

Kompleks Analiz

2. Bölüm — İleri Konular

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 20 Eylül 2026

İçindekiler

Giriş	7
1 Cauchy-Goursat Teoremi	9
1.1 Green Teoremiyle İlk Biçim	9
1.2 Türevin Sürekliliği Neden Gereksiz?	9
1.3 Kare Örtüsü Lemması	10
1.4 Teoremin İfadesi	11
1.5 Alıştırma	13
2 Basit ve Çok Bağlantılı Domenler	17
2.1 Basit Bağlantılı Domenler	17
2.2 Ters Türevin Varlığı	18
2.3 Çok Bağlantılı Domenler	19
2.4 Yolun Deformasyonu İlkesi	20
2.5 Alıştırma	21
3 Cauchy İntegral Formülü ve Genişlemesi	23
3.1 Cauchy İntegral Formülü	23
3.2 Türevler İçin Genişleme	25
3.3 Üç Temel Sonuç	27
3.4 Alıştırma	28
4 Liouville Teoremi ve Cebirin Temel Teoremi	31
4.1 Liouville Teoremi	31
4.2 Cebirin Temel Teoremi	31
4.3 Lineer Çarpanlara Ayrılış	33
4.4 Alıştırma	34
5 Maksimum Modül İlkesi	37
5.1 Gauss Ortalama Değer Teoremi	37
5.2 Yerel Maksimum Lemması	37
5.3 Maksimum Modül İlkesi	38
5.4 Kapalı Bölgelerde Sonuç	39
5.5 Harmonik Fonksiyonlara Uygulanışı	40
5.6 Alıştırma	40
6 Dizilerin ve Serilerin Yakınsaklığı	43
6.1 Dizilerin Yakınsaklığı	43
6.2 Serilerin Yakınsaklığı	44

6.3	Kalanlarla Yakınsaklık Ölçütü	45
6.4	Alıştırma	46
7	Taylor Serileri	49
7.1	Taylor Teoremi	49
7.2	Temel Maclaurin Açılımları	51
7.3	Geometrik Açılım ve Kaydırmalar	52
7.4	Alıştırma	54
8	Laurent Serileri	57
8.1	Laurent Teoremi	57
8.2	Çözümlü Uygulamalar	59
8.3	Aynı Fonksiyon, Üç Farklı Halka	60
8.4	Alıştırma	62
9	Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı	65
9.1	Yakınsaklık Çemberi	65
9.2	Düzgün Yakınsaklık	67
9.3	Toplamın Sürekliliği	68
9.4	Negatif Kuvvetli Serilere Uyarılama	69
9.5	Alıştırma	70
10	Kuvvet Serileriyle İşlemler	73
10.1	Terim Terime İntegrasyon	73
10.2	Terim Terime Türetme	74
10.3	Temsillerin Tekliği	75
10.4	Çarpım ve Bölüm	76
10.5	Alıştırma	78
11	Ayrık Tekil Noktalar ve Rezidü	81
11.1	Ayrık Tekil Noktalar	81
11.2	Rezidü	82
11.3	Çözümlü Uygulamalar	83
11.4	Alıştırma	85
12	Cauchy Rezidü Teoremi ve Sonsuzdaki Rezidü	87
12.1	Cauchy Rezidü Teoremi	87
12.2	Sonsuzdaki Rezidü	88
12.3	Alıştırma	91
13	Ayrık Tekil Noktaların Üç Tipi	95
13.1	Esas Kısım	95
13.2	Sınıflandırma	95
13.3	Kutuplarda Rezidü	97

13.4	Çözümlü Uygulamalar	98
13.5	Alıştırma	100
14	Sıfırlar ve Kutuplar	103
14.1	Analitik Fonksiyonların Sıfırları	103
14.2	Sıfırlar Ayrıktır	104
14.3	Sıfırlardan Kutuplara	105
14.4	Basit Kutuplar İçin Rezidü Formülü	106
14.5	Çözümlü Uygulamalar	106
14.6	Alıştırma	108
15	Tekil Noktaların Civarında Davranış	111
15.1	Kutupta: Modül Sonsuza Gider	111
15.2	Kaldırılabilir Tekillikte: Sınırlılık	111
15.3	Esaslı Tekillikte: Casorati-Weierstrass	112
15.4	Üç Tipin Karşılaştırması	114
15.5	Alıştırma	114
16	Has Olmayan İntegrallerin Hesaplanması	117
16.1	Has Olmayan İntegral ve Esas Değer	117
16.2	Çift Fonksiyonlarda İndirgeme	118
16.3	Yarım Çember Yöntemi	119
16.4	Tam Çözümlü Örnek	120
16.5	Alıştırma	122
17	Fourier İntegralleri ve Jordan Lemması	125
17.1	Neden Doğrudan Uygulanamaz?	125
17.2	Çözümlü Örnek: Kosinüs	125
17.3	Jordan Lemması	126
17.4	Çözümlü Örnek: Jordan Lemmasıyla	128
17.5	Alıştırma	129
18	Girintili Yollar	131
18.1	Yarım Çember Limit Teoremi	131
18.2	$\sin x / x$ İntegrali	132
18.3	Dallanma Noktası Çevresinde Girinti	134
18.4	Alıştırma	136
19	Dal Kesimi Boyunca İntegrasyon	139
19.1	Yöntemin Kurulumu	139
19.2	İki Yakanın Farkı	140
19.3	Rezidü Teoreminin Uygulanması	140
19.4	Çemberlerin Katkısı Sönüyor	141

19.5	Sonuç: $\pi / \sin a\pi$	141
19.6	Alıştırma	142
20	Sinüs ve Kosinüs İçeren Belirli İntegraller	145
20.1	Dönüşüm	145
20.2	Çözümlü Örnek	146
20.3	Kat Açılı İntegrandlar	147
20.4	Alıştırma	148
21	Argüman İlkesi ve Rouché Teoremi	153
21.1	Meromorf Fonksiyonlar ve Dolanma Sayısı	153
21.2	Argüman İlkesi	154
21.3	Rouché Teoremi	155
21.4	Çözümlü Uygulamalar	156
21.5	Alıştırma	157
22	Ters Laplace Dönüşümü	159
22.1	Bromwich İntegrali	159
22.2	Rezidü Toplamına İndirgeme	160
22.3	Rezidü Hesabında Kısayollar	161
22.4	Çözümlü Uygulamalar	161
22.5	Alıştırma	164

Giriş

Kompleks analiz, karmaşık düzlemde tanımlı fonksiyonların türev ve integralini inceleyerek reel analizde ulaşılamayan sonuçlara varır. Analitik bir fonksiyonun tek bir türevinin varlığının sonsuz kez türevlenebilirliği gerektirmesi gibi şaşırtıcı sonuçlarıyla matematiğin en zarif dallarından biridir.

Not

Aşağıdaki müfredattaki tüm başlıkların notları hazırdır ve bağlantılardan ulaşılabilir.

1. Cauchy-Goursat Teoremi

Ters türevler bölümünde şunu görmüştük: sürekli bir f fonksiyonunun bir D domeninde ters türevi varsa, D 'de kalan her kapalı çevre üzerindeki integrali sıfırdır. Ama ters türevin varlığını önceden bilmek çoğu zaman mümkün değildir. Bu bölümün teoremi, çok daha kolay denetlenen bir koşulla – **analitiklikle** – aynı sonucu verir ve kompleks analizin bütün integral kuramını taşıyan sütun hâline gelir.

1.1 Green Teoremiyle İlk Biçim

$C, z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) pozitif yönlü basit kapalı bir çevre; f, C üzerinde ve içinde analitik olsun. **Çevre integralinin tanımıyla**

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt$$

$f = u + iv$ ve $z(t) = x(t) + iy(t)$ yazılıp çarpım açılırsa integral, iki reel eğrisel integrale ayrışır:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \quad (1)$$

Bu ayrışım biçimsel olarak $f dz = (u + iv)(dx + i dy)$ çarpımından da okunabilir. Şimdi f' türevinin, C 'nin kapattığı kapalı R bölgesinde **sürekli** olduğunu geçici olarak varsayalım; o zaman u ve v 'nin birinci mertebe kısmi türevleri de R 'de sürekli ve Green teoremi uygulanabilir:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R (Q_x - P_y) dA$$

İki eğrisel integrale de uygulanırsa

$$\int_C f(z) dz = \iint_R (-v_x - u_y) dA + i \iint_R (u_x - v_y) dA \quad (2)$$

Fakat f analitik olduğundan **Cauchy-Riemann denklemleri** $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ geçerlidir; iki katlı integrallerin integrandları R 'de özdeş olarak sıfırdır. Sonuç:

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (3)$$

i Yön önemsizdir

İntegralin sıfır olduğu bir kez saptandığında C 'nin yönü fark etmez; negatif yönde alındığında

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz = 0$$

olur. Teoremdeki “pozitif yönlü” koşulu, yalnızca ispat kolaylığı içindir.

1.2 Türevin Sürekliliği Neden Gereksiz?

Yukarıdaki ispatın zayıf noktası, f' türevinin sürekliliğinin **varsayılmış** olmasıdır. Bu koşulun gereksiz olduğunu ilk kanıtlayan Goursat'dır ve katkısı kozmetik değildir: koşul kaldırıldığı için, analitik bir fonk-

siyonun türevi f' 'nin de analitik olduğunu — dolayısıyla f' 'nin sonsuz kez türevlenebildiğini — döngüye düşmeden kanıtlayabiliriz. Bu sonuca **Cauchy integral formülünün genişletilmiş biçiminde** ulaşacağız.

i Kısa bir tarih: Cauchy'den Goursat'ya

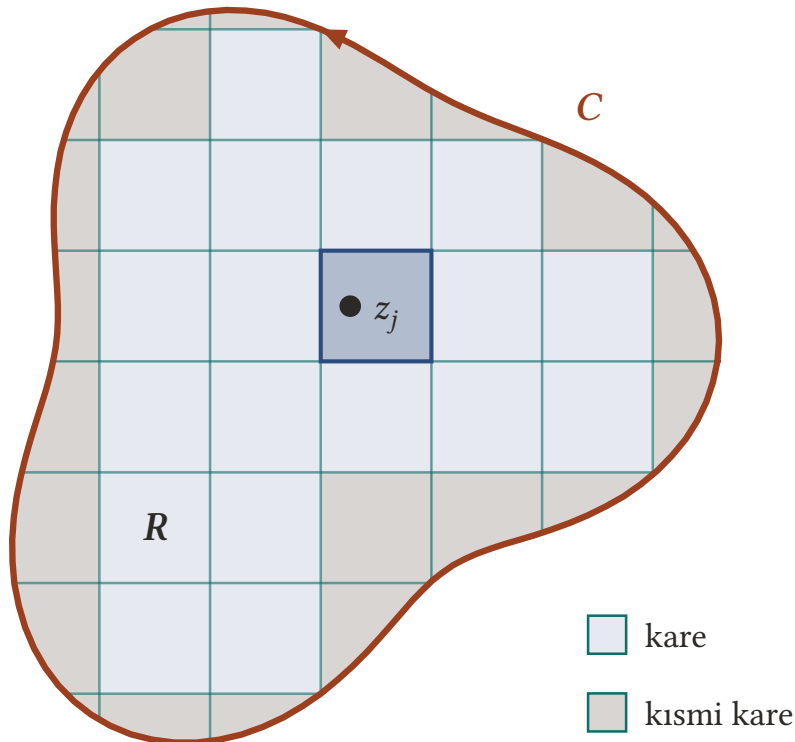
Yukarıdaki sonuç, adını Augustin-Louis Cauchy'den (1789–1857) alır. Cauchy, sanal sınırlar arasındaki belirli integralleri konu alan 1825 tarihli ünlü çalışmasında (*Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*) bu teoremi kurmuş, ancak ispatında f' türevinin sürekliliğini varsaymıştı.

Yaklaşık altmış yıl sonra Édouard Goursat (1858–1936), 1884'te *Acta Mathematica*'da yayımlanan kısa bir notta bu fazladan varsayımın gereksiz olduğunu gösterdi ve fikri 1900'de Amerikan Matematik Derneği'nin *Transactions* dergisinde daha olgun bir biçimde yeniden sundu. Kısa süre sonra Alfred Pringsheim aynı bölme fikrini karelerin yerine üçgenlerle işledi; birçok modern kitapta karşılaşılan üçgen argümanı buradan gelir. Teorem, iki matematikçinin katkısını birlikte anmak için **Cauchy-Goursat teoremi** diye anılır.

İspat iki adımlıdır: önce bölgeyi, üzerinde fark bölümünün türevden çok az saptığı küçük karelerle örten bir lemma kurulur; sonra integral bu karelerin sınırları üzerinde dağıtılır. Lemma teoreminden önce geldiği için onunla başlıyoruz.

1.3 Kare Örtüsü Lemması

C pozitif yönlü basit kapalı bir çevre, R ise C ile içindeki noktalardan oluşan kapalı bölge olsun. R 'yi, eksenlere paralel eşit aralıklı doğrularla çizilen bir ızgarayla örtelim. Izgaranın oluşturduğu kapalı kare bölgelerden R 'nin dışına taşan parçalar atılırsa, R sonlu sayıda **kare** ve **kısmi kare** ile örtülür.



Şekil 1.1: R bölgesi (C ile içi) eksenlere paralel bir ızgarayla örtülür: tamamen C 'nin içinde kalan hücreler **kare**, C 'nin kestiği hücrelerin R 'de kalan parçaları **kısmi kare**dir. Her alt bölgede lemmanın sabit z_j noktası seçilir; kısmi karenin sınırı, kare kenarlarının parçalarının yanı sıra C 'nin yaylarını da içerir.

Teorem 1.1 (Örtü Lemması). f, R üzerinde analitik olsun. Her $\varepsilon > 0$ için R bölgesi, $j = 1, 2, \dots, n$ ile indislenmiş sonlu sayıda kare ve kısmi kareyle örtülebilir; öyle ki her birinde sabit bir z_j noktası vardır ve

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon \quad (4)$$

eşitsizliği, o kare ya da kısmi karedeki z_j 'den farklı **tüm** z noktalarınca sağlanır.

İspat.

Aksini varsayalım: örtüdeki bir alt bölgede, koşulu sağlayan bir z_j noktası bulunamam. Bu alt bölge bir kareyse, karşılıklı kenarların orta noktalarını birleştirerek dört küçük kareye bölelim; kısmi kareyse tam karesi bölünüp R dışında kalan parçalar yeniden atılsın. Elde edilen küçük alt bölgelerin en az birinde koşul yine sağlanamıyorsa bölmeye devam ederiz.

Bölme işlemi sonsuza dek sürerse, iç içe yuvalanmış sonsuz bir

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots \quad (5)$$

kare dizisi doğar; her σ_k, σ_{k-1} 'in içindedir ve hiçbir istenen z_j noktasını barındırmaz. Bu karelerin hepsinde ortak bir z_0 noktası vardır ve her biri z_0 'dan başka R noktaları içerir. Karelerin köşegen uzunlukları sıfıra gittiğinden, z_0 'ın her δ -komşuluğu yeterince ileri indisli kareleri kapsar; dolayısıyla z_0, R 'nin bir **yığılma noktasıdır** ve R kapalı olduğundan $z_0 \in R$ 'dir.

Ama f, R üzerinde analitiktir; özellikle z_0 'da türevlenebilirdir. Türev tanımına göre, verilen ε için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \quad (0 < |z - z_0| < \delta)$$

K yeterince büyük seçildiğinde σ_K karesinin köşegeni δ 'dan küçüktür; yani σ_K tamamen bu komşulukta kalır. O hâlde z_0, σ_K için aranan z_j noktası olarak iş görür ve σ_K 'yı bölmeye hiç gerek yoktu — bu, dizinin kuruluşuyla çelişir.

■

1.4 Teoremin İfadesi

Teorem 1.2 (Cauchy-Goursat Teoremi). Bir f fonksiyonu basit kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerindeki tüm noktalarda analitikse

$$\int_C f(z) dz = 0$$

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin ve R , **örtü lemmasındaki** gibi örtülsün. j -inci alt bölgede, z_j lemmadaki sabit nokta olmak üzere

$$\delta_j(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j), & z \neq z_j \\ 0, & z = z_j \end{cases} \quad (6)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Lemma gereği alt bölgenin her noktasında

$$|\delta_j(z)| < \varepsilon \quad (7)$$

olur; ayrıca $\lim_{z \rightarrow z_j} \delta_j(z) = f'(z_j) - f'(z_j) = 0$ olduğundan δ_j o alt bölgede süreklidir.

(6) tanımı f için şu ayrışımı verir:

$$f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j) + f'(z_j) z + (z - z_j) \delta_j(z)$$

C_j , j -inci alt bölgenin pozitif yönlü sınırı olsun. Yukarıdaki ifade C_j üzerinde integrallenirse

$$\int_{C_j} f(z) dz = [f(z_j) - z_j f'(z_j)] \int_{C_j} dz + f'(z_j) \int_{C_j} z dz + \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz$$

1 ve z fonksiyonlarının tüm düzlemde ters türevleri olduğundan ilk iki integral sıfırdır:

$$\int_{C_j} dz = 0, \quad \int_{C_j} z dz = 0$$

Geriye tek terim kalır:

$$\int_{C_j} f(z) dz = \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

Şimdi bu n eşitliği toplayalım. Komşu iki alt bölgenin ortak sınır parçası boyunca integraller **zıt yönlerde** alındığından birbirini yok eder; ayakta kalan yalnızca C 'nin parçası olan yaylardır:

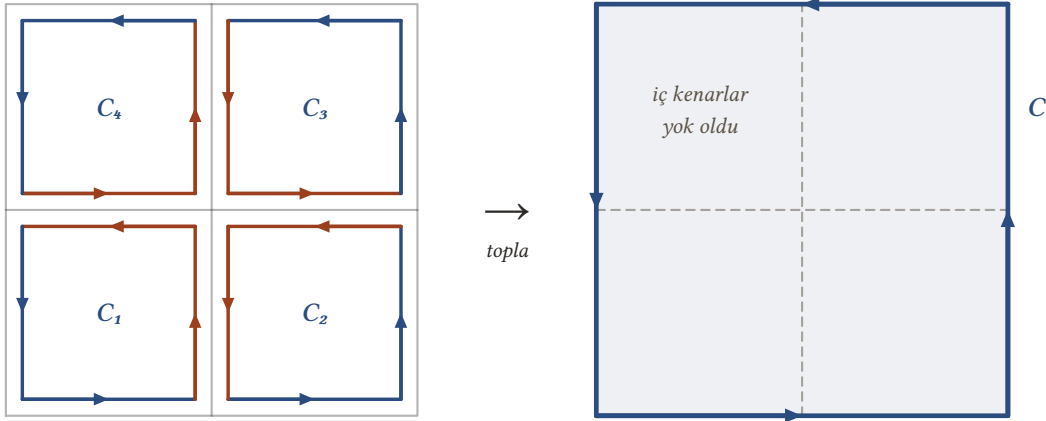
$$\sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z) dz = \int_C f(z) dz$$

Böylece

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \sum_{j=1}^n \left| \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right| \quad (9)$$

dört kare, her biri pozitif yönlü

toplam: yalnızca dış sınır C kalır



Şekil 1.2: Dört komşu karenin her biri pozitif yönde dolaşılınca ortak kenarlar iki kez ve **zıt yönlerde** katedilir (kırmızı çiftler); bu parçaların integralleri birbirini götürür. Toplamda yalnızca dış sınır üzerindeki integral kalır. Örtü lemmasındaki karelerde de aynı şey olur: iç kenarlar yok olur, geriye C 'nin yayları kalır.

(9)'un sağ tarafındaki her terime **ML eşitsizliğini** uygulayacağız. j -inci alt bölgenin bir kenar uzunluğu s_j olsun. Hem z hem z_j aynı karede kaldığından $|z - z_j| \leq \sqrt{2} s_j$ 'dir ve (7) ile

$$|(z - z_j) \delta_j(z)| < \sqrt{2} s_j \varepsilon$$

Alt bölge tam kareyse sınır uzunluğu $4s_j$ 'dir; alanı $A_j = s_j^2$ yazılırsa

$$\left| \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right| < \sqrt{2} s_j \varepsilon \cdot 4s_j = 4\sqrt{2} A_j \varepsilon \quad (10)$$

Alt bölge kısmi kareyse sınır uzunluğu $4s_j + L_j$ 'yi aşmaz; burada L_j , C 'nin o kısmi kareye düşen parçasının uzunluğudur. A_j yine tam karenin alanı olmak üzere

$$\left| \int_{C_j} (z - z_j) \delta_j(z) dz \right| < \sqrt{2} s_j \varepsilon (4s_j + L_j) < 4\sqrt{2} A_j \varepsilon + \sqrt{2} S L_j \varepsilon \quad (11)$$

Burada S , örtüdeki tüm kareleri ve C 'nin içini kapsayan büyük bir karenin kenar uzunluğudur; tüm A_j 'lerin toplamı S^2 'yi aşmaz. L ile C 'nin uzunluğunu gösterirsek (9)–(11) birlikte

$$\left| \int_C f(z) dz \right| < (4\sqrt{2} S^2 + \sqrt{2} S L) \varepsilon$$

verir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan sağ taraf istendiği kadar küçük yapılabilir; ε 'dan bağımsız olan sol taraf ise sıfıra eşit olmak zorundadır.

💡 İspatın fikri tek cümlede

Analitik bir fonksiyon, çok küçük ölçekte **birinci dereceden bir polinom gibi** davranır; polinomların ise ters türevi vardır ve kapalı çevre integralleri sıfırdır. Lemma bu “çok küçük ölçeği” düzgün biçimde kurar, kalan hata terimi de ε ile ezilir.

Örnek 1.1 (Doğrudan Uygulama). C , pozitif ya da negatif yönlü herhangi bir basit kapalı çevre olsun. Bileşke fonksiyon $f(z) = e^{z^3}$ tüm düzlemde analitik olduğundan

$$\int_C e^{z^3} dz = 0$$

C hangi eğri olursa olsun, integrali hesaplamaya kalkışmak gereksizdir.

1.5 Alıştırma

Alıştırma 1.1 (Cauchy-Goursat Uygulamaları). C , pozitif yönlü $|z| = 1$ çemberi olsun. Aşağıdaki integrallerin neden sıfır olduğunu gerekçelendiriniz.

- $\int_C \frac{z^2}{z-3} dz$
- $\int_C z e^{-z} dz$
- $\int_C \frac{dz}{z^2+2z+2}$
- $\int_C \text{Log}(z+2) dz$

Çözüm.

Her şıkta yapılacak iş aynıdır: integrandın **hiçbir tekil noktasının** kapalı $|z| \leq 1$ diskinde bulunmadığını göstermek. Bu sağlandığında integrand C üzerinde ve içinde analitik olur ve Cauchy-Goursat teoremi integralin sıfır olduğunu söyler.

a) İntegrand bir polinom bölümdür; tek tekil noktası paydayı sıfırlayan $z = 3$ 'tür. $|3| = 3 > 1$ olduğundan bu nokta çemberin dışındadır. Diskte pay ve payda analitik, payda sıfırdan farklı olduğundan bölüm de analiktir:

$$\int_C \frac{z^2}{z-3} dz = 0$$

b) z ve e^{-z} fonksiyonlarının ikisi de tamdır; tam fonksiyonların çarpımı da tamdır. ze^{-z} hiçbir tekil noktaya sahip olmadığından teorem doğrudan uygulanır:

$$\int_C ze^{-z} dz = 0$$

c) Paydanın köklerini bulalım:

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Bu iki noktanın modülü

$$|-1 \pm i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1,41 > 1$$

olduğundan ikisi de çemberin dışındadır. İntegrand diskte analitiktir:

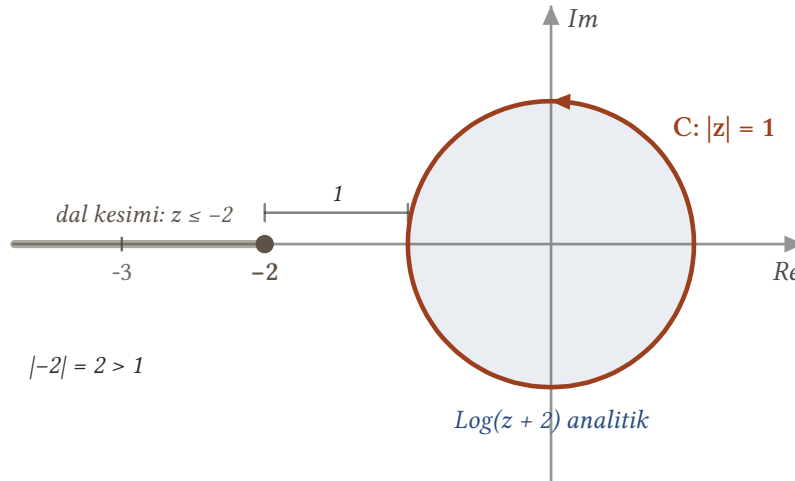
$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 2z + 2} = 0$$

d) Esas logaritma $\text{Log } w$, $w = 0$ noktasında ve negatif reel ekseninde ($w \leq 0$) analitik değildir; dal kesimi w -düzleminde başlangıçtan sola uzanan ışıdır. Burada $w = z + 2$ olduğundan kesim, z -düzleminde

$$z + 2 \leq 0 \Leftrightarrow z \leq -2$$

koşulunu sağlayan noktalardan, yani reel eksenin -2 noktasından sola uzanan ışınından oluşur. Bu ışının başlangıca en yakın noktası $z = -2$ 'dir ve $|-2| = 2 > 1$ 'dir; kesim, kapalı birim diskle kesişmez. Dolayısıyla $\text{Log}(z + 2)$ diskte analitiktir:

$$\int_C \text{Log}(z + 2) dz = 0$$



Şekil 1.3: $\text{Log}(z + 2)$ 'nin dal kesimi, w -düzlemindeki negatif reel eksenin z -düzlemine taşınmış hâlidir: $z = -2$ 'den sola uzanan ışın. Işının başlangıca en yakın noktası -2 olup birim çemberin 1 birim dışındadır; kesim kapalı diske değmez, $\text{Log}(z + 2)$ diskte analitiktir ve integral sıfırdır.

■

Teorem basit kapalı çevreler için kuruldu. Sıradaki adım kısıtı gevşetmektir: hangi domenlerde **her** kapalı çevre için geçerlidir, delikli domenlerde ne olur? Yanıt **basit ve çok bağlantılı domenlerde**.

2. Basit ve Çok Bağlantılı Domenler

Cauchy-Goursat teoremi tek bir basit kapalı çevre için kuruldu. Uygulamada ise iki genişlemeye ihtiyaç duyarız: eğri kendini kesiyorsa ne olur, ve domende **delikler** varsa integral nasıl davranır? Bu bölüm iki soruyu da yanıtlıyor; ikincisinin yanıtı, rezidü kuramının bütün hesap tekniğini önceden haber verir.

2.1 Basit Bağlantılı Domenler

Tanım 2.1 (Basit Bağlantılı Domen). Bir D domeni, içindeki her basit kapalı çevre yalnızca D 'nin noktalarını çevreliyorsa **basit bağlantılıdır**. Sezgisel olarak: D 'nin “deliği” yoktur.

Bir disk, bir yarı düzlem ve tüm düzlem basit bağlantılıdır. Buna karşılık aynı merkezli iki çember arasında kalan **halka domen** basit bağlantılı değildir: halkanın içindeki bir çember, halkaya ait olmayan noktaları (merkezdeki deliği) çevreler.

Teorem 2.1 (Basit Bağlantılı Domende Cauchy-Goursat). f fonksiyonu basit bağlantılı bir D domende analitikse, D 'deki **her kapalı** C çevresi için

$$\int_C f(z) dz = 0 \quad (1)$$

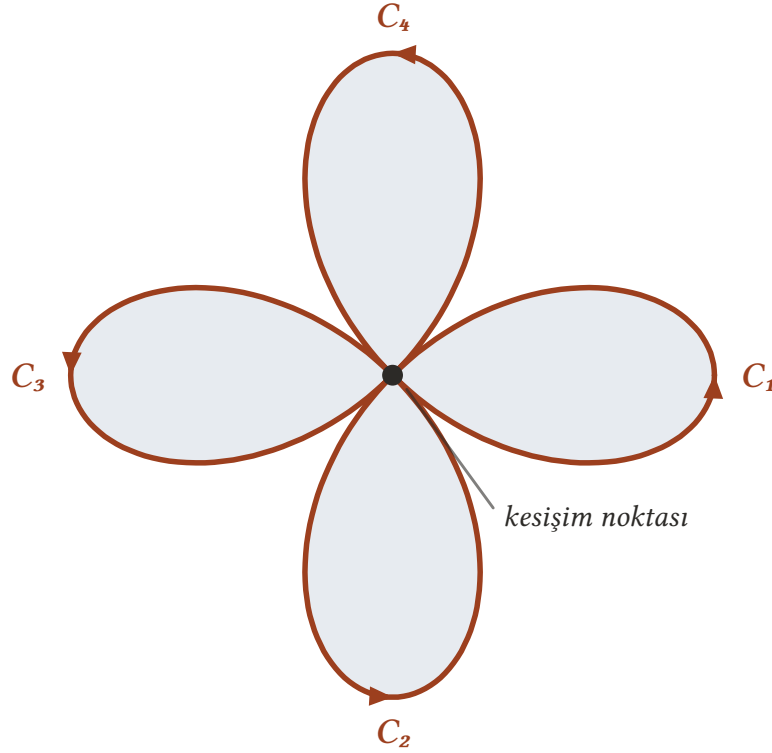
Burada C 'nin basit olması gerekmez; kendini kesebilir.

İspat.

C basit kapalıysa sonuç doğrudan Cauchy-Goursat teoremidir: C , D 'nin içinde kaldığından f , C 'nin üstünde ve içinde analitiktir.

C kapalı olup kendini **sonlu** sayıda noktada kesiyorsa, C sonlu sayıda basit kapalı çevreden oluşur. Örneğin dört ilmekli bir eğri için C_1, C_2, C_3, C_4 basit kapalı çevreleri C 'yi oluşturur; her birine Cauchy-Goursat uygulanırsa

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^4 \int_{C_k} f(z) dz = 0$$



Şekil 2.1: Dört yapraklı gül eğrisi kendini yalnızca başlangıç noktasında keser. Tek bir kapalı C çevresi olarak dolaşıldığında sırayla C_1, C_2, C_3, C_4 basit kapalı ilmeklerinden geçer; her ilmek pozitif yönlüdür ve kendi içini çevreler. Cauchy-Goursat teoremi her birine ayrı ayrı uygulanır, integraller toplanır.

Kapalı çevrenin kendini sonsuz çoklukta noktada kestiği durumda incelikler doğar; teorem yine geçerlidir, ancak kanıtı farklı bir yaklaşım ister.

■

Örnek 2.1 (Diskte Kapalı Çevre). C , açık disk $|z| < 2$ içindeki herhangi bir kapalı çevre olsun (kendini kesebilir). O zaman

$$\int_C \frac{z e^z}{(z^2 + 9)^5} dz = 0$$

Çünkü disk basit bağlantılı bir domendir ve integrandın tekil noktaları $z = \pm 3i$ diskin dışındadır.

2.2 Ters Türevin Varlığı

Teorem 2.2 (Basit Bağlantılı Domende Ters Türev). Basit bağlantılı bir D domeninde analitik olan bir f fonksiyonunun D 'de her yerde bir ters türevi vardır.

İspat.

f, D 'de analitik olduğundan süreklidir; Teorem 2.1 gereği D 'deki her kapalı çevre üzerinde integrali sıfırdır. Ters türev teoreminin (c) $\Rightarrow$ (a) yönü, D 'de bir ters türevin var olduğunu verir.

■

Sonlu düzlem basit bağlantılı olduğundan bu, hemen şunu söyler: **her tam fonksiyonun tüm düzlemde bir ters türevi vardır.**

2.3 Çok Bağlantılı Domenler

Tanım 2.2 (Çok Bağlantılı Domen). Basit bağlantılı olmayan domene **çok bağlantılı** denir.

Aşağıdaki teorem, Cauchy-Goursat teoreminin delikli domenlere uyarlamasıdır. Fikri şudur: dış çevre boyunca dolaşırken, iç deliklerin etrafında **ters yönde** dolaşırsanız toplam sıfırlanır.

Teorem 2.3 (Çok Bağlantılı Domende Cauchy-Goursat). Aşağıdaki koşullar sağlansın:

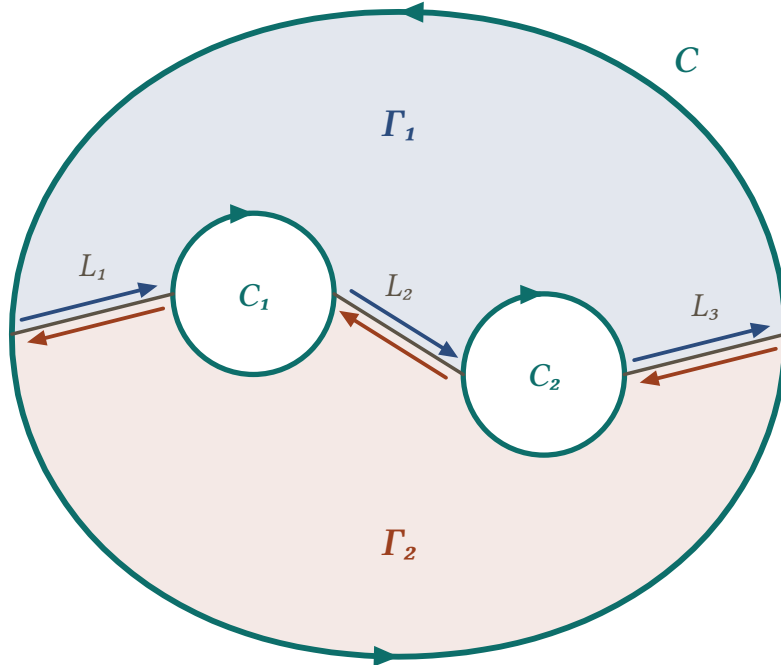
- a) C pozitif yönlü basit kapalı bir çevredir;
- b) C_k ($k = 1, 2, \dots, n$) çevreleri C 'nin içinde kalan, tümü **negatif yönlü**, ayırık ve içleri ortak noktaya sahip olmayan basit kapalı çevrelerdir.

f fonksiyonu bu çevrelerin tümü üzerinde ve C 'nin içinde her C_k 'nin dışında kalan noktalardan oluşan kapalı bölgede analitikse

$$\int_C f(z) dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0 \quad (2)$$

İspat.

Dış çevre C 'yi iç çevre C_1 'e bağlayan, uç uca eklenmiş doğru parçalarından oluşan bir L_1 çokgensel yolu çizelim; C_1 'i C_2 'ye bağlayan L_2 , ve bu şekilde devam ederek C_n 'i C 'ye bağlayan L_{n+1} yolları alınsın. Bu kesikler, bölgeyi iki basit kapalı çevrenin $-\Gamma_1$ ve Γ_2 — çevrelediği iki parçaya ayırır. Her Γ , çokgensel yolların ve C ile C_k 'lerin parçalarının birleşimidir ve öyle yönlendirilebilir ki, üzerinde yürürken çevrelenen bölge daima solda kalsın.



Şekil 2.2: Dış çevre C ile iç çevreler C_1, C_2 arasındaki bölge (f 'nin analitik olduğu yer) L_1, L_2, L_3 kesikleriyle iki parçaya bölünür; her parça, bölge solda kalacak biçimde yönlendirilmiş basit kapalı bir Γ çevresiyle çevrilir. Her L_k iki kez ve zıt yönlerde katedildiğinden Γ_1 ile Γ_2 'nin integralleri toplanınca kesikler yok olur; geriye pozitif yönlü C ile negatif yönlü C_1, C_2 kalır.

f , her iki çevrenin üzerinde ve içinde analitik olduğundan Cauchy-Goursat teoremi uygulanır:

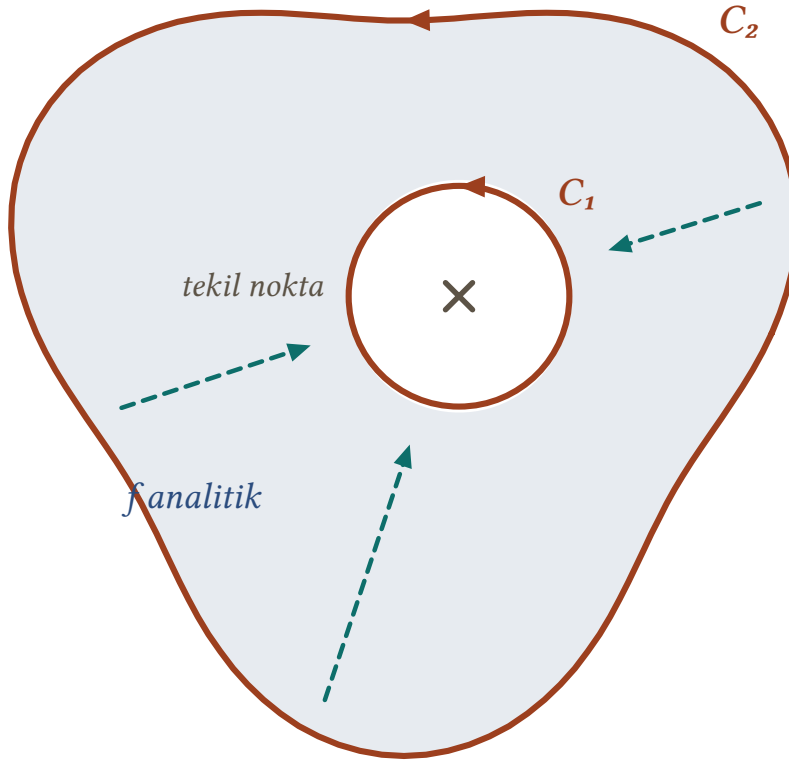
$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0, \quad \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0$$

İki integral toplandığında, her L_k yolu **iki kez ve zıt yönlerde** katedildiğinden bu parçaların katkıları birbirini yok eder; geriye yalnızca C ve C_k 'lar boyunca alınan integraller kalır. Bu da tam olarak (2) eşitliğidir. ■

2.4 Yolun Deformasyonu İlkesi

Teorem 2.4 (Yolun Deformasyonu). C_1 ve C_2 pozitif yönlü basit kapalı çevreler ve C_1, C_2 'nin içinde olsun. f fonksiyonu bu iki çevre ve aralarındaki tüm noktalardan oluşan kapalı bölgede analitikse

$$\int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz \quad (3)$$



Şekil 2.3: C_2 çevresi, f 'nin analitik olduğu gölgeli bölgeden geçerek C_1 'e büzülür; tekil noktanın üstünden geçmediği sürece integral hiç değişmez. İki çevre de pozitif yönlüdür: çok bağlantılı domen teoremindeki negatif yönlü iç çevre, $-C_1$ olarak sağ tarafa taşındığında (3) eşitliği çıkar.

İspat.

Teorem 2.3 tek bir iç çevreyle uygulanır; iç çevre negatif yönlü alınmalıdır:

$$\int_{C_2} f(z) dz + \int_{-C_1} f(z) dz = 0$$

$\int_{-C_1} f dz = - \int_{C_1} f dz$ olduğundan istenen eşitlik çıkar.

■

Adının anlamı

Bu sonuca **yolun deformasyonu ilkesi** denir: C_1 çevresi, f 'nin analitik olduğu noktalardan geçerek sürekli biçimde C_2 'ye deforme edilirse, f 'nin çevre üzerindeki integrali **hiç değişmez**. İntegralin değeri eğrinin ayrıntılı biçimine değil, hangi tekil noktaları çevrelediğine bağlıdır — rezidü kuramının bütün hesap mantığı bu gözlemin üzerine kurulur.

Örnek 2.2 (Orijini Çevreleyen Her Çevre). C , orijini çevreleyen herhangi bir pozitif yönlü basit kapalı çevre olsun. O zaman

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Çözüm.

Orijin merkezli ve tamamen C 'nin içinde kalacak kadar küçük yarıçaplı, pozitif yönlü bir C_0 çemberi alalım. $f(z) = 1/z$ fonksiyonu $z = 0$ dışında her yerde analitik olduğundan, iki çevre arasındaki kapalı bölgede analiktir ve **Teorem 2.4** uygulanır:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{C_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

Son değer, **çember üzerinde doğrudan hesapla** bulunmuştu. Dikkat edilecek nokta: C ne kadar çarpık olursa olsun, orijini bir kez çevrelediği sürece sonuç değişmez.

■

2.5 Alıştırma

Alıştırma 2.1 (Bağılantılılık Alıştırmaları).

- C , $|z| = 3$ pozitif yönlü çemberi olmak üzere $\int_C \frac{dz}{z-2}$ integralini, $z = 2$ merkezli küçük bir çembere deforme ederek hesaplayınız.
- C , $|z| = 2$ pozitif yönlü çemberi olsun. $\int_C \frac{dz}{z^2-1}$ integralinin, $z = 1$ ve $z = -1$ çevresindeki iki küçük çember üzerindeki integrallerin toplamına eşit olduğunu gerekçelendiriniz.
- $|z| > 0$ delinmiş düzleminin neden basit bağlantılı olmadığını, $1/z$ fonksiyonunun orada ters türevi bulunmadığı gerçeğiyle ilişkilendirerek açıklayınız.

Çözüm.

a) İntegrandın tek tekil noktası $z = 2$ 'dir ve C 'nin içindedir. C_0 , $z = 2$ merkezli, tamamen C 'nin içinde kalan pozitif yönlü küçük bir çember olsun (ör. yarıçapı $\rho < 1$). İki çevre arasındaki halkada integrand analitik olduğundan deformasyon ilkesi

$$\int_C \frac{dz}{z-2} = \int_{C_0} \frac{dz}{z-2}$$

verir. Sağdaki integral doğrudan hesaplanır: $z = 2 + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) alındığında $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ve $z - 2 = \rho e^{i\theta}$ olduğundan yarıçap sadeleşir:

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z-2} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Yarıçapın hiç görünmemesi, deformasyon ilkesinin somut kanıtıdır:

$$\int_C \frac{dz}{z-2} = 2\pi i$$

b) İntegrandın tekil noktaları $z = 1$ ve $z = -1$ 'dir; ikisi de $|z| = 2$ çemberinin içindedir. C_1 ve C_2 , sırasıyla bu noktaların çevresinde birbirini ve C' 'yi kesmeyen, pozitif yönlü küçük çemberler olsun. C' 'nin içinde ama C_1 ile C_2 'nin dışında kalan bölge, iki delikli çok bağlantılı bir domendir ve integrand orada analitiktir. Çok bağlantılı domenler teoremi tam olarak bu durumu kapsar. Teoremden iç çevreler negatif yönlüdür; $\int_{-C_k} f dz = - \int_{C_k} f dz$ olduğundan (2) eşitliğindeki bu terimler sağa geçirilince

$$\int_C \frac{dz}{z^2-1} = \int_{C_1} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^2-1}$$

Değerleri de bulalım. Basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)$$

C_1 üzerinde ikinci terim analitiktir (tekil noktası -1 dışarıda kalır), dolayısıyla integrali sıfırdır; birinci terim (a) şıkkındaki hesabı verir:

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2} (2\pi i) = \pi i$$

Benzer biçimde C_2 üzerinde yalnızca ikinci terim katkı yapar:

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z^2-1} = -\frac{1}{2} (2\pi i) = -\pi i$$

Toplam sıfırdır: $\int_C \frac{dz}{z^2-1} = 0$. Sonucun sıfır çıkması, integralin kendiliğinden yok olduğu anlamına gelmez; iki deliğin katkıları birbirini götürmüştür.

c) Basit bağlantılı bir domende, domende kalan her basit kapalı çevrenin **içi de** domene aittir. Delinmiş düzlemde $|z| = 1$ çemberini alalım: çember domendedir, ama içindeki $z = 0$ noktası değildir. Demek ki delinmiş düzlem basit bağlantılı değildir.

Bu geometrik gözlemin analitik karşılığı $1/z$ fonksiyonudur. Basit bağlantılı bir domende analitik olan her fonksiyonun kapalı çevre integralleri sıfırdır ve **üçlü denklik teoremi** gereği fonksiyonun orada bir ters türevi bulunur. Oysa $1/z$ delinmiş düzlemde analitik olduğu hâlde

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

olduğundan bir ters türevi olamaz. Delinmiş düzlem basit bağlantılı olsaydı bu imkânsızdı. Logaritmanın tek bir dalla tüm delinmiş düzlemde tanımlanamamasının — her dal için bir kesim atmak zorunda kalmamızın — kaynağı da aynı topolojik engeldir.

■

Elimizde artık güçlü bir araç var: analitiklik, kapalı çevre integrallerini sıfırlıyor. Bir sonraki bölümde bu aracı ters çevirip şaşırtıcı bir sonuç elde edeceğiz — bir fonksiyonun **iç noktalardaki değerleri**, yalnızca sınırdaki değerleriyle belirlenir: **Cauchy integral formülü**.

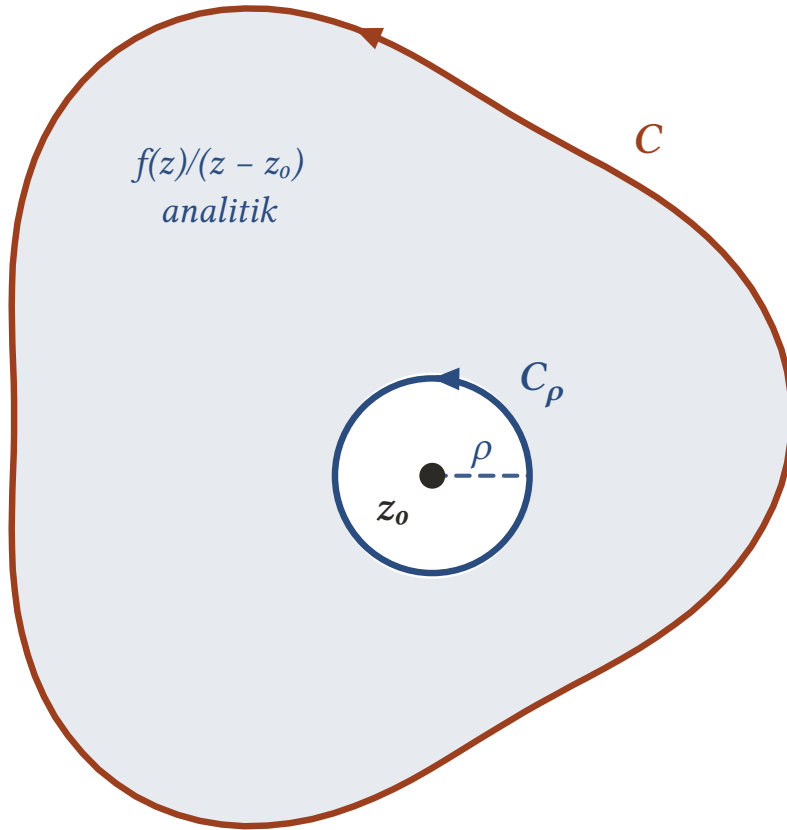
3. Cauchy İntegral Formülü ve Genişlemesi

Cauchy-Goursat teoremi bir yasak koyuyordu: analitik bir fonksiyonun kapalı çevre integrali sıfırdır. Bu bölümde aynı teoremden bir **inşa** çıkaracağız: bir fonksiyonun çevre içindeki her değeri, yalnızca çevre üzerindeki değerlerinden hesaplanabilir. Sonuçları çarpıcıdır – bir kez türevlenebilen fonksiyonun sonsuz kez türevlenebildiği buradan çıkar.

3.1 Cauchy İntegral Formülü

Teorem 3.1 (Cauchy İntegral Formülü). f , pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerinde her yerde analitik olsun. z_0 , C 'nin içinde herhangi bir nokta ise

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad (1)$$



Şekil 3.1: İspatın sahnesi: z_0 iç noktası, çevresindeki küçük C_ρ çemberi ve aradaki halka. Halka üzerinde $f(z)/(z - z_0)$ analitik olduğundan C üzerindeki integral C_ρ üzerindeki eşittir. Yarıçap, sürekliliğin verdiği δ 'dan küçük seçilir ($\rho < \delta$); böylece çember üzerinde $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ kalır.

