

Kompleks Analiz

1. Bölüm — Temeller

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com

Bu çalışma [Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) lisansı ile paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.

Bu sürüm: 20 Eylül 2026

İçindekiler

Giriş	7
1 Kompleks Sayıların Cebirsel Yapısı	9
1.1 Toplamlar ve Çarpımlar	9
1.2 i Sayısı ve $x + iy$ Gösterimi	10
1.3 Temel Cebirsel Özellikler	10
1.4 Sıfır Çarpanları Yoktur	11
1.5 Bölme	11
1.6 Binom Formülü	12
1.7 Alıştırma	12
2 Vektörler, Modül ve Eşlenik	13
2.1 Vektör Yorumu	13
2.2 Modül	13
2.3 Üçgen Eşitsizliği	15
2.4 Kompleks Eşlenik	16
2.5 Çarpımın ve Bölümün Modülü	17
2.6 Alıştırma	17
3 Kutupsal ve Üstel Form	19
3.1 Kutupsal Form ve Argüman	19
3.2 Euler Formülü ve Üstel Form	24
3.3 Üstel Formda Çarpım ve Bölüm	25
3.4 Kuvvetler ve de Moivre Formülü	26
3.5 Çarpımların ve Bölümlerin Argümanları	27
3.6 Alıştırma	28
4 Kompleks Sayıların Kökleri	31
4.1 Üstel Formların Eşitliği	31
4.2 n -inci Köklerin Bulunması	31
4.3 Çözümlü Uygulamalar	32
4.4 Alıştırma	33
5 Kompleks Düzlemde Bölgeler	35
5.1 Komşuluklar	35
5.2 İç, Dış ve Sınır Noktaları	35
5.3 Açık ve Kapalı Kümeler	36
5.4 Bağlantılılık, Domen ve Bölge	37

5.5	Sınırlılık	38
5.6	Yığılma Noktaları	38
5.7	Alıştırma	39
6	Fonksiyonlar ve Tasvirler	41
6.1	Fonksiyon Kavramı	41
6.2	Tasvir Kavramı	42
6.3	$w = z^2$ Tasviri	42
6.4	Üstel Fonksiyonla Tasvirler	43
6.5	Alıştırma	44
7	Limitler ve Süreklilik	47
7.1	Limit Tanımı	47
7.2	Limit Teoremleri	48
7.3	Sonsuzdaki Nokta	49
7.4	Süreklilik	50
7.5	Alıştırma	51
8	Türev ve Türev Formülleri	53
8.1	Türevin Tanımı	53
8.2	Türevlenemeyen Fonksiyonlar	54
8.3	Türev Sürekliliği Gerektirir	54
8.4	Türev Formülleri	55
8.5	Alıştırma	55
9	Cauchy-Riemann Denklemleri	57
9.1	Denklemlerin Türetilişi	57
9.2	Yeterlilik Teoremi	58
9.3	Kutupsal Koordinatlarda Cauchy-Riemann	59
9.4	Alıştırma	60
10	Analitik Fonksiyonlar	63
10.1	Tanımlar	63
10.2	Analitik Fonksiyonların Cebiri	63
10.3	Türevi Sıfır Olan Fonksiyon Sabittir	64
10.4	Katılık Örnekleri	65
10.5	Alıştırma	66
11	Harmonik Fonksiyonlar	67
11.1	Harmoniklik	67
11.2	Analitik Fonksiyonların Bileşenleri Harmoniktir	68
11.3	Harmonik Eşlenik	68
11.4	Harmonik Eşlenik Bulma Yöntemi	69
11.5	Alıştırma	69

12	Tek Türlü Belirlenme ve Yansıma Prensibi	71
12.1	Özdeş Sıfır Olma İlkesi	71
12.2	Analitik Uzanım	72
12.3	Yansıma Prensibi	73
12.4	Alıştırma	75
13	Üstel Fonksiyon	77
13.1	Tanım	77
13.2	Toplama Özelliği	77
13.3	Modül, Argüman ve Sıfırlanmama	77
13.4	Periyodiklik	78
13.5	$e^z = w$ Denkleminin Çözümü	79
13.6	Alıştırma	80
14	Logaritmik Fonksiyon ve Dalları	83
14.1	Tanım	83
14.2	Esas Değer	83
14.3	Logaritmanın Dalları	84
14.4	Özdeşlikler: Neyin Geçerli Kaldığı	85
14.5	Alıştırma	86
15	Kompleks Üsler	87
15.1	Tanım	87
15.2	Dalların Analitikliği	87
15.3	Üs Kuralları Ne Zaman Bozulur?	88
15.4	Tabanı Sabit Üstel Fonksiyon	89
15.5	Alıştırma	89
16	Trigonometrik Fonksiyonlar	93
16.1	Tanımlar ve Temel Özellikler	93
16.2	Hiperbolik Bileşenli Açılımlar	93
16.3	Sıfırlar	94
16.4	Diğer Dört Fonksiyon	94
16.5	Alıştırma	94
17	Hiperbolik Fonksiyonlar	97
17.1	Tanımlar	97
17.2	Trigonometrik Köprü	97
17.3	Özdeşlikler	97
17.4	Periyodiklik ve Sıfırlar	98
17.5	Hiperbolik Tanjant	99
17.6	Alıştırma	99

18	Ters Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonlar	101
18.1	Ters Sinüs	101
18.2	Ters Kosinüs ve Ters Tanjant	102
18.3	Türevler	102
18.4	Ters Hiperbolik Fonksiyonlar	102
18.5	Alıştırma	102
19	Reel Değişkenli Fonksiyonların Türev ve İntegralleri	105
19.1	Türev	105
19.2	Belirli İntegral	106
19.3	Temel Teorem	107
19.4	Alıştırma	107
20	Yaylar ve Çevreler	109
20.1	Yaylar	109
20.2	Yeniden Parametrizasyon	110
20.3	Düzgün Yaylar ve Uzunluk	111
20.4	Çevreler	111
20.5	Alıştırma	112
21	Çevre İntegralleri	115
21.1	Tanım	115
21.2	Yol Bağımlılığı: Üç Klasik Örnek	115
21.3	Dal Kesimli İntegrandlar	118
21.4	Alıştırma	120
22	Çevre İntegrallerinin Modülleri İçin Üst Sınırlar	123
22.1	İntegral Modülü Lemması	123
22.2	ML Eşitsizliği	123
22.3	Çözümlü Uygulamalar	124
22.4	Alıştırma	126
23	Ters Türevler	129
23.1	Ters Türev	129
23.2	Denklik Teoremi	129
23.3	Çözümlü Uygulamalar	131
23.4	Alıştırma	133

Giriş

Kompleks analiz, karmaşık düzlemde tanımlı fonksiyonların türev ve integralini inceleyerek reel analizde ulaşılamayan sonuçlara varır. Analitik bir fonksiyonun tek bir türevinin varlığının sonsuz kez türevlenebilirliği gerektirmesi gibi şaşırtıcı sonuçlarıyla matematiğin en zarif dallarından biridir.

Not

Aşağıdaki müfredattaki tüm başlıkların notları hazırdır ve bağlantılardan ulaşılabilir.

1. Kompleks Sayıların Cebirsel Yapısı

Kompleks analizin bütün yapısı tek bir cebirsel adım üzerine kurulur: reel sayı çiftlerine, karesi -1 olan bir eleman içerecek biçimde çarpma tanımlamak. Bu bölümde kompleks sayıları sıralı ikililer olarak kurup dört işlemin tamamını elde edeceğiz.

1.1 Toplamlar ve Çarpımlar

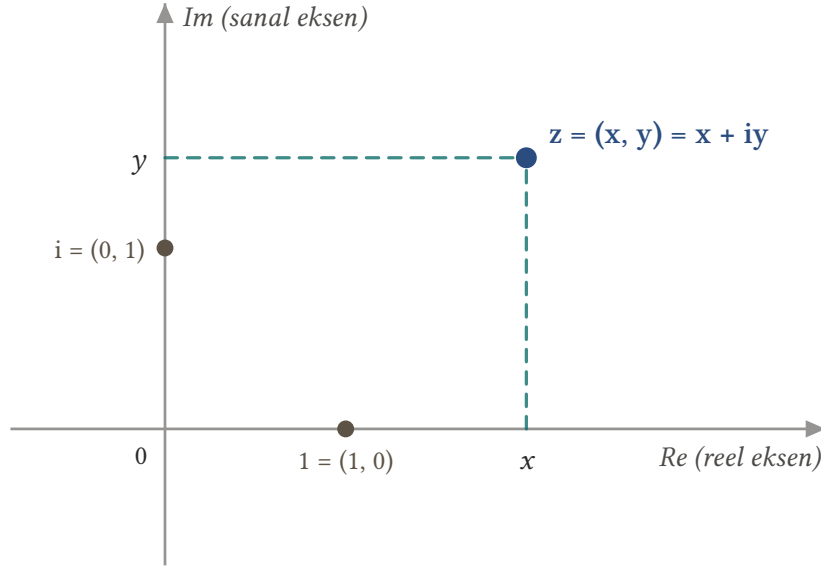
Tanım 1.1 (Kompleks Sayı). Bir **kompleks sayı**, reel sayıların sıralı bir (x, y) ikilisidir; xy -düzleminin noktaları gibi düşünülür. Kompleks sayıların kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir ve düzlem bu yorumla **kompleks düzlem** adını alır.

$z = (x, y)$ sayısının ilk bileşenine **reel kısım**, ikinci bileşenine **sanal kısım** denir:

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y$$

İki kompleks sayı, ancak ve ancak reel kısımları ve sanal kısımları ayrı ayrı eşitse **eşittir**.

$(0, y)$ biçimindeki sayılar y ekseninde yer alır; bu yüzden y eksenine **sanal eksen** denir ve $(0, y)$ sayıları **saf sanal** olarak adlandırılır.



Şekil 1.1: Kompleks düzlem: yatay eksen reel kısmı, dikey eksen sanal kısmı taşır. $z = (x, y)$ sıralı ikilisi düzlemin bir noktasıdır; $1 = (1, 0)$ reel ekseninde, $i = (0, 1)$ sanal ekseninde birim uzaklıktaki noktalardır.

Tanım 1.2 (Toplam ve Çarpım). $z_1 = (x_1, y_1)$ ve $z_2 = (x_2, y_2)$ için toplam ve çarpım şöyle tanımlanır:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

$(x, 0)$ biçimindeki sayılar bu işlemler altında tıpkı reel sayılar gibi davranır:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \quad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

Bu nedenle $(x, 0)$ sayısını x reel sayısı ile özdeşleştirir ve $x = (x, 0)$ yazarız; kompleks sayı sistemi, reel sayı sisteminin doğal bir genişlemesidir.

1.2 i Sayısı ve $x + iy$ Gösterimi

$i = (0, 1)$ olarak tanımlansın. Herhangi bir $z = (x, y)$ sayısı

$$z = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$$

biçiminde ayrışır; çünkü $(0, 1)(y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 1 \cdot y + 0 \cdot 0) = (0, y)$. Özdeşleştirmeye bu,

$$z = x + iy$$

demektir. Çarpım tanımı i 'nin karesini hemen verir:

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

İşlemler için tek kural

$z = x + iy$ gösterimi kullanıldığında ikili tanımlarını ezberlemeye gerek kalmaz: kompleks sayılar, i^2 görüldüğü her yerde -1 yazılması kuralıyla, reel sayılardaki gibi çarpılıp toplanır. Örneğin

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$$

sonucu, tanımdaki çarpımla birebir aynıdır.

1.3 Temel Cebirsel Özellikler

Kompleks sayılarda toplama ve çarpma, reel sayılardaki alışıldık yasaların tümünü sağlar. Değişme ve birleşme yasaları

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

ve dağılma yasası

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$$

tanımlardan, reel sayıların karşılık gelen yasaları kullanılarak doğrulanır.

Toplamanın birim elemanı $0 = (0, 0)$, çarpmanın birim elemanı $1 = (1, 0)$ sayıdır:

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 1 = z$$

Her $z = (x, y)$ sayısının bir **toplama tersi** vardır ve tektir:

$$-z = (-x, -y), \quad z + (-z) = 0$$

Çıkarma işlemi bu ters yardımıyla tanımlanır: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.

Teorem 1.1 (Çarpma Tersi). Sıfırdan farklı her $z = (x, y)$ kompleks sayısının, $zz^{-1} = 1$ koşulunu sağlayan tek bir çarpma tersi vardır:

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

İspat.

$z^{-1} = (u, v)$ arıyoruz; $(x, y)(u, v) = (1, 0)$ koşulu, çarpım tanımına göre

$$xu - yv = 1, \quad yu + xv = 0$$

lineer sistemine denktir. Sistemin katsayı determinanı $x^2 + y^2$ 'dir ve $z \neq 0$ olduğundan sıfırdan farklıdır; dolayısıyla tek çözüm vardır:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

■

$z = 0$ sayısının çarpma tersi yoktur: $0 \cdot w = 0 \neq 1$ her w için geçerlidir.

1.4 Sıfır Çarpanları Yoktur

Teorem 1.2 (Çarpımın Sıfır Olması). $z_1 z_2 = 0$ ise $z_1 = 0$ veya $z_2 = 0$ olmalıdır (ikisi birden de sıfır olabilir).

İspat.

$z_1 z_2 = 0$ olsun ve $z_1 \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman z_1^{-1} vardır ve

$$z_2 = 1 \cdot z_2 = (z_1^{-1} z_1) z_2 = z_1^{-1} (z_1 z_2) = z_1^{-1} \cdot 0 = 0$$

■

Bu özellik, reel sayılardan tanıdığımız “çarpım sıfırsa çarpanlardan biri sıfırdır” kuralının kompleks sayılarda da aynen geçerli olduğunu söyler; denklem çözerken çarpanlara ayırmayı güvenle kullanabiliriz.

1.5 Bölme

Bölme, çarpma tersiyle tanımlanır ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$$

Bileşenler cinsinden açık formül

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right)$$

biçimindedir; ama bu formül ezberlenmez. Pratikte pay ve payda, paydanın sanal kısmının işareti değiştirilmiş kopyasıyla — yani $x_2 - iy_2$ ile — çarpılır; payda böylece reel sayı $x_2^2 + y_2^2$ olur. Bu işlem, [bir sonraki bölümde](#) tanıtılacak eşlenik kavramının ilk görünüşüdür.

Örnek 1.1 (Bölme İşlemi). $\frac{4+i}{2-3i}$ bölümünü $x + iy$ biçiminde yazınız.

Çözüm.

Pay ve paydayı $2 + 3i$ ile çarpalım:

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{8+12i+2i+3i^2}{4+9} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}i$$

■

Bölmeyle ilgili beklenen özdeşliklerin tümü tanımdan çıkar; sık kullanılanlar şunlardır ($z_1, z_2 \neq 0$):

$$\frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{z_1} \cdot \frac{1}{z_2}, \quad \frac{z_3 + z_4}{z_1} = \frac{z_3}{z_1} + \frac{z_4}{z_1}, \quad \left(\frac{z_3}{z_1} \right) \left(\frac{z_4}{z_2} \right) = \frac{z_3 z_4}{z_1 z_2}$$

1.6 Binom Formülü

Reel cebirdeki binom açılımı, kanıtı yalnızca değişme–birleşme–dağılıma yasalarına dayandığından kompleks sayılarda da geçerlidir: $n = 1, 2, \dots$ için

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

1.7 Alıştırma

Alıştırma 1.1 (Cebirsel İşlemler). Aşağıdaki sayıları $x + iy$ biçiminde yazınız.

- a) $(2 - 3i)(-2 + i)$
- b) $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$
- c) $(1 - i)^4$

Çözüm.

a) Çarpımı dağıtıp $i^2 = -1$ yazalım:

$$(2 - 3i)(-2 + i) = -4 + 2i + 6i - 3i^2 = -4 + 8i + 3 = -1 + 8i$$

b) Her iki bölümü de paydanın eşleniğiyle genişletelim. İlk terim:

$$\frac{1 + 2i}{3 - 4i} = \frac{(1 + 2i)(3 + 4i)}{(3 - 4i)(3 + 4i)} = \frac{3 + 4i + 6i - 8}{9 + 16} = \frac{-5 + 10i}{25} = \frac{-1 + 2i}{5}$$

İkinci terimde payda saf sanaldır; $1/i = -i$ olduğundan

$$\frac{2 - i}{5i} = \frac{(2 - i)(-i)}{5} = \frac{-2i + i^2}{5} = \frac{-1 - 2i}{5}$$

Toplarsak sanal kısımlar birbirini götürür:

$$\frac{-1 + 2i}{5} + \frac{-1 - 2i}{5} = \frac{-2}{5}$$

c) Önce kareyi alıp sonucu tekrar karelemek en kısa yoldur:

$$(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = -2i, \quad (1 - i)^4 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$$

■

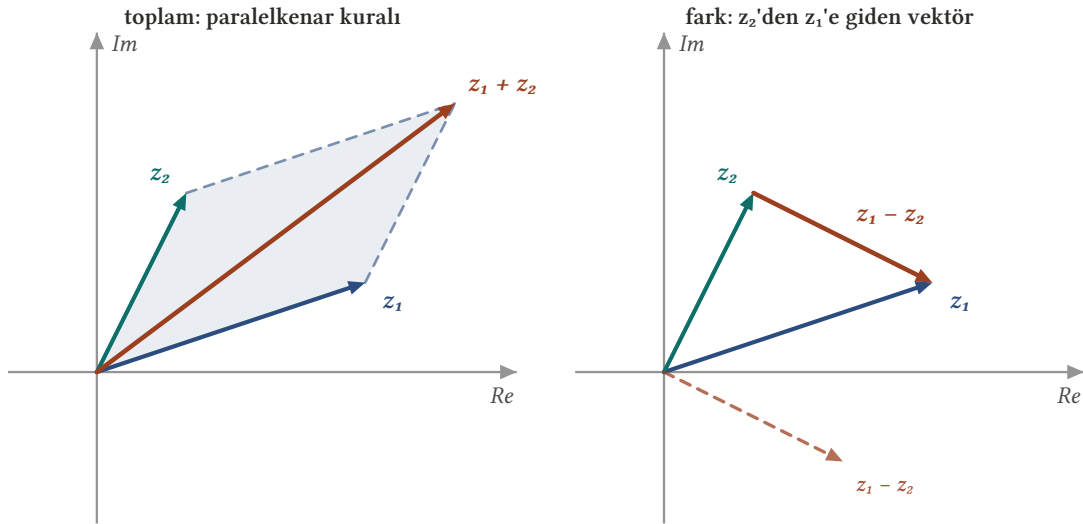
Cebirsel işlemler tamamlandı; sırada kompleks sayıların geometrisi var: [vektör yorumu](#), [modül ve eşlenik](#).

2. Vektörler, Modül ve Eşlenik

Bir kompleks sayı yalnızca bir nokta değil, aynı zamanda başlangıç noktasından o noktaya çizilen bir **vektördür**. Bu ikinci bakış, toplama işlemine paralelkenar kuralını, modüle uzaklık anlamını ve üçgen eşitsizliğini kazandırır.

2.1 Vektör Yorumu

$z = x + iy$ sayısı, bileşenleri x ve y olan konum vektörü gibi düşünülebilir. $z_1 + z_2$ toplamının bileşenleri, vektör toplamının bileşenleriyle aynıdır; dolayısıyla kompleks toplama, **paralelkenar kuralıyla** yapılan vektör toplamasıdır. Çarpım $z_1 z_2$ ise ne noktaların ne de vektörlerin bilinen bir çarpımına karşılık gelir; onun geometrik anlamı **üstel formda** ortaya çıkacaktır.

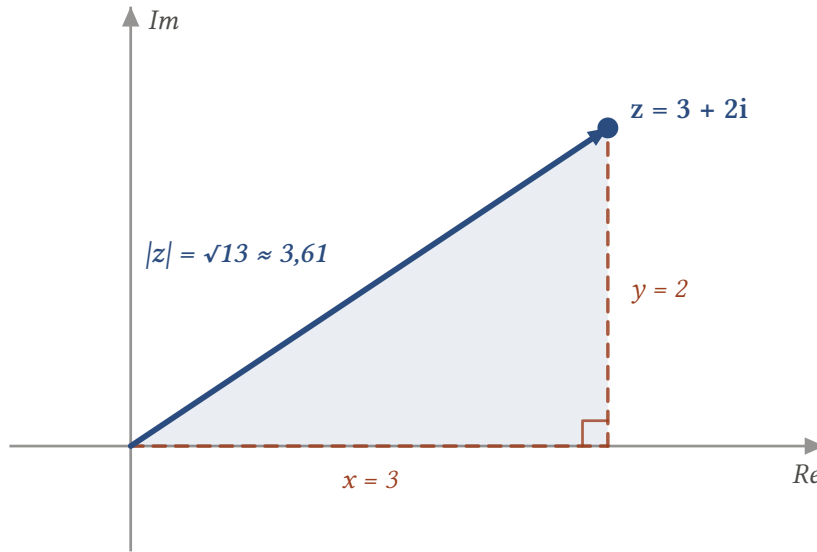


Şekil 2.1: Solda $z_1 + z_2$ toplamı paralelkenarın köşegenidir. Sağda $z_1 - z_2$ farkı, z_2 ucundan z_1 ucuna giden vektördür; başlangıca taşınmış kopyası kesikli çizilmiştir. Bu yüzden $|z_1 - z_2|$ iki nokta arasındaki uzaklıktır.

2.2 Modül

Tanım 2.1 (Modül). $z = x + iy$ sayısının **modülü** (mutlak değeri), z vektörünün boyudur:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Şekil 2.2: Modül, z vektörünün boyudur: bileşenleri x ve y olan dik üçgenin hipotenüsü. Pisagor teoremi tanımdaki formülü verir: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, örnekte $|3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

Tanımdan iki kullanışlı gözlem hemen çıkar:

$$|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \quad \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

Modül, reel sayılardaki mutlak değer genişlemesidir ve sıralamayı **değil**, yalnızca büyüklüğü ölçer: $z_1 < z_2$ yazmak kompleks sayılar için anlamsızdır; $|z_1| < |z_2|$ ise anlamlıdır ve z_1 'in başlangıç noktasına daha yakın olduğunu söyler.

Örnek 2.1 (Hangisi Daha Yakın?). $-3 + 2i$ ve $1 + 4i$ noktalarından hangisi başlangıç noktasına daha yakındır?

Çözüm.

$$|-3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}, \quad |1 + 4i| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$\sqrt{13} < \sqrt{17}$ olduğundan $-3 + 2i$ daha yakındır.

■

$z_1 - z_2$ farkı, z_2 'den z_1 'e giden vektördür; dolayısıyla

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

sayısı iki nokta arasındaki **uzaklıktır**. Bu yorumla,

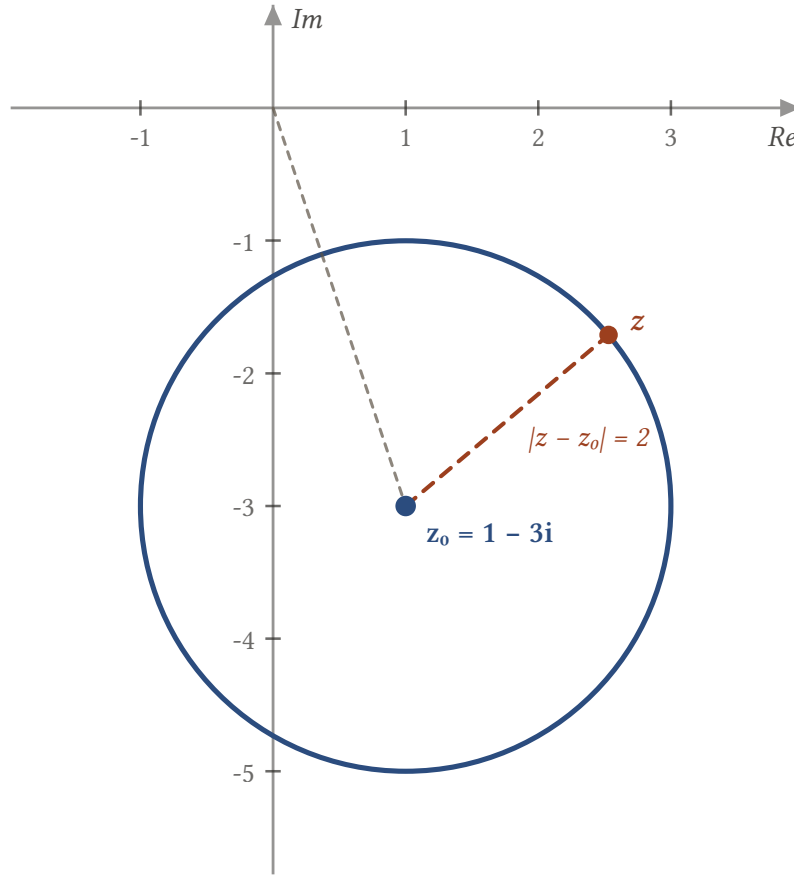
$$|z - z_0| = R$$

denklemini, merkezi z_0 ve yarıçapı R olan çemberi temsil eder.

Örnek 2.2 (Çember Denklemi). $|z - 1 + 3i| = 2$ denklemi hangi kümeyi temsil eder?

Çözüm.

Denklemini $|z - (1 - 3i)| = 2$ olarak okuyalım: merkezi $z_0 = 1 - 3i$, yani $(1, -3)$ noktası olan, 2 yarıçaplı çemberdir.



Şekil 2.3: $|z - z_0| = R$ denklemi, z_0 'a uzaklığı tam R olan noktaların kümesidir: merkezi z_0 , yarıçapı R olan çember. Örnekteki $|z - 1 + 3i| = 2$ için merkez $1 - 3i$ 'dir; işaretlere dikkat.

■

2.3 Üçgen Eşitsizliği

Teorem 2.1 (Üçgen Eşitsizliği). Her z_1, z_2 için

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Ayrıca ters yönlü kestirim geçerlidir:

$$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Birinci eşitsizlik geometrik olarak açıktır: bir üçgenin bir kenarı, diğer iki kenarın toplamından uzun olamaz. İkincisi birincisinden çıkar: $|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|$ yazıp düzenlemek, ardından z_1 ile z_2 'nin rollerini değiştirmek yeterlidir. z_2 yerine $-z_2$ konursa aynı çift, farklar için de kestirim verir:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Toplamın üçgen eşitsizliği, tümevarımla sonlu toplamlara genişler:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

Örnek 2.3 (Çember Üzerinde Kestirim). z , birim çember $|z| = 1$ üzerinde dolaşsın. $|z - 2|$ ifadesi için alt ve üst sınır bulunuz.

Çözüm.

Üçgen eşitsizliğinin iki yönü doğrudan uygulanır:

$$|z - 2| \leq |z| + 2 = 3, \quad |z - 2| \geq ||z| - 2| = 1$$

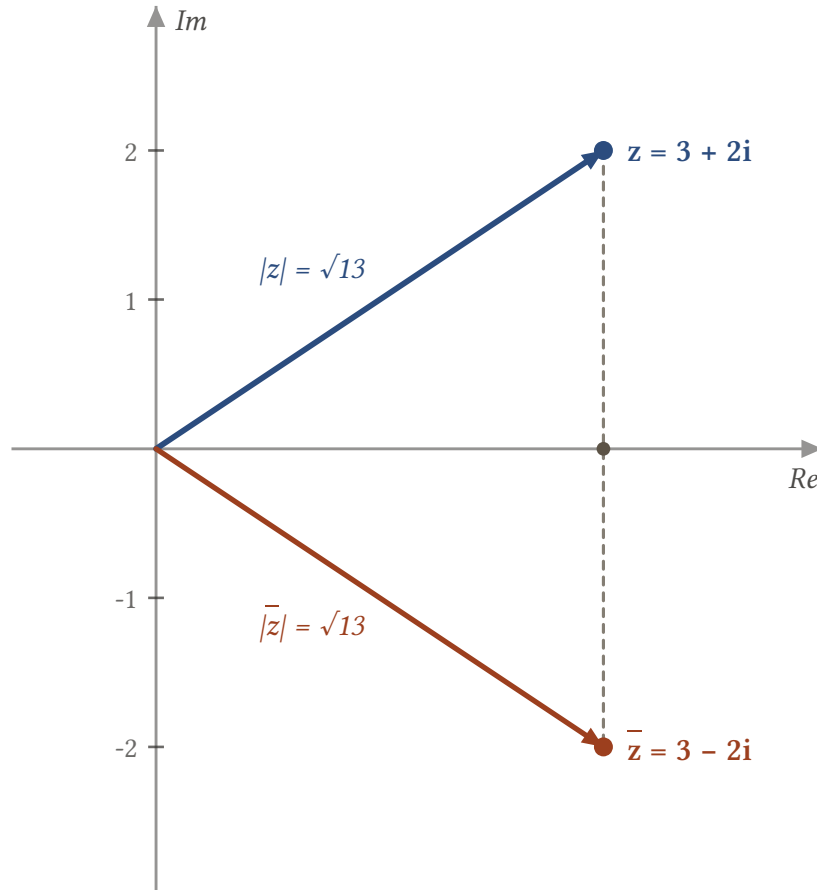
Geometrik doğrulama: birim çemberin 2 noktasına en yakın noktası $z = 1$ (uzaklık 1), en uzak noktası $z = -1$ 'dir (uzaklık 3).

■

2.4 Kompleks Eşlenik

Tanım 2.2 (Eşlenik). $z = x + iy$ sayısının **kompleks eşleniği**, z 'nin reel eksene göre yansımasıdır:

$$\bar{z} = x - iy$$



Şekil 2.4: Eşlenik $\bar{z}$, z 'nin reel eksene göre yansımasıdır: reel kısım aynı kalır, sanal kısmın işareti değişir. Yansıma boyu değiştirmedikinden $|\bar{z}| = |z|$ olur.

Temel özellikler tanımdan hemen doğrulanır:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Reel ve sanal kısımlar eşlenik cinsinden yazılabilir:

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

En önemli özdeşlik, modülle eşleniği birbirine bağlar:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$$

💡 Bölmenin gerçek mekanizması

$z\bar{z} = |z|^2$ özdeşliği, **önceki bölümdeki** bölme tekniğinin açıklamasıdır: pay ve paydayı $\bar{z}_2$ ile çarpmak, paydayı $|z_2|^2$ reel sayısına dönüştürür:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Örnek 2.4 (Eşlenikle Bölme). $\frac{-1+3i}{2-i}$ bölümünü hesaplayınız.

Çözüm.

$$\frac{-1+3i}{2-i} = \frac{(-1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-2-i+6i+3i^2}{5} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i$$

■

2.5 Çarpımın ve Bölümün Modülü

$z\bar{z} = |z|^2$ özdeşliği, modülün çarpımla uyumunu zahmetsizce verir:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2) \overline{(z_1 z_2)} = (z_1 \bar{z}_1)(z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2$$

Kareköklerin alınmasıyla ($|z| \geq 0$ olduğundan):

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0)$$

Örnek 2.5 (Polinom Modülü İçin Üst Sınır). $|z| < 2$ bölgesindeki her z için $|z^3 + 3z^2 - 2z + 1| < 25$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Üçgen eşitsizliği ve $|z^n| = |z|^n$ özelliğiyle:

$$|z^3 + 3z^2 - 2z + 1| \leq |z|^3 + 3|z|^2 + 2|z| + 1 < 8 + 12 + 4 + 1 = 25$$

■

Bu tür kestirimler ileride sık karşımıza çıkacak: **çevre integrallerinin modüllerini sınırlarken** aynı teknik kullanılır.

2.6 Alıştırma

Alıştırma 2.1 (Modül ve Eşlenik).

a) $\overline{(2+i)^2}$ sayısını hesaplayınız.

b) $z, |z| = 2$ çemberi üzerindeyken $\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| \leq \frac{1}{3}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) Eşlenik alma çarpımla değişebilir; önce kareyi açmak da aynı sonucu verir:

$$(2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i \Rightarrow \overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i$$

Kontrol olarak $\overline{(2 + i)^2} = (\overline{2 + i})^2 = (2 - i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$.

b) Paydayı çarpanlarına ayıralım:

$$z^4 - 4z^2 + 3 = (z^2 - 1)(z^2 - 3)$$

Her iki çarpanı ters üçgen eşitsizliğiyle alttan sınırlayalım. $|z| = 2$, yani $|z^2| = 4$ olduğundan

$$|z^2 - 1| \geq |z^2| - 1 = 3, \quad |z^2 - 3| \geq |z^2| - 3 = 1$$

Modül çarpımsal olduğundan

$$|z^4 - 4z^2 + 3| = |z^2 - 1| |z^2 - 3| \geq 3 \cdot 1 = 3$$

Payda sıfırdan farklı ve modülü en az 3 olduğuna göre

$$\left| \frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3} \right| = \frac{1}{|z^4 - 4z^2 + 3|} \leq \frac{1}{3}$$

■

Sırada, çarpmanın geometrisini görünür kılan gösterim var: [kutupsal ve üstel form](#).

