzlemdir**.

Nokta kümenin kapanışında ama kendisinde değilse kesin ayırmayı bekleyemeyiz — hiperdüzlem kümeye değmek zorundadır. Bu durumda da ayırma yine mümkündür:

Teorem 10.4 (Kümeye Ait Olmayan Bir Noktanın Ayrılması). $M \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $x_0 \notin M$ olsun. Bu durumda öyle bir $a \neq 0$ vektörü vardır ki her $x \in M$ için $\langle a, x \rangle \leq \langle a, x_0 \rangle$ olur.

İspat.

Birinci durum: $x_0 \notin \overline{M}$. Bu durumda [Teorem 10.3](#) nedeniyle her $x \in M$ için $\langle a, x \rangle < \langle a, x_0 \rangle$ gerçekleşir ve ispat biter.

İkinci durum: $x_0 \in \overline{M}$ ama $x_0 \notin M$. Bu durumda x_0 noktası $\overline{M}$ kümesinin bir sınır noktasıdır; gerçekten, konveks bir kümenin kapanışı ile kendisinin iç kümeleri çakıştığından x_0 bir iç nokta olamaz. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \notin \overline{M}$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gerçekleyen bir $\{x_n\}$ dizisi vardır.

Bu durumda [Teorem 10.3](#) nedeniyle her $n \in \mathbb{N}$ için, her $x \in M$ 'de

$$\langle a_n, x \rangle \leq \langle a_n, x_n \rangle - \varepsilon_n < \langle a_n, x_n \rangle$$

gerçekleyen bir $a_n \neq 0$ vektörü ve $\varepsilon_n > 0$ sayısı vardır. Eşitsizliğin her iki tarafı $\|a_n\| \neq 0$ ile bölünürse, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in M$ için

$$\left\langle \frac{a_n}{\|a_n\|}, x \right\rangle < \left\langle \frac{a_n}{\|a_n\|}, x_n \right\rangle \quad (2)$$

geçerlidir.

Öte yandan $\left\| \frac{a_n}{\|a_n\|} \right\| = 1$ olduğundan $\left\{ \frac{a_n}{\|a_n\|} \right\}$ dizisi sınırlıdır; Bolzano-Weierstrass teoremi gereği

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k}}{\|a_{n_k}\|} = a \in \mathbb{R}^n$$

olan yakınsak bir alt dizi vardır. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ ve her $x \in M$ için (2) eşitsizliği geçerli olduğundan, $k \rightarrow \infty$ için limite geçildiğinde $-x_{n_k} \rightarrow x_0$ olduğu da kullanılarak — her $x \in M$ için

$$\langle a, x \rangle \leq \langle a, x_0 \rangle$$

bulunur. Dikkat edilirse norm sürekli olduğundan $\|a\| = 1$, dolayısıyla $a \neq 0$ 'dır.

■

10.4 İki Konveks Kümeyi Ayırmak

Bir noktayı ayırabiliyorsak iki kümeyi de ayırabiliriz: fark kümesine geçmek yeterlidir.

Teorem 10.5 (Ayrık İki Konveks Kümenin Ayrılması). $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ konveks kümeler ve $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ olsun. Bu durumda öyle bir $a \neq 0$ vektörü vardır ki her $x_1 \in M_1$ ve her $x_2 \in M_2$ için $\langle a, x_1 \rangle \leq \langle a, x_2 \rangle$ olur.

İspat.

$M := M_1 - M_2$ diyelim; [Sonuç 7.1](#) gereği M konvektir. $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ olduğundan $0 \notin M$ 'dir: aksi hâlde $x_1 = x_2$ olacak biçimde ortak bir nokta bulunurdu.

[Teorem 10.4](#) nedeniyle öyle bir $a \neq 0$ vektörü vardır ki her $x \in M$ için $\langle a, x \rangle \leq \langle a, 0 \rangle = 0$ olur. Öte yandan

$$x \in M = M_1 - M_2 \Leftrightarrow x = x_1 - x_2, \quad x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$$

olduğundan her $x_1 \in M_1$ ve $x_2 \in M_2$ için

$$\langle a, x_1 - x_2 \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle a, x_1 \rangle \leq \langle a, x_2 \rangle$$

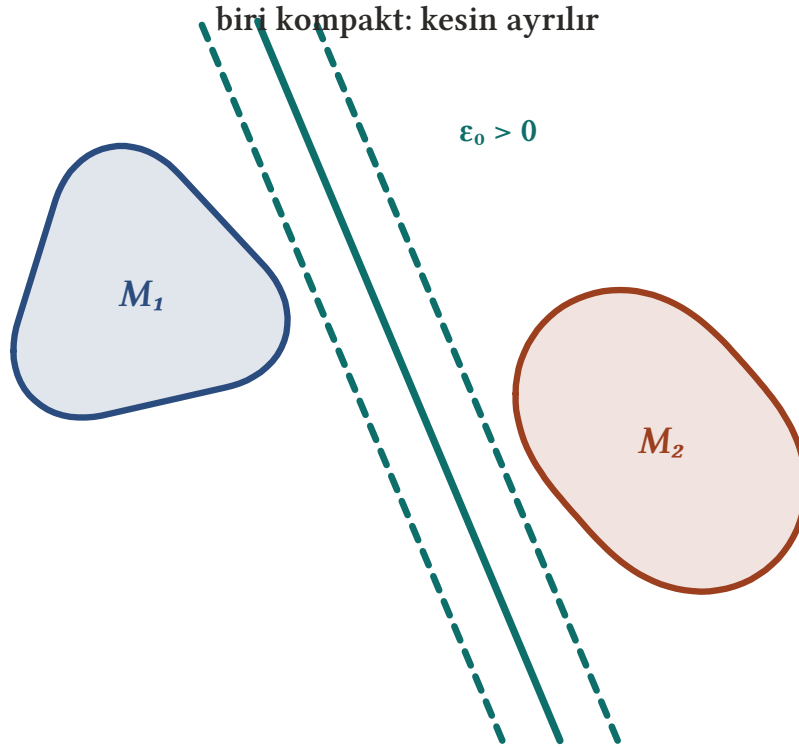
bulunur.

■

Teorem 10.6 (Kompaktlık Altında Kesin Ayırma). $M_1 \subset \mathbb{R}^n$ kompakt konveks küme, $M_2 \subset \mathbb{R}^n$ kapalı konveks küme ve $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ olsun. Bu durumda öyle bir $a \neq 0$ vektörü ve $\varepsilon_0 > 0$ sayısı vardır ki her $x_1 \in M_1$ ve her $x_2 \in M_2$ için

$$\langle a, x_1 \rangle \leq \langle a, x_2 \rangle - \varepsilon_0$$

olur.



Şekil 10.5: M_1 kompakt, M_2 kapalı ve ikisi ayrık olduğunda aralarına pozitif genişlikte bir şerit sığar: ayıran hiperdüzlem hiçbir kümeye değmez ve arada $\varepsilon_0 > 0$ genişliğinde bir boşluk kalır. Kesin ayırmayı sıradan ayırmadan ayıran şey tam olarak bu boşluktur.

İspat.

$M := M_1 - M_2$ diyelim. $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ olduğundan $0 \notin M$ 'dir ve [Sonuç 7.1](#) gereği M konvektir.

M kapalıdır. $\{z_n\}$ dizisi M kümesinde yakınsak ve $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathbb{R}^n$ olsun; $z \in M$ olduğunu gösterelim. $\{z_n\}$ dizisi M kümesinden alındığından, M_1 kümesinde bir $\{x_n\}$ ve M_2 kümesinde bir $\{y_n\}$ dizisi vardır ki $z_n = x_n - y_n$ sağlanır. M_1 kompakt olduğundan $x_{n_k} \rightarrow x \in M_1$ sağlayan yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Dolayısıyla

$$y_{n_k} = x_{n_k} - z_{n_k} \rightarrow x - z$$

geçerlidir. M_2 kapalı olduğundan $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x - z \in M_2$ 'dir. Böylece

$$z = \underbrace{x}_{\in M_1} - \underbrace{(x - z)}_{\in M_2} \in M_1 - M_2 = M$$

gerçeklenir; bu ise M kümesinin kapalı olması demektir.

Ayırma. Şimdi [Teorem 10.3](#) teoremi, kapalı konveks M kümesi ve $x_0 = 0 \notin M = \overline{M}$ için uygulanırsa, öyle bir $\tilde{a} \neq 0$ ve $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $x \in M$ için

$$\langle \tilde{a}, x \rangle \leq \langle \tilde{a}, 0 \rangle - \varepsilon_0 = -\varepsilon_0.$$

$x = x_1 - x_2$ yazılıp $a := \tilde{a}$ alınırsa, her $x_1 \in M_1$ ve $x_2 \in M_2$ için

$$\langle a, x_1 \rangle - \langle a, x_2 \rangle \leq -\varepsilon_0 \Leftrightarrow \langle a, x_1 \rangle \leq \langle a, x_2 \rangle - \varepsilon_0$$

elde edilir.

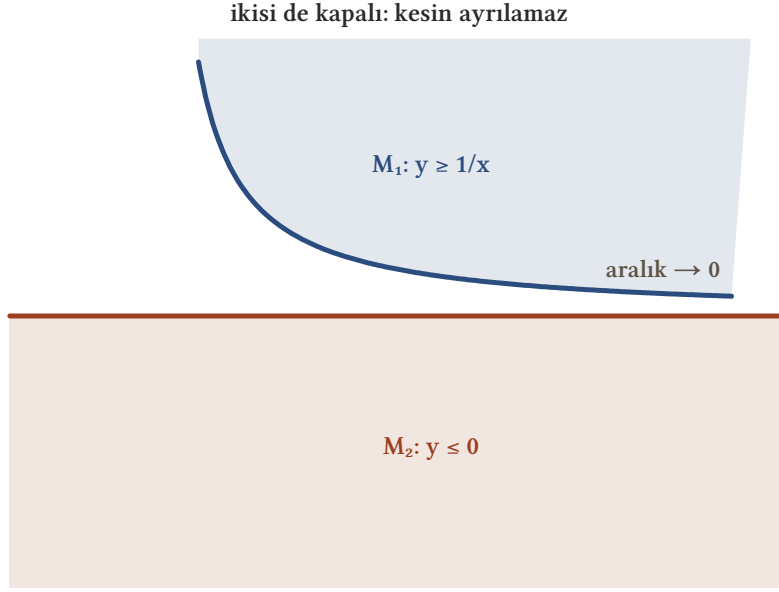
■

⚠ Kompaktlık neden gerekli?

İki kümenin kapalı, konveks ve ayrık olması **kesin** ayırma için yetmez. $\mathbb{R}^2$ uzayında

$$M_1 = \{(x, y) : x > 0, y \geq 1/x\}, \quad M_2 = \{(x, y) : y \leq 0\}$$

kümeleri kapalı, konveks ve ayrıktır; buna karşılık aralarındaki uzaklık x büyüdükçe sıfıra iner. Onları ayıran tek doğru $y = 0$ 'dır ve bu doğru M_2 'ye değdiğinden pozitif bir ε_0 boşluğu bırakılamaz. **Teorem 10.6**'nın kompaktlık koşulu tam da bu durumu dışarıda bırakır.



Şekil 10.6: Kompaktlık koşulu atılamaz. Bu iki küme kapalı, konveks ve ayrıktır; buna karşılık aralarındaki uzaklık x büyüdükçe sıfıra iner. Onları ayıran tek doğru $y = 0$ 'dır ve o da M_2 'ye değdiğinden pozitif bir ε_0 boşluğu bırakılamaz: kümeler ayrılır ama **kesin** ayrılamaz.

Ayırma teoremleri, konveks analizin dualite kuramının kapısıdır. Bir sonraki hafta bu fikrin doğal yaşam alanı olan konilere, ardından da konveks fonksiyonlara geçiyoruz.

11. Konveks Koniler ve Konveks Fonksiyonlar

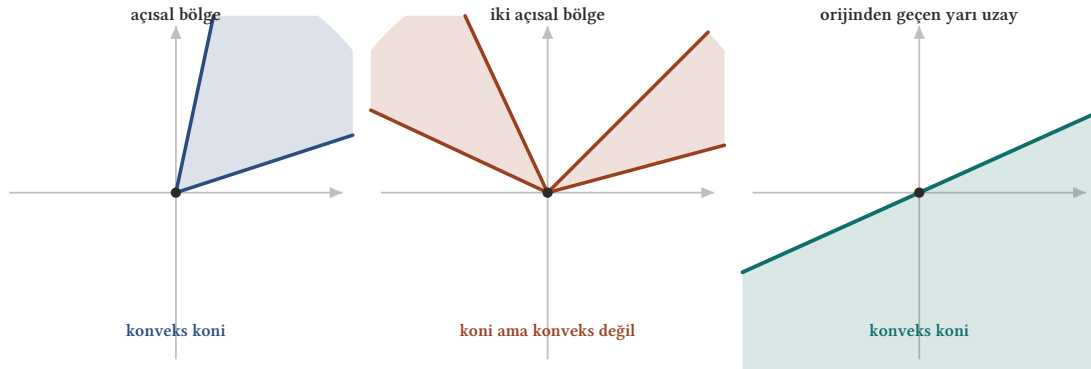
Bu hafta iki konuyu birleştiriyoruz. Önce ayırma teoremlerinin en verimli uygulandığı yapıları — orijinden çıkan ışınlardan oluşan konileri — ve onların dualini inceliyoruz. Ardından konveks kümeler kuramını fonksiyonlara taşıyoruz; bunun en temiz yolu, bir fonksiyonu grafiğiyle değil, grafiğinin **üstünde kalan bölgeyle** tanımlamaktır.

11.1 Koniler

Bu yapıların tanımı tek bir kapalılık koşulundan ibarettir: pozitif skaler ile çarpma.

Tanım 11.1 (Koni ve Konveks Koni). $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine, her $\lambda > 0$ ve $x \in K$ için $\lambda x \in K$ ise — yani pozitif skaler ile çarpım altında kapalı ise — K kümesine bir **koni** denir. Eğer K konisi aynı zamanda konveks bir küme ise K 'ya **konveks koni** denir.

$\{0\}$ kümesi, lineer alt uzaylar, orijinden geçen hiperdüzlemlerin belirlediği açık ve kapalı yarı uzaylar, pozitif orthant kümesi $\{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$ ve negatif olmayan orthant kümesi $\{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ birer konveks konidir.



Şekil 11.1: Koni, pozitif skaler ile çarpma altında kapalı kümedir: x kümedeyse bütün λx ($\lambda > 0$) ışını da kümededir. Ortadaki küme bu koşulu sağlar ama konveks değildir — iki kolun noktalarını birleştiren giriş dışarı çıkar. Bir koninin konveks olması, herhangi iki elemanın konik kombinasyonlarını içermesiyle aynı şeydir.

Tanım 11.2 (Konik Kombinasyon). $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$ olmak üzere $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ toplamına $x_1, \dots, x_m$ noktalarının **konik kombinasyonu** denir.

Konveks kombinasyondan (Tanım 6.2) farkı, katsayıların toplamı üzerinde bir kısıt bulunmamasıdır.

Teorem 11.1 (Konveks Koninin Karakterizasyonu). $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks koni olması için gerek ve yeter koşul, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ve $x_1, x_2 \in K$ için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K$ olmasıdır.

İspat.

Gereklilik. K bir konveks koni, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ve $x_1, x_2 \in K$ olsun. Bu durumda

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2)}_{>0} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \right)$$

yazılabilir. Burada $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ olduğundan $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ ve

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \in (0, 1), \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1$$

geçerlidir. K konveks olduğundan parantez içindeki konveks kombinasyon K 'ya aittir; K bir koni olduğundan bu noktanın $(\lambda_1 + \lambda_2)$ katı da K 'ya aittir.

Yeterlilik. Tersine, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ve $x_1, x_2 \in K$ için

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K \quad (3)$$

geçerli olsun.

K 'nın bir **koni** olduğunu gösterelim: $\lambda > 0$ ve $x \in K$ için

$$\lambda x = \frac{\lambda}{2} x + \frac{\lambda}{2} x \in K$$

yazılabildiğinden K bir koni olur.

Şimdi K 'nın **konveks** bir küme olduğunu gösterelim: $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $x_1, x_2 \in K$ olsun. $\lambda = 0$ için sonuç $x_1 \in K$, $\lambda = 1$ için $x_2 \in K$ olarak zaten gerçekleşir. $0 < \lambda < 1$ olduğunda ise $1 - \lambda > 0$ ve $\lambda > 0$ olduğundan (3) nedeniyle

$$\underbrace{(1 - \lambda)}_{>0} x_1 + \underbrace{\lambda}_{>0} x_2 \in K$$

içermesi gerçekleşir; bu ise K 'nın konveks olması demektir. Böylece K hem koni hem de konveks olduğundan konveks bir koni olur.

■

Böylece konveks koniler, herhangi iki elemanın **konik kombinasyonunu** içeren kümeler olarak da tanımlanabilir.

Örnek 11.1 (Koni Olan ve Olmayan Kümeler). Aşağıdaki kümelerin koni olup olmadığını, koni iseler konveks olup olmadığını belirleyiniz:

- (1) $K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}$, (2) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$, (3) $K_3 = \overline{B((0, 1), 1)}$.

Çözüm.

1. $\lambda > 0$ ve $(x, y) \in K_1$ için $\lambda y \geq \lambda |x| = |\lambda x|$ olduğundan $\lambda(x, y) \in K_1$ 'dir; yani K_1 bir konidir. Konveksliği Teorem 11.1 ile denetleyelim: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K_1$ ve $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ için üçgen eşitsizliği

$$|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2| \leq \lambda_1 |x_1| + \lambda_2 |x_2| \leq \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

verir; dolayısıyla konik kombinasyon yine K_1 'dedir ve K_1 konveks bir konidir.

2. K_2 kümesi birinci ve üçüncü bölgelerin birleşimidir. $\lambda > 0$ için $(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 xy \geq 0$ olduğundan K_2 bir konidir. Ancak konveks **değildir**: $(1, 0)$ ve $(0, -1)$ noktalarının ikisi de K_2 'dedir (çarpımları 0), oysa orta noktaları $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ için çarpım $-\frac{1}{4} < 0$ 'dır.

3. K_3 , merkezi $(0, 1)$ ve yarıçapı 1 olan kapalı disk; bir yuvar olduğundan konvekstir. Buna karşılık $(0, 1) \in K_3$ iken $\lambda = 3$ için $(0, 3) \notin K_3$ olduğundan koni **değildir**.

Üç örnek birlikte, koni olmak ile konveks olmanın birbirinden bağımsız iki özellik olduğunu gösterir.

Konveks örtünün koni karşılığı da aynı fikirle kurulur: bir kümeyi kapsayan en küçük koniyi, o kümenin noktalarından çıkan ışınların birleşimi olarak yazarız.

Tanım 11.3 (Konik Örtü). $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\text{cone}(X) = \{\lambda x : \lambda \geq 0, x \in X\}$$

kümesine X kümesinin **konik örtüsü** denir.

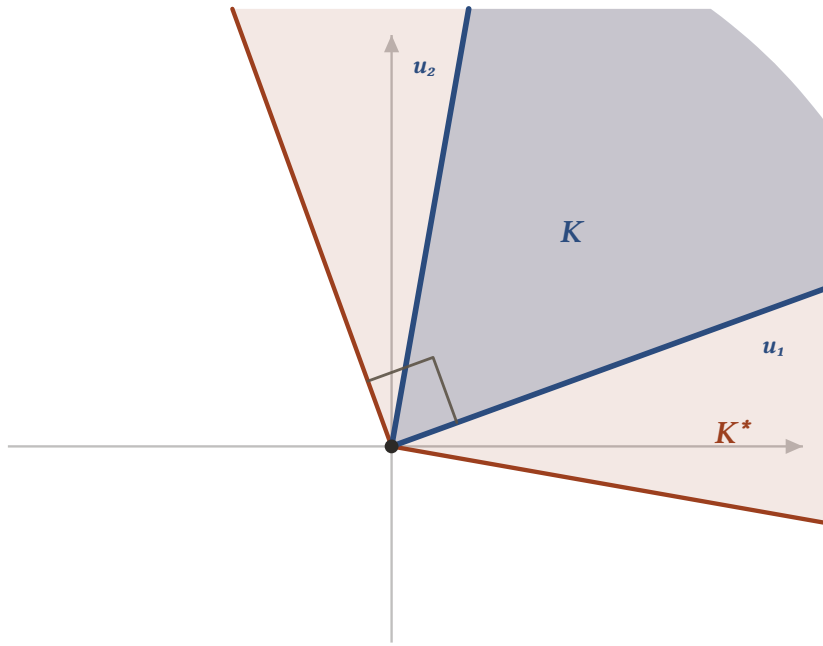
$\lambda = 0$ değerine izin verildiğinden konik örtü orijini daima içerir; X konveks bir küme olduğunda ise $\text{cone}(X)$ konveks bir koni olur.

11.2 Dual Koni

Tanım 11.4 (Dual Koni). $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ bir koni olmak üzere

$$K^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \forall x \in K, \langle x, x^* \rangle \geq 0\}$$

kümesine K konisinin **dual konisi** denir.