İspat.

C_ρ , z_0 merkezli ρ yarıçaplı, tamamen C 'nin içinde kalacak kadar küçük pozitif yönlü çember olsun. $f(z)/(z - z_0)$ bölümü, C_ρ ile C arasındaki kapalı bölgede analitiktir; *yolun deformasyonu ilkesi* gereği

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \int_{C_\rho} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

Sağ tarafa $f(z) = f(z_0) + [f(z) - f(z_0)]$ ayrışımını uygulayalım:

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} - f(z_0) \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \quad (2)$$

Çember üzerindeki temel integral $\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ olduğundan

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) = \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \quad (3)$$

Şimdi sağ tarafın istendiği kadar küçük yapılabildiğini gösterelim. f , z_0 'da analitik, dolayısıyla sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

sağlayan bir $\delta > 0$ vardır. C_ρ 'nin yarıçapı $\rho < \delta$ seçilsin. $z \in C_\rho$ iken $|z - z_0| = \rho$ olduğundan integrandın modülü ε/ρ ile sınırlıdır ve çemberin uzunluğu $2\pi\rho$ 'dur; *ML eşitsizliğiyle*

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon$$

(3) ile birleştirilirse

$$\left| \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) \right| < 2\pi\varepsilon$$

Sol taraf ε 'dan bağımsız, negatif olmayan bir sabittir ve keyfi olarak küçük bir sayıdan küçük kalmaktadır; o hâlde sıfırdır. ■

Formül, hesap için şu biçimde kullanılır:

$$\int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0) \quad (4)$$

Örnek 3.1 (Formülle İntegral Hesabı). C , pozitif yönlü $|z| = 2$ çemberi olmak üzere

$$\int_C \frac{z dz}{(9 - z^2)(z + i)}$$

integralini hesaplayınız.

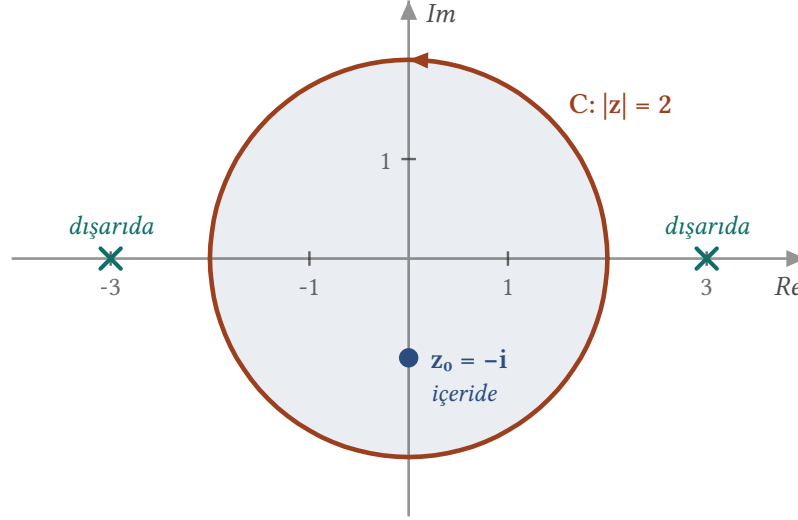
Çözüm.

İntegrandı, tekil noktası çember içinde olan çarpanı ayıracak biçimde okuyalım:

$$f(z) = \frac{z}{9 - z^2}, \quad z_0 = -i$$

f , $|z| = 2$ çemberinin içinde ve üzerinde analitiktir (tekil noktaları $z = \pm 3$ dışarıdadır) ve $z_0 = -i$ çemberin içindedir. (4) ile

$$\int_C \frac{z dz}{(9 - z^2)(z + i)} = \int_C \frac{f(z) dz}{z - (-i)} = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \left(\frac{-i}{10} \right) = \frac{\pi}{5}$$



Şekil 3.2: İntegrandın üç tekil noktası vardır: $9 - z^2 = 0$ kökleri $z = \pm 3$ çemberin dışında, $z = -i$ ise içindedir. Bu yüzden $z/(9 - z^2)$ çarpanı, C üzerinde ve içinde analitik olan f rolünü üstlenir; $(z + i)$ paydası ise formülün $z - z_0$ çarpanıdır.

■

3.2 Türevler İçin Genişleme

Formül (1), integral işareti altında z 'ye göre türetilirse — bu adımın geçerliliği ayrıca kanıtlanmalıdır — türevler için de integral temsilleri doğar.

Teorem 3.2 (Genişletilmiş Cauchy İntegral Formülü). f , pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin içinde ve üzerinde analitik, z ise C 'nin içinde bir nokta olsun. O zaman f 'nin her mertebeden türevi z 'de vardır ve

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Burada $f^{(0)} = f$ ve $0! = 1$ kabulüyle $n = 0$ durumu Cauchy integral formülünün kendisidir.

İspat.

$n = 1$ durumunu ayrıntılı kuralım; genel durum tümevarımla aynı teknikle yürür.

d, z 'den C üzerindeki noktalara olan en küçük uzaklık ve $0 < |\Delta z| < d$ olsun. Cauchy integral formülü z ve $z + \Delta z$ noktalarında yazılıp fark alınırsa

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)}$$

Aday ifadeyi çıkaralım:

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Delta z f(s) ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2} \quad (6)$$

Sağ tarafı sınırlayalım. $M, |f(s)|$ 'nin C üzerindeki maksimum değeri ve L, C 'nin uzunluğu olsun. $|s - z| \geq d$ ve $|\Delta z| < d$ olduğundan

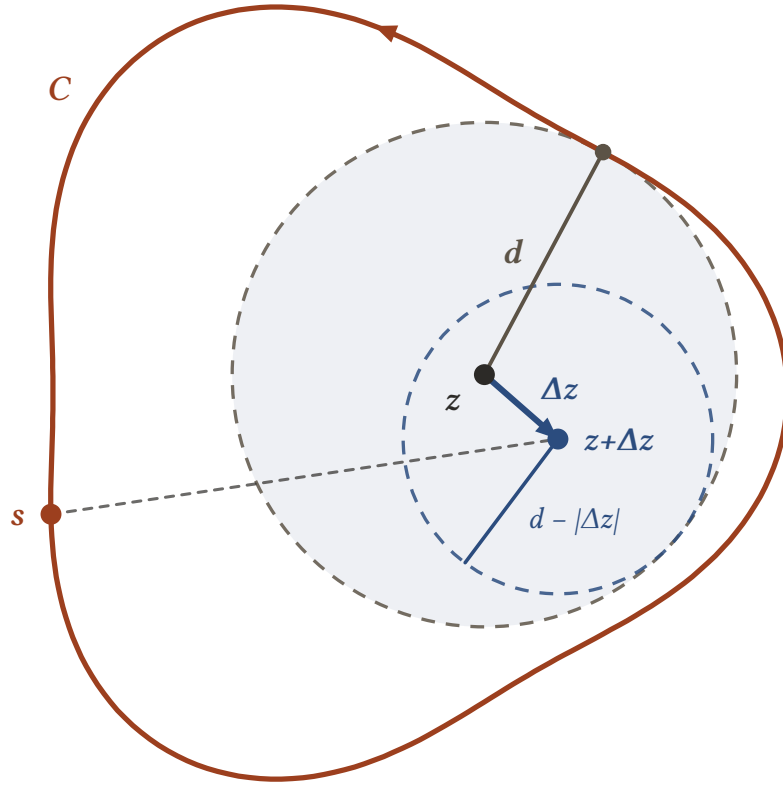
$$|s - z - \Delta z| = |(s - z) - \Delta z| \geq ||s - z| - |\Delta z|| \geq d - |\Delta z| > 0$$

ve ML eşitsizliğiyle

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Delta z f(s) ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{|\Delta z| M}{(d - |\Delta z|)^2} L$$

$\Delta z \rightarrow 0$ iken bu sınır sıfıra gider; (6)'nın sol tarafı da sıfıra gitmek zorundadır. Demek ki türev vardır ve

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^2}$$



Şekil 3.3: d , z 'nin C 'ye en kısa uzaklığıdır: z merkezli d yarıçaplı (kesikli çizgili) disk C 'ye değeri ama onu aşmaz. $|\Delta z| < d$ alındığında $z + \Delta z$ bu diskin içinde kalır ve etrafındaki $d - |\Delta z|$ yarıçaplı çember de diskin içinde kaldığından C 'yi aşmaz; dolayısıyla C üzerindeki her s için $|s - z - \Delta z| \geq d - |\Delta z| > 0$ olur ve payda hiçbir zaman sıfırlanmaz.

Aynı teknik f'' için

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(s) ds}{(s - z)^3}$$

verir; tümevarımla genel formül (5) elde edilir.

■

Hesap için kullanışlı biçim, z_0 çevre içinde bir nokta olmak üzere

$$\int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (7)$$

Örnek 3.2 (Yüksek Mertebeden Kutuplu İntegral). C , pozitif yönlü birim çember $|z| = 1$ olmak üzere

$$\int_C \frac{e^{2z}}{z^4} dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$f(z) = e^{2z}$ tamdır; $z_0 = 0$ ve $n = 3$ alınır. $f'''(z) = 8e^{2z}$ olduğundan $f'''(0) = 8$ ve

$$\int_C \frac{e^{2z}}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{2\pi i \cdot 8}{6} = \frac{8\pi i}{3}$$

■

Örnek 3.3 (Temel İntegraller). z_0 , pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin herhangi bir iç noktası olsun. $f(z) = 1$ alınırsa (7) ifadesi

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

verir; çünkü sabit fonksiyonun birinci ve daha yüksek mertebeden türevleri sıfırdır. Bu iki eşitlik, rezidü hesaplarının tamamında temel taş olarak kullanılacaktır.

3.3 Üç Temel Sonuç

Teorem 3.3 (Türevler de Analitiktir). Bir f fonksiyonu verilen bir noktada analitikse, f 'nin tüm mertebeden türevleri de o noktada analitiktir.

İspat.

f, z_0 'da analitik olsun; o zaman f 'nin analitik olduğu bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğu vardır. z_0 merkezli, $\varepsilon/2$ yarıçaplı pozitif yönlü C_0 çemberi alınırsa f, C_0 'ın içinde ve üzerinde analitiktir. Teorem 3.2 gereği C_0 'ın her iç noktasında f'' vardır; yani f', z_0 komşuluğunda türevlenebilirdir ve dolayısıyla z_0 'da analitiktir. Aynı akıl yürütme f' 'ye uygulanarak f'' 'nin analitikliği, ardından bütün mertebeler elde edilir.

■

Bunun bileşenler cinsinden karşılığı, **harmonik fonksiyonlar bölümünde** ödünç aldığımız gerçeği borçtan çıkarır:

Teorem 3.4 (Bileşenlerin Düzgünlüğü). $f = u + iv$ bir noktada analitikse, u ve v bileşenleri o noktada her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahiptir.

Gerçekten $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ analitik, dolayısıyla sürekli olduğundan birinci mertebeye kısmi türevler sürekli; $f'' = u_{xx} + iv_{xx} = v_{yx} - iu_{yx}$ üzerinden aynı akıl yürütme tüm mertebelere taşınır.

Teorem 3.5 (Morera Teoremi). f , bir D domeninde sürekli olsun. D 'deki her kapalı C çevresi için

$$\int_C f(z) dz = 0$$

ise f, D 'de analitiktir.

İspat.

Hipotez, *ters türev teoreminin* (c) koşuludur; dolayısıyla D' 'de $F' = f$ olacak biçimde analitik bir F vardır. f , analitik F 'nin türevi olduğundan *Teorem 3.3* gereği D 'de analitiktir.

Morera teoremi, Cauchy-Goursat teoreminin **tersidir**: basit bağlantılı domenlerde “analitiklik” ile “her kapalı çevre integralinin sıfır olması” birbirine denk iki koşuldur.

Teorem 3.6 (Cauchy Eşitsizliği). f, z_0 merkezli R yarıçaplı pozitif yönlü C_R çemberinin içinde ve üzerinde analitik olsun. $M_R, |f(z)|$ 'nin C_R üzerindeki maksimum değeriye

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M_R}{R^n} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (8)$$

İspat.

(5) formülü C_R üzerinde yazılıp ML eşitsizliği uygulanır. C_R üzerinde $|z - z_0| = R$ ve çemberin uzunluğu $2\pi R$ olduğundan

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M_R}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{n! M_R}{R^n}$$

Bu eşitsizlik, bir fonksiyonun türevlerinin büyüklüğünü yalnızca **fonksiyonun kendi büyüklüğüyle** sınırlar; reel analizde benzeri yoktur ve bir sonraki bölümün kilit aracıdır.

3.4 Alıştırma

Alıştırma 3.1 (İntegral Formülü Alıştırmaları). C , pozitif yönlü $|z| = 2$ çemberi olsun. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a) $\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz$
- b) $\int_C \frac{z dz}{2z+1}$
- c) $\int_C \frac{\cos z}{(z-\pi/2)^2} dz$
- d) $\int_C \frac{e^{-z} dz}{(z+1)^2}$

Çözüm.

a) İntegrandın tekil noktaları $z = 0$ ile $z^2 + 8 = 0$ denkleminin kökleri $z = \pm 2\sqrt{2}i$ 'dir. İkincilerin modülü $2\sqrt{2} \approx 2,83 > 2$ olduğundan çemberin dışındadır; içeride yalnızca $z = 0$ kalır. İntegrali formülün biçimine sokalım:

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-0} dz, \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^2+8}$$

Seçilen f, C üzerinde ve içinde analitiktir. Cauchy integral formülü:

$$\int_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \cdot \frac{\cos 0}{8} = \frac{\pi i}{4}$$

b) Paydayı önce baş katsayısından arındıralım:

$$\frac{z}{2z+1} = \frac{z}{2(z+\frac{1}{2})} \Rightarrow \int_C \frac{z dz}{2z+1} = \frac{1}{2} \int_C \frac{z}{z - (-\frac{1}{2})} dz$$

Tekil nokta $z = -1/2, |z| = 2$ çemberinin içindedir ve $f(z) = z$ her yerde analitiktir:

$$\frac{1}{2} \int_C \frac{z dz}{z + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \left(f\left(\frac{1}{2}\right) \right) = \pi i \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi i}{2}$$

c) Payda kareli olduğundan formülün genişletilmiş biçimi ($n = 1$) kullanılır:

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = 2\pi i f'(z_0)$$

Burada $f(z) = \cos z$ ve $z_0 = \pi/2$ 'dir; $|\pi/2| \approx 1,57 < 2$ olduğundan tekil nokta $|z| = 2$ çemberinin içindedir. $f'(z) = -\sin z$ olduğundan

$$\int_C \frac{\cos z}{(z - \pi/2)^2} dz = 2\pi i \left(-\sin \frac{\pi}{2} \right) = -2\pi i$$

d) Yine $n = 1$ durumu; bu kez $f(z) = e^{-z}$ ve $z_0 = -1$ 'dir ($|-1| < 2$, içerde). $f'(z) = -e^{-z}$ olduğundan

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z + 1)^2} dz = 2\pi i f'(-1) = 2\pi i (-e^1) = -2\pi i e$$

■

Cauchy eşitsizliğinin tek bir satırlık sonucu, kompleks analizin en ünlü teoremlerinden birini doğruyor: sınırlı bir tam fonksiyon sabit olmak zorundadır — [Liouville teoremi ve cebirin temel teoremi](#).

4. Liouville Teoremi ve Cebirin Temel Teoremi

Cauchy eşitsizliği, bir fonksiyonun türevini kendi büyüklüğüyle sınırlıyordu. Yarıçapı büyüterek bu eşitsizliği zorladığımızda, kompleks analizin en keskin sonuçlarından biri ortaya çıkar: **tüm düzlemde sınırlı kalan bir tam fonksiyon, sabit olmaktan başka şansı yoktur**. Bunun ardından cebirin temel teoremi neredeyse bedavaya gelir.

4.1 Liouville Teoremi

Teorem 4.1 (Liouville Teoremi). Bir f fonksiyonu tam ve kompleks düzlemde sınırlıysa, $f(z)$ düzlem boyunca sabittir.

İspat.

z_0 herhangi bir nokta ve $R > 0$ keyfi olsun. f tam olduğundan, z_0 merkezli R yarıçaplı çemberin içinde ve üzerinde analitiktir; Cauchy eşitsizliği $n = 1$ için

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M_R}{R} \quad (1)$$

verir. Burada M_R , $|f(z)|$ 'nin $|z - z_0| = R$ çemberi üzerindeki maksimum değeridir.

Sınırlılık hipotezi, her z için $|f(z)| \leq M$ olacak biçimde negatif olmayan bir M sabitinin varlığını söyler. $M_R \leq M$ olduğundan

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R} \quad (2)$$

Bu eşitsizlikteki M , R 'den bağımsızdır ve R keyfi olarak büyük seçilebilir. Sağ taraf $R \rightarrow \infty$ iken sıfıra gittiğine göre eşitsizlik ancak

$$f'(z_0) = 0$$

ise ayakta kalır. z_0 keyfi olduğundan $f'(z) \equiv 0$ 'dır; **sabitlik teoremi** gereği f sabittir.

■

⚠ Reel analizde karşılığı yoktur

$\sin x$ ve $\frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonları tüm reel ekseninde sonsuz kez türevlenebilir ve sınırlıdır, ama sabit değildir. Kompleks düzlemde ise $\sin z$ **sınırsızdır** ve $\frac{1}{1+z^2}$ tam değildir ($z = \pm i$ tekil noktalarıdır) – Liouville teoremiyle çelişecek bir örnek üretmek mümkün değildir.

4.2 Cebirin Temel Teoremi

Teorem 4.2 (Cebirin Temel Teoremi). $n \geq 1$ dereceli her

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n \quad (a_n \neq 0)$$

polinomunun en az bir sıfırı vardır; yani $P(z_0) = 0$ olacak biçimde en az bir z_0 noktası mevcuttur.

İspat.

Tersini varsayalım: $P(z)$, hiçbir z değeri için sıfır olmasın. O zaman

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

fonksiyonu tüm düzlemde tanımlı ve analitik, yani tamdır. Sınırlı olduğunu göstereceğiz; Liouville teoremi çelişkiyi getirecektir.

$z \neq 0$ için

$$w = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{z} \quad (3)$$

yazalım; bu tanımla

$$P(z) = (a_n + w) z^n \quad (4)$$

olur. (3)'teki bölümlerin her birinin modülü, $|z| > R$ olduğunda $\frac{|a_n|}{2^n}$ sayısından küçük kalacak biçimde yeterince büyük pozitif bir R bulunabilir. **Üçgen eşitsizliğinin** n terime genellemesiyle $|z| > R$ iken

$$|w| < n \cdot \frac{|a_n|}{2^n} = \frac{|a_n|}{2}$$

Ters yönlü üçgen eşitsizliği ise $|z| > R$ iken

$$|a_n + w| \geq ||a_n| - |w|| > \frac{|a_n|}{2}$$

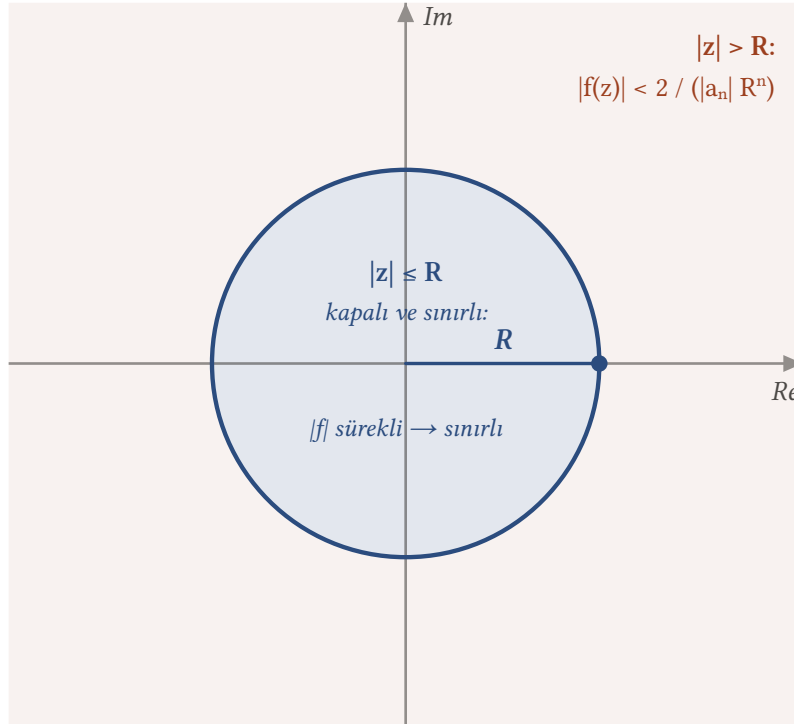
verir. (4) ile birlikte

$$|z| > R \implies |P(z)| = |a_n + w| |z|^n > \frac{|a_n|}{2} R^n \quad (5)$$

Dolayısıyla $|z| > R$ bölgesinde

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < \frac{2}{|a_n| R^n}$$

yani f , $|z| \leq R$ diskinin dışında sınırlıdır. Öte yandan f bu kapalı diskte süreklidir; **kapalı sınırlı bölgede sürekli fonksiyonun modülü sınırlıdır**. İki bilgi birleştiğinde f , **tüm düzlemde** sınırlıdır.



Şekil 4.1: Cebirin temel teoreminin ispatında $f = 1/P$ iki parçada sınırlanır: $|z| > R$ bölgesinde (5) eşitsizliği $|f(z)| < 2/(|a_n|R^n)$ verir; kapalı ve sınırlı $|z| \leq R$ diskinde ise sürekli f 'nin modülü kendiliğinden sınırlıdır. İki sınırın büyüğü tüm düzlemde geçerlidir ve Liouville teoremi devreye girer.

Liouville teoremine göre $f(z)$, dolayısıyla $P(z)$ sabittir. Ama $a_n \neq 0$ ve $n \geq 1$ olduğundan P sabit değildir — çelişki.

■

4.3 Lineer Çarpanlara Ayrılış

Teorem 4.3 (Polinomların Çarpanlara Ayrılışı). $n \geq 1$ dereceli her $P(z)$ polinomu, c ve z_k kompleks sabitler olmak üzere

$$P(z) = c(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \quad (6)$$

biçiminde lineer çarpanların çarpımı olarak yazılabilir. Buradaki z_k sabitlerinin bazıları tekrar edebilir; ancak $P(z)$, n taneden fazla **farklı** sifıra sahip olamaz.

İspat.

İspat adım adımdır: **Teorem 4.2** bir z_1 sıfırının varlığını garanti eder; polinom bölmesiyle

$$P(z) = (z - z_1) Q_1(z)$$

yazılır ve Q_1 , $n - 1$ derecelidir. Aynı argüman Q_1 'e uygulanarak z_2 elde edilir:

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2) Q_2(z)$$

Bu şekilde devam edilir; her adımda derece bir azaldığından n adım sonra sabit bir c çarpanı kalır ve (6) ifadesine ulaşılır. Çarpanların hepsi $(z - z_k)$ biçiminde olduğundan P 'nin sıfırları yalnızca $z_1, \dots, z_n$ sayılarıdır; farklı olanlarının sayısı n 'i aşamaz.

■

❓ İki farklı yol

Buradaki akıl yürütme iki adımlıdır: **Liouville teoremi en az bir** sıfır verir, ardışık polinom bölmeleri ise kalan sıfırları tek tek çıkarır. **Rouché teoremi**, bölme yapmadan — kökleri dolanma sayısı ile **sayarak** — aynı sonuca tek hamlede varan bambaşka bir kanıt sunar.

4.4 Alıştırma

Alıştırma 4.1 (Liouville Alıştırmaları).

- a) f tam ve her z için $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ ise f 'nin sabit olduğunu gösteriniz. *İpucu:* $g(z) = e^{f(z)}$ fonksiyonunu inceleyiniz; $|g| = e^{\operatorname{Re} f}$ sınırlıdır.
- b) f tam ve her z için $|f(z)| \geq 1$ ise f 'nin sabit olduğunu gösteriniz.
- c) $P(z) = z^3 - 1$ polinomunu (6) biçiminde lineer çarpanlara ayırınız.

Çözüm.

a) İpucundaki $g(z) = e^{f(z)}$ fonksiyonu, tam fonksiyonların bileşkesi olarak tamdır. Modülünü hesaplayalım:

$$|g(z)| = |e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$$

Varsayım gereği $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ ve reel üstel fonksiyon artan olduğundan

$$|g(z)| \leq e^M \quad (\text{her } z \text{ için})$$

g tam ve sınırlıdır; Liouville teoremi g 'nin sabit olduğunu söyler. Şimdi f 'ye dönelim: $g' = f' e^f$ türevi her yerde sıfırdır ve $e^{f(z)}$ hiçbir zaman sıfır olmadığından $f'(z) \equiv 0$ olmak zorundadır. Türevi tüm düzlemde sıfır olan fonksiyon sabittir.

b) $|f(z)| \geq 1$ koşulu, özellikle f 'nin hiçbir yerde sıfır olmadığını söyler. O hâlde

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

fonksiyonu tüm düzlemde tanımlı ve analitiktir, yani tamdır. Modülü ise

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} \leq 1$$

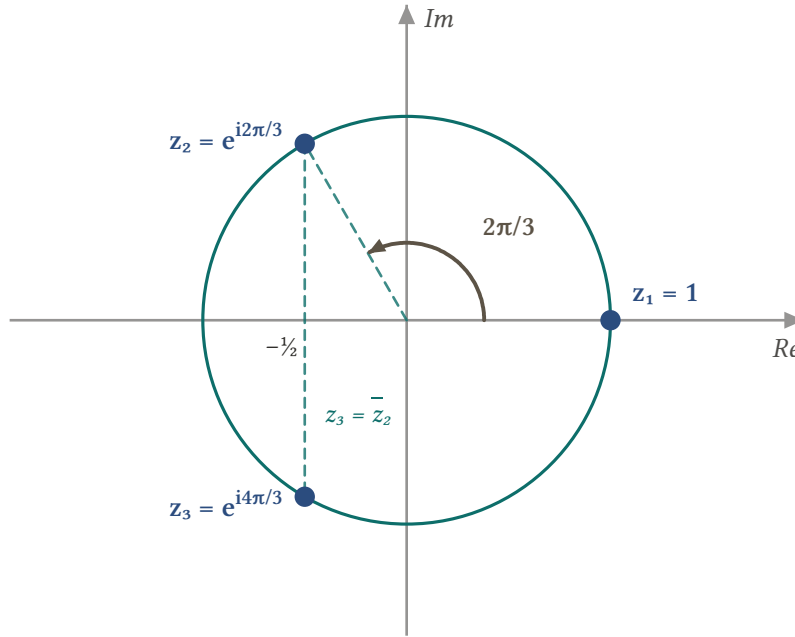
Liouville teoremi g 'nin sabit olduğunu verir; g sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $f = 1/g$ de sabittir.

c) $z^3 = 1$ denkleminin kökleri, birin küp kökleridir:

$$z_k = \exp\left(\frac{2k\pi i}{3}\right) \quad (k = 0, 1, 2)$$

yani

$$z_1 = 1, \quad z_2 = e^{i2\pi/3} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad z_3 = e^{i4\pi/3} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$



Şekil 4.2: $z^3 = 1$ denkleminin kökleri birim çember üzerinde $2\pi/3$ 'lük eşit aralıklarla dizilir. z_2 ve z_3 reel eksene göre birbirinin yansımasıdır: ikisinin de reel kısmı $-1/2$, sanal kısımları $\pm\sqrt{3}/2$. Reel katsayılı $z^3 - 1$ 'in reel olmayan köklerinin eşlenik çift oluşturması bu simetridir.

Baş katsayı 1 olduğundan (6) biçiminde $c = 1$ 'dir:

$$P(z) = (z - 1) \left(z - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \left(z - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)$$

Son iki çarpanı çarparsak reel katsayılı ayrılaşa döneriz: $(z + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = z^2 + z + 1$, yani $P(z) = (z - 1) (z^2 + z + 1)$. Eşlenik köklerin çift olarak gelmesi tesadüf değildir: reel katsayılı bir polinomun reel olmayan kökleri her zaman eşlenik çiftler hâlinde bulunur.

■

Liouville teoremi modülün **sonsuzdaki** davranışını kullanıyordu. Sıradaki teorem ise modülün **içerideki** davranışını yasaklar: analitik bir fonksiyonun modülü, bir domenin iç noktasında maksimuma ulaşamaz – **maksimum modül ilkesi**.

5. Maksimum Modül İlkesi

Analitik bir fonksiyonun modülü bir tepe noktası yapabilir mi? Bu bölümün yanıtı kesindir: **hayır** – bir domenin iç noktasında modül maksimuma ulaşırsa fonksiyon sabittir. Sonuç, uygulamada son derece pratiktir: kapalı bir bölgede en büyük değeri aramak için yalnızca **sınıra** bakmak yeterlidir.

5.1 Gauss Ortalama Değer Teoremi

Teorem 5.1 (Gauss Ortalama Değer Teoremi). f, z_0 merkezli ρ yarıçaplı çemberin içinde ve üzerinde analitik olsun. O zaman f 'nin merkezdeki değeri, çember üzerindeki değerlerinin aritmetik ortalamasıdır:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad (1)$$

İspat.

Cauchy integral formülünü $C_\rho: |z - z_0| = \rho$ çemberi üzerinde yazalım:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

$z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) parametrizasyonu ile $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$ ve $z - z_0 = \rho e^{i\theta}$ olduğundan

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} i\rho e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

■

5.2 Yerel Maksimum Lemması

Teorem 5.2 (Modül Lemması). $f, |z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda analitik olsun. Bu komşuluğun her z noktasında

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|$$

ise $f(z)$, komşuluk boyunca sabit $f(z_0)$ değerine sahiptir.

İspat.

z_1 , komşulukta z_0 'dan farklı bir nokta ve $\rho = |z_1 - z_0|$ olsun. C_ρ, z_0 merkezli, z_1 'den geçen pozitif yönlü çember olmak üzere Teorem 5.1 uygulanır:

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta \quad (2)$$

Öte yandan hipotez gereği

$$|f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \leq |f(z_0)| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (3)$$

olduğundan

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta = |f(z_0)| \quad (4)$$

(2) ve (4) birlikte, aradaki ifadelerin eşit olmasını zorlar:

$$\int_0^{2\pi} \left[|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \right] d\theta = 0$$

İntegrand θ 'ya göre süreklidir ve (3) gereği negatif değildir; integrali sıfır olan böyle bir fonksiyon özdeş olarak sıfırdır:

$$|f(z_0 + \rho e^{i\theta})| = |f(z_0)| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (5)$$

Özel olarak $|f(z_1)| = |f(z_0)|$. z_1 , delinmiş komşulukta keyfi olduğundan $|f(z)| = |f(z_0)|$ eşitliği tüm komşulukta geçerlidir; yani $|f|$ bir domende sabittir. **Modülü sabit olan analitik fonksiyonun kendisi de sabittir**; dolayısıyla komşuluktaki her z için $f(z) = f(z_0)$ 'dır.

■

5.3 Maksimum Modül İlkesi

Teorem 5.3 (Maksimum Modül İlkesi). Bir f fonksiyonu bir D domeninde analitik ve sabit değilse, $|f(z)|$ modülü D 'de maksimum değere sahip değildir. Yani D 'deki tüm z noktaları için $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ olacak biçimde bir $z_0 \in D$ noktası yoktur.

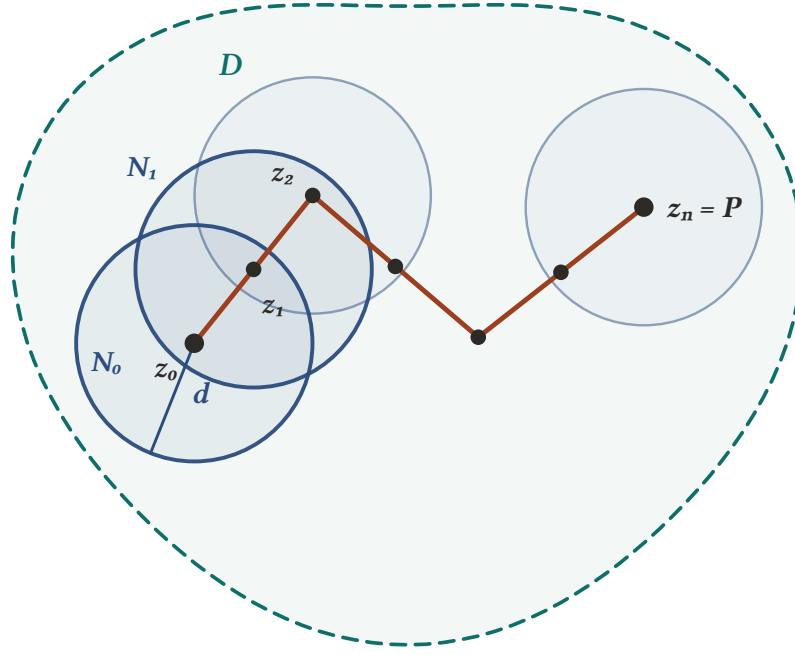
İspat.

Böyle bir z_0 noktasının var olduğunu varsayıp f 'nin D boyunca sabit olmak zorunda kalacağını göstereceğiz.

P , D 'nin herhangi bir başka noktası olsun. D bir domen olduğundan z_0 'ı P 'ye bağlayan ve tamamen D 'de kalan bir L çokgensel yolu vardır. d , L üzerindeki noktalardan D 'nin sınırına olan en kısa uzaklığı gösterebilir (D tüm düzlemse d herhangi bir pozitif değer olabilir). L üzerinde

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = P, \quad |z_k - z_{k-1}| < d$$

koşulunu sağlayan sonlu bir nokta dizisi seçelim ve her z_k merkezli, d yarıçaplı N_k komşuluğunu alalım. Her komşuluk D 'nin içindedir ve her N_k 'nin merkezi N_{k-1} 'in içinde kalır.



Şekil 5.1: z_0 'ı P 'ye bağlayan çokgensel L yolu üzerinde, ardışık uzaklıkları d 'den küçük noktalar seçilir ve her birinin etrafına d yarıçaplı bir N_k komşuluğu konur (d , L 'nin D 'nin sınırına en kısa uzaklığı). Her komşuluk D 'nin içindedir ve her z_k bir önceki N_{k-1} 'in içinde kalır; sabitlik lemması komşuluktan komşuluğa aktararak $f(P) = f(z_0)$ bulunur. Çizimde yalnızca ilk komşuluklar ve sonuncusu gösterilmiştir.

$|f(z)|$, z_0 'da maksimum değere sahip olduğundan bu değer N_0 üzerinde de maksimumdur; Teorem 5.2 gereği $f(z)$, N_0 boyunca sabit $f(z_0)$ değerini alır. Özellikle $f(z_1) = f(z_0)$ 'dır. O hâlde N_1 'in her z noktasında $|f(z)| \leq |f(z_1)|$ olur ve lemma yeniden uygulanabilir:

$$f(z) = f(z_1) = f(z_0) \quad (z \in N_1)$$

$z_2 \in N_1$ olduğundan $f(z_2) = f(z_0)$ 'dır ve zincir aynı biçimde ilerler. Sonunda N_n komşuluğuna varılır ve $f(z_n) = f(z_0)$, yani $f(P) = f(z_0)$ elde edilir. P , D 'de keyfi olduğundan f , D boyunca sabittir — hipotezle çelişir.

■

5.4 Kapalı Bölgelerde Sonuç

Kapalı ve sınırlı bir R bölgesinin içinde analitik ve R üzerinde sürekli olan bir f fonksiyonunun modülü, kapalı sınırlı bölgede maksimumuna ulaşır. Maksimum modül ilkesi bu maksimumun **nerede** olduğunu söyler:

Teorem 5.4 (Maksimum Sınırdadır). f , kapalı ve sınırlı bir R bölgesinde sürekli, R 'nin içinde analitik ve sabit olmasın. O zaman $|f(z)|$ 'nin R üzerindeki maksimum değeri — ki daima ulaşılır — **asla iç bölgede değil**, R 'nin sınırı üzerinde bir yerdedir.

Örnek 5.1 (Dikdörtgen Üzerinde Sinüsün Modülü). R , $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$ dikdörtgen bölgesi olsun. $f(z) = \sin z$ tam fonksiyonunun modülünün R üzerindeki maksimumunu bulunuz.

Çözüm.

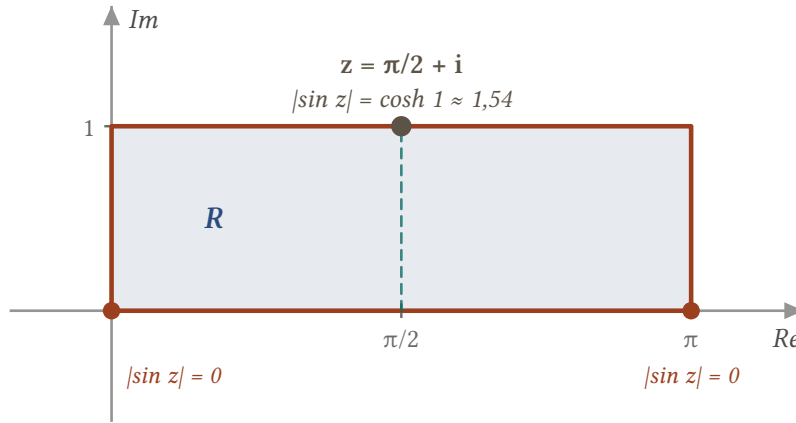
Teoreme göre maksimum sınırdadır; hangi sınır noktasında olduğunu doğrudan hesapla görelim. Sinüsün modül formülüyle

$$|f(z)| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$

$\sin^2 x$ terimi $0 \leq x \leq \pi$ aralığında $x = \pi/2$ iken en büyüktür; artan bir fonksiyon olan $\sinh^2 y$ ise $0 \leq y \leq 1$ aralığında $y = 1$ iken en büyüktür. Dolayısıyla maksimum

$$z = \frac{\pi}{2} + i, \quad |f(z)| = \sqrt{1 + \sinh^2 1} = \cosh 1$$

sınır noktasında gerçekleşir; bu nokta gerçekten dikdörtgenin sınırındadır, iç noktası değildir.



Şekil 5.2: $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$ toplamında $\sin^2 x$ terimi $x = \pi/2$ 'de, artan $\sinh^2 y$ terimi ise üst kenar $y = 1$ 'de en büyüktür. Maksimum bu yüzden üst kenarın ortasındaki $\pi/2 + i$ noktasındadır; iç noktada değil, teoremin dediği gibi sınırdadır. Alt kenarın köşelerinde ise modül sıfırlanır.

■

5.5 Harmonik Fonksiyonlara Uygulanışı

Teorem 5.5 (Harmonik Bileşen İçin Maksimum). $f = u + iv$, kapalı sınırlı bir R bölgesinde sürekli, içinde analitik ve sabit olmasın. O zaman $u(x, y)$ harmonik bileşeninin R üzerindeki maksimum değeri de sınır üzerinde alınır, iç bölgede değil.

İspat.

Bileşke fonksiyon $g(z) = e^{f(z)}$, R 'de sürekli, içinde analitiktir ve sabit değildir. Modülü

$$|g(z)| = e^{u(x,y)}$$

olduğundan Teorem 5.4 gereği $|g|$ 'nin maksimumu sınırdadır. Üstel fonksiyon artan olduğundan e^u 'nun maksimuma ulaştığı nokta, u 'nun da maksimuma ulaştığı noktadır.

■

Bu sonuç, ısı iletimi ve potansiyel kuramının temel fiziksel sezgisini matematikleştirir: durağan bir sıcaklık dağılımında en sıcak nokta, cismin içinde değil, daima **yüzeyinde** bulunur.

5.6 Alıştırma

Alıştırma 5.1 (Maksimum Modül Alıştırmaları).

- a) R , $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ karesi olsun. $f(z) = z^2$ için $|f(z)|$ 'nin R üzerindeki maksimumunun hangi noktada alındığını belirleyiniz.

- b) $R, |z| \leq 1$ kapalı diski olsun. $f(z) = e^z$ için $|f(z)|$ 'nin maksimum değerinin e olduğunu ve $z = 1$ noktasında alındığını gösteriniz.
- c) Maksimum modül ilkesinin **minimum** için doğrudan geçerli olmadığını, $f(z) = z$ fonksiyonunu $|z| \leq 1$ diskinde inceleyerek açıklayınız; sıfırlanmayan fonksiyonlar için $1/f$ üzerinden minimum ilkesinin nasıl kurulacağını tartışınız.

Çözüm.

a) $f(z) = z^2$ tam bir fonksiyondur ve R kapalı ve sınırlıdır; maksimum modül ilkesi gereği $|f|$ maksimumunu **sınırdaki** alır. Modülü sadeleştirilim:

$$|f(z)| = |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$$

Yani $|f|$ maksimumunu, kare üzerinde başlangıca en uzak noktada alır. $0 \leq x \leq 1$ ve $0 \leq y \leq 1$ için $x^2 + y^2$ ifadesi her iki değişkende de artan olduğundan en büyük değer $x = y = 1$ köşesindedir:

$$\max_{z \in R} |f(z)| = |1 + i|^2 = 2 \quad (z = 1 + i)$$

b) Modül yalnızca reel kısma bağlıdır:

$$|f(z)| = |e^z| = e^x$$

Reel üstel fonksiyon artan olduğundan maksimum, x 'in en büyük olduğu noktadadır. $|z| \leq 1$ diskinde $x \leq |z| \leq 1$ olup eşitlik yalnızca $z = 1$ için sağlanır:

$$\max_{|z| \leq 1} |e^z| = e^1 = e \quad (z = 1)$$

Maksimumun sınır noktasında çıkması, teoremin öngördüğü davranıştır.

c) $f(z) = z$ fonksiyonunu $|z| \leq 1$ diskinde ele alalım. $|f(z)| = |z|$ ifadesi minimumunu $z = 0$ noktasında alır ve değeri 0'dır. Bu nokta diskin **iç** noktasıdır; demek ki “modül minimumunu da sınırda alır” biçiminde bir ilke doğru değildir.

Aksayan tek şey f 'nin sıfırlanmasıdır. f , bir domende analitik, kapanışında sürekli ve **hiçbir yerde sıfır değilse** $g = 1/f$ de aynı bölgede analitik ve süreklidir. Maksimum modül ilkesi g 'ye uygulanırsa $|g| = 1/|f|$ maksimumunu sınırda alır; bir kesrin paydası küçüldükçe kendisi büyüdüğünden bu, tam olarak

$$\min_{z \in \overline{D}} |f(z)| \text{ sınırda alınır}$$

demektir. Böylece minimum ilkesi, “sıfırlanmama” koşulu eklendiğinde geri kazanılır. $f(z) = z$ örneğinde bu koşul sağlanmadığı için sonuç da geçerli değildir.

■

Cauchy kuramı tamamlandı. Bir sonraki kısımda analitik fonksiyonların en verimli temsiline geçiyoruz: sonsuz toplamalar. [Diziler ve seriler](#) bölümüyle başlıyoruz.

6. Dizilerin ve Serilerin Yakınsaklığı

Analitik fonksiyonların en verimli temsili sonsuz toplamlardır: Taylor ve Laurent serileri, hem hesap yapmayı hem de tekil noktaların yapısını okumayı sağlar. Bu bölümde temeli kuruyoruz – kompleks dizi ve serilerin yakınsaklığı, reel karşılıklarına indirgeme yoluyla.

6.1 Dizilerin Yakınsaklığı

Tanım 6.1 (Dizinin Limiti). Kompleks sayıların sonsuz bir

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad (1)$$

dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$n > n_0 \implies |z_n - z| < \varepsilon \quad (2)$$

sağlayan bir n_0 doğal sayısı varsa z **limitine sahiptir**. Geometrik okuma: n 'nin yeterince büyük değerlerinde z_n noktaları, z 'nin verilen her ε -komşuluğunda kalır.

Limit varsa tektir; bu durumda dizinin z 'ye **yakınsadığını** söyler ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad (3)$$

yazarız. Limiti olmayan diziye **ıraksak** denir.

Teorem 6.1 (Bileşenlerle Yakınsaklık). $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 1, 2, \dots$) ve $z = x + iy$ olsun. O zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

İspat.

($\Leftarrow$) Bileşen limitleri var olsun. Verilen ε için $n > n_1$ iken $|x_n - x| < \varepsilon/2$ ve $n > n_2$ iken $|y_n - y| < \varepsilon/2$ sağlayan n_1, n_2 vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa, üçgen eşitsizliğiyle

$$|(x_n + iy_n) - (x + iy)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon \quad (n > n_0)$$

($\Rightarrow$) $|x_n - x| \leq |z_n - z|$ ve $|y_n - y| \leq |z_n - z|$ eşitsizlikleri, $z_n \rightarrow z$ iken bileşenlerin de yakınsadığını verir. ■

Teorem, hesabı ikiye böler:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + iy_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

Örnek 6.1 (Basit Bir Limit). $z_n = \frac{1}{n^3} + i$ dizisi i 'ye yakınsar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^3} + i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} + i \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 0 + i = i$$

Aynı sonuç tanımdan da görülür: $n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$ iken $|z_n - i| = \frac{1}{n^3} < \varepsilon$ 'dur.

⚠ Kutupsal koordinatlarda dikkat

Bileşen teoremi kartezyen bileşenler içindir; modül ve argümana **doğrudan** aktarılamaz. Örneğin

$$z_n = -2 + i \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

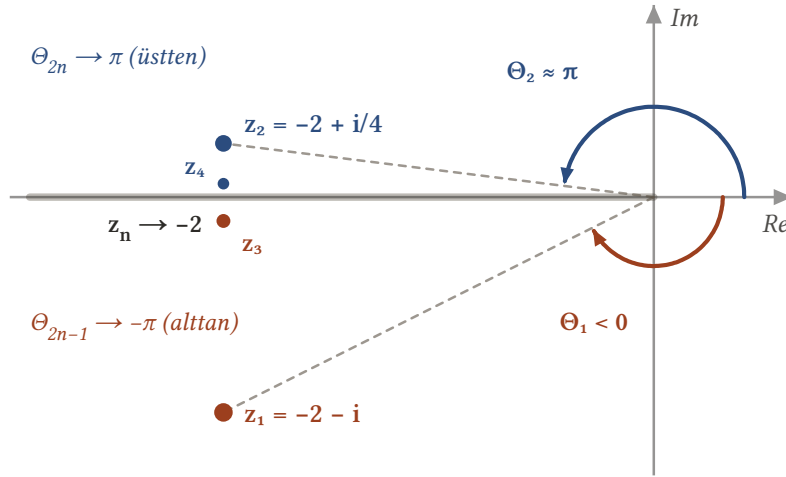
dizisi için teorem $\lim z_n = -2$ verir. Modüller de sorunsuzdur:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4 + \frac{1}{n^4}} = 2$$

Ama esas argümanlar $\Theta_n = \text{Arg } z_n$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_{2n} = \pi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_{2n-1} = -\pi$$

olur: çift ve tek indisli terimler farklı değerlere yaklaşır, dolayısıyla Θ_n 'nin limiti **yoktur**. Neden: noktalar negatif reel eksene bir üstten bir alttan yaklaşırken esas argüman $(-\pi, \pi]$ aralığının iki ucu arasında sıçrar.



Şekil 6.1: $z_n = -2 + i(-1)^n/n^2$ dizisi -2 'ye yakınsar; ama terimler negatif reel eksenin bir üstüne bir altına düşer. Üstteki (çift indisli) terimlerin esas argümanı π 'ye, alttakilerin $-\pi$ 'ye yaklaşır: nokta ve modül yakınsarken Arg z_n 'nin limiti yoktur, çünkü esas argüman bu eksenin 2π sıçrar.

6.2 Serilerin Yakınsaklığı

Tanım 6.2 (Serinin Toplamı). Kompleks sayıların sonsuz bir

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots \quad (4)$$

serisi, **kısmi toplamlar dizisi**

$$S_N = \sum_{n=1}^N z_n \quad (N = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

S sayısına yakınsıyorsa, seri S toplamına **yakınsar** ve $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$ yazılır. Yakınsamayan seriye **ıraksak** denir.