3. Kutupsal ve Üstel Form

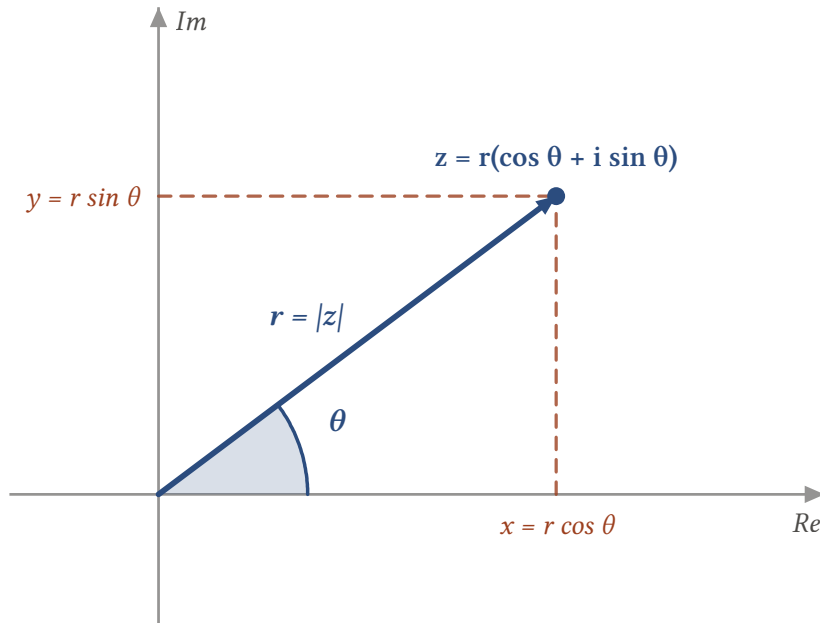
Kartezyen gösterim toplama için biçilmiş kaftandır; çarpmanın geometrisi ise kutupsal koordinatlarda görünür hâle gelir: modüller çarpılır, açılar toplanır. Bu bölümün amacı bu ilkeyi kesin biçime kavuşturmaktır. Yolun başında, “bir noktanın açısı” deyiminin sanıldığından daha ince bir kavram olduğunu göreceğiz.

3.1 Kutupsal Form ve Argüman

Sıfırdan farklı $z = x + iy$ sayısının noktası, kutupsal koordinatlarla $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ olarak yazılabilir. O zaman

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

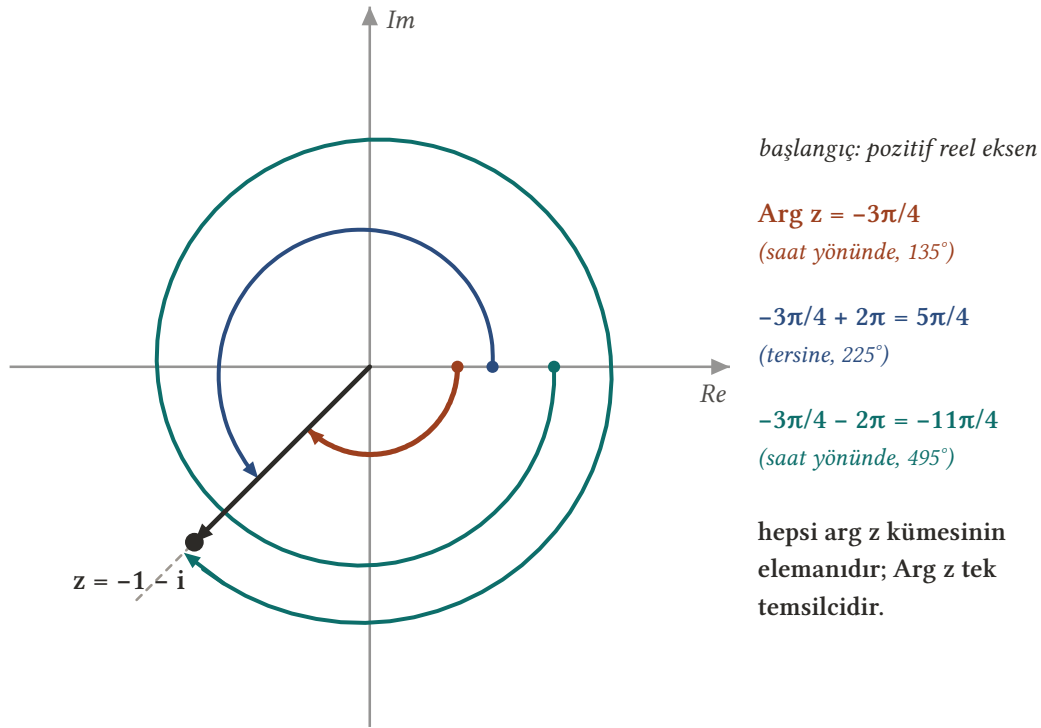
Burada $r = |z|$ modüldür; θ ise pozitif reel ekseninden z vektörüne, saat yönünün tersi pozitif sayılarla ölçülen yönlü açıdır. Bu kitapta tüm açılar **radyan** cinsindendir.



Şekil 3.1: Kutupsal gösterimin iki verisi: r , vektörün boyu (modül); θ , pozitif reel ekseninden vektöre saat yönünün tersine ölçülen açı (argüman). Bileşenler $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ile geri gelir.

3.1.1 Bir Noktanın Kaç Açısı Vardır?

r tek biçimde belirlidir; θ ise değildir. $z = -1 - i$ noktasına pozitif reel ekseninden başlayıp saat yönünde $3\pi/4$ dönerek varılır; saat yönünün tersine $5\pi/4$ dönerek de, saat yönünde bir tam tur fazlasıyla $3\pi/4 + 2\pi = 11\pi/4$ dönerek de varılır. Sebep basittir: $\cos$ ve $\sin$ fonksiyonlarının periyodu 2π olduğundan, $x = r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta$ eşitlikleri bir θ için sağlanıyorsa $\theta + 2\pi$, $\theta - 2\pi$ ve genel olarak $\theta + 2n\pi$ için de sağlanır. “Noktanın açısı” tek bir sayı değil, 2π aralıklarla dizilmiş sonsuz bir sayı ailesidir.



Şekil 3.2: Aynı z noktasına pozitif reel eksen üzerinden başlayarak sonsuz çoklukta açıyla varılır: saat yönünde $-3\pi/4$, saat yönünün tersine tam bir tur fazlasıyla $5\pi/4$, ya da saat yönünde bir tur fazlasıyla $-11\pi/4$. Küçük harfli $\arg z$ bu açıların **tümünün kümesidir**; büyük harfli $\text{Arg } z$ içlerinden $(-\pi, \pi]$ aralığına düşen tek değeri seçer.

Bu belirsizlik bir kusur değil, kompleks analizin karakteridir: logaritmanın çok değerliliği, dal kesimleri, köklerin çokluğu — hepsi buradan doğar. Belirsizlikle başa çıkmanın yolu, iki ayrı nesneye iki ayrı ad vermektir: açıların **kümesi** ve o kümeden anlaşmayla seçilen **tek temsilci**.

Tanım 3.1 (Argüman ve Esas Argüman). $z = x + iy \neq 0$ ve $r = |z|$ olsun.

(i) **Argüman.** $x = r \cos \theta$ ve $y = r \sin \theta$ eşitliklerini *birlikte* sağlayan her reel θ sayısına z 'nin bir **argümanı** denir.

(ii) **Argüman kümesi.** z 'nin tüm argümanlarının kümesi, küçük harfle, $\arg z$ ile gösterilir. θ_0 bir argümanırsa

$$\arg z = \{\theta_0 + 2n\pi : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

(iii) **Esas argüman.** $\arg z$ kümesinin $-\pi < \theta \leq \pi$ aralığına düşen **tek** elemanına z 'nin **esas argümanı** denir ve büyük harfle, $\text{Arg } z$ ile gösterilir. Bu kitap boyunca Θ harfi esas argüman için ayrılmıştır: $\Theta = \text{Arg } z$. Böylece

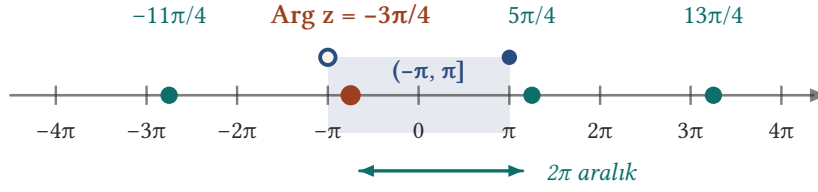
$$\arg z = \{\text{Arg } z + 2n\pi : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad -\pi < \text{Arg } z \leq \pi$$

$z = 0$ için $r = 0$ olduğundan **her** θ (i)'yi sağlar; tek bir açı seçmenin anlamı yoktur. Bu yüzden $\arg 0$ ve $\text{Arg } 0$ tanımsız bırakılır.

Tanımdaki iki iddia kısa birer gerekçe hak eder.

- (ii)'de “başka argüman yoktur”: θ ve θ_0 ikisi de argümanırsa $\cos \theta = \cos \theta_0 = x/r$ ve $\sin \theta = \sin \theta_0 = y/r$; dolayısıyla $\cos(\theta - \theta_0) = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 = (x^2 + y^2)/r^2 = 1$, yani $\theta - \theta_0$, 2π 'nin bir tam katıdır.
- (iii)'te “tek eleman”: $\arg z$, ardışık elemanları tam 2π aralıklı bir kümedir; uzunluğu 2π olan yarı açık $(-\pi, \pi]$ aralığı böyle bir kümeden tam bir eleman yakalar. Aralık iki ucundan kapalı olsaydı negatif reel

eksen üzerindeki sayılar için $-\pi$ ve π ikisi birden girerdi; iki ucundan açık olsaydı bu sayılar temsilsiz kalırdı. Yarı açıklık tesadüf değildir.



Şekil 3.3: $\arg(-1 - i)$ kümesi sayı doğrusunda: 2π aralıklı sonsuz nokta. Uzunluğu 2π olan $(-\pi, \pi]$ penceresi bu noktalardan tam birini yakalar; yakalanan nokta $\text{Arg } z$ 'dir. Pencerenin sol ucu açık ($-\pi$ dışarıda), sağ ucu kapalıdır (π içeride).

⚠ Küçük harf küme, büyük harf sayı

- $\arg z$ sonsuz elemanlı bir **kümedir**; $\text{Arg } z$ tek bir **reel sayıdır** ve $\text{Arg } z \in \arg z$.
- Doğru yazım $\theta \in \arg z$ biçimindedir: örneğin $5\pi/4 \in \arg(-1 - i)$. Birçok kitaptaki “ $\arg z = 5\pi/4$ ” ifadesi, “ $5\pi/4$, z 'nin bir argümanıdır” cümlesinin kısaltmasıdır; “ $\arg z = \text{Arg } z + 2n\pi$ ” yazımı da kümenin tamamının kısaltmasıdır.
- $5\pi/4$ ile $-3\pi/4$ arasında “doğru-yanlış” ilişkisi yoktur; ikisi de $-1 - i$ 'nin argümanıdır. Yalnızca ikincisi *esas* argümandır.
- $(-\pi, \pi]$ bir **uzlaşımdır**: bazı kaynaklar ve hesap makineleri $[0, 2\pi)$ kullanır. Bu kitap baştan sona $(-\pi, \pi]$ kullanır; **logaritmanın esas dalı** bu seçime dayanacaktır.
- Esas argüman yalnızca **yöne** bağlıdır: $t > 0$ reel sayısı için $\text{Arg}(tz) = \text{Arg } z$.

3.1.2 Esas Argümanın Hesaplanması

Elimizde x ve y varken $\text{Arg } z$ nasıl bulunur? İlk akla gelen, $\tan \theta = y/x$ eşitliğini çözmektir; ama bu tek başına yetmez. Eksiksiz kural şudur.

Teorem 3.1 (Esas Argümanın Hesaplanması). $\arctan$, değerleri $(-\pi/2, \pi/2)$ aralığında olan reel $\arctan$ fonksiyonu olmak üzere $z = x + iy \neq 0$ için

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

İspat.

$\Theta = \text{Arg } z$ olsun; tanım gereği $\cos \Theta = x/r$ ve $\sin \Theta = y/r$.

$x > 0$ ise $\cos \Theta > 0$, dolayısıyla $\Theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Bu aralıkta $\tan$ birebirdir ve $\tan \Theta = y/x$ olduğundan $\Theta = \arctan(y/x)$.

$x < 0$ ve $y \geq 0$ ise $\cos \Theta < 0$ ve $\sin \Theta \geq 0$; yani $\Theta \in [\pi/2, \pi]$. O hâlde $\Theta - \pi \in [-\pi/2, 0]$ ve $\tan(\Theta - \pi) = \tan \Theta = y/x$; dolayısıyla $\Theta - \pi = \arctan(y/x)$. ($y = 0$ için sonuç $\arctan 0 + \pi = \pi$: negatif reel eksen π 'ye düşer, $-\pi$ 'ye değil.)

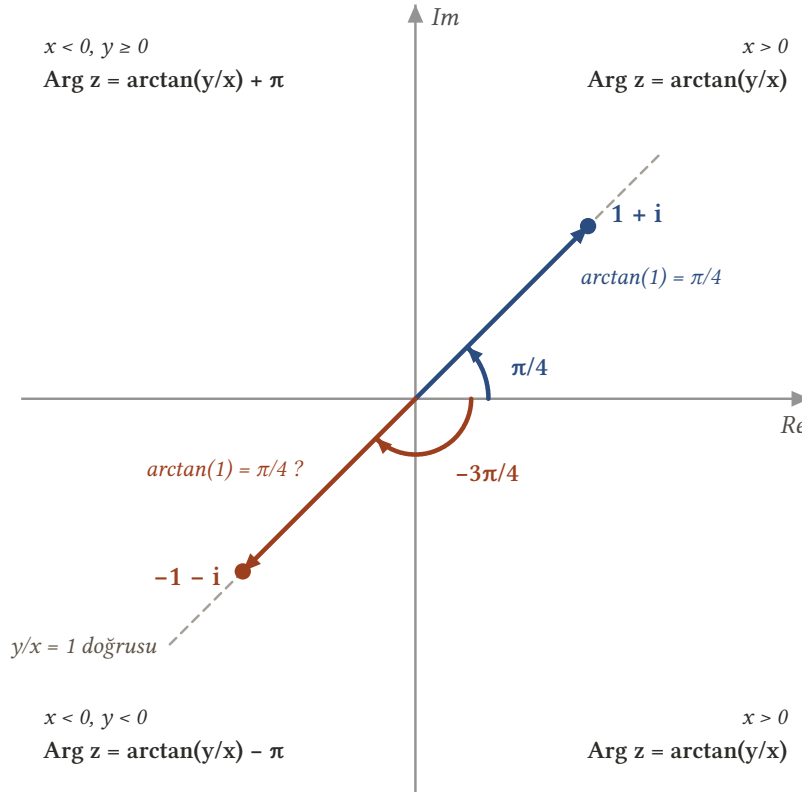
$x < 0$ ve $y < 0$ ise $\Theta \in (-\pi, -\pi/2)$; aynı akıl yürütme $\Theta + \pi \in (0, \pi/2)$ için yapılır.

$x = 0$ ise $\cos \Theta = 0$; $(-\pi, \pi]$ aralığında kosinüsün sıfırları yalnızca $\pm\pi/2$ 'dir ve $\sin \Theta = y/r$ 'nin işareti hangisi olduğunu söyler.

■

Neden $\arctan(y/x)$ tek başına yetmez? Üç nedenle:

1. **Bilgi kaybı.** $\tan$ 'ın periyodu π 'dir, 2π değil. z ile $-z$ aynı y/x oranını verir $-1 + i$ ve $-1 - i$ için $y/x = 1$ – oysa esas argümanları $\pi/4$ ve $-3\pi/4$ 'tür. Oran alınırken x ve y 'nin işaretleri, yani hangi çeyrekte olduğumuz bilgisi silinir.
2. **Değer aralığı.** $\arctan$ yalnızca $(-\pi/2, \pi/2)$ değerlerini üretir; bu tam olarak sağ yarı düzlemin ($x > 0$) esas argümanlarıdır. Sol yarı düzlemde sonuç tam π kadar şaşar; düzeltmenin işareti ($+\pi$ mi, $-\pi$ mi) sonucun $(-\pi, \pi]$ aralığına düşme zorunluluğuyla belirlenir.
3. **$x = 0$ durumu.** y/x tanımsızdır, ama $\text{Arg}(iy) = \pm\pi/2$ gayet tanımlıdır.



Şekil 3.4: $1 + i$ ve $-1 - i$ için y/x oranı aynıdır (1); $\arctan(y/x)$ ikisine de $\pi/4$ der, çünkü hangi çeyrekte olduğunu bilmez. $\text{atan2}(y, x)$ işaretleri ayrı ayrı okur ve köşelerdeki düzeltmeyi kendisi yapar; sonucu her zaman $(-\pi, \pi]$ aralığındadır, yani tam olarak Arg z'dir.

Bölge	İşaretler	Arg z	Değer aralığı
I. çeyrek	$x > 0, y > 0$	$\arctan(y/x)$	$(0, \pi/2)$
II. çeyrek	$x < 0, y > 0$	$\arctan(y/x) + \pi$	$(\pi/2, \pi)$
III. çeyrek	$x < 0, y < 0$	$\arctan(y/x) - \pi$	$(-\pi, -\pi/2)$
IV. çeyrek	$x > 0, y < 0$	$\arctan(y/x)$	$(-\pi/2, 0)$
pozitif reel eksen	$x > 0, y = 0$	0	
pozitif sanal eksen	$x = 0, y > 0$	$\pi/2$	
negatif reel eksen	$x < 0, y = 0$	π	
negatif sanal eksen	$x = 0, y < 0$	$-\pi/2$	

i Bilgisayarda esas argüman: atan2

Teoremdaki parçalı ifade, programlama dillerindeki **atan2** fonksiyonunun ta kendisidir:

$$\text{Arg}(x + iy) = \text{atan2}(y, x)$$

atan2 iki girdiyi ayrı ayrı alır – girdi sırası (y, x) 'tir, önce sanal kısım – ve tam da bu sayede işaret bilgisini korur: çeyrek düzeltmesini kendisi yapar ve her zaman $(-\pi, \pi]$ aralığında, radyan cinsinden bir değer döndürür. Yani **atan2**, **arctan**'ın çeyrekleri bilen sürümüdür.

- Python: `math.atan2(y, x)` ya da doğrudan `cmath.phase(z)`; NumPy: `np.angle(z)`.
- C, C++, Java, JavaScript, MATLAB: `atan2(y, x)`. Excel'de sıra terstir: `ATAN2(x; y)`.
- `atan2(0, 0)` makinede 0 döndürür; bu bir programlama uzlaşımıdır, matematikte Arg 0 tanımsızdır.

Örneğin `math.atan2(-1, -1)` çağırısı $-2,356... = -3\pi/4$ verir – Arg $(-1 - i)$ 'nin ta kendisi.

Örnek 3.1 (Esas Argümanın Bulunması). $z = -1 - i$ için Arg z değerini ve arg z kümesini bulunuz.

Çözüm.

$r = \sqrt{2}$; $x = -1 < 0$ ve $y = -1 < 0$ olduğundan teoremin üçüncü durumu geçerlidir:

$$\text{Arg}(-1 - i) = \arctan \frac{-1}{-1} - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

Sağlama: $\sqrt{2} \cos(-3\pi/4) = -1$ ve $\sqrt{2} \sin(-3\pi/4) = -1$; iki eşitlik de tutuyor. Argüman kümesi

$$\arg(-1 - i) = \left\{ -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} = \left\{ \dots, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \dots \right\}$$

Şekilden “bariz” görünen $5\pi/4$ (225°) de bir argümandır ($n = 1$); yanlış değildir, yalnızca esas olmayan bir temsilcidir. Sık yapılan hata, $\arctan(y/x) = \pi/4$ değerini doğrudan almaktır: $\pi/4$, $1 + i$ 'nin esas argümanıdır, $-1 - i$ 'nin değil – iki nokta aynı doğru üzerindedir ama başlangıçtan çıkan zıt ışınlardır.

■

Örnek 3.2 (Aynı Oran, Dört Farklı Açı). $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$, $1 - i$ noktalarının ve -2 , $-3i$, 5 sayılarının esas argümanlarını bulunuz.

Çözüm.

Dört köşe noktasında $|y/x| = 1$ 'dir, ama çeyrekler farklıdır:

$$\text{Arg}(1 + i) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{Arg}(-1 + i) = \arctan(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

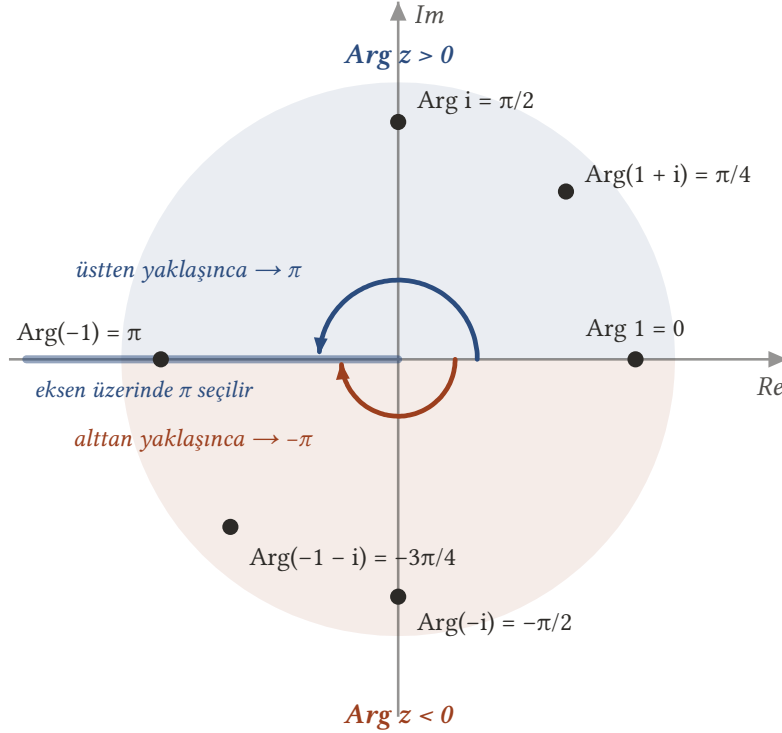
$$\text{Arg}(-1 - i) = \arctan 1 - \pi = -\frac{3\pi}{4}, \quad \text{Arg}(1 - i) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

Eksen üzerindeki için tabloya bakmak yeterlidir: Arg $(-2) = \pi$ ($-\pi$ değil!), Arg $(-3i) = -\pi/2$, Arg $5 = 0$.

■

💡 Esas argüman süreksizdir

$\varepsilon \rightarrow 0^+$ için $\text{Arg}(-1 + i\varepsilon) \rightarrow \pi$, ama $\text{Arg}(-1 - i\varepsilon) \rightarrow -\pi$: negatif reel eksen den geçerken esas argüman 2π kadar **sıçrar**. Arg, negatif reel eksen ve başlangıç noktası çıkarılmış düzlemde süreklidir; negatif reel eksenin her noktasında süreksizdir. Bu “kesik”, ileride **logaritmanın esas dalının** dal kesimi olarak yeniden karşımıza çıkacaktır.



Şekil 3.5: Esas argümanın kuralı: üst yarı düzlemde 0 ile π arası, alt yarı düzlemde 0 ile $-\pi$ arası ölç. Negatif reel eksen de iki ölçüm karşılaşır ve π seçilir ($-\pi$ hiç kullanılmaz); eksen i yukarıdan aşağıya geçerken $\text{Arg } z$ aniden 2π düşer. Bu eksen, Arg'ın süreksiz olduğu tek yerdir.

3.2 Euler Formülü ve Üstel Form

Tanım 3.2 (Euler Formülü). Her reel θ için $e^{i\theta}$ sembolü

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

olarak tanımlanır. Bu tanımla kutupsal form, kompakt **üstel forma** dönüşür:

$$z = re^{i\theta}, \quad r = |z|, \quad \theta \in \arg z$$

Buradaki $\theta \in \arg z$ yazımına dikkat: üstel formda θ olarak z 'nin herhangi bir argümanı kullanılabilir; esas argümanı seçmek zorunlu değildir.

Örnek 3.3 (Üstel Forma Geçiş). $-1 - i$ sayısını üstel formda yazınız.

Çözüm.

$r = \sqrt{2}$ ve $\text{Arg } z = -3\pi/4$ olduğundan

$$-1 - i = \sqrt{2} e^{-i3\pi/4}$$

Argümanın tüm değerleri istenirse:

$$-1 - i = \sqrt{2} \exp\left[i\left(-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)\right] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

■

Bazı özel değerler ezber hâline gelecek kadar sık kullanılır:

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{-i\pi/2} = -i, \quad e^{i2n\pi} = 1$$

$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$ olduğundan $e^{i\theta}$, birim çember üzerinde açısı θ olan noktadır. Bu gözlem çemberlere doğal parametrisasyon sağlar:

$$z = Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad \text{ve} \quad z = z_0 + Re^{i\theta} (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

eğrileri sırasıyla başlangıç merkezli ve z_0 merkezli R yarıçaplı çemberlerdir.

3.3 Üstel Formda Çarpım ve Bölüm

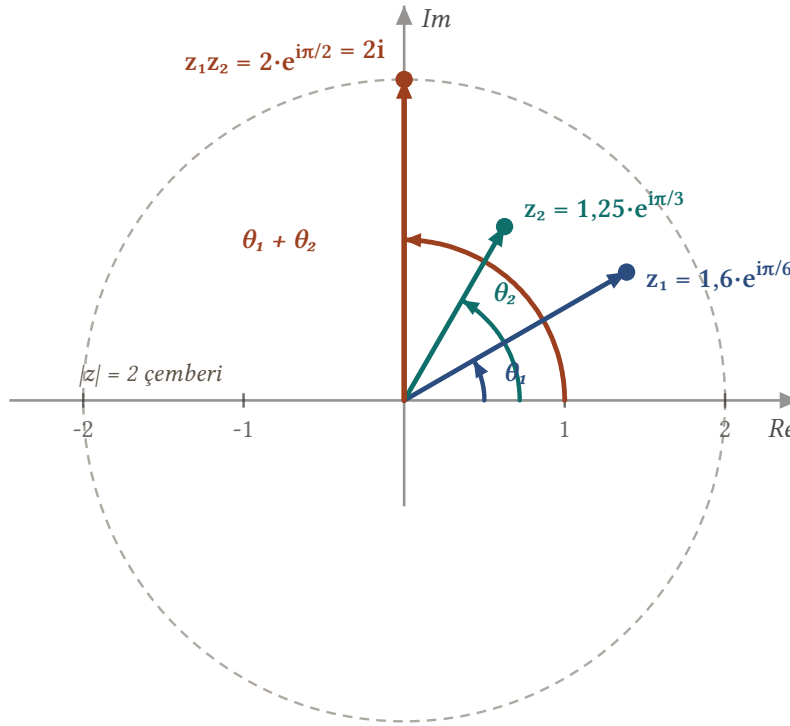
Trigonometrik toplam formülleri, üstel gösterimde tek satıra iner:

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Buradan $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ve $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ için:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad z^{-1} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$$

Çarpmanın geometrik anlamı artık açıktır: z_1 ile çarpmak, düzlemi $|z_1|$ oranında ölçekleyip $\arg z_1$ kadar döndürür.



Şekil 3.6: Çarpımda modüller çarpılır, açılar toplanır: $1,6 \cdot 1,25 = 2$ ve $\pi/6 + \pi/3 = \pi/2$. z_1 ile çarpmak, düzlemi $|z_1|$ oranında ölçekleyip arg z_1 kadar döndürmektir.

3.4 Kuvvetler ve de Moivre Formülü

Teorem 3.2 (Üstel Formda Kuvvetler). $z = re^{i\theta} \neq 0$ ve n herhangi bir tam sayı olmak üzere

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

İspat.

$n \geq 1$ için tümevarım: $n = 1$ açıktır; $z^n = z^{n-1}z = (r^{n-1}e^{i(n-1)\theta})(re^{i\theta}) = r^n e^{in\theta}$. $n = 0$ için iki taraf da 1'dir. $n = -m < 0$ için $z^n = (z^{-1})^m$ yazılır ve $z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta}$ için pozitif kuvvet sonucu uygulanır.

■

Örnek 3.4 (Yüksek Kuvvet Hesabı). $(\sqrt{3} + i)^7$ sayısını $x + iy$ biçiminde yazınız.

Çözüm.

$|\sqrt{3} + i| = 2$ ve $\text{Arg}(\sqrt{3} + i) = \pi/6$; dolayısıyla

$$(\sqrt{3} + i)^7 = 2^7 e^{i7\pi/6} = (2^6 e^{i\pi})(2e^{i\pi/6}) = -64(\sqrt{3} + i)$$

■

$r = 1$ alınırsa kuvvet formülü **de Moivre formülünü** verir:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Örnek 3.5 (de Moivre ile Kat Açılış Formülleri). $n = 2$ için de Moivre formülünden kat açılış özdeşliklerini türetiniz.

Çözüm.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + i 2 \sin \theta \cos \theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

Reel ve sanal kısımların eşitlenmesiyle:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

■

3.5 Çarpımların ve Bölümlerin Argümanları

Çarpım kuralı $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$, argüman **kümeleri** için bir özdeşliğe dönüşür:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

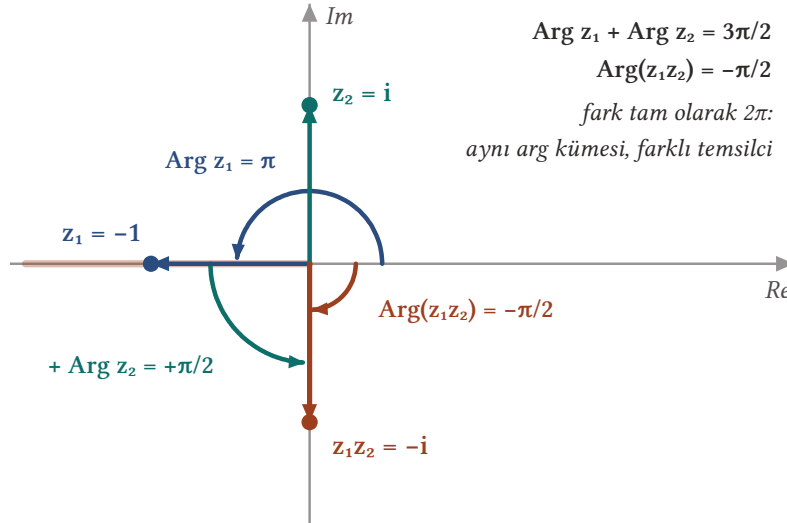
Bu eşitlikler küme eşitliği olarak okunmalıdır: soldaki kümenin her elemanı, sağdaki toplamın uygun temsilcileriyle elde edilir ve tersi de geçerlidir.

⚠ Esas argüman toplamsal değildir

Tanımdaki küme-sayı ayrımının ilk somut sonucu budur: aynı özdeşlik Arg için genelde **yanlıştır**. Örneğin $z_1 = -1$, $z_2 = i$ alınırsa

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}, \quad \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

İki değer eşit değildir; ama 2π farkla aynı argüman kümesindedirler: $-\pi/2 + 2\pi = 3\pi/2$. Çok değerli arg ile yazılan özdeşlik bozulmaz. Genel kural: $\text{Arg}(z_1 z_2)$, $\text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$ toplamının $(-\pi, \pi]$ aralığına indirgenmiş hâlidir; gerekirse 2π eklenir ya da çıkarılır.



Şekil 3.7: -1 'in açısı π , üstüne i 'nin $\pi/2$ 'si eklenince toplam $3\pi/2$ olur ve ok alt yarı düzleme, $-i$ noktasına varır. Ama $-i$ 'nin esas argümanı $3\pi/2$ değil, $-\pi/2$ 'dir: toplam $(-\pi, \pi]$ aralığından taşmış ve 2π geri sarılmıştır. Küme olarak $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ eşitliği yine de bozulmaz.

Örnek 3.6 (Bölümün Esas Argümanı). $z = \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$ için $\text{Arg } z$ değerini bulunuz.

Çözüm.

Argüman özdeşliğiyle bir argüman değeri bulalım ($\ni$ işareti “sağdaki sayı soldaki kümenin elemanıdır” demektir):

$$\arg z \ni \arg (-2) - \arg (1 + \sqrt{3}i) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$2\pi/3$ değeri $(-\pi, \pi]$ aralığındadır; dolayısıyla doğrudan esas argümandır:

$$\arg z = \frac{2\pi}{3}$$

Kontrol: $z = \frac{-2(1-\sqrt{3}i)}{4} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ikinci çeyrektedir ve modülü 1’dir; açısı gerçekten $2\pi/3$ ’tür.

■

3.6 Alıştırma

Alıştırma 3.1 (Üstel Form Uygulamaları).

- $(1 + \sqrt{3}i)^{-10}$ sayısını $x + iy$ biçiminde yazınız.
- $|z_1| = |z_2|$ olsa bile $\arg(z_1 z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2$ olabileceğine bir örnek veriniz.
- $-3 + 4i$ ve $3 - 4i$ sayılarının esas argümanlarını üç ondalık basamakla bulunuz.

Çözüm.

a) Önce tabanı üstel forma çevirelim: $|1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$ ve nokta birinci çeyrekte, $\tan \theta = \sqrt{3}$ olduğundan $\arg(1 + \sqrt{3}i) = \pi/3$:

$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\pi/3}$$

Kuvvet kuralı negatif tam sayılar için de geçerliydi:

$$(1 + \sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-10} e^{-i10\pi/3}$$

Açıyı esas aralığa indirgeyelim; 2π ’nin katlarını eklemek argümanı değiştirmez:

$$-\frac{10\pi}{3} + 4\pi = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow (1 + \sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-10} e^{i2\pi/3}$$

Son olarak $e^{i2\pi/3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ yazılırsa

$$(1 + \sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-10} \cdot \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = 2^{-11} (-1 + \sqrt{3}i)$$

b) $z_1 = z_2 = -1$ alalım; modüller eşittir: $|z_1| = |z_2| = 1$. Bir yanda

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(1) = 0$$

öte yanda

$$\arg z_1 + \arg z_2 = \pi + \pi = 2\pi$$

İki değer eşit değildir. Eşitliğin bozulması bir çelişki doğurmaz: 0 ile 2π , 2π farkla aynı argüman kümesindedir; çok değerli arg ile yazılan özdeşlik ayaktadır. Bozulan yalnızca esas argümanın $(-\pi, \pi]$ aralığına zorlanmasıdır.

c) $\arctan(4/3) \approx 0,927$ değerini aklımızda tutalım. $-3 + 4i$ ikinci çeyrektedir ($x < 0, y > 0$), dolayısıyla

$$\arg(-3 + 4i) = \arctan \frac{4}{-3} + \pi = -0,927 + 3,142 = 2,214$$

$3 - 4i$ ise dördüncü çeyrektedir ($x > 0$), düzeltme gerekmez:

$$\text{Arg}(3 - 4i) = \arctan \frac{-4}{3} = -0,927$$

İki sayı birbirinin negatfidir ($3 - 4i = -(-3 + 4i)$); esas argümanları arasındaki fark π 'dir, beklendiği gibi. Bir bilgisayarda `math.atan2(4, -3)` ve `math.atan2(-4, 3)` aynı sonuçları verir.