Şekil 11.2: u_1 ile u_2 ışınlarının gerdiği K konisi ve onun dual konisi $K^* = \{x^* : \langle x, x^* \rangle \geq 0, \text{ her } x \in K\}$. K^* bir x^* vektörünü, K 'nin her elemanı ile iç çarpımı negatif olmadığı noktaların kümesidir. K^* bir x^* vektörünü, K 'nin her elemanı ile iç çarpımı negatif olmadığı noktaların kümesidir.

Dual koni her zaman kapalı ve konvektir.

Lemma 11.1 (Dual Koni Kapalı ve Konvektir). $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ herhangi bir koni olmak üzere K^* dual konisi daima konveks ve kapalı bir konidir.

Çözüm.

Her $x \in K$ için $H_x^{\geq} := \{x^* : \langle x, x^* \rangle \geq 0\}$ kümesi, orijinden geçen bir hiperdüzlemin belirlediği kapalı yarı uzaydır. Tanım gereği

$$K^* = \bigcap_{x \in K} H_x^{\geq}$$

yazılır. Kapalı yarı uzaylar konveks ve kapalı olduğundan — lineer fonksiyoneller sürekli olduğu için kapalıdır — herhangi sayıdaki kesişimleri de konveks ve kapalıdır.

Koni olduğunu görmek için $x^* \in K^*$ ve $\lambda > 0$ alalım: her $x \in K$ için $\langle x, \lambda x^* \rangle = \lambda \langle x, x^* \rangle \geq 0$ olduğundan $\lambda x^* \in K^*$ 'dir.

Dikkat edilirse burada K 'nin konveks ya da kapalı olması hiç kullanılmadı: dual koni, ne kadar düzensiz bir koniden üretilirse üretilsin daima kapalı ve konvektir.

Lemma 11.2 (Koni ile Kapanışının Duali Aynıdır). $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ bir koni olmak üzere K ve $\overline{K}$ aynı dual koniye sahiptir; yani $K^* = (\overline{K})^*$ geçerlidir.

İspat.

$x^* \in (\overline{K})^*$ ise her $x \in \overline{K}$ için $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ ve $K \subseteq \overline{K}$ olduğundan özel olarak her $x \in K$ için $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ gerçekleşir; bu ise $x^* \in K^*$ demektir.

Tersine $x^* \in K^*$ olsun. Bu durumda her $x \in K$ için $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ geçerlidir. Şimdi $\bar{x} \in \overline{K}$ olsun; bu durumda elemanları K konisinden olan ve $x_k \rightarrow \bar{x}$ sağlayan bir $\{x_k\}$ dizisi vardır. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $\langle x_k, x^* \rangle \geq 0$ gerçekleşir. İç çarpım sürekli olduğundan $k \rightarrow \infty$ için limite geçilirse $\langle \bar{x}, x^* \rangle \geq 0$ elde edilir. Buradaki $\bar{x} \in \overline{K}$ herhangi olduğundan $x^* \in (\overline{K})^*$ bulunur. ■

Örnek 11.2 (Negatif Olmayan Orthantın Duali). $K = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$ negatif olmayan orthantın dual konisini belirleyiniz.

Çözüm.

$x^* \in K^*$ olması, her $x \geq 0$ için $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ olması demektir. Standart taban vektörleri e_i de K kümesinde olduğundan, özel olarak

$$\langle e_i, x^* \rangle = x_i^* \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

çkar; yani $x^* \geq 0$, dolayısıyla $K^* \subseteq K$ geçerlidir.

Tersine $x^* \geq 0$ ve $x \geq 0$ ise bütün terimler negatif olmadığından

$$\langle x, x^* \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i^* \geq 0$$

olur; bu ise $K \subseteq K^*$ demektir. Sonuçta

$$K^* = K,$$

yani negatif olmayan orthant kendi dualine eşittir; böyle konilere **öz-dual** denir. Lemma 11.1 ile tutarlı biçimde K zaten kapalı ve konveks bir konidir.

Bu iki lemma birlikte, dualiteyi son derece kullanışlı bir araç yapar: bir koninin dualini almak, onu otomatik olarak kapalı ve konveks bir nesneye çevirir ve bu işlem, koninin kapanışını almakla aynı sonucu verir. Bölümün ikinci yarısında aynı dualite dilinin fonksiyonlara nasıl taşındığını göreceğiz; destek fonksiyonu ile subdiferansiyel ise bir sonraki bölümün konusudur.

11.3 Tanım Kümesi ve Epigraf

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\mp\infty\} = [-\infty, +\infty]$ genişletilmiş reel sayılar kümesini kullanarak, bir fonksiyonu grafiğinin üstünde kalan bölge üzerinden okumayı sağlayan iki kavramı tanımlayalım.

Tanım 11.5 (Tanım Kümesi ve Grafiküstü Kümesi). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için

$$\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$$

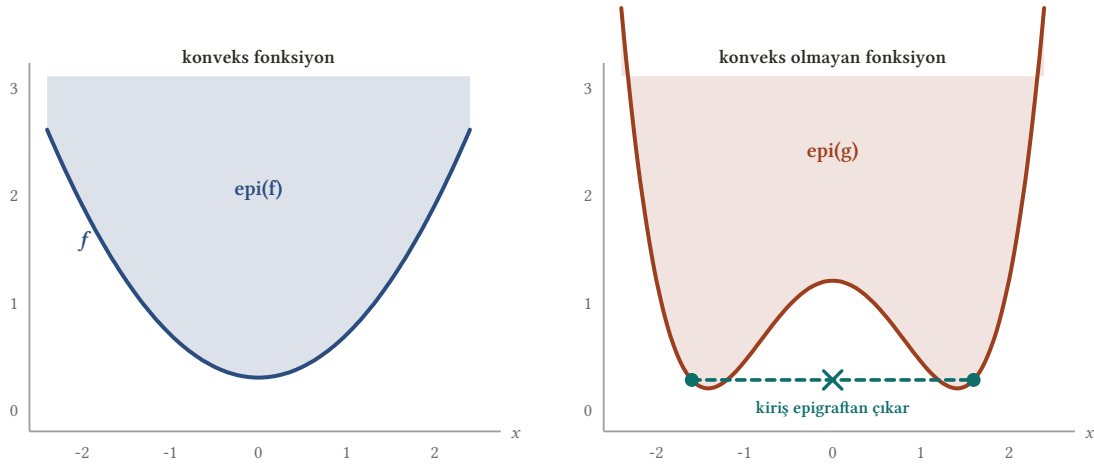
kümesine f fonksiyonunun **tanım kümesi**,

$$\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

kümesine de f fonksiyonunun **grafiküstü kümesi** (ya da f 'in **epigrafı**) denir.

Fonksiyonların $+\infty$ değeri almasına izin vermek yalnızca bir kolaylık değildir: bir kısıtlı problemi kısıtsız yazmanın standart yoludur. Bir kısıt kümesinin dışında fonksiyona $+\infty$ değeri atandığında, o kısıt amaç fonksiyonunun içine gömülmüş olur.

Tanım 11.6 (Konveks Fonksiyon). Grafiküstü kümesi konveks küme olan fonksiyonlara **konveks fonksiyon** denir. Başka bir deyişle, bir $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $\text{epi}(f)$ kümesi $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayında konveks ise f fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ uzayında bir **konveks fonksiyon** denir. Eğer $-f$ fonksiyonu konveks ise f fonksiyonuna **konkav fonksiyon** denir.



Şekil 11.3: Bir fonksiyonun grafiküstü (epigraf) kümesi, grafiğinin üzerinde kalan noktalardan oluşur. Konveks fonksiyon **tanımı gereği** epigrafı konveks olan fonksiyondur. Sağdaki fonksiyonda epigrafın iki noktasını birleştiren kiriş kümenin dışına düşer; bu, kirişin grafiğin altına inmesiyle aynı şeydir.

Tanım 11.7 (Has (Proper) Fonksiyon). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olmak üzere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ için } -\infty < f(x) \quad \text{ve} \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ öyle ki } f(x_0) < +\infty$$

sağlayan bir fonksiyona **has (proper) fonksiyon** denir.

i Uyarı

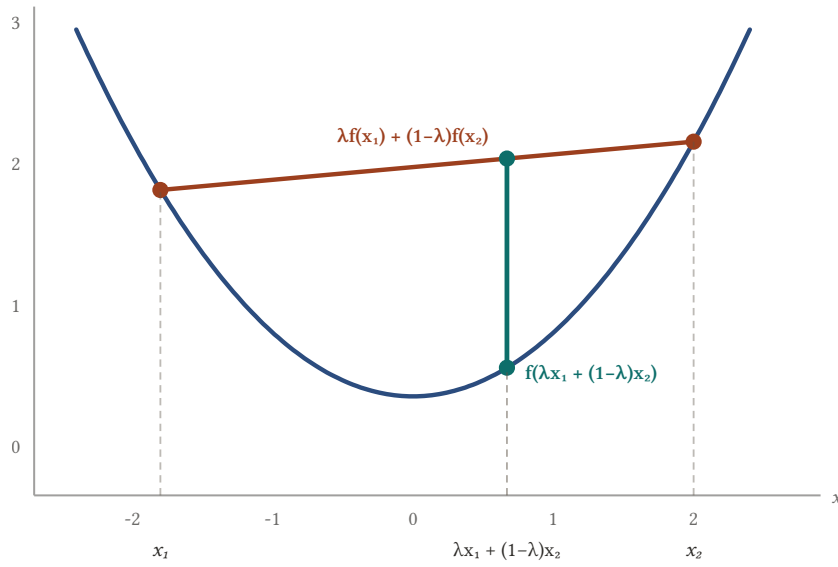
Bundan sonra aksi söylenmedikçe **has ve konveks** olan fonksiyonlar ile çalışacağız. Has olma koşulu iki uç durumu dışarıda bırakır: hiçbir yerde sonlu olmayan fonksiyonu ve bir noktada bile $-\infty$ değeri alan fonksiyonu.

11.4 Kiriş Eşitsizliği

Teorem 11.2 (Konveksliğin Eşitsizlik Biçimi). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ olmak üzere, f fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul, her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (*)$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesidir.



Şekil 11.4: Konvekslik eşitsizliğinin okunuşu: iki nokta arasındaki **kiriş daima grafiğin üstünde** kalır. Yatay eksen λ ile alınan ağırlıklı ortalama, dikey eksen f fonksiyon değerlerinin aynı ağırlıklarla ortalamasına karşılık gelir; mavi parça bu iki değer arasındaki farktır. Kesin konvekslikte bu fark uç noktalar dışında hep pozitiftir.

İspat.

Gerekliklik. Eğer $x_1 \notin \text{dom}(f)$ ya da $x_2 \notin \text{dom}(f)$ ise $(*)$ 'in sağ tarafı $+\infty$ olacağından eşitsizlik zaten geçerlidir. Varsayalım ki $x_1, x_2 \in \text{dom}(f)$ olsun; bu durumda $f(x_1) \leq \alpha_1$ ve $f(x_2) \leq \alpha_2$ eşitsizlikleri eşitlik hâliyle sağlandığından

$$(x_1, f(x_1)) \in \text{epi}(f), \quad (x_2, f(x_2)) \in \text{epi}(f)$$

içermeleri geçerlidir. f konveks ise $\text{epi}(f)$ konvektir; bu nedenle $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\underbrace{\lambda(x_1, f(x_1))}_{\in \text{epi}(f)} + \underbrace{(1-\lambda)(x_2, f(x_2))}_{\in \text{epi}(f)} = \left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \right) \in \text{epi}(f)$$

gerçeklenir. Epigrafin tanımı gereği bu, tam olarak $(*)$ eşitsizliğidir.

Yeterlilik. Tersine $(*)$ geçerli olsun. $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2) \in \text{epi}(f)$, yani $f(x_1) \leq \alpha_1$ ve $f(x_2) \leq \alpha_2$ olsun. $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq \lambda \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2$$

elde edilir; bu ise $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda \alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2) \in \text{epi}(f)$ demektir. Dolayısıyla $\text{epi}(f)$ konvektir. ■

Teorem 11.2 nedeniyle $(*)$ eşitsizliği çoğu kaynakta doğrudan **tanım** olarak alınır; iki yaklaşım denktir. Eşitsizliğin geometrik okunuşu şudur: iki nokta arasındaki **kiriş daima grafiğin üstünde** kalır.

Örnek 11.3 (Norm Fonksiyonu Konvektir). Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = \|x\|$ şeklinde tanımlanan norm fonksiyonunun has konveks bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için üçgen eşitsizliği ve normun homojenliği ile

$$\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| \leq \lambda \|x_1\| + (1-\lambda)\|x_2\| = \lambda \|x_1\| + (1-\lambda)\|x_2\|$$

$f(x)$	konveks	kesin konveks	neden
x^2	evet	evet	grafik hiçbir yerde doğrusallaşmaz
$ x $	evet	hayır	$[0, 1]$ üzerinde doğrusaldır, orada kiriş grafiğe oturur
$2x + 1$	evet	hayır	grafik kendisi bir doğrudur, kiriş daima onunla çakışır
$-x^2$	hayır	hayır	kiriş grafiğin altında kalır

Bu fazladan kelimenin somut bir kazancı vardır: kesin konvekslik minimum noktasını tekleştirir.

Önerme 11.1 (Kesin Konvekste Minimum En Fazla Bir Tanedir). $C \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve f fonksiyonu C üzerinde kesin konveks olsun. Bu durumda f fonksiyonunun C üzerinde en fazla bir minimum noktası vardır.

İspat.

$x_1 \neq x_2$ noktalarının ikisi de minimum noktası olsun ve ortak en küçük değere $m = f(x_1) = f(x_2)$ diyelim. C konveks olduğundan orta nokta $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ da C kümesindedir ve $\lambda = \frac{1}{2}$ için kesin konvekslik

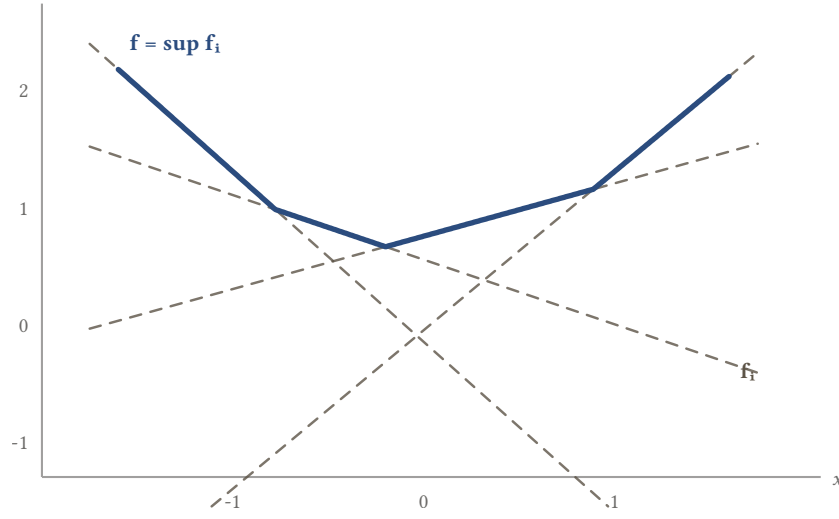
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2) = m$$

verir. Bu ise m sayısının f fonksiyonunun C üzerindeki en küçük değeri olmasıyla çelişir. Demek ki iki farklı minimum noktası bulunamaz. ■

Konveks olup kesin konveks olmayan fonksiyonlarda böyle bir garanti yoktur: $f \equiv 0$ sabit fonksiyonu konvekstir ve kümenin her noktası onun bir minimum noktasıdır.

11.5 Fonksiyonlarda Konveksliği Koruyan İşlemler

Teorem 11.3 (Konveks Fonksiyonların Supremumu). Her $i \in I$ için f_i fonksiyonları konveks ise, $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ şeklinde tanımlanan supremum fonksiyonu da konvekstir.



Şekil 11.7: Konveks fonksiyonların supremumu yine konvektir, çünkü $\text{epi}(\sup f_i) = \cap \text{epi}(f_i)$ olur ve konveks kümelerin kesişimi konvektir. Şekilde dört afin fonksiyonun supremumu parçalı doğrusal bir konveks fonksiyon verir. Tersine, her konveks fonksiyon kendisini alttan destekleyen afin fonksiyonların supremumu olarak yazılabilir.

İspat.

$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ ise $\text{epi}(f) = \bigcap_{i \in I} \text{epi}(f_i)$ geçerlidir; çünkü

$$(x, \alpha) \in \text{epi}(f) \Leftrightarrow \alpha \geq f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \Leftrightarrow \forall i \in I, \alpha \geq f_i(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in I, (x, \alpha) \in \text{epi}(f_i) \Leftrightarrow (x, \alpha) \in \bigcap_{i \in I} \text{epi}(f_i).$$

Her $i \in I$ için f_i konveks olduğundan $\text{epi}(f_i)$ kümeleri konvektir. Konveks kümelerin kesişimi konveks olduğundan (Teorem 6.2) $\text{epi}(f)$ konveks olur; yani f konvektir. ■

Bu teoremin gücü, indis kümesinin sonsuz olabilmesindedir: sonsuz çok afin fonksiyonun supremumu olarak yazılan her fonksiyon konvektir. Ters de doğrudur — bu, dualite kuramının çıkış noktasıdır. Supremum işleminin konveksliği korumasına benzer şekilde, **infimum işlemi de konkavlığı korur**. Bir $f_i(x)$ konkav fonksiyon ailesi için bu özellik, supremum ile infimum arasındaki temel eşitlikten doğrudan elde edilir:

$$\inf\{f_i(x)\} = -\sup\{-f_i(x)\}$$

Her bir $f_i(x)$ konkav olduğundan, $-f_i(x)$ fonksiyonları konvektir. Konveks fonksiyonların supremumu konveksliği koruduğu için eşitliğin sağ tarafındaki $\sup\{-f_i(x)\}$ ifadesi konvektir. İfadenin başındaki eksi çarpımı nedeniyle fonksiyon tekrar tersine döner ve sonuç her zaman konkav bir fonksiyon olur.

Teorem 11.4 (Jensen Eşitsizliği). f konveks fonksiyon olmak üzere $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ için

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_m f(x_m)$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

Her $i \in \{1, \dots, m\}$ için $f(x_i) \leq f(x_i)$ olduğundan $(x_i, f(x_i)) \in \text{epi}(f)$ geçerlidir. f konveks olduğundan $\text{epi}(f)$ konveks kümedir; [Teorem 8.1](#) nedeniyle elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarını içerir. Dolayısıyla $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i (x_i, f(x_i)) &= \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \right) \in \text{epi}(f) \\ \Leftrightarrow f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) &\leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

olur.

■

Teorem 11.5 (Negatif Olmayan Katsayılı Toplamlar). Her $i \in \{1, \dots, m\}$ için f_i fonksiyonları konveks ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_m f_m(x)$$

fonksiyonu da konvekstir.

İspat.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Her f_i için giriş eşitsizliği yazılıp $\alpha_i \geq 0$ ile çarpılırsa (çarpanlar negatif olmadığından eşitsizlik yönü korunur):

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i (\lambda f_i(x) + (1-\lambda)f_i(y)) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \end{aligned}$$

gerçeklenir; dolayısıyla f konvekstir.

■

Konveksliğin ne olduğunu artık biliyoruz; sıra onu pratikte denetlemeye ve türevin var olmadığı noktalarda onun yerine ne kullanacağımıza geldi. Bir sonraki haftanın konusu budur.

12. Hessian Matris ve Subdiferansiyel

Geçen hafta konveks fonksiyonları epigrafları üzerinden tanımlamış ve genişletilmiş reel değerlere — yani $\bar{\mathbb{R}}$ kümesine — izin vermiştik; bu hafta aynı çerçevede devam ediyoruz. Bir fonksiyonun konveks olup olmadığını kırış eşitsizliğinden okumak çoğu zaman zordur. Bu haftada iki kez türevlenebilen fonksiyonlar için konveksliği tek bir matrisin işaretine indirgiyor, ardından türevin var olmadığı noktalarda onun yerini alan subgradient kavramını kuruyoruz. Bölüm, konveks analizin üç temel fonksiyonuyla kapanıyor: destek fonksiyonu, indikatör fonksiyonu ve pozitif homojen fonksiyonlar.

12.1 Konveksliğin Hessian ile Belirlenmesi

Tek değişkende konveksliğin ölçütü herkesin bildiği bir şeydir: $f'' \geq 0$. Grafik her yerde yukarı bükülüyorsa kırış grafiğin üstünde kalır. Çok değişkende aranan şey tam olarak aynıdır; tek fark, “ikinci türev”in artık bir sayı değil bir matris olmasıdır.

Bunu görmek için x noktasından d yönünde çıkan doğru üzerinde f' 'yi izleyelim:

$$g(t) = f(x + td).$$

g tek değişkenli bir fonksiyondur ve zincir kuralı iki kez uygulanınca

$$g''(0) = \langle d, H(x) d \rangle, \quad H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)$$

çıkıyor; buradaki simetrik $H(x)$ matrisine f fonksiyonunun **Hessian matrisi** denir. Yani $\langle d, H(x) d \rangle$ sayısı, f 'nin x noktasında d yönündeki ikinci türevinden başka bir şey değildir.