Bir dizinin en çok bir limiti olduğundan, bir serinin de en çok bir toplamı vardır.

Teorem 6.2 (Serilerde Bileşen Ayrışımı). $z_n = x_n + iy_n$ ve $S = X + iY$ olsun. O zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y$$

İspat.

Kısmi toplamlar $S_N = X_N + iY_N$ biçiminde yazılır; burada X_N ve Y_N , reel serilerin kısmi toplamlarıdır. $\sum z_n = S$ eşitliği doğrudur ancak ve ancak $S_N \rightarrow S$ ise; [Teorem 6.1](#) gereği bu da $X_N \rightarrow X$ ve $Y_N \rightarrow Y$ olmasına denktir.

■

Teorem sayesinde kalkülüsten bilinen seri özellikleri kompleks düzleme taşınır. İki tanesi bu kitap boyunca kullanılacaktır.

Teorem 6.3 (Terimler Sıfıra Gider). Kompleks sayıların bir serisi yakınsaksa, $n \rightarrow \infty$ iken n -inci terim sıfıra gider:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

İspat.

Seri yakınsaksa [Teorem 6.2](#) gereği $\sum x_n$ ve $\sum y_n$ reel serileri yakınsaktır; reel analizden bunların terimleri sıfıra gider. [Teorem 6.1](#) ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 + i \cdot 0 = 0$$

■

Buradan doğal bir sonuç çıkar: yakınsak bir serinin terimleri **sınırlıdır** — her n için $|z_n| \leq M$ olacak bir M pozitif sabiti vardır.

Tanım 6.3 (Mutlak Yakınsaklık). (4) serisine, reel terimli

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

serisi yakınsaksa **mutlak yakınsak** denir.

Teorem 6.4 (Mutlak Yakınsaklık Yakınsaklığı Gerektirir). Bir kompleks serinin mutlak yakınsaklığı, o serinin yakınsaklığını gerektirir.

İspat.

$\sum |z_n|$ yakınsak olsun. Her n için

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}, \quad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

olduğundan karşılaştırma testiyle $\sum |x_n|$ ve $\sum |y_n|$ yakınsaktır. Reel serilerde mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirdiğinden $\sum x_n$ ve $\sum y_n$ yakınsar; [Teorem 6.2](#) ile $\sum z_n$ yakınsaktır.

■

6.3 Kalanlarla Yakınsaklık Ölçütü

Toplamı S olduğu iddia edilen bir serinin N terimden sonraki **kalanı**

$$\rho_N = S - S_N \tag{6}$$

olarak tanımlanır. $|S_N - S| = |\rho_N - 0|$ olduğundan şu ölçüt doğar:

💡 Kalan sıfıra gitmeli

Bir seri S sayısına yakınsar **ancak ve ancak** kalanlar dizisi sıfıra yakınsıyorsa. Kuvvet serileriyle çalışırken toplam formüllerini kanıtlamanın en pratik yolu budur.

z_0 ve a_n kompleks sabitler olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

biçimindeki serilere **kuvvet serisi** denir. Değişken içeren böyle serilerde toplam, kısmi toplam ve kalan sırasıyla $S(z)$, $S_N(z)$ ve $\rho_N(z)$ ile gösterilir.

Örnek 6.2 (Geometrik Seri). $|z| < 1$ iken

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (7)$$

olduğunu kalanlar yardımıyla gösteriniz.

Çözüm.

$z \neq 1$ için sonlu toplam özdeşliği

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

kısmi toplamaları verir:

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

$S(z) = \frac{1}{1-z}$ alındığında kalan

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) = \frac{z^N}{1-z} \quad (z \neq 1)$$

olur ve

$$|\rho_N(z)| = \frac{|z|^N}{|1-z|}$$

$|z| < 1$ iken $|z|^N \rightarrow 0$ olduğundan kalanlar sıfıra gider ve toplam formülü (7) sağlanır. $|z| \geq 1$ durumunda ise $|z|^N$ sıfıra gitmez; seri iraksaktır.

■

6.4 Alıştırma

Alıştırma 6.1 (Dizi ve Seri Alıştırmaları).

- $z_n = \frac{(-1)^n}{n} + 2i$ dizisinin limitini bulunuz.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ serisinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n}$ serisinin yakınsak olup olmadığını, geometrik seri ölçütüyle inceleyiniz.

Çözüm.

a) Bir kompleks dizinin yakınsaması, reel ve sanal kısımlarının ayrı ayrı yakınsamasıyla eşdeğerdir. Burada

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad y_n = 2$$

Reel kısım işaret değıştirse de modülü $1/n \rightarrow 0$ olduğundan $x_n \rightarrow 0$ 'dır; sanal kısım zaten sabittir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0 + 2i = 2i$$

b) Mutlak yakınsaklık, terimlerin modüllerinden oluşan reel serinin yakınsamasıdır:

$$\left| \frac{i^n}{n^2} \right| = \frac{|i|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

çünkü $|i| = 1$ 'dir. Sağdaki $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi, $p = 2 > 1$ olan bir p -serisidir ve yakınsaktır. Demek ki verilen seri mutlak yakınsaktır – ve mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirdiğinden serinin kendisi de yakınsar.

c) Seriyi geometrik biçime sokalım:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n, \quad q = \frac{1+i}{2}$$

Ortak çarpanın modülü

$$|q| = \frac{|1+i|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707 < 1$$

olduğundan seri yakınsaktır. Geometrik serinin toplam formülüyle

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1+i}{2}} = \frac{2}{2-1-i} = \frac{2}{1-i}$$

Paydayı eşleniğiyle genişletelim:

$$\frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

■

Seriler dili kuruldu; şimdi asıl teoreme geçiyoruz: analitik her fonksiyon, analitik olduğu her diskte bir kuvvet serisine açılır – [Taylor serileri](#).

7. Taylor Serileri

Analitik bir fonksiyon, analitik olduğu her diskin merkezinde **kuvvet serisine** açılır. Bu bölümün teoremi kompleks analizin en kullanışlı sonuçlarından: bir kez türevlenebilme, sonsuz bir polinom gibi davranmayı beraberinde getirir.

7.1 Taylor Teoremi

Teorem 7.1 (Taylor Teoremi). f fonksiyonu, z_0 merkezli R_0 yarıçaplı $|z - z_0| < R_0$ diski üzerinde analitik olsun. O zaman $f(z)$, bu diskin her noktasında kuvvet serisi temsiline sahiptir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R_0) \quad (1)$$

Katsayılar

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

biçimindedir. Açık yazımıyla:

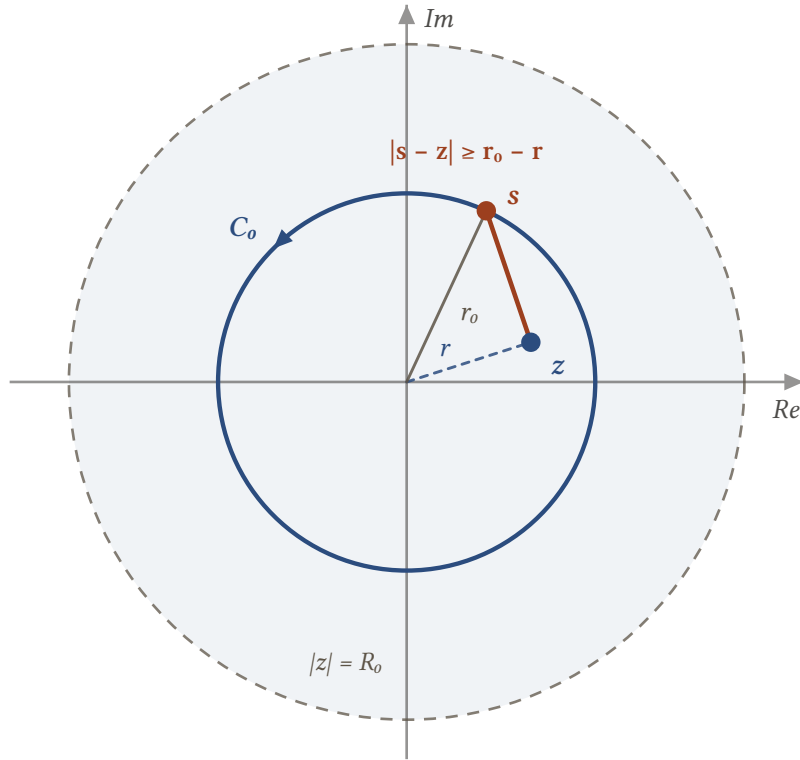
$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots \quad (3)$$

İspat.

Önce merkezin başlangıç noktasında olduğu $z_0 = 0$ durumunu kuralım; genel durum sonunda kaydırma ile çıkacak.

$|z| = r$ olsun ve C_0 , pozitif yönlü $|s| = r_0$ çemberini gösterebiliriz; burada $r < r_0 < R_0$ 'dir. f, C_0 'in içinde ve üzerinde analitik ve z, C_0 'in içinde olduğundan **Cauchy integral formülü** uygulanır:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s) ds}{s - z} \quad (4)$$



Şekil 7.1: Taylor teoremi ispatının sahnesi: f , kesikli $|z| = R_0$ çemberinin içinde analitiktir. Sabit z noktası ($|z| = r$) ile bu çember arasına ara bir $C_0 : |s| = r_0$ çemberi yerleştirilir ($r < r_0 < R_0$). C_0 üzerindeki her s için $|s - z| \geq r_0 - r$ olduğundan kalan, $(r/r_0)^N$ çarpanıyla sıfıra gider.

İntegranddaki $1/(s - z)$ çarpanını geometrik seriye hazırlayalım:

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 - (z/s)} \quad (5)$$

Geometrik seri özdeşliği, $z \neq 1$ için

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{N-1} z^n + \frac{z^N}{1 - z}$$

biçiminde sonlu toplam ve kalan olarak yazılabilir. Burada z yerine z/s konursa (5) ifadesi

$$\frac{1}{s - z} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{s^{n+1}} z^n + z^N \frac{1}{(s - z)s^N} \quad (6)$$

olur. İki taraf $f(s)$ ile çarpılıp C_0 üzerinde s 'ye göre integrallenirse

$$\int_{C_0} \frac{f(s) ds}{s - z} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\int_{C_0} \frac{f(s) ds}{s^{n+1}} \right) z^n + z^N \int_{C_0} \frac{f(s) ds}{(s - z)s^N}$$

Genişletilmiş Cauchy integral formülü

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s) ds}{s^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

verdiğinden, her taraf $1/(2\pi i)$ ile çarpıldığında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \rho_N(z) \quad (7)$$

elde edilir; kalan

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s) ds}{(s-z)s^N} \quad (8)$$

Geriye $\lim_{N \rightarrow \infty} \rho_N(z) = 0$ göstermek kalır. $s \in C_0$ için

$$|s - z| \geq ||s| - |z|| = r_0 - r$$

olduğuna dikkat edelim. $M, |f(s)|$ 'nin C_0 üzerindeki maksimum değeri olmak üzere **ML eşitsizliği** ile

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{r^N}{2\pi} \cdot \frac{M}{(r_0 - r)r_0^N} \cdot 2\pi r_0 = \frac{Mr_0}{r_0 - r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^N$$

$r/r_0 < 1$ olduğundan sağ taraf $N \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider; $z_0 = 0$ durumu kanıtlanmıştır.

Merkezi kaydırma. $f, |z - z_0| < R_0$ diskinde analitik olsun. $g(z) = f(z + z_0)$ bileşkesi $|z| < R_0$ diskinde analiktir; az önceki sonuç g 'ye uygulanır:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n \Rightarrow f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n \quad (|z| < R_0)$$

Bu denklemde ve geçerlilik koşulunda z yerine $z - z_0$ yazılırsa teoremdaki (1) açılımı çıkar.

■

$z_0 = 0$ özel durumunda seriye **Maclaurin serisi** denir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (|z| < R_0) \quad (9)$$

💡 Yakınsaklık için test gerekmez

Bir z_0 noktasında analitik olan her fonksiyon, o nokta civarında Taylor serisine sahiptir: analitiklik bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda geçerlidir ve bu ε , teoremdaki R_0 olarak iş görür. f tam ise R_0 istendiği kadar büyük seçilebilir; seri **tüm düzlemde** $f(z)$ 'ye yakınsar.

Daha keskin ifadeyle: seri, z_0 'dan f 'nin analitik olmadığı **en yakın** noktaya olan uzaklık yarıçaplı çemberin içinde $f(z)$ 'ye yakınsar.

7.2 Temel Maclaurin Açılımları

Örnek 7.1 (Üstel Fonksiyon). $f(z) = e^z$ tam olduğundan her z için geçerli bir Maclaurin serisine sahiptir. $f^{(n)}(z) = e^z$ ve $f^{(n)}(0) = 1$ olduğundan

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (|z| < \infty) \quad (10)$$

$z = x + i0$ alındığında reel analizden bilinen $e^x = \sum x^n/n!$ açılımına inilir.

Örnek 7.2 (Açılımdan Açılım Türetmek). $z^2 e^{3z}$ tam fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz.

Çözüm.

Türev hesaplamak yerine (10) açılımında z yerine $3z$ yazıp z^2 ile çarpmak yeterlidir:

$$z^2 e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+2} \quad (|z| < \infty)$$

İndis kaydırılarak ($n \rightarrow n-2$) standart biçime getirilir:

$$z^2 e^{3z} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n-2)!} z^n \quad (|z| < \infty)$$

■

Örnek 7.3 (Sinüs ve Kosinüs). $\sin z$ ve $\cos z$ fonksiyonlarının Maclaurin serilerini bulunuz.

Çözüm.

Üstel tanımdan ve (10) açılımından:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right] = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} [1 - (-1)^n] \frac{i^n z^n}{n!}$$

n çiftken $1 - (-1)^n = 0$ 'dır; yalnızca tek indisler hayatta kalır. $n = 2n+1$ yazılırsa, $1 - (-1)^{2n+1} = 2$ ve $i^{2n+1} = (i^2)^n i = (-1)^n i$ olduğundan

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty) \quad (11)$$

Serilerin terim terime türetilmesi ([kuvvet serileriyle işlemler](#) bölümünde kanıtlanacak) kullanılırsa

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty) \quad (12)$$

■

Örnek 7.4 (Hiperbolik Fonksiyonlar). $\sinh z = -i \sin(iz)$ [bağıntısı](#) kullanılarak, (11) açılımında z yerine iz yazılıp $-i$ ile çarpılırsa

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|z| < \infty) \quad (13)$$

Benzer biçimde $\cosh z = \cos(iz)$ ile (12) açılımından

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty) \quad (14)$$

Merkez değiştirmek de kolaydır: (14) açılımında z yerine $z + 2\pi i$ yazılıp $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$ periyodikliği kullanılırsa, $z_0 = -2\pi i$ civarındaki Taylor serisi elde edilir:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 2\pi i)^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < \infty)$$

7.3 Geometrik Açılım ve Kaydırmalar

Örnek 7.5 ($1/(1-z)$ Açılımı). $f(z) = \frac{1}{1-z}$ fonksiyonu $z = 1$ 'de analitik değildir; en yakın tekil nokta orada olduğundan Maclaurin serisi $|z| < 1$ diskinde geçerlidir. Türevler

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \Rightarrow f^{(n)}(0) = n!$$

olduğundan katsayılar $a_n = 1$ çıkar:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1) \quad (15)$$

Bu, **geometrik serinin toplam formülünün** Taylor teoremiyle ikinci bir kanıtıdır.

Bu tek açılımdan, değişken değiştirerek başka temsiller üretilir:

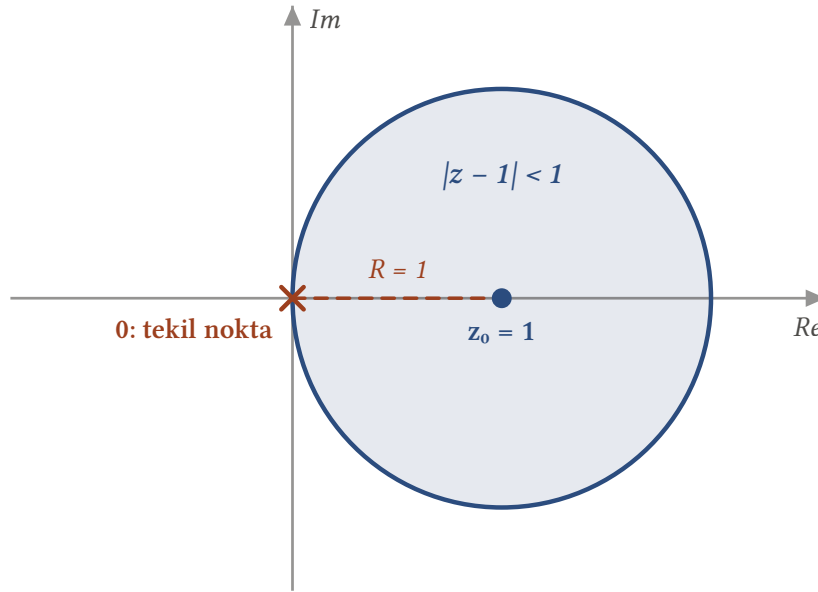
- $z \mapsto -z$ (ve $| -z | < 1 \Leftrightarrow | z | < 1$):

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1)$$

- $z \mapsto 1-z$ (geçerlilik koşulu $|1-z| < 1$, yani $|z-1| < 1$):

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n \quad (|z-1| < 1)$$

Bu ikincisi, $1/z$ fonksiyonunun $z_0 = 1$ civarındaki Taylor serisidir $-z = 0$ tekil noktasına olan uzaklık, yarıçapı belirler.



Şekil 7.2: $1/z$ fonksiyonunun tek tekil noktası 0'dır. $z_0 = 1$ merkezli Taylor açılımı, merkezden büyüyüp tekil noktaya değen en büyük diskte, yani $|z-1| < 1$ 'de geçerlidir: yakınsaklık yarıçapı, merkezden en yakın tekil noktaya olan uzaklıktır.

Örnek 7.6 (Negatif Kuvvetlerin İlk Görünüşü).

$$f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$$

funksiyonunu z 'nin kuvvetlerini içeren bir seriye açınız.

Çözüm.

$f, z = 0$ 'da analitik olmadığından Maclaurin serisi yoktur. Yine de cebirsel bir düzenleme sonuç verir:

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{2(1+z^2) - 1}{1+z^2} = \frac{1}{z^3} \left(2 - \frac{1}{1+z^2} \right)$$

(15) açılımında z yerine $-z^2$ konursa

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \dots \quad (|z| < 1)$$

Yerine yazalım: $0 < |z| < 1$ için

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \left(2 - 1 + z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \dots \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots$$

$1/z^3$ ve $1/z$ terimleri, z 'nin **negatif kuvvetleridir**. Böyle açılımların kuramı bir sonraki bölümün konusudur.

■

7.4 Alıştırma

Alıştırma 7.1 (Taylor Serisi Alıştırmaları).

- $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini bulunuz ve geçerlilik yarıçapını belirleyiniz.
- $\frac{1}{1-z}$ fonksiyonunun $z_0 = i$ civarındaki Taylor serisini bulunuz; geçerlilik koşulunu yazınız.
- $\cos z$ fonksiyonunun $z_0 = \pi/2$ civarındaki Taylor serisini, $\cos z = -\sin(z - \pi/2)$ özdeşliğini kullanarak elde ediniz.

Çözüm.

a) Türev almak yerine geometrik seriyi kullanalım. Paydayı 9 parantezine alalım:

$$\frac{z}{z^4+9} = \frac{z}{9} \cdot \frac{1}{1+\frac{z^4}{9}} = \frac{z}{9} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z^4}{9}\right)}$$

$\frac{1}{1-w} = \sum w^n$ açılımını $w = -\frac{z^4}{9}$ ile uygulayalım:

$$\frac{z}{z^4+9} = \frac{z}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{9^{n+1}} z^{4n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} z^{4n+1}$$

Geçerlilik koşulu $|w| < 1$, yani $|z|^4 < 9$ 'dur:

$$|z| < \sqrt[4]{9}$$

Bu yarıçap, beklendiği gibi başlangıcın tekil noktalara olan uzaklığıdır: $z^4 = -9$ köklerinin modülü $9^{1/4} = \sqrt[4]{9}$ 'tür.

b) Merkezi $z_0 = i$ yapmak için paydayı $z - i$ cinsinden yazalım:

$$1 - z = (1 - i) - (z - i) = (1 - i) \left[1 - \frac{z - i}{1 - i} \right]$$

Geometrik seriyi $w = \frac{z-i}{1-i}$ ile uygulayalım:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$$

Geçerlilik koşulu $|w| < 1$ 'dir:

$$|z - i| < |1 - i| = \sqrt{2}$$

Yine tekil noktaya ($z = 1$) olan uzaklığı bulduk.

c) $w = z - \frac{\pi}{2}$ yazalım. Verilen özdeşlik $\cos z = -\sin w$ olduğunu söyler. Sinüsün Maclaurin serisi tüm düzlemde geçerlidir:

$$\sin w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1}$$

Başına eksi koyup w 'yi geri yazalım:

$$\cos z = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}$$

$\cos z$ tam olduğundan seri her z için geçerlidir. İlk terimler açık yazıldığında

$$\cos z = -\left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{6}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \dots$$

elde edilir; $z = \pi/2$ 'de fonksiyonun sıfırlanması ve türevinin -1 olması bu açılamdan doğrudan okunur.

■

Taylor serisi, fonksiyonun **analitik olduğu** diski gerektiriyordu. Peki tekil nokta merkezdeyse? Yanıt, negatif kuvvetlere kapı açan bir genellemedir: [Laurent serileri](#).

8. Laurent Serileri

Taylor teoremi, fonksiyonun merkezde analitik olmasını istiyordu. Peki merkez bir tekil noktaysa? Laurent'in yanıtı, seriyi **negatif kuvvetlerle** genişletmektir. Bu genişleme sadece bir hesap kolaylığı değildir: negatif kuvvetlerin katsayıları, tekil noktaların sınıflandırılmasını ve rezidü kuramının tamamını taşıyacaktır.

8.1 Laurent Teoremi

Teorem 8.1 (Laurent Teoremi). *f fonksiyonu, z_0 merkezli $R_1 < |z - z_0| < R_2$ halka domeninde analitik olsun ve C , z_0 'ı çevreleyen, bu domende kalan pozitif yönlü herhangi bir basit kapalı çevreyi göstere. O zaman domenin her noktasında $f(z)$ şu seri temsiline sahiptir:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2) \quad (1)$$

Katsayılar

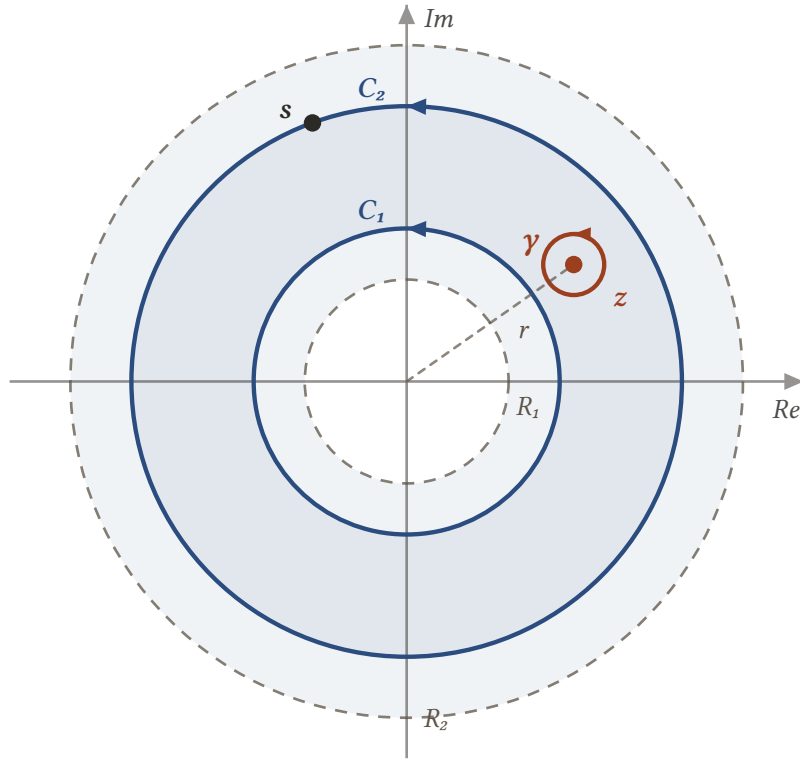
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

İspat.

$z_0 = 0$ durumunu kuralım; genel durum, Taylor teoremindeki gibi kaydırma ile çıkar.

$r_1 \leq |z| \leq r_2$ kapalı halka bölgesini, z noktasını ve C çevresini içerecek biçimde $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ seçelim. C_1 ve C_2 sırasıyla $|z| = r_1$ ve $|z| = r_2$ pozitif yönlü çemberleri olsun. Ayrıca z merkezli, halka bölgesinin içinde kalan küçük pozitif yönlü bir γ çemberi alalım.



Şekil 8.1: Laurent teoremi ispatının sahnesi: f , kesikli çemberler arasındaki $R_1 < |z| < R_2$ halkasında analitiktir. İçine, z noktasını barındıran kapalı $r_1 \leq |z| \leq r_2$ halkası ve sınır çemberleri C_1, C_2 yerleştirilir; z 'nin çevresine de küçük bir γ çemberi. C_2 üzerindeki s için $|z/s| < 1$, C_1 üzerindeki için $|s/z| < 1$ olduğundan iki farklı geometrik seri açılımı kullanılır.

$f(s)/(s - z)$ fonksiyonu, C_2 ile C_1 ve γ arasında kalan çok bağlantılı bölgede analitiktir; **çok bağlantılı domenler için Cauchy-Goursat teoremi** gereği

$$\int_{C_2} \frac{f(s) ds}{s - z} - \int_{C_1} \frac{f(s) ds}{s - z} - \int_{\gamma} \frac{f(s) ds}{s - z} = 0$$

Üçüncü integralin değeri Cauchy integral formülüne göre $2\pi i f(z)$ 'dir. Böylece

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s) ds}{s - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s) ds}{z - s} \quad (5)$$

Birinci integral. Taylor teoreminin ispatındaki açılım aynen kullanılır:

$$\frac{1}{s - z} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{s^{n+1}} z^n + z^N \frac{1}{(s - z)s^N}$$

İkinci integral. Aynı özdeşlikte s ile z 'nin rolleri değiştirilir:

$$\frac{1}{z - s} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{s^{-n+1}} \cdot \frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^N} \cdot \frac{s^N}{z - s}$$

İki açılım $f(s)/(2\pi i)$ ile çarpılıp sırasıyla C_2 ve C_1 üzerinde integrallenir ve (5)'te yerine konursa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \rho_N(z) + \sum_{n=1}^N \frac{b_n}{z^n} + \sigma_N(z) \quad (6)$$

elde edilir; burada a_n ve b_n teoremdaki katsayılar (C yerine sırasıyla C_2 ve C_1 ile), kalanlar ise

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s) ds}{(s-z)s^N}, \quad \sigma_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{s^N f(s) ds}{z-s}$$

Kalanların sönmesi. $|z| = r$ yazalım ($r_1 < r < r_2$) ve M , $|f(s)|$ 'nin C_1 ile C_2 üzerindeki maksimum değeri olsun. $s \in C_2$ için $|s-z| \geq r_2 - r$, $s \in C_1$ için $|z-s| \geq r - r_1$ olduğundan ML eşitsizliği

$$|\rho_N(z)| \leq \frac{Mr_2}{r_2 - r} \left(\frac{r}{r_2}\right)^N, \quad |\sigma_N(z)| \leq \frac{Mr_1}{r - r_1} \left(\frac{r_1}{r}\right)^N$$

verir. $r/r_2 < 1$ ve $r_1/r < 1$ olduğundan iki kalan da $N \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider ve (6), teoremdaki (1) açılımına dönüşür.

Çevrelerin değiştirilmesi. C_1 ve C_2 yerine, halkada kalan ve z_0 'ı çevreleyen herhangi bir C çevresi kullanılabilir; bu *yolun deformasyonu ilkesinin* doğrudan sonucudur. Böylece katsayılar (2) ve (3) biçimini alır.

■

İkinci toplamda n yerine $-n$ yazılırsa iki seri tek bir toplamda birleşir:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (4)$$

Bu iki biçimin her birine f 'nin **Laurent serisi** denir.

i Taylor serisi özel bir durumdur

(3) integralindeki integrand $f(z)(z - z_0)^{n-1}$ biçiminde yazılabilir. f , $|z - z_0| < R_2$ diskinin **tamamında** analitikse bu integrand da analiktir ve Cauchy-Goursat teoremi gereği tüm b_n katsayıları sıfırdır. Ayrıca a_n katsayıları **genişletilmiş Cauchy integral formülüyle** $f^{(n)}(z_0)/n!$ değerine indirgenir; seri, Taylor serisine dönüşür.

Halkanın uçları da esnektir: f , yalnız z_0 'da analitik değilse R_1 istendiği kadar küçük seçilebilir ve temsil **delinmiş diskte** $0 < |z - z_0| < R_2$ geçerli olur. f , $|z - z_0| = R_1$ çemberinin dışında her yerde analitikse geçerlilik koşulu $R_1 < |z - z_0| < \infty$ biçimini alır.

8.2 Çözümlü Uygulamalar

Laurent katsayıları, integral gösterimlerine başvurmak yerine, çoğunlukla bilinen açılımlarda değişken değiştirilerek bulunur.

Örnek 8.1 ($e^{1/z}$ Açılımı). $e^{1/z}$ fonksiyonunun $0 < |z| < \infty$ halkasındaki Laurent serisini bulunuz.

Çözüm.

Maclaurin açılımında z yerine $1/z$ yazmak yeterlidir:

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = 1 + \frac{1}{1! z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \quad (0 < |z| < \infty)$$

z 'nin pozitif kuvvetleri hiç görünmez: $a_0 = 1$ dışında tüm a_n katsayıları ($n \geq 1$) sıfırdır. $1/z$ 'nin katsayısı ise $b_1 = 1$ 'dir ve Laurent teoremine göre bu katsayı

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{1/z} dz$$

sayısıdır (C , orijini çevreleyen pozitif yönlü herhangi bir basit kapalı çevre). Buradan hesaplanması güç görünen bir integral bedavaya gelir:

$$\int_C e^{1/z} dz = 2\pi i$$

Bu teknik — bir integrali seri katsayısından okumak — **rezidü kuramının** çekirdeğidir.

■

Örnek 8.2 (Zaten Laurent Biçiminde). $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$ fonksiyonu, $z_0 = i$ için hâlihazırda bir Laurent serisidir:

$$\frac{1}{(z-i)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-i)^n \quad (0 < |z-i| < \infty)$$

Burada $c_{-2} = 1$ ve diğer bütün katsayılar sıfırdır. Katsayı formülü (4) tersinden okunursa, C merkezi i olan pozitif yönlü herhangi bir çember olmak üzere

$$\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+3}} = \begin{cases} 2\pi i, & n = -2 \\ 0, & n \neq -2 \end{cases}$$

sonucu doğrulanır — **temel integrallerle** uyumludur.

8.3 Aynı Fonksiyon, Üç Farklı Halka

Bir fonksiyonun Laurent serisi **halkaya bağlıdır**: aynı fonksiyon, farklı halkalarda tamamen farklı açılımlara sahiptir. Klasik örnek şudur:

$$f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} \quad (7)$$

Tekil noktalar $z = 1$ ve $z = 2$; dolayısıyla f , orijin merkezli üç ayrı domende analitiktir:

$$D_1 : |z| < 1, \quad D_2 : 1 < |z| < 2, \quad D_3 : 2 < |z| < \infty$$

Birinci toplamda indis kaydırılıp ($n \rightarrow n - 1$) terimler standart sıraya konursa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \quad (1 < |z| < 2)$$

Bu, Laurent teoremindeki (1) biçimidir: hem pozitif hem negatif kuvvetler vardır.

Örnek 8.5 (D_3 Bölgesi: Yalnızca Negatif Kuvvetler). $z \in D_3$ iken $|\frac{2}{z}| < 1$ ve dolayısıyla $|\frac{1}{z}| < 1$ 'dir:

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (1/z)} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - (2/z)}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 2^n}{z^{n+1}}$$

İndis kaydırılırsa standart biçim çıkar:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2^{n-1}}{z^n} \quad (2 < |z| < \infty)$$

Bu halkada tüm a_n katsayıları sıfırdır.

⚠ Önce halkayı belirleyin

“ f ’nin Laurent serisi” ifadesi tek başına eksiktir: hangi halkada sorusu yanıtlanmadan açılım belirsizdir. Yukarıdaki üç seri de aynı fonksiyona aittir ve üçü de doğrudur; her biri yalnızca kendi halkasında geçerlidir. Belirli bir halkada ise açılım **tektir** — bu teklği **kuvvet serileriyle işlemler** bölümünde kanıtlayacağız.

8.4 Alıştırma

Alıştırma 8.1 (Laurent Serisi Alıştırmaları).

- $\frac{z+1}{z}$ fonksiyonunun $0 < |z| < \infty$ halkasındaki Laurent serisini yazınız.
- $z^3 \sin \frac{1}{z}$ fonksiyonunun $0 < |z| < \infty$ halkasındaki açılımını bulunuz ve açılımda yalnızca **çift** kuvvetlerin görüldüğünü, dolayısıyla $1/z$ teriminin katsayısının sıfır olduğunu gösteriniz.
- $\frac{1}{z(z-2)}$ fonksiyonunun $0 < |z| < 2$ ve $2 < |z| < \infty$ halkalarındaki Laurent serilerini bulunuz.

Çözüm.

a) Bölmeyi yapmak yeterlidir:

$$\frac{z+1}{z} = \frac{z}{z} + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{z}$$

Sağ taraf zaten bir Laurent serisidir: pozitif kuvvetli kısım 1 sabitinden, negatif kuvvetli kısım tek bir $1/z$ teriminden oluşur. Açılım $0 < |z| < \infty$ halkasının tamamında geçerlidir ve teklilik teoremi gereği başka bir Laurent açılımı yoktur. Rezidü — yani $1/z$ ’nin katsayısı — 1’dir.

b) Sinüsün Maclaurin serisi her argüman için geçerlidir; $1/z$ yazalım ($z \neq 0$):

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)}$$

z^3 ile çarpmak üsleri üçer artırır:

$$z^3 \sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{3-(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2-2n}$$

İlk terimler:

$$z^3 \sin \frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{5040} \cdot \frac{1}{z^4} + \dots$$

Genel terimin üssü $2 - 2n = 2(1 - n)$ olduğundan **her zaman çifttir**; tek kuvvet hiç görünmez. Özel olarak z^{-1} terimi açılımı yer almaz, katsayısı sıfırdır:

$$2 - 2n = -1 \Rightarrow n = \frac{3}{2} \notin \{0, 1, 2, \dots\}$$

Rezidünün sıfır olması, $\int_C z^3 \sin \frac{1}{z} dz = 0$ demektir (C , başlangıcı çevreleyen herhangi bir pozitif yönlü basit kapalı çevre).

c) Fonksiyonu iki çarpana ayıralım:

$$\frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z-2}$$

$0 < |z| < 2$ halkasında $|z/2| < 1$ olduğundan ikinci çarpanı z 'nin kuvvetlerine açarız:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

$1/z$ ile çarpalım:

$$\frac{1}{z(z-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2z} - \frac{1}{4} - \frac{z}{8} - \dots$$

$2 < |z| < \infty$ halkasında ise $|2/z| < 1$ 'dir; bu kez z 'nin negatif kuvvetlerine açarız:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

$1/z$ ile çarpıp indisi $m = n + 2$ ile kaydıralım:

$$\frac{1}{z(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+2}} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{2^{m-2}}{z^m} = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \dots$$

Aynı fonksiyonun iki halkada iki farklı açılımı olması çelişki değildir: Laurent serisi, merkezle birlikte **halkaya** da bağlıdır. Dış halkada hiç pozitif kuvvet bulunmaması, fonksiyonun sonsuzda sıfıra gitmesinin karşılığıdır.

■

Seriler kurulduğuna göre onlarla **güvenle hesap yapmayı** öğrenmeliyiz: yakınsaklık nerede düzgündür, terim terime türetme ve integrasyon ne zaman geçerlidir? **Kuvvet serilerinin yakınsaklığı** bölümü bu soruları yanıtlıyor.

9. Kuvvet Serilerinin Yakınsaklığı

Bir kuvvet serisi bir noktada yakınsıyorsa, o noktaya kadar olan **bütün** diskte yakınsar – ve yakınsaklık, merkeze yeterince yakın kapalı disklerde **düzgündür**. Bu iki gerçek, serilerle güvenle hesap yapmanın (terim terime integrasyon, türetme, süreklilik) temelini oluşturur.

9.1 Yakınsaklık Çemberi

Teorem 9.1 (Diskte Mutlak Yakınsaklık). *Kuvvet serisi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

bir $z = z_1$ noktasında ($z_1 \neq z_0$) yakınsıyorsa, $R_1 = |z_1 - z_0|$ olmak üzere açık $|z - z_0| < R_1$ diskinin her noktasında **mutlak yakınsaktır**.

İspat.

Seri z_1 'de yakınsak olduğundan *terimleri sınırlıdır*: bir $M > 0$ sabiti için

$$|a_n (z_1 - z_0)^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$|z - z_0| < R_1$ olsun ve

$$\rho = \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1$$

yazalım. O zaman

$$|a_n (z - z_0)^n| = |a_n (z_1 - z_0)^n| \left(\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} \right)^n \leq M \rho^n$$

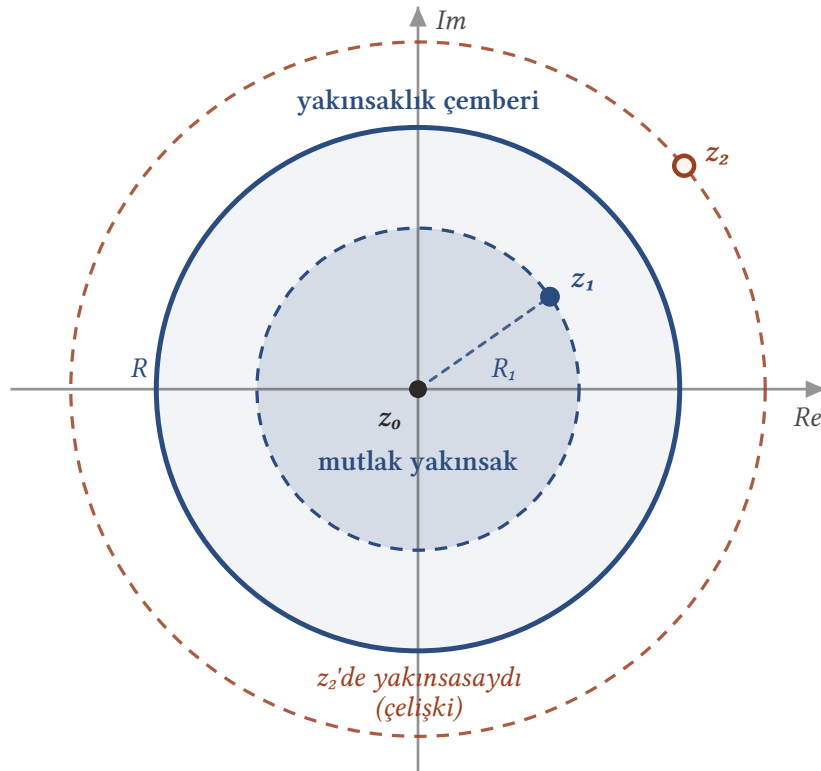
$\sum M \rho^n$ geometrik serisi $\rho < 1$ olduğundan yakınsaktır; karşılaştırma testiyle $\sum |a_n (z - z_0)^n|$ serisi de yakınsar.

■

Teorem, yakınsaklığın **dairesel** bir yapıya sahip olduğunu söyler: serinin merkez dışında yakınsadığı her nokta, o noktaya kadar olan diskin tamamını yakınsaklık bölgesi yapar.

Tanım 9.1 (Yakınsaklık Çemberi). (1) serisinin içindeki her noktada yakınsadığı, z_0 merkezli **en büyük** çembere serinin **yakınsaklık çemberi** denir; yarıçapına yakınsaklık yarıçapı denir.

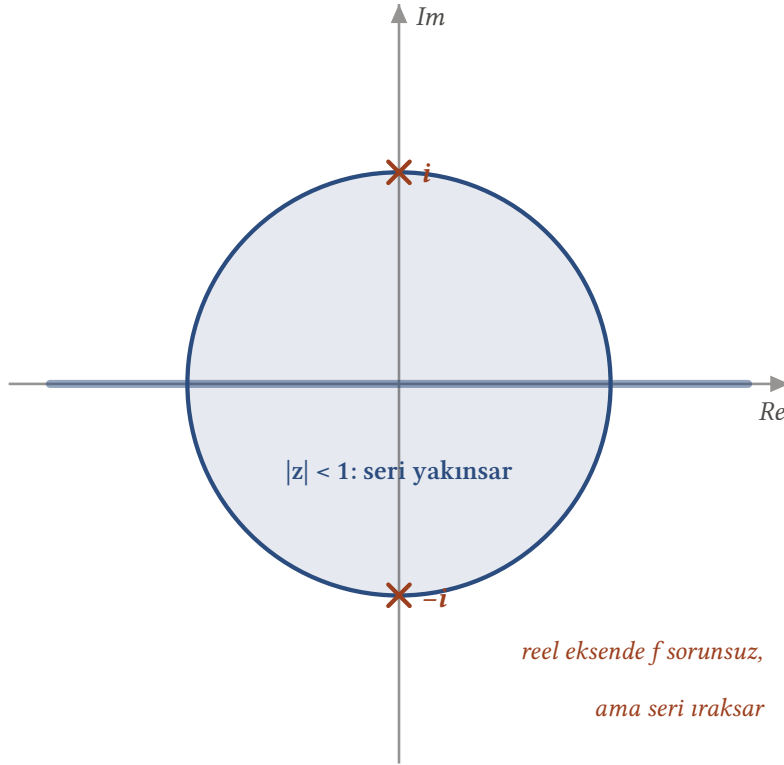
Seri, yakınsaklık çemberinin dışındaki hiçbir z_2 noktasında yakınsayamaz: yakınsasaydı, **Teorem 9.1** gereği z_0 merkezli ve z_2 'den geçen çemberin içinde her yerde yakınsardı; o zaman ilk çember “en büyük” olmazdı.



Şekil 9.1: Seri z_1 'de yakınsıyorsa, z_0 merkezli ve z_1 'den geçen çemberin içinde (koyu disk) mutlak yakınsar: yakınsaklık içeri doğru yayılır. Böyle disklerin en büyüğünün sınırı yakınsaklık çemberidir. Dışarıdaki bir z_2 'de yakınsasaydı, aynı teorem z_2 'den geçen kesikli çemberin içini de yakınsaklık bölgesi yapar ve ilk çember "en büyük" olmazdı.

i Taylor serisinin yarıçapı nereden gelir?

Taylor teoremi, f 'nin analitik olduğu her diskte açılımın geçerli olduğunu söylüyordu. Bu iki gözlem birleştiğinde pratik kural doğar: bir Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapı, merkezden **fonksiyonun en yakın tekil noktasına** olan uzaklıktır. Örneğin $\frac{1}{1+z^2}$ fonksiyonunun Maclaurin serisi, tekil noktalar $\pm i$ olduğundan $|z| < 1$ diskinde yakınsar — reel ekseninde hiçbir sorun görünmemesine rağmen.



Şekil 9.2: $1/(1+z^2)$ reel eksenin her noktasında düzgün ve sonsuz kez türevlenebilirdir; yine de Maclaurin serisi yalnız $|z| < 1$ 'de yakınsar. Engel reel ekseninde değil, sanal eksenindedir: tekil noktalar $\pm i$ merkeze 1 uzaklıktadır ve yakınsaklık çemberi onlara değince büyümesi durur.

9.2 Düzgün Yakınsaklık

Yakınsaklık çemberinin içinde bir z sabitlendiğinde, kalan $\rho_N(z) = S(z) - S_N(z)$ ifadesi $N \rightarrow \infty$ iken sifıra gider; yani her $\varepsilon > 0$ için

$$N > N_\varepsilon \implies |\rho_N(z)| < \varepsilon \quad (2)$$

sağlayan bir N_ε vardır. Bu sayı genelde hem ε 'a hem de z 'ye bağlıdır.

Tanım 9.2 (Düzgün Yakınsaklık). N_ε sayısı yalnızca ε 'a bağlı olacak — belirtilen bölgedeki z seçiminin **bağımsız** kalacak — biçimde bulunabiliyorsa, yakınsaklığa o bölgede **düzgün** denir.

Teorem 9.2 (Kapalı Alt Diskte Düzgünlük). $z_1, (1)$ serisinin $|z - z_0| = R$ yakınsaklık çemberinin içinde bir nokta ise, seri $R_1 = |z_1 - z_0|$ olmak üzere kapalı $|z - z_0| \leq R_1$ diskinde **düzgün yakınsaktır**.

İspat.

z_1 , yakınsaklık çemberinin içinde olduğundan, çemberin içinde z_0 'a z_1 'den daha uzak ve serinin yakınsadığı bir nokta vardır; [Teorem 9.1](#) gereği

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z_1 - z_0)^n| \quad (3)$$

serisi yakınsaktır. Kalanları

$$\rho_N(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m a_n(z - z_0)^n, \quad \sigma_N = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=N}^m |a_n(z_1 - z_0)^n|$$

olarak yazalım. $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0|$ iken

$$\left| \sum_{n=N}^m a_n(z - z_0)^n \right| \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z - z_0|^n \leq \sum_{n=N}^m |a_n| |z_1 - z_0|^n$$

olduğundan, $m \rightarrow \infty$ limitiyle

$$|z - z_0| \leq R_1 \implies |\rho_N(z)| \leq \sigma_N \quad (4)$$

σ_N , yakınsak (3) serisinin kalanı olduğundan $N \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider: her $\varepsilon > 0$ için

$$N > N_\varepsilon \implies \sigma_N < \varepsilon \quad (5)$$

(4) ve (5) birlikte, $|z - z_0| \leq R_1$ diskindeki **tüm** z noktaları için (2) koşulunu verir ve N_ε , z 'den bağımsızdır.

■

9.3 Toplamın Sürekliliği

Teorem 9.3 (Kuvvet Serisinin Toplamı Süreklidir). Bir kuvvet serisi, $|z - z_0| = R$ yakınsaklık çemberinin içindeki her noktada **sürekli** bir $S(z)$ fonksiyonu temsil eder.

İspat.

z_1 , çemberin içinde bir nokta olsun; S 'nin z_1 'de sürekli olduğunu göstereceğiz, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$|z - z_1| < \delta \implies |S(z) - S(z_1)| < \varepsilon \quad (6)$$

sağlayan bir $\delta > 0$ bulacağız.

$S_N(z)$, ilk N terimin toplamı ve $\rho_N(z) = S(z) - S_N(z)$ olsun. $S = S_N + \rho_N$ ayrışımıyla

$$|S(z) - S(z_1)| \leq |S_N(z) - S_N(z_1)| + |\rho_N(z)| + |\rho_N(z_1)| \quad (7)$$

z_1 'i içeren, yarıçapı yakınsaklık yarıçapından küçük bir kapalı $|z - z_0| \leq R_0$ diski seçelim. [Teorem 9.2](#) gereği bu diskte düzgün yakınsaklık vardır:

$$N > N_\varepsilon \implies |\rho_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (8)$$

ve N_ε , disk içindeki z 'den bağımsızdır.