■

Üstel formun ilk büyük ödülü bir sonraki bölümde: her kompleks sayının tam n tane n -inci kökü vardır ve hepsi bir **düzgün çokgenin köşelerinde** oturur.

4. Kompleks Sayıların Kökleri

Reel sayılarda $x^2 = -1$ çözümsüzdü; kompleks sayılarda ise durum tam tersine döner: sıfırdan farklı **her** sayının tam n tane n -inci kökü vardır. Üstel form bu kökleri hem bulur hem de geometrilerini gösterir: hepsi bir çember üzerinde, düzgün bir çokgenin köşelerindedir.

4.1 Üstel Formların Eşitliği

Kök almanın anahtarı, iki üstel formun ne zaman aynı sayıyı temsil ettiğini bilmektir:

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ ve } \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Modüller eşit olmalı; argümanlar ise ancak 2π 'nin bir tam katı kadar farklı olabilir.

4.2 n -inci Köklerin Bulunması

$z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ verilsin ve $z^n = z_0$ denklemini çözelim. $z = r e^{i\theta}$ yazılırsa denklem

$$r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$$

olur. Eşitlik ölçütüne göre $r^n = r_0$ ve $n\theta = \theta_0 + 2k\pi$; yani

$$r = \sqrt[n]{r_0}, \quad \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Burada $\sqrt[n]{r_0}$, pozitif reel sayının bilinen tek pozitif köküdür. k 'nin ardışık n değeri farklı noktalar üretir; k 'ye n eklemek argümanı 2π artırdığından aynı noktaya döner.

Teorem 4.1 (n -inci Kökler). $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \neq 0$ sayısının tam n tane n -inci kökü vardır:

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Kökler, $|z| = \sqrt[n]{r_0}$ çemberi üzerinde eşit aralıklarla dizilir ve $n \geq 3$ için düzgün bir n -genin köşelerini oluşturur.

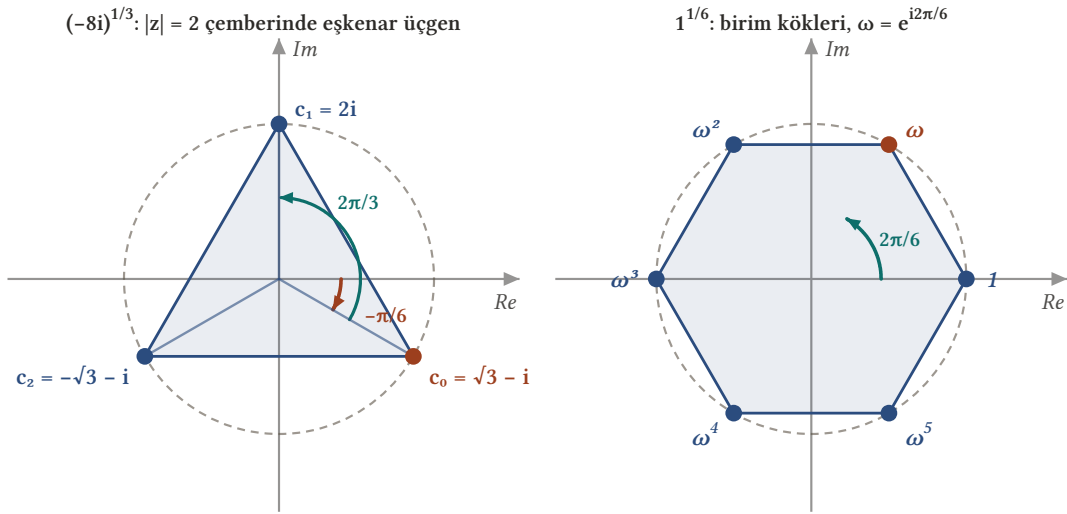
Köklerin kümesi $z_0^{1/n}$ ile gösterilir. $\theta_0 = \text{Arg } z_0$ seçilerek elde edilen c_0 köküne **esas kök** denir.

💡 Tek kökten diğerlerine

$\omega_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$ yazılırsa tüm kökler tek kökten üretilir:

$$c_k = c_0 \omega_n^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Geometrik okuma: ω_n ile çarpmak $2\pi/n$ kadar döndürmektir; kökler, c_0 'ın ardışık döndürmeleridir.



Şekil 4.1: Solda $-8i$ 'nin üç küp kökü: esas kök c_0 açısı $\text{Arg}(-8i)/3 = -\pi/6$ olan noktadır, diğerleri $2\pi/3$ 'lük adımlarla dönerek elde edilir. Sağda 1'in altıncı kökleri: her kök bir öncekinin ω ile çarpımıdır, yani $2\pi/6$ kadar döndürülmüştür.

4.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 4.1 (Küp Kökler). $(-8i)^{1/3}$ köklerinin tümünü bulunuz.

Çözüm.

$-8i = 8 \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)$ olduğundan kökler

$$c_k = 2 \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2)$$

Tek tek yazalım:

$$c_0 = 2e^{-i\pi/6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} - i$$

$$c_1 = 2e^{i\pi/2} = 2i$$

$$c_2 = 2e^{i7\pi/6} = -\sqrt{3} - i$$

Üç kök, $|z| = 2$ çemberi üzerinde eşkenar üçgenin köşeleridir. Sağlama: $(2i)^3 = 8i^3 = -8i$.

■

Örnek 4.2 (Birim Kökleri). 1 sayısının n -inci köklerini bulunuz.

Çözüm.

$1 = 1 \cdot e^{i0}$ olduğundan

$$1^{1/n} = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) = 1, \omega_n, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$$

Kökler birim çember üzerindedir ve 1 noktası her zaman köşelerden biridir. $n = 2$ için ± 1 ; $n = 3$ için eşkenar üçgen $1, (-1 \pm \sqrt{3}i)/2$; $n = 4$ için kare $\pm 1, \pm i$ elde edilir.

■

Örnek 4.3 (Karekökler ve Yarım Aç). $(\sqrt{3} + i)^{1/2}$ köklerini $x + iy$ biçiminde yazınız.

Çözüm.

$\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$ olduğundan iki karekök

$$c_k = \sqrt{2} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{12} + k\pi\right)\right] \quad (k = 0, 1)$$

biçimindedir; yani $c_1 = -c_0$. Esas kökü açmak için yarım açı formüllerini kullanalım:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/6)}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi/6)}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Böylece

$$c_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)$$

ve kökler $\pm c_0$ olur.

■

4.4 Alıştırma

Alıştırma 4.1 (Kök Hesapları).

- a) $(-16)^{1/4}$ köklerinin tümünü bulunuz ve $\pm\sqrt{2}(1 \pm i)$ biçiminde yazılabildiklerini gösteriniz.
b) $(-1)^{1/3}$ köklerini bulunuz ve $z^3 + 1$ polinomunun $(z + 1)(z^2 - z + 1)$ çarpanlarına ayrılışıyla karşılaştırınız.

Çözüm.

a) Önce -16 sayısını üstel forma yazalım: modülü 16, esas argümanı π 'dir, yani $-16 = 16e^{i\pi}$. Dördüncü kökler formülünde $r_0 = 16$, $\theta_0 = \pi$, $n = 4$ alınır:

$$c_k = \sqrt[4]{16} \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right] = 2 \exp\left[i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

Dört değeri tek tek yazalım; $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan

$$c_0 = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1 + i), \quad c_1 = 2e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}(-1 + i)$$

$$c_2 = 2e^{i5\pi/4} = -\sqrt{2}(1 + i), \quad c_3 = 2e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}(1 - i)$$

Dört kök, işaretlerin dört seçimiyle tam olarak $\pm\sqrt{2}(1 \pm i)$ kümesini oluşturur. Beklendiği gibi hepsi 2 yarıçaplı çember üzerinde ve bir karenin köşelerinde oturur.

b) $-1 = e^{i\pi}$ olduğundan küp kökler

$$c_k = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \quad (k = 0, 1, 2)$$

yani

$$c_0 = e^{i\pi/3} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad c_1 = e^{i\pi} = -1, \quad c_2 = e^{i5\pi/3} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Karşılaştırma için çarpanlara ayrılışa bakalım. $z^3 + 1 = (z + 1)(z^2 - z + 1)$ ifadesinin sıfırları, $z = -1$ ile ikinci dereceden denklemin kökleridir:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Bunlar tam olarak c_1 , c_0 ve c_2 'dir: kök alma işleminin verdiği üç sayı ile polinomun sıfırları aynı kümedir.

■

Kompleks sayıların cebiri ve geometrisi elimizde; analiz yapabilmek için son bir hazırlık kaldı: düzlemin [komşuluk](#), [iç nokta](#), [domen](#) gibi topolojik kavramları.

5. Kompleks Düzlemde Bölgeler

Limit, süreklilik ve analitiklik gibi kavramların tümü “bir noktanın yakını” fikrine dayanır. Bu bölümde, ileride sürekli kullanacağımız topolojik sözlüğü kuruyoruz: komşuluk, açık ve kapalı küme, domen, bölge ve yığılma noktası.

5.1 Komşuluklar

Tanım 5.1 (Komşuluk). z_0 noktasının bir ε -komşuluğu, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$|z - z_0| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan tüm z noktalarının kümesidir: z_0 merkezli, ε yarıçaplı çemberin **içi**. Merkezin çıkarılmasıyla elde edilen

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

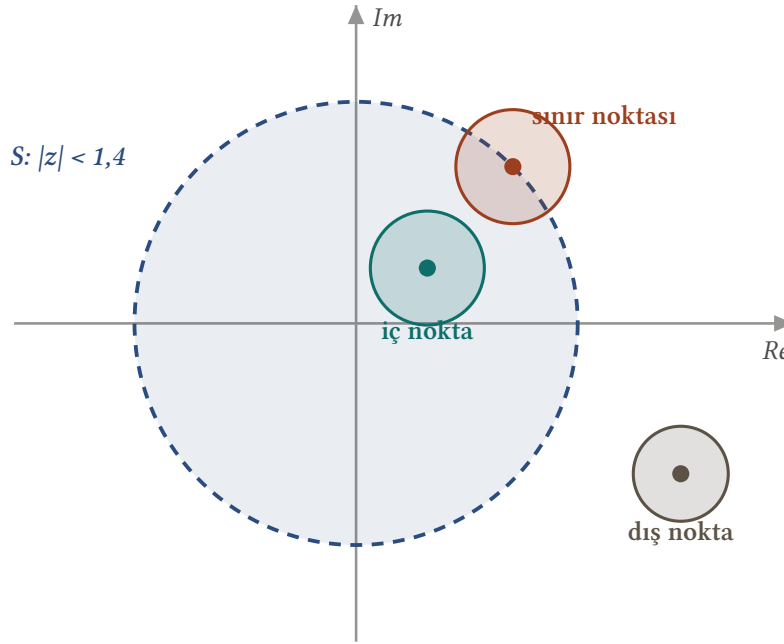
kümesine **delinmiş komşuluk** denir.

5.2 İç, Dış ve Sınır Noktaları

S , kompleks düzlemin bir alt kümesi olsun. Bir z_0 noktası için üç olasılık vardır:

- z_0 'ın tamamen S içinde kalan bir komşuluğu varsa z_0 , S 'nin bir **iç noktasıdır**.
- z_0 'ın S ile hiç ortak noktası olmayan bir komşuluğu varsa z_0 , S 'nin bir **dış noktasıdır**.
- Bu ikisi de değilse — yani her komşuluğu hem S 'den hem S dışından nokta içeriyorsa — z_0 bir **sınır noktasıdır**.

Sınır noktalarının tümüne S 'nin **sınırı** denir.



Şekil 5.1: Açık disk S için üç tür nokta. İç noktanın tamamen S 'de kalan bir komşuluğu vardır; dış noktanın S 'ye hiç değmeyen bir komşuluğu vardır; sınır noktasının ise **her** komşuluğu iki taraftan da nokta içerir. Çemberin kendisi S 'ye ait olmadığından (kesikli) küme açıktır.

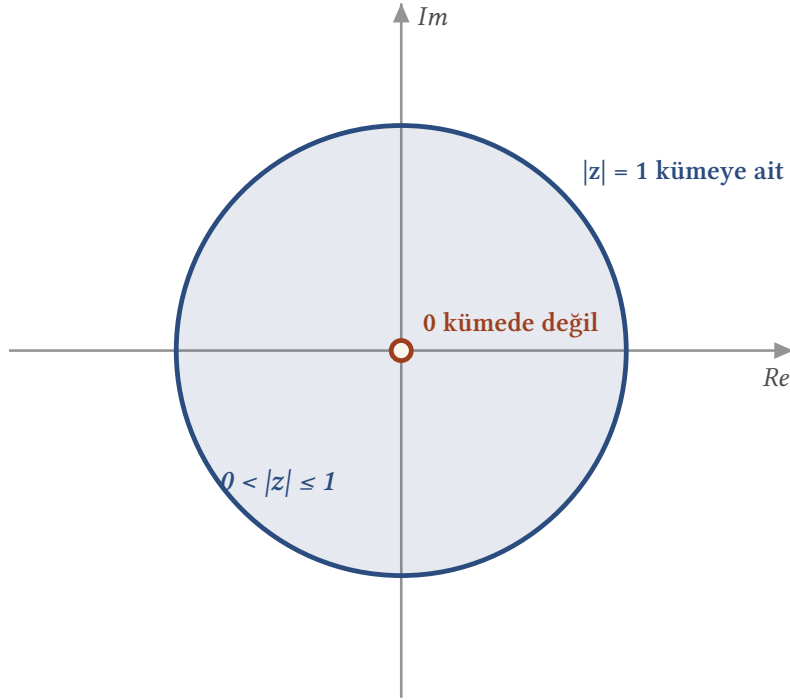
Örnek 5.1 (Birim Diskin Sınırı). $|z| < 1$ ve $|z| \leq 1$ kümelerinin her ikisinin de sınırı $|z| = 1$ çemberidir: çember üzerindeki bir noktanın her komşuluğu, hem diskten hem disk dışından nokta içerir. Fark şudur: birinci küme sınırının hiçbir noktasını içermez, ikincisi tamamını içerir.

5.3 Açık ve Kapalı Kümeler

Tanım 5.2 (Açık ve Kapalı Küme). Sınırının hiçbir noktasını içermeyen kümeye **açık**, sınırının tüm noktalarını içeren kümeye **kapalı** denir. Bir küme açıktır ancak ve ancak her noktası bir iç noktaysa. S 'nin **kapamışı** $\bar{S}$, S ile sınırının birleşimidir ve her zaman kapalıdır.

İki uç örneğe dikkat edilmelidir:

- $0 < |z| \leq 1$ kümesi **ne açık ne kapalıdır**: sınır noktası 0 'ı içermez (kapalı değil), ama sınır noktalarından oluşan $|z| = 1$ çemberini içerir (açık değil).
- Tüm düzlem $\mathbb{C}$, sınır noktası olmadığından **hem açık hem kapalıdır**.



Şekil 5.2: $0 < |z| \leq 1$ kümesi. Çember kümeye aittir ama üzerindeki hiçbir nokta iç nokta değildir, dolayısıyla küme açık değildir. Başlangıç noktası bir sınır noktasıdır ama kümede değildir, dolayısıyla küme kapalı da değildir.

5.4 Bağlantılılık, Domen ve Bölge

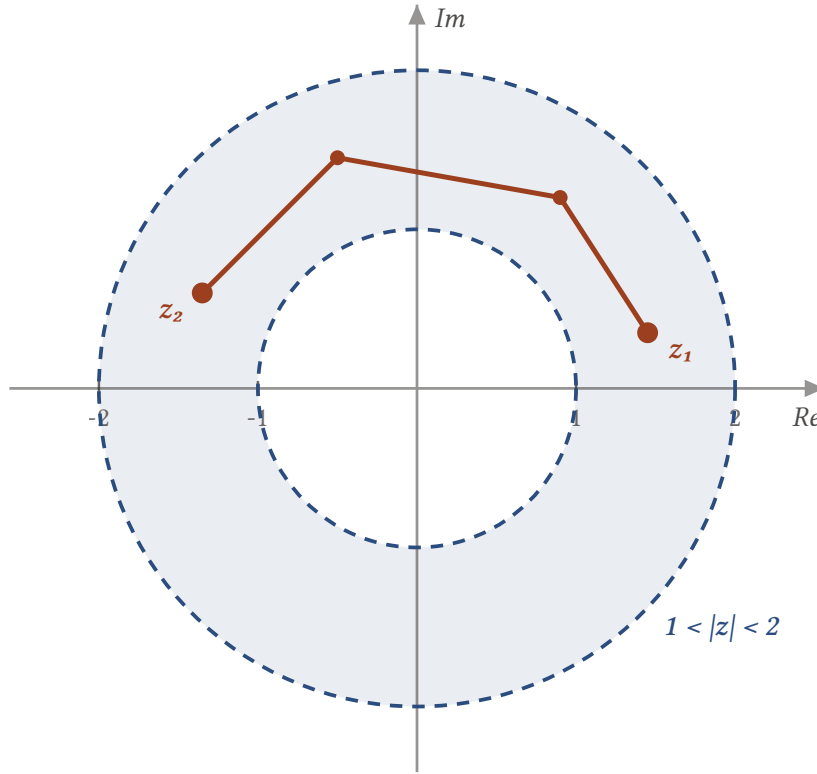
Tanım 5.3 (Domen ve Bölge). Açık bir S kümesi, herhangi iki noktası tamamen S içinde kalan sonlu sayıda doğru parçasından oluşan bir **çokgensel yolla** birleştirilebiliyorsa **bağlantılıdır**.

Açık, bağlantılı ve boş olmayan bir kümeye **domen** denir. Bir domene sınır noktalarının bir kısmı, tamamı eklenirse (ya da hiçbiri eklenmezse) elde edilen kümeye **bölge** denir.

Her komşuluk bir domendir. Halka biçimindeki

$$1 < |z| < 2$$

kümesi de bir domendir: açıktır ve içindeki herhangi iki nokta, halkadan çıkmadan çokgensel bir yolla birleştirilebilir.



Şekil 5.3: Halka $1 < |z| < 2$ bir domendir: sınır çemberlerini içermediğinden açıktır ve herhangi iki noktası, halkadan hiç çıkmayan sonlu sayıda doğru parçasıyla (çokgensel yol) birleştirilebilir. Doğrudan bir doğru parçası içteki deliğe girebilirdi; kırık çizgi bunu aşar.

i Neden bağlantılılık isteriz?

Domen tanımındaki bağlantılılık koşulu keyfi değildir. Analizin birçok teoremi — örneğin türevi her yerde sıfır olan fonksiyonun sabit olması — ancak bağlantılı kümelerde geçerlidir: iki ayrık parçadan oluşan bir açık kümede fonksiyon her parçada farklı bir sabit değer alabilir.

5.5 Sınırlılık

Bir S kümesi, her noktası bir $|z| \leq R$ diski içinde kalacak biçimde bir R bulunabiliyorsa **sınırlıdır**; aksi hâlde **sınırsızdır**. Örneğin $|z| \leq 1$ sınırlı, sağ yarı düzlem $\operatorname{Re} z \geq 0$ sınırsızdır.

5.6 Yığılma Noktaları

Tanım 5.4 (Yığılma Noktası). Bir z_0 noktasının **her** delinmiş komşuluğu S 'den en az bir nokta içeriyorsa, z_0 'a S 'nin bir **yığılma noktası** denir.

Yığılma noktası kümenin elemanı olmak zorunda değildir; kümeye “sonsuz kez yaklaşılacak” noktadır.

Teorem 5.1 (Kapalılık ve Yığılma Noktaları). Bir küme *kapalıdır ancak ve ancak tüm yığılma noktalarını içeriyorsa*.

İspat.

z_0 , S 'nin S 'de olmayan bir yığılma noktası olsun. Her komşuluğu S 'den nokta içerir; $z_0 \notin S$ olduğundan aynı komşuluk S dışından da nokta (z_0 'ın kendisi) içerir. O hâlde z_0 bir sınır noktasıdır ve S onu içermediğinden S kapalı değildir. Tersine, S kapalı değilse sınırının bir z_0 noktasını içermez; z_0 'ın her komşuluğu S 'den nokta içerir ve $z_0 \notin S$ olduğundan bu noktalar z_0 'dan farklıdır — yani z_0 , S 'de olmayan bir yığılma noktasıdır.

■

Örnek 5.2 (Bir Dizinin Yığılma Noktası). $S = \left\{ \frac{i}{n} : n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ kümesinin tek yığılma noktası $z_0 = 0$ 'dır.

Çözüm.

$i/n \rightarrow 0$ olduğundan 0'ın her delinmiş komşuluğu kümeden nokta içerir; 0 bir yığılma noktasıdır. Kümenin herhangi bir i/n noktası ise **yalıtılmıştır**: komşu elemanlara uzaklığı pozitif olduğundan, yeterince küçük delinmiş komşuluğu kümeden hiç nokta içermez. Düzlemin başka hiçbir noktası da kümeye yığılmaz: sanal eksen dışındaki bir nokta eksene pozitif uzaklıktadır, eksen üzerindeki 0 dışındaki noktalar ise i/n terimlerinden pozitif uzaklıkta kalır. $0 \notin S$ olduğundan, teoreme göre S kapalı değildir.

■

5.7 Alıştırma

Alıştırma 5.1 (Küme Sınıflandırması). Aşağıdaki kümelerin açık mı, kapalı mı, domen mi olduğunu; sınırlarını ve sınırlılıklarını belirleyiniz.

- a) $|z - 2 + i| \leq 1$
- b) $|2z + 3| > 4$
- c) $\text{Im } z > 1$
- d) $0 \leq \arg z \leq \pi/4$ ($z \neq 0$)

Çözüm.

a) $|z - (2 - i)| \leq 1$ koşulu, $2 - i$ merkezli 1 yarıçaplı **kapalı** disk. Sınır, $|z - 2 + i| = 1$ çemberidir ve bu çember kümenin içindedir; küme tüm sınır noktalarını barındırdığından kapalıdır. Çemberin üzerindeki noktaların hiçbiri iç nokta olmadığı için küme açık değildir, dolayısıyla domen de değildir. Tümüyle $|z| \leq 1 + |2 - i| = 1 + \sqrt{5}$ diskinin içinde kaldığından sınırlıdır.

b) Eşitsizliği merkez-yarıçap biçimine getirelim:

$$|2z + 3| > 4 \Leftrightarrow 2 \left| z + \frac{3}{2} \right| > 4 \Leftrightarrow \left| z + \frac{3}{2} \right| > 2$$

Bu, $-3/2$ merkezli 2 yarıçaplı çemberin **dışındır**: her noktası iç noktadır, yani küme açıktır; herhangi iki noktası çemberin dışında kalan kırık çizgilerle birleştirilebildiğinden bağlantılıdır — açık ve bağlantılı olduğu için domendir. Sınırı $|z + \frac{3}{2}| = 2$ çemberidir ve bu çember kümeye ait değildir. Modülü istendiği kadar büyük noktalar içerdiğinden sınırsızdır.

c) $\text{Im } z > 1$ kümesi, $y = 1$ doğrusunun üstünde kalan açık yarı düzlemdir. Her noktası iç noktadır (açık), yarı düzlem bağlantılıdır (domen), sınırı $\text{Im } z = 1$ doğrusudur ve bu doğru kümeye dahil değildir. Yatayda ve yukarıda sınır tanımadığından sınırsızdır.

d) $0 \leq \arg z \leq \pi/4$ kümesi, başlangıç noktasından çıkan iki ışının arasında kalan kapalı açılı bölgedir; ancak $z \neq 0$ dışlanmıştır. İç noktalar $0 < \arg z < \pi/4$ olanlardır; ışınların üzerindeki noktalar kümeye ait olduğu hâlde iç nokta değildir, dolayısıyla küme **açık değildir**. Öte yandan $z = 0$ noktası bir sınır noktasıdır (her komşuluğu hem kümeden hem tümleyeninden nokta içerir) ve kümeye ait değildir; bu yüzden küme **kapalı da değildir**. Sınırı, $\arg z = 0$ ve $\arg z = \pi/4$ ışınları ile başlangıç noktasından oluşur. Işınlar sonsuza uzandığından küme sınırsızdır.

■

Sahne hazır: bir sonraki kısımda bu düzlem üzerinde **fonksiyonları** tanımlayıp kompleks analizin asıl nesnesine, analitik fonksiyonlara doğru yola çıkıyoruz.

6. Fonksiyonlar ve Tasvirler

Kompleks değişkenli bir fonksiyonun grafiği çizilemez: tanım kümesi de değer kümesi de ikişer boyutludur, grafik dört boyutta yaşar. Bu yüzden kompleks analizde fonksiyonlar bir **tasvir** (gönderim) olarak incelenir: z -düzlemindeki eğri ve bölgelerin w -düzleminde nereye taşındığına bakılır.

6.1 Fonksiyon Kavramı

Tanım 6.1 (Kompleks Değişkenli Fonksiyon). S , kompleks sayıların bir kümesi olsun. S üzerinde tanımlı bir f **fonksiyonu**, S 'nin her z elemanına tek bir $w = f(z)$ kompleks sayısı karşılık getiren kuraldır. S 'ye f 'nin **tanım kümesi**, w 'ye f 'nin z 'deki **değeri** denir.

Tanım kümesi açıkça söylenmediğinde, kuralın anlamlı olduğu en geniş küme alınır: $w = 1/z$ için bu, delinmiş düzlem $z \neq 0$ kümesidir.

$z = x + iy$ yazılırsa f 'nin değerleri reel ve sanal bileşenlere ayrılır:

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

Burada u ve v , iki reel değişkenli reel değerli fonksiyonlardır. Kutupsal koordinatlar kullanılırsa $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$ yazılır.

Örnek 6.1 (Bileşenlerin Bulunması). $f(z) = z^2$ fonksiyonunun kartezyen ve kutupsal bileşenlerini bulunuz.

Çözüm.

Kartezyen biçimde:

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i 2xy \Rightarrow u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

Kutupsal biçimde $z = r e^{i\theta}$ için:

$$f(z) = r^2 e^{i2\theta} = r^2 \cos 2\theta + i r^2 \sin 2\theta \Rightarrow u = r^2 \cos 2\theta, \quad v = r^2 \sin 2\theta$$

■

$v \equiv 0$ ise f **reel değerlidir**; örneğin $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ böyledir.

n negatif olmayan bir tam sayı ve $a_0, \dots, a_n$ kompleks sabitler ($a_n \neq 0$) olmak üzere

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

fonksiyonu n -inci dereceden bir **polinomdur**; tanım kümesi tüm düzlemdir. Polinomların bölümü $P(z)/Q(z)$ ise **rasyonel fonksiyondur** ve $Q(z) \neq 0$ noktalarında tanımlıdır.

i Çok değerli fonksiyonlar

Kompleks analizde bir z 'ye birden çok değer eşleyen kurallar da doğal olarak ortaya çıkar; $z^{1/2}$ bunun ilk örneğidir. Böyle durumlarda değerlerden birini sistemli biçimde seçerek tek değerli bir fonksiyon – bir **dal** – elde edilir. Örneğin

$$f(z) = \sqrt{r} e^{i\Theta/2} \quad (r > 0, \Theta = \text{Arg } z)$$

kuralı, $z^{1/2}$ 'nin esas değerini seçen tek değerli bir fonksiyondur. Dallar konusu **logaritma fonksiyonunda** derinlemesine işlenecek.

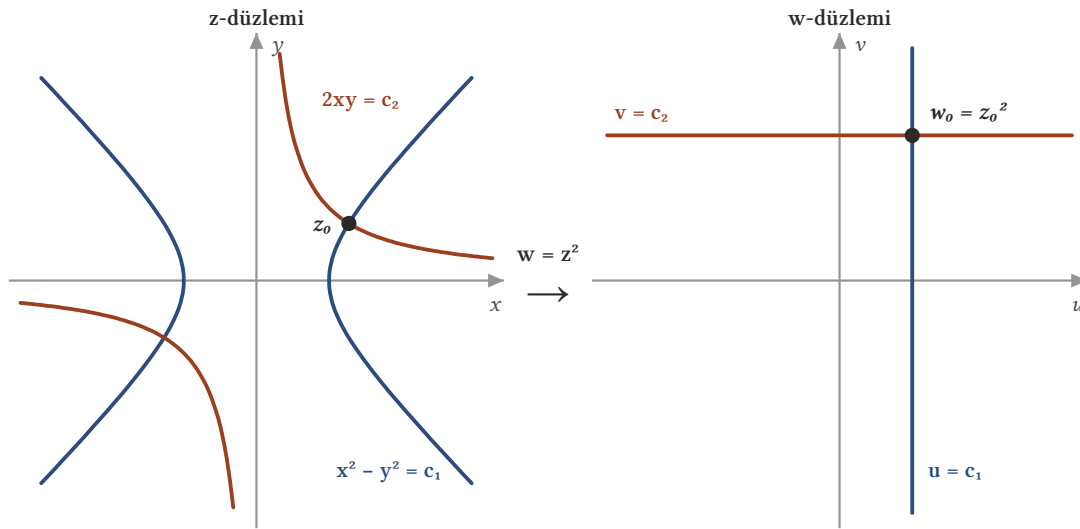
6.2 Tasvir Kavramı

$w = f(z)$ yazılıp z - ve w -düzlemleri ayrı ayrı düşünüldüğünde f 'ye **tasvir** (gönderim) denir. Bir S kümesindeki noktaların görüntülerinin kümesine S 'nin **görüntüsü** denir. En basit tasvirler geometrik olarak tanındıktır:

- $w = z + 1$: her noktayı 1 birim sağa **öteler**.
- $w = iz$: $|iz| = |z|$ ve $\arg(iz) = \arg z + \pi/2$ olduğundan, başlangıç etrafında $\pi/2$ **döndürür**.
- $w = \bar{z}$: reel eksene göre **yansıtır**.

6.3 $w = z^2$ Tasviri

$u = x^2 - y^2, v = 2xy$ bileşenleri, $w = z^2$ tasvirinin bütün geometrisini taşır.



Şekil 6.1: $w = z^2$ altında $x^2 - y^2 = c_1$ hiperbolünün **iki kolu da** $u = c_1$ dikey doğrusunun tamamına, $2xy = c_2$ hiperbolünün iki kolu da $v = c_2$ yatay doğrusuna gider (çizimde $c_1 = 1, c_2 = 2$). Hiperbollerin kesiştiği z_0 noktası, doğruların kesiştiği $w_0 = z_0^2$ noktasına taşınır.

Örnek 6.2 (Hiperbollerin Görüntüsü). $x^2 - y^2 = c_1$ ($c_1 > 0$) hiperbolünün $w = z^2$ altında görüntüsü, $u = c_1$ dikey doğrusudur; $2xy = c_2$ ($c_2 > 0$) hiperbolünün görüntüsü $v = c_2$ yatay doğrusudur.

Çözüm.

Birinci hiperbol üzerinde $u = x^2 - y^2 = c_1$ sabittir; nokta hiperbolün sağ kolunda y değeri $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a taranarak dolaşıldığında $v = 2xy = 2y\sqrt{y^2 + c_1}$ de $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a tüm değerleri alır. Yani sağ kolun görüntüsü $u = c_1$ doğrusunun **tamamıdır**; sol kol da aynı doğruya gider. İkinci hiperbolün $x > 0$ kolunda $v = 2xy = c_2$ sabittir ve x parametresiyle

$$u = x^2 - y^2 = x^2 - \frac{c_2^2}{4x^2} \quad (0 < x < \infty)$$

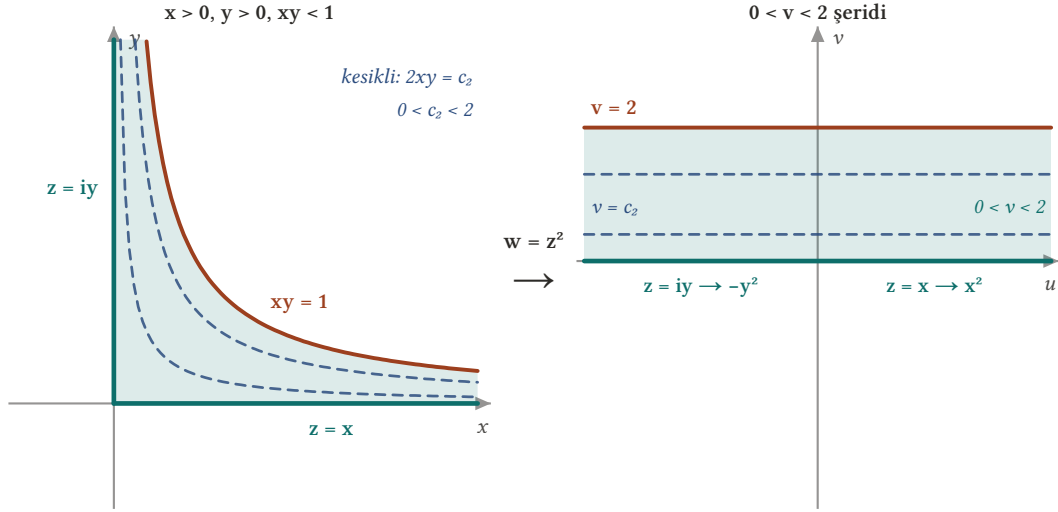
ifadesi $-\infty$ 'dan $+\infty$ 'a monoton artar; görüntü $v = c_2$ doğrusunun tamamıdır. $x < 0$ kolu da aynı doğruya taşınır. ■

Örnek 6.3 (Bir Bölgenin Şerite Tasviri). $x > 0, y > 0, xy < 1$ koşullarıyla tanımlı bölgenin $w = z^2$ altındaki görüntüsünün $0 < v < 2$ şeridi olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Bölgedeki noktalar, $0 < c_2 < 2$ olmak üzere $2xy = c_2$ hiperbol kollarının birinci çeyrekte kalan parçaları üzerinde yer alır. Önceki örneğe göre her böyle kol, $v = c_2$ doğrusunun tamamına tasvir edilir; $c_2, (0, 2)$ aralığını tararken görüntüler $0 < v < 2$ şeridini doldurur.