Bir fonksiyonun konveks olması, üzerinden geçen her doğru parçasında konveks olması demektir. O hâlde aranan koşul kendiliğinden ortaya çıkıyor: **hiçbir yönde ikinci türev negatif olmasın**. Bu koşulun matrislerde hazır bir adı vardır.

Tanım 12.1 (Pozitif Tanımlı ve Pozitif Yarı-Tanımlı Matris). Simetrik bir $Q_{n \times n}$ reel matrisine, eğer her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x, Qx \rangle \geq 0$ ise **pozitif yarı-tanımlı matris**, eğer her $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ için $\langle x, Qx \rangle > 0$ ise **pozitif tanımlı matris** denir; $\langle x, Qx \rangle$ ifadesine de sırasıyla **pozitif yarı-tanımlı form** ve **pozitif tanımlı form** denir.

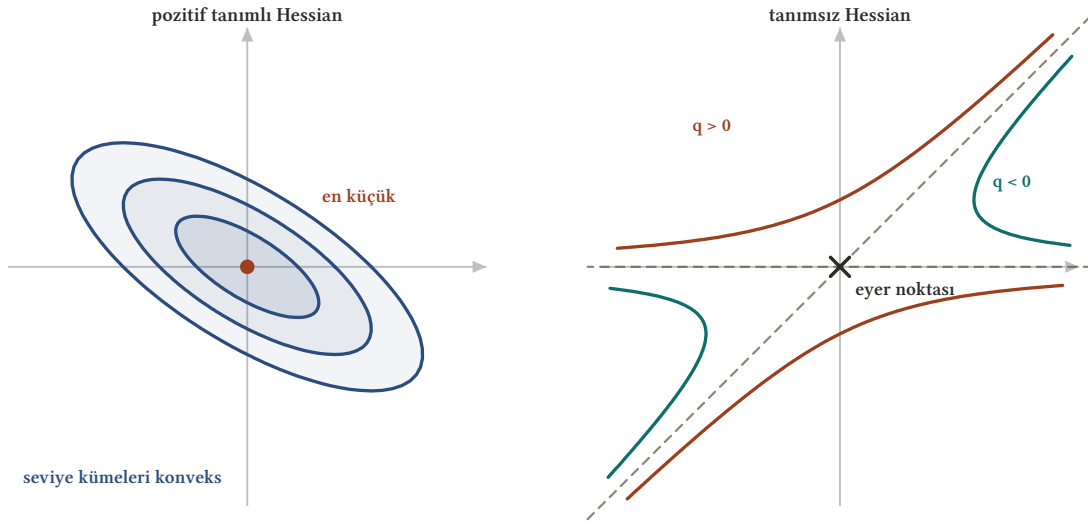
Sezgisel karşılıkları şudur: yarı-tanımlı “hiçbir yönde aşağı bükülmüyor”, tanımlı ise “her yönde gerçekten yukarı bükülüyor”.

Teorem 12.1 (Hessian Kriteri). $f : C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu açık konveks bir C kümesi üzerinde reel değerli ve ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun C üzerinde **konveks** olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

$$H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right), \quad i, j = 1, \dots, n$$

Hessian matrisinin her $x \in C$ için **pozitif yarı-tanımlı** olmasıdır.

Eğer $H(x)$ matrisi her $x \in C$ için **pozitif tanımlı** ise o zaman f **kesin konveks** fonksiyondur.



Şekil 12.1: İki kez sürekli türevlenebilir bir fonksiyon, ancak Hessian matrisi her noktada pozitif yarı-tanımlıysa konveksdir. Solda pozitif tanımlı bir kuadratik formun seviye eğrileri iç içe elipslerdir ve alt seviye kümeleri konveksdir. Sağdaki formda öncü esas minör Δ_2 negatif olduğundan Hessian tanımsızdır: seviye eğrileri hiperbol, orijin ise ne minimum ne maksimum olan bir eyer noktasıdır.

İ Aklında kalsın

- $n = 1$ durumunda $H(x)$ tek elemanlı bir matristir ve teorem tanıdık $f''(x) \geq 0$ koşuluna iner. Hessian, ikinci türevin çok değişkenli hâlidir.
- Hessian tek bir noktada bile pozitif yarı-tanımlı değilse fonksiyon konveks değildir.
- Pozitif tanımlılık kesin konveksliği getirir, ama tersi doğru değildir: $f(x) = x^4$ kesin konveksdir, buna karşılık $f''(0) = 0$ 'dır.

12.2 Kontrol Reçetesi: Esas Minörler

Tanım “her x için” dediğinden doğrudan kullanışlı değildir; sonsuz çok vektör tek tek denenemez. Neyse ki işi sonlu sayıda determinant hesabına indiren kriterler vardır. Bu kriterleri kullanırken doğru yapılması gereken tek bir ayırım var – karışan yer tam olarak burasıdır.

Tanım 12.2 (Esas Minör ve Öncü Esas Minör). Q simetrik bir $n \times n$ matris ve elemanları a_{ij} olsun. **Esas minör:** aynı numaralı satır ve sütunlar birlikte seçilerek elde edilen alt matrisin determinanı. Örneğin 3×3 bir matriste $\{2\}$ seçimi a_{22} sayısını, $\{1, 3\}$ seçimi ise $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ determinantını verir. Boş olmayan her seçim bir minör verdiği için toplam $2^n - 1$ tanedir.

Öncü esas minör: yalnızca $\{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, \dots, n\}$ seçimlerinden gelenler, yani sol üst köşeden başlayıp büyüyen kareler:

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Toplam n tanedir.

Her öncü esas minör aynı zamanda bir esas minördür; tersi doğru değildir.

Kriterler bu iki listeyi şöyle kullanır:

Aranan	Koşul	Bakılacak minörler	Kaç tane
pozitif tanımlı ($\Rightarrow$ kesin konveks)	hepsi > 0	yalnızca öncü esas minörler	n
pozitif yarı-tanımlı ($\Leftrightarrow$ konveks)	hepsi ≥ 0	bütün esas minörler	$2^n - 1$

Lemma 12.1 (Sylvester Kriteri). Simetrik bir $A_{n \times n}$ matrisin **pozitif tanımlı** olması için gerek ve yeter koşul, tüm öncü esas minörlerinin pozitif olmasıdır; yani her $k = 1, \dots, n$ için $\Delta_k > 0$ gerçekleşmesidir.

Pozitif yarı-tanımlılık kriteri. Simetrik bir $A_{n \times n}$ matrisin pozitif yarı-tanımlı olması için gerek ve yeter koşul, $2^n - 1$ tane olan esas minörlerinin hepsinin negatif olmamasıdır.

⚠ Yarı-tanımlılıkta öncü minörler neden yetmez?

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisinde $\Delta_1 = 0 \geq 0$ ve $\Delta_2 = \det(A) = 0 \geq 0$ 'dır: öncü minörlerin ikisi de negatif değil. Buna karşılık $x = (0, 1)$ için

$$\langle x, Ax \rangle = -1 < 0$$

olduğundan A pozitif yarı-tanımlı **değildir**. Gözden kaçan minör sağ alt köşedeki -1 'dir; o da bir esas minördür ama öncü değildir. Kısacası: **kesin** konvekslik ararken öncü minörler yeter, düz konvekslik ararken yetmez.

$n = 2$ için tablo tamamen açılabilir. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ matrisinin öncü esas minörleri a ile $ac - b^2$, bütün esas minörleri ise a, c ve $ac - b^2$ olduğundan:

- **kesin konveks** (pozitif tanımlı): $a > 0$ ve $ac - b^2 > 0$;
- **konveks** (pozitif yarı-tanımlı): $a \geq 0, c \geq 0$ ve $ac - b^2 \geq 0$.

Aradaki tek fark ikinci listede c 'nin de ayrıca kontrol edilmesidir; yukarıdaki tuzak tam olarak bu unutulmuş c 'den doğar.

$n = 3$ durumunda $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ matrisinin yedi esas minörü $a, d, f, ad - b^2, af - c^2, df - e^2$ ve $\det(A)$ değerleridir; hepsi negatif değilse A pozitif yarı-tanımlıdır. Daha büyük n için de durum aynıdır.

Örnek 12.1 (Kesin Konveks Bir Kuadratik Form). $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$ 'te konveksliğini inceleyiniz.

Çözüm.

Kuadratik bir formda Hessian sabittir, dolayısıyla tek bir matris hesabı bütün noktalar için yeter. Tablonun birinci satırından, yani Sylvester kriterinden başlayalım: yalnızca öncü esas minörlere bakacağız; hepsi pozitif çıkarsa fonksiyon kesin konvekstir.

Birinci mertebeden türevler

$$f_x = 2x + 2y + 2z, \quad f_y = 4y + 2x, \quad f_z = 6z + 2x$$

olduğundan ikinci mertebeden türevler

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 2, \quad f_{xz} = 2, \quad f_{yx} = 2, \quad f_{yy} = 4, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zx} = 2, \quad f_{zy} = 0, \quad f_{zz} = 6$$

olur ve

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Şimdi öncü esas minörlerini hesaplayalım:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Her $x \in \mathbb{R}^3$ için $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$ gerçekleştiğine göre [Lemma 12.1](#) nedeniyle Hessian matrisi pozitif tanımlı bir matristir. Dolayısıyla [Teorem 12.1](#) nedeniyle f fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde kesin konveks bir fonksiyondur.

Hessian burada sabittir; kuadratik formlarda durum daima böyledir ve konvekslik tek bir matris hesabına iner.

Örnek 12.2 (Küpsel Terim Konveksliği Bozar). $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3 - xy - 3z$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$ 'te konveksliğini inceleyiniz.

Çözüm.

Birinci mertebeden türevler

$$f_x = 1 - y, \quad f_y = 2y - x, \quad f_z = 3z^2 - 3$$

olduğundan ikinci mertebeden türevler

$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = -1, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yx} = -1, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zx} = 0, \quad f_{zy} = 0, \quad f_{zz} = 6z$$

olur ve

$$H(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{pmatrix}$$

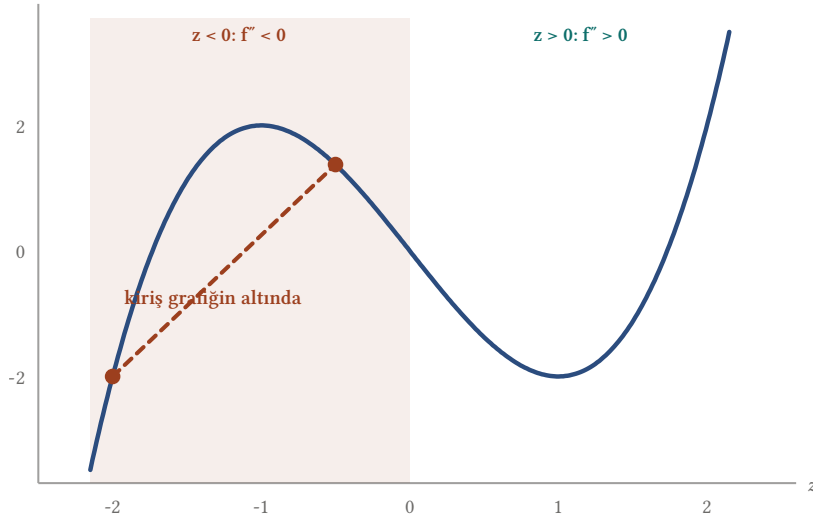
elde edilir. Öncü esas minörler

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 < 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6z \end{vmatrix} = -6z$$

biçimindedir. Bu kez sorulan **konvekslik** olduğu için tablonun ikinci satırındayız: her esas minör negatif olmamalı. Oysa $\Delta_2 = -1 < 0$ 'dır ve Δ_2 de bir esas minördür. Bu tek başına, Hessian'ın hiçbir noktada pozitif yarı-tanımlı olmadığını gösterir.

Aynı sonuç z üzerinden de okunabilir: $6z$ bir esas minördür ve $z < 0$ için negatiftir. Nitekim konveksliği bozan asıl terim z^3 'tür; tek değişkenli $z^3 - 3z$ fonksiyonunun ikinci türevi $6z$ olup $z < 0$ bölgesinde negatiftir.

Dolayısıyla f fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde konveks bir fonksiyon değildir.



Şekil 12.2: $z^3 - 3z$ fonksiyonunun ikinci türevi $6z$ 'dir ve $z < 0$ için negatiftir. Orada kiriş grafiğin **altına** düşer, dolayısıyla fonksiyon konveks değildir. Çok değişkenli bir fonksiyonda tek bir küpsel terimin bulunması da aynı şeyi yapar: Hessian, o değişkenin negatif olduğu bölgede pozitif yarı-tanımlı olmaktan çıkar.

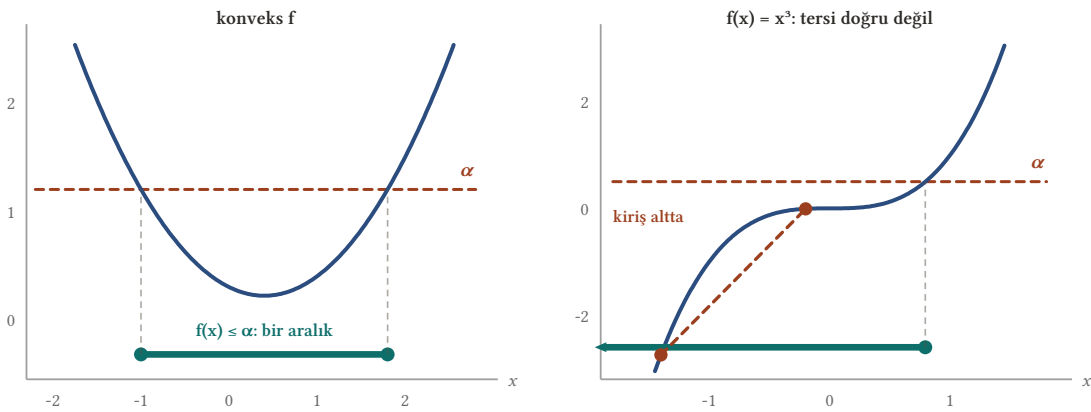
12.3 Seviye Kümeleri

Tanım 12.3 (Seviye Kümesi). $\alpha \in \mathbb{R}$, C konveks bir küme ve $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere

$$L_f(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$$

kümesine f fonksiyonunun α **seviye kümesi** denir.

Lemma 12.2 (Seviye Kümeleri Konvekstir). C konveks bir küme olmak üzere $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $L_f(\alpha)$ seviye kümeleri konvekstir.



Şekil 12.3: Konveks bir fonksiyonun bütün $L_f(\alpha) = \{x : f(x) \leq \alpha\}$ seviye kümeleri konvekstir. Bunun **tersi doğru değildir**: sağdaki x^3 fonksiyonunun her seviye kümesi bir aralık, yani konvekstir; buna karşılık kiriş grafiğin altına indiğinden fonksiyonun kendisi konveks değildir. Seviye kümeleri konveks olan fonksiyonlara **kuazikonveks** denir.

İspat.

$\alpha \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in L_f(\alpha)$ ve $0 < \lambda < 1$ olsun. f konveks olduğu için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha$$

yani $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \alpha$ gerçekleşir. Bu ise $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in L_f(\alpha)$, dolayısıyla $L_f(\alpha)$ kümelerinin konveks olması demektir.

■

⚠ Uyarı: tersi doğru değildir

Yukarıdaki lemmanın tersi her zaman doğru değildir. Örneğin $\mathbb{R}$ 'de tanımlanmış $f(x) = x^3$ fonksiyonunun her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$L_f(\alpha) = \{x : x^3 \leq \alpha\} = (-\infty, \sqrt[3]{\alpha}]$$

seviye kümesi bir aralık, yani konvektir; ancak $f(x) = x^3$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks değildir $-x < 0$ bölgesinde ikinci türev $6x$ negatiftir ve giriş grafiğinin altına düşer.

Bütün seviye kümeleri konveks olan fonksiyonlar ayrı bir ad taşır.

Tanım 12.4 (Kuazikonveks Fonksiyon). C konveks bir küme ve $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $L_f(\alpha)$ seviye kümesi konveks ise f fonksiyonuna **kuazikonveks** denir.

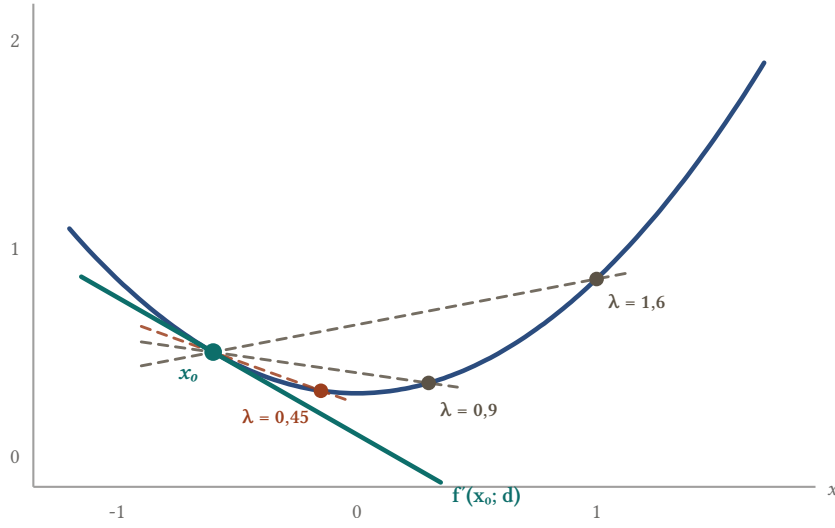
Lemma 12.2 her konveks fonksiyonun kuazikonveks olduğunu söyler; x^3 örneği ise tersinin doğru olmadığını gösterir. Kısacası konvekslik, kuazikonvekslikten kesin olarak daha güçlü bir koşuldur.

12.4 Yönlü Türev

Tanım 12.5 (Yönlü Türev). $d \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$f'(x_0; d) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda}$$

limitine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki d **yönündeki yönlü türevi** denir.



Şekil 12.4: Yönlü türev, x_0 noktasından d yönünde çizilen kirişlerin eğiminin $\lambda \rightarrow 0^+$ limitidir. Konveks fonksiyonlarda bu eğimler λ küçüldükçe **azalır** ve alttan sınırlıdır; bu yüzden limit her yönde vardır — fonksiyon o noktada türevlenebilir olmasa bile.

Örnek 12.3 (Bir Yönlü Türev Hesabı). $f(x, y) = xy$ şeklinde tanımlanmış $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $x_0 = (1, 1)$ noktasında $d = (1, 2)$ yönündeki türevini hesaplayınız.

Çözüm.

Önce $x_0 + \lambda d$ noktasını yazalım:

$$x_0 + \lambda d = (1 + \lambda, 1 + 2\lambda).$$

Buradan

$$f(x_0 + \lambda d) = (1 + \lambda)(1 + 2\lambda) = 2\lambda^2 + 3\lambda + 1, \quad f(x_0) = 1 \cdot 1 = 1$$

olur. Böylece

$$f'(x_0; d) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{2\lambda^2 + 3\lambda + 1 - 1}{\lambda} = \lim_{\lambda \downarrow 0} (2\lambda + 3) = 3.$$

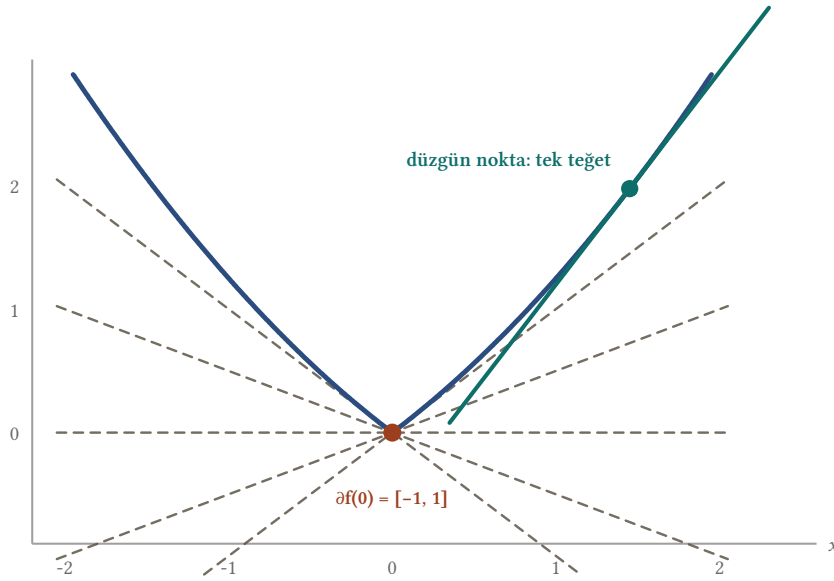
Genel olarak konveks bir küme üzerinde tanımlanmış konveks bir fonksiyonun bir iç noktada **diferansiyellenebilir olması gerekmez**. Örneğin $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış $f(x) = |x|$ konveks fonksiyonu $x = 0$ noktasında diferansiyellenebilir değildir. Buna karşılık yönlü türev her yönde vardır: konveks fonksiyonlarda fark bölümleri λ küçüldükçe azalır ve alttan sınırlıdır. Bu nedenle konveks fonksiyonlar için gradient kavramından daha genel olan **subgradient** kavramı verilmektedir.