S_N kısmi toplamı bir polinomdur, dolayısıyla her N için z_1 'de süreklidir. $N = N_\varepsilon + 1$ seçilirse öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$|z - z_1| < \delta \implies |S_N(z) - S_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (9)$$

(δ , $|z - z_1| < \delta$ komşuluğu R_0 diskinden taşmayacak kadar küçük alınır.) (7) eşitsizliğinde $N = N_\varepsilon + 1$ konup (8) ile (9) kullanılırsa

$$|z - z_1| < \delta \implies |S(z) - S(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$



9.4 Negatif Kuvvetli Serilere Uyarlama

Laurent serisinin ikinci yarısı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (10)$$

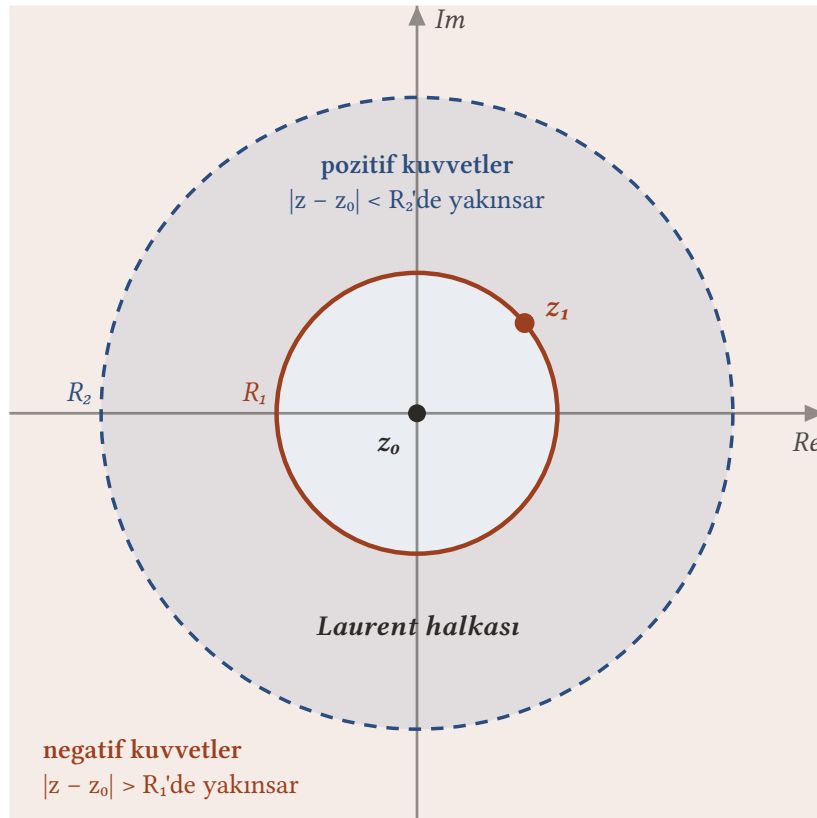
biçimindedir ve $w = \frac{1}{z - z_0}$ değişimiyle sıradan bir kuvvet serisine dönüşür:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n w^n$$

Bu seri bir $z_1 \neq z_0$ noktasında yakınsıyorsa, dönüşmüş seri

$$|w| < \frac{1}{|z_1 - z_0|} \quad (11)$$

diskinde mutlak yakınsar ve sürekli bir fonksiyon temsil eder. (11) koşulu $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ ile aynı olduğundan: **(10) serisi, $|z - z_0| = R_1$ çemberinin dışındaki domende mutlak yakınsar** ($R_1 = |z_1 - z_0|$) ve orada sürekli bir fonksiyon tanımlar.



Şekil 9.3: Negatif kuvvetli seri, $w = 1/(z - z_0)$ değişimiyle sıradan bir kuvvet serisine döner; $|w|$ küçük demek $|z - z_0|$ büyük demektir. Bu yüzden bir z_1 noktasında yakınsıyorsa, z_1 'den geçen çemberin **dışında** (taralı dış bölge) mutlak yakınsar. Pozitif kuvvetli kısım ise bir diskte yakınsar; iki bölgenin kesişimi Laurent halkasıdır.

🔗 Laurent serisinin iki yarısı

Bir Laurent temsili $R_1 < |z - z_0| < R_2$ halkasında geçerliyse, pozitif kuvvetli kısım “içeriden” R_2 yarıçaplı diski, negatif kuvvetli kısım “dışarıdan” R_1 yarıçaplı çemberin dışını yakınsaklık bölgesi olarak görür. İkisi de geçerlilik bölgesinin içinde kalan her **kapalı halkada düzgün yakınsaktır** – terim terime hesap yapma iznini veren tam olarak budur.

9.5 Alıştırma

Alıştırma 9.1 (Yakınsaklık Alıştırmaları).

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ serisinin yakınsaklık yarıçapını bulunuz.
- $\frac{1}{z^2+4}$ fonksiyonunun $z_0 = 1$ civarındaki Taylor serisinin yakınsaklık yarıçapını, tekil noktalara olan uzaklığı düşünerek belirleyiniz.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^n}$ serisinin hangi bölgede yakınsadığını, $w = 1/(z-1)$ değişimiyle bulunuz.

Çözüm.

a) Seri, ortak çarpanı $z/2$ olan geometrik seridir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n$$

Geometrik seri, ortak çarpanın modülü 1’den küçükken yakınsar:

$$\left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$$

$|z| > 2$ için terimler sifıra gitmediğinden seri ıraksar. Yakınsaklık yarıçapı $R = 2$ ’dir ve seri o diskte $\frac{1}{1-z/2} = \frac{2}{2-z}$ fonksiyonunu temsil eder; bu fonksiyonun tek tekil noktası olan $z = 2$ ’nin merkeze uzaklığı da 2’dir.

b) Taylor serisinin yarıçapı, merkezden fonksiyonun en yakın tekil noktasına olan uzaklıktır. Tekil noktalar paydayı sıfırlayan noktalardır:

$$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i$$

Merkez $z_0 = 1$ ’e uzaklıkları:

$$|1 - 2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \quad |1 + 2i| = \sqrt{5}$$

İki tekil nokta merkeze eşit uzaklıktadır; yakınsaklık yarıçapı

$$R = \sqrt{5}$$

Seri $|z - 1| < \sqrt{5}$ diskinde fonksiyona yakınsar, bu diskin sınırında ise iki tekil nokta oturur.

c) $w = \frac{1}{z-1}$ değişimiyle seri sıradan bir kuvvet serisine döner:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(z-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (3w)^n$$

Sağdaki geometrik seri $|3w| < 1$, yani $|w| < \frac{1}{3}$ iken yakınsar. Geri dönüşüm yapalım:

$$\left|\frac{1}{z-1}\right| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow |z-1| > 3$$

Seri, $z = 1$ merkezli 3 yarıçaplı çemberin **dışındaki** domende yakınsar. Toplamı da bulunabilir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3w)^n = \frac{3w}{1-3w} = \frac{3}{(z-1)-3} = \frac{3}{z-4}$$

Bu, negatif kuvvetli serilerin tipik davranışdır: yakınsaklık bölgesi bir disk değil, bir çemberin dışıdır.

■

Düzgün yakınsaklık elimizde; artık serilerle **işlem yapmaya** hakkımız var: terim terime integrasyon, türetme, çarpma ve bölme — [kuvvet serileriyle işlemler](#).

10. Kuvvet Serileriyle İşlemler

Serilerle çalışırken en çok ihtiyaç duyulan haklar şunlardır: terim terime integralleyebilmek, türetebilmek, çarpıp bölebilmek. **Düzgün yakınsaklık** bu hakların hepsini verir – ve bir bonus daha: bir fonksiyonun belirli bir bölgedeki seri temsili **tektir**.

10.1 Terim Terime İntegrasyon

Teorem 10.1 (Terim Terime İntegrasyon). C , kuvvet serisi

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (1)$$

serisinin yakınsaklık çemberinin içinde herhangi bir çevre ve g , C üzerinde sürekli herhangi bir fonksiyon olsun. Serinin her terimi $g(z)$ ile çarpılarak oluşan seri, C üzerinde terim terime integrallenebilir:

$$\int_C g(z) S(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z) (z - z_0)^n dz \quad (2)$$

İspat.

g ve S , C üzerinde süreklidir. ρ_N , serinin N terimden sonraki kalanı olmak üzere

$$g(z)S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z)(z - z_0)^n + g(z)\rho_N(z)$$

yazılabilir; sonlu toplamın terimleri C üzerinde sürekli olduğundan integralleri vardır ve

$$\int_C g(z)S(z) dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)(z - z_0)^n dz + \int_C g(z)\rho_N(z) dz \quad (3)$$

M , $|g(z)|$ 'nin C üzerindeki maksimumu ve L , C 'nin uzunluğu olsun. **Düzgün yakınsaklık** gereği her $\varepsilon > 0$ için, C üzerindeki tüm z noktalarında

$$N > N_\varepsilon \implies |\rho_N(z)| < \varepsilon$$

sağlayan ve z 'den bağımsız bir N_ε vardır. **ML eşitsizliğiyle**

$$N > N_\varepsilon \implies \left| \int_C g(z)\rho_N(z) dz \right| < M\varepsilon L$$

yani son integral $N \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider. (3) ifadesinde limit alınırsa (2) elde edilir.

■

Teorem 10.2 (Toplam Analitiktir). Bir kuvvet serisinin toplamı $S(z)$, yakınsaklık çemberinin içindeki her noktada **analitiktir**.

İspat.

$g(z) = 1$ alınsın ve C , yakınsaklık çemberinin içinde kalan herhangi bir kapalı çevre olsun. $(z - z_0)^n$ fonksiyonları tam olduğundan

$$\int_C (z - z_0)^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

ve [Teorem 10.1](#) gereği her böyle çevre için $\int_C S(z) dz = 0$ 'dır. S ayrıca *sürekli*dir; [Morera teoremi](#) gereği S , bu domende analittir.

■

Örnek 10.1 (Analitikliğin Serilerle Saptanması).

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunun tam olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Üstel fonksiyonun Maclaurin açılımı her z için

$$e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

verir. İki taraf z 'ye bölünürse, $z \neq 0$ için

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots \quad (4)$$

Sağdaki seri $z = 0$ 'da da yakınsar ve değeri $1 = f(0)$ 'dır; yani (4) temsili **her** z için geçerlidir. [Teorem 10.2](#) gereği f tamdır.

Bonus olarak, sürekliliğinden bir limit okunur:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = f(0) = 1$$

■

10.2 Terim Terime Türetme

Teorem 10.3 (Terim Terime Türetme). Kuvvet serisi (1), yakınsaklık çemberinin içindeki her noktada terim terime türetilir:

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad (5)$$

İspat.

z , yakınsaklık çemberinin içinde bir nokta; C , bu çemberin içinde kalan ve z 'yi çevreleyen pozitif yönlü basit kapalı bir çevre olsun. C üzerindeki her s noktasında

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(s - z)^2}$$

tanımlayalım; g , C üzerinde sürekli. [Teorem 10.1](#) uygulanırsa

$$\int_C g(s) S(s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(s) (s - z_0)^n ds \quad (6)$$

S , C 'nin içinde ve üzerinde analitik olduğundan [genişletilmiş Cauchy integral formülü](#) sol tarafı verir:

$$\int_C g(s) S(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{S(s) ds}{(s - z)^2} = S'(z)$$

Aynı formül sağdaki her integrale de uygulanır:

$$\int_C g(s)(s - z_0)^n ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(s - z_0)^n}{(s - z)^2} ds = \frac{d}{dz}(z - z_0)^n$$

(6) böylece

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz}(z - z_0)^n$$

biçimine iner; bu da (5) ile aynıdır.

■

Örnek 10.2 (Türetmeyle Yeni Açılım). Taylor bölümünde

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n \quad (|z - 1| < 1)$$

açılımını bulmuştuk. İki tarafı türetelim:

$$-\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (z - 1)^{n-1} \quad (|z - 1| < 1)$$

İşaret düzenlenip indis kaydırılırsa

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1)(z - 1)^n \quad (|z - 1| < 1)$$

Yeni bir Taylor hesabı yapmadan ikinci bir açılım elde edildi.

10.3 Temsillerin Tekliği

Teorem 10.4 (Taylor Temsilinin Tekliği). Bir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ serisi, $|z - z_0| = R$ çemberinin içindeki tüm noktalarda $f(z)$ 'ye yakınsıyorsa, bu seri **zorunlu olarak** f 'nin z_0 civarındaki Taylor serisidir.

İspat.

Hipotez, $|z - z_0| < R$ diskinde

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

demektir (toplam indisini k ile gösterdik). n sabit bir tam sayı olmak üzere

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}}$$

alalım ve C , z_0 merkezli, yarıçapı R 'den küçük bir çember olsun. Teorem 10.1 ile

$$\int_C g(z)f(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_C g(z)(z - z_0)^k dz \quad (7)$$

Sol taraf, genişletilmiş Cauchy integral formülüyle

$$\int_C g(z)f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Sağ taraftaki integraller ise temel integrallerle hesaplanır:

$$\int_C g(z)(z - z_0)^k dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n-k+1}} = \begin{cases} 0, k \neq n \\ 1, k = n \end{cases}$$

Böylece (7)'nin sağ tarafı tek bir terime, a_n 'e iner ve

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

çıkart — tam olarak Taylor katsayısı.

■

Teorem 10.5 (Laurent Temsilinin Tekliği). Bir $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ serisi, z_0 merkezli bir halka domenindeki tüm noktalarda $f(z)$ 'ye yakınsıyorsa, bu seri f 'nin o domendeki Laurent serisidir.

İspat.

Kanıt, Teorem 10.4 ile aynı yolu izler; tek fark, terim terime integrasyon teoreminin negatif kuvvetleri de içeren serilere uygulanmasıdır (bu, $w = 1/(z - z_0)$ dönüşümüyle gerekçelendirilir). Seri, halkada kalan bir C çevresi üzerinde $(z - z_0)^{-n-1}$ ile çarpılıp terim terime integrallenir; temel integraller yalnızca tek bir terimi ayakta bıraktığından

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

yani Laurent teoremindeki katsayı formülü elde edilir.

■

💡 Teklik neden bu kadar işe yarar?

Teklik teoremleri, bir açılımı **nasıl** bulduğumuzun önemsiz olduğunu söyler: geometrik seriden türetin, terim terime türetin, iki seriyi çarpın — bulduğunuz sonuç Taylor/Laurent serisinin ta kendisidir. Bu yüzden pratikte katsayı integrallerini hesaplamak yerine bilinen açılımlar cebirsel olarak işlenir; **rezidü hesapları** tamamen bu kolaylık üzerine kuruludur.

10.4 Çarpım ve Bölüm

f ve g , $|z - z_0| < R$ diskinde yakınsayan iki kuvvet serisinin toplamaları olsun. Her ikisi de analitik olduğundan çarpımları da analiktir ve aynı diskte geçerli bir Taylor açılımına sahiptir:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad (|z - z_0| < R)$$

Katsayılar, çarpımın türevleri için Leibniz kuralından okunur:

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot \frac{g^{(n-k)}(z_0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Bu formül, iki seriyi **biçimsel olarak terim terime çarpım** benzer kuvvetleri toplamakla aynı sonucu verir; elde edilen seriye iki serinin **Cauchy çarpımı** denir.

Örnek 10.3 (Serilerin Çarpımı). $\frac{e^z}{1+z}$ fonksiyonunun Maclaurin serisinin ilk terimlerini bulunuz.

Çözüm.

Tekil nokta $z = -1$ olduğundan açılım $|z| < 1$ diskinde geçerlidir. İki bilinen seriyi çarpalım:

$$\frac{e^z}{1+z} = \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \dots\right)(1 - z + z^2 - z^3 + \dots)$$

Benzer kuvvetler alt alta toplanırsa:

$$\frac{e^z}{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \dots \quad (|z| < 1)$$

(z 'nin birinci kuvveti sadeleşir: $1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0$.)

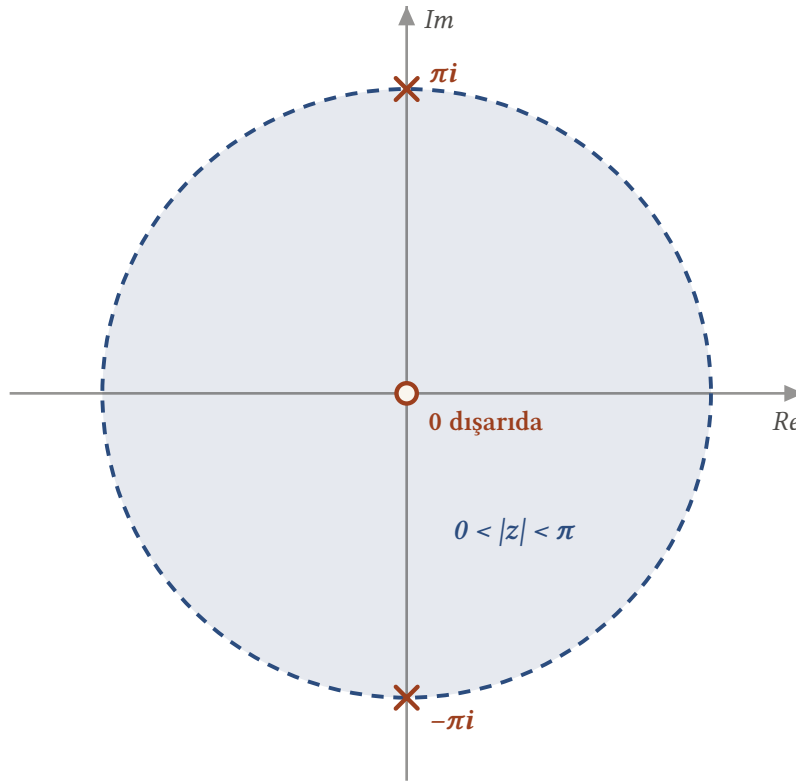
■

Bölme de aynı mantıkla yürür: $g(z) \neq 0$ olduğu bir diskte f/g analitiktir, dolayısıyla Taylor serisine sahiptir ve katsayıları **seri bölmesiyle** bulunur.

Örnek 10.4 (Seri Bölmesiyle Laurent Açılımı). $\frac{1}{z^2 \sinh z}$ fonksiyonunun $0 < |z| < \pi$ delinmiş diskindeki Laurent serisinin ilk üç sıfırdan farklı terimini bulunuz.

Çözüm.

$\sinh z$ 'nin sıfırları $z = n\pi i$ olduğundan (**hiperbolik fonksiyonlar**), orijine en yakın sıfırlar $\pm\pi i$ 'dir; delinmiş diskin yarıçapı π olur.



Şekil 10.1: $1/(z^2 \sinh z)$ fonksiyonu 0'da analitik değildir; $\sinh z$ 'nin diğer sıfırları $n\pi i$ ($n \neq 0$) noktalarıdır ve orijine en yakınları $\pm\pi i$ 'dir. Bu yüzden Laurent açılımı, merkezi dışarıda bırakan $0 < |z| < \pi$ delinmiş diskinde geçerlidir.

Maclaurin açılımıyla $\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$ olduğundan

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} \left(\frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots} \right)$$

Parantez içindeki bölümü seri bölmesiyle açalım: 1'i, paydadaki seriye bölmek

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots} &= 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!} \right] z^4 + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \dots\end{aligned}$$

verir ($|z| < \pi$). Katsayı kontrolü: $\frac{1}{36} - \frac{1}{120} = \frac{10-3}{360} = \frac{7}{360}$.
 $1/z^3$ ile çarpılırsa aranan Laurent serisi çıkar:

$$\frac{1}{z^2 \sinh z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z} + \frac{7}{360}z + \dots \quad (0 < |z| < \pi)$$

■

10.5 Alıştırma

Alıştırma 10.1 (Seri İşlemleri Alıştırmaları).

- $\frac{z}{(z^2+1)^2}$ fonksiyonunun Maclaurin serisini, $\frac{1}{1+z^2}$ açılımını türeterek bulunuz.
- $\frac{\sinh z}{z}$ fonksiyonunun $z = 0$ 'da 1 değeriyle tanımlandığında tam olduğunu gösteriniz.
- $\frac{1}{z \sin z}$ fonksiyonunun $0 < |z| < \pi$ halkasındaki Laurent serisinin ilk iki sıfırdan farklı terimini bulunuz.

Çözüm.

a) Geometrik seriden başlayalım; $w = -z^2$ ile

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1)$$

Yakınsaklık çemberinin içinde terim terime türetme serbesttir. Sol tarafın türevi

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1+z^2} \right) = \frac{-2z}{(1+z^2)^2}$$

Sağ tarafın türevi ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n z^{2n-1}$$

İki ifadeyi eşitleyip -2 ile bölelim:

$$\frac{z}{(1+z^2)^2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{2n-1}$$

İndisi $m = n - 1$ ile kaydırırsak açılım daha okunaklı olur:

$$\frac{z}{(1+z^2)^2} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} (m+1) z^{2m+1} = z - 2z^3 + 3z^5 - \dots \quad (|z| < 1)$$

Türetme yakınsaklık yarıçapını değiştirmedikten geçerlilik bölgesi yine $|z| < 1$ 'dir.

b) Hiperbolik sinüsün Maclaurin serisi tüm düzlemde geçerlidir:

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \dots$$

Her terimde en az bir z çarpanı bulunduğundan $z \neq 0$ için z 'ye bölebiliriz:

$$\frac{\sinh z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \dots$$

Sağdaki kuvvet serisi $\sinh z$ 'nin serisiyle aynı yakınsaklık bölgesine sahiptir, yani **tüm düzlemde** yakınsar; bir kuvvet serisinin toplamı yakınsaklık çemberinin içinde analitik olduğundan bu seri bir tam fonksiyon tanımlar. Serinin $z = 0$ 'daki değeri 1'dir; verilen tanım tam olarak bu değeri seçtiğinden

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sinh z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu seriyle her yerde çakışır ve tamdır. Başlangıçtaki tekillik yalnızca görünüşteydi – kaldırılabılır bir tekillikti.

c) Payda çarpımını serilerle yazalım. Sinüsün açılımından

$$z \sin z = z \left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots \right) = z^2 \left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \dots \right)$$

Tersini almak için $\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + \dots$ açılımını, küçük $|z|$ için

$$w = \frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \dots$$

ile kullanalım:

$$\frac{1}{1-w} = 1 + \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} \right) + \left(\frac{z^2}{6} \right)^2 + \dots = 1 + \frac{z^2}{6} + \left(\frac{1}{36} - \frac{1}{120} \right) z^4 + \dots$$

Dördüncü mertebe katsayısı $\frac{10-3}{360} = \frac{7}{360}$ 'tır. $1/z^2$ ile çarpalım:

$$\frac{1}{z \sin z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{7}{360} z^2 + \dots \quad (0 < |z| < \pi)$$

İlk iki sıfırdan farklı terim $\frac{1}{z^2}$ ve $\frac{1}{6}$ 'dır. Geçerlilik bölgesinin dış yarıçapı π 'dir: $\sin z$ 'nin başlangıca en yakın sıfırları $z = \pm\pi$ noktalarıdır. Ayrıca açılımda $1/z$ terimi bulunmadığına dikkat ediniz; başlangıçtaki rezidü sıfırdır.

■

Seriler kısmı tamamlandı. Şimdi Laurent açılımının en güçlü uygulamasına geçiyoruz: negatif kuvvetlerin ilk katsayısı, tek başına bir integral hesaplama makinesidir – **ayrık tekil noktalar ve rezidü**.

11. Ayırık Tekil Noktalar ve Rezidü

Cauchy-Goursat teoremi, analitik fonksiyonların kapalı çevre integralini sıfırlıyordu. Peki çevrenin içinde tekil noktalar varsa integral ne olur? Yanıt şaşırtıcı ölçüde basittir: her tekil nokta, integrale **tek bir sayıyla** katkı yapar – o noktadaki **rezidü**. Bu bölüm o sayıyı tanımlıyor.

11.1 Ayırık Tekil Noktalar

Tanım 11.1 (Ayırık Tekil Nokta). z_0 , f 'nin bir **tekil noktası** olsun. f 'nin her yerinde analitik olduğu delinmiş bir

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

komşuluğu varsa, z_0 'a **ayırık** tekil nokta denir.

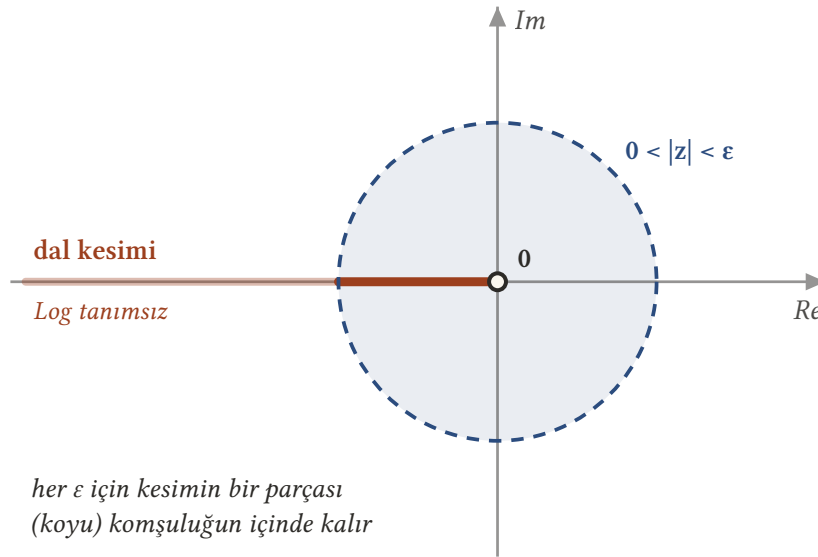
Örnek 11.1 (Ayırık Tekil Noktalar).

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

fonksiyonunun üç ayırık tekil noktası vardır: $z = 0$ ve $z = \pm i$. Her birinin, diğerlerini dışarıda bırakan yeterince küçük delinmiş bir komşuluğu bulunabilir.

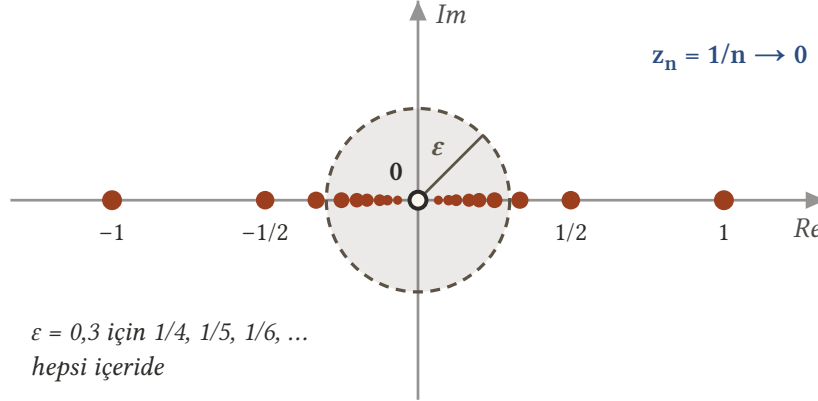
Örnek 11.2 (Ayırık Olmayan Tekillikler). İki karşı örnek, kavramın sınırını gösterir.

Logaritmanın esas dalı. $\text{Log } z = \ln r + i\Theta$ ($r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$) dalı için orijin bir tekil noktadır, ancak **ayırık değildir**: orijinin her delinmiş ε -komşuluğu, negatif reel eksen üzerinde fonksiyonun tanımlı bile olmadığı noktalar içerir. Aynı gözlem $\log z$ 'nin diğer dalları için de geçerlidir; **dal kesimi** boyunca tekillik bir çizgi hâlinindedir.



Şekil 11.1: $\text{Log } z$ için tekillik yalnız orijinde değil, negatif reel eksenin tamamındadır (dal kesimi). Orijinin her delinmiş ε -komşuluğu bu kesimden bir parça içerdiğinden, fonksiyonun her yerinde analitik olduğu bir delinmiş disk bulunamaz: 0 tekil ama **ayırık değildir**.

Sıfırların yığıldığı nokta. $f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)}$ fonksiyonunun tekil noktaları $z = 0$ ve $z = \frac{1}{n}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) noktalarıdır. $z = 0$ dışındakilerin hepsi ayrıktır; $z = 0$ ise **ayrık değildir**, çünkü herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m > 1/\varepsilon$ koşulunu sağlayan bir m doğal sayısı seçilerek $0 < 1/m < \varepsilon$ elde edilir – yani orijinin her delinmiş komşuluğu başka tekil noktalar barındırır.



Şekil 11.2: $1/\sin(\pi/z)$ fonksiyonunun tekil noktaları 0 ve $1/n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) sayılarıdır; $1/n$ noktaları orijine yığılır. Her bir $1/n$ ayrıktır; ama 0 değildir: ε ne kadar küçük seçilirse seçilsin, $0 < |z| < \varepsilon$ delinmiş diski $1/m < \varepsilon$ koşulunu sağlayan sonsuz çoklukta tekil nokta içerir.

Bu ünite, bir C basit kapalı çevresinin içinde **sonlu sayıda** tekil nokta bulunan fonksiyonlarla çalışacağız. Böyle noktaların tamamı zorunlu olarak ayrıktır ve her birinin, tamamen C 'nin içinde kalan yeterince küçük delinmiş komşulukları vardır.

i Sonsuzdaki nokta da ayrıktır olabilir

f , bir $R_1 > 0$ sayısı için $R_1 < |z| < \infty$ domeninde analitikse, $z_0 = \infty$ noktasına f 'nin bir **ayrık tekil noktası** denir. Bu kavramı **bir sonraki bölümde**, integralleri tek bir rezidüyle hesaplamak için kullanacağız.

11.2 Rezidü

z_0 , f 'nin ayrıktır bir tekil noktası olsun; o zaman f 'nin bir $0 < |z - z_0| < R_2$ delinmiş diskinde analitik olduğu bir R_2 vardır ve **Laurent teoremi** uygulanır:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots \quad (1)$$

Katsayıların integral gösteriminde $n = 1$ alınırsa

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \quad (2)$$

elde edilir; burada C , delinmiş diskte kalan ve z_0 'ı çevreleyen pozitif yönlü herhangi bir basit kapalı çevredir.

Tanım 11.2 (Rezidü). (1) açılımında $\frac{1}{z - z_0}$ teriminin katsayısı olan b_1 sayısına, f 'nin z_0 ayrıktır tekil noktasındaki **rezidüsü** denir:

$$b_1 = \text{Rez}_{z=z_0} f(z)$$

(2) eşitliği tersine okunursa, integral hesabı için son derece güçlü bir araç doğar:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Rez}_{z=z_0} f(z) \quad (3)$$

💡 İntegral almak yerine katsayı okumak

(3) formülünün pratik anlamı şudur: bir çevre integralini hesaplamak yerine, integrandın Laurent açılımında **tek bir katsayıyı** bulmak yeterlidir. Açılımı bulmanın yolu ise **tekliğin** sağladığı serbestliktir — bilinen açılımlarda değişken değiştirmek çoğu zaman en kısa yoldur.

11.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 11.3 (Rezidüyle İntegral). C , pozitif yönlü birim çember $|z| = 1$ olmak üzere

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

İntegrand, $z = 0$ dışında sonlu düzlemin her yerinde analitiktir; $0 < |z| < \infty$ halkasında geçerli bir Laurent serisi vardır. **Sinüsün Maclaurin serisinde** z yerine $1/z$ yazıp z^2 ile çarpalım:

$$z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^5} - \dots \right) = z - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{z^3} - \dots$$

$1/z$ 'nin katsayısı aranan rezidüdür: $b_1 = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$. (3) formülüyle

$$\int_C z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{\pi i}{3}$$

■

Örnek 11.4 (Sıfır Rezidü, Sıfır İntegral). Aynı C çemberi için

$$\int_C \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Üstel fonksiyonun açılımında z yerine $1/z^2$ yazalım:

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z^6} + \dots \quad (0 < |z| < \infty)$$

Yalnızca **çift** negatif kuvvetler görünür; $1/z$ 'nin katsayısı sıfırdır, yani $z = 0$ 'daki rezidü $b_1 = 0$ 'dır. (3) formülü integralin sıfır olduğunu verir.

Bu örnek önemli bir ayrımı vurgular: bir fonksiyonun C 'nin içinde ve üzerinde analitik olması, integralin sıfır olması için **yeterlidir** ama **gerekli değildir**. Burada integrand $z = 0$ 'da analitik olmadığı hâlde integral sıfır çıkmıştır.

■

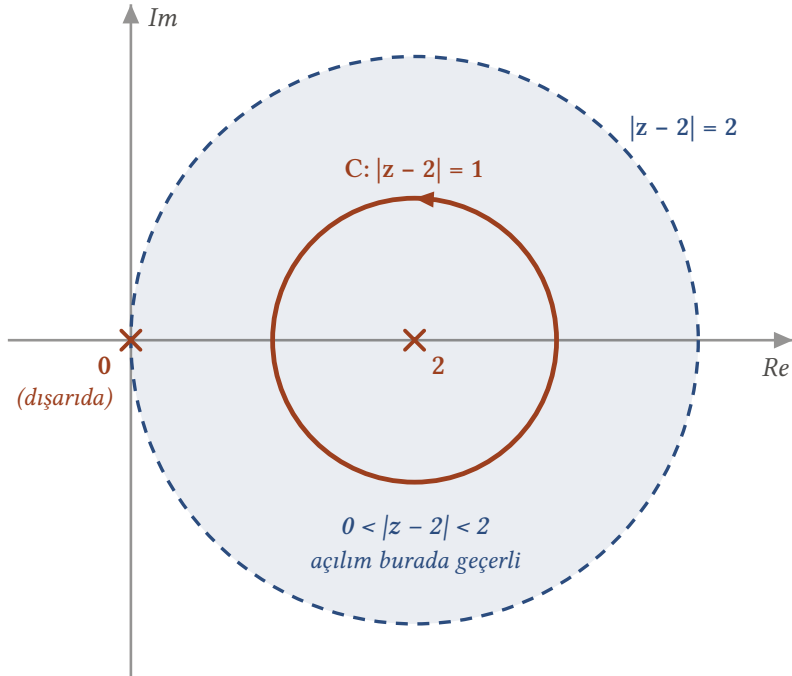
Örnek 11.5 (Kaydırılmış Merkez). C , pozitif yönlü $|z - 2| = 1$ çemberi olmak üzere

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

İntegrandın tekil noktaları $z = 0$ ve $z = 2$ 'dir; yalnızca $z = 2$ çemberin içindedir. O hâlde $z = 2$ merkezli, $0 < |z - 2| < 2$ delinmiş diskinde geçerli Laurent açılımı gerekir.



Şekil 11.3: Çevre C yalnız $z = 2$ tekil noktasını sarar; açılım bu yüzden 2 merkezlidir. Kesikli çember diğer tekil nokta 0 'dan geçer: $0 < |z - 2| < 2$ halkası, Laurent serisinin geçerli olduğu en büyük delinmiş disktr ve C onun içinde kalır.

Paydayı $z = (z - 2) + 2$ ile yeniden yazalım:

$$\frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{1}{(z-2)^4} \cdot \frac{1}{2 + (z-2)} = \frac{1}{2(z-2)^4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-2}{2}\right)}$$

Geometrik açılım $\left|\frac{z-2}{2}\right| < 1$, yani $0 < |z - 2| < 2$ koşuluyla uygulanır:

$$\frac{1}{z(z-2)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-4} \quad (0 < |z - 2| < 2)$$

$\frac{1}{z-2}$ terimi $n - 4 = -1$, yani $n = 3$ için doğar; katsayısı

$$\text{Rez}_{z=2} \frac{1}{z(z-2)^4} = \frac{(-1)^3}{2^4} = -\frac{1}{16}$$

Sonuç:

$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4} = 2\pi i \left(-\frac{1}{16}\right) = -\frac{\pi i}{8}$$

■

11.4 Alıştırma

Alıştırma 11.1 (Rezidü Alıştırmaları). C , pozitif yönlü $|z| = 3$ çemberi olmak üzere aşağıdaki integralleri rezidü yardımıyla hesaplayınız.

- a) $\int_C \frac{e^{-z}}{z^2} dz$
- b) $\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz$
- c) $\int_C z e^{1/z} dz$
- d) $\int_C \frac{z+1}{z^2-2z} dz$ (iki tekil nokta için ayrı ayrı rezidü bulunuz)

Çözüm.

Her şıkta yöntem aynıdır: integrandın çember içindeki tekil noktası etrafında Laurent açılımı yazılır, $1/(z - z_0)$ teriminin katsayısı okunur ve $2\pi i$ ile çarpılır.

a) Tek tekil nokta $z = 0$ 'dır ve içeridedir. e^{-z} açılımını z^2 'ye bölelim:

$$\frac{e^{-z}}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \dots \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \dots$$

Rezidü, $1/z$ 'nin katsayısıdır: $b_1 = -1$. Böylece

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z^2} dz = 2\pi i (-1) = -2\pi i$$

b) Tekil nokta $z = 1$ 'dir ($|1| < 3$). $w = z - 1$ yazalım; $e^{-z} = e^{-(w+1)} = e^{-1}e^{-w}$ olduğundan

$$\frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}}{w^2} \left(1 - w + \frac{w^2}{2!} - \dots \right) = e^{-1} \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w} + \frac{1}{2} - \dots \right)$$

Rezidü $b_1 = -e^{-1}$ 'dir:

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{e} \right) = -\frac{2\pi i}{e}$$

c) $z = 0$ esaslı bir tekil noktadır; açılımı doğrudan yazalım:

$$z e^{1/z} = z \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \right) = z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6z^2} + \dots$$

Rezidü $b_1 = \frac{1}{2}$ 'dir:

$$\int_C z e^{1/z} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i$$

d) Paydayı çarpanlarına ayıralım: $z^2 - 2z = z(z - 2)$. İki tekil nokta da ($z = 0$ ve $z = 2$) çemberin içindedir.

$z = 0$ civarında $\frac{z+1}{z-2}$ çarpanı analitiktir; basit kutupta rezidü, bu çarpanın noktadaki değeridir (bu kural **tekil nokta türleri** bölümünde gerekçelendirilecek; şimdilik aşağıdaki basit kesir ayrışımından da okunabilir):

$$\text{Rez}_{z=0} = \frac{0+1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

$z = 2$ civarında ise $\frac{z+1}{z}$ çarpanı analitiktir:

$$\text{Rez}_{z=2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

İntegrali hesaplamak için bulunan rezidüler basit kesir ayrışımının katsayılarıdır:

$$\frac{z+1}{z(z-2)} = \frac{-1/2}{z} + \frac{3/2}{z-2}$$

Her iki terimin integrali de deformasyon ilkesiyle $2\pi i$ verdiğiinden

$$\int_C \frac{z+1}{z^2-2z} dz = -\frac{1}{2} (2\pi i) + \frac{3}{2} (2\pi i) = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) = 2\pi i$$

Rezidülerin **toplanması** tesadüf değildir; bir sonraki bölümün teoremi bunu genel kural hâline getirecek.

■

Son alıştırma, bir sonraki adımı işaret ediyor: çevrenin içinde birden çok tekil nokta varsa ne olur? Yanıt sadedir ve bu kuramın taç teoremidir — [Cauchy rezidü teoremi](#).

12. Cauchy Rezidü Teoremi ve Sonsuzdaki Rezidü

Bir çevrenin içinde birden çok tekil nokta varsa, integral bunların katkılarının **toplamıdır**. Cauchy rezidü teoremi bu gözlemi kesinleştirir ve kompleks analizin hesap gücünü zirveye taşır: karmaşık integraller, birkaç seri katsayısının toplamına indirgenir.

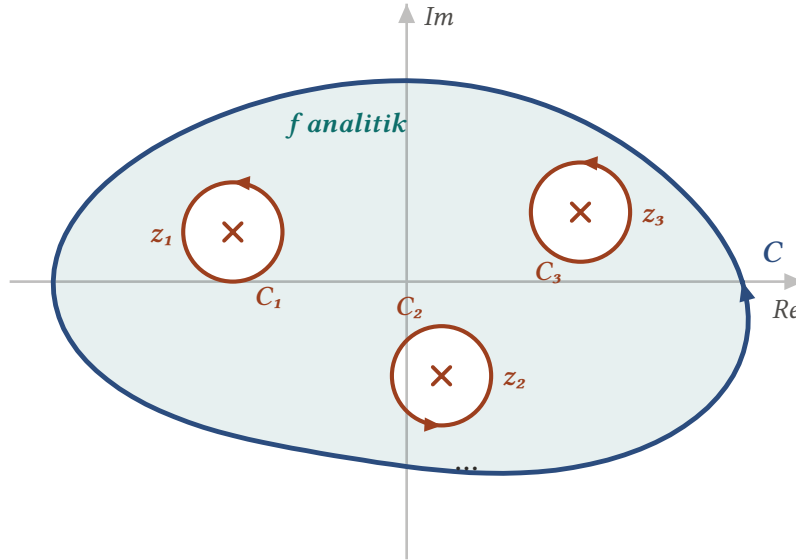
12.1 Cauchy Rezidü Teoremi

Teorem 12.1 (Cauchy Rezidü Teoremi). C , pozitif yönlü basit kapalı bir çevre olsun. Bir f fonksiyonu, C 'nin içindeki sonlu sayıda z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) tekil noktası hariç, C 'nin içinde ve üzerinde analitikse

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rez}_{z=z_k} f(z) \quad (1)$$

İspat.

Her z_k noktasını merkez alan, birbirlerini kesmeyecek ve tamamen C 'nin içinde kalacak kadar küçük, pozitif yönlü C_k çemberleri çizelim.



Şekil 12.1: İspatın resmi: her tekil noktayı saran küçük pozitif yönlü C_k çemberleri C ile birlikte çok bağlantılı bir bölgeyi sınırlar; gölgeli bölgede f analitiktir. Cauchy-Goursat teoremi $\int_C - \sum \int_{C_k} = 0$ verir, her küçük çember de $2\pi i \cdot \text{Rez}$ katkısı yapar.

Bu çemberler, C ile birlikte çok bağlantılı bir kapalı bölgenin sınırını oluşturur: C 'nin içinde ve her C_k 'nin dışında kalan bölge. f , bu bölgenin tamamında analitiktir. Çok bağlantılı domenler için Cauchy-Goursat teoremi uygulanır:

$$\int_C f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z) dz = 0$$

Her C_k tek bir tekil nokta çevrelediğinden *rezidü tanımı* geçerlidir:

$$\int_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Rez}_{z=z_k} f(z) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

İki ifade birleştirildiğinde (1) elde edilir.

■

Örnek 12.1 (İki Tekil Noktalı İntegral). C , pozitif yönlü $|z| = 2$ çemberi olmak üzere

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

İntegrandın iki ayrık tekil noktası $z = 0$ ve $z = 1$ 'dir; ikisi de C 'nin içindedir. İki rezidüyü Laurent açılımlarından okuyalım.

$z = 0$ 'daki **rezidü**. $0 < |z| < 1$ delinmiş diskinde, $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$ açılımıyla

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{5z-2}{z} \cdot \frac{-1}{1-z} = \left(5 - \frac{2}{z}\right) (-1 - z - z^2 - \dots)$$

Sağ taraftaki çarpımda $1/z$ 'nin katsayısı, $-\frac{2}{z}$ ile -1 'in çarpımından gelir: $B_1 = 2$.

$z = 1$ 'deki **rezidü**. $0 < |z-1| < 1$ delinmiş diskinde, pay ve payda $z-1$ cinsinden yazılır:

$$\begin{aligned} \frac{5z-2}{z(z-1)} &= \frac{5(z-1)+3}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} \\ &= \left(5 + \frac{3}{z-1}\right) [1 - (z-1) + (z-1)^2 - \dots] \end{aligned}$$

$\frac{1}{z-1}$ 'in katsayısı $B_2 = 3$ 'tür. Teorem gereği

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i (B_1 + B_2) = 2\pi i (2 + 3) = 10\pi i$$

Kısa yol. İntegrand basit kesirlere ayrılırsa hesap tek satıra iner:

$$\frac{5z-2}{z(z-1)} = \frac{2}{z} + \frac{3}{z-1}$$

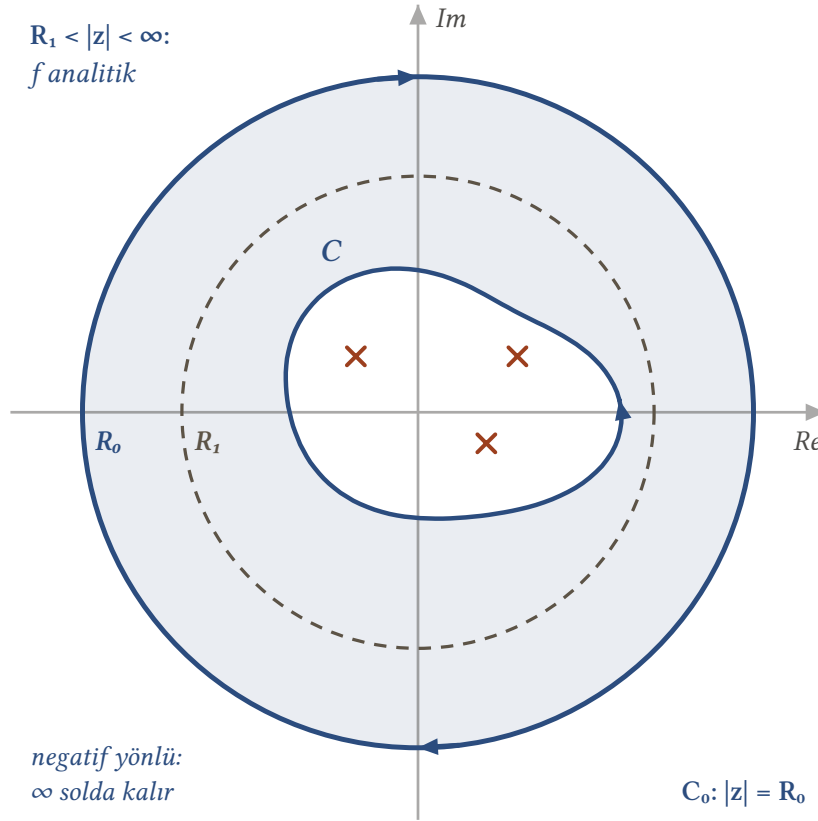
$\frac{2}{z}$ ifadesi $0 < |z| < 1$ için zaten bir Laurent serisidir ve rezidüsü 2'dir; $\frac{3}{z-1}$ ifadesi de $z = 1$ civarında rezidüsü 3 olan bir Laurent serisidir. Sonuç aynıdır.

■

12.2 Sonsuzdaki Rezidü

Tekil nokta sayısı arttıkça teorem hantallaşır. Bazen tek bir rezidü hesabıyla kurtulmak mümkündür — yeter ki “sonsuzdaki” davranışa bakmayı bilelim.

f , pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin içindeki sonlu sayıda tekil nokta hariç sonlu düzlemde analitik olsun. R_1 , C çevresi $|z| = R_1$ çemberinin içinde kalacak kadar büyük bir pozitif sayı olsun; o zaman f , $R_1 < |z| < \infty$ domeninde analitiktir ve $z_0 = \infty$, f 'nin ayrık bir tekil noktasıdır.



Şekil 12.2: C çevresi $|z| = R_1$ çemberinin içinde kalır; $|z| > R_1$ bölgesinde f analitiktir ve ∞ ayrık bir tekil noktadır. C_0 saat yönünde dolaşılır ki sonsuzdaki nokta solda kalsın; gölgeli bölgede (C ile C_0 arasında) f analitik olduğundan $\int_C = -\int_{C_0}$.

Tanım 12.1 (Sonsuzdaki Rezidü). $C_0, R_0 > R_1$ olmak üzere **negatif yönlü** $|z| = R_0$ çemberi olsun. f 'nin sonsuzdaki rezidüsü

$$\int_{C_0} f(z) dz = 2\pi i \text{Rez}_{z=\infty} f(z) \quad (2)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Yönün negatif seçilmesi, tıpkı sonlu düzlemdeki tanımda olduğu gibi, dolaşılırken tekil noktanın – burada sonsuzdaki noktanın – **solda** kalmasını sağlar.

f, C ile C_0 arasındaki kapalı bölgede analitik olduğundan **yolun deformasyonu ilkesi** şunu verir:

$$\int_C f(z) dz = \int_{-C_0} f(z) dz = - \int_{C_0} f(z) dz$$

Yani (2) tanımıyla

$$\int_C f(z) dz = -2\pi i \text{Rez}_{z=\infty} f(z) \quad (3)$$

Bu rezidüyü hesaplamak için f 'nin $R_1 < |z| < \infty$ halkasındaki Laurent serisini yazalım:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_0} \frac{f(z) dz}{z^{n+1}} \quad (4)$$

(4) açılımında z yerine $1/z$ yazılıp sonuç $1/z^2$ ile çarpılırsa

$$\frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{n-2}}{z^n} \quad \left(0 < |z| < \frac{1}{R_1} \right)$$

elde edilir. Bu son serideki $1/z$ katsayısı c_{-1} 'dir; yani

$$c_{-1} = \text{Rez}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) \right]$$

Öte yandan (4)'te $n = -1$ konursa $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_0} f(z) dz$, yani (2) tanımıyla karşılaştırıldığında

$$\text{Rez}_{z=\infty} f(z) = -\text{Rez}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) \right] \quad (5)$$

Teorem 12.2 (Tek Rezidüyle İntegral). Bir f fonksiyonu, pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin içindeki sonlu sayıda tekil nokta hariç sonlu düzlemde her yerde analitikse

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Rez}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) \right] \quad (6)$$

İspat.