Sınırların davranışı da öğreticidir: pozitif y eksenini ($z = iy$) $w = -y^2 \leq 0$ 'a, pozitif x eksenini ($z = x$) $w = x^2 \geq 0$ 'a gider; ikisi birlikte $v = 0$ doğrusunu (u eksenini) örter. $xy = 1$ hiperbolü ise $v = 2$ doğrusuna gider. Kapalı bölge $x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1$ 'in görüntüsü kapalı şerit $0 \leq v \leq 2$ olur.



Şekil 6.2: Bölge, $0 < c_2 < 2$ olan $2xy = c_2$ hiperbol yaylarıyla (kesikli) taranır; her yay $v = c_2$ doğrusunun tamamına gittiğinden görüntü $0 < v < 2$ şerididir. Sınırdaki pozitif y eksenini u ekseninin negatif yarısını, pozitif x eksenini pozitif yarısını örter; $xy = 1$ hiperbolü $v = 2$ doğrusuna gider.

■

Kutupsal koordinatlarda $w = z^2$ tasviri daha da saydamdır: $z = re^{i\theta}$ için $w = r^2 e^{i2\theta}$; modül karelenir, açı **ikiye katlanır**. Birinci çeyrek $0 \leq \theta \leq \pi/2$, üst yarı düzlem $0 \leq 2\theta \leq \pi$ tasvir edilir; üst yarı düzlem ise tüm düzlemi örter.

6.4 Üstel Fonksiyonla Tasvirler

$e^z = e^x e^{iy}$ fonksiyonunda (ayrıntılar için) modül e^x , argüman y 'dir. Bu ayrışma, Kartezyen ızgarayı kutupsal ızgaraya dönüştürür:

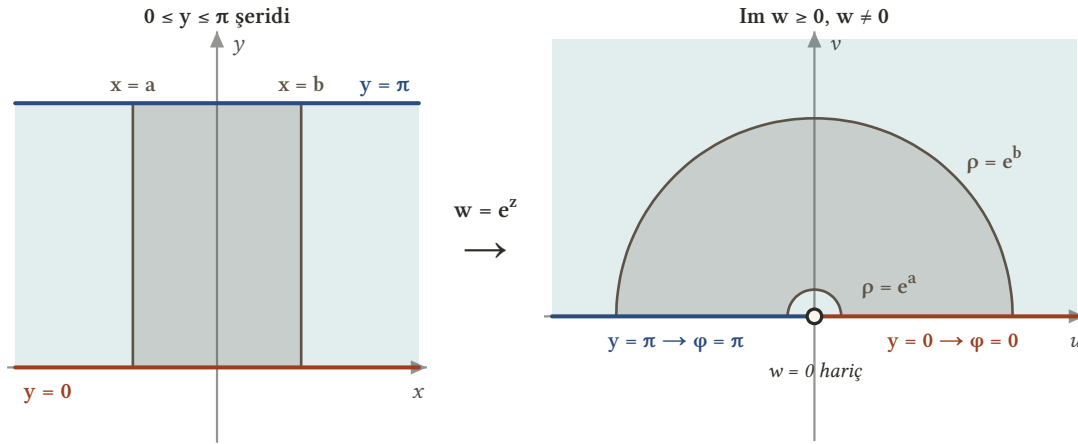
- **Dikey doğru** $x = c_1$, $\rho = e^{c_1}$ yarıçaplı **çembere** tasvir edilir; doğru boyunca y bir 2π aralığını aştıkça çember tekrar tekrar dolandır.
- **Yatay doğru** $y = c_2$, açısı c_2 olan ve başlangıç noktasından çıkan (ama onu içermeyen) **ışına** tasvir edilir.

Örnek 6.4 (Dikdörtgenin Görüntüsü). $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ dikdörtgeninin $w = e^z$ altındaki görüntüsü

$$e^a \leq \rho \leq e^b, \quad c \leq \varphi \leq d$$

halka parçasıdır. Tasvir, $d - c < 2\pi$ olduğu sürece birebirdir; örneğin tabanı $y = 0$, tavanı $y = \pi$ doğruları üzerinde olan her dikdörtgen ($c = 0, d = \pi$), üst yarı düzlemde bir yarım halkaya birebir tasvir edilir.

Sınır durumu özellikle önemlidir: $0 \leq y \leq \pi$ **yatay şeridinin tamamı**, üst yarı düzlem $\text{Im } w \geq 0$ 'ın $w = 0$ çıkarılmış hâline tasvir edilir; alt kenar $y = 0$ pozitif reel eksene, üst kenar $y = \pi$ negatif reel eksene gider.



Şekil 6.3: e^z altında yatay doğrular ışına, dikey doğrular çembere gider: $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq \pi$ dikdörtgeni $e^a \leq \rho \leq e^b$ yarım halkasına bükülür. Şeridin alt kenarı $y = 0$ pozitif reel eksene, üst kenarı $y = \pi$ negatif reel eksene gider; şeridin tamamı $w = 0$ çıkarılmış üst yarı düzlemi örter.

6.5 Alıştırma

Alıştırma 6.1 (Tasvir Alıştırmaları).

- $f(z) = z^3 + z + 1$ fonksiyonunun u ve v bileşenlerini bulunuz.
- $w = z^2$ altında $y = 1$ yatay doğrusunun görüntüsünün $v^2 = 4(u + 1)$ parabolü olduğunu gösteriniz.
- $w = e^z$ altında $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ yatay şeridinin görüntüsünü belirleyiniz.

Çözüm.

a) $z = x + iy$ yazıp küpü açalım:

$$z^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

Buna $z + 1 = (x + 1) + iy$ eklenir ve reel/sanal kısımlar ayrılır:

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x + 1, \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3 + y$$

b) $y = 1$ doğrusunun noktaları $z = x + i$ biçimindedir (x reel). Görüntüyü hesaplayalım:

$$w = (x + i)^2 = x^2 - 1 + 2ix$$

Buradan bileşenler okunur:

$$u = x^2 - 1, \quad v = 2x$$

İkinci eşitlik $x = v/2$ verir; bunu birinciye koyarsak

$$u = \frac{v^2}{4} - 1 \Leftrightarrow v^2 = 4(u + 1)$$

x tüm reel sayıları taradığında $v = 2x$ de tüm reel değerleri alır; dolayısıyla görüntü, tepesi $(-1, 0)$ noktasında olan bu parabolün **tamamıdır**.

c) $w = e^z = e^x e^{iy}$ olduğundan

$$|w| = e^x, \quad \arg w = y$$

Şeritte x tüm reel değerleri alır, yani $|w| = e^x$ sayısı $(0, \infty)$ aralığını tarar — $|w|$ asla 0 olamaz. Argüman ise $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ aralığında kalır. Modülü pozitif, argümanı bu aralıktaki noktaların kümesi tam olarak

$$\operatorname{Re} w \geq 0, \quad w \neq 0$$

yani **başlangıç noktası çıkarılmış kapalı sağ yarı düzlemdir**. Uç değerler de görüntüye dahildir: $y = \pi/2$ doğrusu pozitif sanal eksen, $y = -\pi/2$ doğrusu negatif sanal eksen verir.

■

Tasvirler bize fonksiyonların kabaca davranışını gösterdi; incelikli davranış — yaklaşma, süreklilik, türev — [limit kavramıyla](#) başlar.

7. Limitler ve Süreklilik

Kompleks limit tanımı, reel analizdeki tanımın sözcüğü sözcüğüne taşınmıştır; tek fark, mutlak değer yerini modülün almasıdır. Ama bu küçük değişimin büyük bir sonucu vardır: z , limit noktasına **her yönden** yaklaşabilir ve limit hepsinde aynı olmak zorundadır.

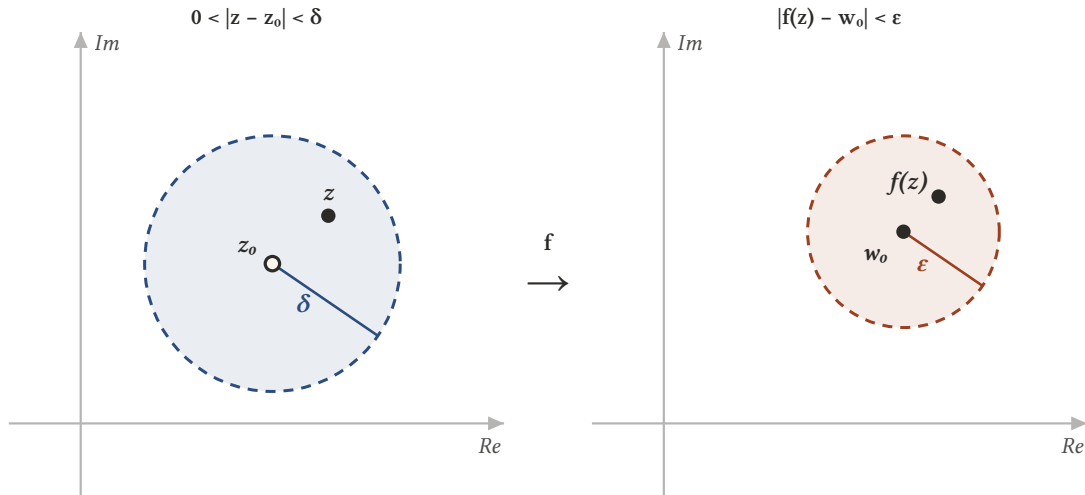
7.1 Limit Tanımı

Tanım 7.1 (Limit). f, z_0 'ın bir delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

demek şudur: her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki

$$0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon$$



Şekil 7.1: Limit tanımı iki düzlemde okunur: z_0 merkezli delinmiş δ -diskinin (merkez hariç) her noktası, f altında w_0 merkezli ε -diskinin içine düşmelidir. δ , z_0 'a hangi yönden yaklaşıldığına bakmaz; koşul diskin tamamı için geçerlidir.

Limit varsa **tektir**: w_0 ve w_1 ikisi de limitse, $|w_1 - w_0| \leq |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1| < 2\varepsilon$ her ε için sağlanır; dolayısıyla $w_1 = w_0$.

Tanım, f 'nin tanım kümesinin sınırındaki noktalara da uyarlanır: z 'nin yalnızca tanım kümesinde kalan değerleri hesaba katılır.

Örnek 7.1 (Tanımla Limit Doğrulama). $f(z) = \frac{i\bar{z}}{2}$, $|z| < 1$ açık diskinde tanımlı olsun. $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \frac{i}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

z diskte olmak üzere

$$\left| \frac{i\bar{z}}{2} - \frac{i}{2} \right| = \frac{|\bar{z} - 1|}{2} = \frac{|z - 1|}{2}$$

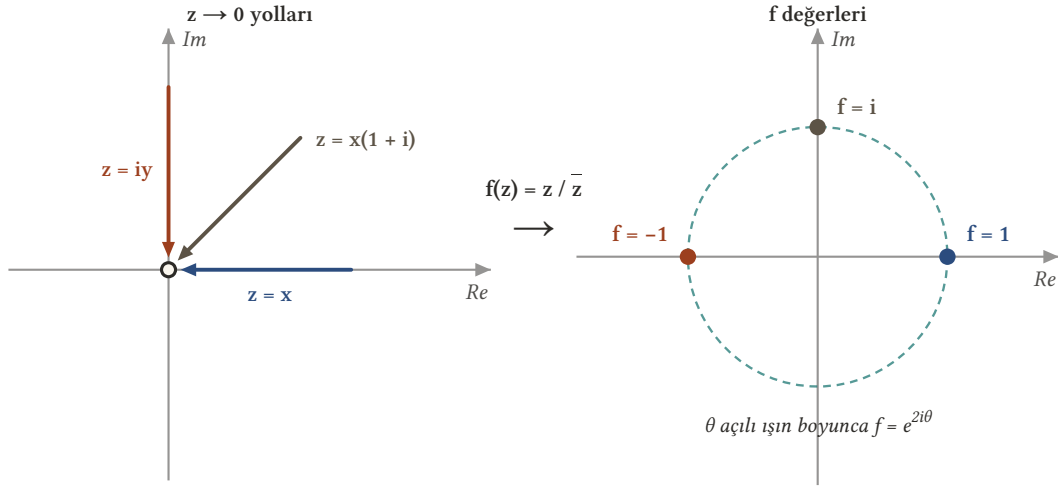
Verilen ε için $\delta = 2\varepsilon$ seçilirse, $0 < |z - 1| < \delta$ iken $|f(z) - i/2| < \varepsilon$ olur.

■

Örnek 7.2 (Yönlere Göre Değişen Limit). $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$ fonksiyonunun $z \rightarrow 0$ için limiti yoktur.

Çözüm.

Reel eksen boyunca $z = x$ için $f = x/x = 1$; sanal eksen boyunca $z = iy$ için $f = iy/(-iy) = -1$. İki yönden iki farklı değere yaklaşılır; limit tek olmak zorunda olduğundan var olamaz.



Şekil 7.2: $f(z) = z/\bar{z}$ her ışıın üzerinde sabittir ama ışıından ışıına değişir: reel ekseninde 1, sanal ekseninde -1 , köşegende i ; genel olarak θ açılı ışıında $e^{2i\theta}$. Değerler birim çember üzerinde dağıldığından $z \rightarrow 0$ için tek bir limit yoktur.

■

⚠ İki yönde aynı olması yetmez

Reel analizde sağdan ve soldan limitlerin eşitliği yeterlidir; kompleks düzlemde ise sonsuz çoklukta yaklaşma yönü ve eğrisi vardır. İki (hatta her doğrusal) yönde aynı değeri bulmak limiti garanti etmez – tanımın gücü tam da bu evrensellikte yatar.

7.2 Limit Teoremleri

Teorem 7.1 (Bileşen Limitleri). $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ ve $w_0 = u_0 + iv_0$ olsun. O zaman

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u = u_0 \text{ ve } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v = v_0$$

İspat.

$(\Leftarrow)$ $|f - w_0| = |(u - u_0) + i(v - v_0)| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$ olduğundan, bileşen limitleri varsa her biri $\varepsilon/2$ 'den küçük yapılır ve $f \rightarrow w_0$ çıkar.

$(\Rightarrow)$ $|u - u_0| \leq |f - w_0|$ ve $|v - v_0| \leq |f - w_0|$ eşitsizlikleri, $f \rightarrow w_0$ iken bileşenlerin de yakınsadığını verir.

■

Teorem 7.2 (Limitlerin Cebiri). $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ ve $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = W_0$ ise

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = w_0 + W_0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = w_0 W_0$$

ve $W_0 \neq 0$ olduğunda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{w_0}{W_0}$$

İspat.

Üç kural da Teorem 7.1 üzerinden reel analizdeki karşılıklarına indirgenir: kompleks bir limitin varlığı, reel ve sanal kısımların limitlerinin varlığıyla eşdeğerdir. Toplam, çarpım ve bölüm açıldığında ortaya çıkan bileşenler, u, v, U, V reel fonksiyonlarının sonlu toplam ve çarpımlarıdır; her birine reel analizdeki limit kuralları uygulanır ve sonuçlar yeniden birleştirilir. Bölüm kuralında $W_0 \neq 0$ koşulu, paydanın z_0 yakınında sıfırdan uzak kalmasını sağlar.

■

Doğrudan sonuçlar: $\lim c = c$, $\lim_{z \rightarrow z_0} z = z_0$, $\lim_{z \rightarrow z_0} z^n = z_0^n$ ve her P polinomu için

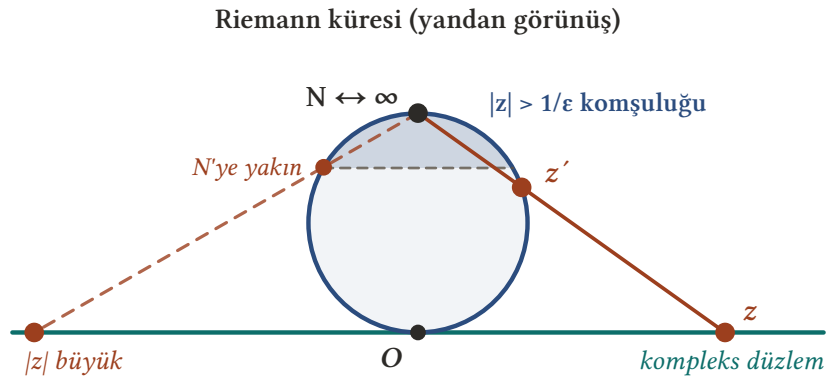
$$\lim_{z \rightarrow z_0} P(z) = P(z_0)$$

7.3 Sonsuzdaki Nokta

Kompleks düzleme tek bir **sonsuzdaki nokta** ∞ eklenirse **genişletilmiş kompleks düzlem** elde edilir. Geometrik model **Riemann küresidir**: düzleme başlangıç noktasında teğet bir küre alınır; kuzey kutbu N ile düzlemdeki z noktasını birleştiren doğru küreyi N dışında tam bir noktada keser. Bu eşleme (stereografik izdüşüm) düzlemin noktalarını kürenin N dışındaki noktalarıyla birebir eşler; N 'nin kendisi ∞ 'a karşılık gelir. Küçük $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon}$$

kümesi, ∞ 'un bir **komşuluğu** olarak tanımlanır.



Şekil 7.3: Düzlemdeki z noktası, kuzey kutbu N ile birleştirilerek küredeki z' noktasına eşlenir. Modülü büyük noktaların görüntüleri N 'ye yığılır; bu yüzden $|z| > 1/\varepsilon$ kümesi, kürede $N = \infty$ etrafındaki küçük bir takkeye karşılık gelir ve ∞ 'un bir komşuluğu sayılır.

Teorem 7.3 (Sonsuz İçeren Limitler). Sonsuz içeren limitler, sıradan limitlere şu sözlükle çevrilir:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{f} \right) = w_0$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

İspat.

Her denklik, komşuluk tanımlarının doğrudan yazılmasıyla çıkar. Birincisini görelim: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ demek, her $\varepsilon > 0$ için $0 < |z - z_0| < \delta$ olduğunda

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

olması demektir. Bu eşitsizlik ise

$$\left| \frac{1}{f(z)} - 0 \right| < \varepsilon$$

koşuluyla birebir aynıdır; yani $1/f$ fonksiyonunun z_0 'daki limiti sıfırdır. Diğer iki denklik, ∞ komşuluğunun $|z| > 1/\varepsilon$ tanımıyla aynı biçimde yazılır.

■

Örnek 7.3 (Üç Tipik Hesap). Aşağıdaki limitleri doğrulayınız.

$$\text{a) } \lim_{z \rightarrow -1} \frac{iz + 3}{z + 1} = \infty \quad \text{b) } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z + i}{z + 1} = 2 \quad \text{c) } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3 - 1}{z^2 + 1} = \infty$$

Çözüm.

a) Ters çevirip sıfıra gittiğini görelim:

$$\lim_{z \rightarrow -1} \frac{z + 1}{iz + 3} = \frac{0}{-i + 3} = 0$$

b) $z \rightarrow 1/z$ değişimiyle:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2/z + i}{1/z + 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 + iz}{1 + z} = 2$$

c) Hem ters çevirip hem değişken değiştirerek:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1/z)^2 + 1}{2(1/z)^3 - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + z^3}{2 - z^3} = 0$$

■

7.4 Süreklilik

Tanım 7.2 (Süreklilik). f, z_0 'da **süreklidir** demek şu üç koşulun sağlanmasıdır: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ vardır, $f(z_0)$ tanımlıdır ve

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Bir bölgenin her noktasında sürekli olan fonksiyona o bölgede sürekli denir.

Limit teoremlerinden, sürekli fonksiyonların toplamı ve çarpımı süreklidir; bölümü, payda sıfır olmayan noktalarda süreklidir. Polinomlar tüm düzlemde süreklidir. Ayrıca:

- **Bileşke süreklidir:** f, z_0 'da; $g, f(z_0)$ 'da sürekliyse $g[f(z)]$ bileşkesi z_0 'da süreklidir.

- $f(z) = u + iv$ süreklidir $\Leftrightarrow u$ ve v süreklidir.

Teorem 7.4 (Sıfırdan Uzak Kalma). f, z_0 'da sürekli ve $f(z_0) \neq 0$ ise, z_0 'ın bir komşuluğunda $f(z) \neq 0$ kalır.

İspat.

Süreklilik tanımında $\varepsilon = |f(z_0)|/2$ alınsın; karşılık gelen δ -komşuluğunda $|f(z) - f(z_0)| < |f(z_0)|/2$ olur. Bu komşulukta bir noktada $f(z) = 0$ olsaydı $|f(z_0)| < |f(z_0)|/2$ çelişkisi doğardı. ■

Teorem 7.5 (Kapalı Sınırlı Bölgede Maksimum). f , kapalı ve sınırlı bir R bölgesinde sürekliyse, R 'nin her z noktası için

$$|f(z)| \leq M$$

olacak ve eşitliğin en az bir noktada sağlanacağı bir M sayısı vardır: $|f|$, R üzerinde maksimumuna ulaşır.

Bu, reel analizde iki değişkenli sürekli $\sqrt{u^2 + v^2}$ fonksiyonunun kapalı sınırlı kümede uç değer almasının doğrudan sonucudur; ileride [integral kestirimlerinde](#) sıkça kullanılacaktır.

7.5 Alıştırma

Alıştırma 7.1 (Limit ve Süreklilik).

- $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2+1}{z-i}$ limitini hesaplayınız.
- $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4-1}$ fonksiyonunun hangi noktalarda sürekli olamayacağını belirleyiniz; kaldırılabilir olanları ayırt ediniz.

Çözüm.

a) Pay ve payda $z \rightarrow i$ iken birlikte sıfıra gider; çarpanlara ayırıp sadeleştirelim. $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ olduğundan, $z \neq i$ için

$$\frac{z^2 + 1}{z - i} = \frac{(z - i)(z + i)}{z - i} = z + i$$

Limit, fonksiyonun $z = i$ 'deki değerine değil, delinmiş komşuluktaki davranışına baktığından sadeleşme serbesttir. Sağdaki polinom sürekli olduğu için

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i} = i + i = 2i$$

b) Bölüm, paydanın sıfır olmadığı her noktada süreklidir. Paydayı çarpanlarına ayıralım:

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 1, z = -1, z = i, z = -i$$

Fonksiyon bu dört noktada tanımsızdır, dolayısıyla yalnızca burada sürekli olamaz. İki durumu ayıralım.

$z = \pm i$ noktalarında pay da sıfırdır ve ortak çarpan sadeleşir: $z \neq \pm i$ için

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)} = \frac{1}{z^2 - 1}$$

Sağdaki ifade $z = \pm i$ 'de süreklidir ve orada $z^2 = -1$ olduğundan

$$\lim_{z \rightarrow \pm i} f(z) = \frac{1}{-1 - 1} = -\frac{1}{2}$$

Limit var olduğuna göre bu iki süreksizlik **kaldırılabilirdir**: $f(\pm i) = -1/2$ tanımlanırsa fonksiyon orada sürekli olur.

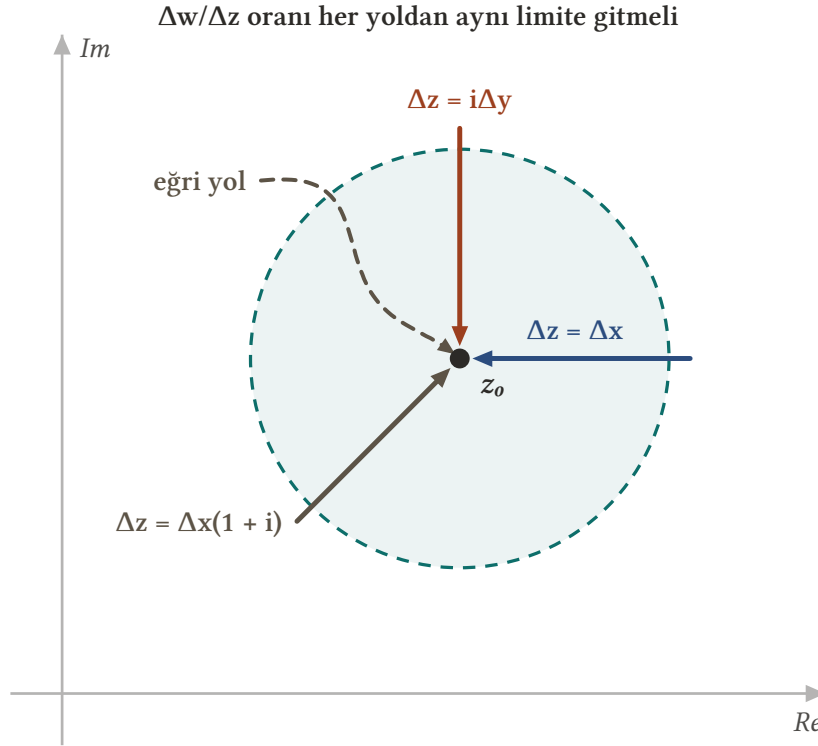
$z = \pm 1$ noktalarında ise pay $z^2 + 1 = 2 \neq 0$ iken payda sıfıra gider; $|f(z)| \rightarrow \infty$ olur ve sonlu bir limit yoktur. Bu iki süreksizlik kaldırılamaz.

■

Süreklilikten bir adım ötesi, kompleks analizi bambaşka bir dünyaya taşıyan kavramdır: [türev](#).

8. Türev ve Türev Formülleri

Kompleks türev, biçimsel olarak reel türevle aynı oran limitidir. Ama Δz artık sıfıra **düzlemin her yönünden** yaklaşabilir ve limitin hepsinde aynı çıkması gerekir. Bu ek koşul o kadar kısıtlayıcıdır ki, reel bakışla gayet “düzgün” görünen fonksiyonlar bile kompleks anlamda türevsiz kalabilir.



Şekil 8.1: Kompleks türevde Δz , z_0 'a yalnız sağdan-soldan değil, düzlemin her yönünden ve her eğri boyunca yaklaşır; $\Delta w/\Delta z$ oranının hepsinde aynı limite gitmesi gerekir. $\bar{z}$ (her yerde) ve $|z|^2$ ($z \neq 0$ iken) için yatay ile dikey yaklaşımın farklı çıkması, türevin yokluğunu göstermeye yeter.

8.1 Türevin Tanımı

Tanım 8.1 (Türev). f , z_0 'ın bir komşuluğunda tanımlı olsun. f 'nin z_0 'daki **türevi**

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limitidir (varsa). $\Delta z = z - z_0$ ve $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ yazılırsa aynı tanım

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

biçimini alır; $\frac{dw}{dz}$ gösterimi de kullanılır.

Örnek 8.1 (Tanımdan Türev). $f(z) = z^2$ için $f'(z) = 2z$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \frac{2z \Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = 2z + \Delta z \rightarrow 2z \quad (\Delta z \rightarrow 0)$$

Limit Δz 'nin yönünden bağımsız çıktı; türev her noktada vardır.

■

8.2 Türevlenemeyen Fonksiyonlar

Örnek 8.2 (Eşlenik Hiçbir Noktada Türevlenemez). $f(z) = \bar{z}$ fonksiyonunun hiçbir noktada türevi yoktur.

Çözüm.

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{z + \Delta z - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\bar{\Delta z}}{\Delta z}$$

$\Delta z = \Delta x$ (yatay yaklaşım) için oran 1; $\Delta z = i\Delta y$ (dikey yaklaşım) için $i\Delta y/(i\Delta y) = -1$. İki yön farklı değer verdiği için limit hiçbir z 'de yoktur.

■

Örnek 8.3 (Modül Karesi Yalnızca Başlangıçta Türevlenir). $f(z) = |z|^2$ fonksiyonunun yalnızca $z = 0$ 'da türevi vardır ve $f'(0) = 0$ 'dır.

Çözüm.

$|w|^2 = w\bar{w}$ özdeşliğiyle

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\overline{z + \Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$z = 0$ ise oran $\overline{\Delta z}$ 'dir ve 0'a gider: $f'(0) = 0$. $z \neq 0$ ise yatay yaklaşım $\bar{z} + \overline{\Delta z} + z \rightarrow \bar{z} + z$, dikey yaklaşım $\rightarrow \bar{z} - z$ verir; $z \neq 0$ iken bu ikisi farklıdır ($2z \neq 0$), türev yoktur.

■

i Reel gözle düzgün, kompleks gözle katı

$|z|^2 = x^2 + y^2$ fonksiyonunun bileşenleri $u = x^2 + y^2, v = 0$ her mertebeden kısmi türeve sahiptir; buna rağmen kompleks türev tek bir nokta dışında yoktur. Kompleks türevlenebilirlik, bileşenlerin düzgünlüğünden çok daha fazlasını ister: bileşenleri birbirine bağlayan **Cauchy-Riemann denklemlerini**.

8.3 Türev Sürekliliği Gerektirir

Teorem 8.1 (Türevlenebilirlik Sürekliliği Gerektirir). $f'(z_0)$ varsa f, z_0 'da süreklidir.

İspat.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

■

Tersi doğru değildir: $\bar{z}$ ve $|z|^2$ her yerde süreklidir ama neredeyse hiçbir yerde türevlenemez.

8.4 Türev Formülleri

Limit teoremleri, reel analizden tanıdık tüm türev kurallarını aynı kanıtlarla kompleks düzleme taşır. c sabit, f ve g türevlenebilir olmak üzere:

$$\frac{d}{dz}c = 0, \quad \frac{d}{dz}z = 1, \quad \frac{d}{dz} [cf(z)] = cf'(z)$$

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}; n < 0 \text{ için } z \neq 0)$$

$$\frac{d}{dz} [f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$$

$$\frac{d}{dz} [f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{f(z)}{g(z)} \right] = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2} \quad (g(z) \neq 0)$$

Çarpım kuralının kanıtı örnek olsun: $\Delta z \rightarrow 0$ iken

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z)g(z + \Delta z) - f(z)g(z)}{\Delta z} &= f(z + \Delta z) \frac{g(z + \Delta z) - g(z)}{\Delta z} \\ &\quad + g(z) \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \end{aligned}$$

yazılır; türevlenebilen f sürekli olduğundan birinci terim $f(z)g'(z)$ 'ye, ikincisi $g(z)f'(z)$ 'ye gider.

Teorem 8.2 (Zincir Kuralı). f 'nin z_0 'da, g 'nin $f(z_0)$ 'da türevi varsa $F(z) = g[f(z)]$ bileşkesinin z_0 'da türevi vardır ve

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)] f'(z_0)$$

$w = f(z)$ ve $W = g(w)$ yazılışıyla bu, alışıldık biçimini alır:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}$$

Örnek 8.4 (Zincir Kuralı Uygulaması). $\frac{d}{dz} (2z^2 + i)^5$ türevini hesaplayınız.

Çözüm.

$w = 2z^2 + i$, $W = w^5$ alalım:

$$\frac{d}{dz} (2z^2 + i)^5 = 5w^4 \cdot 4z = 20z (2z^2 + i)^4$$

■

8.5 Alıştırma

Alıştırma 8.1 (Türev Hesapları).

- $f(z) = \frac{z-1}{2z+1}$ ($z \neq -\frac{1}{2}$) için $f'(z)$ türevini hesaplayınız.
- $f(z) = \operatorname{Im} z$ fonksiyonunun hiçbir noktada türevlenemediğini, tanım üzerinden yatay ve dikey yaklaşımları karşılaştırarak gösteriniz.
- $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ polinomunun türevinin yine bir polinom olduğunu yazınız.

Çözüm.

a) Bölüm kuralını uygulayalım; pay $z - 1$, payda $2z + 1$ 'dir:

$$f'(z) = \frac{(z-1)'(2z+1) - (z-1)(2z+1)'}{(2z+1)^2} = \frac{(2z+1) - 2(z-1)}{(2z+1)^2}$$

Payı sadeleştirirsek $2z + 1 - 2z + 2 = 3$ kalır:

$$f'(z) = \frac{3}{(2z+1)^2} \quad \left(z \neq -\frac{1}{2}\right)$$

b) $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ olmak üzere fark bölümünü yazalım. $f(z) = \text{Im } z = y$ olduğundan

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(y + \Delta y) - y}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

Yatay yaklaşım ($\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$): bölüm her adımda

$$\frac{0}{\Delta x} = 0$$

Dikey yaklaşım ($\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$): bölüm her adımda

$$\frac{\Delta y}{i\Delta y} = \frac{1}{i} = -i$$

Bir limitin var olması için, $\Delta z \rightarrow 0$ giden **her** yol boyunca aynı değere ulaşılması gerekir. Burada iki yol 0 ve $-i$ gibi farklı değerler verdiği için limit yoktur. Seçilen z noktası keyfi olduğu için $\text{Im } z$ hiçbir noktada türevlenebilir değildir.

c) Türev, sonlu toplamlar üzerinde terim terime uygulanır ve $\frac{d}{dz} z^k = k z^{k-1}$ 'dir:

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + n a_n z^{n-1}$$

Sonuç yine bir polinomdur: $a_n \neq 0$ ve $n \geq 1$ ise derecesi $n - 1$ 'dir. Polinomlar tüm düzlemde türevlenebilir olduğundan bu işlem istendiği kadar tekrarlanabilir ve n 'inci türevden sonra sabit $n! a_n$ elde edilir.