12.5 Subgradient ve Subdiferansiyel

Tanım 12.6 (Subgradient). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir has konveks fonksiyon olsun ve $x_0 \in \text{dom}(f)$ olmak üzere

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \text{ için } f(x) - f(x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle$$

sağlayan $x^* \in \mathbb{R}^n$ vektörüne f fonksiyonunun x_0 noktasındaki bir **subgradienti** denir.



Şekil 12.5: Bir x^* subgradienti, grafiğe x_0 noktasında değen ve fonksiyonun her yerde **altında** kalan afin fonksiyonun eğimidir: $f(x) - f(x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle$. Düzgün noktalarda böyle tek bir doğru — teğet — vardır. Kırılma noktasında ise kesikli doğruların hepsi işe yarar; subgradientler bir aralık oluşturur.

Eşitsizliğin anlamı geometriktir: $x \mapsto f(x_0) + \langle x^*, x - x_0 \rangle$ afin fonksiyonu, grafiğe x_0 noktasında değen ve her yerde grafiğin **altında** kalır. Düzgün noktalarda böyle tek bir doğru vardır — teğet; kırılma noktalarında ise bir doğru ailesi.

Tanım 12.7 (Subdiferansiyel). f fonksiyonunun x_0 noktasındaki tüm subgradientlerinin kümesine f 'in x_0 noktasındaki **subdiferansiyeli** denir ve

$$\partial f(x_0) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : f(x) - f(x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

ile gösterilir.

Örnek 12.4 (Mutlak Değer Fonksiyonunun Subdiferansiyeli). $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış $f(x) = |x|$ fonksiyonu için $\partial f(0)$ subdiferansiyel kümesini hesaplayınız.

Çözüm.

Subdiferansiyel tanımı gereği, $x_0 = 0$ ve $f(0) = 0$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|x| \geq x^* x$$

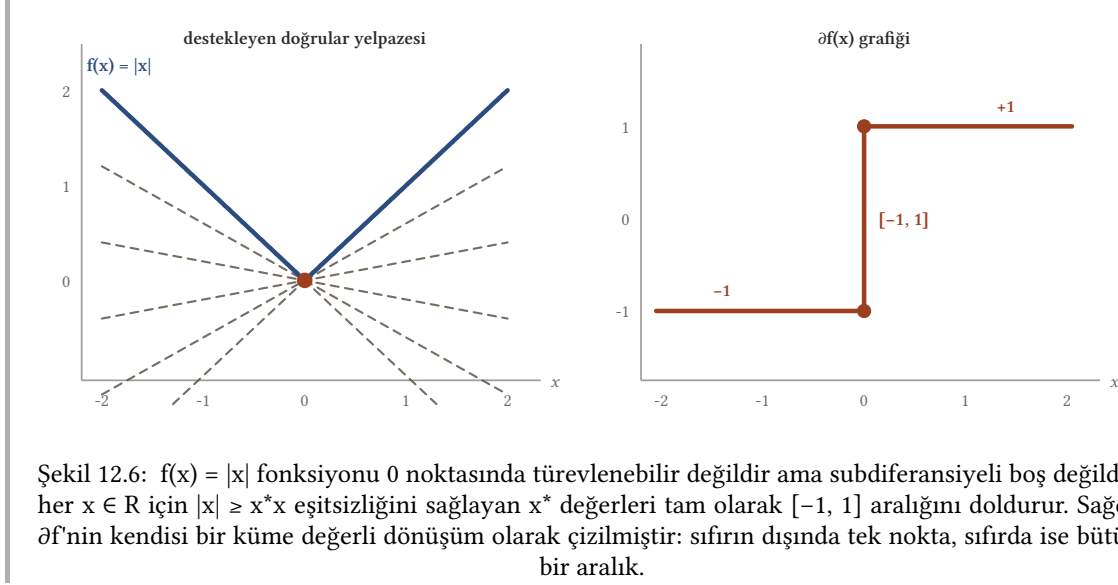
sağlayan x^* noktalarının kümesini hesaplamalıyız. Üç durumu ayrı ayrı ele alalım:

- $x > 0$ için eşitsizlik $x \geq x^* x$ hâlini alır; $x > 0$ ile bölünürse $1 \geq x^*$ bulunur.
- $x < 0$ için eşitsizlik $-x \geq x^* x$ hâlini alır; **negatif** olan x ile bölündüğünde yön değiştiği için $-1 \leq x^*$ bulunur.
- $x = 0$ için eşitsizlik $0 \geq 0$ olur ve her $x^* \in \mathbb{R}$ bunu sağlar.

Üç koşul birlikte $-1 \leq x^* \leq 1$ verir. Dolayısıyla

$$\partial f(0) = [-1, 1]$$

elde edilir. Sıfırdan farklı noktalarda ise fonksiyon türevlenebilir olduğundan subdiferansiyel tek noktalıdır: $x > 0$ için $\partial f(x) = \{1\}$, $x < 0$ için $\partial f(x) = \{-1\}$.

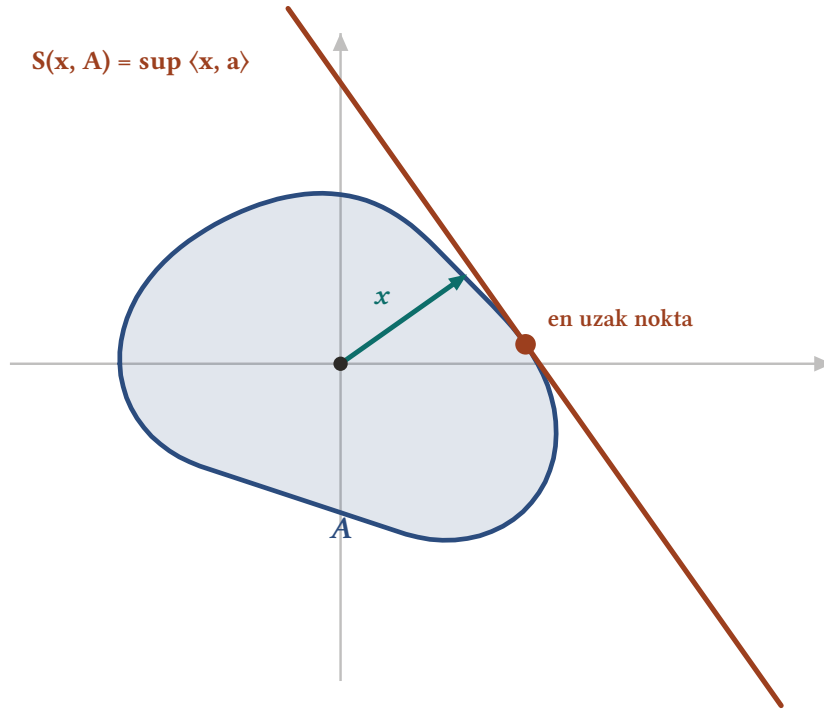


12.6 Destek, İndikatör ve Pozitif Homojen Fonksiyonlar

Tanım 12.8 (Destek Fonksiyonu). $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$S(x, A) = \sup_{a \in A} \{ \langle x, a \rangle \}$$

fonksiyonuna A kümesinin **destek fonksiyonu** denir.



Şekil 12.7: Bir kümenin destek fonksiyonu, verilen x yönünde kümenin ne kadar uzağa gittiğini ölçer: $S(x, A) = \sup \{ \langle x, a \rangle : a \in A \}$. Değeri, x 'e dik olup A 'yı destekleyen hiperdüzlemin konumunu belirler; supremum, o hiperdüzleme değen noktada alınır. Destek fonksiyonu her zaman konveks ve pozitif homojendir.

Destek fonksiyonu, bir kümeyi ölçtüğü yönler üzerinden kodlar: $S(x, A)$ değeri, x yönüne dik olup A 'yı destekleyen hiperdüzlemin konumunu verir. [Teorem 11.3](#) nedeniyle destek fonksiyonu — lineer fonksiyonların supremumu olduğundan — her zaman konvekstir.

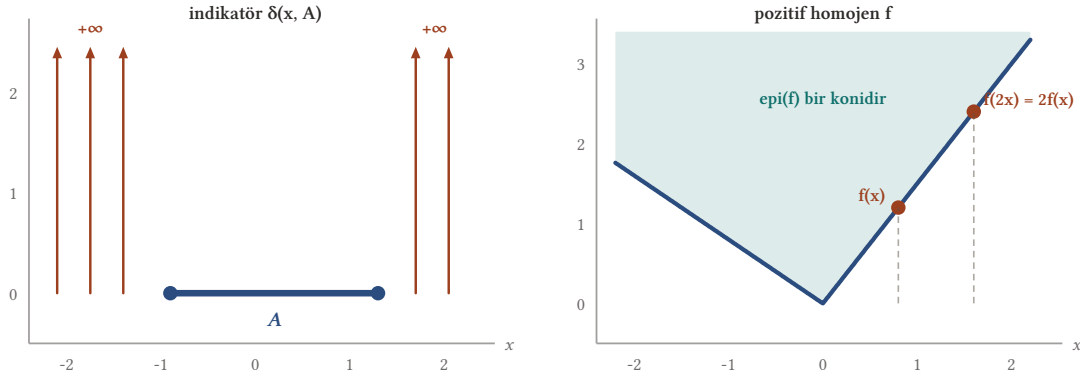
Tanım 12.9 (İndikatör Fonksiyonu). $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\delta(x, A) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ +\infty, & x \notin A \end{cases}$$

funksiyonuna A kümesinin **indikatör fonksiyonu** denir.

İndikatör fonksiyonu, [genişletilmiş reel değerli fonksiyonlarda](#) $+\infty$ değerine neden izin verdiğimizizin cevabıdır: A üzerinde bir eniyileme problemi, $f + \delta(\cdot, A)$ fonksiyonunun kısıtsız eniyilemesine dönüşür. A konveks ise $\text{epi}(\delta(\cdot, A)) = A \times [0, +\infty)$ olduğundan indikatör fonksiyonu da konvekstir.

Tanım 12.10 (Pozitif Homojen Fonksiyon). $0 < \lambda < +\infty$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ gerçekleyen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ has fonksiyonuna **pozitif homojen fonksiyon** denir.



Şekil 12.8: Konveks analizin iki temel yapı taşı. İndikatör fonksiyonu bir kısıtı fonksiyona çevirir: A üzerinde 0, dışında $+\infty$ değerini alır, böylece " $x \in A$ " koşulu amaç fonksiyonunun içine gömülür ve A konveksse δ de konveks olur. Pozitif homojen fonksiyonlarda $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ olduğundan epigraf bir konidir; destek fonksiyonu bu ailenin en önemli örneğidir.

Pozitif homojenlik, epigrafın bir **koni** olmasıyla aynı şeydir: $(x, \alpha) \in \text{epi}(f)$ ve $\lambda > 0$ ise $f(\lambda x) = \lambda f(x) \leq \lambda \alpha$ olduğundan $(\lambda x, \lambda \alpha) \in \text{epi}(f)$ 'dir. Norm fonksiyonu ile destek fonksiyonu bu ailenin en tanınmış iki üyesidir; böylece **koniler bölümünde** kurduğumuz dualite dili, doğrudan fonksiyonlara taşınmış olur.

13. Alıştırmalar ve Problemler

Bu bölüm, dersin on iki haftasında kurulan makinenin çalıştığı yerdir. Problemler konu sırasına göre dizilmiştir; her birinin çözümü kapalı bir kutu içindedir, böylece önce kendiniz deneyebilirsiniz. Kullanılan bütün tanım ve teoremler önceki bölümlerdekilerle aynıdır ve gerektiğinde bağlantı verilmiştir. Birkaç problem bilerek “yanlış” iddialarla gelir: bunlarda beklenen şey ispat değil, iddiayı çürüten bir **ters örnektir**. Konveks analizde bir koşulun neden orada durduğunu çoğu zaman ancak onu kaldırdığımızda bozulan örneği görerek anlarız.

13.1 Lineer Dönüşümler

Alıştırma 13.1 (Matris Çarpımı Lineerdir). A bir $m \times n$ reel matris olmak üzere $L(u) = Au$ şeklinde tanımlanan $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ dönüşümünün lineer olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Matris çarpımının toplama üzerine dağılma ve skalerle değişme özellikleri doğrudan kullanılır. $u, v \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun:

$$L(u + v) = A(u + v) = Au + Av = L(u) + L(v),$$

$$L(\lambda u) = A(\lambda u) = \lambda(Au) = \lambda L(u).$$

Tanım 6.1'deki iki koşul da sağlandığından L bir lineer dönüşümdür. **Teorem 6.1** bu gözlemin tersini söyler: $\mathbb{R}^n$ 'den $\mathbb{R}^m$ 'e giden her lineer dönüşüm bu biçimdedir, yani “lineer dönüşüm” ile “matris” aynı şeyin iki adıdır.

Alıştırma 13.2 (Her Lineer Fonksiyonel Bir İç Çarpımdır). $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bir lineer fonksiyonel olsun.

- (a) $L(x) = \langle a, x \rangle$ gerçekleyen bir $a \in \mathbb{R}^n$ vektörünün var olduğunu gösteriniz.
(b) L fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

(a) $\{e_1, \dots, e_n\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ 'in standart tabanı olsun. Her $x = (x_1, \dots, x_n)$ vektörü $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ biçiminde yazıldığından, lineerlik ile

$$L(x) = L\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i L(e_i)$$

elde edilir. Şimdi $a := (L(e_1), \dots, L(e_n)) \in \mathbb{R}^n$ denirse sağ taraf tam olarak $\langle a, x \rangle$ toplamıdır.

Bu a vektörü tektir: $\langle a, x \rangle = \langle a', x \rangle$ her x için geçerliyse $\langle a - a', x \rangle = 0$ olur; $x = a - a'$ seçilirse $\|a - a'\|^2 = 0$, yani $a = a'$ bulunur.

(b) (a) şıkkındaki gösterim ile her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$$|L(x) - L(y)| = |\langle a, x - y \rangle| \leq \|a\| \cdot \|x - y\|$$

verir. Bu, L fonksiyonelinin $\|a\|$ sabitli bir Lipschitz fonksiyonu olması demektir; dolayısıyla düzgün sürekli, özel olarak da süreklidir. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için $\delta := \varepsilon / (\|a\| + 1)$ seçmek yeterlidir.

Aynı sonuç **Lemma 6.1**'nin $m = 1$ özel hâlidir; buradaki hesap, o ispatın tek boyutlu ve daha kısa bir yazılışıdır.

Alıştırma 13.3 (Lineer mi, Değil mi?). Aşağıdaki dönüşümlerin lineer olup olmadığını inceleyiniz; lineer olanların dönüşüm matrisini bulunuz.

- (a) $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $L(x, y) = (y, x, x + y)$.
 (b) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (xy, yz)$.
 (c) $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (z - x, x + y)$. Ayrıca $L(e_1), L(e_2), L(e_3)$ vektörlerini hesaplayıp $L(x, y, z) = xL(e_1) + yL(e_2) + zL(e_3)$ eşitliğini doğrulayınız.

Çözüm.

(a) Bileşenlerin hepsi x ile y 'nin birinci dereceden ve sabit terimsiz ifadeleridir. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2)) = (\alpha y_1 + \beta y_2, \alpha x_1 + \beta x_2, \alpha(x_1 + y_1) + \beta(x_2 + y_2)) = \alpha L(x_1, y_1) + \beta L(x_2, y_2)$$

olduğundan L lineerdir. Teorem 6.1'in ispatındaki reçete uyarınca matrisin sütunları $L(e_1)$ ve $L(e_2)$ görüntüleridir: $L(1, 0) = (0, 1, 1)$ ve $L(0, 1) = (1, 0, 1)$. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad L(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Lineer **değildir**: bileşenler ikinci derecedendir. Tek bir ters örnek yeter. $u = (1, 1, 1)$ ve $\lambda = 2$ alınırsa

$$L(2u) = L(2, 2, 2) = (4, 4), \quad 2L(u) = 2(1, 1) = (2, 2)$$

olup $L(2u) \neq 2L(u)$ 'dur. Homojenlik koşulu bozulduğundan L lineer olamaz.

(c) Bileşenler yine birinci dereceden ve sabit terimsizdir; (a) şıkkındaki hesabın aynısı burada da yürür, dolayısıyla L lineerdir. Taban vektörlerinin görüntüleri

$$L(e_1) = L(1, 0, 0) = (-1, 1), \quad L(e_2) = L(0, 1, 0) = (0, 1), \quad L(e_3) = L(0, 0, 1) = (1, 0)$$

olur. Bunlarla

$$xL(e_1) + yL(e_2) + zL(e_3) = (-x, x) + (0, y) + (z, 0) = (z - x, x + y) = L(x, y, z)$$

eşitliği doğrulanır. Dönüşüm matrisi, sütunları bu üç görüntü olan matristir:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alıştırma 13.4 (Lineer Dönüşümün İki Basit Özelliği). $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm olmak üzere (a) $L(0) = 0$ ve (b) her $u, v \in \mathbb{R}^n$ için $L(u - v) = L(u) - L(v)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

(a) Homojenlik koşulunda $\lambda = 0$ alınır: $L(0) = L(0 \cdot 0) = 0 \cdot L(0) = 0$.

(b) Önce $\lambda = -1$ için $L(-v) = -L(v)$ olduğu görülür; ardından toplamsallık kullanılır:

$$L(u - v) = L(u + (-v)) = L(u) + L(-v) = L(u) - L(v).$$

Birinci özellik, lineer ile afin dönüşümleri ayıran testtir: Teorem 7.5 gereği her afin dönüşüm $F(x) = L(x) + a$ biçimindedir ve $a = F(0)$ sıfır olduğunda — ancak o zaman — F lineer olur.

13.2 Kapalılık ve Kompaktlık

Alıştırma 13.5 (Hiperbolün Üstündeki Bölgeler). $\mathbb{R}^2$ uzayında

$$A = \left\{ (x, y) : y \geq \frac{1}{x}, x > 0 \right\}, \quad B = \left\{ (x, y) : y \geq -\frac{1}{x}, x < 0 \right\}$$

kümelerini düzlemde betimleyiniz ve kompaktlıklarını inceleyiniz.

Çözüm.

A kümesi, birinci bölgedeki $y = 1/x$ hiperbol kolunun **üstünde** kalan bölgedir. B kümesinde $x < 0$ olduğundan $-1/x > 0$ 'dır; dolayısıyla B de ikinci bölgedeki $y = -1/x$ kolunun üstünde kalan bölgedir. İkisi de y eksenine göre birbirinin aynadaki görüntüsüdür.

Kapalılık. A kümesinden yakınsak bir $\{(x_k, y_k)\}$ dizisi alalım ve $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y)$ olsun. Eğer $x = 0$ olsaydı $y_k \geq 1/x_k \rightarrow +\infty$ olurdu ve $\{y_k\}$ yakınsayamazdı; demek ki $x > 0$ 'dır. $t \mapsto 1/t$ fonksiyonu $x > 0$ noktasında sürekli olduğundan $y_k \geq 1/x_k$ eşitsizliğinde limite geçilerek $y \geq 1/x$ bulunur, yani $(x, y) \in A$ olur. Böylece A kapalıdır; aynı akıl yürütme B için de geçerlidir.

Sınırlılık. A sınırlı **değildir**: her $k \in \mathbb{N}$ için $(k, 1/k) \in A$ ve $\|(k, 1/k)\| \geq k \rightarrow \infty$ 'dur. Aynı biçimde B de sınırlı değildir.

Teorem 3.2 gereği kompaktlık kapalı ve sınırlı olmayı gerektirdiğinden A ve B kümelerinin **hiçbiri kompakt değildir**.

Son bir gözlem: $1/x$ fonksiyonu $x > 0$ üzerinde konveks olduğundan A kümesi onun grafiküstü kümesidir ve dolayısıyla konvektir; B için de durum aynıdır. Bu iki küme [Alıştırma 13.30](#)'nde yeniden karşımıza çıkacak.

Alıştırma 13.6 (Kapalı İki Kümenin Toplamı Kapalı mıdır?). $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ kapalı kümeler ise $A + B$ toplam kümesi de $\mathbb{R}^2$ 'de kapalı mıdır? Neden?

Çözüm.

Hayır. İddia genel olarak yanlıştır; bir ters örnek verelim.

$$A = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} \quad (x\text{-ekseni}), \quad B = \left\{ \left(s, \frac{1}{s} \right) : s > 0 \right\} \quad (\text{hiperbol kolu})$$

kümelerini alalım. A bir doğru olduğundan kapalıdır; B ise sürekli bir fonksiyonun grafiğidir ve [Alıştırma 13.5](#)'ndeki akıl yürütmeye kapalıdır.