(3) ve (5) eşitlikleri yan yana konur; iki eksi işareti birbirini götürür.

■

💡 Ne zaman tercih edilir?

Teorem, integrandın çevre içinde **çok sayıda** tekil noktası olduğunda büyük kolaylık sağlar: hepsini tek tek bulmak yerine tek bir rezidü hesaplanır. Bu, aslında bir muhasebe eşitliğidir — sonlu düzlemdeki tüm rezidülerin toplamı ile sonsuzdaki rezidünün toplamı sıfırdır.

Örnek 12.2 (Aynı İntegral, Tek Rezidü). Örnek 12.1 integralini sonsuzdaki rezidüyle yeniden hesaplayınız.

Çözüm.

$f(z) = \frac{5z-2}{z(z-1)}$ için

$$\frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\frac{5}{z} - 2}{\frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - 1 \right)} = \frac{5-2z}{z(1-z)}$$

$0 < |z| < 1$ için geometrik açılımla

$$\frac{5-2z}{z(1-z)} = \left(\frac{5}{z} - 2 \right) (1 + z + z^2 + \dots) = \frac{5}{z} + 3 + 3z + \dots$$

$1/z$ 'nin katsayısı 5'tir. (6) formülüyle

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i (5) = 10\pi i$$

İki rezidü yerine bir tanesi hesaplandı ve sonuç Örnek 12.1 ile aynı çıktı.

■

Örnek 12.3 (Çok Tekil Noktalı İntegral). C , pozitif yönlü $|z| = 2$ çemberi olmak üzere

$$\int_C \frac{4z-5}{z(z-1)} dz$$

integralini iki yöntemle de hesaplayınız.

Çözüm.

Rezidü teoremiyle. Basit kesirlere ayırılım:

$$\frac{4z-5}{z(z-1)} = \frac{5}{z} - \frac{1}{z-1}$$

Rezidüler 5 ve -1 ; toplam 4 ve integral $8\pi i$ 'dir.

Sonsuzdaki rezidüyle.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^2} \left(\frac{f}{z} \right) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\frac{4}{z} - 5}{\frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} - 1 \right)} = \frac{4-5z}{z(1-z)} \\ &= \left(\frac{4}{z} - 5 \right) (1 + z + \dots) = \frac{4}{z} - 1 + \dots \end{aligned}$$

$1/z$ 'nin katsayısı 4'tür ve (6) formülü yine $8\pi i$ verir.

■

12.3 Alıştırma

Alıştırma 12.1 (Rezidü Teoremi Alıştırmaları). C , pozitif yönlü $|z| = 3$ çemberi olmak üzere aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

- a) $\int_C \frac{3z+2}{z(z-2)} dz$
- b) $\int_C \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z^3} dz$ (sonsuzdaki rezidüyü kullanınız)
- c) $\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}$

Çözüm.

a) İntegrandın tekil noktaları $z = 0$ ve $z = 2$ 'dir; ikisi de $|z| = 3$ çemberinin içindedir. Her ikisi de basit kutup olduğundan rezidüler, kalan çarpanın o noktadaki değeridir:

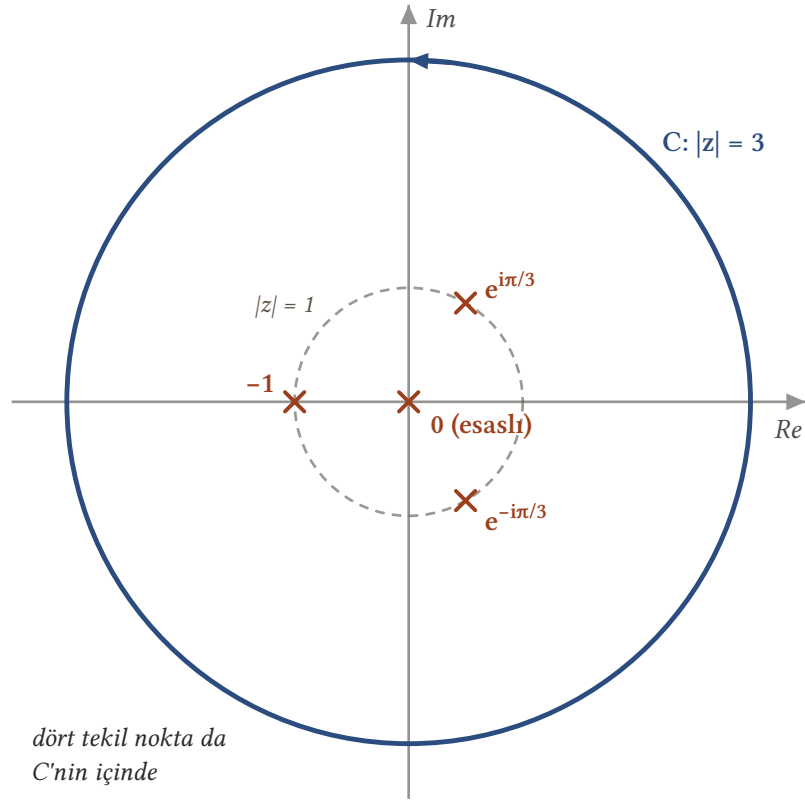
$$\text{Rez}_{z=0} \frac{3z+2}{z(z-2)} = \frac{3 \cdot 0 + 2}{0 - 2} = -1$$

$$\text{Rez}_{z=2} \frac{3z+2}{z(z-2)} = \frac{3 \cdot 2 + 2}{2} = 4$$

Rezidü teoremi rezidülerin toplamını ister:

$$\int_C \frac{3z+2}{z(z-2)} dz = 2\pi i (-1 + 4) = 6\pi i$$

b) İntegrandın tekil noktaları $z = 0$ (esası, $e^{1/z}$ yüzünden) ve $1 + z^3 = 0$ denkleminin kökleridir; bu köklerin modülü 1 olduğundan hepsi çemberin içindedir.



Şekil 12.3: $z^3 e^{1/z} / (1 + z^3)$ integrandının dört tekil noktası: $1 + z^3 = 0$ denkleminin birim çember üzerindeki üç kökü ve orijindeki esaslı tekillik. Hepsı $|z| = 3$ çemberinin içinde olduğundan dört rezidü yerine tek bir rezidü — sonsuzdaki rezidü — yeter.

Dört noktada da rezidü hesaplamak yerine **sonsuzdaki rezidü** formülünü kullanalım: $f, |z| \geq 3$ bölgesinde analitik olduğundan

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \text{Rez}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{f} \right) \right]$$

Önce $f(1/z)$ ifadesini sadeleştirelim:

$$\left(\frac{1}{f} \right) = \frac{\frac{1}{z^3} e^z}{1 + \frac{1}{z^3}} = \frac{e^z}{z^3 + 1}$$

Buna $1/z^2$ çarpanını ekleyelim:

$$\frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{f} \right) = \frac{e^z}{z^2 (1 + z^3)}$$

Başlangıç civarındaki açılımı yazalım; $\frac{1}{1+z^3} = 1 - z^3 + \dots$ olduğundan

$$\frac{e^z}{1 + z^3} = \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots \right) (1 - z^3 + \dots) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots$$

z^2 'ye bölersek

$$\frac{e^z}{z^2 (1 + z^3)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \dots$$

Rezidü 1'dir. Sonuç:

$$\int_C \frac{z^3 e^{1/z}}{1+z^3} dz = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$$

c) Tekil noktalar $z = 0$ (üçüncü mertebeden kutup) ve $z = -4$ 'tür; ikincisi çemberin dışındadır, dolayısıyla yalnızca başlangıç katkı yapar. $\frac{1}{z+4}$ çarpanını başlangıç civarında açalım:

$$\frac{1}{z+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{4}} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{16} - \dots \right)$$

z^3 'e bölelim:

$$\frac{1}{z^3(z+4)} = \frac{1}{4z^3} - \frac{1}{16z^2} + \frac{1}{64z} - \dots$$

Rezidü, $1/z$ 'nin katsayısı olan $\frac{1}{64}$ 'tür:

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)} = 2\pi i \cdot \frac{1}{64} = \frac{\pi i}{32}$$

■

Rezidüyü bulmak için her seferinde Laurent açılımı yazmak zahmetlidir. Tekil noktaları **sınıflandırarak** çok daha hızlı formüller elde edebiliriz: [tekil nokta türleri](#).

13. Ayırık Tekil Noktaların Üç Tipi

Bir ayırık tekil noktanın karakterini, Laurent açılımının **negatif kuvvetli kısmı** belirler ve sınıflandırmanın tamamı tek bir soruya dayanır: *bu kısımda sıfırdan farklı kaç terim var?* Yalnızca üç olasılık vardır – hiç, sonlu sayıda (en az bir), sonsuz sayıda – ve her biri bir tekillik tipini tanımlar. Sınıflandırma yalnızca bir isimlendirme değildir: kutuplar için rezidüyü seri yazmadan veren pratik formüller elde edeceğiz.

13.1 Esas Kısım

z_0 , f 'nin ayırık bir tekil noktası olsun; $0 < |z - z_0| < R_2$ delinmiş diskinde

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (1)$$

Tanım 13.1 (Esas Kısım). (1) açılımının negatif kuvvetleri içeren

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} = \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \dots \quad (2)$$

kısmına, f 'nin z_0 'daki **esas kısım**ı denir.

13.2 Sınıflandırma

13.2.1 Esas Kısım Boşsa: Kaldırılabilir Tekil Nokta

Tanım 13.2 (Kaldırılabilir Tekil Nokta). Esas kısımda hiç terim yoksa – yani **her** b_n katsayısı sıfırsa – z_0 'a **kaldırılabilir tekil nokta** denir. Bu durumda delinmiş diskteki açılım bir kuvvet serisinden ibarettir:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (3)$$
$$(0 < |z - z_0| < R_2)$$

Adım gerekçesi: f 'ye z_0 'da $f(z_0) = a_0$ değeri atanırsa (3) açılımı $|z - z_0| < R_2$ diskinin **tamamında** geçerli olur; kuvvet serisinin toplamı yakınsaklık çemberi içinde **analitik olduğundan** f , z_0 'da analitik hâle gelir. Tekillik böylece “kaldırılmış” olur. Esas kısımda b_1 terimi de bulunmadığından, kaldırılabilir bir noktadaki rezidü daima sıfırdır.

Örnek 13.1 (Kaldırılabilir Tekillik). $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$ için orijin kaldırılabilir bir tekil noktadır:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right] = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots$$
$$(0 < |z| < \infty)$$

Negatif kuvvetli hiçbir terim yoktur. $f(0) = \frac{1}{2}$ değeri atandığında f tam olur.

13.2.2 Esas Kısım Sonluysa: Kutup

Tanım 13.3 (Kutup). Esas kısım boş değil ama **sonluysa** – yani

$$b_m \neq 0 \quad \text{ve} \quad b_{m+1} = b_{m+2} = \dots = 0$$

olacak biçimde bir $m \geq 1$ tam sayısı varsa $-z_0$ 'a **m -inci mertebeden kutup** denir. Açılım bu durumda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \dots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad (4)$$

$$(0 < |z - z_0| < R_2)$$

biçimindedir. $m = 1$ durumunda **basit kutup** adı kullanılır.

Örnek 13.2 (Basit Kutup).

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = z + \frac{3}{z - 2} = 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2}$$

$$(0 < |z - 2| < \infty)$$

Esas kısım tek terimlidir: $z_0 = 2$ bir basit kutuptur ve rezidü $b_1 = 3$ 'tür.

Örnek 13.3 (İkinci Mertebeden Kutup).

$$\frac{1}{z^2(1+z)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1-(-z)} = \frac{1}{z^2} (1 - z + z^2 - z^3 + \dots) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - z + \dots$$

$(0 < |z| < 1)$ açılımında esas kısım iki terimlidir: orijin ikinci mertebeden bir kutuptur ve

$$\text{Rez}_{z=0} \frac{1}{z^2(1+z)} = -1$$

Örnek 13.4 (Üçüncü Mertebeden Kutup).

$$\frac{\sinh z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} + \dots$$

$(0 < |z| < \infty)$ açılımında en yüksek negatif kuvvet 3'tür: orijin üçüncü mertebeden kutuptur ve rezidü $B = \frac{1}{6}$ 'dır.

13.2.3 Esas Kısım Sonsuzsa: Esaslı Tekil Nokta

Tanım 13.4 (Esaslı Tekil Nokta). Esas kısımda **sonsuz sayıda** sıfırdan farklı katsayı varsa, z_0 'a **esaslı tekil nokta** denir.

Örnek 13.5 (Esaslı Tekillik).

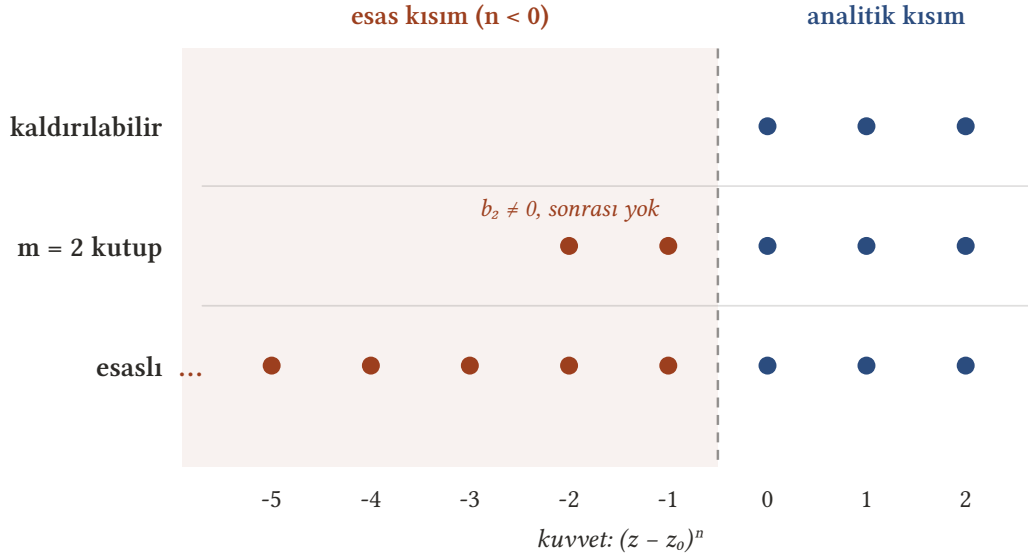
$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots \quad (0 < |z| < \infty)$$

Esas kısımda sonsuz terim vardır: orijin esaslı bir tekil noktadır ve rezidü $b_1 = 1$ 'dir.

İ Picard teoremi

Esaslı tekil noktalar, fonksiyonun davranışının en vahşi hâle geldiği yerlerdir. Picard teoremi bunu çarpıcı biçimde ifade eder: bir fonksiyon, esaslı tekil noktasının **her** komşuluğunda, olası bir istisna dışında **her sonlu değeri sonsuz kez** alır. **Bir sonraki bölümde** bu üç tipin limit davranışlarını karşılaştıracamız.

13.2.4 Bir Bakışta



Şekil 13.1: Üç tekillik tipi, tek bakışta: her satır bir Laurent açılımıdır, dolu noktalar sıfırdan farklı katsayıları gösterir. Fark yalnızca **esas kısımdaki** (negatif kuvvetli) terim sayınsındadır: hiç yoksa kaldırılabilir, sonluysa kutup, sonsuzsa esaslı tekil nokta.

Esas kısımdaki terim sayısı	Tekilliğin tipi	Ayırt edici özellik
hiç	kaldırılabilir	$f(z_0) = a_0$ atanınca f analitik olur; rezidü 0
sonlu — sonuncusu $b_m \neq 0$	m -inci mertebeden kutup	$z \rightarrow z_0$ iken $ f(z) \rightarrow \infty$
sonsuz	esaslı	limit yoktur; davranış vahşidir (Picard)

Üçüncü sütundaki davranışlardan kutuptaki $|f(z)| \rightarrow \infty$ ile esaslı tekillikteki Casorati-Weierstrass teoremi [bir sonraki bölümde](#) kanıtlanacak, Picard teoremi ise kanıtsız aktarılacaktır. Sınıflandırmanın kendisi yalnızca katsayı saymaya dayanır.

13.3 Kutuplarda Rezidü

Kutup mertebesini ve rezidüyü bulmanın temel yolu uygun Laurent serisini yazmaktır; ama çoğu zaman şu teorem çok daha hızlıdır.

Teorem 13.1 (Kutup Karakterizasyonu ve Rezidü Formülü). Bir f fonksiyonunun ayrık tekil noktası z_0 , m -inci mertebeden bir kutuptur ancak ve ancak $f(z)$

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} \quad (5)$$

biçiminde yazılabiliyorsa; burada φ, z_0 'da analitik ve $\varphi(z_0) \neq 0$ 'dır. Ayrıca

$$m = 1 \implies \text{Rez}_{z=z_0} f(z) = \varphi(z_0) \quad (6)$$

$$m \geq 2 \implies \text{Rez}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \quad (7)$$

İspat.

($\Leftarrow$) f , (5) biçiminde olsun. φ, z_0 'da analitik olduğundan bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda Taylor serisine sahiptir:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \varphi(z_0) + \frac{\varphi'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \cdots + \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}(z - z_0)^{m-1} \\ &+ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n\end{aligned}$$

(5)'te yerine konursa, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ için

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{\varphi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\varphi'(z_0)/1!}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)/(m-1)!}{z - z_0} \\ &+ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m}\end{aligned}$$

Bu bir Laurent serisidir; $\varphi(z_0) \neq 0$ olduğundan esas kısım tam olarak m terimlidir, yani z_0 gerçekten m -inci mertebeden bir kutuptur. $1/(z - z_0)$ teriminin katsayısı da rezidüyü verir ve (6)–(7) formülleri okunur.

($\Rightarrow$) z_0 , m -inci mertebeden bir kutup olsun; (4) açılımı geçerlidir ($b_m \neq 0$).

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z - z_0)^m f(z), & z \neq z_0 \\ b_m, & z = z_0 \end{cases}$$

tanımlayalım. (4) ile çarpım açıldığında

$$\varphi(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_0) + \cdots + b_1(z - z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{m+n}$$

elde edilir; sağ taraf $|z - z_0| < R_2$ diskinde yakınsayan bir kuvvet serisidir, dolayısıyla φ orada – özellikle z_0 'da – analitiktir ve $\varphi(z_0) = b_m \neq 0$ 'dır. Bu da (5) gösterimidir.

■

13.4 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 13.6 (Basit Kutupta Rezidü). $f(z) = \frac{z+1}{z^2+9}$ fonksiyonunun tekil noktalarını ve rezidülerini bulunuz.

Çözüm.

$z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$ olduğundan tekil noktalar $z = \pm 3i$ 'dir. $z = 3i$ için

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - 3i}, \quad \varphi(z) = \frac{z+1}{z+3i}$$

$\varphi, z = 3i$ 'de analitik ve $\varphi(3i) \neq 0$ olduğundan bu bir basit kutuptur; (6) ile

$$B_1 = \varphi(3i) = \frac{3i+1}{6i} = \frac{3i+1}{6i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{3-i}{6}$$

Benzer hesapla $z = -3i$ noktası da basit kutuptur ve rezidüsü $B_2 = \frac{3+i}{6}$ 'dır.

■

Örnek 13.7 (Üçüncü Mertebeden Kutupta Rezidü). $f(z) = \frac{z^3+2z}{(z-i)^3}$ fonksiyonunun $z = i$ 'deki kutup mertebesini ve rezidüsünü bulunuz.

Çözüm.

$\varphi(z) = z^3 + 2z$ tamdır ve $\varphi(i) = i^3 + 2i = -i + 2i = i \neq 0$ 'dır; demek ki $z = i$, üçüncü mertebeden bir kutuptur. (7) formülüyle ($m = 3$):

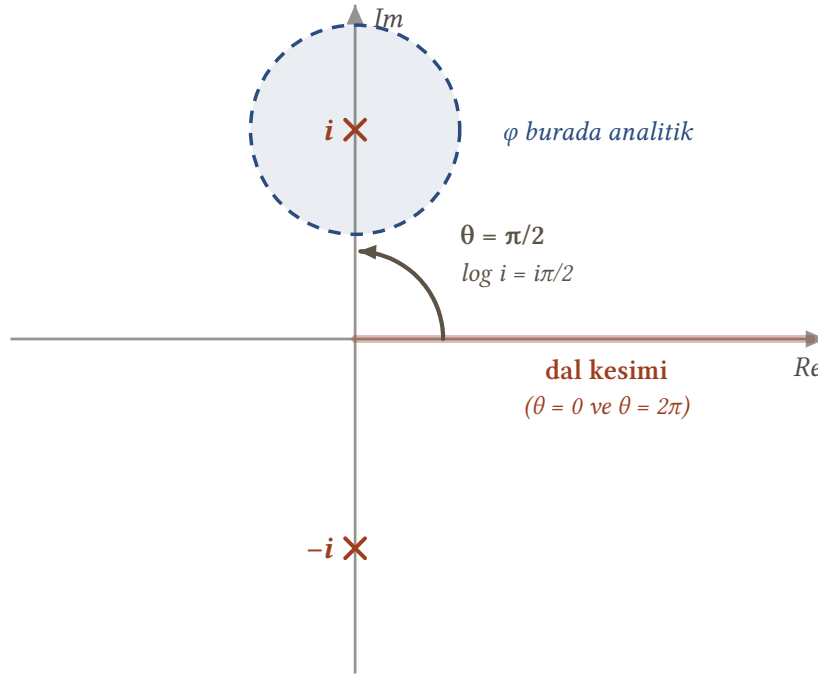
$$\varphi''(z) = 6z \Rightarrow B = \frac{\varphi''(i)}{2!} = \frac{6i}{2} = 3i$$

■

Örnek 13.8 (Çok Değerli Fonksiyonun Dalıyla).

$$f(z) = \frac{(\log z)^3}{z^2 + 1}, \quad \log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$$

dalı için $z = i$ tekilliğindeki rezidüyü bulunuz.



Şekil 13.2: Seçilen dalın kesimi pozitif reel eksendedir; $z = i$ ondan uzak olduğu için $\varphi(z) = (\log z)^3 / (z + i)$ orada analiktir ve kutup basittir. Bu dalda i 'nin açısı kesimden saat yönünün tersine ölçülen $\pi/2$ 'dir, yani $\log i = i\pi/2$.

Çözüm.

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z - i}, \quad \varphi(z) = \frac{(\log z)^3}{z + i}$$

φ , seçilen dalın tanımlı olduğu bölgede $z = i$ 'de analiktir ve

$$\varphi(i) = \frac{(\log i)^3}{2i} = \frac{(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})^3}{2i} = \frac{(i\frac{\pi}{2})^3}{2i} = \frac{-i\frac{\pi^3}{8}}{2i} = -\frac{\pi^3}{16} \neq 0$$

Basit kuttur; rezidü $B = -\frac{\pi^3}{16}$ 'dir.

■

⚠ Formülü yanlış yerde kullanmayın

$f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$ için “ $\varphi(z) = \sinh z$, $m = 4$ ” yazıp (7) formülünü uygulamak **yanlıştır**: formülün geçerliliği $\varphi(z_0) \neq 0$ koşuluna bağlıdır, oysa $\sinh 0 = 0$ 'dır. Doğru yol, **Örnek 13.4** hesabındaki gibi birkaç Laurent terimi yazmaktır; orada kutbun aslında **üçüncü** mertebeden olduğu ve rezidünün $1/6$ çıktığı görülmüştü.

Örnek 13.9 (Seriyle Teoremin Birleştirilmesi). $f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}$ fonksiyonunun $z = 0$ 'daki kutup mertebesini ve rezidüsünü bulunuz.

Çözüm.

$z(e^z - 1)$ tamdır ve sıfırları $z = 2n\pi i$ noktalarıdır; orijin f 'nin ayrık tekil noktasıdır. Maclaurin serisiyle

$$z(e^z - 1) = z \left(\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = z^2 \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right)$$

Böylece

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z^2}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots}$$

φ , orijinin bir komşuluğunda analitiktir (payda orada sıfırlanmaz) ve $\varphi(0) = 1 \neq 0$ 'dır: $z = 0$ **ikinci mertebeden** bir kutuptur. (7) formülüyle $B = \varphi'(0)$:

$$\varphi'(z) = \frac{-\left(\frac{1}{2!} + \frac{2z}{3!} + \dots\right)}{\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots\right)^2} \Rightarrow \varphi'(0) = -\frac{1}{2}$$

Yani $\text{Rez}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}$.

■

13.5 Alıştırma

Alıştırma 13.1 (Sınıflandırma Alıştırmaları). Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen noktalardaki tekil-lik tipini belirleyiniz ve rezidüyü hesaplayınız.

- $\frac{z^2}{1+z}, z = -1$
- $\frac{1 - \cosh z}{z^3}, z = 0$
- $\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}, z = 1$
- $z \exp\left(\frac{1}{z}\right), z = 0$

Çözüm.

a) Fonksiyonu $\frac{\varphi(z)}{z-z_0}$ biçiminde yazalım:

$$\frac{z^2}{1+z} = \frac{z^2}{z - (-1)}, \quad \varphi(z) = z^2$$

$\varphi, z = -1$ 'de analitik ve $\varphi(-1) = 1 \neq 0$ olduğundan tekil nokta **basit kutuptur** (birinci mertebeden). Basit kutupta rezidü $\varphi(z_0)$ 'dır:

$$\text{Rez}_{z=-1} \frac{z^2}{1+z} = \varphi(-1) = 1$$

b) Payın Maclaurin açılımıyla başlayalım:

$$1 - \cosh z = 1 - \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right) = -\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} - \dots$$

z^3 'e bölelim:

$$\frac{1 - \cosh z}{z^3} = -\frac{1}{2z} - \frac{z}{24} - \dots$$

Negatif kuvvetli kısımda yalnızca $1/z$ terimi vardır; payda z^3 olmasına rağmen teklik **birinci mertebeden kutuptur** (payın çift katlı sıfırı payda mertebesini iki düşürür). Rezidü:

$$\text{Rez}_{z=0} \frac{1 - \cosh z}{z^3} = -\frac{1}{2}$$

c) Fonksiyon $\frac{\varphi(z)}{(z-1)^2}$ biçimindedir; $\varphi(z) = e^{2z}$ analitik ve $\varphi(1) = e^2 \neq 0$ olduğundan $z = 1$ **ikinci mertebeden kutuptur**. $m = 2$ için rezidü formülü $\varphi'(z_0)$ 'dır:

$$\varphi'(z) = 2e^{2z} \implies \text{Rez}_{z=1} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2} = \varphi'(1) = 2e^2$$

d) Açılımı yazalım:

$$z \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots \right) = z + 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{6z^2} + \dots$$

Negatif kuvvetli kısım **sonsuz çok** terim içerdiğinden $z = 0$ bir **esashı tekil noktadır**. Rezidü yine $1/z$ 'nin katsayısıdır:

$$\text{Rez}_{z=0} z e^{1/z} = \frac{1}{2}$$

■

Kutupları saptamanın bir yolu daha vardır ve genellikle en kullanışlısıdır: paydanın **sıfırlarına** bakmak. Sıfırlarla kutuplar arasındaki bu kesin ilişki **sıfırlar ve kutuplar** bölümünün konusudur.

14. Sıfırlar ve Kutuplar

Bir bölümün kutupları, paydanın sıfırlarından doğar. Bu bölümde önce sıfırların yapısını inceleyecek, sonra “ m -inci mertebeden sıfır $\Rightarrow m$ -inci mertebeden kutup” köprüsünü kuracağız. Sonunda basit kutuplar için, hesabı tek bir türev almaya indiren zarif bir formül elde edeceğiz.

14.1 Analitik Fonksiyonların Sıfırları

Tanım 14.1 (m -inci Mertebeden Sıfır). f, z_0 ’da analitik olsun. Bir m doğal sayısı için $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ ve $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ ise, f ’nin z_0 ’da **m -inci mertebeden bir sıfırı** vardır denir.

Teorem 14.1 (Sıfırların Karakterizasyonu). f, z_0 ’da analitik olsun. f ’nin z_0 ’da m -inci mertebeden bir sıfırı vardır **ancak ve ancak** z_0 ’da analitik ve sıfırdan farklı bir g fonksiyonu için

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \quad (1)$$

yazılabiliyorsa.

İspat.

($\Leftarrow$) (1) sağlansın. g, z_0 ’da analitik olduğundan bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda Taylor serisine sahiptir; (1)’de yerine konursa

$$f(z) = g(z_0)(z - z_0)^m + \frac{g'(z_0)}{1!}(z - z_0)^{m+1} + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^{m+2} + \dots$$

Bu, f için bir Taylor açılımıdır; **tekliğinden** katsayılar okunur:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) = m! g(z_0) \neq 0$$

($\Rightarrow$) f ’nin z_0 ’da m -inci mertebeden sıfırı olsun. Taylor açılımının ilk m katsayısı sıfırdır:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^m \left[\frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0) + \dots \right]$$

Köşeli parantez içindeki kuvvet serisi $|z - z_0| < \varepsilon$ ’da yakınsadığından toplamı orada analiktir; bu toplamı $g(z)$ olarak adlandıırırsak (1) elde edilir ve

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

■

Örnek 14.1 (Polinomun Sıfırı). $f(z) = z^3 - 8 = (z - 2)(z^2 + 2z + 4)$ polinomunun $z_0 = 2$ ’de birinci mertebeden bir sıfırı vardır: (1) gösteriminde $g(z) = z^2 + 2z + 4$ tamdır ve $g(2) = 12 \neq 0$ ’dır. Aynı sonuç türevlerden de okunur: $f(2) = 0$ ve $f'(2) = 12 \neq 0$.

Örnek 14.2 (İkinci Mertebeden Sıfır). $f(z) = z(e^z - 1)$ tam fonksiyonunun $z_0 = 0$ ’da ikinci mertebeden bir sıfırı vardır:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2 \neq 0$$

(1) gösteriminde $f(z) = (z - 0)^2 g(z)$ olur; burada

$$g(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

tam fonksiyonudur ([kuvvet serileriyle işlemler](#) bölümünde tamlığı gösterilmişti).

14.2 Sıfırlar Ayrıktır

Teorem 14.2 (Sıfırların Ayrıklığı). f, z_0 'da analitik ve $f(z_0) = 0$ olsun. f, z_0 'ın hiçbir komşuluğunda özdeş olarak sıfır değilse, z_0 'ın delinmiş bir $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda $f(z) \neq 0$ 'dır.

İspat.

f 'nin z_0 'daki türevlerinin tümü sıfır olsaydı, Taylor katsayılarının tümü sıfır olurdu ve f, z_0 'ın bir komşuluğunda özdeş sıfır olurdu — hipoteze aykırı. Demek ki sonlu bir m mertebesi vardır ve [Teorem 14.1](#) gereği

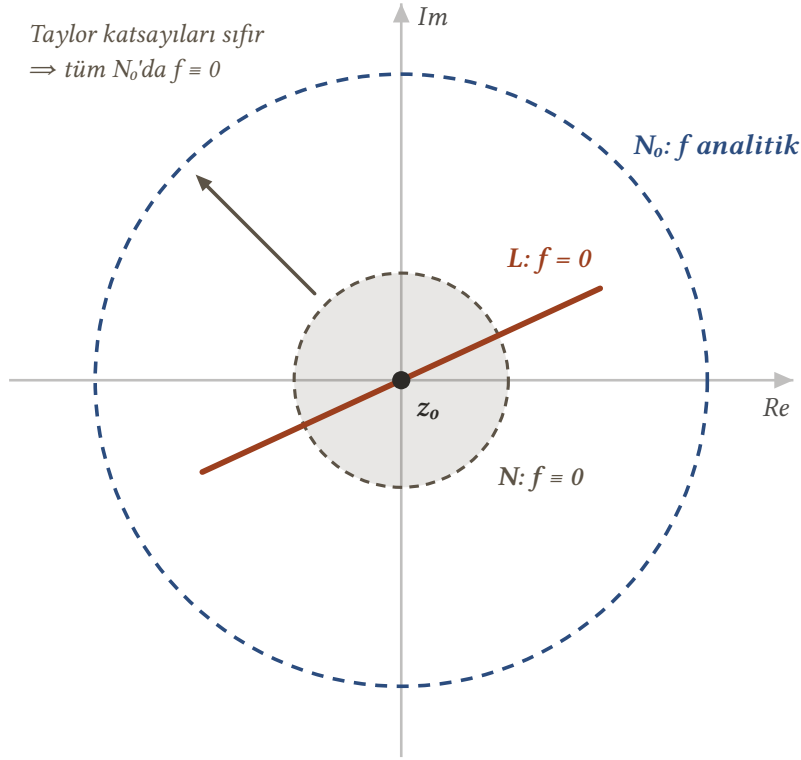
$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0$$

g, z_0 'da analitik olduğundan süreklidir; [sıfırdan uzak kalma özelliğiyle](#) $g(z) \neq 0$ olan bir $|z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğu vardır. Bu komşulukta $(z - z_0)^m$ çarpanı da yalnız z_0 'da sıfırlanır; sonuç olarak delinmiş komşulukta $f(z) \neq 0$ 'dır.

■

Bu teorem, [tek türlü belirlenme](#) bölümünde ödünç aldığımız “yerel gerçeği” gerekçelendirir ve şu güçlü sonucu verir:

Teorem 14.3 (Bir Doğru Parçasında Sıfırlanmak). f, z_0 'ın bir N_0 komşuluğunda analitik olsun. z_0 'ı içeren bir D domeninin ya da bir L doğru parçasının her noktasında $f(z) = 0$ ise, f tüm N_0 boyunca özdeş olarak sıfırdır.



Şekil 14.1: İki adımlı yayılma: f, z_0 'dan geçen L parçasında sıfırsa sıfırların ayrıklığı gereği küçük N diskinin tamamında sıfırdır; o zaman z_0 'daki bütün türevler, dolayısıyla tüm Taylor katsayıları sıfırdır ve seri f 'yi büyük N_0 diskinin tamamında temsil ettiğinden orada da $f \equiv 0$ olur.

İspat.

Aksi hâlde Teorem 14.2 gereği z_0 'ın, her yerinde $f(z) \neq 0$ olan delinmiş bir komşuluğu bulunurdu; bu ise D (ya da L) üzerinde f 'nin sıfırlanmasıyla çelişir. Demek ki f, z_0 'ın bir N komşuluğunda özdeş sıfırdır. O zaman Taylor katsayılarının tümü

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$$

olur ve seri N_0 'ın tamamında f 'yi temsil ettiğinden $f \equiv 0$ 'dır.

■

14.3 Sıfırlardan Kutuplara

Teorem 14.4 (Sıfırlar Kutup Üretir). p ve q fonksiyonları z_0 'da analitik olsun. $p(z_0) \neq 0$ ve q 'nin z_0 'da m -inci mertebeden bir sıfırı varsa, $\frac{p(z)}{q(z)}$ bölümünün z_0 'da m -inci mertebeden bir kutbu vardır.

İspat.

q 'nin z_0 'da sıfırı olduğundan Teorem 14.2 gereği z_0 'ın delinmiş bir komşuluğunda $q(z) \neq 0$ 'dır; yani z_0 , bölümün **ayrık** tekil noktasıdır. Teorem 14.1 ise

$$q(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0$$

verir. Böylece

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \quad \varphi(z) = \frac{p(z)}{g(z)} \quad (2)$$

φ, z_0 'da analitik ve $\varphi(z_0) \neq 0$ olduğundan *kutup karakterizasyonu* gereği z_0 , m -inci mertebeden bir kutuptur. ■

Örnek 14.3 (İkinci Mertebeden Kutup). $p(z) = 1$ ve $q(z) = z(e^z - 1)$ alalım. Örnek 14.2'de q 'nın orijinde ikinci mertebeden sıfırı olduğu görülmüştü; Teorem 14.4 gereği

$$\frac{1}{z(e^z - 1)}$$

fonksiyonunun orijinde ikinci mertebeden bir kutbu vardır. Önceki bölümde aynı sonuca seri hesabıyla ulaşmıştık.

14.4 Basit Kutuplar İçin Rezidü Formülü

Teorem 14.5 (p/q' Formülü). p ve q, z_0 'da analitik olsun. Eğer

$$p(z_0) \neq 0, \quad q(z_0) = 0, \quad q'(z_0) \neq 0$$

ise $z_0, \frac{p(z)}{q(z)}$ bölümünün bir **basit kutbudur** ve

$$\text{Rez}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \quad (3)$$

İspat.

Koşullar, q 'nın z_0 'da $m = 1$ mertebeden sıfırı olduğunu söyler; Teorem 14.4 gereği z_0 bir basit kutuptur. Teorem 14.1 ile

$$q(z) = (z - z_0)g(z), \quad g(z_0) \neq 0 \quad (4)$$

(2) gösterimi $m = 1$ için $\varphi(z) = \frac{p(z)}{g(z)}$ verir ve *basit kutup rezidü formülü* uygulanır:

$$\text{Rez}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \varphi(z_0) = \frac{p(z_0)}{g(z_0)}$$

Son olarak (4) türetilip $z = z_0$ konursa $q'(z_0) = g(z_0)$ çıkar; yerine yazıldığında (3) elde edilir. ■

💡 Neden bu kadar pratik?

(3) formülü, paydayı çarpanlara ayırmayı ya da Laurent serisi yazmayı gereksiz kılar: **payda bir kez türetilir**, hepsi bu. Özellikle $\sin z, \cos z, e^z - 1$ gibi transandant paydalarda — çarpanlara ayırmanın mümkün olmadığı durumlarda — tek pratik yol budur.

14.5 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 14.4 (Kotanjantın Tüm Rezidüleri). $f(z) = \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ fonksiyonunun tekil noktalarını ve rezidülerini bulunuz.

Çözüm.

Tekil noktalar, paydanın **sıfırlarıdır**: $z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). $p(z) = \cos z$ ve $q(z) = \sin z$ için

$$p(n\pi) = (-1)^n \neq 0, \quad q(n\pi) = 0, \quad q'(n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n \neq 0$$

Her biri basit kutuptur ve (3) formülüyle

$$B_n = \frac{p(n\pi)}{q'(n\pi)} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n} = 1$$

Sonsuz çoklukta tekil noktanın rezidüsü tek hamlede bulundu.

■

Örnek 14.5 ($\tanh z / z^2$ Rezidüsü). $f(z) = \frac{\tanh z}{z^2} = \frac{\sinh z}{z^2 \cosh z}$ fonksiyonunun $z = \frac{\pi i}{2}$ noktasındaki rezidüsünü bulunuz.

Çözüm.

$z = \pi i/2$ noktası $\cosh z$ 'nin **bir sıfır**dır. $p(z) = \sinh z$ ve $q(z) = z^2 \cosh z$ alalım:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \sinh \frac{\pi i}{2} = i \sin \frac{\pi}{2} = i \neq 0$$

$$\left(\frac{q}{2}\right) = 0, \quad q'(z) = 2z \cosh z + z^2 \sinh z$$

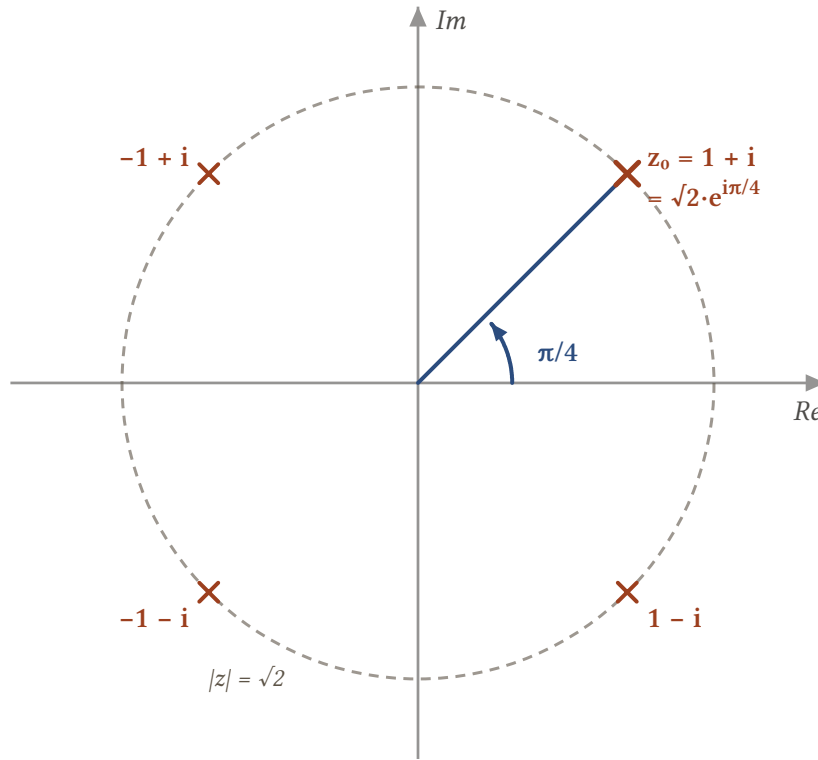
$$\left(\frac{q}{2}\right) = \left(\frac{\pi i}{2}\right)^2 \sinh \frac{\pi i}{2} = -\frac{\pi^2}{4} i \neq 0$$

(İlk terim $\cosh(\pi i/2) = 0$ olduğu için düştü.) Basit kutuptur ve

$$B = \frac{p(\pi i/2)}{q'(\pi i/2)} = \frac{i}{-\frac{\pi^2}{4} i} = -\frac{4}{\pi^2}$$

■

Örnek 14.6 (Dördüncü Dereceden Paydada). $f(z) = \frac{z}{z^4+4}$ fonksiyonunun $z_0 = \sqrt{2} e^{i\pi/4} = 1 + i$ noktasındaki rezidüsünü bulunuz.



Şekil 14.2: $z^4 + 4 = 0$ denkleminin dört kökü $|z| = \sqrt{2}$ çemberi üzerinde 90° aralıklarla dizilir; hepsi $z/(z^4 + 4)$ için basit kutuptur. $z_0 = 1 + i$ bunlardan açısı $\pi/4$ olanıdır; diğerleri i ile çarpılarak (90° döndürülerek) elde edilir.

Çözüm.

z_0 , $z^4 + 4$ polinomunun bir sıfırındır. $p(z) = z$ ve $q(z) = z^4 + 4$ için

$$p(z_0) = z_0 \neq 0, \quad q(z_0) = 0, \quad q'(z_0) = 4z_0^3 \neq 0$$

Basit kutuptur ve

$$B_0 = \frac{z_0}{4z_0^3} = \frac{1}{4z_0^2} = \frac{1}{4(1+i)^2} = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}$$

Kutup karakterizasyon teoremiyle de bulunabilirdi, ama φ fonksiyonunu kurmak için paydayı dört lineer çarpana ayırmak gerekirdi — bu yol çok daha kısadır.

■

⚠ Yüksek mertebeler için formül yok

(3) formülü **yalnızca basit kutuplar** içindir. Daha yüksek mertebeler için benzer formüller yazılabilir, ancak uzundurlar ve pratikte kullanışlı değildirler; o durumlarda **kutup karakterizasyon teoremi** veya doğrudan Laurent açılımı tercih edilir.

14.6 Alıştırma

Alıştırma 14.1 (Sıfır ve Kutup Alıştırmaları).

- a) $\frac{z}{\sin z}$ fonksiyonunun $z = 0$ 'daki tekilliğinin kaldırılabilir olduğunu gösteriniz.
- b) $\frac{e^z}{z^2 + \pi^2}$ fonksiyonunun $z = \pi i$ 'deki rezidüsünü (3) formülüyle hesaplayınız.
- c) $\frac{1}{\cos z}$ fonksiyonunun tekil noktalarını ve her birindeki rezidüyü bulunuz.
- d) $\frac{z^{1/4}}{z+1}$ ($r > 0, 0 < \theta < 2\pi$) dalı için $z = -1$ 'deki rezidüyü hesaplayınız.

Çözüm.

a) Payda $\sin z$ 'nin $z = 0$ 'daki sıfırı **basittir**: $\sin 0 = 0$ ama $\cos 0 = 1 \neq 0$ 'dır. Pay olan z fonksiyonunun da $z = 0$ 'da basit sıfırı vardır. Aynı mertebeden iki sıfır bölümde birbirini götürür; bunu açılımla görelim:

$$\frac{z}{\sin z} = \frac{z}{z - \frac{z^3}{6} + \dots} = \frac{1}{1 - \frac{z^2}{6} + \dots}$$

Sağ taraf $z = 0$ 'da tanımlı ve analitiktir; limit sonludur:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin z} = 1$$

Sonlu limit, tekilliğin **kaldırılabilir** olduğunu söyler: $f(0) = 1$ tanımlanırsa fonksiyon $|z| < \pi$ diskinde analitik olur.

b) Paydayı $q(z) = z^2 + \pi^2$ yazalım. $q(\pi i) = -\pi^2 + \pi^2 = 0$ ve $q'(\pi i) = 2\pi i \neq 0$ olduğundan $z = \pi i$, paydanın basit sıfırır; pay $p(z) = e^z$ orada sıfırdan farklıdır. Basit kutuplar için p/q' formülü uygulanır:

$$\text{Rez}_{z=\pi i} \frac{e^z}{z^2 + \pi^2} = \frac{p(\pi i)}{q'(\pi i)} = \frac{e^{\pi i}}{2\pi i} = \frac{-1}{2\pi i}$$

Sonucu sadeleştirelim; $\frac{1}{i} = -i$ olduğundan

$$\frac{-1}{2\pi i} = \frac{-1}{2\pi} \cdot \frac{1}{i} = \frac{-1}{2\pi} (-i) = \frac{i}{2\pi}$$

c) Tekil noktalar paydanın sıfırlarıdır. Kompleks kosinüsün sıfırları reel eksendekilerle aynıdır:

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Bu noktalarda $q'(z) = -\sin z$ değeri sıfırdan farklıdır (sin ile cos ortak sıfıra sahip olamaz), dolayısıyla hepsi **basit kutuptur**. $p \equiv 1$ ile

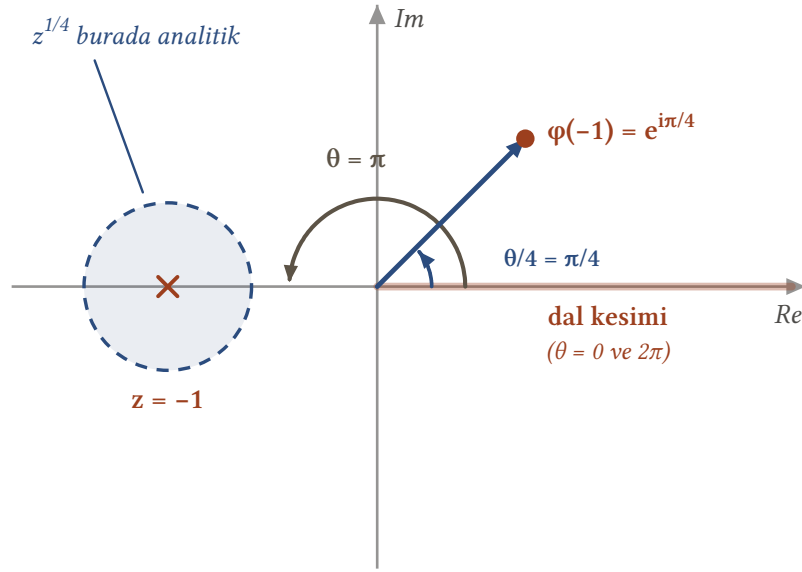
$$\text{Rez}_{z=\frac{\pi}{2}+n\pi} \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{-\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)}$$

Payda değerini hesaplayalım: $\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Böylece

$$\text{Rez} = \frac{1}{-(-1)^n} = (-1)^{n+1}$$

Rezidüler ardışık kutuplarda işaret değiştirir: $z = \pi/2$ 'de -1 , $z = 3\pi/2$ 'de $+1$, $z = 5\pi/2$ 'de -1 , ...

d) Verilen dalda $z^{1/4} = \sqrt[4]{r} e^{i\theta/4}$ ($0 < \theta < 2\pi$) fonksiyonu, $z = -1$ noktasının bir komşuluğunda analitiktir (kesim pozitif reel eksendedir, -1 oradan uzaktır). Fonksiyon $\frac{\varphi(z)}{z+1}$ biçimindedir ve $\varphi(z) = z^{1/4}$ olduğundan $z = -1$ basit kutuptur; rezidü $\varphi(-1)$ 'dir.