■

Yatay ve dikey yaklaşımların uyuşması tesadüfe bırakılamaz; bu uyumun kesin koşulları, kompleks analizin imzası sayılan denklemlerdir: [Cauchy-Riemann denklemleri](#).

9. Cauchy-Riemann Denklemleri

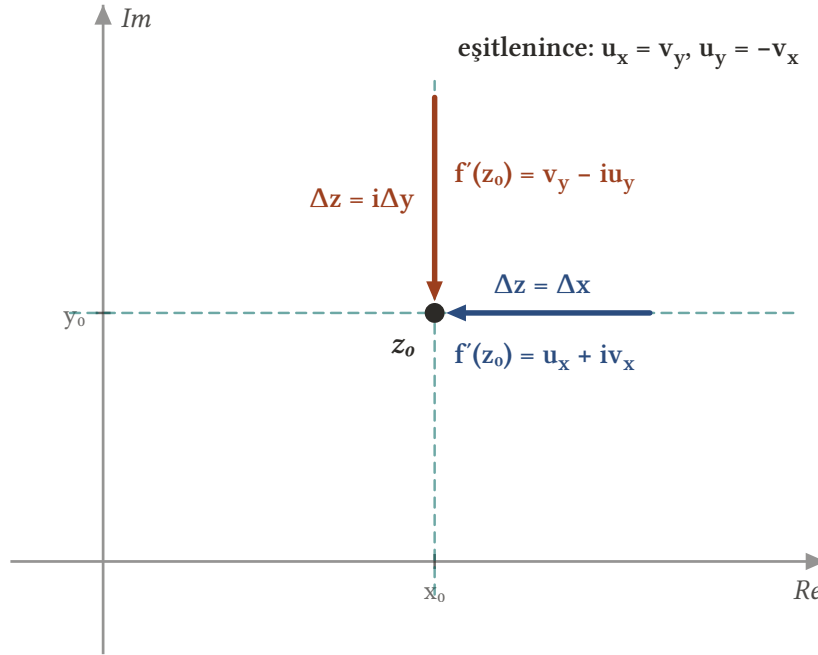
Kompleks türevin var olması, bileşen fonksiyonları u ile v 'yi birbirine kenetleyen iki kısmi diferansiyel denklemi zorunlu kılar. Bu bölümde önce bu denklemleri türetecek, sonra hangi ek koşulla türevin varlığını **garanti ettiklerini** göreceğiz.

9.1 Denklemlerin Türetilişi

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında türevi var olsun:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Limit her yönden aynı olduğuna göre, iki özel yönü karşılaştırabiliriz.



Şekil 9.1: Türev her yönden aynı olduğuna göre iki özel yön karşılaştırılabilir: yatay yaklaşım $f'(z_0) = u_x + iv_x$, dikey yaklaşım $f'(z_0) = v_y - iu_y$ verir. İki ifadenin reel ve sanal kısımlarının eşitliği Cauchy-Riemann denklemleridir.

Yatay yaklaşım ($\Delta z = \Delta x$): oran

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

biçimini alır ve limitte

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$$

Dikey yaklaşım ($\Delta z = i\Delta y$): $1/i = -i$ olduğundan

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} - i \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

ve limite

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - i u_y(x_0, y_0)$$

İki ifadenin reel ve sanal kısımları eşitlenirse aranan denklemler çıkar.

Teorem 9.1 (Cauchy-Riemann Denklemlerinin Gerekliliği). $f = u + iv$ fonksiyonunun $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında türevi varsa, u ve v 'nin birinci mertebeden kısmi türevleri o noktada vardır ve **Cauchy-Riemann denklemlerini** sağlar:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Ayrıca türev şu iki eşdeğer biçimde yazılabilir:

$$f'(z_0) = u_x + i v_x = v_y - i u_y$$

Örnek 9.1 (Denklemlerin Doğrulanması). $f(z) = z^2$ için $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ 'dir:

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x$$

Denklemler her noktada sağlanır ve $f'(z) = u_x + i v_x = 2x + i 2y = 2z$ — **tanımdan bulduğumuz sonuçla aynıdır.**

Örnek 9.2 (Denklemlerle Eleme). $f(z) = |z|^2$ için $u = x^2 + y^2$, $v = 0$ 'dir. Cauchy-Riemann denklemleri

$$2x = 0, \quad 2y = 0$$

yalnızca başlangıç noktasında sağlanır; dolayısıyla $z \neq 0$ hiçbir noktada türev **olamaz**. (Başlangıçta türevin gerçekten var olduğunu tanımdan biliyoruz: $f'(0) = 0$.)

⚠ Gereklidir, tek başına yeterli değildir

Cauchy-Riemann denklemlerinin bir noktada sağlanması, türevin o noktada var olduğunu **garanti etmez**; kısmi türevlerin o noktada sürekliliği gibi bir ek koşul gerekir. Denklemlerin asıl gücü eleyicidir: sağlanmadıkları noktada türev kesinlikle yoktur.

9.2 Yeterlilik Teoremi

Teorem 9.2 (Türevlenebilirlik İçin Yeterli Koşullar). $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$ 'in bir ε -komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer

- u ve v 'nin birinci mertebeden kısmi türevleri bu komşulukta her yerde varsa,
 - bu kısmi türevler (x_0, y_0) 'da sürekliyse ve orada Cauchy-Riemann denklemlerini sağlıyorsa,
- o zaman $f'(z_0)$ vardır ve $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$ 'dir.

İspat.

Kısmi türevlerin sürekliliği, artmaların lineerleştirilebilmesini sağlar: $\Delta z = \Delta x + i \Delta y \rightarrow 0$ iken $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4 \rightarrow 0$ olmak üzere

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y$$

(kısmi türevler (x_0, y_0) 'da hesaplanıyor). $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$ ifadesinde Cauchy-Riemann denklemleriyle $u_y = -v_x, v_y = u_x$ yazılırsa

$$\Delta w = (u_x + iv_x)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y$$

Böylece

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x + iv_x + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

$|\Delta x/\Delta z| \leq 1$ ve $|\Delta y/\Delta z| \leq 1$ olduğundan son iki terim sıfıra gider; limit $u_x + iv_x$ olarak vardır.

■

Örnek 9.3 (Üstel Fonksiyonun Türevi). $f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$ fonksiyonu her noktada türevlenebilir ve $f'(z) = f(z)$ 'dir.

Çözüm.

$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ için

$$u_x = e^x \cos y = v_y, \quad u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

Kısmi türevler her yerde sürekli ve denklemler her yerde sağlanır; teoreme göre

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$$

■

9.3 Kutupsal Koordinatlarda Cauchy-Riemann

$z_0 \neq 0$ civarında $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ dönüşümü yapılırsa, zincir kuralıyla

$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad u_\theta = -u_x r \sin \theta + u_y r \cos \theta$$

(ve v için benzerleri) yazılır. Kartezyen denklemler yerine konduğunda kutupsal biçim elde edilir:

Teorem 9.3 (Kutupsal Cauchy-Riemann Denklemleri). $f = u(r, \theta) + iv(r, \theta), z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ ($r_0 > 0$) noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Kısmi türevler bu komşulukta var, (r_0, θ_0) 'da sürekli ve

$$ru_r = v_\theta, \quad u_\theta = -rv_r$$

denklemlerini sağlıyorsa $f'(z_0)$ vardır ve

$$f'(z_0) = e^{-i\theta} (u_r + iv_r)$$

Örnek 9.4 (1/z Türevi). $f(z) = \frac{1}{z}$ ($z \neq 0$) için kutupsal denklemleri doğrulayıp türevi bulunuz.

Çözüm.

$$f(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} = \frac{\cos \theta}{r} - i \frac{\sin \theta}{r}; \text{ yani } u = \frac{\cos \theta}{r}, v = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

$$ru_r = -\frac{\cos \theta}{r} = v_\theta, \quad u_\theta = -\frac{\sin \theta}{r} = -rv_r$$

Denklemler $r > 0$ 'da sağlanır; türev

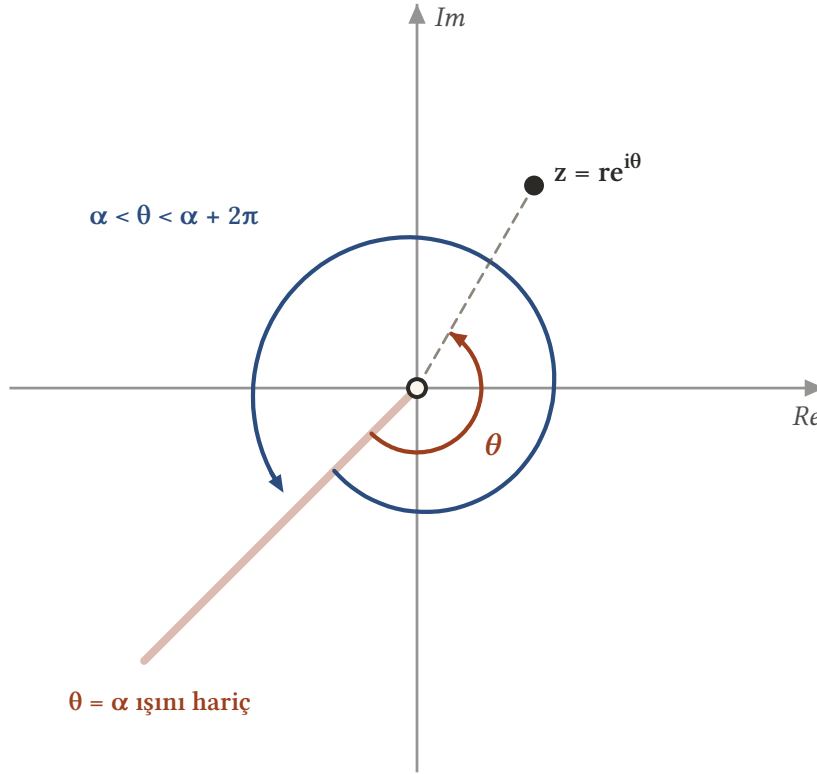
$$f'(z) = e^{-i\theta} \left(-\frac{\cos \theta}{r^2} + i \frac{\sin \theta}{r^2} \right) = -\frac{e^{-i\theta}}{r^2} (\cos \theta - i \sin \theta) = -\frac{e^{-i2\theta}}{r^2} = -\frac{1}{z^2}$$

■

Örnek 9.5 (Küp Kök Dalının Türevi).

$$f(z) = \sqrt[3]{r} e^{i\theta/3} \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

dalının her noktada türevlenebilir olduğunu gösterip türevini bulunuz.



Şekil 9.2: Küp kök dalı $r > 0$ ve $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ koşullarıyla tanımlıdır: her z 'nin açısı $\theta = \alpha$ ışınından başlayarak saat yönünün tersine tam bir tur içinde ölçülür. Bu ışın ve başlangıç noktası dışarıda bırakılır; kalan açık kümede dal tek değerli ve türevlenebilirdir.

Çözüm.

$$u = \sqrt[3]{r} \cos \frac{\theta}{3}, v = \sqrt[3]{r} \sin \frac{\theta}{3} \text{ için}$$

$$ru_r = \frac{\sqrt[3]{r}}{3} \cos \frac{\theta}{3} = v_\theta, \quad u_\theta = -\frac{\sqrt[3]{r}}{3} \sin \frac{\theta}{3} = -rv_r$$

Türev formülüyle

$$f'(z) = e^{-i\theta} \frac{1}{3r^{2/3}} \left(\cos \frac{\theta}{3} + i \sin \frac{\theta}{3} \right) = \frac{e^{-i\theta} e^{i\theta/3}}{3r^{2/3}} = \frac{1}{3r^{2/3} e^{i2\theta/3}} = \frac{1}{3[f(z)]^2}$$

Reel analizdeki $\frac{d}{dx} x^{1/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$ formülünün birebir karşılığıdır.

■

9.4 Alıştırma

Alıştırma 9.1 (Cauchy-Riemann Uygulamaları).

- a) $f(z) = e^{-x} (\cos y - i \sin y)$ fonksiyonunun tüm düzlemde türevlenebilir olduğunu ve $f'(z) = -f(z)$ sağlandığını gösteriniz.

- b) $f(z) = x^2 + iy^2$ fonksiyonunun Cauchy-Riemann denklemlerini hangi noktalarda sağladığını bulunuz; bu noktalarda türevin var olduğunu ve $f'(z) = 2x$ değerini aldığını gösteriniz.
- c) $f(z) = z \operatorname{Im} z$ fonksiyonunun yalnızca $z = 0$ noktasında türevlenebildiğini gösteriniz.

Çözüm.

a) Bileşenler $u = e^{-x} \cos y$ ve $v = -e^{-x} \sin y$ 'dir. Kısmi türevleri yazalım:

$$u_x = -e^{-x} \cos y, \quad u_y = -e^{-x} \sin y$$

$$v_x = e^{-x} \sin y, \quad v_y = -e^{-x} \cos y$$

Cauchy-Riemann denklemleri her (x, y) için sağlanır:

$$u_x = v_y (= -e^{-x} \cos y), \quad u_y = -v_x (= -e^{-x} \sin y)$$

Dört kısmi türev de tüm düzlemde süreklidir; yeterlilik teoremi gereği f her noktada türevlenebilirdir. Türev formülü

$$f'(z) = u_x + iv_x = -e^{-x} \cos y + i e^{-x} \sin y = -e^{-x} (\cos y - i \sin y) = -f(z)$$

verir. (Bu fonksiyon aslında $f(z) = e^{-x} e^{-iy} = e^{-z}$ 'dir; bulunan bağıntı $\frac{d}{dz} e^{-z} = -e^{-z}$ eşitliğinden başkası değildir.)

b) Burada $u = x^2$, $v = y^2$ 'dir:

$$u_x = 2x, \quad u_y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = 2y$$

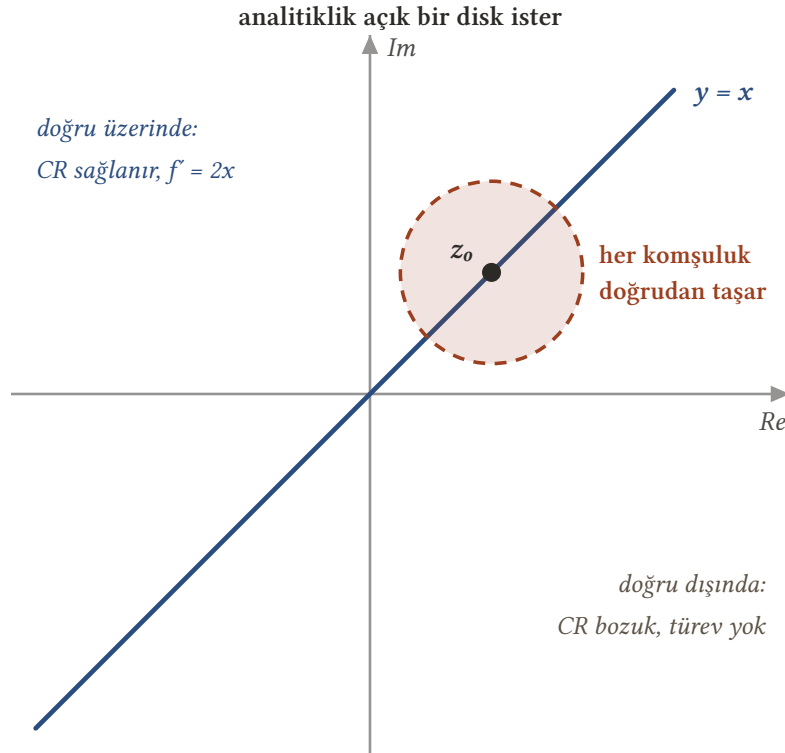
İkinci denklem $u_y = -v_x$ her yerde sağlanır ($0 = 0$). Birinci denklem ise

$$u_x = v_y \Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow y = x$$

yani Cauchy-Riemann denklemleri yalnızca $y = x$ doğrusu üzerinde geçerlidir. Kısmi türevler tüm düzlemde sürekli olduğundan yeterlilik teoremi bu doğrunun her noktasında uygulanır ve türev vardır:

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i \cdot 0 = 2x \quad (y = x)$$

Doğrunun dışındaki noktalarda Cauchy-Riemann denklemleri bozulduğu için türev yoktur. Dikkat: türev bir doğru üzerinde var olsa da hiçbir noktada **analitik** değildir; analitiklik bir açık komşuluk ister, doğrunun ise iç noktası yoktur.



Şekil 9.3: $f(z) = x^2 + iy^2$ için Cauchy-Riemann denklemleri yalnız $y = x$ doğrusunda sağlanır; türev bu doğrunun her noktasında vardır. Ama analitiklik z_0 'ın bir **komşuluğunun her noktasında** türev ister ve her disk doğrudan taşar: f hiçbir noktada analitik değildir.

c) $f(z) = z \operatorname{Im} z = (x + iy)y = xy + iy^2$ olduğundan $u = xy, v = y^2$ 'dir:

$$u_x = y, \quad u_y = x, \quad v_x = 0, \quad v_y = 2y$$

Cauchy-Riemann denklemleri:

$$u_x = v_y \Leftrightarrow y = 2y \Leftrightarrow y = 0, \quad u_y = -v_x \Leftrightarrow x = 0$$

İki koşul yalnızca $z = 0$ noktasında birlikte sağlanır; başka hiçbir noktada türev olamaz. Başlangıçta ise kısmi türevler sürekli olduğundan yeterlilik teoremi türevin varlığını verir:

$$f'(0) = u_x(0,0) + iv_x(0,0) = 0$$

■

Türevin bir noktada değil, bir **açık kümenin her noktasında** var olması, kompleks analizin merkez kavramını doğurur: [analitiklik](#).

10. Analitik Fonksiyonlar

Bir noktada türevin varlığı zayıf bir bilgidir: $|z|^2$ yalnızca başlangıçta türevlenebilir ama bu ona hiçbir ayrıcalık kazandırmaz. Kompleks analizin gerçek kahramanı, türevi bir **açık kümenin her noktasında** var olan fonksiyonlardır.

10.1 Tanımlar

Tanım 10.1 (Analitiklik). f fonksiyonu, z_0 'ın bir komşuluğunun her noktasında türevi varsa z_0 'da **analitiktir**. Açık bir kümenin her noktasında analitikse o kümede analitik denir. Tüm düzlemde analitik fonksiyona **tam fonksiyon** denir.

Tanım 10.2 (Tekil Nokta). f , z_0 'da analitik olmasın ama z_0 'ın her komşuluğu f 'nin analitik olduğu bir nokta içersin; böyle bir z_0 'a f 'nin bir **tekil noktası** denir.

Üç temel örnek kavramları ayırıştırır:

- $f(z) = 1/z$, delinmiş düzlemde analitiktir; $z = 0$ onun tekil noktasıdır.
- $f(z) = |z|^2$ **hiçbir yerde analitik değildir**: türevi yalnızca $z = 0$ 'da vardır, hiçbir açık kümede yoktur. Tekil noktası da yoktur – çünkü analitik olduğu nokta yoktur.
- Polinomlar tam fonksiyonlardır.

Analitikliğin gerek koşulları önceki bölümlerden miras kalır: analitik fonksiyon süreklidir ve bileşenleri Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

10.2 Analitik Fonksiyonların Cebiri

Türev kuralları doğrudan şu sonuçları verir: iki fonksiyon bir D domeninde analitikse

- toplamları ve çarpımları D 'de analitiktir;
- bölümleri, paydanın sıfırlanmadığı noktalarda analitiktir;
- analitik fonksiyonların bileşkesi analitiktir (zincir kuralı).

Özel olarak bir rasyonel fonksiyon P/Q , Q 'nun sıfırları dışında her yerde analitiktir.

Örnek 10.1 (Bir Rasyonel Fonksiyonun Tekil Noktaları).

$$f(z) = \frac{z^3 + 4}{(z^2 - 3)(z^2 + 1)}$$

fonksiyonu, paydanın sıfırları olan $z = \pm\sqrt{3}$ ve $z = \pm i$ dışında tüm düzlemde analitiktir; bu dört nokta f 'nin tekil noktalarıdır.

Örnek 10.2 (Bir Tam Fonksiyon). $f(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$ fonksiyonunun tam olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$u = \cosh x \cos y$, $v = \sinh x \sin y$ için

$$u_x = \sinh x \cos y = v_y, \quad u_y = -\cosh x \sin y = -v_x$$

Kısmi türevler her yerde sürekli ve Cauchy-Riemann denklemleri her yerde sağlanır; **yeterlilik teoremi** her noktada uygulanır. (Bu fonksiyon, ileride tanışacağımız $\cosh z$ 'dir.)

■

10.3 Türevi Sıfır Olan Fonksiyon Sabittir

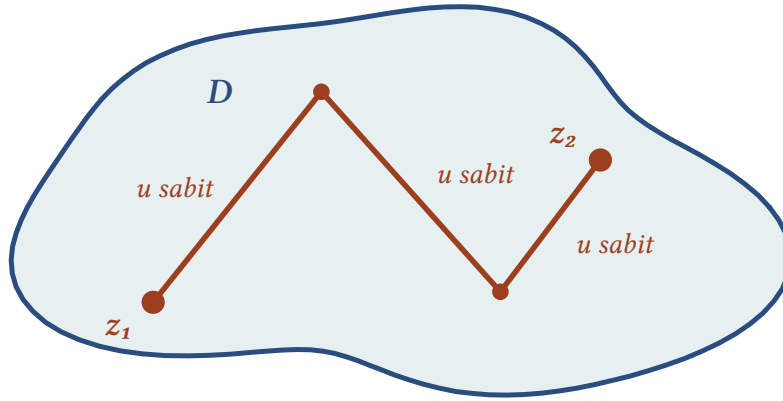
Teorem 10.1 (Sabitlik Teoremi). Bir D domeninde $f'(z) = 0$ ise f , D 'de sabittir.

İspat.

$f = u + iv$ yazalım. $f' = u_x + iv_x = 0$ olduğundan $u_x = v_x = 0$; Cauchy-Riemann denklemleriyle $u_y = v_y = 0$ da çıkar. Yani $\nabla u = (u_x, u_y)$ gradyanı D 'de özdeş sıfırdır.

D içindeki herhangi bir L doğru parçası üzerinde, parça boyunca yönlü türev $\frac{du}{ds} = \nabla u \cdot \mathbf{U} = 0$ olduğundan u , L boyunca sabittir. D bir domen olduğundan herhangi iki noktası, tamamen D 'de kalan sonlu sayıda doğru parçasıyla birleştirilebilir; parça parça sabitlik zincir boyunca taşınır ve u , D 'nin tamamında tek bir a değerini alır. Aynı akıl yürütme v için bir b sabiti verir; $f(z) = a + bi$ olur.

her doğru parçasında $du/ds = \nabla u \cdot \mathbf{U} = 0$

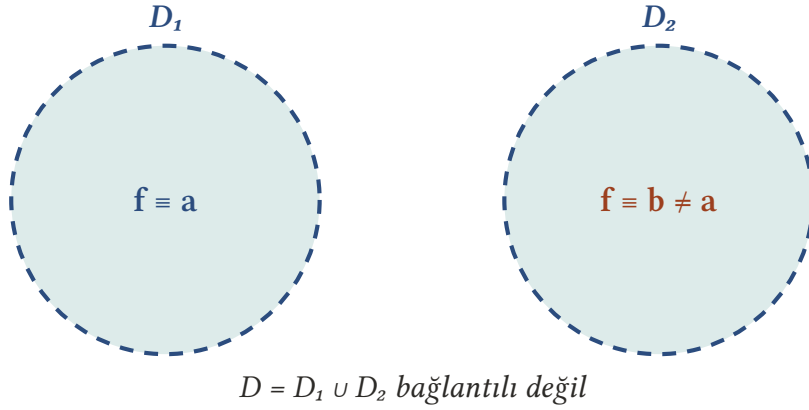


Şekil 10.1: $\nabla u = 0$ olduğundan u , D içindeki her doğru parçası boyunca sabittir. D bir domen olduğu için z_1 ile z_2 , tamamen D 'de kalan sonlu sayıda parçayla birleşir; sabitlik parçadan parçaya taşınır ve $u(z_1) = u(z_2)$ çıkar.

■

Teoremden D 'nin **bağlantılı** olması vazgeçilmezdir: iki ayrık açık diskten oluşan kümede, her diskte farklı sabit değer alan fonksiyonun türevi de sıfırdır ama fonksiyon sabit değildir.

$f' = 0$ her yerde, ama f sabit değil



Şekil 10.2: İki ayrık açık diskte ayrı ayrı sabit olan fonksiyonun türevi her noktada sıfırdır, ama $a \neq b$ ise fonksiyon sabit değildir. Sabitlik teoremindeki **domen** (bağlantılı açık küme) koşulu tam da bunu engeller: iki diski birleştiren, kümede kalan bir yol yoktur.

10.4 Katılık Örnekleri

Analitiklik o kadar kısıtlayıcıdır ki, üzerine küçük bir ek koşul koymak fonksiyonu tümüyle dondurabilir.

Örnek 10.3 (Eşleniği de Analitikse). f ve $\overline{f(z)}$ bir D domeninde birlikte analitikse f , D' 'de sabittir.

Çözüm.

$f = u + iv$ ve $\bar{f} = u - iv$ yazalım. f analitik olduğundan

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

$\bar{f}$ analitik olduğundan (bileşenleri u ve $-v$):

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x$$

Taraf tarafa toplanırsa $u_x = 0$ ve $u_y = 0$; geri konursa $v_x = v_y = 0$. O hâlde $f' = u_x + iv_x = 0$ ve **Teorem 10.1** gereği f sabittir. ■

Örnek 10.4 (Modülü Sabitse). $|f(z)|$ bir D domeninde sabitse f de sabittir.

Çözüm.

$|f(z)| = c$ olsun. $c = 0$ ise $f \equiv 0$ 'dır. $c \neq 0$ ise f , D' 'de hiç sıfırlanmaz ve

$$f(z) \overline{f(z)} = c^2 \implies \overline{f(z)} = \frac{c^2}{f(z)}$$

Sağ taraf, sıfırlanmayan analitik fonksiyonun bölümü olarak D' 'de analiktir; yani $\bar{f}$ de analiktir. Önceki örneğe göre f sabittir. ■

i Neden 'katılık'?

Reel türevlenebilir fonksiyonlar esnektir: bir parçasını değiştirip kalanını koruyabilirsiniz. Analitik fonksiyonlar ise kristal gibidir — modülünü sabitlemek, eşleniğini analitik yapmak veya (ileride görüleceği gibi) küçük bir yayda değerlerini bilmek, fonksiyonun tamamını belirler. Bu katılık kompleks analizin en güçlü teoremlerinin kaynağıdır.

10.5 Alıştırma

Alıştırma 10.1 (Analitiklik Soruları).

- a) $f(z) = \frac{2z+1}{z(z^2+1)}$ fonksiyonunun tekil noktalarını bulunuz.
 b) $f(z) = \frac{z^2+1}{(z+2)(z^2+2z+2)}$ fonksiyonunun tekil noktalarını bulunuz.
 c) Bir D domeninde f analitik ve reel değerliyse sabit olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

a) İki polinomun bölümü, payda sıfırdan farklı olduğu her noktada analitiktir. Paydayı sıfırlayan noktaları bulalım:

$$z(z^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{veya} \quad z^2 = -1 \Leftrightarrow z = i, z = -i$$

Bu üç noktada pay sıfır değildir ($z = 0$ için 1, $z = \pm i$ için $1 \pm 2i$), dolayısıyla sadeleşme yoktur. f , bu noktaların her birinin delinmiş komşuluğunda analitik ama kendisinde analitik olmadığından tekil noktalar

$$z = 0, \quad z = i, \quad z = -i$$

noktalarıdır.

b) Paydanın ikinci çarpanının sıfırlarını bulalım:

$$z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

Payda ayrıca $z = -2$ için sıfırdır. Payın bu noktalardaki değerleri sıfırdan farklıdır: $z = -2$ için $z^2 + 1 = 5$; $z = -1 \pm i$ için $z^2 = \mp 2i$ olduğundan $z^2 + 1 = 1 \mp 2i \neq 0$. Tekil noktalar

$$z = -2, \quad z = -1 + i, \quad z = -1 - i$$

c) $f = u + iv$ yazalım. f reel değerli olduğundan D 'nin her noktasında $v(x, y) = 0$ 'dır, dolayısıyla v 'nin tüm kısmi türevleri sıfırdır. f analitik olduğu için Cauchy-Riemann denklemleri geçerlidir:

$$u_x = v_y = 0, \quad u_y = -v_x = 0$$

Türev formülü artık

$$f'(z) = u_x + iv_x = 0$$

verir; yani f' , D boyunca özdeş olarak sıfırdır. Türevi bir domende sıfır olan fonksiyon sabit olduğundan f sabittir.

■

Analitik fonksiyonların bileşenleri sıradan fonksiyonlar değildir: ikisi de Laplace denklemini sağlar. Bu bağlantı bizi [harmonik fonksiyonlara](#) götürüyor.

11. Harmonik Fonksiyonlar

Analitik fonksiyonlar, uygulamalı matematiğin en önemli denklemlerinden biriyle doğuştan akrabadır: bir analitik fonksiyonun reel ve sanal kısımları **Laplace denklemini** sağlar. Bu köprü, ısı iletimi, elektrostatik ve akışkanlar mekaniği problemlerinin kompleks analizle çözülmesinin temelidir.

11.1 Harmoniklik

Tanım 11.1 (Harmonik Fonksiyon). İki reel değişkenli, reel değerli bir $H(x, y)$ fonksiyonu; bir domende birinci ve ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahipse ve **Laplace denklemini**

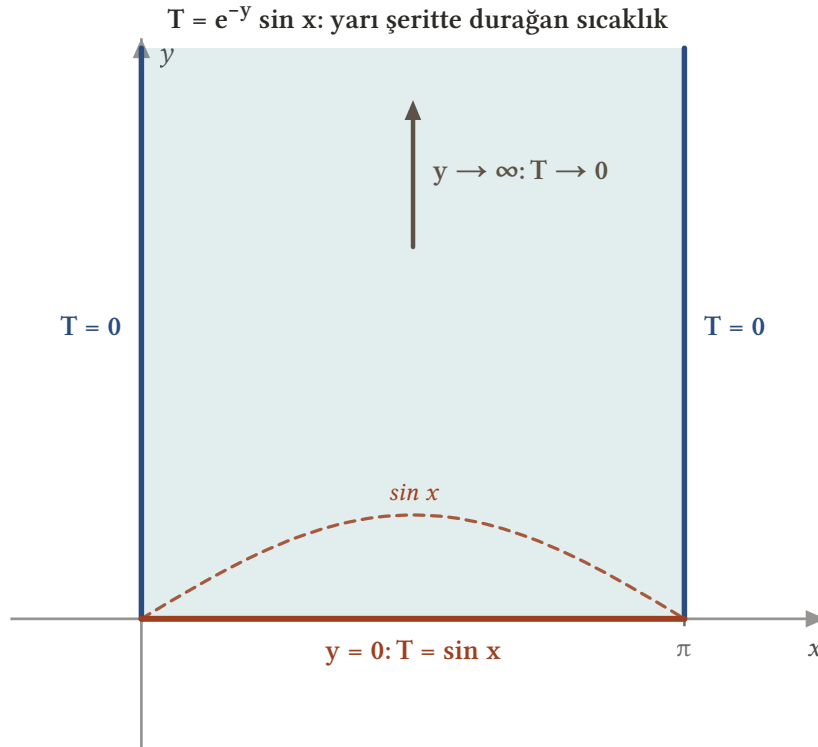
$$H_{xx} + H_{yy} = 0$$

sağlıyorsa o domende **harmoniktir**.

Örnek 11.1 (Bir Harmonik Fonksiyon). $T(x, y) = e^{-y} \sin x$ fonksiyonu tüm düzlemde harmoniktir:

$$T_{xx} = -e^{-y} \sin x, \quad T_{yy} = e^{-y} \sin x, \quad T_{xx} + T_{yy} = 0$$

Bu fonksiyon, $0 < x < \pi$, $y > 0$ yarı şeridinde durağan sıcaklık dağılımı olarak yorumlanabilir: dikey kenarlarda $T = 0$, taban $y = 0$ üzerinde $T = \sin x$ değerlerini alır ve $y \rightarrow \infty$ iken sıfıra söner.



Şekil 11.1: Harmonik $T = e^{-y} \sin x$, yarı şeritte durağan sıcaklık dağılımıdır: dikey kenarlarda $T = 0$, taban üzerinde $T = \sin x$ (kesikli profil) ve $y \rightarrow \infty$ iken $T \rightarrow 0$. Bu sınır değerlerini sağlayan bir Laplace çözümüdür.

11.2 Analitik Fonksiyonların Bileşenleri Harmoniktir

Teorem 11.1 (Bileşenlerin Harmonikliği). $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ bir D domeninde analitikse, u ve v , D 'de harmoniktir.

İspat.

İleride kanıtlanacak temel bir gerçeği ödünç alıyoruz: analitik bir fonksiyonun her mertebeden türevi vardır; özellikle u ve v 'nin ikinci mertebe kısmi türevleri var ve süreklidir.

D 'de Cauchy-Riemann denklemleri geçerlidir:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

Birinciye x 'e, ikinciyi y 'ye göre türetelim:

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}$$

Sürekli karışık türevler sıra değiştirdiğinden ($v_{yx} = v_{xy}$) taraf tarafa toplanınca $u_{xx} + u_{yy} = 0$ çıkar. Benzer biçimde birinci denklem y 'ye, ikincisi x 'e göre türetilirse $v_{xx} + v_{yy} = 0$ elde edilir.