Toplamı hesaplayalım. Herhangi bir $u \in \mathbb{R}$ ve $v > 0$ verilsin. $s := 1/v > 0$ seçilirse $(s, \frac{1}{s}) = (\frac{1}{v}, v) \in B$ olur ve

$$\left(u - \frac{1}{v}, 0 \right) + \left(\frac{1}{v}, v \right) = (u, v)$$

yazılır. Ters yönde, $A + B$ kümesindeki her noktanın ikinci bileşeni $1/s > 0$ biçiminde olduğundan pozitifdir. Demek ki

$$A + B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\},$$

yani açık üst yarı düzlemdir; bu küme kapalı değildir. Nitekim $(0, 1/k) \in A + B$ dizisi $A + B$ kümesinde bulunmayan $(0, 0)$ noktasına yakınsar.

Hangi ek koşulun yettiğini [Önerme 3.1](#) söyler: A kapalı ve B **kompakt** ise $A + B$ kapalıdır. Yukarıdaki B kapalıdır ama sınırlı olmadığından kompakt değildir; kapalılığın bozulduğu yer tam olarak burasıdır.

13.3 Afın Kümeler ve Hiperdüzlemler

Alıştırma 13.7 (Kesişim, Toplam ve Birleşim).

(a) Herhangi sayıdaki afın kümenin kesişiminin de afın olduğunu gösteriniz.

(b) $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ afın kümeleri için $A + B$ toplam kümesi afın mıdır? $A \cup B$ birleşim kümesi afın mıdır?

Çözüm.

(a) $\{A_i\}_{i \in I}$ afın kümelerden oluşan bir aile ve $x, y \in \bigcap_{i \in I} A_i$ olsun. Herhangi bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için: her $i \in I$ indisinde $x, y \in A_i$ ve A_i afın olduğundan $(1 - \lambda)x + \lambda y \in A_i$ gerçekleşir. Bu her i için doğru olduğuna göre nokta kesişimdedir. Demek ki kesişim afındır.

(b) **Toplam afındır.** $x_1 + y_1, x_2 + y_2 \in A + B$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Terimler yeniden gruplanırsa

$$(1 - \lambda)(x_1 + y_1) + \lambda(x_2 + y_2) = \underbrace{[(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2]}_{\in A} + \underbrace{[(1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2]}_{\in B} \in A + B$$

elde edilir.

Birleşim afin olmak zorunda değildir. $\mathbb{R}^2$ uzayında $A = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ ve $B = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$ eksenlerini alalım; ikisi de afindir. $(1, 0) \in A$ ve $(0, 1) \in B$ noktalarından geçen doğru $\{(1 - \lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ kümesidir ve örneğin $\lambda = \frac{1}{2}$ için elde edilen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ noktası ne A 'da ne de B 'dedir. Dolayısıyla $A \cup B$ afin değildir.

Alıştırma 13.8 (Afin Kombinasyon ile Lineer Alt Uzay).

- (a) Bir $z \in \mathbb{R}^n$ noktası $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ noktalarının bir afin kombinasyonu ise aynı zamanda bir lineer kombinasyonudur; neden?
- (b) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bir lineer alt uzay ise A bir afin kümedir; neden?

Çözüm.

(a) Tanım 4.3 ile Tanım 4.5'ü yan yana koyalım. İkisi de $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ biçimindeki noktalardır; tek fark, afin kombinasyonda katsayılar ek olarak $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ koşulunun konmasıdır. Lineer kombinasyon tanımı katsayılar üzerine hiçbir kısıt koymadığından, koşulu sağlayan her yazılış aynı zamanda kısıtsız tanımı da sağlar. Kısacası afin kombinasyonlar, lineer kombinasyonların özel bir alt sınıfıdır; ters yön doğru değildir — örneğin $2x_1$ noktası bir lineer kombinasyondur ama katsayılar toplamı 1 olmadığından afin kombinasyon değildir.

(b) A bir lineer alt uzay, $x, y \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Tanım 4.6 gereği A kümesi herhangi iki elemanın lineer kombinasyonlarını içerir; özel olarak $\lambda_1 = 1 - \lambda$ ve $\lambda_2 = \lambda$ katsayılarıyla

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in A$$

geçerlidir. Bu ise tam olarak Tanım 4.2'deki koşuldur. Tersisi doğru değildir: orijinden geçmeyen bir doğru afindir ama 0 noktasını içermediğinden alt uzay olamaz. Sonuç 4.2 bu ayrımı kesinleştirir — lineer alt uzaylar, orijini içeren afin kümelerdir.

Alıştırma 13.9 (Bir Doğrunun Afinliği ve Boyutu). $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ kümesinin afin olduğunu gösteriniz ve boyutunu belirleyiniz.

Çözüm.

A kümesi tek bir lineer denklemin çözüm kümesidir. Denklem iç çarpım diliyle $\langle (1, 1), (x, y) \rangle = 1$ biçiminde yazıldığından Teorem 5.1 gereği A bir hiperdüzlemdir; $\mathbb{R}^2$ 'de hiperdüzlemler doğrulardır ve her hiperdüzlem afindir.

Aynı sonucu doğrudan da görebiliriz: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$[(1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2] + [(1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2] = (1 - \lambda)(x_1 + y_1) + \lambda(x_2 + y_2) = (1 - \lambda) + \lambda = 1.$$

Boyut. Tanım 5.2 gereği $\dim(A)$, A kümesine paralel olan lineer alt uzayın boyutudur. $(1, 0) \in A$ noktası çıkarılırsa

$$L = A - (1, 0) = \{(x, y) : x + y = 0\} = \text{span} \{(1, -1)\}$$

bulunur. Tek bir sıfırdan farklı vektör tarafından gerildiğinden $\dim(L) = 1$, dolayısıyla $\dim(A) = 1$ 'dir. Beklendiği gibi: bir doğrunun boyutu birdir ve $\mathbb{R}^2$ 'de $2 - 1 = 1$, yani A gerçekten bir hiperdüzlemdir.

Alıştırma 13.10 (Bir Doğruya Dik Vektörlerden Hiperdüzlem). $A = \text{aff} \{(1, 1, 0), (3, 0, -1)\}$ olmak üzere

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, y - (1, 1, 0) \rangle = 0, \forall y \in A \}$$

şeklinde tanımlanan H kümesinin $\mathbb{R}^3$ 'te bir hiperdüzlem olduğunu gösteriniz; $H = \{x : \langle a, x \rangle = b\}$ yazılışındaki $0 \neq a$ vektörünü ve b sayısını belirleyiniz.

Çözüm.

Önce A kümesini açalım. İki noktanın afin örtüsü, bu noktalardan geçen doğrudur (Tanım 4.1); yön vektörü

$$v = (3, 0, -1) - (1, 1, 0) = (2, -1, -1)$$

olduğundan

$$A = \{(1, 1, 0) + tv : t \in \mathbb{R}\}, \quad \text{yani} \quad y \in A \Leftrightarrow y - (1, 1, 0) = tv \quad (\text{bir } t \in \mathbb{R} \text{ için}).$$

Şimdi H kümesindeki koşulu bu yazılışla değiştirelim. Her $y \in A$ için $\langle x, y - (1, 1, 0) \rangle = 0$ olması, her $t \in \mathbb{R}$ için $t\langle x, v \rangle = 0$ olması demektir. $t = 1$ alındığında $\langle x, v \rangle = 0$ çıkar; tersine $\langle x, v \rangle = 0$ ise her t için eşitlik sağlanır. Dolayısıyla

$$H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle (2, -1, -1), x \rangle = 0\}.$$

Burada $a = (2, -1, -1) \neq 0$ ve $b = 0$ 'dır. Teorem 5.1'in ikinci yarısı, bu biçimde verilen her kümenin bir hiperdüzlem olduğunu söylediğinden H bir hiperdüzlemdir — geometrik olarak, A doğrusunun yön vektörüne dik olan ve orijinden geçen düzlemdir. $b = 0$ olması, H kümesinin aynı zamanda bir lineer alt uzay olduğu anlamına gelir (Sonuç 4.2).

Alıştırma 13.11 (Hiperdüzlemler Polihedraldir). Hiperdüzlemlerin polihedral kümeler olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = b\}$ bir hiperdüzlem olsun ($0 \neq a$). Bir reel sayı için “ $= b$ ” koşulu, “ $\leq b$ ” ve “ $\geq b$ ” koşullarının ikisinin birden sağlanmasıyla aynı şeydir; ikincisi de -1 ile çarpılarak “ $\leq$ ” biçimine sokulabilir:

$$\begin{aligned} \langle a, x \rangle = b &\Leftrightarrow \{\langle a, x \rangle \leq b \\ &\quad \langle -a, x \rangle \leq -b. \end{aligned}$$

Sağ taraf, satırları a ve $-a$ olan bir $2 \times n$ matrisi A ve $b^{\text{sağ}} = (b, -b)$ vektörü ile $Ax \leq b^{\text{sağ}}$ biçiminde yazılan sonlu bir eşitsizlik sistemidir. Tanım 6.6 gereği çözüm kümesi polihedraldir; yani

$$H = H^{\leq} \cap H^{\geq}$$

olup hiperdüzlem, kendi belirlediği iki kapalı yarı uzayın kesişimidir. Bu gözlemin bir yan ürünü de şudur: polihedral kümeler kapalı ve konveks olduğundan (Örnek 6.1) hiperdüzlemler de kapalı ve konvektir.

13.4 Konveks Kümeler

Alıştırma 13.12 (İki Polihedral Küme). Aşağıdaki kümelerin polihedral olduğunu gösteriniz.

- (a) $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha \leq \beta$ olmak üzere $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha \leq \langle a, x \rangle \leq \beta\}$.
 (b) $0 \neq a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_1, x \rangle \leq b_1, \langle a_2, x \rangle \leq b_2\}$.

Çözüm.

(a) İki taraflı eşitsizliği iki ayrı “ $\leq$ ” koşuluna ayırmak yeter. Soldaki $\alpha \leq \langle a, x \rangle$ eşitsizliği -1 ile çarpılarak $\langle -a, x \rangle \leq -\alpha$ biçimine gelir. Böylece

$$A = \{x : \langle a, x \rangle \leq \beta\} \cap \{x : \langle -a, x \rangle \leq -\alpha\}$$

olup A kümesi iki kapalı yarı uzayın kesişimidir; Tanım 6.6 gereği polihedraldir. Geometrik olarak A , aynı a normaline sahip iki paralel hiperdüzlem arasında kalan “şerit”tir.

(b) Burada yapılacak bir şey yoktur: C zaten sonlu ($m = 2$) sayıda eşitsizlikle tanımlanmıştır. Satırları a_1 ve a_2 olan $2 \times n$ matris A ve $b = (b_1, b_2)$ ile $C = \{x : Ax \leq b\}$ yazılır. İkisi de [Teorem 6.2](#) gereği konveks, lineer fonksiyoneller sürekli olduğundan ([Lemma 6.1](#)) kapalıdır.

Alıştırma 13.13 (Kutupsal Küme Konvekstir). $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olmak üzere

$$B = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y \rangle| \leq 1, \forall x \in A\}$$

kümesinin konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

İki yol var; ikisi de aynı fikrin farklı yazılışlarıdır.

Kesişim olarak. Sabit bir $x \in A$ için $|\langle x, y \rangle| \leq 1$ koşulu, $-1 \leq \langle x, y \rangle \leq 1$ çift eşitsizliğidir; yani [Alıştırma 13.12](#)'in (a) şıkkındaki şeridin ta kendisidir ve konvekstir. B kümesi bu şeritlerin $x \in A$ üzerinden kesişimi olduğundan

$$B = \bigcap_{x \in A} \{y : -1 \leq \langle x, y \rangle \leq 1\}$$

yazılır ve [Teorem 6.2](#) gereği konvekstir. Kesişimin sonsuz olması bir sorun değildir — teorem herhangi bir indis kümesi için geçerlidir.

Doğrudan. $y_1, y_2 \in B$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. Sabit bir $x \in A$ için iç çarpımın lineerliği ve üçgen eşitsizliği ile

$$|\langle x, (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \rangle| = |(1 - \lambda)\langle x, y_1 \rangle + \lambda\langle x, y_2 \rangle| \leq (1 - \lambda) \underbrace{|\langle x, y_1 \rangle|}_{\leq 1} + \lambda \underbrace{|\langle x, y_2 \rangle|}_{\leq 1} \leq 1$$

elde edilir; burada $1 - \lambda$ ile λ negatif olmadığından mutlak değerler doğrudan açılabilmiştir. $x \in A$ herhangi olduğundan $(1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2 \in B$ olur.

Dikkat edilirse A kümesinin konveks olması hiç kullanılmadı; B , ne kadar düzensiz bir A 'dan üretilirse üretilsin konvekstir. Aynı olguyu dual koni için [Lemma 11.1](#)'te de görmüştük.

Alıştırma 13.14 (Parabolün Sağındaki Bölge). $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2, y \geq 0\}$ kümesinin konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

C kümesini iki kümenin kesişimi olarak yazalım:

$$C = \underbrace{\{(x, y) : x \geq y^2\}}_{=: C_1} \cap \underbrace{\{(x, y) : y \geq 0\}}_{=: C_2}.$$

C_2 bir kapalı yarı uzay olduğundan konvekstir. C_1 için doğrudan tanıma gidelim: $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in C_1$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. $t \mapsto t^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks olduğundan

$$((1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2)^2 \leq (1 - \lambda)y_1^2 + \lambda y_2^2 \leq (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$$

zinciri geçerlidir; ilk eşitsizlik kiriş eşitsizliği, ikincisi ise $y_i^2 \leq x_i$ varsayımının negatif olmayan katsayılarla birleştirilmesidir. Bu ise $(1 - \lambda)(x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2) \in C_1$ demektir.

İki konveks kümenin kesişimi konveks olduğundan ([Teorem 6.2](#)) C konvekstir.

Aynı sonucu seviye kümeleri diliyle de okuyabiliriz: $g(x, y) = y^2 - x$ fonksiyonu konvekstir ve $C_1 = L_g(0)$ olduğundan [Lemma 12.2](#) doğrudan uygulanır.

Alıştırma 13.15 (Kesişim Olarak Yazarak Konvekslik). Aşağıdaki kümelerin konveks olduğunu gösteriniz.

- (a) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \leq 3, x \geq 1, y \geq 0, z = 3\}$.
 (b) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 \leq 1, x + y < 1, x - y \leq 1\}$.

Çözüm.

(a) Dört koşulun her biri lineerdir. İlk üçü kapalı yarı uzay, sonuncusu ise $\langle(0, 0, 1), (x, y, z)\rangle = 3$ hiperdüzlemidir. Hiperdüzlem de iki kapalı yarı uzayın kesişimi olduğundan (Alıştırma 13.11) C toplam beş kapalı yarı uzayın kesişimidir; yani polihedraldir, dolayısıyla Teorem 6.2 gereği konveks ve kapalıdır.

(b) Bu kez koşullardan biri lineer değildir, ama yine de konveks bir küme belirler:

- $E = \{(x, y) : x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ kümesi, $g(x, y) = x^2 + 2y^2$ fonksiyonunun 1 seviye kümesidir. g konvektir (Hessian'ı diag (2, 4) olup pozitif tanımlıdır), dolayısıyla Lemma 12.2 gereği E konvektir – geometrik olarak bir elips ve içidir.
- $\{(x, y) : x + y < 1\}$ bir açık yarı uzay, $\{(x, y) : x - y \leq 1\}$ ise kapalı bir yarı uzaydır; ikisi de konvektir.

Üçünün kesişimi olan C konvektir. Kapalı **değildir**, çünkü kesişime giren yarı uzaylardan biri açıktır; konvekslik ile kapalılığın birbirinden bağımsız olduğuna dikkat ediniz.

Alıştırma 13.16 (Hangi İşlem Konveksliği Korur?). $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks kümeler olmak üzere aşağıdaki kümeler konveks midir? Neden?

- (a) $C_1 \cup C_2$ (b) $C_1 \cap C_2$ (c) $C_1 + C_2$ (d) $\overline{C_1} - \text{int}(C_2)$ (e) $C_1 \setminus C_2$

Çözüm.

(a) **Hayır.** $\mathbb{R}$ 'de $C_1 = [0, 1]$ ve $C_2 = [2, 3]$ alalım; ikisi de konvektir. $0 \in C_1$ ve $3 \in C_2$ noktalarının orta noktası $\frac{3}{2}$ ise birleşimde değildir.

(b) **Evet.** Teorem 6.2'in iki kümelik özel hâlidir.

(c) **Evet.** Teorem 7.1.

(d) **Evet.** Teorem 7.6 gereği $\overline{C_1}$, Teorem 7.7 gereği $\text{int}(C_2)$ konvektir. Fark kümesi $\overline{C_1} - \text{int}(C_2) = \overline{C_1} + (-1) \text{int}(C_2)$ biçiminde yazıldığından Sonuç 7.1 doğrudan uygulanır ($\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$). Burada “fark” işleminin küme farkı değil, **toplam kümesi anlamında** fark olduğuna dikkat ediniz.

(e) **Hayır.** $\mathbb{R}$ 'de $C_1 = [0, 2]$ ve $C_2 = \{1\}$ alalım. $C_1 \setminus C_2 = [0, 1) \cup (1, 2]$ kümesi konveks değildir: 0 ile 2 noktalarının orta noktası 1 dışarıda kalır.

Kısacası konvekslik toplama, kesişim ve lineer birleşim altında korunur; birleşim ve küme farkı altında korunmaz.

Alıştırma 13.17 (Konveks mi, Değil mi?). Aşağıdaki kümelerin konveks olup olmadığını belirleyiniz; konveks olmayanlar için birer ters örnek veriniz. (b), (c) ve (d) şıklarında $\langle x, y \rangle$ yazılışı, x ile y reel sayılarının çarpımı xy anlamındadır.

- (a) $\mathbb{R}$ 'de $[-1, 1] \cup [3, 4]$
 (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq y \leq z\}$
 (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle x, y \rangle \geq 1\}$
 (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle x, y \rangle \geq 1, y + z \geq 1, y - 100z \geq 1\}$
 (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 4y \leq 12, x - y \geq 4\}$
 (f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\}$

Çözüm.

(a) **Konveks değildir.** $1 \in [-1, 1]$ ve $3 \in [3, 4]$ noktalarının orta noktası 2 kümede değildir. $\mathbb{R}$ 'de konveks kümeler tam olarak aralıklardır; iki ayrı aralığın birleşimi aralık değildir.

(b) **Konvektir.** Küme $\{x - y \leq 0\}$ ve $\{y - z \leq 0\}$ kapalı yarı uzaylarının kesişimidir; polihedraldir.

(c) **Konveks değildir.** $\{(x, y) : xy \geq 1\}$ kümesi hiperbolün **iki** kolunun üstünde kalan bölgelerin birleşimidir. $(1, 1)$ ve $(-1, -1)$ noktalarının ikisi de kümededir (çarpımları 1), oysa orta noktaları $(0, 0)$ için çarpım $0 < 1$ 'dir.

(d) **Konvektir** – ve buradaki incelik tam olarak (c) ile arasındaki farktır. Son iki kısıt, birincisinin kötü kolunu keser: $y + z \geq 1$ eşitsizliğinin 100 katı ile $y - 100z \geq 1$ toplanırsa

$$100(y + z) + (y - 100z) = 101y \geq 101, \quad \text{yani} \quad y \geq 1$$

çkar. Demek ki kümedeki her noktada $y \geq 1 > 0$ 'dır ve bu bölgede $xy \geq 1$ koşulu $x \geq 1/y$ koşuluna denktir. $y \mapsto 1/y$ fonksiyonu $y > 0$ üzerinde konveks olduğundan $\{(x, y) : y \geq 1, x \geq 1/y\}$ kümesi konvektir; kalan iki kısıt da yarı uzaydır ve kesişim konveks kalır.

(e) Konvektir. İki kapalı yarı uzayın kesişimi, yani polihedral bir kümedir. (Kümenin boş olup olmadığı konveksliği etkilemez; boş küme de konvektir.)

(f) Konvektir. $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ 'te z eksenine yönünde sonsuza uzanan dolu bir silindirdir ve $g(x, y, z) = x^2 + y^2$ konveks fonksiyonunun bir seviye kümesi olduğundan konvektir; $\{x^2 + z^2 \leq 1\}$ için de aynısı geçerlidir. İkisinin kesişimi konvektir.

Alıştırma 13.18 (İçi Boş ve İçi Boş Olmayan Konveks Kümeler). İçi boş olan ve içi boş olmayan konveks küme örnekleri veriniz.

Çözüm.

İçi boş olanlar. $\mathbb{R}^2$ uzayında bir doğru parçası, örneğin

$$S = \{(t, 0) : 0 \leq t \leq 1\},$$

konvektir; ama S kümesinin hiçbir noktasının S içinde kalan bir komşuluğu yoktur, çünkü her $B((t, 0), \varepsilon)$ yuvarı ikinci bileşeni sıfırdan farklı noktalar içerir. Dolayısıyla $\text{int}(S) = \emptyset$ 'dur. Aynı biçimde tek nokta kümeleri, doğrular, hiperdüzlemler ve boş kümenin kendisi de içi boş konveks kümelerdir.