Şekil 14.3: Kesim pozitif reel ekseninde olduğundan $z = -1$ 'in açısı bu dalda $\theta = \pi$ 'dir (kesimden saat yönünün tersine yarım tur); $-\pi$ seçilemez. Dal $z = -1$ civarında analiktir, rezidü $\varphi(-1) = e^{i\pi/4} = (1 + i)/\sqrt{2}$ değeridir (şekilde aynı düzlemde gösterilmiştir).

$z = -1$ için seçilen dalda $r = 1$ ve $\theta = \pi$ 'dir:

$$\varphi(-1) = \sqrt[4]{1} e^{i\pi/4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$$

Dalın seçimi sonucu değiştirir: θ aralığı $2\pi < \theta < 4\pi$ olan dalda $\theta = 3\pi$ alınır ve rezidü $e^{i3\pi/4}$ olurdu.

■

Üç tekillik tipini tanıdık ve rezidüleri hesaplamayı öğrendik. Sınıflandırmayı tamamlamak için son bir soru kalıyor: fonksiyon, her tip tekil noktaya **yaklaşırken** nasıl davranır? [Tekil noktalarda davranış](#).

15. Tekil Noktaların Civarında Davranış

Üç tekillik tipini Laurent açılımına bakarak ayırt etmiştik. Aynı ayırım, fonksiyonun tekil noktaya **yaklaşırken** nasıl davrandığına bakılarak da yapılabilir — ve bu ikinci bakış, tiplerin karakterini çok daha canlı gösterir: kutupta modül düzenli biçimde patlar, kaldırılabilir tekillikte hiçbir şey olmaz, esaslı tekillikte ise fonksiyon adeta çıldırır.

15.1 Kutupta: Modül Sonsuza Gider

Teorem 15.1 (Kutupta Limit). z_0 , bir f fonksiyonunun kutbuysa

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad (1)$$

İspat.

z_0 , m -inci mertebeden bir kutup olsun. *Kutup karakterizasyonu* gereği

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}$$

yazılabilir; burada φ , z_0 'da analitik ve $\varphi(z_0) \neq 0$ 'dır. O hâlde

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^m}{\varphi(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m}{\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)} = \frac{0}{\varphi(z_0)} = 0$$

Sonsuz içeren limitler teoremi gereği bu, tam olarak (1) demektir. ■

Kutup, tekilliğin en “uysal” biçimidir: fonksiyon her yönden sonsuza gider ve gidiş hızı, kutup mertebesiyle belirlenir.

15.2 Kaldırılabilir Tekillikte: Sınırlılık

Teorem 15.2 (Kaldırılabilir Tekillikte Sınırlılık). z_0 , bir f fonksiyonunun kaldırılabilir tekil noktasıysa, f bu noktanın delinmiş bir $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda analitik ve **sınırlıdır**.

İspat.

f 'ye z_0 'da uygun değer atandığında ($f(z_0) = a_0$) fonksiyon bir $|z - z_0| < R_2$ diskinde *analitik olur*. O hâlde $\varepsilon < R_2$ olmak üzere kapalı $|z - z_0| \leq \varepsilon$ diskinde sürekli; *kapalı sınırlı bölgede sürekli fonksiyonun modülü sınırlı olduğundan* f bu diskte, dolayısıyla delinmiş komşulukta sınırlıdır. ■

Bunun tersi de doğrudur ve bir Riemann teoremidir:

Teorem 15.3 (Riemann Lemması). f , bir z_0 noktasının delinmiş $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ komşuluğunda analitik ve **sınırlı** olsun. f , z_0 'da analitik değilse, orada **kaldırılabilir** bir tekilliğe sahiptir.

İspat.

f , z_0 'da analitik olmadığından z_0 ayrık bir tekil noktadır ve delinmiş komşulukta bir Laurent temsili vardır:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \quad (2)$$

C , $\rho < \varepsilon$ olmak üzere pozitif yönlü $|z - z_0| = \rho$ çemberi olsun. *Laurent katsayı formülü*

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

verir. Sınırlılık hipotezi, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ iken $|f(z)| \leq M$ olacak bir $M > 0$ sabitinin varlığını söyler. *ML eşitsizliğiyle*

$$|b_n| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{-n+1}} \cdot 2\pi\rho = M\rho^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

b_n katsayıları sabittir; ρ ise istendiği kadar küçük seçilebilir. Sağ taraf sıfıra gittiğinden bütün b_n katsayıları sıfır olmak zorundadır: (2) açılımının esas kısmı yoktur, yani z_0 kaldırılabilir bir tekilliktir.

■

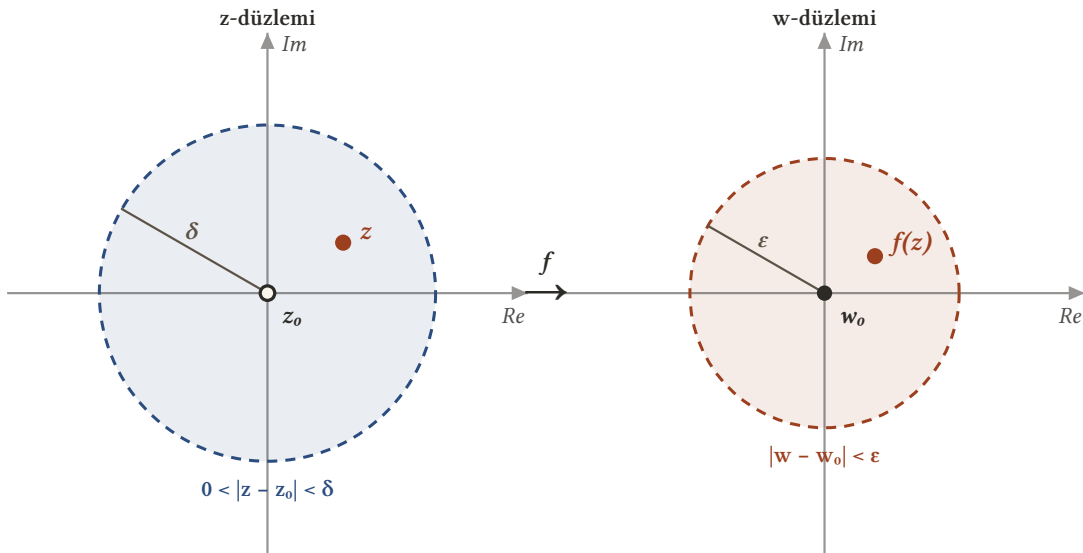
15.3 Esaslı Tekillikte: Casorati-Weierstrass

Esaslı tekil noktalarda ne limit sonsuza gider ne de fonksiyon sınırlı kalır. Gerçekte olan çok daha çarpıcıdır:

Teorem 15.4 (Casorati-Weierstrass Teoremi). z_0 , bir f fonksiyonunun esaslı tekil noktası ve w_0 herhangi bir kompleks sayı olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad (4)$$

eşitsizliği, z_0 'ın her delinmiş $0 < |z - z_0| < \delta$ komşuluğundaki bir z noktasında sağlanır.



Şekil 15.1: Casorati-Weierstrass: w_0 ve ε ne olursa olsun, z_0 'ın her delinmiş δ -komşuluğunda görüntüsü w_0 'ın ε -diskine düşen bir z vardır. δ küçüldükçe sol disk daralır ama sağdaki hedefe düşen bir nokta hep bulunur; esaslı tekillik civarında değerler düzlemin her yerinde yoğunur.

İspat.

Olmayana ergi kuralım. z_0 ayırık tekil nokta olduğundan f 'nin analitik olduğu delinmiş bir $0 < |z - z_0| < \delta$ komşuluğu vardır; (4) koşulunun bu komşuluktaki **hiçbir** noktada sağlanmadığını varsayalım. O hâlde

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| \geq \varepsilon$$

Bu durumda

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0} \quad (0 < |z - z_0| < \delta) \quad (5)$$

fonksiyonu kendi tanım domeninde analitiktir ve $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$ ile sınırlıdır. **Teorem 15.3** gereği z_0 , g 'nin kaldırılabilir tekillikleridir; g 'yi z_0 'da analitik olacak biçimde tanımlayalım.

Durum 1: $g(z_0) \neq 0$. (5)'ten f 'yi çekelim:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w_0 \quad (0 < |z - z_0| < \delta) \quad (6)$$

Sağ taraf z_0 'da analitiktir; $f(z_0) = \frac{1}{g(z_0)} + w_0$ tanımlandığında f de z_0 'da analitik olur. Bu, z_0 'ın esaslı değil **kaldırılabilir** tekillik olması demektir — çelişki.

Durum 2: $g(z_0) = 0$. g , $|z - z_0| < \delta$ komşuluğunda özdeş sıfır olamaz (aksi hâlde (5) anlamsızlaşır); **sıfırların ayrıklığı** gereği g 'nin z_0 'da sonlu bir m mertebeli sıfırı vardır. O zaman (6) ifadesi ve **sıfır-kutup teoremi**, f 'nin z_0 'da m -inci mertebeden bir **kutbu** olduğunu söyler — yine çelişki.

Her iki durumda da z_0 'ın esaslı tekil nokta olmasıyla çelişki doğar; varsayım yanlıştır.

■

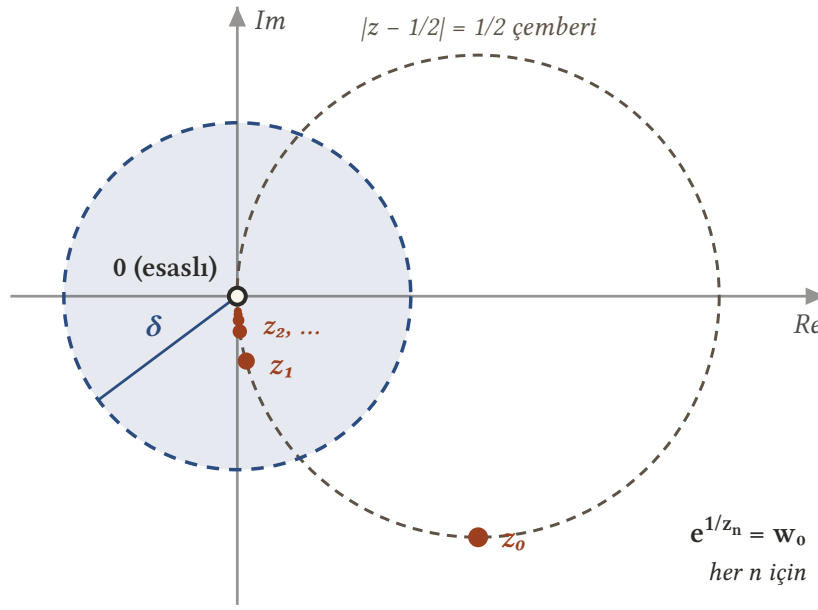
i Teoremin söylediği

Casorati-Weierstrass teoremi şunu ifade eder: bir fonksiyon, esaslı tekil noktasının **her** delinmiş komşuluğunda, önceden verilen herhangi bir sayıya istendiği kadar yakın değerler alır. Daha da güçlü olan **Picard teoremi**, fonksiyonun bu komşuluklarda — olası bir istisna dışında — her sonlu değeri gerçekten **sonsuz kez** aldığını söyler.

Örnek 15.1 ($e^{1/z}$ 'nin Orijin Civarındaki Vahşiliği). $f(z) = e^{1/z}$ için orijin **esaslı bir tekil noktadır**. Teoremin öngördüğü davranışı somut olarak görelim: verilen sıfırdan farklı bir $w_0 = \rho e^{i\alpha}$ sayısı için

$$z_n = \frac{1}{\ln \rho + i(\alpha + 2n\pi)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

alalım. $e^{1/z_n} = e^{\ln \rho + i(\alpha + 2n\pi)} = \rho e^{i\alpha} = w_0$ olur ve $n \rightarrow \infty$ iken $z_n \rightarrow 0$ 'dır. Yani $e^{1/z}$, orijinin her delinmiş komşuluğunda sıfırdan farklı **her** değeri sonsuz kez alır; alınamayan tek değer 0'dır — Picard teoremindeki “olası istisna” tam olarak budur.



Şekil 15.2: $w_0 = e^{1+i}$ için $z_n = 1/(1 + i(1 + 2n\pi))$ noktaları $|z - 1/2| = 1/2$ çemberi üzerinde orijine doğru koşar; her birinde $e^{1/z}$ tam olarak w_0 değerini alır. δ -diski ne kadar küçük olursa olsun sonsuz çoğu içeride kalır: değer her delinmiş komşulukta sonsuz kez alınır.

15.4 Üç Tipin Karşılaştırması

Tekillik tipi	Esas kısım	$z \rightarrow z_0$ davranışı
Kaldırılabilir	terim yok	limit vardır ve sonludur; fonksiyon sınırlıdır
m -inci mertebeden kutup	m terim	$ f(z) \rightarrow \infty$
Esaslı	sonsuz terim	limit yoktur; her değere istendiği kadar yaklaşılır

💡 Pratik ayırt etme

Bir tekil noktanın tipini saptamak için Laurent serisi yazmak şart değildir: $f(z)$ 'nin $z \rightarrow z_0$ limitine bakmak çoğu zaman yeterlidir. Limit sonluysa kaldırılabilir, sonsuzsa kutup, yoksa esaslıdır.

15.5 Alıştırma

Alıştırma 15.1 (Davranış Alıştırmaları). Aşağıdaki fonksiyonların belirtilen noktalardaki tekillik tipini, limit davranışına bakarak belirleyiniz.

- $\frac{\sin z}{z}, z = 0$
- $\frac{1}{(z-1)^3}, z = 1$
- $\cos \frac{1}{z}, z = 0$
- $\frac{e^z}{z^2}, z = 0$

Çözüm.

Ölçüt üç durumu birbirinden ayırır: $z \rightarrow z_0$ iken **sonlu** bir limit varsa tekillik kaldırılabilir, $|f| \rightarrow \infty$ ise kutup, ikisi de olmuyorsa esastır.

a) Sinüsün açılımını z 'ye bölelim:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{6} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{6} + \dots$$

Limit sonludur:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

Tekillik **kaldırılabilir**; $f(0) = 1$ tanımlandığında fonksiyon tam olur.

b) $z \rightarrow 1$ iken payda sıfıra gider, pay sabit 1'dir:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left| \frac{1}{(z-1)^3} \right| = \infty$$

Tekillik bir **kutuptur**. Mertebesi, negatif kuvvetlerin en büyüğü olan 3'tür: fonksiyon zaten $\frac{\varphi(z)}{(z-1)^3}$ biçimindedir ve $\varphi \equiv 1 \neq 0$ 'dır. Yani **üçüncü mertebeden kutup**.

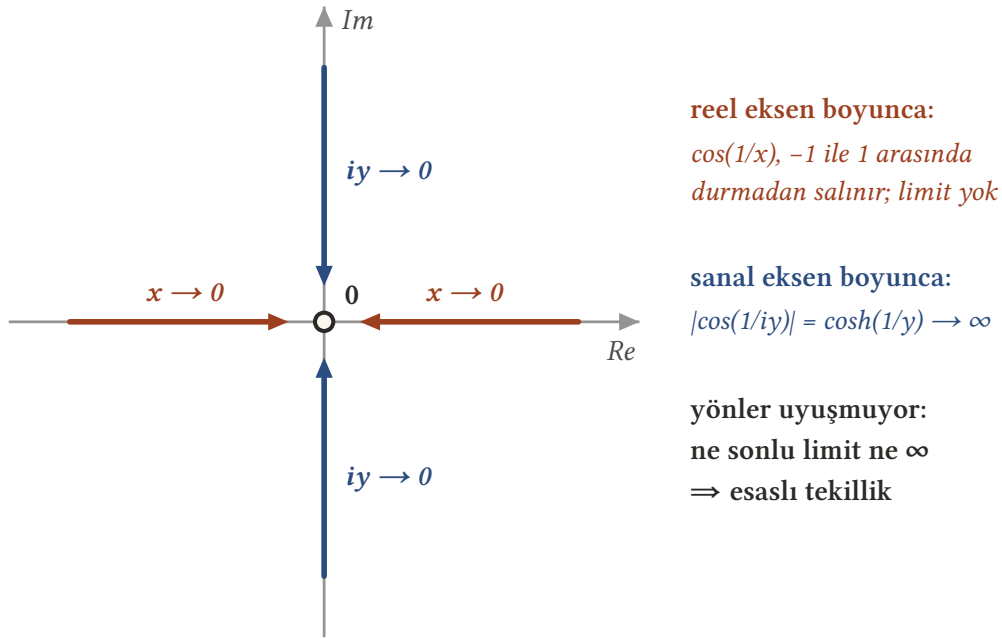
c) İki farklı yaklaşımı karşılaştıralım. Reel eksen boyunca $z = x \rightarrow 0$ alınırsa

$$\cos \frac{1}{x}$$

değeri -1 ile 1 arasında hiç durulmadan salınır; limit yoktur. Sanal eksen boyunca $z = iy \rightarrow 0$ alınırsa, $\cos(-i/y) = \cosh(1/y)$ olduğundan

$$\left| \cos \frac{1}{iy} \right| = \cosh \frac{1}{y} \rightarrow \infty$$

Ne sonlu bir limit ne de ∞ elde edildiğinden tekillik **esastır**. (Casorati-Weierstrass teoremi bu davranışı keskinleştirir: her delinmiş komşulukta değerler tüm düzlemde yoğundur.)



Şekil 15.3: $\cos(1/z)$ için orijine iki farklı yönden yaklaşma: reel eksen boyunca değerler -1 ile 1 arasında salınır, sanal eksen boyunca modül sonsuza gider. Tek bir limit (sonlu ya da ∞) olmadığından tekillik ne kaldırılabilir ne kutuptur: esashdır.

d) $z \rightarrow 0$ iken pay $e^z \rightarrow 1$, payda $z^2 \rightarrow 0$ 'dır:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{e^z}{z^2} \right| = \infty$$

Tekillik bir kutuptur. Fonksiyon $\frac{\varphi(z)}{z^2}$ biçiminde ve $\varphi(0) = e^0 = 1 \neq 0$ olduğundan mertebesi 2'dir: **ikinci mertebeden kutup**. Laurent açılımı da aynı şeyi söyler:

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \dots$$

■

Rezidü kuramının tüm mekanizması hazır. Son kısımda bu makineyi çalıştırıyoruz: reel analizde hesaplanamayan integraller, kompleks düzlemde birkaç rezidüyle çözülecek — [has olmayan integraller](#).

16. Has Olmayan İntegrallerin Hesaplanması

Rezidü kuramının en görünür ödülü şudur: reel analizde ters türev bulunamadığı için hesaplanamayan integraller, kompleks düzlemde birkaç rezidü toplanarak çözülür. Bu bölümde yöntemin iskeletini kuruyoruz — yarım çember çevresi, ML kestirimi ve rezidü teoremi.

16.1 Has Olmayan İntegral ve Esas Değer

Kalkülüsten hatırlayalım: sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun yarı-sonsuz aralıktaki has olmayan integrali

$$\int_0^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x) dx \quad (1)$$

limitiyle tanımlanır. Tüm eksen üzerinde ise **iki bağımsız** limit istenir:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x) dx \quad (2)$$

Tanım 16.1 (Cauchy Esas Değeri). (2) integralinin **Cauchy esas değeri**, tek bir limitle tanımlanır:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \quad (3)$$

(2) integrali yakınsaksa esas değeri de vardır ve ikisi eşittir; çünkü

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^0 f dx + \int_0^R f dx \right]$$

ayrışımındaki iki limit, (2)'dekilerle aynıdır.

⚠ Esas değerin varlığı yakınsaklık demek değildir

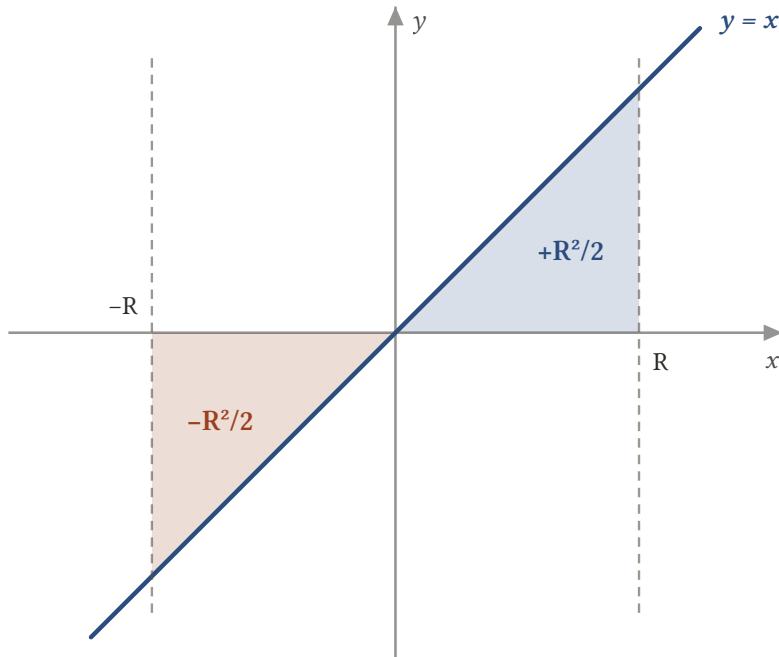
Tersi doğru değildir. $f(x) = x$ için

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} x \, dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-R}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} 0 = 0$$

esas değeri vardır; oysa (2) tanımındaki

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \left(-\frac{R_1^2}{2} \right) + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_2^2}{2}$$

limitlerinin ikisi de yoktur — integral ıraksaktır. Simetrik kesme, birbirini götürün iki sonsuzu gizler.



Şekil 16.1: $f(x) = x$ için simetrik kesme $[-R, R]$ iki eşit ve zıt işaretli alan verir: toplam her R için sıfırdır, dolayısıyla esas değer 0'dır. Oysa (2) tanımı iki ucu bağımsız kesmeye izin verir; tek taraflı limitlerin ikisi de yoktur (örneğin $R_1 = 2R_2$ alınır fark sınırsız büyür), dolayısıyla integral ıraksar.

16.2 Çift Fonksiyonlarda İndirgeme

Bu ayırım, integrand **çift** olduğunda ortadan kalkar.

Teorem 16.1 (Çift Fonksiyonlar İçin). $f(x)$, $(-\infty, \infty)$ üzerinde sürekli ve çift olsun ($f(-x) = f(x)$). (3) esas değeri varsa (2) integrali yakınsar ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \quad (4)$$

$$\int_0^{\infty} f(x) \, dx = \frac{1}{2} \left[\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \right] \quad (5)$$

İspat.

Grafiğin y eksenine göre simetrisi

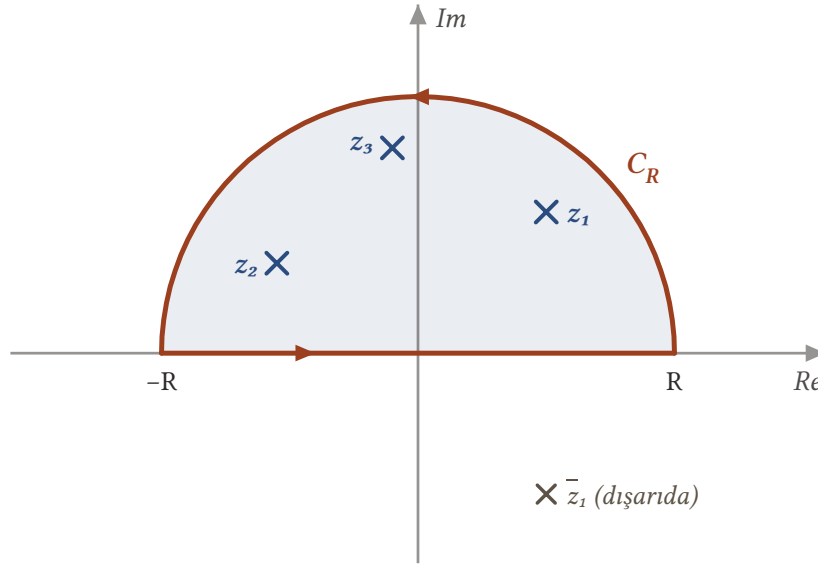
$$\int_{-R_1}^0 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R_1}^{R_1} f(x) dx, \quad \int_0^{R_2} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-R_2}^{R_2} f(x) dx$$

verir. Sağ taraftaki limitler esas değer varlığından ötürü mevcuttur; dolayısıyla soldaki iki limit de vardır ve (2) yakınsar. Toplandığında (4), ve $\int_0^R f dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R f dx$ ilişkisinden (5) çıkar.

■

16.3 Yarım Çember Yöntemi

Şimdi rasyonel $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ fonksiyonlarının has olmayan integrallerini hesaplayan yöntemi kuralım. Varsayımlar: p ve q ortak çarpanı olmayan reel katsayılı polinomlar, q 'nin **reel sıfırı yok** ve reel eksenin üstünde en az bir sıfırı var.



Şekil 16.2: Yarım çember yöntemi: yol, $[-R, R]$ doğru parçası ile üst yarım çember C_R 'den oluşur ve pozitif yönde dolaşılır. Yalnızca üst yarı düzlemdeki sıfırlar z_1, z_2, z_3 yolun içindedir; q reel katsayılı olduğundan her kutbun eşleniği de kutuptur, ama alt yarı düzlemde kalır ve rezidü toplamına girmez.

Yöntem şöyle işler:

1. $q(z)$ 'nin reel eksenin üstünde kalan farklı sıfırları $z_1, z_2, \dots, z_n$ olarak belirlenir (sonlu sayıdadır).
2. $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ bölümü, reel eksenin $-R \leq x \leq R$ parçası ile $|z| = R$ çemberinin üst yarısı C_R 'den oluşan **yarım dairesel** bölgenin pozitif yönlü sınırı üzerinde integrallenir. R yeterince büyük seçilir ki tüm z_k noktaları bu yolun içinde kalsın.
3. **Cauchy rezidü teoremi** uygulanır:

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rez}_{z=z_k} f(z)$$

yani

$$\int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Rez}_{z=z_k} f(z) - \int_{C_R} f(z) dz \quad (6)$$

4. Son integralin sıfıra gittiği gösterilir. Eğer

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

ise

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Re}_{z=z_k} f(z) \quad (7)$$

$f(x)$ çift ise Teorem 16.1 devreye girer:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Re}_{z=z_k} f(z), \quad \int_0^{\infty} f(x) dx = \pi i \sum_{k=1}^n \text{Re}_{z=z_k} f(z) \quad (8)$$

💡 Yay integrali neden söner?

C_R üzerindeki integrali sıfıra götüren mekanizma her seferinde aynıdır: [ML eşitsizliği](#). Yayın uzunluğu πR ile büyürken, integrandın modülü paydanın derecesi sayesinde daha hızlı küçülür. Pratik kural: **paydanın derecesi, payın derecesinden en az iki fazlaysa** yay integrali söner.

16.4 Tam Çözümlü Örnek

Örnek 16.1 (Klasik Rasyonel İntegral).

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx$$

integralini hesaplayınız.

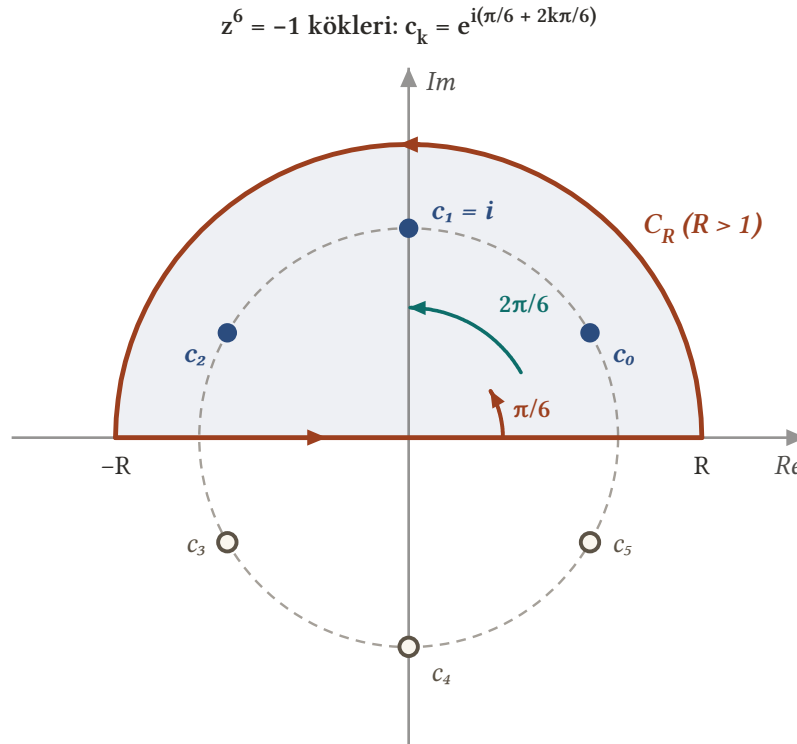
Çözüm.

Tekil noktalar. $f(z) = \frac{z^2}{z^6+1}$ fonksiyonunun tekil noktaları, $z^6 = -1$ denkleminin kökleridir. [Kök formülüyle](#)

$$c_k = \exp \left[i \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6} \right) \right] \quad (k = 0, 1, \dots, 5)$$

Hiçbiri reel ekseninde değildir. İlk üçü üst yarı düzlemdedir:

$$c_0 = e^{i\pi/6}, \quad c_1 = i, \quad c_2 = e^{i5\pi/6}$$



Şekil 16.3: $z^6 = -1$ 'in altı kökü birim çember üzerinde $\pi/3$ aralıklarla dizilir; c_0, c_1, c_2 üst yarı düzlemde, c_3, c_4, c_5 alt yarı düzlemde. $R > 1$ alınır alınmaz yarım çember yolu tam olarak üstteki üç kutbu içine alır; hiçbir kök reel ekseninde olmadığından yol tekil noktaya değmez.

Rezidüler. p/q formülünü kullanalım; $p(z) = z^2$, $q(z) = z^6 + 1$, $q'(z) = 6z^5$:

$$B_k = \text{Rez}_{z=c_k} \frac{z^2}{z^6 + 1} = \frac{c_k^2}{6c_k^5} = \frac{1}{6c_k^3} \quad (k = 0, 1, 2)$$

c_k^3 değerlerini hesaplayalım: $c_0^3 = e^{i\pi/2} = i$, $c_1^3 = i^3 = -i$, $c_2^3 = e^{i5\pi/2} = i$. Böylece

$$B_0 = \frac{1}{6i}, \quad B_1 = -\frac{1}{6i}, \quad B_2 = \frac{1}{6i}$$

$$2\pi i (B_0 + B_1 + B_2) = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{6i} + \frac{1}{6i} \right) = \frac{\pi}{3}$$

(6) eşitliği, $R > 1$ olan tüm değerler için

$$\int_{-R}^R \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{3} - \int_{C_R} f(z) dz \quad (9)$$

verir.

Yay integralinin sönmesi. C_R üzerinde $|z| = R$ olduğundan

$$|z^2| = R^2, \quad |z^6 + 1| \geq ||z|^6 - 1| = R^6 - 1$$

Yani $|f(z)| \leq M_R$, $M_R = \frac{R^2}{R^6 - 1}$. Yayın uzunluğu πR olduğundan ML eşitsizliğiyle

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq M_R \pi R = \frac{\pi R^3}{R^6 - 1} = \frac{\frac{\pi}{R^3}}{1 - \frac{1}{R^6}}$$

Pay ve payda R^6 'ya bölündüğünde ifadenin $R \rightarrow \infty$ iken sifıra gittiği açıktır:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

Sonuç. (9)'da limit alınırsa

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{3}$$

İntegrand çift olduğundan (5) ile

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx = \frac{\pi}{6}$$

■

16.5 Alıştırma

Alıştırma 16.1 (Has Olmayan İntegral Alıştırmaları). Aşağıdaki integralleri yarım çember yöntemiyle hesaplayınız.

- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$
- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$
- $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

Çözüm.

Dördünde de integrand çift bir rasyonel fonksiyondur, paydanın reel kökü yoktur ve payda derecesi payı en az iki aşar. Böylece büyük yarım çemberin katkısı sifıra gider ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Rez}_{\text{üst yarı düzlem}} f(z)$$

kuralı geçerlidir; $[0, \infty)$ üzerindeki integraller ise bunun yarısıdır.

a) $\frac{1}{z^2+1}$ fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki tek tekil noktası $z = i$ 'dir ve basit kutuptur:

$$\text{Rez}_{z=i} \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

Tüm eksen üzerindeki integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

İntegrand çift olduğundan

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$$

b) Bu kez $z = i$ **ikinci mertebeden** kutuptur:

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{\varphi(z)}{(z-i)^2}, \quad \varphi(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$$

Rezidü $\varphi'(i)$ 'dir:

$$\varphi'(z) = \frac{-2}{(z+i)^3} \Rightarrow \varphi'(i) = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}$$

Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}$$

c) Üst yarı düzlemde iki basit kutup vardır: $z = i$ ve $z = 2i$.

$$\text{Rez}_{z=i} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} = \frac{z^2}{(z+i)(z^2+4)} \Big|_{z=i} = \frac{-1}{2i \cdot 3} = \frac{i}{6}$$

$$\text{Rez}_{z=2i} = \frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)} \Big|_{z=2i} = \frac{-4}{(-3)(4i)} = -\frac{i}{3}$$

(Son sadeleştirmelerde $\frac{1}{i} = -i$ kullanıldı.) Toplam $\frac{i}{6} - \frac{i}{3} = -\frac{i}{6}$ olduğundan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = 2\pi i \left(-\frac{i}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

d) $z^4 + 1 = 0$ köklerinin hepsi basit kutuptur ve üst yarı düzlemde iki tanesi bulunur:

$$z_0 = e^{i\pi/4}, \quad z_1 = e^{i3\pi/4}$$

Basit kutupta rezidü $\frac{1}{4z^3}$ 'tür; $z^4 = -1$ olduğundan bu ifade sadeleşir:

$$\text{Rez}_{z=z_k} \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$$

Rezidülerin toplamı

$$-\frac{1}{4} (e^{i\pi/4} + e^{i3\pi/4}) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{i\sqrt{2}}{4}$$

Böylece

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\pi i \left(-\frac{i\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

■

Peki integrandda $\sin ax$ ya da $\cos ax$ varsa? Doğrudan aynı yolu izlemek işe yaramaz — çünkü $\sin z$ ve $\cos z$ üst yarı düzlemde sınırsızdır. Çözüm zariftir: [Fourier integralleri ve Jordan lemması](#).

17. Fourier İntegralleri ve Jordan Lemması

Rezidü kuramı, Fourier analizinde doğan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax \, dx \quad \text{ve} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax \, dx \quad (1)$$

tipindeki integralleri de hesaplar ($a > 0$ sabit). Ama **önceki bölümün** yöntemi doğrudan uygulanamaz; küçük ama kritik bir değişiklik gerekir.

17.1 Neden Doğrudan Uygulanamaz?

Trigonometrik fonksiyonların modülleri

$$|\sin az|^2 = \sin^2 ax + \sinh^2 ay, \quad |\cos az|^2 = \cos^2 ax + \sinh^2 ay$$

biçimindedir. $\sinh ay = \frac{e^{ay} - e^{-ay}}{2}$ olduğundan, y sonsuza giderken bu modüller e^{ay} gibi **büyür**: yarım çember yayı üzerinde integrandı sınırlamak imkânsız hâle gelir.

Çözüm, trigonometrik fonksiyonu üstelle değiştirmektir. $a > 0$ ve $y \geq 0$ için

$$|e^{iaz}| = |e^{ia(x+iy)}| = |e^{-ay}e^{iax}| = e^{-ay} \leq 1 \quad (2)$$

yani e^{iaz} , **üst yarı düzlemde sınırlıdır**. Reel ve sanal kısımları ayırma işi de tek satırda halledilir:

$$\int_{-R}^R f(x) \cos ax \, dx + i \int_{-R}^R f(x) \sin ax \, dx = \int_{-R}^R f(x) e^{iax} \, dx \quad (3)$$

💡 Yöntemin özeti

Integrandda $\sin ax$ ya da $\cos ax$ görürseniz, kompleks düzleme e^{iaz} ile geçin; sonuçta reel kısmı alırsanız kosinüslü, sanal kısmı alırsanız sinüslü integrali elde edersiniz.

17.2 Çözümlü Örnek: Kosinüs

Örnek 17.1 ($\cos 3x$ İntegrali).

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2} \, dx = \frac{2\pi}{e^3}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

İntegrand çift olduğundan **esas değer**in varlığını göstermek yeterlidir.

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

alalım; $f(z)e^{i3z}$ çarpımı, $z = i$ dışında reel eksenin üstünde ve üzerinde analitiktir. Yarım dairesel bölgenin sınırı üzerinde rezidü teoremi uygulanırsa

$$\int_{-R}^R \frac{e^{i3x}}{(x^2 + 1)^2} \, dx = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} f(z) e^{i3z} \, dz \quad (4)$$

Rezidü. $f(z)e^{i3z} = \frac{\varphi(z)}{(z-i)^2}$ yazalım; burada $\varphi(z) = \frac{e^{i3z}}{(z+i)^2}$. $z = i$ ikinci mertebeden bir kutuptur ve **rezidü formülüyle**

$$B_1 = \varphi'(i)$$

$$\varphi'(z) = \frac{i3e^{i3z}(z+i)^2 - e^{i3z} \cdot 2(z+i)}{(z+i)^4} = \frac{e^{i3z} [i3(z+i) - 2]}{(z+i)^3}$$

$z = i$ konursa $e^{i3i} = e^{-3}$ ve $(2i)^3 = -8i$ olduğundan

$$B_1 = \frac{e^{-3} [i3(2i) - 2]}{-8i} = \frac{e^{-3}(-8)}{-8i} = \frac{e^{-3}}{i} = \frac{1}{i} e^{-3}$$

Böylece $2\pi i B_1 = \frac{2\pi}{e^3}$ 'tür. (4) eşitliğinin iki tarafının reel kısımları alınır

$$\int_{-R}^R \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3} - \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i3z} dz \quad (5)$$

Yay integrali. C_R üzerinde $|z| = R$ için

$$|f(z)| \leq M_R = \frac{1}{(R^2 - 1)^2}$$

ve (2) gereği $|e^{i3z}| = e^{-3y} \leq 1$ 'dir. ML eşitsizliğiyle

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i3z} dz \right| \leq \left| \int_{C_R} f(z)e^{i3z} dz \right| \leq M_R \pi R = \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2}$$

$R \rightarrow \infty$ iken sağ taraf sıfıra gider (payda R^4 mertebesinde, pay R mertebesinde). (5)'te limit alınır istenen sonuç çıkar.

■

17.3 Jordan Lemması

Bazı integrallerde $M_R \pi R$ çarpımı sıfıra gitmez — payda derecesi yeterince yüksek değildir. Bu durumlarda e^{iaz} çarpanının sağladığı ek sönmeyi kullanan aşağıdaki lemma devreye girer.

Teorem 17.1 (Jordan Eşitsizliği). Her $R > 0$ için

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta < \frac{\pi}{R} \quad (6)$$

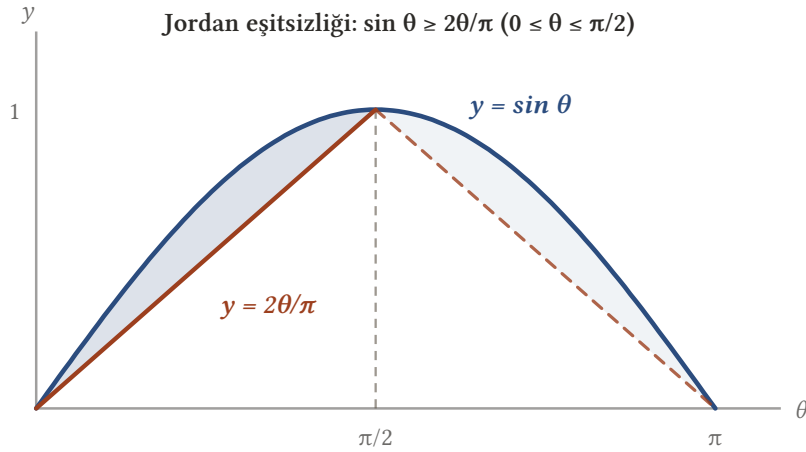
İspat.

$y = \sin \theta$ ile $y = \frac{2\theta}{\pi}$ doğrusunun grafikleri karşılaştırıldığında, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ aralığında

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$$

olduğu görülür (sinüs bu aralıkta içbükeydir, kirişinin üstünde kalır). $R > 0$ için $e^{-R \sin \theta} \leq e^{-2R\theta/\pi}$ olur ve

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) < \frac{\pi}{2R}$$



Şekil 17.1: $[0, \pi/2]$ aralığında sinüs içbükeydir: grafiği, $(0, 0)$ ile $(\pi/2, 1)$ noktalarını birleştiren kirişin üstünde kalır, yani $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$. Grafik $\theta = \pi/2$ doğrusuna göre simetrik olduğundan aynı kestirim $[\pi/2, \pi]$ aralığında da (kesikli kiriş) geçerlidir; iki yarı toplanınca $\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta < \pi/R$ çıkar.

$y = \sin \theta$ grafiği $\theta = \pi/2$ doğrusuna göre simetrik olduğundan $[\pi/2, \pi]$ aralığındaki integral de aynı sınırı sağlar; ikisi toplanınca (6) elde edilir.

■

Teorem 17.2 (Jordan Lemması). Aşağıdaki koşullar sağlansın:

- a) $f, y \geq 0$ üst yarı düzleminde, bir $|z| = R_0$ çemberinin dışındaki tüm noktalarda analitiktir;
- b) $C_R, z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) yarım çemberidir ve $R > R_0$ 'dır;
- c) C_R üzerindeki tüm noktalarda $|f(z)| \leq M_R$ olacak biçimde bir M_R pozitif sabiti vardır ve $\lim_{R \rightarrow \infty} M_R = 0$ 'dır.

O zaman her pozitif a sabiti için

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad (7)$$

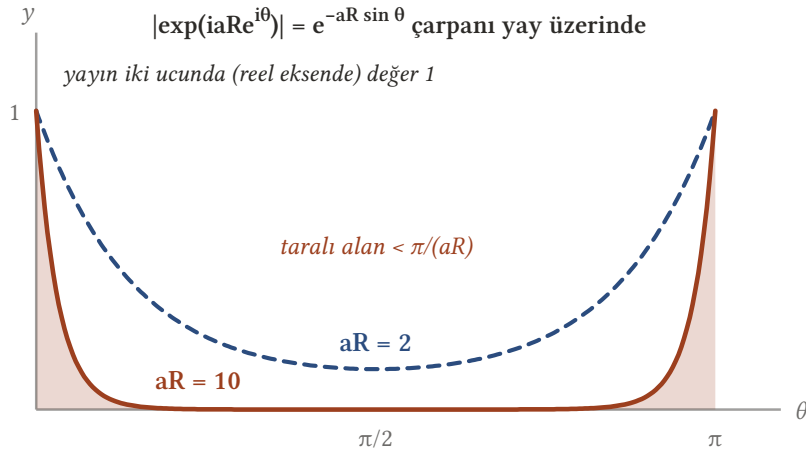
İspat.

Yayı parametreleyelim:

$$\int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) \exp(iaRe^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

$z = Re^{i\theta}$ için $y = R \sin \theta$ olduğundan (2) ile

$$|\exp(iaRe^{i\theta})| = e^{-aR \sin \theta}$$



Şekil 17.2: C_R üzerinde e^{iaz} çarpanının modülü $e^{-aR \sin \theta}$ dir; yayın uçlarında 1'e eşittir ama aR büyüdükçe yayın iç kısmında hızla sıfıra çöker. Bu yüzden eğrinin altındaki alan $\pi/(aR)$ ile sınırlıdır ve yay integrallerinde ML kestirimindeki R çarpanı yok olur — Jordan lemmasının kazancı budur.

Modül alınıp $|f(Re^{i\theta})| \leq M_R$ kullanılırsa

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq M_R R \int_0^\pi e^{-aR \sin \theta} d\theta$$

Son integrale Jordan eşitsizliği (6) uygulanır (R yerine aR ile):

$$\left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| < M_R R \cdot \frac{\pi}{aR} = \frac{M_R \pi}{a}$$

$M_R \rightarrow 0$ olduğundan sağ taraf sıfıra gider.

■

i Kazanılan nedir?

Ham ML kestirimi $M_R \pi R$ verir; Jordan lemması ise $\frac{M_R \pi}{a}$ verir — arada R çarpanı kadar fark vardır. Bu sayede, payda derecesi payınkinden yalnızca bir fazla olan integraller bile (ör. $\frac{z}{z^2+2z+2}$) sorunsuz işlenir.

17.4 Çözümlü Örnek: Jordan Lemmasıyla

Örnek 17.2 ($x \sin x$ İntegrali).

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx$$

esas değerini bulunuz.

Çözüm.

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2} = \frac{z}{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)}, \quad z_1 = -1 + i$$

yazalım. Üst yarı düzlemde kalan tek tekil nokta z_1 'dir ve $f(z)e^{iz}$ için basit kutuptur; **rezidü formülüyle**

$$B_1 = \frac{z_1 e^{iz_1}}{z_1 - \bar{z}_1}$$

$R > \sqrt{2}$ iken yarım dairesel bölgenin sınırında rezidü teoremi:

$$\int_{-R}^R \frac{x e^{ix}}{x^2 + 2x + 2} dx = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz$$

Sanal kısımlar alınırsa

$$\int_{-R}^R \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx = \text{Im} (2\pi i B_1) - \text{Im} \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz \quad (8)$$

Yay integrali – ML yetmez. C_R üzerinde

$$| f(z) | \leq M_R = \frac{R}{(R - \sqrt{2})^2}$$

olur ve $| e^{iz} | = e^{-y} \leq 1$ 'dir. Ham ML kestirimi

$$M_R \pi R = \frac{\pi R^2}{(R - \sqrt{2})^2} = \frac{\pi}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R}\right)^2}$$

verir; bu ifade $R \rightarrow \infty$ iken **π 'ye gider, sıfıra değil.**

Jordan lemması devreye giriyor. Buna karşılık

$$M_R = \frac{R}{(R - \sqrt{2})^2} = \frac{\frac{1}{R}}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{R}\right)^2} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

olduğundan **Teorem 17.2** koşulları sağlanır ve

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iz} dz = 0$$

Sonuç. $z_1 = -1 + i$ için $z_1 - \bar{z}_1 = 2i$ ve $e^{iz_1} = e^{i(-1+i)} = e^{-1} e^{-i}$ olduğundan

$$2\pi i B_1 = 2\pi i \frac{(-1 + i) e^{-1} (\cos 1 - i \sin 1)}{2i} = \frac{\pi}{e} (-1 + i) (\cos 1 - i \sin 1)$$

Sanal kısım alınırsa:

$$\text{Im} (2\pi i B_1) = \frac{\pi}{e} (\sin 1 + \cos 1)$$

(8)'de $R \rightarrow \infty$ limitiyle

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{\pi}{e} (\sin 1 + \cos 1)$$

■

17.5 Alıştırma

Alıştırma 17.1 (Fourier İntegrali Alıştırmaları). Aşağıdaki integralleri e^{iaz} yöntemiyle hesaplayınız.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$

b) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx \quad (a > 0, b > 0)$

c) P.V. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin 2x}{x^2+3} dx$

Çözüm.