■

Örnek 11.2 (Analitiklikten Harmoniklik Üretmek). $f(z) = e^{-y} \sin x - i e^{-y} \cos x$ fonksiyonu tamdır: bileşenleri için Cauchy-Riemann denklemleri her yerde sağlanır ve kısmi türevler süreklidir (doğrulaması bir satırdır; bu fonksiyon $-ie^{iz}$ 'dir). Teoreme göre Örnek 11.1'teki $T = e^{-y} \sin x$ fonksiyonunun harmonikliği, hesapsız da görülebilirdi: T , bir tam fonksiyonun reel kısmıdır.

Örnek 11.3 (Delinmiş Düzlemde Harmoniklik).

$$\frac{i}{z^2} = \frac{i\bar{z}^2}{|z|^4} = \frac{2xy + i(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

fonksiyonu $z \neq 0$ 'da analitik olduğundan,

$$\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{ve} \quad \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

fonksiyonları başlangıç noktası çıkarılmış düzlemde harmoniktir — doğrudan doğrulaması epey zahmetli olacak bir gerçek.

11.3 Harmonik Eşlenik

Tanım 11.2 (Harmonik Eşlenik). u ve v , bir D domeninde harmonik olsun. Birinci mertebe kısmi türevleri D 'de Cauchy-Riemann denklemlerini

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

sağlıyorsa, v 'ye u 'nun bir **harmonik eşleniği** denir.

Teorem 11.2 (Analitiklik = Harmonik Eşleniklik). $f = u + iv$ fonksiyonu bir D domeninde analiktir ancak ve ancak v , u 'nun harmonik eşleniği ise.

Bir yön Teorem 11.1 ile Cauchy-Riemann gerekliliğinden; diğer yön, harmonikliğin içerdiği süreklilikle yeterlilik teoreminden çıkar.

⚠ Sıra önemlidir

İlişki simetrik değildir: v 'nin u 'nun eşleniği olması, u 'nun v 'nin eşleniği olması demek değildir. Örneğin $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ çifti için $u + iv = z^2$ analitiktir; ama ters sıralı $v + iu = 2xy + i(x^2 - y^2)$ fonksiyonu hiçbir yerde analitik değildir (Cauchy-Riemann denklemleri yalnız başlangıç noktasında sağlanır). Doğru simetri şudur: v 'nin bir harmonik eşleniği $-u$ 'dur; çünkü $v - iu = -i(u + iv)$ çarpımı analitiktir.

11.4 Harmonik Eşlenik Bulma Yöntemi

Verilen harmonik u 'dan eşleniği, Cauchy-Riemann denklemlerinin adım adım integrallemesiyle bulunur. Yöntem bir örnek üzerinde en iyi görülür.

Örnek 11.4 (Harmonik Eşleniğin İnşası). $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ fonksiyonunun harmonikliğini doğrulayıp bir harmonik eşleniğini ve karşılık gelen analitik fonksiyonu bulunuz.

Çözüm.

Harmoniklik: $u_{xx} = -6y$, $u_{yy} = 6y$; toplam sıfırdır.

Birinci denklem: $v_y = u_x = -6xy$ olmalı. y 'ye göre integralleyelim; "sabit" x 'e bağlı olabilir:

$$v(x, y) = -3xy^2 + \varphi(x)$$

İkinci denklem: $v_x = -u_y$ olmalı:

$$-3y^2 + \varphi'(x) = -(3y^2 - 3x^2) \Rightarrow \varphi'(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi(x) = x^3 + C$$

y 'li terimlerin tamamen sadeleşmesi, u 'nun harmonikliğinin güvencesidir. Böylece

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$$

ve karşılık gelen analitik fonksiyon

$$f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2 + C) = i(z^3 + C)$$

Son eşitlik $z^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ açılımıyla doğrulanır.

■

Harmonik eşlenik, sabit ekleme dışında tektir: iki eşlenik v_1, v_2 için $f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$, reel kısmı özdeş sıfır olan analitik bir fonksiyondur. Cauchy-Riemann denklemleri bu durumda $(v_1 - v_2)_x = (v_1 - v_2)_y = 0$ verir; türevi sıfır olan bu fonksiyon [sabitlik teoremi](#) gereği sabittir.

11.5 Alıştırma

Alıştırma 11.1 (Harmonik Eşlenik Alıştırmaları). Aşağıdaki fonksiyonların tüm düzlemde harmonik olduklarını gösterip birer harmonik eşleniklerini bulunuz.

a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$

b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

c) $u(x, y) = \sinh x \sin y$

Çözüm.

a) $u = 2x - 2xy$ için kısmi türevler:

$$u_x = 2 - 2y, \quad u_{xx} = 0, \quad u_y = -2x, \quad u_{yy} = 0$$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ olduğundan u tüm düzlemde harmoniktir. Eşleniği Cauchy-Riemann denklemlerinden kuralım. Önce $v_y = u_x$:

$$v_y = 2 - 2y \implies v = 2y - y^2 + \varphi(x)$$

Şimdi $v_x = -u_y$ koşulunu uygulayalım:

$$v_x = \varphi'(x) = 2x \implies \varphi(x) = x^2 + C$$

Böylece

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y + C$$

b) $u = 2x - x^3 + 3xy^2$ için

$$u_x = 2 - 3x^2 + 3y^2, \quad u_{xx} = -6x, \quad u_y = 6xy, \quad u_{yy} = 6x$$

Toplam sıfırdır, u harmoniktir. Eşlenik için

$$v_y = u_x = 2 - 3x^2 + 3y^2 \implies v = 2y - 3x^2y + y^3 + \varphi(x)$$

$$v_x = -6xy + \varphi'(x) \stackrel{!}{=} -u_y = -6xy \implies \varphi'(x) = 0$$

Sonuç:

$$v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C$$

c) $u = \sinh x \sin y$ için

$$u_x = \cosh x \sin y, \quad u_{xx} = \sinh x \sin y, \quad u_y = \sinh x \cos y, \quad u_{yy} = -\sinh x \sin y$$

İki ikinci türev birbirini götürür; u harmoniktir. Eşlenik:

$$v_y = u_x = \cosh x \sin y \implies v = -\cosh x \cos y + \varphi(x)$$

$$v_x = -\sinh x \cos y + \varphi'(x) \stackrel{!}{=} -u_y = -\sinh x \cos y \implies \varphi'(x) = 0$$

Sonuç:

$$v(x, y) = -\cosh x \cos y + C$$

(Elde edilen $f = u + iv$ fonksiyonları sırasıyla $2z + iz^2 + iC$, $2z - z^3 + iC$ ve $-i \cosh z + iC$ biçiminde yazılabilir; C reel sabittir.)

■

Analitik fonksiyonların katılığı yalnızca bileşenlerinde değil, değerlerinin dağılımında da kendini gösterir: bir analitik fonksiyon, küçük bir bölgedeki değerleriyle [tümüyle belirlenir](#).

12. Tek Türlü Belirlenme ve Yansıma Prensibi

Analitik fonksiyonların katılığı bu bölümde en çarpıcı biçimine ulaşır: bir domenin küçük bir köşesinde — hatta tek bir doğru parçası üzerinde — fonksiyonun değerlerini bilmek, onu domenin **tamamında** belirler. Bu ilke hem “analitik uzanım” kavramını hem de simetri özelliklerini yöneten yansıma prensibini doğurur.

12.1 Özdeş Sıfır Olma İlkesi

Teorem 12.1 (Özdeş Sıfır Olma). f , bir D domeninde analitik olsun. f , D 'nin bir alt domeninde veya D içinde kalan bir doğru parçası üzerinde özdeş olarak sıfırsa, D 'nin **tamamında** $f(z) = 0$ 'dır.

İspat.

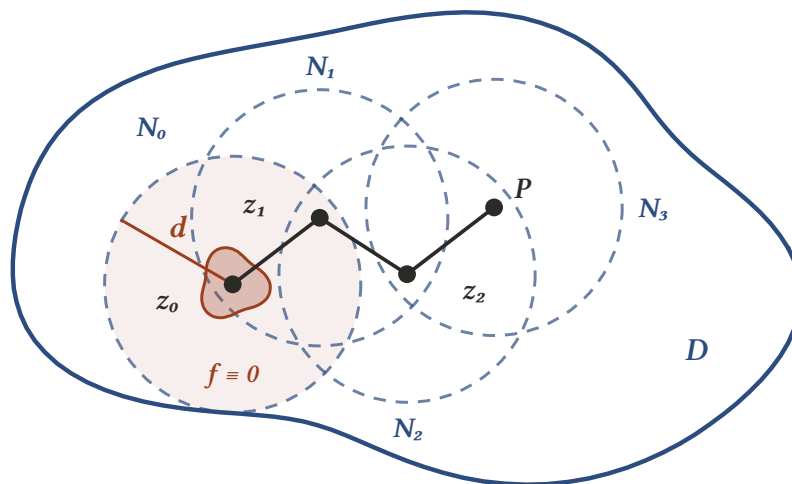
Kanıtın anahtarı, seriler kuramından ödünç alınacak yerel bir gerçektir: analitik bir fonksiyon, sıfırlandığı bir alt domeni (veya doğru parçasını) içeren her açık diskte özdeş sıfırdır. Bunu kabul ederek küresel sonucu kuralım.

z_0 , f 'nin sıfırlandığı alt bölgede bir nokta; P , D 'nin herhangi bir noktası olsun. D bağlantılı olduğundan z_0 'ı P 'ye bağlayan ve tamamen D 'de kalan bir L çokgensel yolu vardır. d , L ile D 'nin sınırı arasındaki en küçük uzaklık olsun (D tüm düzlemse d herhangi bir pozitif sayı alınabilir). L üzerinde ardışık uzaklıkları d 'den küçük sonlu sayıda

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = P$$

noktası seçelim ve her z_k merkezli d yarıçaplı N_k diskini düşünelim; her disk D içindedir ve $z_{k+1} \in N_k$ 'dir.

$z_{k+1} \in N_k$: sıfır diskten diske geçer



Şekil 12.1: f , z_0 etrafındaki küçük alt domende sıfırdır. Çokgensel yol üzerinde ardışık uzaklıkları d 'den küçük noktalar seçilir; her N_k disk D 'nin içinde kalır ve bir sonraki merkezi içerir (d: yolun D 'nin sınırına uzaklığı). Yerel gerçekte N_0 'da $f = 0$ verir, kesişim üzerinden N_1 'e, oradan N_2 'ye geçer ve P 'ye ulaşır.

Yerel gerçek N_0 'da $f \equiv 0$ verir. N_1 'in merkezi z_1 , N_0 'in içindedir; f , $N_0 \cap N_1$ kesişiminde (bir alt domende) sıfır olduğundan yerel gerçek N_1 'de de $f \equiv 0$ verir. Zincir boyunca ilerleyerek N_n 'de, özellikle P 'de $f(P) = 0$ bulunur.

■

Teorem 12.2 (Tek Türlü Belirlenme). f ve g , bir D domeninde analitik olsun. D 'nin bir alt domeninde veya D 'de kalan bir doğru parçası üzerinde $f(z) = g(z)$ ise, D 'nin tamamında $f(z) = g(z)$ 'dir.

İspat.

$h = f - g$ fonksiyonu D 'de analitiktir ve ilgili alt kümede özdeş sıfırdır; [Teorem 12.1](#) gereği D 'nin tamamında sıfırdır.

■

12.2 Analitik Uzanım

Tek türlü belirlenmenin en verimli kullanımı, fonksiyonların tanım bölgesini genişletmektir. D_1 ve D_2 kesişimi boş olmayan iki domen olsun; f_1 , D_1 'de analitik olsun. D_2 'de analitik bir f_2 fonksiyonu kesişimde f_1 ile çakışıyor, f_2 'ye f_1 'in D_2 'ye **analitik uzanımı** denir.

Uzanım — var olduğunda — **tektir**: kesişimde f_1 ile çakışan iki uzanım, D_2 'de birbirine eşit olmak zorundadır ([Teorem 12.2](#)). O zaman

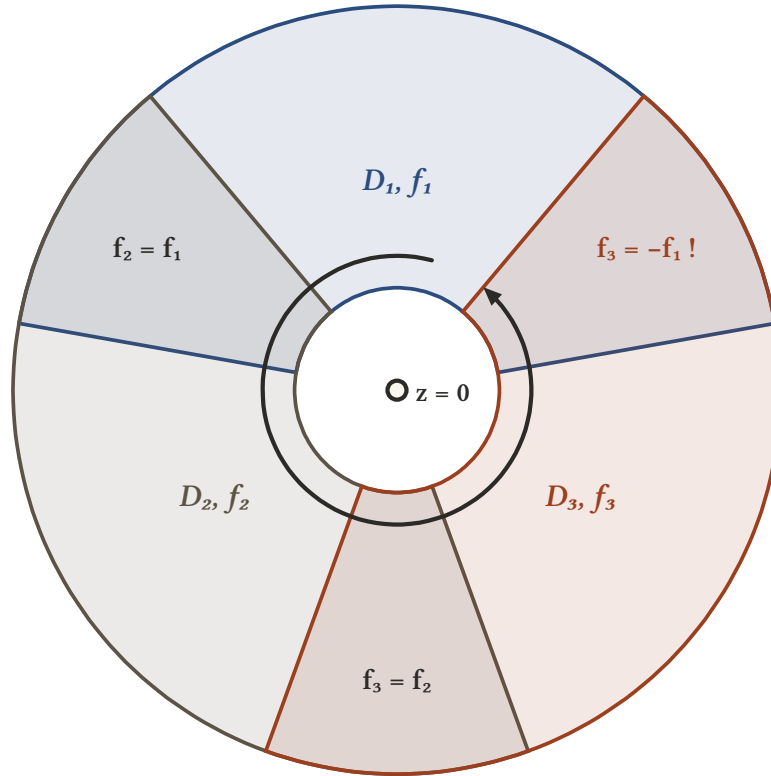
$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases}$$

fonksiyonu $D_1 \cup D_2$ birleşiminde analitiktir ve iki parçanın ortak genişlemesidir.

⚠ Zincirleme uzanımda dönüş garantisi yoktur

Üç domen zincirinde f_2, f_1 'in D_2 'ye; f_3, f_2 'nin D_3 'e uzanımı olsun. D_3, D_1 ile de kesişiyorsa f_3 'ün bu kesişimde f_1 ile çakışması **gerekmez**. Çok değerli köklerin ve logaritmanın dalları bu olgunun kaynağıdır: başlangıç noktası etrafında bir tam tur uzanan $z^{1/2}$ dalı, başlangıç değerinin **negatifiyle** geri döner.

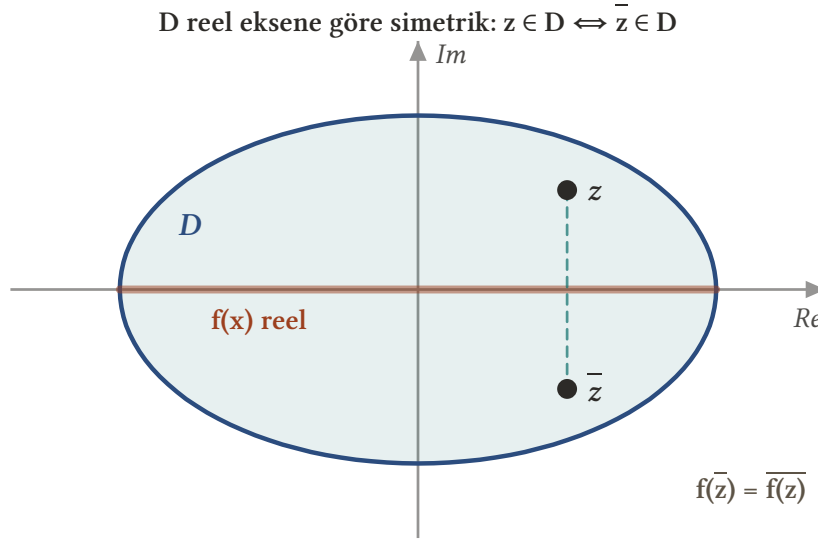
$z^{1/2}$ dalı başlangıç etrafında bir tur uzatılınca



Şekil 12.2: f_1, D_1 'de $z^{1/2}$ 'nin bir dalı olsun. D_2 'ye, oradan D_3 'e uzatılıp başlangıç noktasının etrafında tam tur dönülünce $D_3 \cap D_1$ kesişiminde $f_3 = -f_1$ bulunur: her adımda komşu uzanımlar çakışır ama zincirin sonu başıyla çakışmak zorunda değildir.

12.3 Yansıma Prensibi

Bazı tam fonksiyonlar $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$ simetrisine sahiptir — yani eşlenik almak, değişkenin eşleniğini almakla yer değiştirebilir. Örneğin $z + 1$ ve z^2 böyledir; ama $z + i$ ve iz^2 böyle değildir. Ayrımı belirleyen şey, fonksiyonun reel eksenindeki davranışdır.



Şekil 12.3: Yansıma prensibinin sahnesi: D reel eksene göre simetrik bir domendir ve eksenin bir parçasını içerir. f bu parçada reel değer alıyorsa, z 'nin yansıması $\bar{z}$ 'de fonksiyonun değeri $f(z)$ 'nin yansımasıdır: $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

Teorem 12.3 (Yansıma Prensibi). D , reel eksene göre simetrik ve reel eksenin bir parçasını içeren bir domen; f , D 'de analitik olsun. O zaman

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z) \quad (\text{tüm } z \in D)$$

özdeşliği geçerlidir **ancak ve ancak** f , eksen parçası üzerinde reel değerler alıyorsa.

İspat.

(Yeterlilik) $f(x)$ eksen parçasında reel olsun. $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ tanımlayalım ve F 'nin D 'de analitik olduğunu görelim. $f = u + iv$ yazılırsa

$$F(z) = \overline{u(x, -y) + iv(x, -y)} = u(x, -y) - i v(x, -y)$$

$U(x, y) = u(x, -y)$ ve $V(x, y) = -v(x, -y)$ bileşenleri, $t = -y$ yazılışıyla f 'nin Cauchy-Riemann denklemlerinden kendi denklemlerini devralır. Zincir kuralıyla

$$U_x(x, y) = u_x(x, t), \quad U_y(x, y) = -u_t(x, t), \quad V_x(x, y) = -v_x(x, t), \quad V_y(x, y) = v_t(x, t)$$

f 'nin denklemleri $u_x = v_t$ ve $u_t = -v_x$ olduğundan $U_x = V_y$ ve $U_y = -V_x$ çıkar; kısmi türevler sürekli olduğundan F , D 'de analitiktir (D 'nin simetrisi burada kullanılır: $z \in D$ iken $(x, -y) \in D$ olmalıdır). Eksen parçasında $z = x$ için $F(x) = \overline{f(x)} = f(x)$; çünkü $f(x)$ reeldir. F ile f , D 'de kalan bir doğru parçasında çakıştığından Teorem 12.2 gereği D 'nin tamamında eşittirler; istenen özdeşlik budur.

(Gereklilik) Özdeşlik geçerliyse, eksen parçası üzerinde $z = x$ için $f(x) = F(x)$; yani $f(x)$ kendi eşleniğine eşittir ve reeldir.

■

Örnek 12.1 (Simetrinin Denetlenmesi). Yansıma prensibi başlangıçtaki gözlemleri açıklar:

- $f(z) = z + 1$ ve $f(z) = z^2$, reel eksen de reel değer alır; dolayısıyla $\overline{z+1} = \bar{z} + 1$ ve $\overline{z^2} = \bar{z}^2$ özdeşlikleri geçerlidir.
- $f(z) = z + i$ için $f(x) = x + i$ reel değildir; simetrinin bozulduğunu tek nokta gösterir: $z = 0$ 'da $f(0) = i$, oysa $f(0) = i$.
- $f(z) = iz^2$ için $f(x) = ix^2$ reel değildir; $z = 1$ 'de $\overline{f(1)} = \bar{i} = -i \neq i = f(1)$.

12.4 Alıştırma

Alıştırma 12.1 (Belirlenme ve Yansıma).

- Tam bir f fonksiyonu reel eksenin bir parçası üzerinde $\sin x$ değerlerini alıyorsa, tüm düzlemde f 'nin tek türlü belirlendiğini açıklayınız.
- $f(z) = \sinh z$ 'nin, reel ekseninde reel değer aldığını kullanarak $\overline{\sinh z} = \sinh \bar{z}$ özdeşliğini gerektiriniz.
- $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ özdeşliğini sağlayan bir tam fonksiyonun Maclaurin katsayılarının reel olması gerektiğini, türevlerin reel eksenindeki değerlerini düşünerek tartışınız.

Çözüm.

a) $g(z) = \sin z$ fonksiyonu tamdır ve reel ekseninde $\sin x$ değerlerini alır. Varsayıma göre f de tamdır ve reel eksenin bir parçası üzerinde aynı değerleri alır; yani $f - g$ farkı, o parçanın her noktasında sıfırdır. f ve g , tüm düzlem domeninde analitiktir ve bu domende kalan bir doğru parçası üzerinde çakışır. Teorem 12.2 gereği domenin **tamamında** çakışır, dolayısıyla

$$f(z) = \sin z \quad (\text{her } z \text{ için})$$

Böylece f , verilen parça üzerindeki değerleriyle tek türlü belirlenmiştir: aynı koşulu sağlayan başka bir tam fonksiyon yoktur.

b) $\sinh z$ tüm düzlemde analitiktir ve düzlem reel eksene göre simetriktir. Reel ekseninde $\sinh x$ değerleri reeldir. Yansıma ilkesinin koşulları sağlandığından

$$\overline{\sinh \bar{z}} = \sinh z$$

Her iki tarafın eşleniği alınır (eşleniğin eşleniği kendisidir)

$$\sinh \bar{z} = \overline{\sinh z}$$

elde edilir. Doğrudan hesap da aynı sonucu verir: $\sinh(x - iy) = \sinh x \cos y - i \cosh x \sin y$ ifadesi, $\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$ sayısının eşleniğidir.

c) Önce f 'nin reel ekseninde reel değerli olduğunu görelim: $z = x$ reel alındığında $\bar{z} = x$ olduğundan özdeşlik $\overline{f(x)} = f(x)$ hâline gelir, yani $f(x)$ kendi eşleniğine eşittir ve reeldir.

Şimdi türevlere geçelim. f tam olduğundan $f'(x)$ türevi vardır ve limit, $\Delta z \rightarrow 0$ giden her yol boyunca aynıdır; özellikle **reel** h değerleriyle hesaplanabilir:

$$f'(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sağdaki her fark bölümü reel sayıların bölümüdür, dolayısıyla reeldir; reel sayılardan oluşan bir dizinin limiti de reeldir. Demek ki f' de reel ekseninde reel değerlidir. f' yine tam olduğundan aynı akıl yürütme tekrarlanır ve tümevarımla her n için $f^{(n)}$ reel ekseninde reel değer alır. Özel olarak

$$f^{(n)}(0) \in \mathbb{R} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Maclaurin katsayıları $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ olduğundan hepsi reeldir.

■

Analitik fonksiyonlar kuramının iskeleti tamam. Sıradaki kısımda bu iskelete somut gövdeler giydireyoruz: **üstel fonksiyon**, logaritma, kuvvetler ve trigonometrik aile.

13. Üstel Fonksiyon

Elemanter fonksiyonlar ailesinin atası üstel fonksiyondur: logaritma onun tersi, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar onun lineer kombinasyonlarıdır. Reel e^x 'in düzleme genişlemesi tek doğal biçimde yapılır – ve bu genişleme, reel ekseninde görünmeyen bir özellik kazandırır: **periyodiklik**.

13.1 Tanım

Tanım 13.1 (Üstel Fonksiyon). $z = x + iy$ için üstel fonksiyon, Euler formülü yardımıyla tanımlanır:

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$\exp z$ gösterimi de kullanılır.

Tanım, $y = 0$ için reel üstel fonksiyona iner. **Daha önce gösterdik:** $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ bileşenleri her yerde Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar ve

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

olur; e^z bir **tam fonksiyondur**.

i Kök gösterimiyle küçük bir uzlaşma

Kökler bölümünde $z^{1/n}$ yazımı, z 'nin n -inci kökleri kümesini anlatıyordu; bu uzlaşma $e^{1/n}$ 'e uygulanmaz. Kompleks analizde e^z **daima** tanımdaki tek değerdir; $z = 1/n$ konduğunda pozitif $\sqrt[n]{e}$ sayısı anlaşılır, kök kümesi kastedilmez.

13.2 Toplama Özelliği

Teorem 13.1 (Üstel Fonksiyonun Toplama Özelliği). Her z_1, z_2 için

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

İspat.

$z_k = x_k + iy_k$ yazalım. Reel üstel fonksiyonun çarpım kuralı ve **üstel formda çarpma** ile

$$e^{z_1} e^{z_2} = (e^{x_1} e^{iy_1}) (e^{x_2} e^{iy_2}) = e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2)} = e^{z_1 + z_2}$$

■

Toplama özelliğinden bölme kuralı ve ters çıkar:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}, \quad \frac{1}{e^z} = e^{-z}$$

13.3 Modül, Argüman ve Sıfırlanmama

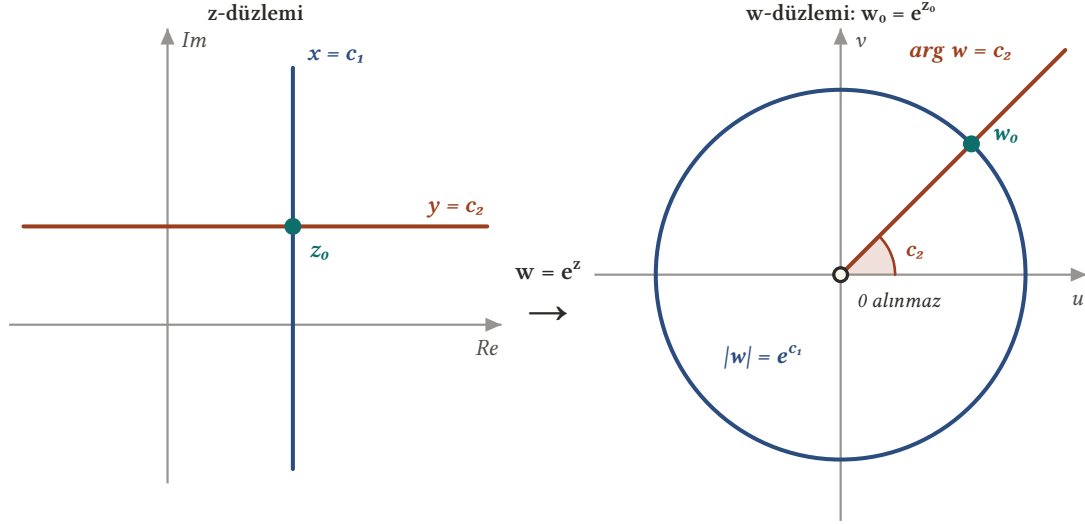
Tanımın kendisi e^z 'nin kutupsal ayrışmasıdır: modül ve argüman doğrudan okunur:

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$e^x > 0$ olduğundan önemli bir sonuç elde ederiz:

$$e^z \neq 0 \quad (\text{her } z \text{ için})$$

Üstel fonksiyon 0 değerini asla almaz; birazdan göreceğimiz gibi başka **her** kompleks değeri alır.



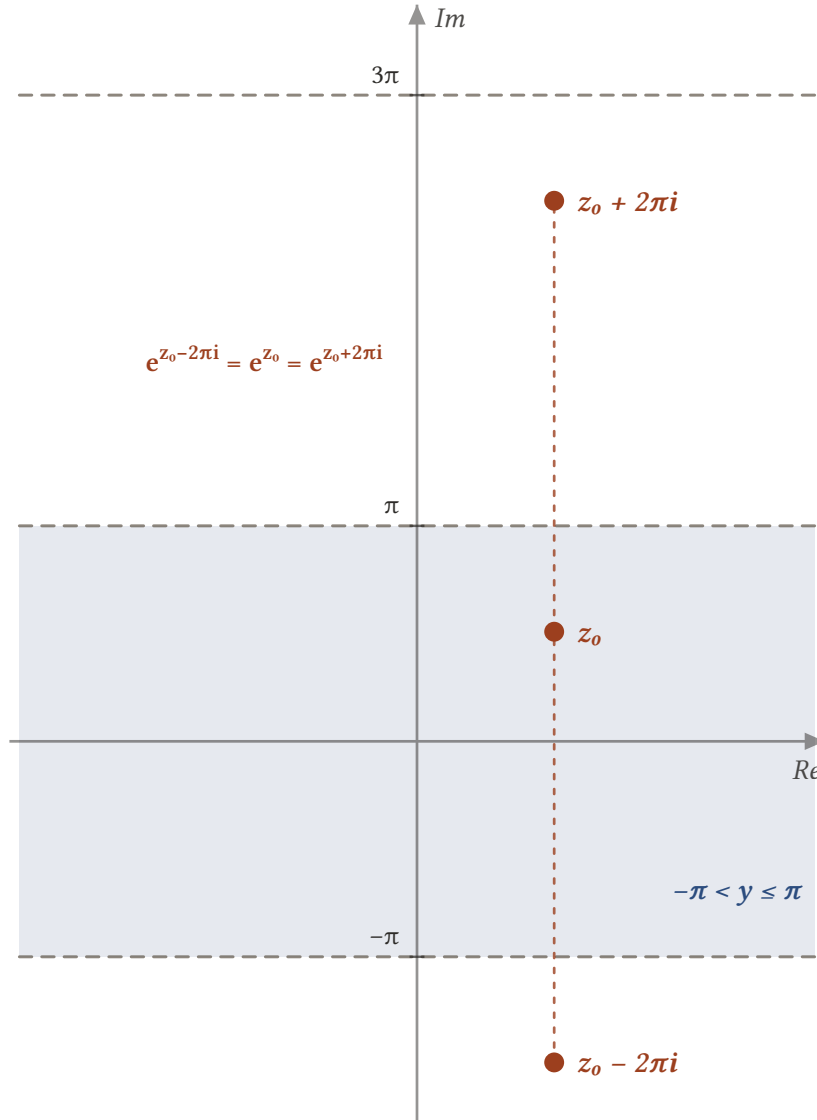
Şekil 13.1: $|e^z| = e^x$ ve $\arg e^z = y$: reel kısım yarıçapı, sanal kısım açığı belirler. Dikey doğru $x = c_1$ çember $|w| = e^{c_1}$ üzerine, yatay doğru $y = c_2$ $\arg w = c_2$ ışını üzerine gider; kesişimleri $z_0 \mapsto w_0$ olur. Her pozitif yarıçap bir e^x değeriyle elde edilir; yalnız 0 hiçbir çember üzerinde değildir.

13.4 Periyodiklik

$e^{i2\pi} = 1$ olduğundan

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{i2\pi} = e^z$$

Üstel fonksiyon, **saf sanal periyot** $2\pi i$ ile periyodiktir. Reel üstel fonksiyonun birebirliği düzlemde kaybolur: düzlem, her biri aynı değerleri üreten 2π yüksekliğinde yatay şeritlere dilimlenir.



Şekil 13.2: $e^{z+2\pi i} = e^z$: z_0 noktasını dikey yönde 2π kaydırmak değeri değiştirmez. Düzlem, 2π yüksekliğinde yatay şeritlere bölünür; her şerit aynı değer kümesini üretir. Taralı şerit $-\pi < y \leq \pi$, logaritmanın esas değerinin ($\text{Log } z$) yaşadığı bölgedir.

⚠ Reel sezgiyle çelişen değerler

e^x daima pozitifken e^z negatif (hatta istenen her sıfırdan farklı değerde) olabilir:

$$e^{i\pi} = -1, \quad e^{\ln 2 + i\pi} = -2$$

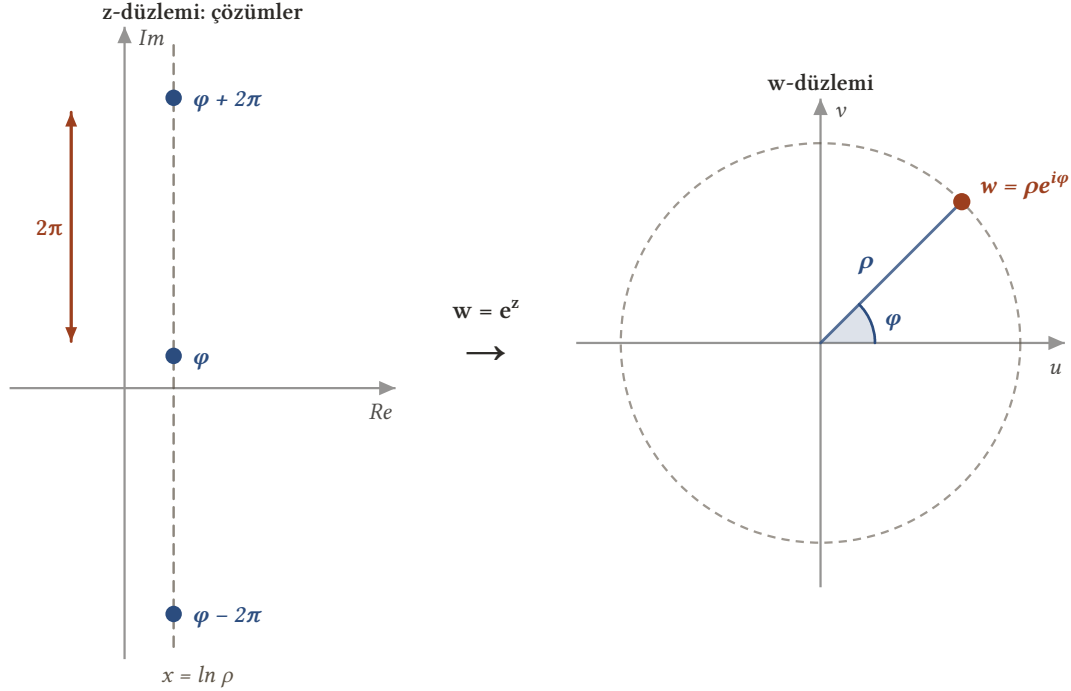
“Üstel fonksiyon pozitifdir” alışkanlığı yalnızca reel ekseninde geçerlidir.