İçi boş olmayanlar. Açık ya da kapalı bir yuvar, örneğin $\overline{B(0, 1)} \subset \mathbb{R}^2$, konvektir ve içi açık birim yuvardır. Bir yarı uzay ve $\mathbb{R}^n$ uzayının kendisi de böyledir.

Ayrımın kaynağı boyuttur: bir konveks kümenin içinin boş olmaması için gerek ve yeter koşul $\dim(C) = n$ olmasıdır. Boyut düştüğünde $\text{int}(C)$ boşalır, ama Tanım 7.2'teki görelî iç boş kalmaz — yukarıdaki S için $\text{ri}(S) = \{(t, 0) : 0 < t < 1\}$ 'dir.

13.5 Görelî İç ve Konveks Örtü

Alıştırma 13.19 (Bir Doğru Parçasının İçi ve Görelî İçi). $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, y = 0\}$ kümesi için $\text{int}(A)$ ve $\text{ri}(A)$ kümelerini belirleyiniz.

Çözüm.

A kümesi, x ekseninde $x = 1$ ile $x = 2$ arasındaki kapalı doğru parçasıdır.

İç. Bir $(x, 0) \in A$ noktası ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ alalım. $(x, \frac{\varepsilon}{2})$ noktası $B((x, 0), \varepsilon)$ komşuluğundadır ama ikinci bileşeni sıfırdan farklı olduğundan A kümesinde değildir. Demek ki hiçbir nokta iç nokta olamaz:

$$\text{int}(A) = \emptyset.$$

Görelî iç. Önce afin örtüyü bulalım: A kümesi x ekseninde iki farklı nokta içerdiğinden onların afin örtüsü bütün eksendir, yani

$$\text{aff}(A) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Tanım 7.2'te komşuluk bu doğru ile kesiştirilir: $B((x, 0), \varepsilon) \cap \text{aff}(A)$ kümesi, x merkezli ε yarıçaplı **açık aralıktan** ibarettir. Bu aralığın A içinde kalması için $1 < x < 2$ olması gerekir ve yeter — uç noktalarda aralık dışarı taşar. Böylece

$$\text{ri}(A) = \{(x, 0) : 1 < x < 2\}$$

bulunur. Küme, düzlem içinde “ince” olduğu için içi boştur; ama kendi doğrusu üzerinde bakıldığında uçları dışındaki her noktası içindedir.

Alıştırma 13.20 (Görelî İçin Üç Sorusu).

(a) $A \subseteq \mathbb{R}^2$ konveks kümesinin boyutu 2 ise $\text{ri}(A) = \text{int}(A)$ olur; neden?

- (b) Δ_1 bir 1-simpleks olmak üzere $\text{ri}(\Delta_1)$ nedir?
 (c) $A \subseteq B$ ise $\text{ri}(A) \subseteq \text{ri}(B)$ kapsaması her zaman geçerli midir?

Çözüm.

(a) $\dim(A) = 2$ olması, A kümesine paralel alt uzayın $\mathbb{R}^2$ olması, yani $\text{aff}(A) = \mathbb{R}^2$ demektir. Bu durumda Tanım 7.2'teki

$$B(x, \varepsilon) \cap \text{aff}(A) = B(x, \varepsilon) \cap \mathbb{R}^2 = B(x, \varepsilon)$$

olur ve görelİ iç koşulu, Tanım 2.1'daki iç nokta koşuluyla harfi harfine aynı hâle gelir. Dolayısıyla iki küme çakışır. Aynı gerekçe $\mathbb{R}^n$ 'de $\dim(A) = n$ olduğunda da geçerlidir.

(b) Tanım 9.3 gereği 1-simpleks, afin bağımsız iki nokta $x_1 \neq x_2$ 'nin konveks örtüsüdür, yani onları birleştiren kapalı doğru parçasıdır. Alıştırma 13.19'daki hesabın aynısı burada da yürür: afin örtü, iki noktadan geçen doğrudur ve görelİ iç, uçları atılmış **açık** doğru parçasıdır:

$$\text{ri}(\Delta_1) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 : \lambda_1, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}.$$

Genel olarak bir k -simpleksin görelİ içi, köşelerinin konveks kombinasyonu yazılışındaki katsayıların hepsi **kesin pozitif** olan noktalardan oluşur; katsayılardan biri sıfırlandığında bir yüze düşölür ve nokta görelİ sınıra geçer.

(c) **Hayır, her zaman geçerli değildir.** $\mathbb{R}^2$ uzayında

$$A = \{(1, 0)\}, \quad B = \overline{B(0, 1)}$$

alalım; $A \subseteq B$ geçerlidir. Tek nokta kümesinin afin örtüsü kendisi olduğundan $\text{ri}(A) = A = \{(1, 0)\}$ 'dir. Öte yandan $\dim(B) = 2$ olduğundan (a) şıkkı gereği $\text{ri}(B) = \text{int}(B)$, yani açık birim yuvardır ve $\|(1, 0)\| = 1$ olduğundan $(1, 0) \notin \text{ri}(B)$ 'dir. Demek ki $\text{ri}(A) \not\subseteq \text{ri}(B)$.

Kapsamanın bozulmasının nedeni afin örtülerin farklı olmasıdır: $\text{aff}(A)$ tek nokta iken $\text{aff}(B) = \mathbb{R}^2$ 'dir. $\text{aff}(A) = \text{aff}(B)$ olduğunda kapsama geçerlidir. Buna karşılık kapanışlar için $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$ kapsaması hiçbir ek koşul olmadan doğrudur; görelİ iç, kapanış kadar uysal davranmaz.

Alıştırma 13.21 (Bir Hiperbol Kolunun Konveks Örtüleri). $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1, x > 0, y > 0\}$ olmak üzere aşağıdaki konveks örtüleri belirleyiniz.

- (a) $X_1 = \{(0, 0)\}$ ise $\text{conv}(X_1 \cup X) = ?$
 (b) $X_2 = \{(0, 0), (0, 1)\}$ ise $\text{conv}(X_2 \cup X) = ?$
 (c) $X_3 = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ ise $\text{conv}(X_3 \cup X) = ?$

Çözüm.

Kolaylık için açık birinci bölgeyi $Q = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ ile gösterelim.

Önce $\text{conv}(X)$. X , hiperbolün birinci bölgedeki kolu – bir eğridir. $H = \{(x, y) \in Q : xy \geq 1\}$ kümesi konvektir (bu, $x > 0$ üzerinde konveks olan $1/x$ fonksiyonunun grafiküstü kümesidir) ve X 'i kapsar; ters yönde H kümesinin her noktası, eğri üzerindeki iki noktayı birleştiren bir kirişin üzerindedir. Dolayısıyla $\text{conv}(X) = H$ 'dir.

(a) Konveks örtü, $(0, 0)$ noktasından H kümesinin noktalarına giden bütün doğru parçalarının birleşimidir:

$$\text{conv}(X_1 \cup X) = \{\lambda h : h \in H, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Bu kümenin tam olarak $Q \cup \{(0, 0)\}$ olduğunu görelim. Bir yandan λh noktasının bileşenleri $\lambda > 0$ için pozitif, $\lambda = 0$ için nokta orijindir. Öte yandan herhangi bir $(u, v) \in Q$ verilsin ve $c := uv > 0$ olsun. Eğer $c \geq 1$ ise nokta zaten H kümesindedir. Eğer $c < 1$ ise $\lambda := \sqrt{c} \in (0, 1)$ seçilirse

$$h := \frac{1}{\lambda}(u, v) \quad \text{için} \quad \frac{u}{\lambda} \cdot \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{c} = 1,$$

yani $h \in X \subseteq H$ ve $(u, v) = \lambda h$ olur. Sonuçta

$$\text{conv}(X_1 \cup X) = \{(x, y) : x > 0, y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$$

bulunur: açık birinci bölge ile orijinin birleşimi.

(b) X_2 kümesi $(0, 0)$ noktasını da içerdiğinden (a) sikkında bulunan küme baştan içeridedir; geriye yalnızca $(0, 1)$ noktasının eklenmesi kalır. $(0, 0)$ ile $(0, 1)$ arasındaki doğru parçası y eksenı üzerindedir; $(0, t)$ biçimindeki bir nokta ile Q kümesinden bir nokta arasındaki doğru parçasının uç noktalar dışındaki her noktasının birinci bileşeni pozitifdir, yani Q kümesindedir. Böylece

$$\text{conv}(X_2 \cup X) = Q \cup \{(0, t) : 0 \leq t \leq 1\}$$

kümesinin konveks olduğu ve gereken bütün noktaları içerdiği görülür.

(c) Bu kez y ekseninin tamamı eklenmiştir. Herhangi bir (u, w) noktası $u > 0$ koşulunu sağlasın; $(0, 2w - 1) \in X_3$ ve $(2u, 1) \in Q$ noktaları alınırsa

$$\frac{1}{2}(0, 2w - 1) + \frac{1}{2}(2u, 1) = (u, w)$$

olur. Demek ki $x > 0$ olan her nokta konveks örtüdedir; y ekseninin kendisi de zaten X_3 olarak içeridedir. Ters yönde, $X_3 \cup X$ kümesinin her noktasının birinci bileşeni negatif olmadığından konveks kombinasyonlarında da negatif olamaz. Sonuçta

$$\text{conv}(X_3 \cup X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\},$$

yani kapalı sağ yarı düzlem elde edilir.

Üç şık birlikte şunu gösteriyor: konveks örtü alma işlemi, eklenen küçük bir kümeye karşı son derece duyarlıdır — tek bir noktanın eklenmesi eğriyi koca bir bölgeye, bir doğrunun eklenmesi ise yarı düzleme çevirmiştir.

13.6 Koniler ve Dual Koniler

Alıştırma 13.22 (Koniliği Koruyan İşlemler). Aşağıdakileri gösteriniz.

- (a) I herhangi bir indis kümesi olmak üzere $\{C_i\}_{i \in I}$ bir koni ailesi ise $\bigcap_{i \in I} C_i$ de bir konidir.
- (b) $C_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $C_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ birer koni ise $C_1 \times C_2$ de bir konidir.
- (c) $C \subseteq \mathbb{R}^n$ bir koni ise $\overline{C}$ de bir konidir.

Çözüm.

Üçünde de denetlenecek tek şey Tanım 11.1'deki koşuldur: $\lambda > 0$ ve x kümede iken λx de kümede olmalı.

(a) $x \in \bigcap_{i \in I} C_i$ ve $\lambda > 0$ olsun. Her $i \in I$ için $x \in C_i$ ve C_i koni olduğundan $\lambda x \in C_i$ 'dir. Bu her i için geçerli olduğundan λx kesişimdedir.

(b) $(x, y) \in C_1 \times C_2$ ve $\lambda > 0$ olsun. Skalerle çarpma bileşen bileşen yapıldığından $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ olur; C_1 ve C_2 birer koni olduğundan $\lambda x \in C_1$ ve $\lambda y \in C_2$, yani $\lambda(x, y) \in C_1 \times C_2$ 'dir.

(c) $\bar{x} \in \overline{C}$ ve $\lambda > 0$ olsun. Elemanları C kümesinden olan ve $x_k \rightarrow \bar{x}$ gerçekleyen bir $\{x_k\}$ dizisi vardır. C koni olduğundan her k için $\lambda x_k \in C$ 'dir; öte yandan skalerle çarpma sürekli olduğundan $\lambda x_k \rightarrow \lambda \bar{x}$ olur. Elemanları C kümesinden olan yakınsak bir dizinin limiti kapanışta bulunduğundan $\lambda \bar{x} \in \overline{C}$ elde edilir.

Üçünde de konveksliğin hiç kullanılmadığına dikkat ediniz; koni olma özelliği yalnızca skalerle çarpma ile ilgilidir.

Alıştırma 13.23 (Pozitif Homojen Fonksiyon Altında Koniler). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif homojen bir fonksiyon olsun.

- (a) $C \subseteq \mathbb{R}^n$ bir koni ise $f(C)$ kümesinin $\mathbb{R}$ 'de bir koni olduğunu gösteriniz.
- (b) $D \subseteq \mathbb{R}$ bir koni ise $f^{-1}(D)$ kümesinin $\mathbb{R}^n$ 'de bir koni olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Tanım 12.10 gereği her $\lambda > 0$ ve her x için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ 'tir; bütün iş bu eşitliği doğru yönde okumaktan ibarettir.

(a) $t \in f(C)$ ve $\lambda > 0$ olsun. $t = f(x)$ gerçekleyen bir $x \in C$ vardır. C koni olduğundan $\lambda x \in C$ 'dir ve pozitif homojenlik ile

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda t$$

olur. Demek ki $\lambda t \in f(C)$ 'dir.

(b) $x \in f^{-1}(D)$, yani $f(x) \in D$ ve $\lambda > 0$ olsun. Pozitif homojenlik ile $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ 'tir; D bir koni ve $f(x) \in D$ olduğundan $\lambda f(x) \in D$ olur. Böylece $f(\lambda x) \in D$, yani $\lambda x \in f^{-1}(D)$ gerçekleşir.

Norm fonksiyonu pozitif homojen olduğundan (bkz. [Tanım 12.10](#)'i izleyen açıklama) bu iki sonuç doğrudan norma uygulanabilir; destek fonksiyonu $S(\cdot, A)$ için de aynısı geçerlidir.

Alıştırma 13.24 (Negatif Yarı Eksen). $A = (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$ kümesinin konveks bir koni olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Koni. $x < 0$ ve $\lambda > 0$ ise $\lambda x < 0$, yani $\lambda x \in A$ 'dır.

Konveks. $x, y < 0$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. λ ile $1 - \lambda$ katsayıları negatif değil ve toplamları 1 olduğundan en az biri pozitifdir; dolayısıyla

$$(1 - \lambda)x + \lambda y < 0$$

gerçeklenir ve nokta A kümesindedir. (Aynı sonuç, $\mathbb{R}$ 'de konveks kümelerin tam olarak aralıklar olduğu gözleminden de okunabilir.)

İkisi birlikte A kümesinin konveks bir koni olduğunu verir. Dikkat edilirse $0 \notin A$ 'dır; [Tanım 11.1](#) yalnızca $\lambda > 0$ istediğinden bu bir çelişki yaratmaz — koniler orijini içermek zorunda değildir.

Alıştırma 13.25 (Norm ile Tanımlanan Koniler). Aşağıdaki kümelerin kapalı konveks koni olduğunu gösteriniz.

(a) $K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\| \leq t\}$

(b) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2y\}$

Çözüm.

İki şık da aynı üç adımdan geçer; (b), (a) şıkkının $n = 1$ hâlinin ölçeklenmişidir.

(a) **Koni.** $(x, t) \in K$ ve $\lambda > 0$ olsun. Normun homojenliği ile

$$\|\lambda x\| = \lambda \|x\| \leq \lambda t$$

olduğundan $\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda t) \in K$ 'dir.

Konveks. [Teorem 11.1](#) gereği konik kombinasyonları denetlemek yeter. $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in K$ ve $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ olsun; üçgen eşitsizliği ve homojenlik ile

$$\|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\| \leq \lambda_1 \|x_1\| + \lambda_2 \|x_2\| \leq \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2$$

elde edilir; yani $\lambda_1(x_1, t_1) + \lambda_2(x_2, t_2) \in K$ 'dir. Koni ve konveks olduğundan K bir konveks konidir.

Kapalı. $g(x, t) := \|x\| - t$ fonksiyonu süreklidir (norm süreklidir, çıkarma da öyle) ve $K = \{(x, t) : g(x, t) \leq 0\}$ 'dir. Sürekli bir fonksiyonun bu biçimdeki seviye kümesi kapalıdır: K kümesinde yakınsak bir dizi alınıp eşitsizlikte limite geçilirse limit noktası da koşulu sağlar.

(b) $|x| \leq 2y$ koşulu $\frac{|x|}{2} \leq y$ biçiminde yazılabilir; yani $(x, y) \in K \Leftrightarrow (\frac{x}{2}, y)$ noktası (a) şıkkındaki $n = 1$ konisindedir. Aynı üç adım harfi harfine tekrarlanır:

- $\lambda > 0$ için $|\lambda x| = \lambda |x| \leq 2\lambda y$;
- $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ için $|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2| \leq \lambda_1 |x_1| + \lambda_2 |x_2| \leq 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$;
- $(x, y) \mapsto |x| - 2y$ sürekli olduğundan küme kapalıdır.

Geometrik olarak (b), tepesi orijinde olan ve y eksenine etrafında simetrik duran bir açıdır; (a) ise onun $\mathbb{R}^{n+1}$ boyutlu hâli — literatürde **dondurma külahı konisi** diye anılan yapıdır.

Alıştırma 13.26 (Konveks Kümenin Konik Örtüsü). $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ise $\text{cone}(X)$ kümesinin konveks bir koni olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Tanım 11.3 gereği $\text{cone}(X) = \{\lambda x : \lambda \geq 0, x \in X\}$ 'tir.

Koni. $u = \alpha x \in \text{cone}(X)$ ($\alpha \geq 0, x \in X$) ve $\mu > 0$ olsun. $\mu u = (\mu\alpha)x$ ve $\mu\alpha \geq 0$ olduğundan $\mu u \in \text{cone}(X)$ 'tir.

Konveks. **Teorem 11.1** uyarınca konik kombinasyonları denetleyelim. $u = \alpha x, v = \beta y$ ($\alpha, \beta \geq 0; x, y \in X$) ve $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ olsun. Toplamın katsayılarını

$$s := \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta \geq 0$$

ile toplayalım.

- $s = 0$ ise $\lambda_1 \alpha = \lambda_2 \beta = 0$, dolayısıyla $\alpha = \beta = 0$ ve $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0 = 0 \cdot x \in \text{cone}(X)$ 'tir.
- $s > 0$ ise toplam s parantezine alınır:

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = \lambda_1 \alpha x + \lambda_2 \beta y = s \left(\frac{\lambda_1 \alpha}{s} x + \frac{\lambda_2 \beta}{s} y \right).$$

Parantez içindeki katsayılar negatif değildir ve toplamı 1'dir; yani parantez, x ile y noktalarının bir konveks kombinasyonudur. X konveks olduğundan bu nokta X kümesindedir ve $s \geq 0$ olduğundan s katı da $\text{cone}(X)$ kümesindedir.

Böylece $\text{cone}(X)$ konveks bir konidir. X kümesinin konveks olması **şarttır**: örneğin $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$ için $\text{cone}(X)$ iki ışının birleşimidir ve konveks değildir.

Alıştırma 13.27 (İki Koninin Toplamı). $\emptyset \neq K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ iki koni ise $K_1 + K_2 \subseteq \text{conv}(K_1 \cup K_2)$ kapsamasının geçerli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Püf noktası, bir toplamı konveks kombinasyona çevirmek için katsayıların toplamının 1 olması gerektir; koni olma özelliği de bunu ücretsiz sağlar.

$x_1 \in K_1$ ve $x_2 \in K_2$ olsun. K_1 ve K_2 birer koni ve $2 > 0$ olduğundan

$$2x_1 \in K_1 \subseteq K_1 \cup K_2, \quad 2x_2 \in K_2 \subseteq K_1 \cup K_2$$

geçerlidir. Şimdi toplamı bu iki noktanın konveks kombinasyonu olarak yazalım:

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(2x_1) + \frac{1}{2}(2x_2).$$

Katsayılar negatif değildir ve toplamı 1'dir; yani sağ taraf $K_1 \cup K_2$ kümesinin iki elemanının konveks kombinasyonudur. **Teorem 8.2** gereği $\text{conv}(K_1 \cup K_2)$ kümesi bu tür bütün kombinasyonları içerdiğinden $x_1 + x_2 \in \text{conv}(K_1 \cup K_2)$ elde edilir.

Kapsama genel olarak **eşitlik değildir**, ama koniler için çoğu zaman öyle olur: örneğin K_1 ile K_2 orijinden çıkan iki ışın ise her iki taraf da onların gerdiği açıdır.

Alıştırma 13.28 (İki Dual Koni Hesabı).

- $K_1 = (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$ ve $K_2 = (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ konveks konileri için $(K_1 + K_2)^*$ dual konisini belirleyiniz.
- $\{0\} \subset \mathbb{R}^n$ tek nokta konisinin dual konisini bulunuz.

Çözüm.

(a) Önce toplamı hesaplayalım. Herhangi bir $t \in \mathbb{R}$ verildiğinde, yeterince büyük bir $s > 0$ için $t - s < 0$ olur ve

$$t = \underbrace{(t - s)}_{\in K_1} + \underbrace{s}_{\in K_2}$$

yazılır. Demek ki $K_1 + K_2 = \mathbb{R}$ 'dir. Şimdi [Tanım 11.4](#) uygulanır:

$$\mathbb{R}^* = \{y \in \mathbb{R} : xy \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

$y > 0$ olsaydı $x = -1$ için çarpım negatif olurdu; $y < 0$ olsaydı $x = 1$ için negatif olurdu. Geriye yalnızca $y = 0$ kalır ve bu değer koşulu sağlar. Böylece

$$(K_1 + K_2)^* = \{0\}.$$

(b) $K = \{0\}$ için tek denetlenecek eşitsizlik $\langle 0, x^* \rangle \geq 0$, yani $0 \geq 0$ 'dır; bu her x^* için doğrudur. Dolayısıyla

$$\{0\}^* = \mathbb{R}^n.$$

İki şık birlikte, dual almanın ne kadar “ters çevirici” bir işlem olduğunu gösterir: koni büyüdükçe duali küçülür. En büyük koni olan $\mathbb{R}^n$ 'in duali en küçük koni $\{0\}$, en küçük koni $\{0\}$ 'in duali ise $\mathbb{R}^n$ 'dir.