Üç şıkta da yöntem aynıdır: $\cos ax$ ya da $\sin ax$ yerine e^{iaz} ile çalışılır, üst yarı düzlemdeki rezidüler toplanır ve sonunda reel ya da sanal kısım alınır. $a > 0$ olduğu sürece $|e^{iaz}| = e^{-ay} \leq 1$ olduğundan büyük yarım çemberin katkısı sıfıra gider.

a) $\frac{e^{iz}}{z^2+1}$ fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki tekil noktası $z = i$ 'dir:

$$\text{Rez}_{z=i} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \frac{e^{iz}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

Buradan

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

Sol tarafın reel kısmı aradığımız integraldir; sonuç zaten reel çıktı:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}$$

b) Aynı hesabı $\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}$ ile yapalım; üst yarı düzlemdeki kutup $z = ib$ 'dir:

$$\text{Rez}_{z=ib} = \frac{e^{iaz}}{2z} \Big|_{z=ib} = \frac{e^{-ab}}{2ib}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iax}}{x^2+b^2} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ab}}{2ib} = \frac{\pi}{b} e^{-ab}$$

Reel kısmı alıp integrandın çift olmasını kullanalım:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+b^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{b} e^{-ab} = \frac{\pi}{2b} e^{-ab}$$

c) Bu kez sin görüldüğü için **sanal** kısım alınacaktır. $\frac{ze^{i2z}}{z^2+3}$ fonksiyonunun üst yarı düzlemdeki kutbu $z = i\sqrt{3}$ 'tür:

$$\text{Rez}_{z=i\sqrt{3}} \frac{ze^{i2z}}{z^2+3} = \frac{ze^{i2z}}{2z} \Big|_{z=i\sqrt{3}} = \frac{e^{i2(i\sqrt{3})}}{2} = \frac{e^{-2\sqrt{3}}}{2}$$

Paydanın derecesi payinkinden yalnızca bir fazla olduğundan ham ML kestirimi yetmez, yarım çemberin sönmesi için Jordan lemması gerekir; e^{i2z} çarpanı sayesinde lemma uygulanabilir ve katkı sıfıra gider:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x e^{i2x}}{x^2+3} dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{-2\sqrt{3}}}{2} = i\pi e^{-2\sqrt{3}}$$

Sanal kısmı alalım:

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin 2x}{x^2+3} dx = \pi e^{-2\sqrt{3}}$$

■

Şimdiye kadar tekil noktalar hep reel eksenin **dışındaydı**. Peki integrandın tekil noktası tam da integrasyon yolunun üzerindeyse? Yolu oradan küçük bir yayla dolaşmak gerekir: [girintili yollar](#).

18. Girintili Yollar

Şimdiye kadar integrandın tekil noktaları reel eksenin dışındaydı. Peki tekil nokta tam da integrasyon yolunun üzerindeyse? Çözüm, yolu o noktanın çevresinden küçük bir yayla dolaşmaktır – **girintili yol**. Bu bölümde tekniğin kuramsal temelini kurup iki klasik integrali hesaplıyoruz.

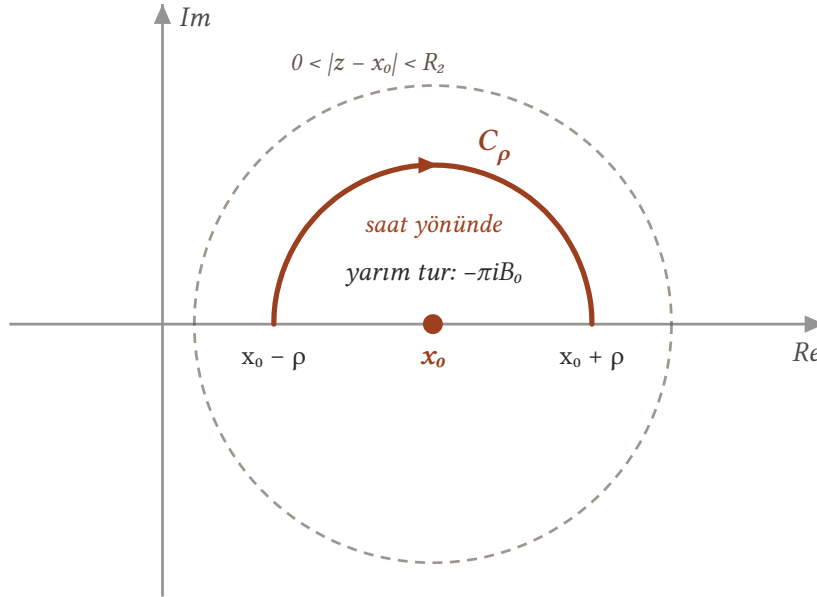
18.1 Yarım Çember Limit Teoremi

Teorem 18.1 (Küçük Yay Üzerinde Limit). Aşağıdaki koşullar sağlansın:

- a) f fonksiyonunun reel eksen üzerindeki bir $z = x_0$ noktasında **basit kutbu** vardır; delinmiş diskte $0 < |z - x_0| < R_2$ geçerli bir Laurent temsili ve B_0 rezidüsü mevcuttur;
- b) C_ρ , $|z - x_0| = \rho$ çemberinin üst yarısıdır ($\rho < R_2$) ve **saat yönünde** dolaşılmaktadır.

O zaman

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = -B_0 \pi i \quad (1)$$



Şekil 18.1: Reel eksen üzerindeki basit kutup x_0 , yarıçapı ρ olan üst yarım çember C_ρ ile **saat yönünde** dolaşılır (kesikli çember, Laurent temsili geçerli olduğu delinmiş disk). Tam tur $2\pi B_0$ verirken yarım tur bunun yarısını verir; yön saat yönünde olduğundan işaret eksidir: $\rho \rightarrow 0$ iken integral $-\pi B_0$ 'a gider.

İspat.

Laurent temsili yazalım:

$$f(z) = g(z) + \frac{B_0}{z - x_0} \quad (0 < |z - x_0| < R_2), \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n$$

Burada $g, |z - x_0| < R_2$ diskinde yakınsayan bir kuvvet serisinin toplamı olduğundan orada *analitik ve sürekli*dir. Böylece

$$\int_{C_\rho} f(z) dz = \int_{C_\rho} g(z) dz + B_0 \int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} \quad (2)$$

Birinci integral. $\rho < \rho_0 < R_2$ olacak biçimde bir ρ_0 seçilirse, g kapalı $|z - x_0| \leq \rho_0$ diskinde *sınırlı*dir: bir M sabiti için $|g(z)| \leq M$. C_ρ yayının uzunluğu $\pi\rho$ olduğundan *ML eşitsizliği*yle

$$\left| \int_{C_\rho} g(z) dz \right| \leq M\pi\rho \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} g(z) dz = 0 \quad (3)$$

İkinci integral. $-C_\rho$ yayı (saat yönünün tersi) $z = x_0 + \rho e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) parametrisasyonuna sahiptir:

$$\int_{C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = - \int_{-C_\rho} \frac{dz}{z - x_0} = - \int_0^\pi \frac{1}{\rho e^{i\theta}} \rho i e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi d\theta = -i\pi \quad (4)$$

ρ 'dan bağımsız çıktı. (2)'de $\rho \rightarrow 0$ limiti alınıp (3) ve (4) kullanılırsa (1) elde edilir.

💡 Yarım tur, yarım rezidü

Teoremin anlamı sezgiseldir: tam bir tur $2\pi i B_0$ verirken, **yarım tur** onun yarısını verir; saat yönünde dolaşıldığı için de işaret ters döner: $-\pi i B_0$. Reel eksen üzerindeki basit kutuplar, integrale “yarım rezidü” katkısı yapar.

18.2 $\sin x / x$ İntegrali

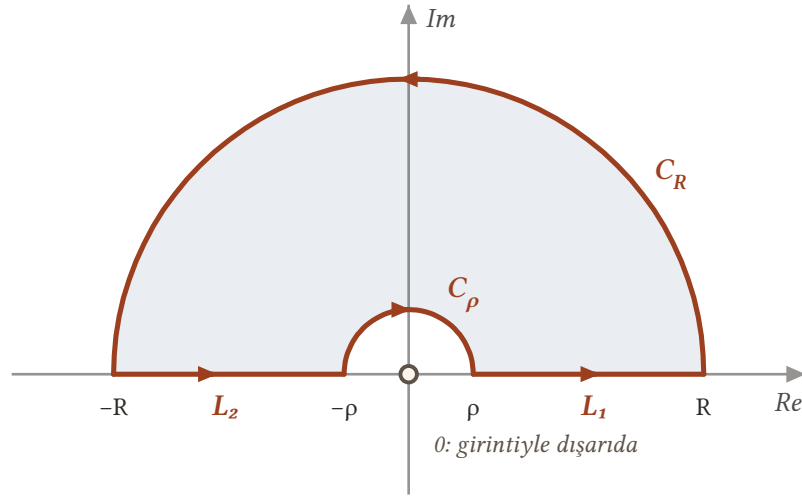
Örnek 18.1 (Dirichlet İntegrali).

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$\frac{e^{iz}}{z}$ fonksiyonunu, aşağıdaki **girintili yol** üzerinde integralleyeceğiz: $\rho < R$ olmak üzere reel eksenin $L_1: \rho \leq x \leq R$ ve $L_2: -R \leq x \leq -\rho$ parçaları, dış yarım çember C_R ve orijinin çevresini dolaşan küçük yarım çember C_ρ .



Şekil 18.2: Girintili yol dört parçadan oluşur ve pozitif yönde dolaşılır: L_1 (ρ 'dan R 'ye), büyük yarım çember C_R (saat yönünün tersine), L_2 ($-R$ 'den $-\rho$ 'ya) ve orijini üstten dolaşan küçük yarım çember C_ρ ($-\rho$ 'dan ρ 'ya, yani **saat yönünde**). Orijin yolun dışında kaldığından taralı bölgede integrand analitiktir ve Cauchy-Goursat teoremi uygulanır.

Bu kapalı yolun **içinde ve üzerinde** integrand analitiktir (orijin girintiyle dışarıda bırakıldı); Cauchy-Goursat teoremi

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

verir; yani

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = - \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (5)$$

Sol taraf. L_1 ve L_2 parçaları sırasıyla $z = r$ ve $z = -r$ ($\rho \leq r \leq R$) ile parametrelendir. $z = -r$ parametrisasyonu L_2 'yi ters yönde ($-\rho$ 'dan $-R$ 'ye) katettiğinden $\int_{L_2} = - \int_{-L_2}$ yazılır:

$$\int_{L_1} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{-L_2} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\rho}^R \frac{e^{ir}}{r} dr - \int_{\rho}^R \frac{e^{-ir}}{r} dr = 2i \int_{\rho}^R \frac{\sin r}{r} dr$$

Böylece (5) şu hâle gelir:

$$2i \int_{\rho}^R \frac{\sin r}{r} dr = - \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \quad (6)$$

Küçük yay. Laurent açılımı

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \dots \right] = \frac{1}{z} + \frac{i}{1!} + \frac{i^2}{2!} z + \dots \quad (0 < |z| < \infty)$$

orijinin basit kutup ve rezidünün $B_0 = 1$ olduğunu gösterir. **Teorem 18.1** gereği

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\pi i$$

Büyük yay. C_R üzerinde $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{R} = M_R \rightarrow 0$ olduğundan **Jordan lemması** uygulanır:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Sonuç. (6) eşitliğinde önce $\rho \rightarrow 0$, sonra $R \rightarrow \infty$ limitleri alınırsa

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin r}{r} dr = \pi i \implies \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

■

18.3 Dallanma Noktası Çevresinde Girinti

Girintinin nedeni her zaman bir kutup olmak zorunda değildir; **dallanma noktası** da yolu kesebilir. Teknik ayrıdır.

Örnek 18.2 (Logaritmali İntegral).

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi}{32} (\ln 2 - 1)$$

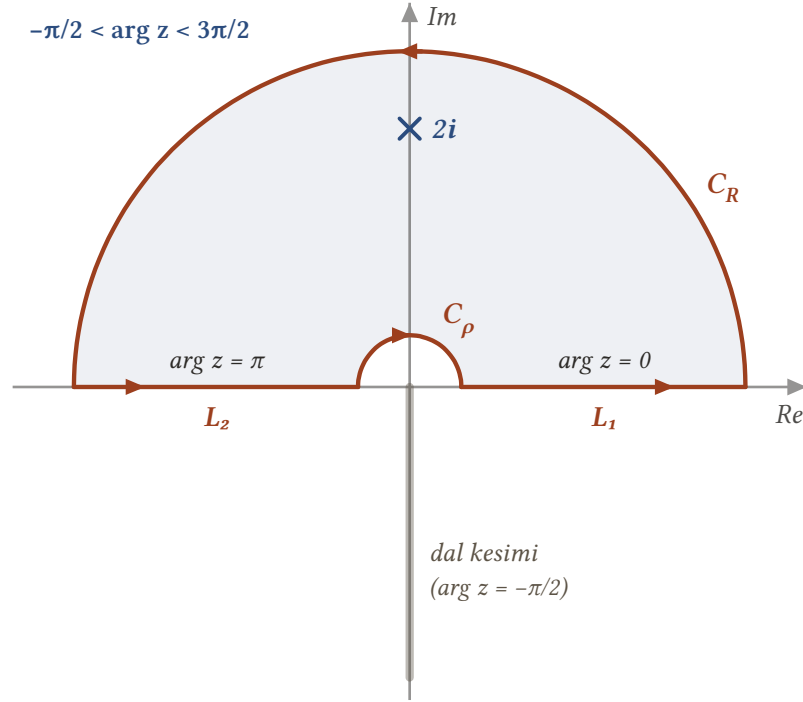
olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Çok değerli $\frac{\log z}{(z^2 + 4)^2}$ fonksiyonunun

$$f(z) = \frac{\log z}{(z^2 + 4)^2} \quad \left(|z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right)$$

dalını alalım. **Dal kesimi** orijin ve negatif sanal eksenidir; dolayısıyla f , üst yarı düzlemde $z = 2i$ dışında analitiktir. Önceki örnekteki girintili yolu, $\rho < 2 < R$ koşuluyla kullanırız; böylece $z = 2i$ tekilliği kapalı yolun içindedir.



Şekil 18.3: $\log z$ için $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$ dalı seçilince dal kesimi negatif sanal eksene, yani yolun uzağına düşer; kesim yola yalnızca orijinde yaklaşır, orijin ise girintiyle dışarıda bırakılmıştır. Bu dalda L_1 üzerinde $\arg z = 0$, L_2 üzerinde $\arg z = \pi$ olur — negatif eksenindeki $\ln r + i\pi$ terimi buradan gelir. $\rho < 2 < R$ koşuluyla tek kutup $2i$ yolun içindedir.

Cauchy rezidü teoremi:

$$\int_{L_1} f dz + \int_{L_2} f dz = 2\pi i \text{Rez}_{z=2i} f(z) - \int_{C_\rho} f dz - \int_{C_R} f dz \quad (7)$$

Doğru parçaları. $z = re^{i0} = r$ ve $z = re^{i\pi} = -r$ ($\rho \leq r \leq R$) parametrisasyonlarıyla (log dalında $\arg z = 0$ ve $\arg z = \pi$):

$$\int_{L_1} f dz + \int_{L_2} f dz = \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr + \int_{\rho}^R \frac{\ln r + i\pi}{(r^2 + 4)^2} dr$$

Rezidü. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-2i)^2}$, $\varphi(z) = \frac{\log z}{(z+2i)^2}$ ile $z = 2i$ ikinci mertebeden kutuptur ve rezidü $\varphi'(2i)$ 'dir:

$$\varphi'(z) = \frac{\frac{1}{z}(z+2i)^2 - 2(z+2i)\log z}{(z+2i)^4} = \frac{\frac{z+2i}{z} - 2\log z}{(z+2i)^3}$$

$z = 2i$ için $\log(2i) = \ln 2 + i\frac{\pi}{2}$ ve $(4i)^3 = -64i$ olduğundan

$$\varphi'(2i) = \frac{2 - 2\ln 2 - i\pi}{-64i} = \frac{\pi}{64} + i \frac{1 - \ln 2}{32}$$

Böylece $2\pi i \varphi'(2i) = \frac{\pi}{16} (\ln 2 - 1) + i \frac{\pi^2}{32}$ olur ve (7) eşitliği

$$2 \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr + i\pi \int_{\rho}^R \frac{dr}{(r^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{16} (\ln 2 - 1) + i \frac{\pi^2}{32} - \int_{C_{\rho}} f dz - \int_{C_R} f dz \quad (8)$$

hâline gelir. **Reel kısımlar** eşitlenirse

$$2 \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{(r^2 + 4)^2} dr = \frac{\pi}{16} (\ln 2 - 1) - \operatorname{Re} \int_{C_{\rho}} f dz - \operatorname{Re} \int_{C_R} f dz \quad (9)$$

Yay integralleri. $z = \rho e^{i\theta}$ üzerinde ($\rho < 1$)

$$|\log z| = |\ln \rho + i\theta| \leq |\ln \rho| + \pi = -\ln \rho + \pi, \quad |z^2 + 4| \geq 4 - \rho^2$$

olduğundan

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_{\rho}} f dz \right| \leq \frac{-\ln \rho + \pi}{(4 - \rho^2)^2} \pi \rho = \pi \frac{\pi \rho - \rho \ln \rho}{(4 - \rho^2)^2}$$

L'Hôpital kuralıyla $\rho \rightarrow 0$ iken $\rho \ln \rho \rightarrow 0$; sınır sıfıra gider. Benzer biçimde C_R üzerinde

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_R} f dz \right| \leq \frac{\ln R + \pi}{(R^2 - 4)^2} \pi R = \pi \frac{\frac{\pi}{R} + \frac{\ln R}{R}}{(R - \frac{4}{R})^2}$$

ve $R \rightarrow \infty$ iken $\frac{\ln R}{R} \rightarrow 0$ olduğundan bu da sıfıra gider.

Sonuç. (9)'da $\rho \rightarrow 0$ ve $R \rightarrow \infty$ alınırsa

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi}{16} (\ln 2 - 1) \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{\pi}{32} (\ln 2 - 1)$$

İkinci kazanç. (8) eşitliğinde reel yerine **sanal** kısımlar eşitlenirse, aynı hesaptan bedava bir formül daha çıkar:

$$\pi \int_{\rho}^R \frac{dr}{(r^2 + 4)^2} = \frac{\pi^2}{32} - \operatorname{Im} \int_{C_{\rho}} f dz - \operatorname{Im} \int_{C_R} f dz$$

Limitler alındığında

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{32}$$

■

18.4 Alıştırma

Alıştırma 18.1 (Girintili Yol Alıştırmaları).

- P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$ esas değerini, $z = \pm 1$ noktalarını girintiyile dolaşarak hesaplayınız.
- $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = 0$ olduğunu, önceki örnekteki yolla gösteriniz.
- $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ eşitliğini, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ özdeşliğiyle **Örnek 18.1** sonucuna indirgeyiniz.

Çözüm.

a) İntegrandın tekil noktaları $z = 1$ ve $z = -1$ 'dir; ikisi de integrasyon yolunun **üzerindedir**, bu yüzden esas değer aranıyor. Yolu iki küçük yarım çemberle yukarıdan dolaşalım ve büyük bir C_R yarım çemberiyle kapatalım.

Kapalı yolun içinde hiçbir tekil nokta kalmadığından Cauchy-Goursat teoremi toplamın sıfır olduğunu söyler:

$$\int_{\text{doğru parçaları}} + \int_{C_{\rho_1}} + \int_{C_{\rho_2}} + \int_{C_R} = 0$$

Büyük yarım çemberin katkısı sıfıra gider: integrand $1/R^2$ mertebesinde, uzunluk πR mertebesinde. Küçük yarım çemberler için girinti lemması, basit kutuplarda

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = -B \pi i$$

verir (B , o noktadaki rezidü). Rezidüleri hesaplayalım:

$$B_1 = \text{Rez}_{z=1} \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{z+1} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}, \quad B_{-1} = \frac{1}{z-1} \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{2}$$

$\rho \rightarrow 0$ ve $R \rightarrow \infty$ limitinde

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} - \pi i B_{-1} - \pi i B_1 = 0$$

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 1} = \pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 0$$

Sonuç, basit kesirlerden de görülebilir: $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$ ifadesi $x \mapsto -x$ altında işaret değiştirir; esas değer, tek fonksiyonun simetrik limitidir ve sıfırdır.

b) Logaritmali integral örneğindeki yolu ve aynı log dalını aynen kullanalım; bu kez

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2 + 1}, \quad \log z = \ln r + i\theta \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

Yol, reel eksenin iki parçası ($-R$ 'den $-\rho$ 'ya ve ρ 'dan R 'ye), orijini dolaşan C_ρ ve büyük C_R yarım çemberlerinden oluşur. İçeride kalan tek tekil nokta $z = i$ 'dir:

$$\text{Rez}_{z=i} \frac{\log z}{z^2 + 1} = \frac{\log z}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{\ln 1 + i\pi/2}{2i} = \frac{\pi}{4}$$

Negatif eksen parçasında $z = re^{i\pi}$, yani $\log z = \ln r + i\pi$ ve $dz = -dr$ 'dir; bu parça yön düzeltmesiyle $\int_\rho^R \frac{\ln r + i\pi}{r^2 + 1} dr$ katkısını verir. İki doğru parçası toplanınca

$$2 \int_\rho^R \frac{\ln r}{r^2 + 1} dr + i\pi \int_\rho^R \frac{dr}{r^2 + 1} = 2\pi i \cdot \frac{\pi}{4} - \int_{C_\rho} f dz - \int_{C_R} f dz$$

Yay katkıları sıfıra gider: C_ρ üzerinde $|f| \lesssim |\ln \rho| + \pi$ ve uzunluk $\pi \rho$ olduğundan $\rho \ln \rho \rightarrow 0$; C_R üzerinde $|f| \lesssim (\ln R + \pi)/R^2$ ve uzunluk πR olduğundan $(\ln R)/R \rightarrow 0$.

Limite sağ taraf $\frac{i\pi^2}{2}$ 'dir. Sol taraftaki ikinci integral $\int_0^\infty \frac{dr}{r^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$ olduğundan sanal kısımlar

$$i\pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{i\pi^2}{2}$$

eşitliğiyle birbirini tam olarak karşılar. Geriye reel kısım kalır:

$$2 \int_0^\infty \frac{\ln r}{r^2 + 1} dr = 0 \implies \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = 0$$

Sonuç sezgiseldir: $x \mapsto 1/x$ değişimi integrali kendisinin eksilisine çevirir; $(0, 1)$ aralığındaki negatif katkı, $(1, \infty)$ aralığındaki pozitif katkıyı tam olarak siler.

c) Özdeşliği yerine koyalım:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} dx$$

Kısmi integrasyon uygulayalım: $u = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ve $dv = \frac{dx}{x^2}$ alırsak $du = \sin 2x dx$ ve $v = -\frac{1}{x}$ 'tir:

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos 2x}{2x^2} dx = \left[-\frac{1 - \cos 2x}{2x} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x} dx$$

Sınır terimi iki uçta da kaybolur: $x \rightarrow \infty$ iken pay sınırlı, payda sonsuza gider; $x \rightarrow 0$ iken $1 - \cos 2x \approx 2x^2$ olduğundan ifade $\approx x \rightarrow 0$ 'dır.

Kalan integralde $u = 2x$ değişimi yapalım:

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$$

Bu, [Örnek 18.1](#) örneğinde hesaplanan Dirichlet integralidir ve değeri $\frac{\pi}{2}$ 'dir. Sonuç:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

■

Dal kesimi bu bölümde yolun dışında kaldı; yola yalnızca, girintiyle dışarıda bıraktığımız orijinde yaklaştı. Bir sonraki bölümde kesim boyunca uzanan yollarla çalışacağız: [dal kesimi boyunca integrasyon](#).

19. Dal Kesimi Boyunca İntegrasyon

Bazı integrallerde yol, integrandın **dal kesimi boyunca** uzanır. İlk bakışta bu bir engeldir; oysa asıl fırsat buradadır: kesimin iki yakasında fonksiyon farklı değerler aldığından, aynı reel integral iki farklı katsayıyla çıkar ve denklem çözülerek integral elde edilir.

19.1 Yöntemin Kurulumu

$0 < a < 1$ ve $x > 0$ olmak üzere

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx \quad (1)$$

integralini hesaplayacağız. Burada x^{-a} , esas değeri gösterir: $x^{-a} = \exp(-a \ln x)$. Bu integral, gama fonksiyonu kuramında merkezî bir rol oynar.

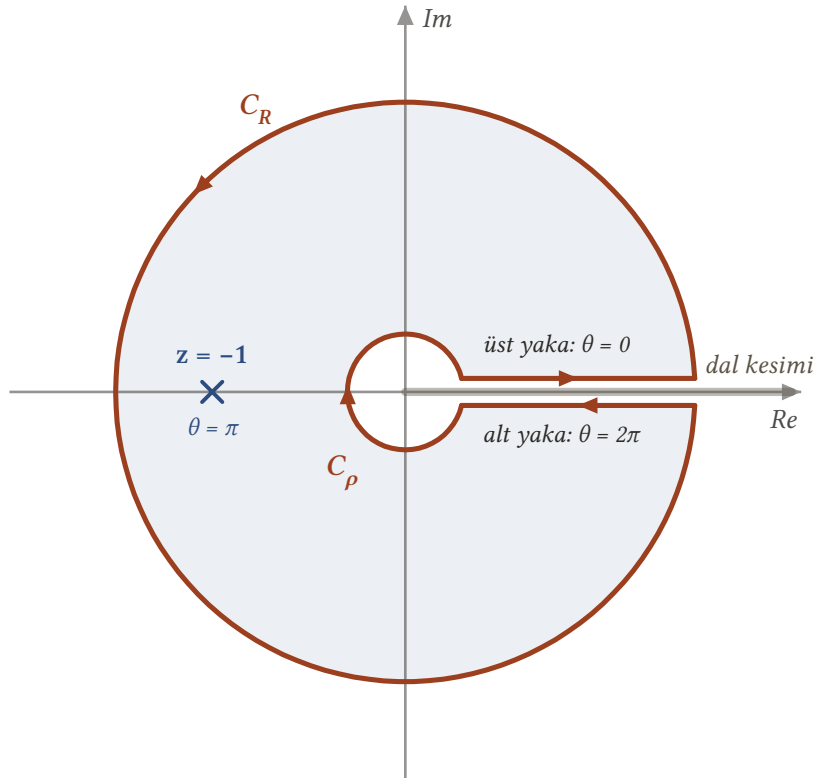
i İki yönden birden has olmayan

(1) integrali yalnızca üst sınırı yüzünden değil, integrandın $x = 0$ 'da sonsuz süreksizliğe sahip olması nedeniyle de has olmayandır. $0 < a < 1$ iken integrand, $x \rightarrow 0$ civarında x^{-a} gibi, $x \rightarrow \infty$ iken x^{-a-1} gibi davranır; her iki uçta da yakınsaklık sağlanır. Yakınsaklığı ayrıca kanıtlamaya gerek yoktur — hesabın kendisi bunu üretecektir.

Çok değerli $\frac{z^{-a}}{z+1}$ fonksiyonunun, dal kesimi $\arg z = 0$ olan dalını alalım:

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi) \quad (2)$$

İntegrasyon yolu bir **kesik halkadır**: $\rho < 1 < R$ olmak üzere, kesimin üst yakası boyunca ρ 'dan R 'ye gidilir, dış çember C_R üzerinde tam tur atılır, kesimin alt yakası boyunca R 'den ρ 'ya dönülür ve iç çember C_ρ üzerinden başlangıca varılır. Tek tekil nokta $z = -1$ bu yolun içindedir.



Şekil 19.1: Kesik halka: dal kesimi pozitif reel eksendir. Yol, kesimin üst yakasında ρ 'dan R 'ye gider, C_R üzerinde saat yönünün tersine tam tur atar, alt yakada geri döner ve C_ρ üzerinde saat yönünde başlangıca varır. Üst yakada $\theta = 0$ ile $z^{-a} = r^{-a}$, alt yakada $\theta = 2\pi$ ile $z^{-a} = r^{-a}e^{-2a\pi i}$ 'dir; tek kutup $z = -1$ halkanın içindedir.

19.2 İki Yakanın Farkı

$z = re^{i\theta}$ için

$$f(z) = \frac{\exp(-a \log z)}{z + 1} = \frac{\exp[-a(\ln r + i\theta)]}{re^{i\theta} + 1}$$

Üst yaka ($\theta = 0$):

$$f(z) = \frac{\exp[-a \ln r]}{r + 1} = \frac{r^{-a}}{r + 1}$$

Alt yaka ($\theta = 2\pi$):

$$f(z) = \frac{\exp[-a(\ln r + i2\pi)]}{r + 1} = \frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r + 1}$$

Aynı r değeri için iki yakadaki değerler $e^{-i2a\pi}$ çarpanı kadar farklıdır — yöntemin çalışmasını sağlayan tam olarak budur.

19.3 Rezidü Teoreminin Uygulanması

Yol boyunca [Cauchy rezidü teoremi](#) uygulanırsa (alt yaka ters yönde katedildiğinden işaret eksidir):

$$\int_{\rho}^R \frac{r^{-a}}{r + 1} dr + \int_{C_R} f(z) dz - \int_{\rho}^R \frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r + 1} dr + \int_{C_\rho} f(z) dz = 2\pi i \text{Rez}_{z=-1} f(z) \quad (3)$$

Rezidü. $f(z) = \frac{\varphi(z)}{z+1}$ yazalım; $\varphi(z) = z^{-a} = \exp[-a(\ln r + i\theta)]$ fonksiyonu $z = -1$ noktasında ($r = 1, \theta = \pi$) analitiktir ve

$$\varphi(-1) = \exp[-a(\ln 1 + i\pi)] = e^{-ia\pi} \neq 0$$

Demek ki $z = -1$ bir **basit kutuptur** ve

$$\text{Rez}_{z=-1} f(z) = e^{-ia\pi}$$

(3) eşitliği düzenlenirse:

$$(1 - e^{-i2a\pi}) \int_{\rho}^R \frac{r^{-a}}{r+1} dr = 2\pi i e^{-ia\pi} - \int_{C_{\rho}} f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz \quad (4)$$

19.4 Çemberlerin Katkısı Sönüyor

(2) tanımından, C_{ρ} üzerinde $|z^{-a}| = \rho^{-a}$ ve $|z+1| \geq 1 - \rho$ olduğundan **ML eşitsizliğiyle**

$$\left| \int_{C_{\rho}} f(z) dz \right| \leq \frac{\rho^{-a}}{1-\rho} 2\pi\rho = \frac{2\pi}{1-\rho} \rho^{1-a}$$

$0 < a < 1$ olduğundan $1-a > 0$ 'dır ve $\rho \rightarrow 0$ iken $\rho^{1-a} \rightarrow 0$; sınır sıfıra gider. Benzer biçimde C_R üzerinde $|z^{-a}| = R^{-a}$ ve $|z+1| \geq R-1$ ile

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \frac{R^{-a}}{R-1} 2\pi R = \frac{2\pi R}{R-1} \cdot \frac{1}{R^a}$$

$R \rightarrow \infty$ iken ilk çarpan 2π 'ye, ikincisi sıfıra gider; sınır yine sıfırdır.

19.5 Sonuç: $\pi / \sin a\pi$

(4) eşitliğinde önce $\rho \rightarrow 0$, sonra $R \rightarrow \infty$ alınırsa

$$(1 - e^{-i2a\pi}) \int_0^{\infty} \frac{r^{-a}}{r+1} dr = 2\pi i e^{-ia\pi}$$

Sol taraftaki çarpanı sadeleştirmek için pay ve paydayı $e^{ia\pi}$ ile çarpalım:

$$\int_0^{\infty} \frac{r^{-a}}{r+1} dr = 2\pi i \frac{e^{-ia\pi}}{1 - e^{-i2a\pi}} \cdot \frac{e^{ia\pi}}{e^{ia\pi}} = \pi \frac{2i}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}$$

Payda **sinüsün üstel tanımıdır**: $e^{ia\pi} - e^{-ia\pi} = 2i \sin a\pi$. Böylece

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1) \quad (5)$$

🔍 Formülün iki denetimi

$a = \frac{1}{2}$ alınırsa sağ taraf $\frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi$ verir. Sol taraf ise $x = t^2$ değişimiyle

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{-1/2}}{x+1} dx = \int_0^{\infty} \frac{2 dt}{t^2+1} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

— uyuşuyor. Ayrıca (5) formülü $a \rightarrow 0^+$ ve $a \rightarrow 1^-$ uçlarında sonsuza gider; bu da beklenendir, çünkü o uçlarda integrand sırasıyla $\frac{1}{x+1}$ ve $\frac{1}{x(x+1)}$ gibi davranıp integrali iraksatır.

19.6 Alıştırma

Alıştırma 19.1 (Dal Kesimi Alıştırmaları).

a) (5) formülünde $a = \frac{1}{3}$ olarak $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(x+1)}$ integralini hesaplayınız.

b) Aynı kesik halka yoluyla

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+b} dx = \frac{\pi b^{-a}}{\sin a\pi} \quad (0 < a < 1, b > 0)$$

formülünü türetiniz.

c) $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx$ integralini, $z^{1/2}$ dalı ve aynı yol ile hesaplayınız.

Çözüm.

a) (5) formülünde $a = \frac{1}{3}$ yazmak yeterlidir ($0 < a < 1$ koşulu sağlanıyor):

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(x+1)} = \int_0^\infty \frac{x^{-1/3}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^{1/3}(x+1)} = \frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

b) Aynı kesik halka yolunu $f(z) = \frac{z^{-a}}{z+b}$ için kuralım; dal yine $0 < \theta < 2\pi$ olsun. Kesimin üstündeki kenarda $z^{-a} = r^{-a}$, altındaki kenarda $\theta = 2\pi$ olduğundan $z^{-a} = r^{-a}e^{-i2a\pi}$ 'dir. Tek tekil nokta $z = -b$ basit kutuptur ve $\arg(-b) = \pi$ seçilir:

$$\text{Rez}_{z=-b} \frac{z^{-a}}{z+b} = (-b)^{-a} = b^{-a}e^{-ia\pi}$$

(3)-(4) adımlarının aynısı, yay katkıları sıfıra giderken

$$(1 - e^{-i2a\pi}) \int_0^\infty \frac{r^{-a}}{r+b} dr = 2\pi i b^{-a} e^{-ia\pi}$$

verir. Sol taraftaki çarpanı $e^{-ia\pi}$ parantezine alalım:

$$1 - e^{-i2a\pi} = e^{-ia\pi} (e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}) = e^{-ia\pi} \cdot 2i \sin a\pi$$

Yerine koyup sadeleştirelim:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+b} dx = \frac{2\pi i b^{-a} e^{-ia\pi}}{e^{-ia\pi} 2i \sin a\pi} = \frac{\pi b^{-a}}{\sin a\pi}$$

Aynı sonuç (5) formülünde $x = bt$ değişimiyle de bulunur: $dx = b dt$ ve $x+b = b(t+1)$ olduğundan

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+b} dx = b^{-a} \int_0^\infty \frac{t^{-a}}{t+1} dt = \frac{\pi b^{-a}}{\sin a\pi}$$

c) İntegrali önce (5) formülüne indirgeyelim; $u = x^2$ değişimi ile $x = u^{1/2}$ ve $dx = \frac{1}{2}u^{-1/2}du$:

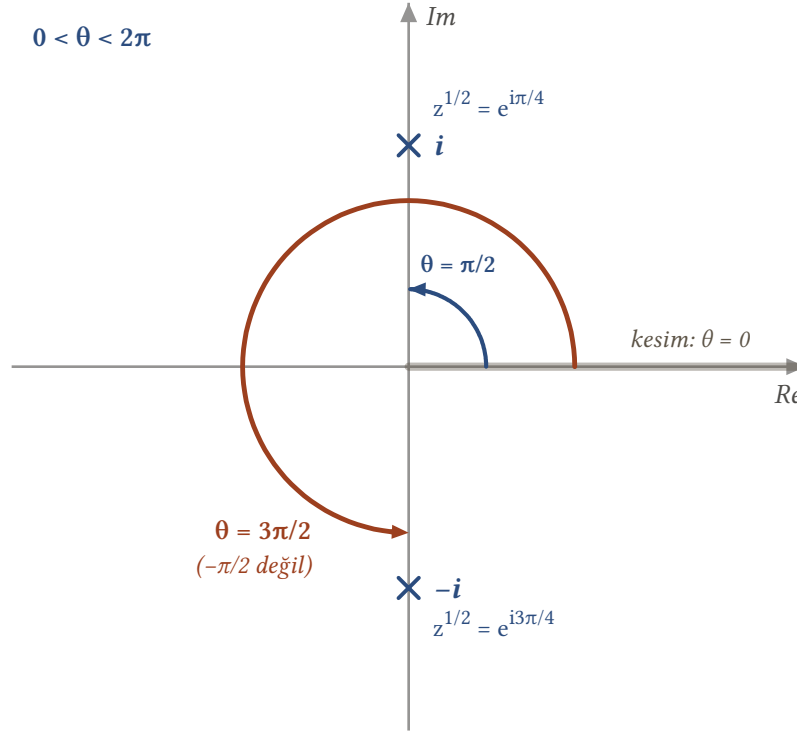
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \int_0^\infty \frac{u^{1/4}}{u+1} \cdot \frac{u^{-1/2}}{2} du = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{u^{-1/4}}{u+1} du$$

(5) formülü $a = \frac{1}{4}$ ile

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Doğrudan yol da aynı sonucu verir. $f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2+1}$ dalını $0 < \theta < 2\pi$ ile alalım; tekil noktalar $z = \pm i$ 'dir ve kesik halkanın içindedir. Basit kutuplarda rezidü $\frac{z^{1/2}}{2z}$ olduğundan

$$\text{Rez}_{z=i} = \frac{e^{i\pi/4}}{2i}, \quad \text{Rez}_{z=-i} = \frac{e^{i3\pi/4}}{-2i}$$



Şekil 19.2: $0 < \theta < 2\pi$ dalında açı, kesimden (pozitif reel eksen) başlayarak saat yönünün tersine ölçülür: i için $\theta = \pi/2$, $-i$ için $\theta = 3\pi/2$ — esas argüman $-\pi/2$ bu dalda geçerli değildir. Bu yüzden $-i$ noktasında $z^{1/2} = e^{i3\pi/4}$ alınır; $-\pi/2$ kullanılırsa rezidünün işareti yanlış çıkar.

(İkinci noktada $\arg(-i) = 3\pi/2$ seçilir, yani $z^{1/2} = e^{i3\pi/4}$.) Toplam

$$\frac{e^{i\pi/4} - e^{i3\pi/4}}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{2i}$$

Kesimin alt kenarında $z^{1/2} = -x^{1/2}$ olduğundan, yön farkıyla birlikte iki kenar **aynı** katkırı verir ve toplam integralin iki katı çıkar:

$$2 \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = 2\pi i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2i} = \pi\sqrt{2} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

■

Bu kısımdaki integraller hep sonsuz aralıklardaydı. Şimdi tamamen farklı bir aileye geçiyoruz: 0 ile 2π arasında, sinüs ve kosinüs içeren **belirli** integraller — [trigonometrik integraller](#).

20. Sinüs ve Kosinüs İçeren Belirli İntegraller

0 ile 2π arasında alınan

$$\int_0^{2\pi} F(\sin \theta, \cos \theta) d\theta \quad (1)$$

tipindeki belirli integraller, rezidü kuramının en zarif uygulamalarındandır. Fikir şudur: θ 'nın 0'dan 2π 'ye taraması, birim çember üzerinde tam bir tur demektir — yani integral aslında gizli bir **çevre integralidir**.

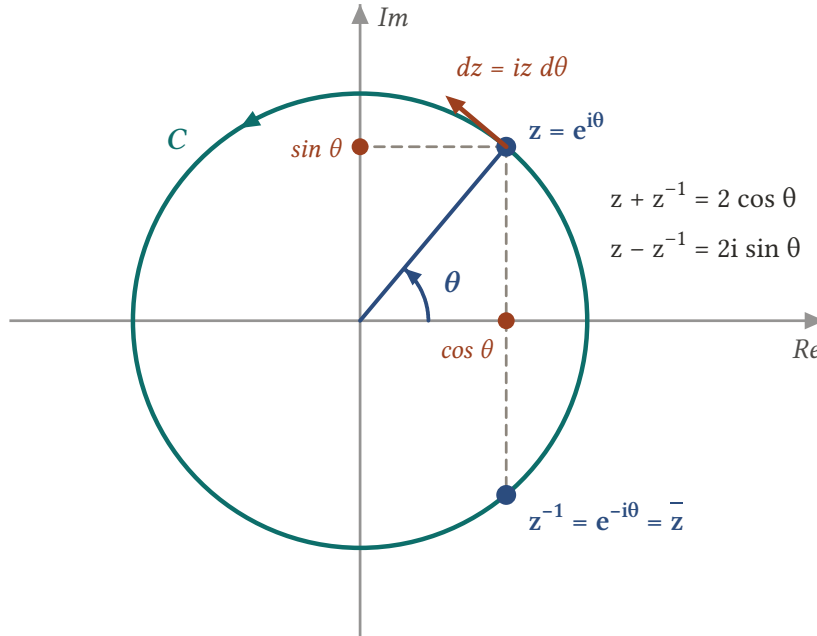
20.1 Dönüşüm

Birim çemberi

$$z = e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (2)$$

ile parametreleyelim. Türev formülüyle $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$ olur. Sinüs ve kosinüsün üstel tanımları birim çember üzerinde $e^{-i\theta} = z^{-1}$ ile şu hâle gelir:

$$\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz} \quad (3)$$



Şekil 20.1: Birim çember üzerinde $|z| = 1$ olduğundan $z^{-1} = \bar{z}$: z ile z^{-1} reel eksene göre simetriktir. Toplamları reel ve tam $2 \cos \theta$, farkları sanal ve $2i \sin \theta$ dir; (3) değişimleri bu geometrinin cebirsel yazımıdır. θ artarken z çember boyunca teğet yönde, iz hızıyla ilerler: $dz = iz d\theta$.

Bu değişimlerle (1) integrali, C pozitif yönlü birim çember olmak üzere

$$\int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right) \frac{dz}{iz} \quad (4)$$

çevre integraline dönüşür.

💡 Ne zaman işe yarar?

(4) integralindeki integrand z 'nin **rasyonel fonksiyonuna** indirgeniyorsa, paydanın sıfırları bulunup — hiçbir C üzerinde olmamak koşuluyla — **Cauchy rezidü teoremi** uygulanır. F rasyonel olduğunda bu daima gerçekleşir.

20.2 Çözümlü Örnek

Örnek 20.1 (Klasik Formül).

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \sin \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \quad (-1 < a < 1)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Formül $a = 0$ için apaçıktır ($2\pi = 2\pi$); $a \neq 0$ alalım.

(3) değişimleriyle integral

$$\int_C \frac{1}{1 + a \frac{z - z^{-1}}{2i}} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{2 dz}{2iz + a(z^2 - 1)} = \int_C \frac{2/a}{z^2 + \frac{2i}{a}z - 1} dz \quad (5)$$

hâline gelir.

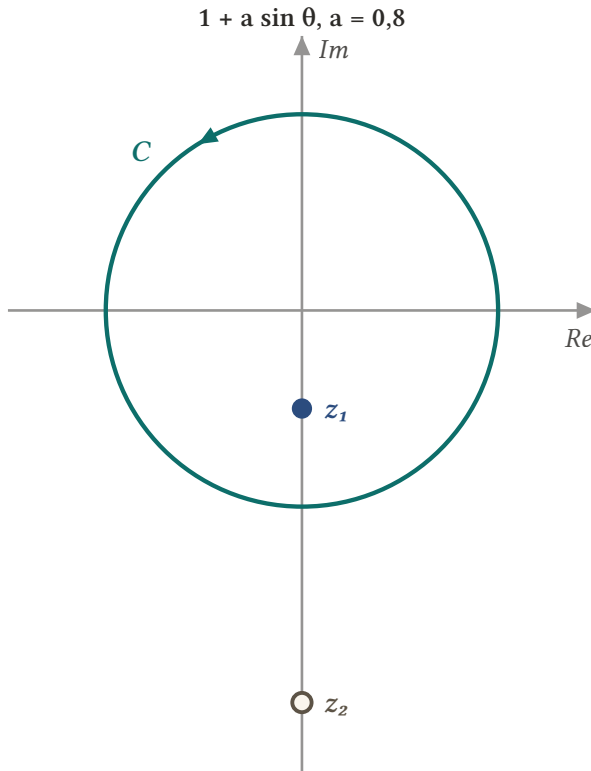
Paydanın sıfırları. İkinci derece formülüyle

$$z_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a} \right) i, \quad z_2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a} \right) i$$

İkisi de saf sanaldır. $z_1 z_2 = -1$ olduğundan $|z_1| |z_2| = 1$ 'dir; ayrıca

$$|z_2| = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{|a|} > 1$$

olduğundan zorunlu olarak $|z_1| < 1$ çıkar. Yani C üzerinde tekil nokta yoktur, çemberin içindeki tek tekil nokta z_1 'dir.



paydanın sıfırları ($a = 0,8$):

$$z_1 = -i/2, |z_1| = 1/2 < 1$$

birim çemberin içinde

$$z_2 = -2i, |z_2| = 2 > 1$$

birim çemberin dışında

$$z_1 z_2 = -1 \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = 1:$$

biri içerideyse öteki

zorunlu olarak dışarıdadır.

Şekil 20.2: $a = 0,8$ için paydanın sıfırları $z_1 = -i/2$ ve $z_2 = -2i$ 'dir. Çarpımları -1 olduğundan modülleri birbirinin tersidir: büyük olanı çemberin dışında kalır, küçük olanı içeride. Rezidü teoremine yalnızca içerideki z_1 girer; aynı akıl yürütme (b) alıştırmadaki $z_+ z_- = 1$ için de geçerlidir.

Rezidü. İntegrandı

$$f(z) = \frac{2/a}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{\varphi(z)}{z - z_1}, \quad \varphi(z) = \frac{2/a}{z - z_2}$$

biçiminde yazalım. φ , z_1 'de analitik ve sıfırdan farklıdır; **basit kutup formülüyle**

$$B_1 = \varphi(z_1) = \frac{2/a}{z_1 - z_2} = \frac{2/a}{\frac{2\sqrt{1-a^2}}{a}i} = \frac{1}{i\sqrt{1-a^2}}$$

Sonuç. Rezidü teoremiyle

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + \frac{2i}{a}z - 1} dz = 2\pi i B_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

(5) zinciri geri okunursa istenen formül elde edilir.

Denetim. $a \rightarrow 0$ iken sonuç 2π 'ye gider; $|a| \rightarrow 1$ iken sonsuza gider — beklenendir, çünkü o durumda payda bir noktada sıfırlanıp integrali ıraksatır.

■

20.3 Kat Açılı İntegrandlar

Yöntem, sinüs ve kosinüsün argümanları θ 'nın **tam katları** olduğunda da aynen işler; tek yapılacak, (2) parametrisasyonunu kuvvetlere taşımaktır:

$$\cos 2\theta = \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{(e^{i\theta})^2 + (e^{i\theta})^{-2}}{2} = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}$$

Genel olarak

$$\cos n\theta = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad \sin n\theta = \frac{z^n - z^{-n}}{2i} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Örnek 20.2 (Kat Açılı Örnek).

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

Dönüşümle:

$$\int_C \frac{\frac{z^2 + z^{-2}}{2}}{5 - 4 \cdot \frac{z + z^{-1}}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{z^4 + 1}{2iz^2 (5z - 2z^2 - 2)} dz$$

Paydayı çarpanlara ayıralım: $-2z^2 + 5z - 2 = -2(z - \frac{1}{2})(z - 2)$. Böylece integrand

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{-4iz^2(z - \frac{1}{2})(z - 2)}$$

olur. Birim çemberin içindeki tekil noktalar: $z = 0$ (ikinci mertebeden kutup) ve $z = \frac{1}{2}$ (basit kutup); $z = 2$ dışarıdadır.