13.5 $e^z = w$ Denkleminin Çözümü

Üstel fonksiyonun hangi değerleri aldığını görmek için $w \neq 0$ verilip $e^z = w$ çözülür. $w = \rho e^{i\varphi}$ ($\rho > 0$, $\varphi = \text{Arg } w$) yazılırsa, $e^x e^{iy} = \rho e^{i\varphi}$ eşitliğinden

$$x = \ln \rho, \quad y = \varphi + 2n\pi$$

Yani sonsuz çoklukta çözüm vardır — dikey bir doğru üzerinde 2π aralıklarla dizilirler. Bu hesap, bir sonraki bölümdeki [logaritmanın](#) doğum belgesidir.



Şekil 13.3: $e^z = w$ denkleminin çözümü: modül eşitliği $x = \ln \rho$ dikey doğrusunu, argüman eşitliği $y = \varphi + 2n\pi$ basamaklarını verir. Tek bir w değeri, aynı dikey doğru üzerinde 2π aralıklarla dizilmiş sonsuz bir çözüm merdiveninden gelir; bu merdiven bir sonraki bölümde $\log w$ olacaktır.

Örnek 13.1 (Üstel Denklemin Çözümü). $e^z = 1 + i$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

Çözüm.

$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ olduğundan

$$x = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2, \quad y = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

$$z = \frac{1}{2} \ln 2 + i \left(2n + \frac{1}{4} \right) \pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Sağlama ($n = 0$): $e^{\frac{1}{2} \ln 2} e^{i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$.

■

13.6 Alıştırma

Alıştırma 13.1 (Üstel Fonksiyon Alıştırmaları).

- $|e^{2z}|$ modülünü x cinsinden ifade ediniz ve $|e^{-2z}| < 1$ eşitsizliğinin hangi yarı düzlemde geçerli olduğunu belirleyiniz.
- $e^z = -2$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.
- $e^{\bar{z}}$ fonksiyonunun hiçbir yerde analitik olmadığını Cauchy-Riemann denklemleriyle gösteriniz.

Çözüm.

a) $2z = 2x + i2y$ olduğundan

$$|e^{2z}| = |e^{2x} e^{i2y}| = e^{2x} |e^{i2y}| = e^{2x}$$

çünkü $|e^{i\theta}| = 1$ 'dir. Aynı hesap $-2z$ için $|e^{-2z}| = e^{-2x}$ verir. Reel üstel fonksiyon artan olduğundan

$$e^{-2x} < 1 = e^0 \Leftrightarrow -2x < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Eşitsizlik tam olarak $\operatorname{Re} z > 0$ sağ yarı düzleminde geçerlidir.

b) İki kompleks sayının eşitliğini modül ve argüman olarak ayrı ayrı okuyalım. $e^z = e^x e^{iy}$ ve $-2 = 2e^{i\pi}$ olduğundan

$$e^x = 2 \quad \text{ve} \quad e^{iy} = e^{i\pi}$$

Birincisi $x = \ln 2$ verir. İkincisi, argümanların 2π 'nin katı kadar farklı olabileceğini söyler:

$$y = \pi + 2n\pi = (2n + 1)\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Çözümler:

$$z = \ln 2 + (2n + 1)\pi i$$

Beklendiği gibi sonsuz çoktur ve ardışık kökler $2\pi i$ aralıklıdır.

c) $e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x \cos y - i e^x \sin y$ olduğundan

$$u = e^x \cos y, \quad v = -e^x \sin y$$

Kısmi türevler:

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = -e^x \sin y, \quad v_y = -e^x \cos y$$

Birinci Cauchy-Riemann denklemi:

$$u_x = v_y \Leftrightarrow e^x \cos y = -e^x \cos y \Leftrightarrow 2e^x \cos y = 0 \Leftrightarrow \cos y = 0$$

İkinci denklem:

$$u_y = -v_x \Leftrightarrow -e^x \sin y = e^x \sin y \Leftrightarrow \sin y = 0$$

e^x hiçbir zaman sıfır olmadığından iki koşul da y üzerinedir; ama $\cos y = 0$ ile $\sin y = 0$ aynı anda sağlanamaz ($\sin^2 y + \cos^2 y = 1$). Demek ki Cauchy-Riemann denklemleri **hiçbir** noktada sağlanmaz; türev hiçbir yerde var olmaz, dolayısıyla $e^{\bar{z}}$ hiçbir noktada analitik değildir.

■

Üstel fonksiyon her sıfırdan farklı değeri sonsuz kez alıyor; öyleyse tersi tek değerli olamaz. Bu çok değerliliği yönetme sanatı, kompleks analizin en incelikli konularından biridir: [logaritmik fonksiyon](#).

14. Logaritmik Fonksiyon ve Dalları

$e^z = w$ denkleminin sonsuz çoklukta çözümü olduğunu gördük; öyleyse “logaritma” tek bir sayı olamaz. Kompleks logaritma **çok değerli** doğar: her sıfırdan farklı sayıya, sanal kısımları 2π aralıklarla dizilmiş sonsuz bir değer merdiveni eşler. Bu bölümün konusu, bu merdivenle çalışmanın kurallarıdır.

14.1 Tanım

Tanım 14.1 (Logaritmik Fonksiyon). $z = re^{i\Theta} \neq 0$ ($\Theta = \text{Arg } z$) için **logaritmik fonksiyon**, çok değerli olarak

$$\log z = \ln r + i (\Theta + 2n\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

tanımlanır; kısaca $\log z = \ln |z| + i \arg z$. Buradaki $\ln$, pozitif reel sayıların bilinen logaritmasıdır.

Tanım tam olarak $e^w = z$ denkleminin çözüm kümesidir; dolayısıyla

$$e^{\log z} = z \quad (z \neq 0)$$

her değer seçiminde geçerlidir. Sıra değiştirilirse simetri **bozulur**:

$$\log(e^z) = z + 2n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

çünkü e^z 'nin logaritma merdivenindeki tüm basamakları geri gelir.

Örnek 14.1 (Bir Logaritma Kümesi). $\log(-1 - \sqrt{3}i)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$r = |-1 - \sqrt{3}i| = 2$ ve $\text{Arg}(-1 - \sqrt{3}i) = -\frac{2\pi}{3}$; dolayısıyla

$$\log(-1 - \sqrt{3}i) = \ln 2 + i\left(-\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right) = \ln 2 + 2\left(n - \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

■

14.2 Esas Değer

Tanım 14.2 (Esas Değer). $n = 0$ basamağına, yani esas argümanla hesaplanan değere logaritmanın **esas değeri** denir:

$$\text{Log } z = \ln r + i\Theta \quad (r = |z|, \Theta = \text{Arg } z)$$

Böylece $\log z = \text{Log } z + 2n\pi i$ olur. z pozitif reel sayıysa $\text{Log } z = \ln z$ 'dir.

Örnek 14.2 (İki Temel Hesap).

$$\log 1 = 2n\pi i, \quad \text{Log } 1 = 0$$

$$\log(-1) = (2n + 1)\pi i, \quad \text{Log } (-1) = \pi i$$

Negatif reel sayıların bile kompleks logaritması vardır; tanımsız kalan tek nokta $z = 0$ 'dir.

14.3 Logaritmanın Dalları

Çok değerlilikten tek değerli, analitik bir fonksiyon damıtmak için argüman bir aralığa hapsedilir. α herhangi bir reel sayı olsun ve

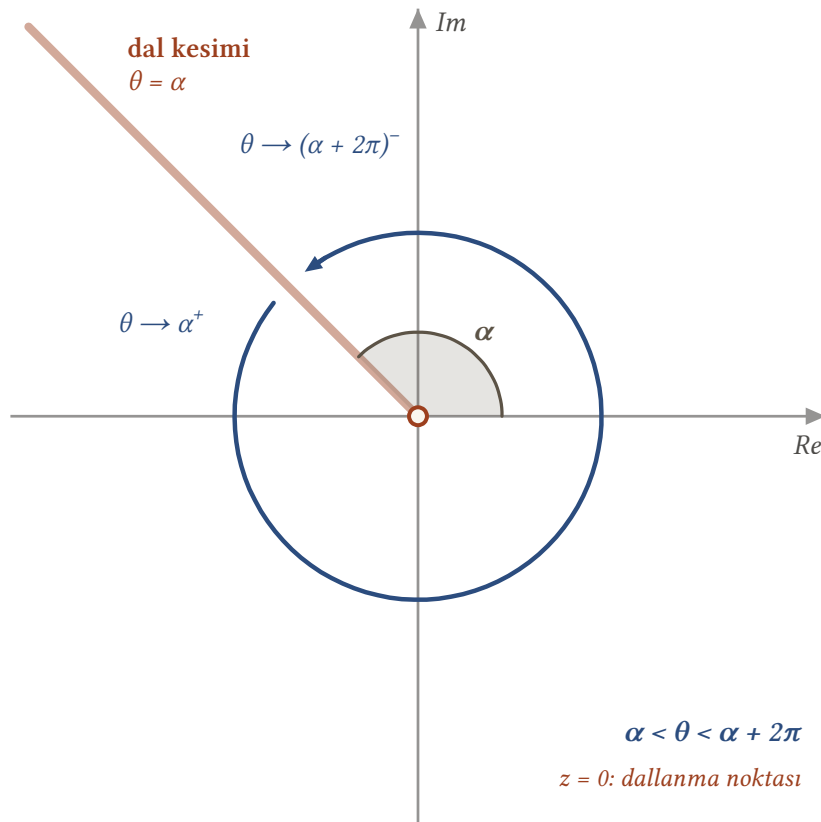
$$\log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

tanımlansın. Bu fonksiyon belirtilen domende tek değerli ve süreklidir; bileşenleri $u = \ln r, v = \theta$ **kutupsal Cauchy-Riemann denklemlerini** sağlar:

$$ru_r = 1 = v_\theta, \quad u_\theta = 0 = -rv_r$$

ve türev

$$\frac{d}{dz} \log z = e^{-i\theta} (u_r + iv_r) = e^{-i\theta} \frac{1}{r} = \frac{1}{z} \quad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi)$$

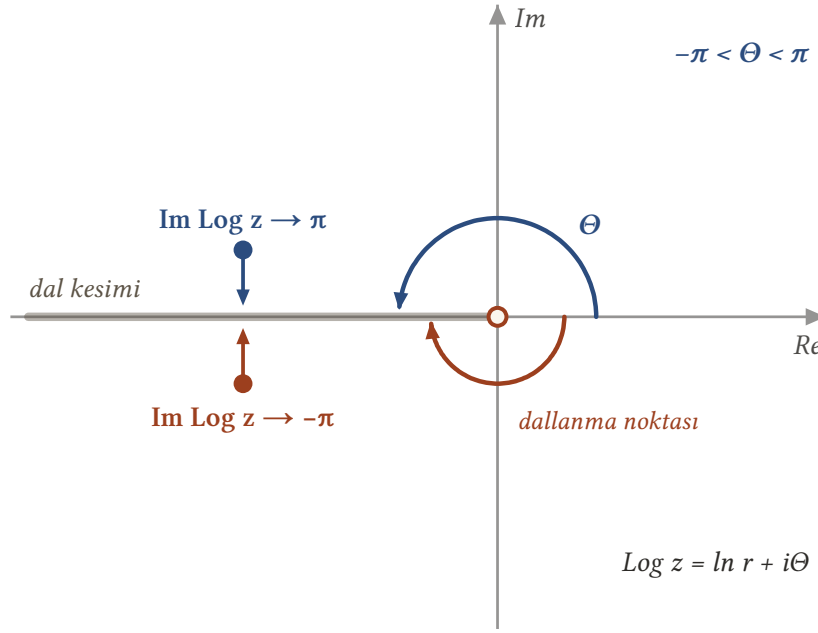


Şekil 14.1: Bir dal seçmek, düzlemde bir ışın çıkarmaktır: $\theta = \alpha$ ışını atılınca açı kalan bölgede α ile $\alpha + 2\pi$ arasında tek değerli ve sürekli seçilebilir. Kesimin iki yakasında açı α 'ya ve $\alpha + 2\pi$ 'ye yaklaşır: 2π 'lik fark, ışının neden atılmak zorunda olduğunu gösterir. Tüm ışınların ortak ucu, dallanma noktası $z = 0$ 'dir.

Tanım 14.3 (Dal, Dal Kesimi, Dallanma Noktası). Çok değerli bir f 'nin bir **dalı**, bir domende tek değerli ve analitik olan, her noktada f 'nin değerlerinden birini alan fonksiyondur. Dal tanımlarken domenden çıkarılan çizgiye **dal kesimi**, tüm dal kesimlerinin ortak ucuna **dallanma noktası** denir.

$$\text{Log } z = \ln r + i\Theta \quad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi)$$

fonksiyonuna **esas dal** denir; dal kesimi negatif reel eksen (başlangıç dahil), dallanma noktası $z = 0$ 'dir.



Şekil 14.2: Esas dal $\text{Log } z$ negatif reel eksenini atar. Eksene üstten yaklaşan noktalarda $\text{Im Log } z$ π 'ye, alttan yaklaşanlarda $-\pi$ 'ye gider; kesim üzerinde değer $2\pi i$ kadar sıçrar, süreklilik ve analitiklik orada kurtarılamaz. Dallanma noktası $z = 0$, kesimin ucudur.

⚠ Kesim üzerinde süreklilik kırılır

Esas dal, negatif reel eksene üstten yaklaşırken sanal kısmı π 'ye, alttan yaklaşırken $-\pi$ 'ye yakın değerler üretir; kesim üzerinde süreklilik (dolayısıyla analitiklik) kurtarılamaz. Hangi ışının kesileceği seçimlidir: α değiştirilerek sonsuz çoklukta dal elde edilir ve uygulamada kesim, problemin geometrisine göre konumlandırılır.

14.4 Özdeşlikler: Neyin Geçerli Kaldığı

Reel logaritmanın alışıldık kuralları, ancak **çok değerli okumayla** kayıpsız taşınır.

Teorem 14.1 (Çarpım ve Bölüm Özdeşlikleri). $z_1, z_2 \neq 0$ için, küme eşitliği anlamında:

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2, \quad \log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$$

İspat.

$\ln|z_1 z_2| = \ln|z_1| + \ln|z_2|$ reel özdeşliği ile **argüman kümelerinin toplanabilirliği** $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ birleştirilir; bölüm için aynı akıl yürütme fark ile yapılır.

■

Örnek 14.3 (Esas Değerde Bozulma). $z_1 = z_2 = -1$ alalım. $z_1 z_2 = 1$ için

$$\text{Log}(z_1 z_2) = 0, \quad \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 = \pi i + \pi i = 2\pi i$$

Esas değerler toplamsal değildir; ama çok değerli özdeşlik sağlamdır: 0 ve $2\pi i$, $\log 1 = 2n\pi i$ kümesinin iki basamağıdır.

Benzer bir uyarı kuvvetler için de gerekir: $\text{Log}(i^3) = \text{Log}(-i) = -\frac{\pi i}{2}$, oysa $3 \text{Log } i = \frac{3\pi i}{2}$.

Kuvvetlerle ilişki, çok değerli anlamda düzenlidir: her n tam sayısı için

$$z^n = e^{n \log z}, \quad z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log z\right)$$

Birincisi, $\log z$ 'nin hangi değeri seçilirse seçilsin aynı z^n sayısını verir; ikincisinin sağ tarafı, n ardışık basamağın n farklı sonucuyla tam olarak **kök kümesini** üretir.

14.5 Alıştırma

Alıştırma 14.1 (Logaritma Hesapları).

- Log $(1 - i)$ değerini hesaplayınız.
- $\log i$ kümesini yazınız; Log i hangisidir?
- $\log z = \ln r + i\theta$ ($r > 0, \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}$) dalı için $\log(-1 - i)$ değerini bulunuz.

Çözüm.

a) Esas logaritma $\text{Log } z = \ln |z| + i \text{ Arg } z$ 'dir. $1 - i$ sayısı dördüncü çeyrektedir:

$$|1 - i| = \sqrt{2}, \quad \text{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$$

Buradan

$$\text{Log}(1 - i) = \ln \sqrt{2} - \frac{\pi i}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi i}{4}$$

b) i sayısının modülü 1, esas argümanı $\pi/2$ 'dir. Çok değerli logaritma tüm argümanları kullanır:

$$\log i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Esas değer, $n = 0$ terimidir (argüman $(-\pi, \pi]$ aralığına düşer):

$$\text{Log } i = \frac{\pi i}{2}$$

c) Bu dalda modül aynı kalır; değişen, argümanın hangi aralıktan seçileceğidir. $-1 - i$ sayısı için

$$r = \sqrt{2}, \quad \theta \in \left\{-\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right\}$$

Verilen aralık $\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{11\pi}{4}$ 'tür. Argüman değerlerini tarayalım: $-3\pi/4$ küçük kalır, $-3\pi/4 + 2\pi = 5\pi/4$ aralığın içindedir, bir sonraki $13\pi/4$ ise büyüktür. Tek uygun seçim $\theta = 5\pi/4$ 'tür:

$$\log(-1 - i) = \ln \sqrt{2} + \frac{5\pi i}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{5\pi i}{4}$$

Aynı sayının esas logaritmasının $\frac{1}{2} \ln 2 - \frac{3\pi i}{4}$ olduğuna dikkat ediniz: iki değer $2\pi i$ farklıdır, çünkü farklı dallar kullanılmıştır.

■

Logaritma elimizdeyken, z^c biçimindeki keyfi kuvvetleri tanımlamanın önünde engel kalmadı: **kompleks üsler**.

15. Kompleks Üsler

z^2 , $z^{1/2}$ ve z^{-1} gibi kuvvetleri ayrı ayrı tanıdık; logaritma sayesinde hepsini tek çatı altında toplayıp **keyfi kompleks üsleri** tanımlayabiliriz. Bedeli, çok değerlilikle gelen sürprizlerdir: i^{-2i} gibi bir ifade, tamamı reel olan sonsuz bir değer kümesidir.

15.1 Tanım

Tanım 15.1 (Kompleks Kuvvet). $z \neq 0$ ve c herhangi bir kompleks sabit olmak üzere

$$z^c = e^{c \log z}$$

tanımlanır; $\log z$ çok değerli olduğundan z^c de genelde çok değerlidir.

Tanım eski dostlarla tutarlıdır: $c = n$ tam sayıysa $e^{n \log z}$ tek değere çöker (z^n), $c = 1/n$ iken tam olarak n köklü **kök kümesi** çıkar.

Örnek 15.1 (Tamamı Reel Bir Kuvvet Kümesi). i^{-2i} değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$\log i = i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ olduğundan

$$i^{-2i} = \exp(-2i \log i) = \exp[-2i \cdot i(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)] = \exp[(4n+1)\pi] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Değerlerin **tamamı pozitif reel sayılardır**: $e^\pi, e^{5\pi}, e^{-3\pi}, \dots$

■

$1/e^z = e^{-z}$ özelliğinden, tanımın doğal bir sonucu olarak

$$\frac{1}{z^c} = \frac{1}{e^{c \log z}} = e^{-c \log z} = z^{-c}$$

15.2 Dalların Analitikliği

Logaritmanın bir dalı seçildiğinde

$$\log z = \ln r + i\theta \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

$z^c = e^{c \log z}$ fonksiyonu aynı domende tek değerli ve analitik olur (analitik fonksiyonların bileşkesi). Türevi zincir kuralıyla:

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{d}{dz} e^{c \log z} = \frac{c}{z} e^{c \log z} = c \frac{e^{c \log z}}{e^{\log z}} = c e^{(c-1) \log z}$$

yani aynı dal içinde beklenen kural geçerlidir:

$$\frac{d}{dz} z^c = c z^{c-1} \quad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi)$$

Tanım 15.2 (Esas Değer ve Esas Dal). $\log$ yerine Log konarak elde edilen değere kuvvetin **esas değeri** denir:

$$\text{P.V. } z^c = e^{c \text{Log } z}$$

Aynı formül, $|z| > 0, -\pi < \text{Arg } z < \pi$ domeninde z^c 'nin **esas dalını** tanımlar.

Örnek 15.2 (Bir Esas Değer).

$$\text{P.V.}(-i)^i = \exp [i \text{Log } (-i)] = \exp \left[i \left(\ln 1 - i \frac{\pi}{2} \right) \right] = e^{\pi/2}$$

Örnek 15.3 (Esas Dalın Açık Yazımı). $z^{2/3}$ 'ün esas dalını kutupsal biçimde yazınız.

Çözüm.

$$\text{P.V.} z^{2/3} = \exp \left(\frac{2}{3} \text{Log } z \right) = \exp \left(\frac{2}{3} \ln r + \frac{2}{3} i \Theta \right) = \sqrt[3]{r^2} \exp \left(i \frac{2\Theta}{3} \right)$$

Bileşenleri $u = \sqrt[3]{r^2} \cos \frac{2\Theta}{3}$, $v = \sqrt[3]{r^2} \sin \frac{2\Theta}{3}$, kutupsal Cauchy-Riemann denklemlerini $r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$ domeninde sağlar; dal orada analitiktir.

■

15.3 Üs Kuralları Ne Zaman Bozulur?

Reel üslerin alışkanlıkları, esas değerlerle çalışırken bazen korunur bazen çarpanla bozulur; her iki durumu tek örnekte görelim.

Örnek 15.4 (Korunan ve Bozulan Çarpım Kuralı). $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 - i$ olsun; tüm kuvvetler esas değerleriyle alınsın.

Korunma. $z_1 z_2 = 2$ için

$$(z_1 z_2)^i = 2^i = e^{i \text{Log } 2} = e^{i \ln 2}$$

Öte yandan

$$z_1^i = e^{i \text{Log } (1+i)} = e^{i(\ln \sqrt{2} + i\pi/4)} = e^{-\pi/4} e^{i(\ln 2)/2}, \quad z_2^i = e^{i(\ln \sqrt{2} - i\pi/4)} = e^{\pi/4} e^{i(\ln 2)/2}$$

Çarpımları $e^{i \ln 2}$ 'dir; bu örnekte $(z_1 z_2)^i = z_1^i z_2^i$ sağlanır.

Bozulma. $z_2 z_3 = (1 - i)(-1 - i) = -2$ için

$$(z_2 z_3)^i = (-2)^i = e^{i(\ln 2 + i\pi)} = e^{-\pi} e^{i \ln 2}$$

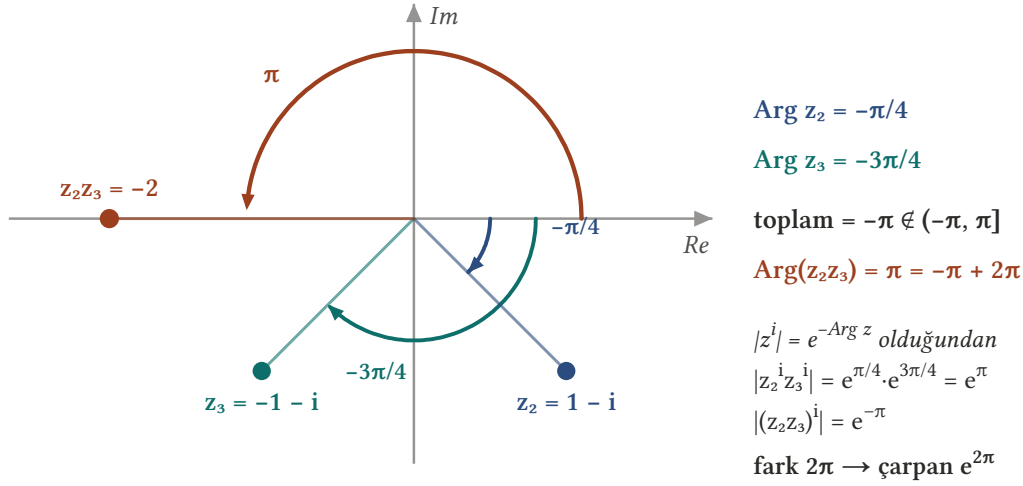
Ama

$$z_3^i = e^{i \text{Log } (-1-i)} = e^{i(\ln \sqrt{2} - i3\pi/4)} = e^{3\pi/4} e^{i(\ln 2)/2}$$

olduğundan

$$z_2^i z_3^i = e^{\pi/4} e^{3\pi/4} e^{i \ln 2} = e^{\pi} e^{i \ln 2} = (z_2 z_3)^i e^{2\pi}$$

Esas değerler arasında $e^{2\pi}$ çarpanı kadar fark doğar. Neden: $\text{Arg } z_2 + \text{Arg } z_3 = -\pi$, esas aralığın dışına taşar ve 2π düzeltmesi üstel tanım içinde çarpana dönüşür.



Şekil 15.1: z_2 ve z_3 'ün esas argümanları toplanınca $-\pi$ çıkar; bu değer $(-\pi, \pi]$ aralığının tam dışındadır ve çarpımın esas argümanı π olur. i kuvveti alınırken açılar $i \cdot i = -1$ ile reel üsse dönüştüğünden 2π 'lik düzeltme $e^{2\pi}$ çarpanı olarak ortaya çıkar.

■

15.4 Tabanı Sabit Üstel Fonksiyon

Roller değiştirilirse, $c \neq 0$ sabit taban için

$$c^z = e^{z \log c}$$

tanımlanır. Burada $\log c$ 'nin **bir değeri seçilip sabitlendiğinde** c^z , z 'nin tam fonksiyonudur ve türevi zincir kuralıyla

$$\frac{d}{dz} c^z = e^{z \log c} \log c = c^z \log c$$

$c = e$ alındığında bile aynı durum geçerlidir: $\log e = 1 + 2n\pi i$ kümesinden esas değer 1 seçildiği için e^z tek değerli okunur.

15.5 Alıştırma

Alıştırma 15.1 (Kuvvet Hesapları).

- P.V. i^i değerini hesaplayınız.
- $(-1)^{1/\pi}$ kümesinin tüm değerlerini yazınız ve birim çember üzerinde yer aldıklarını gösteriniz.
- $\frac{d}{dz} [(1+i)^z]$ türevini, logaritmanın esas değeri seçilerek hesaplayınız.

Çözüm.

a) Esas değer, tanımda esas logaritmanın kullanılması demektir:

$$\text{P.V. } i^i = \exp(i \text{Log } i)$$

$\text{Log } i = \frac{\pi i}{2}$ olduğundan üs

$$i \cdot \frac{\pi i}{2} = \frac{\pi i^2}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

değerini alır ve

$$\text{P.V. } i^i = e^{-\pi/2} \approx 0,2079$$

Sanal sayının sanal kuvveti, şaşırtıcı biçimde pozitif bir reel sayıdır.

b) Tanım gereği

$$(-1)^{1/\pi} = \exp\left(\frac{1}{\pi} \log(-1)\right)$$

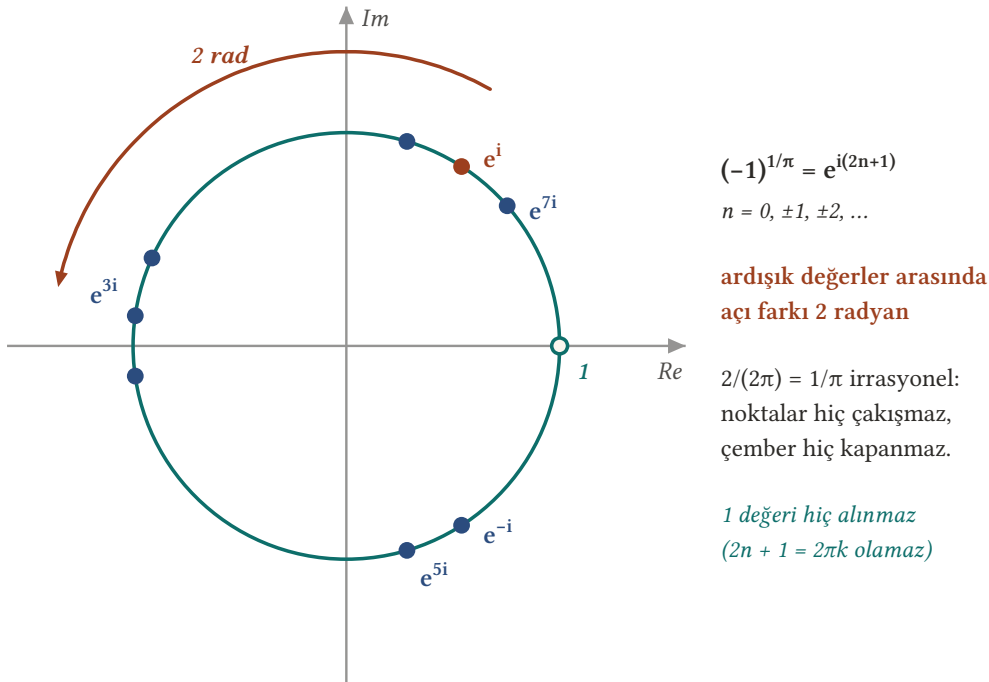
-1 sayısının modülü 1, argümanları $\pi + 2n\pi$ olduğundan $\log(-1) = i(2n+1)\pi$ 'dir. Üssü hesaplayalım:

$$\frac{1}{\pi} \log(-1) = \frac{i(2n+1)\pi}{\pi} = i(2n+1)$$

Böylece

$$(-1)^{1/\pi} = e^{i(2n+1)} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Her değerın modülü $|e^{i(2n+1)}| = 1$ olduğundan tüm değerler birim çember üzerindedir. Ardışık değerler arasındaki açı farkı 2 radyandır; $2, 2\pi$ ile ölçülemez (oranı irrasyoneldir), dolayısıyla değerler asla tekrar etmez: sonsuz çoktur ve çember üzerinde hiçbir zaman kapanmaz.



Şekil 15.2: $(-1)^{1/\pi}$ kümesinin değerleri $e^{i(2n+1)}$: hepsi birim çember üzerindedir ve her adımda açı 2 radyan artar. $2, 2\pi$ ile ölçülemediğinden noktalar bir düzgün çokgen gibi kapanmaz; sonsuz çoktur ve hiçbirini bir öncekiyle çakışmaz.

c) Esas dal seçildiğinde $(1+i)^z = \exp(z \text{Log}(1+i))$ 'dir ve $\text{Log}(1+i)$ bir sabittir:

$$\text{Log}(1+i) = \ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$$

Zincir kuralıyla, üstel fonksiyonun türevi kendisi çarpı iç türevidir:

$$\frac{d}{dz} \left[e^{z \text{Log}(1+i)} \right] = \text{Log}(1+i) e^{z \text{Log}(1+i)} = (1+i)^z \left(\frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4} \right)$$

Kural, reel analizdeki $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ formülünün birebir karşılığıdır; tek fark, $\ln a$ yerine seçilen logaritma dalının gelmesidir.

■

Sırada, üstel fonksiyonun bir başka mirası var: sinüs ve kosinüsün düzleme taşınması — [trigonometrik fonksiyonlar](#).

16. Trigonometrik Fonksiyonlar

Euler formülü $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ile eşleniği birlikte çözümlerse, sinüs ve kosinüs üstel fonksiyon cinsinden ifade edilir:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Sağ taraflar her kompleks sayı için anlamlıdır — tanımı düzleme genişletmenin en doğal yolu budur.

16.1 Tanımlar ve Temel Özellikler

Tanım 16.1 (Sinüs ve Kosinüs).

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

e^{iz} ve e^{-iz} tam fonksiyonlar olduğundan $\sin z$ ve $\cos z$ **tamdır**. Türevleri, $\frac{d}{dz}e^{iz} = ie^{iz}$ ve $\frac{d}{dz}e^{-iz} = -ie^{-iz}$ ile:

$$\frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z$$

Tanımdan doğrudan okunan diğer özellikler:

- $\sin(-z) = -\sin z$ (tek), $\cos(-z) = \cos z$ (çift);
- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ — Euler formülü artık **her kompleks** z için geçerlidir.

Alışıldık özdeşliklerin tümü, üstel tanımlar üzerinden cebirle doğrulanır:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad \sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos z$$

Periyodiklik de aynen taşınır:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + \pi) = -\sin z, \quad \cos(z + \pi) = -\cos z$$

16.2 Hiperbolik Bileşenli Açılımlar

y reel olmak üzere tanımlar, reel hiperbolik fonksiyonları üretir:

$$\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \sinh y, \quad \cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cosh y$$

Toplama formüllerinde $z_1 = x$, $z_2 = iy$ konursa **reel ve sanal kısımlar** ortaya çıkar:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

Bu açılımlardan modüller hesaplanır ($\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ kullanılarak):

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y, \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

⚠ Kompleks sinüs sınırsızdır

Reel ekseninde $|\sin x| \leq 1$ alışkanlığı düzlemde çöker: $y \rightarrow \pm\infty$ iken $\sinh^2 y \rightarrow \infty$ olduğundan $|\sin z|$ ve $|\cos z|$ dikey yönde **sınırsız büyür**. Örneğin $\cos(iy) = \cosh y$ değeri y büyüdükçe patlar. “Sinüsü 2’ye eşitleyen açı yoktur” cümlesi de yalnızca reel ekseninde doğrudur: $\sin z = 2$ denkleminin kompleks çözümleri vardır.

16.3 Sıfırlar

Teorem 16.1 (Sinüs ve Kosinüsün Sıfırları). *Kompleks düzlemde*

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi, \quad \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

*Yani tüm sıfırlar **reeldir** ve reel analizden bilinenlerden ibarettir.*

İspat.

$\sin z = 0$ ise $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y = 0$; iki kare birden sıfır olmalıdır:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi, \quad \sinh y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Dolayısıyla $z = n\pi$. Tersine bu noktalarda sinüs zaten sıfırdır. Kosinüs için $\cos z = -\sin(z - \frac{\pi}{2})$ kaydırma özdeşliği sonucu sinüse aktarır.