Alıştırma 13.29 (Bir Koni Kendi Dualini Kapsar mı?). $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ konisi için $K^* \subseteq K$ kapsaması geçerli midir?

Çözüm.

Hayır, geçerli değildir. Önce duali hesaplayalım:

$$K^* = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : ax + by \geq 0, \forall x, y > 0\}.$$

Eğer $a < 0$ olsaydı, y 'yi sabit tutup x 'i büyütürsek $ax + by$ ifadesini negatif yapabiliriz; aynısı $b < 0$ için de geçerlidir. Demek ki $a \geq 0$ ve $b \geq 0$ olmalıdır. Tersine $a, b \geq 0$ ve $x, y > 0$ ise toplam negatif olamaz. Böylece

$$K^* = \{(a, b) : a \geq 0, b \geq 0\},$$

yani **kapalı** birinci bölge elde edilir.

Şimdi kapsamayı sınavalım: $(0, 0) \in K^*$ 'dir, oysa K kümesi $x > 0$ istediğinden $(0, 0) \notin K$ 'dir. Aynı biçimde $(1, 0) \in K^* \setminus K$ 'dir. Dolayısıyla $K^* \not\subseteq K$ 'dir.

Bunun şaşırtıcı olmaması gerekir. Hangi koniden üretilirse üretilsin dual koni **daima 0 noktasını içerir**, çünkü her x için $\langle x, 0 \rangle = 0 \geq 0$ 'dir; oysa K açık olduğundan orijini içermez. Bu tek gözlem, açık bir koninin dualini kapsamasını baştan olanaksız kılar.

Daha derli toplu bir okuma da mümkündür: [Lemma 11.2](#) gereği $K^* = (\overline{K})^{**}$ 'tir ve $\overline{K}$ negatif olmayan orthant olduğundan [Örnek 11.2](#) ile

$$K^* = (\overline{K})^* = \overline{K}$$

bulunur. Yani dual, K kümesinin kendisini değil **kapamışını** geri verir; kapsama ancak K kapalı olsaydı – o zaman da eşitlik olarak – doğru olurdu.

13.7 Ayrılabilme

Alıştırma 13.30 (Ayrılabilme ve Kesin Ayrılabilme).

(a) $\mathbb{R}$ uzayında $M = [2, 5)$ ile $T = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ kümeleri ayrılabilir midir?

(b) [Alıştırma 13.5](#)'ndeki A ve B kümeleri ayrılabilir midir? Kesin ayrılabilir midir?

Çözüm.

(a) Evet, üstelik kesin ayrılabilirler. İki küme de konvektir ($\mathbb{R}$ 'de aralıklar) ve $\frac{3}{2} \notin [2, 5)$ olduğundan ayrıktyrlar. [Tanım 10.3](#)'daki eşitsizliği $a = 1$ ile kuralım: her $t \in T$ ve her $m \in M$ için

$$\langle a, t \rangle = \frac{3}{2} \leq b \leq 2 \leq m = \langle a, m \rangle$$

olacak bir b arıyoruz. $b = \frac{7}{4}$ seçimi işi görür; ayıran hiperdüzlem $H = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{7}{4}\}$, yani tek bir noktadır ($\mathbb{R}$ 'de hiperdüzlemler noktalarır).

Ayrırma kesindir: $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ alınırsa her $t \in T$ için $t \leq b - \varepsilon_0 = \frac{3}{2}$ ve her $m \in M$ için $m \geq 2 > b$ gerçekleşir. Bunu Teorem 10.6'dan da okuyabilirdik: T tek noktalı olduğundan kompakt ve konvektir, $\overline{M} = [2, 5]$ kapalı ve konvektir, kesişimleri boştur.

(b) Ayrılabilirler ama kesin ayrılmazlar. A kümesinin bütün noktalarında $x > 0$, B kümesinin bütün noktalarında $x < 0$ 'dır. $a = (1, 0)$ ve $b = 0$ alınırsa her $(x, y) \in B$ için

$$\langle a, (x, y) \rangle = x < 0 = b, \quad \text{her } (x, y) \in A \text{ için } \langle a, (x, y) \rangle = x > 0 = b$$

olur; yani y eksen B ile A kümelerini ayırır. (İkisi de konveks ve Alıştırma 13.5'nde görüldüğü gibi kapalıdır, ayrıca ayrıkta; ayrılabilirlik zaten Teorem 10.5 tarafından garanti edilmişti.)

Ayrırma **kesin değildir** ve olamaz da. $(\frac{1}{k}, k) \in A$ ile $(-\frac{1}{k}, k) \in B$ noktaları arasındaki uzaklık $\frac{2}{k} \rightarrow 0$ 'dır; iki küme arasındaki uzaklık sıfır olduğundan aralarına pozitif genişlikte bir boşluk sığmaz. Tanım 10.4'daki $\varepsilon_0 > 0$ hiçbir a ve b için bulunamaz.

Eksik olan koşul kompaktlıktır: Teorem 10.6 kümelerden birinin kompakt olmasını ister, oysa A ile B yalnızca kapalıdır. Bu, Teorem 10.6'yı izleyen uyarıdaki karşı örneğin bir başka yüzüdür.

13.8 Konveks Fonksiyonlar

Alıştırma 13.31 (Dört Temel Tanım). Aşağıdaki kavramların $\mathbb{R}^n$ uzayındaki tanımlarını yazınız.

- (a) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun konveks olması.
- (b) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun x_0 noktasındaki d yönündeki yönlü türevi.
- (c) $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun grafiküstü kümesi.
- (d) $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ konisinin K^* dual konisi.

Çözüm.

(a) Grafiküstü kümesi konveks olan fonksiyonlara konveks fonksiyon denir (Tanım 11.6): f konvektir $\Leftrightarrow \text{epi}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ konveks bir kümedir. Teorem 11.2 gereği bu, her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

kiriş eşitsizliğine denktir; çoğu kaynak ikincisini doğrudan tanım olarak alır.

(b) Tanım 12.5 gereği $d \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$f'(x_0; d) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda}$$

limitidir. Limitin yalnızca $\lambda \downarrow 0$, yani **sağdan** alındığına dikkat ediniz; konveks fonksiyonlarda bu limit her yönde vardır, oysa iki taraflı türev var olmayabilir.

(c) Tanım 11.5 gereği

$$\text{epi}(h) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : h(x) \leq \alpha\},$$

yani grafiğin üstünde kalan bölgedir.

(d) Tanım 11.4 gereği

$$K^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \langle x, x^* \rangle \geq 0, \forall x \in K\},$$

yani K konisinin bütün elemanlarıyla dar açı yapan vektörlerin kümesidir.

Alıştırma 13.32 (Afin Fonksiyon: Hem Konveks Hem Konkav). $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \langle a, x \rangle + b$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonunun hem konveks hem konkav olduğunu gösteriniz ve seviye kümelerini belirleyiniz.

Çözüm.

Konvekslik ve konkavlık. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. İç çarpımın lineerliği ile

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \\
 &= \lambda \langle a, x_1 \rangle + (1-\lambda) \langle a, x_2 \rangle + \underbrace{\lambda b + (1-\lambda)b}_{=b} \\
 &= \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Kiriş eşitsizliği **eşitlikle** sağlandığından f konvektir; aynı eşitlik $-f$ için de geçerli olduğundan **Tanım 11.6** gereği f konkavdır da. Geometrik okunuşu şudur: kiriş grafiğin üstünde de altında da kalmaz, grafiğe tam olarak oturur.

Seviye kümeleri. $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$L_f(\alpha) = \{x : \langle a, x \rangle + b \leq \alpha\} = \{x : \langle a, x \rangle \leq \alpha - b\}$$

olur. $a \neq 0$ ise bu, normali a olan bir **kapalı yarı uzaydır**; $a = 0$ ise $b \leq \alpha$ olup olmamasına göre ya $\mathbb{R}^n$ ya da $\emptyset$ 'dur. Her hâlde konvektir — **Lemma 12.2** bunu zaten garanti eder.

Son bir not: tersi de doğrudur. $\mathbb{R}^n$ üzerinde hem konveks hem konkav olan reel değerli bir fonksiyon, mutlaka bu biçimdedir; yani afin fonksiyonlar, kiriş eşitsizliğini iki yönde birden sağlayan tek ailedir.

Alıştırma 13.33 (Maksimum Eşitsizliğinden Seviye Kümelerine). $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme üzerinde tanımlanmış bir $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\forall x, y \in A \text{ ve } \forall \lambda \in [0, 1] \text{ için } f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda herhangi sabit bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $L_\alpha = \{x \in A : f(x) \leq \alpha\}$ seviye kümesinin konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$x, y \in L_\alpha$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. Tanım gereği $f(x) \leq \alpha$ ve $f(y) \leq \alpha$ 'dır; iki sayının maksimumu da bu ortak üst sınırı aşamayacağından

$$\max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha$$

olur. Hipotezdeki eşitsizlik ile

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} \leq \alpha$$

elde edilir. Ayrıca A konveks olduğundan $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$ 'dır. İkisi birlikte $\lambda x + (1-\lambda)y \in L_\alpha$ demektir; yani L_α konvektir.

Buradaki koşul, konveksliğin bir adım zayıflatılmış hâlidir: kiriş eşitsizliğinde sağ taraftaki **ağırlıklı ortalama** yerine **maksimum** yazılmıştır ve ortalama daima maksimumdan küçük ya da ona eşit olduğundan her konveks fonksiyon bu koşulu sağlar. Elde edilen sonuç ise tam olarak **Tanım 12.4**'teki özelliştir; kısacası bu koşul, kuazikonveksliğin bir başka yazılışdır. Tersinin doğru olmadığını x^3 örneği gösterir.

Alıştırma 13.34 (Artan Konveks Fonksiyonla Bileşke).

- (a) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks ve artan bir fonksiyon olsun. $h(x) = T(f(x))$ bileşke fonksiyonunun konveks olduğunu gösteriniz.
- (b) $p \geq 1$ olmak üzere $f(x) = \|x\|^p$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerinde konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

(a) $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olsun. İki adımda ilerleyeceğiz; birincisinde T fonksiyonunun **artan** olması, ikincisinde **konveks** olması kullanılacak.

f konveks olduğundan

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

geçerlidir. T artan olduğundan bu eşitsizliğin iki tarafına uygulanabilir ve yön korunur — ispatın bu adımı T fonksiyonundan istenen tek şey **azalmamasıdır**, kesin artan olması gerekmez:

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) = T(f(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq T(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)).$$

Şimdi T konveks olduğundan, sağ taraftaki argümanın $f(x)$ ile $f(y)$ sayılarının konveks kombinasyonu olduğu kullanılır:

$$T(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) \leq \lambda T(f(x)) + (1 - \lambda)T(f(y)) = \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y).$$

İki eşitsizlik birleştirilirse h için giriş eşitsizliği elde edilir.

T fonksiyonunun artan olması vazgeçilmezdir: $f(x) = x^2$ konveks, $T(t) = -t$ konveks (afin) ama azalandır ve $T(f(x)) = -x^2$ konveks değildir.

(b) $g(x) = \|x\|$ fonksiyonu **Örnek 11.3** gereği konvekstir ve değerleri $[0, +\infty)$ aralığındadır. Dış fonksiyon olarak

$$T(t) = (\max\{t, 0\})^p$$

alalım; bu fonksiyon $t \geq 0$ üzerinde t^p ile çakıştığından $T(g(x)) = \|x\|^p$ olur. T fonksiyonu artandır (t büyüdükçe azalmaz) ve konvekstir: $t \leq 0$ için sabit sıfır, $t > 0$ için türevi $pt^{p-1} \geq 0$ olup $p \geq 1$ nedeniyle azalmayandır; türevin $\mathbb{R}$ üzerinde azalmaması konveksliğe denktir.

Böylece (a) şıkkı uygulanır ve $f(x) = \|x\|$ konveks çıkar. $p = 1$ durumunda sonuç zaten normun konveksliğidir; $p = 2$ durumunda $\|x\| = \langle x, x \rangle$ elde edilir ve bu, Hessian'ı $2I$ olan kesin konveks bir kuadratik formdur.

Alıştırma 13.35 (Konveks İki Fonksiyonun Çarpımı). $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları konveks ise $(f \cdot g)$ çarpım fonksiyonu da konveks midir?

Çözüm.

Hayır. İddia genel olarak yanlıştır ve bir ters örnek yeter. $\mathbb{R}$ üzerinde

$$f(x) = x, \quad g(x) = -x$$

alalım. İkisi de afin olduğundan **Alıştırma 13.32** gereği konvekstir (hatta konkavdır). Çarpımları ise

$$(f \cdot g)(x) = -x^2$$

olup $(f \cdot g)''(x) = -2 < 0$ 'dır; tek değişkenli ölçüt gereği bu fonksiyon konveks değildir. Doğrudan da görülebilir: -1 ile 1 noktalarının orta noktası 0 için

$$(f \cdot g)(0) = 0 \quad \text{oysa} \quad \frac{1}{2}(f \cdot g)(-1) + \frac{1}{2}(f \cdot g)(1) = -1$$

olduğundan giriş grafiğinin **altında** kalır.

Ters örneğin kaynağı, çarpanlardan birinin negatif değerler almasıdır. Nitekim tek değişkende ek koşullar altında iddia doğru olur: bir aralık üzerinde f ile g negatif olmayan, konveks ve aynı yönde tekdüze (ikisi de azalmayan ya da ikisi de artmayan) fonksiyonlarsa çarpımları konvekstir. Yukarıdaki örnekte g azalan, f artandır — koşul tam olarak burada bozulur.

Alıştırma 13.36 (İki Tek Değişkenli Aile). Aşağıdaki fonksiyonların $\mathbb{R}$ üzerinde konveksliklerini inceleyiniz.

(a) $f(x) = e^{\alpha x}$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < \alpha < +\infty$.

(b) $1 \leq p < +\infty$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} x^p, & x \geq 0 \\ +\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Çözüm.

(a) Fonksiyon her α için iki kez türevlenebilirdir:

$$f'(x) = \alpha e^{\alpha x}, \quad f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}.$$

Üstel fonksiyon her zaman pozitif ve $\alpha^2 \geq 0$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $f''(x) \geq 0$ 'dır; dolayısıyla f her α değeri için konvektir. $\alpha \neq 0$ ise $f'' > 0$ olduğundan kesin konvektir; $\alpha = 0$ durumunda $f \equiv 1$ sabit fonksiyonu elde edilir ve o da konvektir ama kesin konveks değildir.

(b) Burada fonksiyon genişletilmiş reel değerlidir; $\text{dom}(f) = [0, +\infty)$ 'dur. İki şey denetlenmeli.

Tanım kümesi üzerinde. $x > 0$ için

$$f'(x) = px^{p-1}, \quad f''(x) = p(p-1)x^{p-2} \geq 0$$

olur, çünkü $p \geq 1$ ve $x > 0$ 'dır. Demek ki f fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde konvektir.

Tanım kümesinin dışında. Kiriş eşitsizliğinde x_1 ya da x_2 noktalarından biri negatifse sağ taraf $+\infty$ olur ve eşitsizlik kendiliğinden sağlanır. İkisi de negatif değilse ara nokta da negatif değildir ve yukarıdaki hesap geçerlidir.

Böylece f genişletilmiş reel değerli konveks bir fonksiyondur; ayrıca $f(0) = 0 < +\infty$ ve hiçbir yerde $-\infty$ değeri almadığından Tanım 11.7 anlamında hastır. Grafiküstü kümesi $\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) : x \geq 0, \alpha \geq x^p\}$ olup konvektir.

Bu fonksiyon, $+\infty$ değerine izin vermenin ne işe yaradığının küçük bir örneğidir: " $x \geq 0$ " kısıtı ayrıca yazılmak yerine fonksiyonun içine gömülmüştür.

Alıştırma 13.37 (Konkav mıdır?). $f(x) = -\sup\{-\ln x, -\sqrt{x}\}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ kümesi üzerinde konkav mıdır?

Çözüm.

Evet, konkavdır. İşi supremum teoremine havale edelim.

Önce içerdeki iki fonksiyonun konveks olduğunu görelim. $x > 0$ üzerinde

$$\frac{d^2}{dx^2}(-\ln x) = \frac{1}{x^2} > 0, \quad \frac{d^2}{dx^2}(-\sqrt{x}) = \frac{1}{4}x^{-3/2} > 0$$

olduğundan $-\ln x$ ile $-\sqrt{x}$ fonksiyonlarının ikisi de $\mathbb{R}^+$ üzerinde (kesin) konvektir.

Teorem 11.3 gereği konveks fonksiyonların supremumu konvektir; dolayısıyla

$$g(x) := \sup\{-\ln x, -\sqrt{x}\} = \max\{-\ln x, -\sqrt{x}\}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ üzerinde konvektir. $f = -g$ olduğundan Tanım 11.6'un ikinci yarısı uyarınca f konkavdır.

İfade sadeleştirilirse aynı sonuç bir kez daha görülür:

$$f(x) = -\max\{-\ln x, -\sqrt{x}\} = \min\{\ln x, \sqrt{x}\},$$

yani f , iki konkav fonksiyonun noktasal minimumudur. Bu da aynı kapıya çıkar: Teorem 11.3'in ardından belirtildiği gibi

$$\inf\{f_i\} = -\sup\{-f_i\}$$

eşitliği nedeniyle infimum işlemi konkavlığı korur. Hangi yoldan gidilirse gidilsin sonuç aynıdır — zaten iki yol da tek bir teoremin işaret değiştirmiş hâlleridir.

Alıştırma 13.38 (Uzaklık Fonksiyonu Konvektir). $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olmak üzere, x noktasının A kümesine uzaklığını veren

$$\rho(A, x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}^n$ üzerinde konveks olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. İnfimum tanımı gereği

$$\|x_1 - a_1\| \leq \rho(A, x_1) + \varepsilon, \quad \|x_2 - a_2\| \leq \rho(A, x_2) + \varepsilon$$

gerçekleyen $a_1, a_2 \in A$ noktaları vardır. A konveks olduğundan

$$a := \lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$$

geçerlidir. Bu a noktası, $\rho(A, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ infimumunun adaylarından biridir; infimum bütün adaylardan küçük ya da onlara eşit olduğundan

$$\rho(A, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \text{parallel} \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - a \text{ parallel} = \text{parallel} \lambda(x_1 - a_1) + (1 - \lambda)(x_2 - a_2) \text{ parallel}$$

yazılır. Üçgen eşitsizliği ve normun homojenliği ile sağ taraf

$$\leq \lambda \|x_1 - a_1\| + (1 - \lambda) \|x_2 - a_2\| \leq \lambda \rho(A, x_1) + (1 - \lambda) \rho(A, x_2) + \varepsilon$$

olarak sınırlanır. Buradaki $\varepsilon > 0$ herhangi olduğundan $\varepsilon \rightarrow 0^+$ için istenen giriş eşitsizliği elde edilir. İspatta ε kullanılmasının nedeni, infimumun bir noktada **alınmak zorunda olmamasıdır**: A kapalı değilse en yakın nokta var olmayabilir ve $\|x_i - a_i\|$ değerini tam olarak $\rho(A, x_i)$ yapan bir a_i bulunamaz. A kapalı olduğunda **Teorem 10.2** gereği bu noktalar vardır ve ε 'a hiç gerek kalmaz. A kümesinin konveks olması vazgeçilmezdir: $A = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ için $\rho(A, x) = ||x| - 1|$ olup $x = 0$ noktasında giriş grafiğin altına düşer.

13.9 Hessian ile Konvekslik Denetimi

Alıştırma 13.39 (Üç Kuadratik Form). Aşağıdaki fonksiyonların konveksliğini inceleyiniz.

- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$, $\mathbb{R}^2$ 'de.
- (b) $f(x, y, z) = 3x^2 + 6xz + y^2 - 4yz + 8z^2$, $\mathbb{R}^3$ 'te.
- (c) $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 4xz + 3y^2 + yz + 7z^2$, $\mathbb{R}^3$ 'te.

Çözüm.

Üçünde de fonksiyon ikinci dereceden olduğundan Hessian sabittir; tek bir matris hesabı bütün noktalar için yeter. Üçünde de öncü esas minörler pozitif çıkacağından **Lemma 12.1** (Sylvester kriteri) yolu izlenir ve sonuç **kesin konveks** olur.