$z = 1/2$ 'deki rezidü.

$$\varphi(z) = \frac{z^4 + 1}{-4iz^2(z - 2)}, \quad \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{17}{16}}{-4i \cdot \frac{1}{4} \cdot (-\frac{3}{2})} = \frac{\frac{17}{16}}{\frac{3i}{2}} = \frac{17}{24i}$$

$z = 0$ 'daki rezidü. $f(z) = \frac{\psi(z)}{z^2}$, $\psi(z) = \frac{z^4 + 1}{-4i(z - \frac{1}{2})(z - 2)}$ ile rezidü $\psi'(0)$ 'dir. $(z - \frac{1}{2})(z - 2) = z^2 - \frac{5}{2}z + 1$ yazıp çarpım kuralıyla türetelim:

$$\psi(z) = \frac{-1}{4i} \cdot \frac{z^4 + 1}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1} \Rightarrow \psi'(0) = \frac{-1}{4i} \cdot \frac{0 \cdot 1 - 1 \cdot (-\frac{5}{2})}{1} = \frac{-5}{8i}$$

Toplam.

$$2\pi i \left(\frac{17}{24i} - \frac{5}{8i} \right) = 2\pi \left(\frac{17}{24} - \frac{15}{24} \right) = 2\pi \cdot \frac{2}{24} = \frac{\pi}{6}$$

Yani

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi}{6}$$

■

20.4 Alıştırma

Alıştırma 20.1 (Trigonometrik İntegral Alıştırmaları). Aşağıdaki integralleri birim çember dönüşümüyle hesaplayınız.

a) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta}$

b) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} \quad (-1 < a < 1)$

- c) $\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta}$ ($a > 1$) (İpucu: integrand çifttir; aralığı $[0, 2\pi]$ 'ye genişletip yarısını alınız.)
d) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta$

Çözüm.

a) (3) dönüşümlerini uygulayalım. $\sin \theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ olduğundan

$$5 + 4 \sin \theta = 5 + \frac{2}{i} (z - z^{-1}) = 5 - 2i \left(z - \frac{1}{z} \right) = \frac{-2iz^2 + 5z + 2i}{z}$$

$d\theta = \frac{dz}{iz}$ ile birlikte z sadeleşir:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta} = \int_C \frac{z}{-2iz^2 + 5z + 2i} \cdot \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{dz}{2z^2 + 5iz - 2}$$

Paydanın köklerini bulalım:

$$z = \frac{-5i \pm \sqrt{(5i)^2 + 16}}{4} = \frac{-5i \pm 3i}{4} \Rightarrow z = -\frac{i}{2}, \quad z = -2i$$

Yalnızca $z = -i/2$ birim çemberin içindedir ve basit kutuptur. Rezidü, paydanın türeviyle:

$$\text{Rez}_{z=-i/2} \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2} = \frac{1}{4z + 5i} \Big|_{z=-i/2} = \frac{1}{-2i + 5i} = \frac{1}{3i}$$

Sonuç:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4 \sin \theta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{3i} = \frac{2\pi}{3}$$

b) Bu kez $\cos \theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ kullanılır:

$$1 + a \cos \theta = \frac{az^2 + 2z + a}{2z} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} = \int_C \frac{2 dz}{i (az^2 + 2z + a)}$$

Kökler:

$$z_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

$-1 < a < 1$ için $z_+ z_- = 1$ olduğundan kökler birbirinin tersidir; biri çemberin içinde, diğeri dışındadır. İçeride kalan $z_+ = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}$ dir. Rezidü:

$$\frac{2}{i} \cdot \frac{1}{2az + 2} \Big|_{z=z_+} = \frac{1}{i(az_+ + 1)} = \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}}$$

çünkü $az_+ + 1 = \sqrt{1 - a^2}$ dir. Sonuç:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a \cos \theta} = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

($a = 0$ durumunda formül 2π verir; doğrudur.)

c) İntegrand $\theta \mapsto 2\pi - \theta$ değişimi altında değişmez ($\cos$ bu simetriye sahiptir), dolayısıyla $[0, 2\pi]$ üzerindeki integral $[0, \pi]$ üzerindeki iki katıdır:

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta}$$

Sağdaki integral, (b) şıkkının $\frac{1}{a}$ katıdır: $a + \cos \theta = a(1 + \frac{1}{a} \cos \theta)$ yazılıp $a > 1$ için $|\frac{1}{a}| < 1$ olduğu kullanılırsa

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{1}{a} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

Yarısını alalım:

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

d) Önce payı indirgeyelim: $\cos^2 3\theta = \frac{1 + \cos 6\theta}{2}$. Ardından $\varphi = 2\theta$ değişimi yapalım; integrandın φ cinsinden periyodu 2π olduğundan

$$\int_0^{2\pi} F(2\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} F(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} F(\varphi) d\varphi$$

Böylece

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} d\varphi$$

Birinci integral. Birim çember dönüşümüyle

$$5 - 4 \cos \varphi = \frac{-2z^2 + 5z - 2}{z} = \frac{-(2z - 1)(z - 2)}{z}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} = \int_C \frac{z}{-(2z - 1)(z - 2)} \cdot \frac{dz}{iz} = i \int_C \frac{dz}{(2z - 1)(z - 2)}$$

İçeride kalan tek kutup $z = 1/2$ 'dir:

$$\text{Rez}_{z=1/2} = \frac{1}{2(z - 2)} \Big|_{z=1/2} = \frac{1}{2(-\frac{3}{2})} = -\frac{1}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} = i \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

İkinci integral. $\cos 3\varphi$ yerine $e^{i3\varphi}$ ile çalışabiliriz: sanal kısım, $\varphi \mapsto 2\pi - \varphi$ simetrisi altında tek olduğundan sıfırdır. $z = e^{i\varphi}$ ile $e^{i3\varphi} = z^3$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} d\varphi = i \int_C \frac{z^3 dz}{(2z - 1)(z - 2)}$$

Yine yalnızca $z = 1/2$ içeredir:

$$\text{Rez}_{z=1/2} = \frac{z^3}{2(z - 2)} \Big|_{z=1/2} = \frac{1/8}{-3} = -\frac{1}{24}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\varphi}{5 - 4 \cos \varphi} d\varphi = i \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{24}\right) = \frac{\pi}{12}$$

Toplam.

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{24} = \frac{8\pi + \pi}{24} = \frac{3\pi}{8}$$

■

Rezidü kuramının integral hesabındaki gücünü gördük. Son iki bölümde bambaşka iki uygulamaya geçiyoruz: fonksiyonların **sıfırlarını saymak** ve Laplace dönüşümlerini tersine çevirmek. Önce **argüman ilkesi ve Rouché teoremi**.

21. Argüman İlkesi ve Rouché Teoremi

Rezidü kuramı yalnızca integral hesaplamaz; **sayar** da. Bu bölümde bir fonksiyonun bir çevre içindeki sıfır ve kutuplarının sayısını, çevre üzerindeki argüman değişiminden okumayı öğreneceğiz. Sonuç, polinom köklerinin nerede olduğunu belirleyen pratik bir araca dönüşecek.

21.1 Meromorf Fonksiyonlar ve Dolanma Sayısı

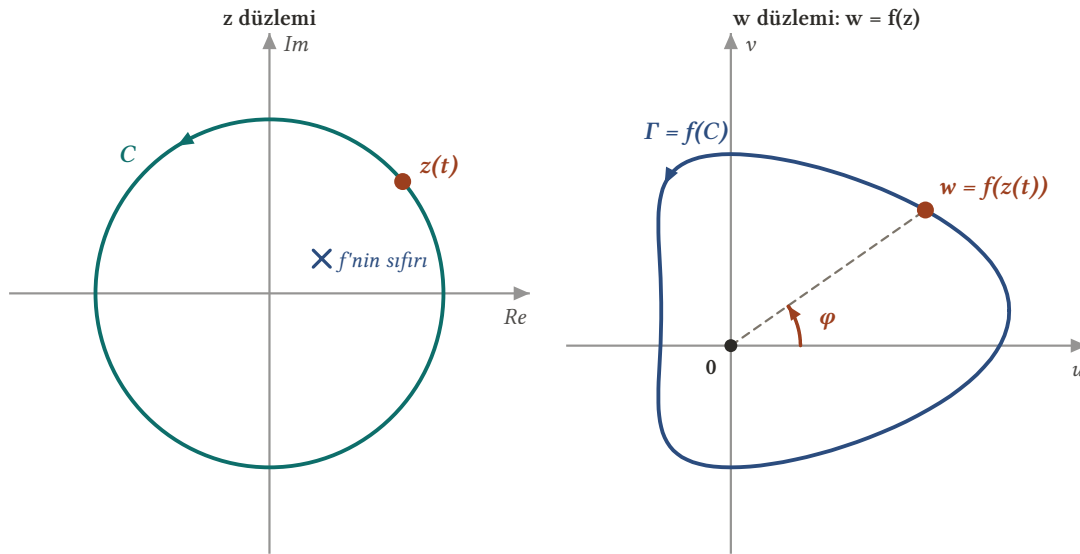
Tanım 21.1 (Meromorf Fonksiyon). Bir f fonksiyonu, bir D domeninde **kutuplar hariç** her yerde analitikse D 'de **meromorf**dur.

f , pozitif yönlü basit kapalı bir C çevresinin içi olan domende meromorf; C üzerinde ise analitik ve sıfırdan farklı olsun. C 'nin $w = f(z)$ dönüşümü altındaki görüntüsü Γ , w düzleminde kapalı bir eğridir (basit olmak zorunda değildir) ve f , C üzerinde sıfırlanmadığından Γ **orijinden geçmez**.

z noktası C 'yi pozitif yönde bir kez dolaşırken w görüntüsü Γ 'yı bir kez katederse, $\arg w$ değeri sürekli biçimde değişir ve başlangıç noktasına dönlüldüğünde bir $\phi_1 - \phi_0$ farkı birikir. Bu fark

$$\Delta_C \arg f(z) = \phi_1 - \phi_0 \quad (1)$$

ile gösterilir ve 2π 'nin bir tam katıdır.



Şekil 21.1: $z(t)$ noktası C 'yi pozitif yönde bir kez dolaşırken görüntüsü $w = f(z(t))$, w düzleminde kapalı Γ eğrisini çizer. f , C üzerinde sıfırlanmadığından Γ orijinden geçmez ve $\varphi = \arg w$ sürekli izlenebilir; tur tamamlandığında biriken fark $\Delta_C \arg f$, 2π 'nin bir katıdır. Burada Γ orijini bir kez sarar: dolanma sayısı 1, yani C içinde bir sıfır.

Tanım 21.2 (Dolanma Sayısı).

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) \quad (2)$$

tam sayısına, Γ eğrisinin $w = 0$ orijini etrafındaki **dolanma sayısı** denir. Saat yönünün tersine dolanmalar pozitif, saat yönündekiler negatif sayılır; Γ orijini çevrelemiyorsa dolanma sayısı sıfırdır.

21.2 Argüman İlkesi

Teorem 21.1 (Argüman İlkesi). C pozitif yönlü basit kapalı bir çevre olsun ve

- a) f , C 'nin içi olan domende meromorf;
- b) f , C üzerinde analitik ve sıfırdan farklı;
- c) katlılıklar dahil, C içinde f 'nin sıfırlarının sayısı Z , kutuplarının sayısı P olsun. O zaman

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = Z - P \quad (3)$$

İspat.

$\frac{f'(z)}{f(z)}$ fonksiyonunun C üzerindeki integralini **iki farklı yolla** hesaplayacağız.

Birinci hesap: argüman değişimi. C 'nin parametrik temsili $z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$) olsun:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{f'[z(t)] z'(t)}{f[z(t)]} dt \quad (4)$$

Γ orijinden geçmediğinden, C üzerindeki her noktanın görüntüsü üstel formda yazılabilir:

$$f[z(t)] = \rho(t) e^{i\phi(t)} \quad (a \leq t \leq b)$$

Γ 'yı oluşturan düzgün yayların her biri boyunca

$$\frac{d}{dt} f[z(t)] = f'[z(t)] z'(t) = \rho'(t) e^{i\phi(t)} + i\rho(t) e^{i\phi(t)} \phi'(t)$$

olur. (4) integralinde yerine konup sadeleştirilirse

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_a^b \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} dt + i \int_a^b \phi'(t) dt = [\ln \rho(t)]_a^b + i [\phi(t)]_a^b$$

C kapalı olduğundan $\rho(b) = \rho(a)$ 'dır ve ilk terim sıfırlanır; ikinci terim ise (1) tanımıdır:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \Delta_C \arg f(z) \quad (5)$$

İkinci hesap: rezidü teoremi. $\frac{f'}{f}$ bölümü, C içinde yalnızca f 'nin sıfır ve kutuplarında tekildir.

f 'nin z_0 'da m_0 mertebeli bir sıfırı varsa **karakterizasyon teoremiyle** $f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z)$ yazılır (g analitik, $g(z_0) \neq 0$) ve

$$\begin{aligned} f'(z) &= m_0(z - z_0)^{m_0-1} g(z) + (z - z_0)^{m_0} g'(z) \\ \Rightarrow \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \end{aligned} \quad (6)$$

$\frac{g'}{g}$, z_0 'da analitik olduğundan $\frac{f'}{f}$ orada **basit kutba** sahiptir ve rezidüsü m_0 'dır.

f 'nin z_0 'da m_p mertebeli bir kutbu varsa **kutup karakterizasyonu**yla $f(z) = (z - z_0)^{-m_p} \varphi(z)$ yazılır;

(6) hesabında m_0 yerine $-m_p$ geçer ve rezidü $-m_p$ olur.

Cauchy rezidü teoremi tüm katkıları toplar:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i (Z - P) \quad (7)$$

(5) ile (7) eşitlenip $2\pi i$ 'ye bölünürse (3) elde edilir.

■

Örnek 21.1 (Negatif Dolanma). $f(z) = \frac{1}{z^2}$ fonksiyonunun tek tekilliği orijindeki ikinci mertebeden kutuptur ve sonlu düzlemde sıfırı yoktur. C , pozitif yönlü birim çember olsun; f orada analitik ve sıfırdan farklıdır. Argüman ilkesi $Z = 0$, $P = 2$ ile

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg \left(\frac{1}{z^2} \right) = -2$$

verir: görüntü eğrisi Γ , orijin etrafında **saat yönünde iki kez döner**. Gerçekten $z = e^{i\theta}$ için $w = e^{-i2\theta}$, dır ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) – doğrudan da görülür.

21.3 Rouché Teoremi

Teorem 21.2 (Rouché Teoremi). C basit kapalı bir çevre olsun ve

a) f ile g fonksiyonları C 'nin içinde ve üzerinde analitik;

b) C üzerindeki her noktada $|f(z)| > |g(z)|$

olsun. O zaman $f(z)$ ile $f(z) + g(z)$, C içinde – katlıklar dahil – **aynı sayıda** sıfıra sahiptir.

İspat.

Yön önemsizdir; C 'yi pozitif yönlü alalım. Önce ne f 'nin ne de $f + g$ 'nin C üzerinde sıfırı olduğuna dikkat edelim: $z \in C$ iken

$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0, \quad |f(z) + g(z)| \geq ||f(z)| - |g(z)|| > 0$$

Z_f ve Z_{f+g} , C içindeki sıfır sayıları olsun. İki fonksiyon da analitik olduğundan kutupları yoktur; argüman ilkesi

$$Z_f = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z), \quad Z_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg [f(z) + g(z)]$$

verir. Çarpmanı ayıralım:

$$\Delta_C \arg [f + g] = \Delta_C \arg \left\{ f \left[1 + \frac{g}{f} \right] \right\} = \Delta_C \arg f + \Delta_C \arg F$$

$$F(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$$

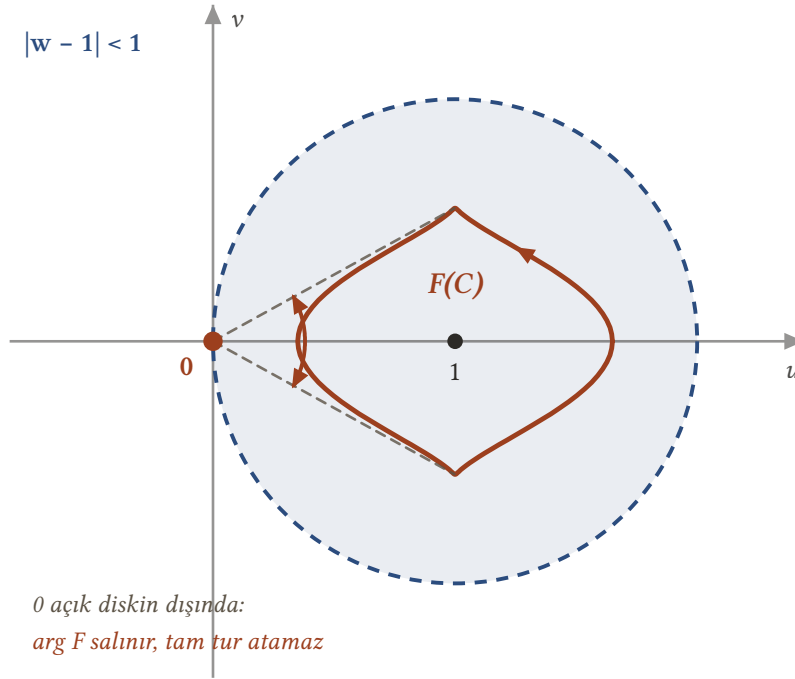
Böylece

$$Z_{f+g} = Z_f + \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg F(z) \quad (8)$$

Fakat C üzerinde

$$|F(z) - 1| = \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$$

olduğundan, C 'nin $w = F(z)$ dönüşümü altındaki görüntüsü $|w - 1| < 1$ açık diskinin içinde kalır. Bu disk orijini içermediğinden görüntü eğrisi $w = 0$ etrafında dolanamaz: $\Delta_C \arg F(z) = 0$. (8) eşitliği $Z_{f+g} = Z_f$ hâline iner.



Şekil 21.2: C üzerinde $|F(z) - 1| < 1$ olduğundan görüntü eğrisi $F(C)$, merkezi 1 olan açık birim diskin içinde kalır. Orijin bu diskin dışındadır (sınır üzerinde); diskteki bir kapalı eğri orijini sarmaz — $\arg F$ ileri geri salınır ama tam tur biriktiremez. Dolayısıyla $\Delta_C \arg F = 0$ ve $f + g$ ile f aynı sayıda sifıra sahiptir.

💡 Nasıl kullanılır?

Bir denklemin belirli bir bölgedeki kök sayısını bulmak için, ifadeyi **baskın terim** f ve **küçük terim** g olarak ikiye ayırın. Sınırdaki $|f| > |g|$ gösterebilerseniz, kök sayısı f 'nin — genellikle cz^n gibi apaçık — sıfır sayısına eşittir.

21.4 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 21.2 (Birim Çember İçindeki Kökler). $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ denkleminin $|z| = 1$ çemberi içinde kaç kökü olduğunu bulunuz.

Çözüm.

Baskın terimi ayıralım:

$$f(z) = -4z^3, \quad g(z) = z^7 + z - 1$$

$|z| = 1$ üzerinde

$$|f(z)| = 4|z|^3 = 4, \quad |g(z)| \leq |z|^7 + |z| + 1 = 3$$

Rouché teoreminin koşulu sağlanıyor. $f(z) = -4z^3$ fonksiyonunun birim çember içinde katlılığıyla birlikte **üç** sıfırı vardır ($z = 0$, üç katlı); dolayısıyla $f + g$ toplamının da üç sıfırı vardır. Yani verilen denklemin birim disk içinde üç kökü bulunur.

Örnek 21.3 (Cebirin Temel Teoreminin İkinci İspatı). $n \geq 1$ dereceli her

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0)$$

polinomunun, katlılıklar dahil **tam olarak n** sıfırı olduğunu Rouché teoremiyle gösteriniz.

Çözüm.

$$f(z) = a_n z^n, \quad g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$$

alalım. $|z| = R$ çemberi üzerinde ($R > 1$):

$$|f(z)| = |a_n| R^n$$

$$|g(z)| \leq |a_0| + |a_1| R + \cdots + |a_{n-1}| R^{n-1} \leq (|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) R^{n-1}$$

(son adımda $R > 1$ olduğundan tüm kuvvetler R^{n-1} ile üstten sınırlandı). O hâlde

$$R > \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n|} \quad (9)$$

koşulunu sağlayan bir R seçilirse

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n| R} < 1$$

yani $|f(z)| > |g(z)|$ olur. Rouché teoremi gereği $P = f + g$, $|z| = R$ çemberi içinde $f(z) = a_n z^n$ ile aynı sayıda — yani **n tane** — sıfıra sahiptir. R istenildiği kadar büyük seçilebildiğinden bunlar P 'nin tüm sıfırlarıdır. ■

i İki ispatın farkı

Liouville teoremiyle verdiğimiz ispat yalnızca **en az bir** sıfırın varlığını garanti ediyordu; kalan kökler, ardışık bölmelerle elde ediliyordu. Rouché teoremi ise kökleri **sayarak n** tanesinin varlığını tek hamlede verir — dolanma sayısının gücü budur.

21.5 Alıştırma

Alıştırma 21.1 (Rouché Alıştırmaları).

- $z^4 + 3z + 1 = 0$ denkleminin $|z| < 2$ diskinde kaç kökü olduğunu bulunuz.
- $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$ denkleminin $1 \leq |z| \leq 2$ halkasında kaç kökü olduğunu belirleyiniz.
- $ze^{\lambda-z} = 1$ ($\lambda > 1$) denkleminin birim disk içinde tam bir kökü olduğunu ve bu kökün reel olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Polinomu, çember üzerinde baskın olan terim ile geri kalanına ayıralım:

$$f(z) = z^4, \quad g(z) = 3z + 1$$

$|z| = 2$ üzerinde büyüklükleri karşılaştıralım:

$$|f(z)| = |z|^4 = 16, \quad |g(z)| \leq 3|z| + 1 = 7$$

$|g| < |f|$ olduğundan Rouché teoremi, $f + g$ ile f 'nin $|z| < 2$ diskinde **aynı sayıda** sıfıra sahip olduğunu söyler. $f(z) = z^4$ 'ün orada $z = 0$ 'da dördüncü mertebeden bir sıfırı vardır, yani katlılıkla birlikte 4 sıfır. Sonuç:

$z^4 + 3z + 1 = 0$ denkleminin $|z| < 2$ diskinde 4 kökü vardır.

(Dereceden dolayı toplam kök sayısı da 4'tür; demek ki bütün kökler bu diskin içindedir.)

b) Halkadaki kök sayısını, iki çemberdeki sayıların farkı olarak buluruz.

$|z| = 1$ **üzerinde** baskın terim $-6z^2$ 'dir:

$$|-6z^2| = 6, \quad |2z^5 + z + 1| \leq 2 + 1 + 1 = 4 < 6$$

Rouché teoremi, polinomun $|z| < 1$ diskinde $-6z^2$ ile aynı sayıda – yani 2 – sıfırı olduğunu verir.

$|z| = 2$ **üzerinde** baskın terim $2z^5$ 'tir:

$$|2z^5| = 2 \cdot 32 = 64, \quad |-6z^2 + z + 1| \leq 24 + 2 + 1 = 27 < 64$$

Bu kez $|z| < 2$ diskinde 5 sıfır bulunur.

Her iki çember üzerinde de eşitsizlikler **kesindir**; dolayısıyla polinomun bu çemberler üzerinde sıfırı yoktur ve halkadaki kök sayısı farktır:

$$5 - 2 = 3$$

$1 \leq |z| \leq 2$ kapalı halkasında 3 kök vardır.

c) Denklemi $ze^{\lambda-z} - 1 = 0$ biçiminde yazalım ve birim çember üzerinde

$$f(z) = ze^{\lambda-z}, \quad g(z) = -1$$

ayrışımını inceleyelim. $|z| = 1$ üzerinde $z = x + iy$ ile $x \leq 1$ olduğundan

$$|f(z)| = |z| |e^{\lambda-z}| = e^{\lambda-x} \geq e^{\lambda-1} > 1 = |g(z)|$$

çünkü $\lambda > 1$ 'dir. Rouché teoremi gereği $f + g$ ile f 'nin $|z| < 1$ diskindeki sıfır sayıları eşittir. $f(z) = ze^{\lambda-z}$ fonksiyonunun tek sıfırı $z = 0$ 'dır ve basittir ($e^{\lambda-z}$ hiçbir zaman sıfır olmaz). Demek ki denklemin birim disk içinde **tam bir** kökü vardır.

Bu kökün reel olduğunu görelim. Reel eksen üzerinde

$$h(x) = xe^{\lambda-x} - 1$$

sürekli bir fonksiyondur; uç değerleri

$$h(0) = -1 < 0, \quad h(1) = e^{\lambda-1} - 1 > 0 \quad (\lambda > 1)$$

Ara değer teoremi, $(0, 1)$ aralığında bir x_0 kökü verir. Bu x_0 birim diskin içindedir; diskteki kök tek olduğuna göre aranan kök tam olarak x_0 'dır ve reeldir.

■

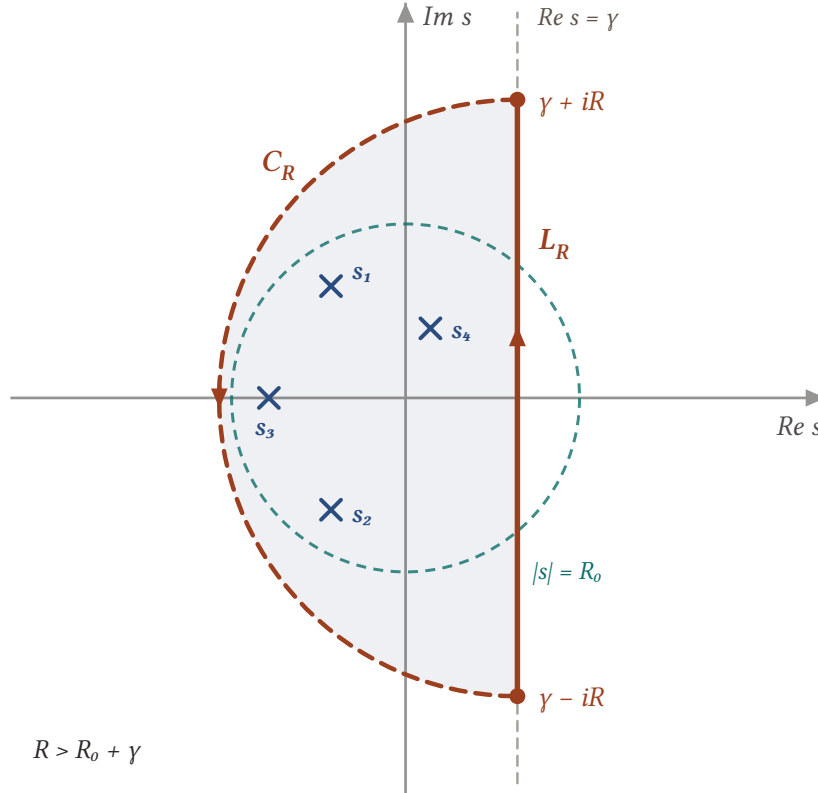
Son bölümde rezidülerin uygulamalı matematikteki en yaygın kullanımına geliyoruz: diferansiyel denklemlerin çözümlerini geri getiren **ters Laplace dönüşümü**.

22. Ters Laplace Dönüşümü

Rezidü kuramının uygulamalı matematikteki en yaygın kullanımı budur: bir diferansiyel denklemi Laplace dönüşümüyle cebirsel denkleme çevirdikten sonra, çözümü **geri getirmek**. Bu bölümde ters dönüşümün integral formülünü kurup rezidü toplamına indirgeyeceğiz.

22.1 Bromwich İntegrali

$F(s)$, kompleks s değişkeninin bir fonksiyonu olsun ve sonlu s düzleminde, sonlu sayıda ayırık tekil nokta hariç analitik olsun. L_R , $s = \gamma - iR$ noktasından $s = \gamma + iR$ noktasına uzanan dikey doğru parçası olsun; burada γ pozitif bir sabit ve R , F 'nin tüm tekil noktaları bu doğrunun **solunda** kalacak kadar büyüktür.



Şekil 22.1: Bromwich yolu L_R , $\text{Re } s = \gamma$ dikey doğrusu üzerinde $\gamma - iR$ 'den $\gamma + iR$ 'ye gider. Yol, merkezi γ olan ve **sağa** açılan C_R yarım çemberiyle ($s = \gamma + R_0 e^{i\theta}$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$) kapatılır. Tüm tekil noktalar $|s| \leq R_0$ diskindedir; $R > R_0 + \gamma$ alınınca hepsi yarım dairesel bölgenin içinde kalır.

Tanım 22.1 (Ters Laplace Dönüşümü). Reel değişken t 'nin pozitif değerleri için

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{L_R} e^{st} F(s) ds \quad (t > 0) \quad (1)$$

Limit var olduğunda bu ifade genellikle

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{P.V.} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (t > 0) \quad (2)$$

biçiminde yazılır ve böyle bir integrale **Bromwich integrali** denir.

Oldukça genel koşullar altında $f(t)$, $F(s)$ 'nin ters Laplace dönüşümüdür: F ,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (3)$$

ile tanımlı Laplace dönüşümüyse, f tam olarak (2) ile geri elde edilir. γ 'nın seçimi — tüm tekil noktalar solda kaldığı sürece — sonucu etkilemez.

22.2 Rezidü Toplamına İndirgeme

Teorem 22.1 (Sonlu Sayıda Tekil Nokta Hali). $F(s)$ 'nin tekil noktaları s_n ($n = 1, 2, \dots, N$) olsun; C_R , $s = \gamma + Re^{i\theta}$ ($\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$) yarım çemberi olmak üzere, C_R üzerinde $|F(s)| \leq M_R$ olacak biçimde, $R \rightarrow \infty$ iken sıfıra giden bir M_R bulunsun. O zaman

$$f(t) = \sum_{n=1}^N \text{Rez}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] \quad (t > 0) \quad (4)$$

İspat.

R_0 , tekil noktaların modüllerinin en büyüğü olsun ve

$$s = \gamma + Re^{i\theta} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \right) \quad (5)$$

parametrizasyonu ile C_R yarım çemberini alalım ($R > R_0 + \gamma$). Her s_n için

$$|s_n - \gamma| \leq |s_n| + \gamma \leq R_0 + \gamma < R$$

olduğundan tüm tekil noktalar, L_R ile C_R tarafından sınırlanan yarım dairesel bölgenin içindedir. **Cauchy rezidü teoremi:**

$$\int_{L_R} e^{st} F(s) ds = 2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Rez}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] - \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \quad (6)$$

Yay integrali. (5) parametrizasyonu ile

$$\int_{C_R} e^{st} F(s) ds = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \exp(\gamma t + Rte^{i\theta}) F(\gamma + Re^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

$|\exp(\gamma t + Rte^{i\theta})| = e^{\gamma t} e^{Rt \cos \theta}$ ve $|F| \leq M_R$ olduğundan

$$\left| \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \right| \leq e^{\gamma t} M_R R \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt \cos \theta} d\theta \quad (7)$$

$\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$ değişimiyle $\cos \theta = -\sin \phi$ olur ve **Jordan eşitsizliği** devreye girer:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt \cos \theta} d\theta = \int_0^\pi e^{-Rt \sin \phi} d\phi < \frac{\pi}{Rt}$$

(7) eşitsizliği böylece

$$\left| \int_{C_R} e^{st} F(s) ds \right| < \frac{e^{\gamma t} M_R \pi}{t} \quad (8)$$

hâline gelir ve $M_R \rightarrow 0$ olduğundan $R \rightarrow \infty$ iken yay integrali sıfıra gider. (6)'da limit alınıp $2\pi i$ 'ye bölünürse (4) elde edilir.

■

Isı iletimi ve mekanik titreşim problemlerinde $F(s)$, bir $\text{Re } s = \gamma$ doğrusunun solunda kalan **sonsuz** çoklukta ayrık tekil noktaya sahip olabilir. Bu durumda (4) toplamı bir seriye genişler:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{Rez}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] \quad (t > 0) \quad (9)$$

Bu genişlemenin gerekçesi, dikey doğru parçalarının L_N ve yayların C_N ile değiştirilip $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{C_N} e^{st} F(s) ds = 0$ gösterilmesidir; kanıtı çoğu zaman zahmetlidir ve burada kabul edilecektir.

22.3 Rezidü Hesabında Kısayollar

$F(s)$ 'nin s_0 'da m -inci mertebeden bir kutbu ve esas kısmı

$$\frac{b_1}{s - s_0} + \frac{b_2}{(s - s_0)^2} + \dots + \frac{b_m}{(s - s_0)^m} \quad (b_m \neq 0)$$

ise, doğrudan hesapla şu formül elde edilir:

$$\text{Rez}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] = e^{s_0 t} \left[b_1 + \frac{b_2}{1!} t + \dots + \frac{b_m}{(m-1)!} t^{m-1} \right] \quad (10)$$

$s_0 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) ve F , analitik olduğu noktalarda $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$ yansıma özelliğini sağlıyorsa, eşlenik $\bar{s}_0$ da m -inci mertebeden bir kutuptur ve reel t için iki rezidü birlikte hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} & \text{Rez}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] + \text{Rez}_{s=\bar{s}_0} [e^{st} F(s)] \\ &= 2e^{\alpha t} \text{Re} \left\{ e^{i\beta t} \left[b_1 + \frac{b_2}{1!} t + \dots + \frac{b_m}{(m-1)!} t^{m-1} \right] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

s_0 **basit kutup** ise ($m = 1$) bunlar sadeleşir:

$$\text{Rez}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] = e^{s_0 t} \text{Rez}_{s=s_0} F(s) \quad (12)$$

$$\text{Rez}_{s=s_0} [e^{st} F(s)] + \text{Rez}_{s=\bar{s}_0} [e^{st} F(s)] = 2e^{\alpha t} \text{Re} [e^{i\beta t} \text{Rez}_{s=s_0} F(s)] \quad (13)$$

22.4 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 22.1 (İkinci Mertebeden Kutup Çifti).

$$F(s) = \frac{s}{(s^2 + a^2)^2} \quad (a > 0)$$

fonksiyonuna karşılık gelen $f(t)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Tekil noktalar $s_0 = ai$ ve $\bar{s}_0 = -ai$ 'dir.

$$F(s) = \frac{\varphi(s)}{(s - ai)^2}, \quad \varphi(s) = \frac{s}{(s + ai)^2}$$

yazıldığında φ , $s_0 = ai$ 'de analitik ve sıfırdan farklıdır: kutup **ikinci mertebededir**. F , analitik olduğu noktalarda $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$ sağladığından $\bar{s}_0$ da ikinci mertebeden kutuptur ve (11) formülü kullanılabilir.

Esas kısmın katsayıları b_1, b_2 , φ 'nin s_0 civarındaki **Taylor serisinin** ilk iki teriminden okunur:

$$F(s) = \frac{1}{(s-ai)^2} \left[\varphi(ai) + \frac{\varphi'(ai)}{1!}(s-ai) + \dots \right] = \frac{\varphi(ai)}{(s-ai)^2} + \frac{\varphi'(ai)}{s-ai} + \dots$$

Hesaplayalım:

$$\varphi(ai) = \frac{ai}{(2ai)^2} = \frac{ai}{-4a^2} = -\frac{i}{4a}$$

$$\varphi'(s) = \frac{(s+ai)^2 - s \cdot 2(s+ai)}{(s+ai)^4} = \frac{ai-s}{(s+ai)^3} \Rightarrow \varphi'(ai) = 0$$

Yani $b_1 = 0$ ve $b_2 = -\frac{i}{4a}$. (11) formülü ($\alpha = 0, \beta = a$):

$$\text{Rez}_{s=s_0} [e^{st} F] + \text{Rez}_{s=\bar{s}_0} [e^{st} F] = 2 \text{Re} \left[e^{iat} \left(-\frac{i}{4a} t \right) \right] = \frac{t}{2a} \sin at$$

Sınırlılık koşulu. (4) formülünü uygulayabilmek için F 'nin C_R üzerinde uygun biçimde sınırlı olduğunu görelim. $s = \gamma + Re^{i\theta}$ için

$$|s| \leq \gamma + R, \quad |s| \geq |R - \gamma| = R - \gamma > a$$

ve dolayısıyla $|s^2 + a^2| \geq ||s|^2 - a^2| \geq (R - \gamma)^2 - a^2 > 0$. Böylece

$$|F(s)| \leq M_R, \quad M_R = \frac{\gamma + R}{[(R - \gamma)^2 - a^2]^2}$$

$R \rightarrow \infty$ iken $M_R \rightarrow 0$ 'dır; koşul sağlanır ve

$$f(t) = \frac{1}{2a} t \sin at \quad (t > 0)$$

■

Örnek 22.2 (Sonsuz Çoklukta Kutup).

$$F(s) = \frac{\tanh s}{s^2} = \frac{\sinh s}{s^2 \cosh s}$$

fonksiyonuna karşılık gelen $f(t)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

Tekil noktalar $s = 0$ ile $\cosh s$ 'nin sıfırlarıdır:

$$s_0 = 0, \quad s_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} i, \quad \bar{s}_n = -\frac{(2n-1)\pi}{2} i \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$s_0 = 0$ 'daki rezidü. Maclaurin serilerinin bölümü

$$F(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\sinh s}{\cosh s} = \frac{1}{s^2} \left(s - \frac{s^3}{3} + \dots \right) = \frac{1}{s} - \frac{s}{3} + \dots \quad \left(0 < |s| < \frac{\pi}{2} \right)$$

orijinin basit kutup olduğunu ve rezidünün 1 olduğunu gösterir. (12) formülüyle

$$\text{Rez}_{s=0} [e^{st} F(s)] = e^0 \cdot 1 = 1$$

s_n 'deki rezidüler. $p(s) = \sinh s, q(s) = s^2 \cosh s$ ile p/q formülünü uygulayalım. Önce

$$\sinh s_n = \sinh \left[i \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \right] = i \sin \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) = -i \cos n\pi = (-1)^{n+1} i \neq 0$$

$q(s_n) = 0$ ve $q'(s_n) = s_n^2 \sinh s_n \neq 0$ olduğundan basit kutuptur ve

$$\operatorname{Rez}_{s=s_n} F(s) = \frac{p(s_n)}{q'(s_n)} = \frac{1}{s_n^2} = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2}$$

$\overline{\sinh s} = \sinh \bar{s}$ ve $\overline{\cosh s} = \cosh \bar{s}$ özdeşlikleri $\overline{F(s)} = F(\bar{s})$ yansımasını garanti eder; (13) formülü ($\alpha = 0, \beta = \frac{(2n-1)\pi}{2}$) eşlenik çifti birleştirir:

$$\begin{aligned} \operatorname{Rez}_{s=s_n} [e^{st} F] + \operatorname{Rez}_{s=\bar{s}_n} [e^{st} F] &= 2 \operatorname{Re} \left\{ -\frac{4}{\pi^2 (2n-1)^2} \exp \left[i \frac{(2n-1)\pi t}{2} \right] \right\} \\ &= -\frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2} \end{aligned}$$

Sonuç. (9) serisinde toplanırsa

$$f(t) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2} \quad (t > 0)$$

■

Örnek 22.3 (Isı Denkleminde Gelen Dönüşüm).

$$F(s) = \frac{\sinh(x s^{1/2})}{s \sinh(s^{1/2})} \quad (0 < x < 1)$$

fonksiyonuna karşılık gelen $f(t)$ 'yi bulunuz.

Çözüm.

$s^{1/2}$, iki değerli fonksiyonun herhangi bir dalıdır; pay ve paydada **aynı dal** kullanılır. Seri açılımıyla

$$F(s) = \frac{x s^{1/2} + \frac{(x s^{1/2})^3}{3!} + \dots}{s [s^{1/2} + \frac{(s^{1/2})^3}{3!} + \dots]} = \frac{x + \frac{x^3 s}{6} + \dots}{s + \frac{s^2}{6} + \dots} \quad (14)$$

Bu ifade, $s = 0$ 'ın bir tekil nokta olduğunu ve – kuvvet serilerinin bölümü olarak – **basit kutup** olup rezidüsünün x olduğunu gösterir. Dal kesimi negatif reel eksenle bulunmayacak biçimde seçilirse (böylece $\sinh(s^{1/2})$ o eksen boyunca iyi tanımlıdır), diğer tekil noktalar $s^{1/2} = \pm n\pi i$ koşulundan doğar:

$$s_n = -n^2 \pi^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(12) formülüyle $s_0 = 0$ için

$$\operatorname{Rez}_{s=0} [e^{st} F(s)] = x$$

s_n 'deki rezidüler. $p(s) = \sinh(x s^{1/2})$ ve $q(s) = s \sinh(s^{1/2})$ alalım. $s_n^{1/2} = n\pi i$ olduğundan

$$p(s_n) = \sinh(in\pi x) = i \sin n\pi x, \quad q(s_n) = 0, \quad q'(s_n) = \frac{1}{2} s_n^{1/2} \cosh(s_n^{1/2}) \neq 0$$

$\sin n\pi x \neq 0$ olan her n için s_n basit kutuptur ve

$$\operatorname{Rez}_{s=s_n} F(s) = \frac{p(s_n)}{q'(s_n)} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x$$

($n x$ tam sayı olduğunda $p(s_n) = 0$ olur ve s_n kaldırılabilir bir tekilliğe dönüşür; formül bu durumda da doğru değeri, yani sıfırı verdiğinden aşağıdaki seri her x için geçerlidir.)

(12) ile

$$\operatorname{Rez}_{s=s_n} [e^{st} F(s)] = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x$$

Sonuç. (9) serisiyle

$$f(t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \quad (t > 0)$$

Bu fonksiyon, uçları sabit sıcaklıkta tutulan bir çubuktaki ısı dağılımının klasik çözümüdür: t büyüdükçe üstel terimler sönür ve dağılım, doğrusal denge profili x 'e yaklaşır.

■

22.5 Alıştırma

Alıştırma 22.1 (Ters Laplace Alıştırmaları). Aşağıdaki dönüşümlerin terslerini rezidü yöntemiyle bulunuz.

- a) $F(s) = \frac{1}{s-a}$ (a reel)
- b) $F(s) = \frac{s}{s^2+a^2}$ ($a > 0$)
- c) $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$
- d) $F(s) = \frac{2s^3}{s^4-4}$

Çözüm.

Dördünde de F , paydası paydan yüksek dereceli bir rasyonel fonksiyondur; Bromwich integrali, sonlu sayıdaki kutupta $e^{st}F(s)$ 'nin rezidülerinin toplamına iner:

$$f(t) = \sum_k \text{Rez}_{s=s_k} \left[e^{st} F(s) \right]$$

a) Tek kutup $s = a$ ve basittir:

$$\text{Rez}_{s=a} \frac{e^{st}}{s-a} = e^{at}$$

Yani $f(t) = e^{at}$ – Laplace tablosunun ilk satırı.

b) Kutuplar $s = \pm ia$ 'dır ve basittir. $q(s) = s^2 + a^2$ için $q'(s) = 2s$ olduğundan p/q' formülü kullanılabilir:

$$\text{Rez}_{s=ia} \frac{s e^{st}}{s^2 + a^2} = \frac{s e^{st}}{2s} \Big|_{s=ia} = \frac{e^{iat}}{2}, \quad \text{Rez}_{s=-ia} = \frac{e^{-iat}}{2}$$

Toplarsak Euler formülü devreye girer:

$$f(t) = \frac{e^{iat} + e^{-iat}}{2} = \cos at$$

c) Kutuplar $s = 0$ ve $s = \pm i$ 'dir; üçü de basittir.

$$\text{Rez}_{s=0} \frac{e^{st}}{s(s^2+1)} = \frac{e^{st}}{s^2+1} \Big|_{s=0} = 1$$

$s^2 + 1 = (s-i)(s+i)$ yazarak:

$$\text{Rez}_{s=i} = \frac{e^{st}}{s(s+i)} \Big|_{s=i} = \frac{e^{it}}{i \cdot 2i} = -\frac{e^{it}}{2}$$

$$\text{Rez}_{s=-i} = \frac{e^{st}}{s(s-i)} \Big|_{s=-i} = \frac{e^{-it}}{(-i)(-2i)} = -\frac{e^{-it}}{2}$$

Toplam:

$$f(t) = 1 - \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = 1 - \cos t$$

d) Payda $s^4 = 4$ denkleminin dört kökünde sıfırlanır:

$$s = \pm\sqrt{2}, \quad s = \pm i\sqrt{2}$$

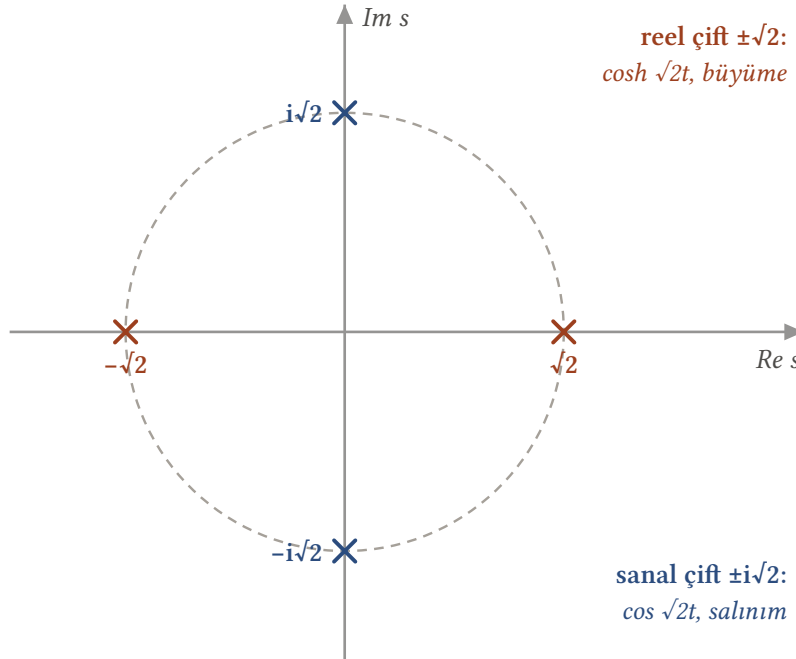
Hepsi basit kutuptur. $p(s) = 2s^3$ ve $q'(s) = 4s^3$ olduğundan rezidüler şaşırtıcı derecede sadedir:

$$\text{Rez}_{s=s_k} \frac{2s^3 e^{st}}{s^4 - 4} = \frac{2s_k^3 e^{s_k t}}{4s_k^3} = \frac{e^{s_k t}}{2}$$

Dört rezidüyü toplayalım:

$$f(t) = \frac{e^{\sqrt{2}t} + e^{-\sqrt{2}t}}{2} + \frac{e^{i\sqrt{2}t} + e^{-i\sqrt{2}t}}{2} = \cosh(\sqrt{2}t) + \cos(\sqrt{2}t)$$

Reel eksendeki kutup çifti hiperbolik, sanal eksendeki kutup çifti trigonometrik terimi doğurdu: kutupların konumu çözümün büyüme mi salınım mı yapacağını doğrudan söyler.



Şekil 22.2: $s^4 = 4$ denkleminin dört kökü $|s| = \sqrt{2}$ çemberi üzerindedir. Reel eksendeki çift $e^{\pm\sqrt{2}t}$ üstellerini, yani hiperbolik (büyüyen) terimi; sanal eksendeki çift $e^{\pm i\sqrt{2}t}$ üstellerini, yani trigonometrik (salınan) terimi doğurur. Kutbun reel kısmı büyüme hızını, sanal kısmı salınım frekansını verir.

■

Kompleks Analiz notlarının ikinci bölümü burada tamamlanıyor. Cauchy kuramından başlayıp serilerden rezidüleri uzanan bu yol, kompleks analizin ana gövdesini oluşturur; bundan sonrası — konform tasvirler, akışkan akımları, analitik uzanımın derinlikleri — aynı temeller üzerine kurulur.