(a) Birinci mertebeden türevler $f_x = 2x + 1$ ve $f_y = 2y + 1$ olduğundan

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 4 > 0.$$

Hessian pozitif tanımlıdır; **Teorem 12.1** gereği f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde kesin konvekstir. Doğrusal terimler $(x + y)$ Hessian'a hiç girmez – afin bir ek, konveksliği değiştirmez.

(b) Birinci mertebeden türevler

$$f_x = 6x + 6z, \quad f_y = 2y - 4z, \quad f_z = 6x - 4y + 16z$$

olduğundan ikinci mertebeden türevler $f_{xx} = 6, f_{xy} = 0, f_{xz} = 6, f_{yy} = 2, f_{yz} = -4, f_{zz} = 16$ ve

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 6 & -4 & 16 \end{pmatrix}$$

bulunur. Öncü esas minörler:

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det H = 6(2 \cdot 16 - 16) - 0 + 6(0 - 12) = 96 - 72 = 24 > 0.$$

Üçü de pozitif olduğundan H pozitif tanımlıdır ve f fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde kesin konvekstir.

(c) Birinci mertebeden türevler

$$f_x = 2x + 2y + 4z, \quad f_y = 2x + 6y + z, \quad f_z = 4x + y + 14z$$

olduğundan

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Öncü esas minörler:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 12 - 4 = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = 2(84 - 1) - 2(28 - 4) + 4(2 - 24) = 166 - 48 - 88 = 30 > 0.$$

Yine pozitif tanımlıdır; f kesin konvektir.

Alıştırma 13.40 (Konveks mi, Kesin Konveks mi, Konveks Değil mi?). $f(x, y, z) = (x - y)^2 + 2z^2$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^3$ 'teki konveksliğini inceleyip sonucu bu üç ifadeden biriyle belirtiniz.

Çözüm.

Açarsak $f(x, y, z) = x^2 - 2xy + y^2 + 2z^2$ olur. Birinci mertebeden türevler

$$f_x = 2x - 2y, \quad f_y = -2x + 2y, \quad f_z = 4z$$

olduğundan

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

bulunur; Hessian yine sabittir.

Önce Sylvester'ı deneyelim. Öncü esas minörler

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0, \quad \Delta_3 = \det H = 4 \cdot 0 = 0$$

biçimindedir. Δ_2 ile Δ_3 pozitif olmadığından **Lemma 12.1 uygulanmaz**: matris pozitif tanımlı değildir, dolayısıyla bu yoldan kesin konvekslik çıkmaz.

Şimdi konveksliğe bakalım. Bunun için tablonun ikinci satırındayız: bütün esas minörler denetlenmeli, öncü olanlar yetmez. 3×3 bir matriste $2^3 - 1 = 7$ tane esas minör vardır:

- birinci mertebeden (köşegen elemanları): 2, 2, 4 – hepsi ≥ 0 ;
- ikinci mertebeden: $\{1, 2\}$ seçimi $4 - 4 = 0$; $\{1, 3\}$ seçimi $2 \cdot 4 = 8$; $\{2, 3\}$ seçimi $2 \cdot 4 = 8$ – hepsi ≥ 0 ;
- üçüncü mertebeden: $\det H = 0 \geq 0$.

Yedisi de negatif olmadığından H pozitif **yarı-tanımlıdır** ve **Teorem 12.1** gereği f fonksiyonu $\mathbb{R}^3$ üzerinde **konvektir**.

Kesin konveks değildir. Bunu ayrıca göstermek gerekir, çünkü Hessian kriterinin yalnızca “pozitif tanımlı $\Rightarrow$ kesin konveks” yönü vardır. $d = (1, 1, 0)$ yönünü alalım:

$$f(t, t, 0) = (t - t)^2 + 0 = 0$$

olduğundan f fonksiyonu bu doğru boyunca sabittir. Sabit bir fonksiyon üzerinde kırılgan grafiğe tam oturur, yani kesin eşitsizlik bozulur. Aynı şey $\langle d, Hd \rangle = 0$ hesabından da okunur.

Sonuç: f konvektir, kesin konveks değildir. Bu problem, öncü esas minörlerle bütün esas minörler arasındaki ayrımın neden önemli olduğunun tam örneğidir: öncü minörlere bakıp “ $\Delta_2 = 0$, demek ki konveks değil” demek yanlış olurdu.

Alıştırma 13.41 (Bir Kesirli Fonksiyon). $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$ fonksiyonunun $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ kümesi üzerindeki konveksliğini inceleyiniz.

Çözüm.

Tanım kümesi $C = \{(x, y) : y > 0\}$ açık ve konveks bir kümedir; **Teorem 12.1** tam olarak böyle kümelerde uygulanır.

Birinci mertebeden türevler

$$f_x = \frac{2x}{y}, \quad f_y = -\frac{x^2}{y^2}$$

olduğundan ikinci mertebeden türevler

$$f_{xx} = \frac{2}{y}, \quad f_{xy} = f_{yx} = -\frac{2x}{y^2}, \quad f_{yy} = \frac{2x^2}{y^3}$$

ve

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{y} & -\frac{2x}{y^2} \\ -\frac{2x}{y^2} & \frac{2x^2}{y^3} \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu kez Hessian sabit değildir, ama işareti her noktada aynı çıkacaktır.

Bütün esas minörleri yazalım ($n = 2$ için üç tane vardır):

$$\frac{2}{y} > 0, \quad \frac{2x^2}{y^3} \geq 0, \quad \det H = \frac{2}{y} \cdot \frac{2x^2}{y^3} - \frac{4x^2}{y^4} = \frac{4x^2}{y^4} - \frac{4x^2}{y^4} = 0.$$

$y > 0$ olduğundan üçü de negatif değildir; dolayısıyla $H(x, y)$ her noktada pozitif yarı-tanımlıdır ve f fonksiyonu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ üzerinde **konvektir**.

Determinantın her noktada sıfır olması, fonksiyonun kesin konveks olmadığını sezdirir; nitekim $t > 0$ için

$$f(tx, ty) = \frac{t^2 x^2}{ty} = t \cdot \frac{x^2}{y} = t f(x, y)$$

olduğundan f pozitif homojendir (**Tanım 12.10**) ve orijinden çıkan her ışın boyunca doğrusaldır. Bir doğru parçası üzerinde doğrusallaşan fonksiyon kesin konveks olamaz.

Alıştırma 13.42 (Üstellerin Toplamının Logaritması). $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ 'deki konveksliğini inceleyiniz.

Çözüm.

Kısaltma için $S := e^x + e^y > 0$ yazalım. Birinci mertebeden türevler

$$f_x = \frac{e^x}{S}, \quad f_y = \frac{e^y}{S}$$

olur. İkinci mertebeden türevler bölme kuralıyla hesaplanır:

$$f_{xx} = \frac{e^x S - e^x \cdot e^x}{S^2} = \frac{e^x e^y}{S^2}, \quad f_{yy} = \frac{e^x e^y}{S^2}, \quad f_{xy} = -\frac{e^x e^y}{S^2}.$$

Ortak çarpan dışarı alınırsa

$$H(x, y) = \frac{e^{x+y}}{S^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilir; buradaki $c := e^{x+y}/S^2$ sayısı her noktada pozitiftir.

Esas minörler: köşegen elemanları $c > 0$ ve $c > 0$; determinant ise

$$\det H = c^2(1 \cdot 1 - (-1)(-1)) = 0.$$

Üçü de negatif olmadığından H her noktada pozitif yarı-tanımlıdır ve f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde **konvektir**.

Kesin konveks değildir: $d = (1, 1)$ yönünde $\langle d, Hd \rangle = c(1 - 1 - 1 + 1) = 0$ 'dır. Nitekim $f(x + t, y + t) = f(x, y) + t$ olduğundan fonksiyon köşegen doğrultusunda tam olarak doğrusaldır.

Alıştırma 13.43 (Konveksliği Bozan Bir Çarpım). $f(x, y) = xe^y + ye^x$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ 'deki konveksliğini inceleyiniz.

Çözüm.

Birinci mertebeden türevler

$$f_x = e^y + ye^x, \quad f_y = xe^y + e^x$$

olduğundan

$$f_{xx} = ye^x, \quad f_{xy} = e^y + e^x, \quad f_{yy} = xe^y$$

ve

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} ye^x & e^x + e^y \\ e^x + e^y & xe^y \end{pmatrix}$$

bulunur. Tek bir noktada koşulun bozulması, fonksiyonun konveks olmaması için yeter. Orijini alalım:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det H(0, 0) = -4 < 0.$$

Determinant bir esas minördür ve negatiftir; dolayısıyla $H(0, 0)$ pozitif yarı-tanımlı değildir ve **Teorem 12.1** gereği f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde **konveks değildir**.

Aynı sonuç bir doğru üzerinde de görülebilir: $g(t) := f(t, t) = 2te^t$ fonksiyonunun ikinci türevi

$$g''(t) = 2e^t(t + 2)$$

olup $t < -2$ için negatiftir. Konveks bir fonksiyon her doğru üzerinde konveks olmak zorunda olduğundan (bölümün açılışındaki kesit fikri) bu tek başına iddiayı çürütür.

Not: f fonksiyonu eksenler üzerinde doğrusaldır $f(x, 0) = x$ ve $f(0, y) = y$ — yani “kötü davranış” ancak eksenlerin dışına çıktığında görünür. Konveksliği tek bir doğru üzerinde denetlemenin yeterli olmadığını gösteren iyi bir örnektir.

Alıştırma 13.44 (Konveksliğin Bölgeye Bağlı Olması). $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ 'deki konveksliğini inceleyiniz.

Çözüm.

Birinci mertebeden türevler

$$f_x = 2x - 2y, \quad f_y = -2x + y^2 - 3$$

olduğundan ikinci mertebeden türevler $f_{xx} = 2, f_{xy} = -2, f_{yy} = 2y$ ve

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2y \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu kez Hessian y değişkenine bağlıdır; sonuç da bölgeye bağlı çıkacaktır.

Esas minörler 2, $2y$ ve $\det H = 4y - 4$ 'tür. Hepsinin negatif olmaması için

$$2 \geq 0 \text{ (daima)}, \quad 2y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0, \quad 4y - 4 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$$

koşulları gerekir; üçü birlikte $y \geq 1$ verir.

- $y > 1$ olan açık yarı düzlemde $\Delta_1 = 2 > 0$ ve $\Delta_2 = 4y - 4 > 0$ olduğundan Hessian pozitif tanımlıdır: f orada **kesin konvektir**. Süreklilikle $\{(x, y) : y \geq 1\}$ kapalı yarı düzleminde de konvektir.
- $y < 1$ olan noktalarda $\det H = 4y - 4 < 0$ olduğundan Hessian pozitif yarı-tanımlı değildir.

Dolayısıyla f fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ 'nin **tamamında konveks değildir**; konveks olduğu en büyük bölge $y \geq 1$ yarı düzlemidir. Konveksliği bozan terim $\frac{1}{3}y^3$ 'tür: tek değişkenli karşılığının ikinci türevi $2y$ olup $y < 0$ bölgesinde negatiftir, çapraz terim $-2xy$ ise eşiği $y = 0$ 'dan $y = 1$ 'e taşımıştır.

Buradaki ders şudur: “bu fonksiyon konveks midir?” sorusunun cevabı çoğu zaman **hangi küme üzerinde** diye sorulmadan verilemez.

13.10 Yönlü Türev ve Subdiferansiyel

Alıştırma 13.45 (Subdiferansiyel, Tek Yanlı Türevler Arasındaki Aralıktır). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $x_0 \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\partial f(x_0) = [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$$

eşitliğini gösteriniz; burada f'_- ve f'_+ sırasıyla soldan ve sağdan türevleri göstermektedir.

Çözüm.

Önce konveks fonksiyonların temel gözlemini yazalım: $x_1 < x_0 < x_2$ için **üç kiriş eşitsizliği**

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}$$

geçerlidir. Bu, $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ yazıp ($\lambda = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$) kiriş eşitsizliğini düzenlemekten ibarettir. Sonucu şöyle okuyabiliriz: $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ fark bölümü, x değişkeninin azalmayan bir fonksiyonudur. Dolayısıyla

$$f'_-(x_0) = \sup_{x < x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_+(x_0) = \inf_{x > x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limitleri vardır ve $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ 'dir.

Şimdi Tanım 12.6'ı açalım. Bir $x^* \in \mathbb{R}$ sayısı için

$$x^* \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } f(x) - f(x_0) \geq x^*(x - x_0).$$

Üç durumu ayrı ayrı inceleyelim.

- $x = x_0$ için eşitsizlik $0 \geq 0$ olur ve her x^* bunu sağlar.
- $x > x_0$ için $x - x_0 > 0$ ile bölünür ve yön korunur:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq x^*.$$

Bu, sağ taraftaki bütün fark bölümlerinin x^* sayısını aşması demektir; infimum alındığında koşul $x^* \leq f'_+(x_0)$ hâline gelir.

- $x < x_0$ için $x - x_0 < 0$ ile bölünür ve yön **değişir**:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq x^*.$$

Supremum alındığında koşul $x^* \geq f'_-(x_0)$ olur.

Üçü birlikte $x^* \in \partial f(x_0) \Leftrightarrow f'_-(x_0) \leq x^* \leq f'_+(x_0)$ verir; yani iddia edilen eşitlik doğrudur.

İki doğal sonuç: (i) subdiferansiyel daima kapalı bir aralıktır, dolayısıyla kapalı ve konveks bir kümedir;

(ii) f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, yani $\partial f(x_0)$ kümesinin **tek noktalı** olmasıdır — bu durumda tek eleman $f'(x_0)$ 'dir.

Alıştırma 13.46 (Subgradient Yönlü Türevi Alttan Sınırlar). $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ has konveks bir fonksiyon ve $x_0 \in \text{dom}(f)$ olsun. Eğer $g_0 \in \partial f(x_0)$ ise her $d \in \mathbb{R}^n$ için

$$f'(x_0; d) \geq \langle g_0, d \rangle$$

eşitsizliğinin gerçekleştiğini gösteriniz.

Çözüm.

g_0 bir subgradient olduğundan [Tanım 12.6](#) gereği her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle g_0, x - x_0 \rangle$$

geçerlidir. Bu eşitsizliği herhangi bir $d \in \mathbb{R}^n$ yönü ve $\lambda > 0$ için $x = x_0 + \lambda d$ noktasında kullanalım. $x - x_0 = \lambda d$ olduğundan

$$f(x_0 + \lambda d) - f(x_0) \geq \langle g_0, \lambda d \rangle = \lambda \langle g_0, d \rangle$$

elde edilir. $\lambda > 0$ olduğundan iki taraf λ ile bölünebilir ve yön korunur:

$$\frac{f(x_0 + \lambda d) - f(x_0)}{\lambda} \geq \langle g_0, d \rangle.$$

Sağ taraf λ değişkenine bağlı olmadığından, sol tarafta $\lambda \downarrow 0$ için limite geçilebilir. [Tanım 12.5](#) gereği bu limit tam olarak $f'(x_0; d)$ olduğundan

$$f'(x_0; d) \geq \langle g_0, d \rangle$$

bulunur.

Sonucun anlamı şudur: bir subgradient, fonksiyonun hiçbir yönde kendisinden daha hızlı **azalması** **yacağını** garanti eder. Nitekim aslında daha fazlası doğrudur — konveks fonksiyonlarda $f'(x_0; d) = \max\{\langle g, d \rangle : g \in \partial f(x_0)\}$ eşitliği geçerlidir; yönlü türev, subdiferansiyelin d yönündeki destek fonksiyonudur ([Tanım 12.8](#)). Yukarıda gösterilen, bu eşitliğin kolay yönüdür.

Alıştırma 13.47 (Parçalı Bir Fonksiyonun Subdiferansiyeli). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. f fonksiyonunun konveks olduğunu grafiküstü kümesini çizerek gösteriniz, $x = 0$ noktasındaki türevini araştırınız ve $\partial f(0)$ kümesini belirleyiniz.

Çözüm.

Konvekslik. Fonksiyon $x = 0$ noktasında süreklidir: soldan $0^2 = 0$, sağdan 0 ve $f(0) = 0$ 'dır. Türev

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

biçimindedir. $x < 0$ bölgesinde $2x$ artarak 0 değerine yaklaşır; $x > 0$ bölgesinde sabit 1 'dir. Dolayısıyla türev bütün eksen boyunca azalmayan bir fonksiyondur ve bu, tek değişkende konveksliğe denktir.

Grafiküstü kümesi diliyle aynı şey şöyle okunur: epi (f) kümesi, solda parabolün, sağda $y = x$ doğrusunun üstünde kalan bölgedir; iki parça $x = 0$ noktasında hem değer hem de “yukarı bükülme” yönü bakımından uyumlu biçimde birleşir ve elde edilen bölge konvektir. [Tanım 11.6](#) gereği f konvektir.

$x = 0$ noktasındaki türev. Tek yanlı türevleri hesaplayalım:

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h = 0,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

İkisi eşit olmadığından f fonksiyonu $x = 0$ noktasında **türevlenebilir değildir**; grafikte bir kırılma vardır.

Subdiferansiyel. [Alıştırma 13.45](#) gereği doğrudan

$$\partial f(0) = [f'_-(0), f'_+(0)] = [0, 1]$$

yazılır. Aynı sonucu tanımdan da doğrulayalım: her x için $f(x) \geq x^*x$ olmalıdır.

- $x > 0$ için $x \geq x^*x$ olup $x > 0$ ile bölünürse $x^* \leq 1$;
- $x < 0$ için $x^2 \geq x^*x$ olup **negatif** olan x ile bölünürse yön değişir ve $x \leq x^*$ bulunur; bu her $x < 0$ için istendiğinden $x^* \geq 0$;
- $x = 0$ için koşul $0 \geq 0$ 'dır.

Üçü birlikte $0 \leq x^* \leq 1$, yani $\partial f(0) = [0, 1]$ verir. Sıfırdan farklı noktalarda fonksiyon türevlenebilir olduğundan subdiferansiyel tek noktalıdır: $x < 0$ için $\partial f(x) = \{2x\}$, $x > 0$ için $\partial f(x) = \{1\}$.

Alıştırma 13.48 (Üç Maksimum Fonksiyonunun Subdiferansiyeli). Aşağıdaki fonksiyonların konveks olduğunu gösteriniz, parçalı biçimde yazınız ve belirtilen noktadaki subdiferansiyellerini belirleyiniz.

- (a) $f(x) = \max\{1, x\}$, $\partial f(1) = ?$
 (b) $f(x) = \max\{x, 4 - x\}$, $\partial f(2) = ?$
 (c) $f(x) = \max\{e^x, 1 - x\}$, $\partial f(0) = ?$

Çözüm.

Ortak gerekçe. Üç fonksiyon da iki konveks fonksiyonun noktasal maksimumudur; [Teorem 11.3](#) gereği (iki elemanlı bir indis kümesiyle) hepsi konvekstir. Kırılma, iki parçanın eşitlendiği noktada oluşur ve orada [Alıştırma 13.45](#) doğrudan uygulanır: subdiferansiyel, soldan ve sağdan türevler arasındaki kapalı aralıktır.

(a) $1 \leq x \Leftrightarrow x \geq 1$ olduğundan

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

Kırılma noktası $x_0 = 1$ 'dir ve $f(1) = 1$ 'dir. Soldan türev sabit parçadan gelir: $f'_-(1) = 0$. Sağdan türev doğrusal parçadan gelir: $f'_+(1) = 1$. Böylece

$$\partial f(1) = [0, 1].$$

(b) $x \geq 4 - x \Leftrightarrow x \geq 2$ olduğundan

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x, & x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

ve $f(2) = 2$ 'dir. Soldan gelen parçanın eğimi -1 , sağdan gelenin eğimi $+1$ olduğundan

$$f'_-(2) = -1, \quad f'_+(2) = 1, \quad \partial f(2) = [-1, 1].$$

(c) Hangi parçanın nerede büyük olduğunu bulmak için $h(x) := e^x - (1 - x) = e^x + x - 1$ farkına bakalım. $h(0) = 0$ ve $h'(x) = e^x + 1 > 0$ olduğundan h kesin artandır; dolayısıyla $x < 0$ için $h(x) < 0$, $x > 0$ için $h(x) > 0$ 'dır. Demek ki

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$$

ve $f(0) = 1$ 'dir. Tek yanlı türevler $f'_-(0) = -1$ ve $f'_+(0) = e^0 = 1$ olduğundan

$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

Ortak kural. Üç şıkta da sonuç, kırılma noktasında eşitlenen iki parçanın oradaki türevleri arasındaki aralıktır:

$$\partial f(x_0) = \text{conv} \{ f'_1(x_0), f'_2(x_0) \} .$$

Bunun sezgisi [Tanım 12.6](#)'ın geometrik okunuşundan gelir: kırılma noktasında grafiğe alttan yaslanabilen doğru **tek** değildir; iki parçanın teğetleri arasında kalan bütün eğimler işe yarar. Aynı olguyu [Örnek 12.4](#)'ta $f(x) = |x| = \max\{x, -x\}$ için de görmüştük; orada iki parçanın eğimleri -1 ile 1 olduğundan $\partial f(0) = [-1, 1]$ çıkmıştı.