■

16.4 Diğer Dört Fonksiyon

Tanım 16.2 (Tanjant, Kotanjant, Sekant, Kosekant).

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

$\tan z$ ve $\sec z$, paydalarının sıfırları olan $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ noktaları dışında; $\cot z$ ve $\csc z$, $z = n\pi$ dışında analitiktir – bu noktalar ilgili fonksiyonların **tekil noktalarıdır**. Bölüm kuralıyla türevler:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tan z &= \sec^2 z, & \frac{d}{dz} \cot z &= -\csc^2 z \\ \frac{d}{dz} \sec z &= \sec z \tan z, & \frac{d}{dz} \csc z &= -\csc z \cot z \end{aligned}$$

Periyodiklik, sinüs ve kosinüsün π kaydırma özelliklerinden gelir; özellikle

$$\tan(z + \pi) = \tan z$$

16.5 Alıştırma

Alıştırma 16.1 (Trigonometrik Hesaplar).

- $\cos(1 + i)$ değerini $a + bi$ biçiminde, reel hiperbolik ve trigonometrik değerler cinsinden yazınız.
- $\sin z = 2$ denkleminin çözümlerinin $z = (2n + \frac{1}{2})\pi \mp i \ln(2 + \sqrt{3})$ biçiminde olduğunu, reel-sanal kısım açılımıyla gösteriniz.
- $|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$ eşitsizliklerini modül açılımından türetiniz.

Çözüm.

a) Açılım formülünde $x = y = 1$ alalım:

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\cos(1 + i) = \cos 1 \cosh 1 - i \sin 1 \sinh 1 \approx 0,8337 - 0,9889i$$

b) $z = x + iy$ yazıp reel ve sanal kısımları ayıralım:

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 2$$

Sağ taraf reel olduğundan iki denklem doğar:

$$\sin x \cosh y = 2, \quad \cos x \sinh y = 0$$

İkinci denklemi iki durumda inceleyelim. **$\sinh y = 0$ ise $y = 0$ olur ve birinci denklem $\sin x = 2$ 'ye iner;** reel sinüs 1'i aşamayacağından bu durum imkânsızdır. Geriye **$\cos x = 0$** , yani

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

kalır. Bu noktalarda $\sin x = \pm 1$ 'dir. $\cosh y > 0$ olduğundan çarpımın +2 olabilmesi için $\sin x = 1$, yani

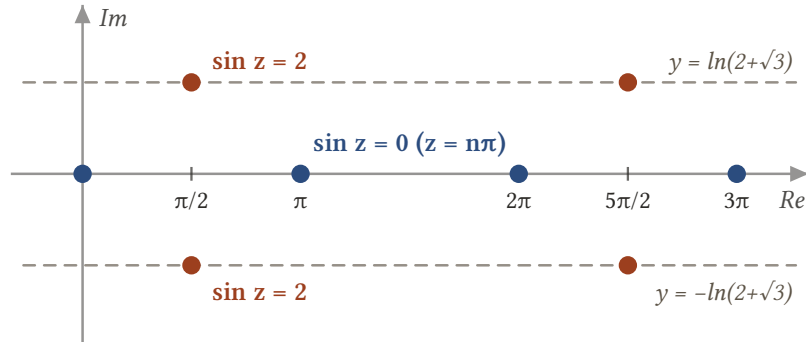
$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

seçilmelidir. Birinci denklem artık $\cosh y = 2$ 'dir. Bunu y için çözelim: $e^y + e^{-y} = 4$, yani $t = e^y$ için $t^2 - 4t + 1 = 0$ ve $t = 2 \pm \sqrt{3}$. İki kök birbirinin tersi olduğundan $((2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1)$

$$y = \pm \ln(2 + \sqrt{3})$$

Çözümler:

$$z = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \mp i \ln(2 + \sqrt{3}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$



Şekil 16.1: $\sin z$ 'nin sıfırları yalnız reel eksendedir: $z = n\pi$. Reel ekseninde $|\sin x| \leq 1$ olduğundan $\sin z = 2$ denkleminin çözümleri eksenin dışına çıkar: reel sinüsün tepe yaptığı $x = \pi/2 + 2n\pi$ dikeyleri üzerinde, eksenin $\pm \ln(2 + \sqrt{3}) \approx \pm 1,317$ uzağında simetrik çiftler.

c) Modülün karesini açılımdan hesaplayalım:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y$$

$\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$ özdeşliğini yerine koyup düzenleyelim:

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x (1 + \sinh^2 y) + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

yani

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

Şimdi $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ sınırlarını kullanalım:

$$\sinh^2 y \leq |\sin z|^2 \leq 1 + \sinh^2 y = \cosh^2 y$$

Karekök alındığında ($\cosh y > 0$ olduğu için sağ tarafta mutlak değere gerek yoktur)

$$|\sinh y| \leq |\sin z| \leq \cosh y$$

Bu eşitsizlik, reel sinüsün aksine kompleks sinüsün **sınırsız** olduğunu da gösterir: $|y| \rightarrow \infty$ iken alt sınır $|\sinh y|$ sonsuza gider.

■

Sinüsün içindeki $\sinh$, kosinüsün içindeki $\cosh$ tesadüf değil: bir sonraki bölümde bu ikizleri kendi başlarına inceliyoruz — [hiperbolik fonksiyonlar](#).

17. Hiperbolik Fonksiyonlar

Reel analizde hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonlar ayrı ailelerdir: biri üstelden, öbürü çemberden gelir. Kompleks düzlemde bu ayrım ortadan kalkar — $z \mapsto iz$ döndürmesi iki aileyi birbirine dönüştürür ve her hiperbolik özdeşlik, bir trigonometrik özdeşliğin kılık değiştirmiş olur.

17.1 Tanımlar

Tanım 17.1 (Hiperbolik Sinüs ve Kosinüs).

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$e^{\pm z}$ tam olduğundan ikisi de **tam fonksiyondur**; türevleri

$$\frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z, \quad \frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z$$

17.2 Trigonometrik Köprü

Sinüs ve kosinüsün üstel tanımlarıyla karşılaştırma, iki aileyi bağlayan dönüşüm bağıntılarını verir:

$$-i \sinh(iz) = \sin z, \quad \cosh(iz) = \cos z$$

$$-i \sin(iz) = \sinh z, \quad \cos(iz) = \cosh z$$

Örneğin birincisi şöyle doğrulanır:

$$-i \sinh(iz) = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z$$

Bu köprü sayesinde trigonometrik kimliklerin her biri hiperbolik bir kimliğe çevrilebilir.

17.3 Özdeşlikler

Sık kullanılanların dökümü:

$$\sinh(-z) = -\sinh z, \quad \cosh(-z) = \cosh z$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

Reel-sanal ayrışım ve modüller ($z = x + iy$):

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y, \quad \cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y, \quad |\cosh z|^2 = \cosh^2 x + \cos^2 y$$

Örnek 17.1 (Köprüden Modül Özdeşliği). $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$ özdeşliğini dönüşüm bağıntılarıyla türetiniz.

Çözüm.

$\sinh z = -i \sin(iz)$ olduğundan $|\sinh z| = |\sin(iz)|$; $iz = -y + ix$ için **sinüsün modül formülü**

$$|\sin(-y + ix)|^2 = \sin^2(-y) + \sinh^2 x = \sin^2 y + \sinh^2 x$$

istenen sonucu verir – yeni hesap yapmadan.

■

17.4 Periyodiklik ve Sıfırlar

e^z 'nin $2\pi i$ periyodu tanımlar üzerinden taşınır:

$$\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z, \quad \cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$$

Teorem 17.1 (Hiperbolik Fonksiyonların Sıfırları).

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi i, \quad \cosh z = 0 \Leftrightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)i$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

İspat.

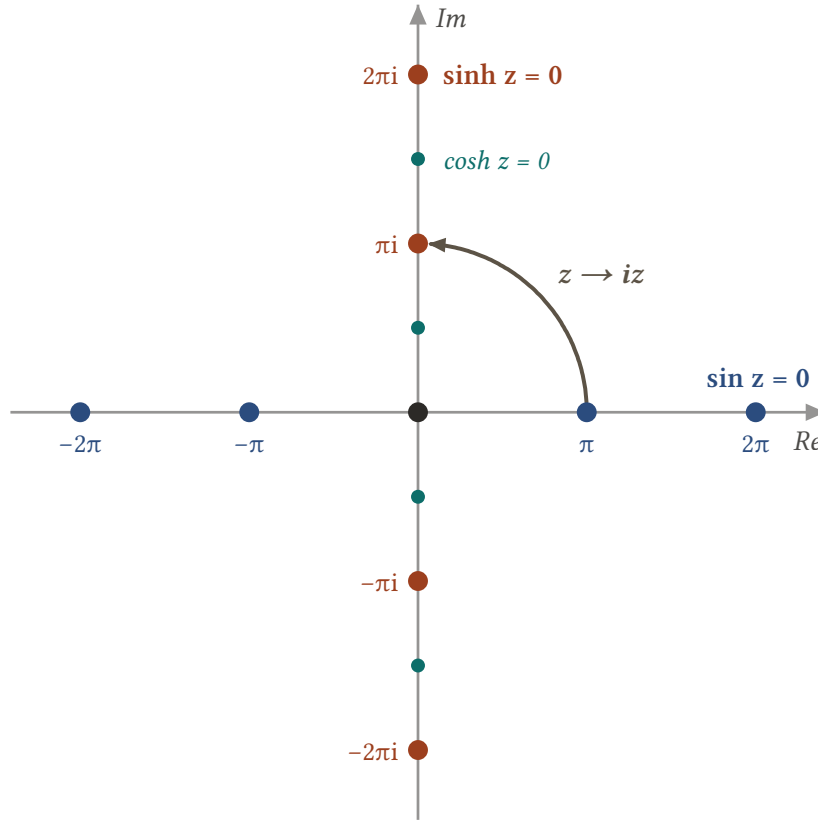
$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y = 0$ ancak $\sinh x = 0$ ve $\sin y = 0$ ile mümkündür: $x = 0$, $y = n\pi$; yani $z = n\pi i$. Kosinüs için köprü bağıntısı şu zinciri verir:

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow \cos(iz) = 0 \Leftrightarrow iz = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow z = -i\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

Buradaki eksi işareti, n 'nin $-n - 1$ ile yeniden adlandırılmasıyla emilir ve ifade teoremdeki biçimi alır.

■

Trigonometrik ailedekinin ayna görüntüsü: sinüsün sıfırları tamamen reelken hiperbolik sinüsünkiler **tamamen saf sanaldır**.



Şekil 17.1: $\sin z$ 'nin sıfırları reel ekseninde $n\pi$ noktaları, $\sinh z$ 'nin sıfırları sanal ekseninde $n\pi i$ noktalarıdır. İkisi 90° 'lik $z \mapsto iz$ döndürmesiyle birbirine gider: $\sin z = -i \sinh(iz)$ köprüsünün geometrik anlamı budur. Küçük noktalar $\cosh z$ 'nin sıfırları, $(\pi/2 + n\pi)i$.

17.5 Hiperbolik Tanjant

Tanım 17.2 (Hiperbolik Tanjant).

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

$\cosh z \neq 0$ olan her domende, yani $z = (\frac{\pi}{2} + n\pi)i$ noktaları dışında analitiktir. $\coth z = 1/\tanh z$, $\operatorname{sech} z = 1/\cosh z$ ve $\operatorname{csch} z = 1/\sinh z$ olarak tanımlanır.

Türev formülleri, reel karşılıklarıyla aynıdır:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tanh z &= \operatorname{sech}^2 z, & \frac{d}{dz} \coth z &= -\operatorname{csch}^2 z \\ \frac{d}{dz} \operatorname{sech} z &= -\operatorname{sech} z \tanh z, & \frac{d}{dz} \operatorname{csch} z &= -\operatorname{csch} z \coth z \end{aligned}$$

17.6 Alıştırma

Alıştırma 17.1 (Hiperbolik Alıştırmalar).

- $\cosh(1 + i\pi)$ değerini hesaplayınız.
- $\cosh z = \frac{1}{2}$ denkleminin tüm çözümlerini bulunuz.

- c) $\tanh z$ 'nin periyodunun πi olduğunu, $\sinh(z + \pi i) = -\sinh z$ ve $\cosh(z + \pi i) = -\cosh z$ bağıntılarından türetiniz.

Çözüm.

a) Açılım formülünde $x = 1, y = \pi$ alalım:

$$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$\cos \pi = -1$ ve $\sin \pi = 0$ olduğundan sanal kısım kaybolur:

$$\cosh(1 + i\pi) = \cosh 1 \cdot (-1) + i \sinh 1 \cdot 0 = -\cosh 1$$

b) Aynı açılımı $\cosh z = \frac{1}{2}$ denklemine uygulayalım. Sağ taraf reel olduğundan

$$\cosh x \cos y = \frac{1}{2}, \quad \sinh x \sin y = 0$$

İkinci denklem iki durum verir. **$\sin y = 0$ ise $y = n\pi$** ve $\cos y = \pm 1$ olur; birinci denklem $\cosh x = \pm \frac{1}{2}$ 'ye iner. Ama her reel x için $\cosh x \geq 1$ 'dir, bu imkânsızdır. Geriye **$\sinh x = 0$** , yani $x = 0$ kalır. Birinci denklem artık

$$\cos y = \frac{1}{2} \implies y = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$$

Çözümler saf sanaldır:

$$z = \left(2n \pm \frac{1}{3}\right)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(Aynı sonuç $\cosh z = \cos(iz)$ bağıntısıyla da bulunur: $\cos(iz) = \frac{1}{2}$ denkleminde $iz = \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi$ çıkar ve i 'ye bölünürse yukarıdaki küme elde edilir.)

c) Verilen iki bağıntıyı oranlayalım. Payda sıfırdan farklı olduğu her z için

$$\tanh(z + \pi i) = \frac{\sinh(z + \pi i)}{\cosh(z + \pi i)} = \frac{-\sinh z}{-\cosh z} = \tanh z$$

İki eksi işareti birbirini götürdüğünden πi bir periyottur. Bu periyodun **en küçüğü** olduğunu da görelim: p herhangi bir periyot olsun. $z = 0$ alındığında $\tanh 0 = 0$ olduğundan

$$\tanh p = 0 \implies \sinh p = 0 \implies p = n\pi i$$

çünkü hiperbolik sinüsün sıfırları tam olarak $n\pi i$ noktalarıdır. Demek ki periyotlar yalnızca πi 'nin katlarıdır ve sıfırdan farklı en küçüğü πi 'dir. Payı ve paydası $2\pi i$ periyotlu olan $\tanh$, bölüm alındığında periyodunun yarıya inmesini işte bu işaret değişimine borçludur.

■

Elemanter ailenin son üyeleri, tersine çevirme işleminden doğar: **ters trigonometrik ve ters hiperbolik fonksiyonlar**.

18. Ters Trigonometrik ve Hiperbolik Fonksiyonlar

Trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar üstel fonksiyondan kurulmuştur; tersleri de doğal olarak logaritmayla ifade edilir. Türetme tek bir fikre dayanır: ters fonksiyon denklemi, e^{iw} için **ikinci dereceden bir denkleme** dönüştürülür.

18.1 Ters Sinüs

$w = \sin^{-1} z$ yazmak, $z = \sin w$ demektir. Üstel tanımla

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

Her tarafı $2ie^{iw}$ ile çarpıp düzenlersek e^{iw} bilinmeyenli ikinci dereceden denklem çıkar:

$$(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0$$

İkinci dereceden formülle (kompleks karekökün iki değerli olduğunu hatırlayarak):

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}$$

Burada $\pm$ yazmaya gerek yoktur: $(1 - z^2)^{1/2}$ zaten iki değerlidir ve iki işareti birden kapsar. Logaritma alınıp w çekilirse:

Teorem 18.1 (Ters Sinüs Formülü).

$$\sin^{-1} z = -i \log [iz + (1 - z^2)^{1/2}]$$

Karekökün iki değeri ve logaritmanın sonsuz basamağıyla $\sin^{-1} z$, çok değerli bir fonksiyondur.

Örnek 18.1 (Bir Ters Sinüs Kümesi). $\sin^{-1}(-i)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$z = -i$ için $iz = 1$ ve $1 - z^2 = 2$; formül

$$\sin^{-1}(-i) = -i \log (1 \pm \sqrt{2})$$

verir. İki durumu ayrı ayrı açalım:

$$\log (1 + \sqrt{2}) = \ln (1 + \sqrt{2}) + 2n\pi i$$

$$\log (1 - \sqrt{2}) = \ln (\sqrt{2} - 1) + (2n + 1)\pi i$$

(ikincisinde sayı negatiftir; modülü $\sqrt{2} - 1$, argümanı π 'dir). Şimdi kritik gözlem:

$$\ln (\sqrt{2} - 1) = \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = -\ln (1 + \sqrt{2})$$

Böylece iki küme tek kalıpta birleşir:

$$\log (1 \pm \sqrt{2}) = (-1)^n \ln (1 + \sqrt{2}) + n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(n çiftken birinci, tekken ikinci kümenin elemanları gelir). Sonuç:

$$\sin^{-1}(-i) = n\pi + i(-1)^{n+1} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

■

18.2 Ters Kosinüs ve Ters Tanjant

Aynı teknik diğer iki fonksiyona uygulanır:

$$\cos^{-1} z = -i \log \left[1 + i(1 - z^2)^{1/2} \right]$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z}$$

Üçü de çok değerlidir. Karekök ve logaritma için **belirli dallar** seçildiğinde her biri tek değerli ve analitik olur; çünkü analitik fonksiyonların bileşkeleridir.

18.3 Türevler

Dallar seçildikten sonra türevler zincir kuralıyla hesaplanır:

$$\frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}, \quad \frac{d}{dz} \cos^{-1} z = \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}}$$

İlk ikisi, karekök için seçilen dala bağlıdır: kökün öbür dalı seçilirse işaret değişir. Ters tanjantın türevi ise karekök içermediğinden **dal seçiminden bağımsızdır**:

$$\frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2}$$

i arcsin gösterimi

Bu fonksiyonlar için arcsin z , arccos z , arctan z gösterimleri de yaygındır; içerik aynıdır. Reel analizdeki “esas değer aralığı” alışkanlığının kompleks karşılığı, karekök ve logaritma dallarının açıkça söylenmesidir.

18.4 Ters Hiperbolik Fonksiyonlar

$z = \sinh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$ denkleminde e^w için ikinci dereceden denklem kurulursa aynı yöntem şunları verir:

$$\sinh^{-1} z = \log \left[z + (z^2 + 1)^{1/2} \right]$$

$$\cosh^{-1} z = \log \left[z + (z^2 - 1)^{1/2} \right]$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$$

Reel analizden tanıdık formüllerle biçimsel özdeşlik tam; tek fark, buradaki log’un kompleks (ve çok değerli) olmasıdır.

18.5 Alıştırma

Alıştırma 18.1 (Ters Fonksiyon Hesapları).

- $\tan^{-1}(2i)$ kümesini formülden hesaplayınız.
- $\cos^{-1} 2$ değerlerinin $2n\pi \mp i \ln(2 + \sqrt{3})$ olduğunu gösteriniz; reel eksenin $[-1, 1]$ dışındaki noktalarında ters kosinüsün neden reel değer alamadığını yorumlayınız.

c) $\sinh^{-1} i$ kümesini hesaplayınız ve **hiperbolik sinüsün sıfırlarıyla** karşılaştırınız.

Çözüm.

a) Formülde $z = 2i$ yazalım. Önce logaritmanın argümanını sadeleştirelim:

$$\frac{i+z}{i-z} = \frac{i+2i}{i-2i} = \frac{3i}{-i} = -3$$

Böylece

$$\tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2} \log(-3)$$

-3 sayısının modülü 3, argümanları $\pi + 2n\pi$ olduğundan $\log(-3) = \ln 3 + i(2n+1)\pi$ 'dir:

$$\tan^{-1}(2i) = \frac{i}{2} \left[\ln 3 + i(2n+1)\pi \right] = -\frac{(2n+1)\pi}{2} + \frac{i}{2} \ln 3$$

n tüm tam sayıları taradığında $-\frac{(2n+1)\pi}{2}$ ifadesi $(n + \frac{1}{2})\pi$ değerlerinin aynısını üretir; küme

$$\tan^{-1}(2i) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi + \frac{i}{2} \ln 3 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

b) Formülde $z = 2$ alalım. Karekök çift değerlidir:

$$(1 - z^2)^{1/2} = (-3)^{1/2} = \pm i\sqrt{3}$$

Logaritmanın argümanı iki değer alır:

$$z + i(1 - z^2)^{1/2} = 2 + i(\pm i\sqrt{3}) = 2 \mp \sqrt{3}$$

Her ikisi de **pozitif reel** sayıdır ($2 - \sqrt{3} \approx 0,268$), dolayısıyla logaritmaları

$$\log(2 \mp \sqrt{3}) = \ln(2 \mp \sqrt{3}) + 2n\pi i$$

Formülü tamamlayalım:

$$\cos^{-1} 2 = -i \left[\ln(2 \mp \sqrt{3}) + 2n\pi i \right] = 2n\pi - i \ln(2 \mp \sqrt{3})$$

$(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$ olduğundan $\ln(2 - \sqrt{3}) = -\ln(2 + \sqrt{3})$ 'tür; iki işaret tek ifadede toplanır:

$$\cos^{-1} 2 = 2n\pi \mp i \ln(2 + \sqrt{3})$$

Neden hiçbir değer reel değil? Reel bir w için $\cos w$ değerleri $[-1, 1]$ aralığından çıkamaz. Dolayısıyla $\cos w = 2$ denkleminin reel çözümü olamaz; çözümün sanal kısmı zorunlu olarak sıfırdan farklıdır. Kompleks düzlemde ise $\cos$ sınırsızdır ve denklem — üstelik sonsuz çok — çözüme sahiptir.

c) Formülde $z = i$ yazalım; karekökün içi sıfır olur:

$$(z^2 + 1)^{1/2} = (i^2 + 1)^{1/2} = 0$$

Geriye yalnızca logaritma kalır:

$$\sinh^{-1} i = \log(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i$$

Karşılaştırma: hiperbolik sinüsün sıfırları $n\pi i$ noktalarıdır. Bulunan çözümler ise sanal ekseninde bu sıfırların **tam ortasında**, her birinden $\pi/2$ uzaklıkta oturur. Bunun nedeni $\sinh(iy) = i \sin y$ bağıntısıdır: sanal eksen üzerinde $\sinh$, reel sinüsün i katı gibi davranır; sıfırlar $\sin y = 0$ noktalarına, $\sinh w = i$ çözümleri ise $\sin y = 1$ noktalarına — yani sinüsün tepe noktalarına — karşılık gelir. Doğrulama:

$$\sinh\left[\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi i\right] = i \sin\left[\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right] = i$$

■

Elemanter fonksiyonlar kütüphanesi tamamlandı. Dördüncü kısımda kompleks analizin motoruna geçiyoruz: [integral kuramı](#).

19. Reel Değişkenli Fonksiyonların Türev ve İntegralleri

Çevre integrallerine giden yol, mütevazı bir ara duraktan geçer: **reel** bir t değişkenine bağlı, **kompleks değerli** $w(t)$ fonksiyonları. Bunların analizi neredeyse tamamen kalkülüsten kopyalanır — ama “nere-deyse” kelimesi önemlidir: ortalama değer teoremi gibi bazı taşlar yolda düşer.

19.1 Türev

Tanım 19.1 ($w(t)$ Fonksiyonunun Türevi). u ve v , t 'nin reel değerli fonksiyonları olmak üzere $w(t) = u(t) + iv(t)$ verilsin. $u'(t)$ ve $v'(t)$ var olduğunda w 'nin türevi

$$w'(t) = u'(t) + i v'(t)$$

Kalkülüsteki toplam, çarpım ve sabit kuralları bileşen bileşen doğrulanır. Örneğin $z_0 = x_0 + iy_0$ kompleks sabiti için

$$\frac{d}{dt} [z_0 w(t)] = z_0 w'(t)$$

kuralı, $z_0 w = (x_0 u - y_0 v) + i(y_0 u + x_0 v)$ açılımının türetilmesiyle görülür. Sık kullanılacak bir diğer kural:

Teorem 19.1 (Üstelin Türevi). Her $z_0 = x_0 + iy_0$ kompleks sabiti için

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t}$$

İspat.

$e^{z_0 t} = e^{x_0 t} \cos y_0 t + i e^{x_0 t} \sin y_0 t$ yazıp bileşenleri türetelim:

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = e^{x_0 t} (x_0 \cos y_0 t - y_0 \sin y_0 t) + i e^{x_0 t} (x_0 \sin y_0 t + y_0 \cos y_0 t)$$

Sağ taraf, $(x_0 + iy_0) e^{x_0 t} (\cos y_0 t + i \sin y_0 t)$ çarpımının açılımıdır; yani $z_0 e^{z_0 t}$.

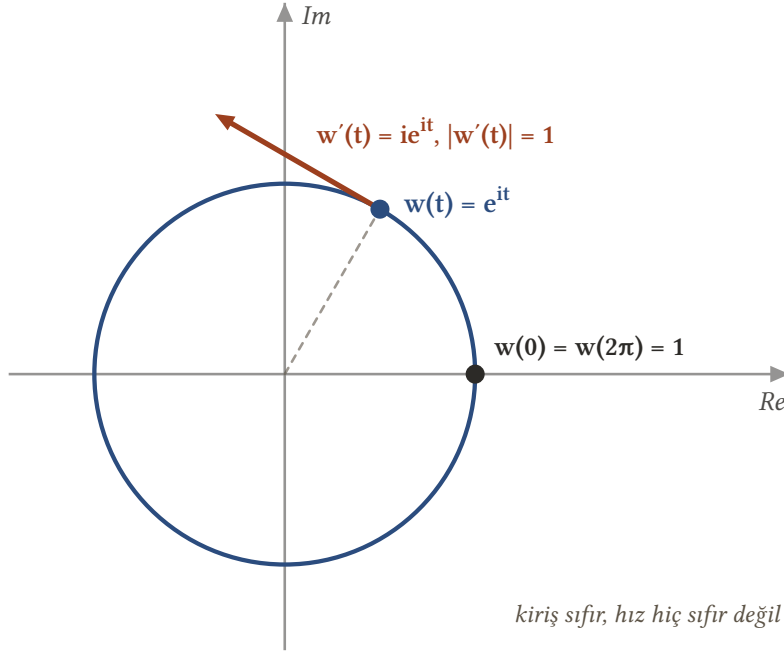
■

⚠ Ortalama değer teoremi taşınmaz

w , $[a, b]$ üzerinde sürekli ve içeride türevlenebilir olsa bile

$$w'(c) = \frac{w(b) - w(a)}{b - a}$$

koşulunu sağlayan bir c bulunmak zorunda değildir. Karşı örnek: $[0, 2\pi]$ üzerinde $w(t) = e^{it}$. Uçlarda $w(2\pi) - w(0) = 0$ 'dır; ama $|w'(t)| = |ie^{it}| = 1$ olduğundan türev hiçbir noktada sıfırlanamaz.



Şekil 19.1: $w(t) = e^{it}$, $[0, 2\pi]$ boyunca birim çemberi dolaşıp başladığı noktaya döner: kiriş $w(2\pi) - w(0) = 0$ 'dır. Hız vektörü $w'(t) = ie^{it}$ ise her an çembere teğettir ve boyu hep 1'dir; sıfırlanan bir $w'(c)$ yoktur. Ortalama değer teoremi kompleks değerli fonksiyonlara taşınmaz.

19.2 Belirli İntegral

Tanım 19.2 ($w(t)$ Fonksiyonunun Belirli İntegrali). $w(t) = u(t) + iv(t)$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki belirli integrali, sağdaki iki reel integralin varlığı koşuluyla

$$\int_a^b w(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

Böylece integral, reel ve sanal kısım alma işlemleriyle sıra değiştirir:

$$\operatorname{Re} \int_a^b w dt = \int_a^b \operatorname{Re} [w] dt, \quad \operatorname{Im} \int_a^b w dt = \int_a^b \operatorname{Im} [w] dt$$

İntegralin varlığı için u ve v 'nin **parçalı sürekliliği** yeterlidir: sonlu sayıda nokta dışında süreklilik ve o noktalarda tek yanlı limitlerin varlığı. Sınırsız aralıklar üzerindeki genelleştirilmiş integraller de bileşenler üzerinden tanımlanır. Sabitle çarpma, toplam ve aralık ekleme kuralları kalkülüsten aynen geçer.

Örnek 19.1 (Tanımla Hesap).

$$\int_0^1 (1+it)^2 dt = \int_0^1 (1-t^2) dt + i \int_0^1 2t dt = \frac{2}{3} + i$$

19.3 Temel Teorem

Teorem 19.2 (Kalkülüsün Temel Teoremi). $w(t) = u(t) + iv(t)$ ve $W(t) = U(t) + iV(t)$, $[a, b]$ üzerinde sürekli olsun. $W'(t) = w(t)$ ise

$$\int_a^b w(t) dt = W(t) \Big|_a^b = W(b) - W(a)$$

İspat.

$W' = w$ bileşenlere ayırılır: $U' = u$, $V' = v$. Reel temel teorem iki kez uygulanır:

$$\int_a^b w dt = U(t) \Big|_a^b + i V(t) \Big|_a^b = [U(b) + iV(b)] - [U(a) + iV(a)] = W(b) - W(a)$$

■

Örnek 19.2 (Üstelle İntegral).

$$\int_0^{\pi/4} e^{it} dt$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$\frac{d}{dt} \left(\frac{e^{it}}{i} \right) = e^{it}$ olduğundan $W(t) = \frac{e^{it}}{i}$ bir ters türevdir:

$$\int_0^{\pi/4} e^{it} dt = \frac{e^{it}}{i} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{e^{i\pi/4} - 1}{i} = -i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

■

Örnek 19.3 (İntegral İçin Ortalama Değer de Çöker). w , $[a, b]$ üzerinde sürekli olsa bile

$$\int_a^b w(t) dt = w(c)(b-a)$$

koşulunu sağlayan bir c bulunmayabilir.

Çözüm.

Yine $w(t) = e^{it}$, $[0, 2\pi]$ örneği iş görür:

$$\int_0^{2\pi} e^{it} dt = \frac{e^{it}}{i} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Ama her c için $|w(c)(2\pi - 0)| = 2\pi \neq 0$; eşitlik hiçbir c ile kurulamaz.

■

19.4 Alıştırma

Alıştırma 19.1 (Hesap Alıştırmaları).

- a) $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$ integralini hesaplayınız.
 b) $\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt$ integralini hesaplayınız.
 c) $m \neq n$ tam sayıları için $\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0$ olduğunu gösteriniz (Fourier serilerinin diklik bağıntısı).

Çözüm.

a) Önce integrandın karesini açalım:

$$\left(\frac{1}{t} - i\right)^2 = \frac{1}{t^2} - \frac{2i}{t} + i^2 = \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) - \frac{2i}{t}$$

Reel ve sanal kısımlar ayrı ayrı integrallenir:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt = \left[-\frac{1}{t} - t\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} - 2\right) - (-1 - 1) = -\frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{2}{t} dt = 2 \ln 2 = \ln 4$$

Sanal kısım eksi işaretliydi; sonuç:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt = -\frac{1}{2} - i \ln 4$$

b) e^{i2t} fonksiyonunun ters türevi $\frac{e^{i2t}}{2i}$ dir:

$$\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt = \left[\frac{e^{i2t}}{2i}\right]_0^{\pi/6} = \frac{e^{i\pi/3} - 1}{2i}$$

$e^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan pay $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ dir. $\frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$ ile çarpalım:

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{i}{2}\right) = \frac{i}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

yani

$$\int_0^{\pi/6} e^{i2t} dt = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

c) Üsler toplanır; $k = m - n$ yazalım. Varsayım gereği k sıfırdan farklı bir tam sayıdır:

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \int_0^{2\pi} e^{ikt} dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ik}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i2\pi k} - 1}{ik}$$

k tam sayı olduğundan $e^{i2\pi k} = 1$ dir ve pay sıfırlanır:

$$\int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = 0 \quad (m \neq n)$$

$m = n$ durumunda ise integrand 1'e eşit olur ve integral 2π değerini verir — Fourier serilerinde katsayı formüllerini doğuran ayırım tam olarak budur.

■

$w(t)$ integralleri araç kutumuza girdi; şimdi bu aracı düzlemdeki eğriler üzerinde çalıştıracak zemini kuralım: [yaylar ve çevreler](#).

20. Yaylar ve Çevreler

Kompleks integraller reel eksen aralıkları üzerinde değil, düzlemdeki **eğriler** üzerinde alınır. Bu bölümde integral almaya elverişli eğri sınıflarını tanımlıyoruz: yaydan başlayıp adım adım **çevre** kavramına ulaşacağız.

20.1 Yaylar

Tanım 20.1 (Yay). $x(t)$ ve $y(t)$, $a \leq t \leq b$ aralığında **sürekli** reel fonksiyonlar olmak üzere

$$z = z(t) = x(t) + i y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

denklemleriyle temsil edilen nokta kümesine bir **yay** (C) denir. Tanım, $[a, b]$ aralığından düzleme sürekli bir gönderim kurar; görüntü noktaları, artan t 'ye göre doğal bir **yönle** sıralanır.

Tanım 20.2 (Basit Yay ve Basit Kapalı Eğri). $t_1 \neq t_2$ iken $z(t_1) \neq z(t_2)$ oluyorsa — yani eğri kendisiyle kesişmiyorsa — C 'ye **basit yay** (Jordan yayı) denir. Yalnızca uçlarda çakışma varsa ($z(b) = z(a)$) C , bir **basit kapalı eğridir** (Jordan eğrisi). Basit kapalı eğri, saat yönünün tersine yönlendirilmişse **pozitif yönlüdür**.

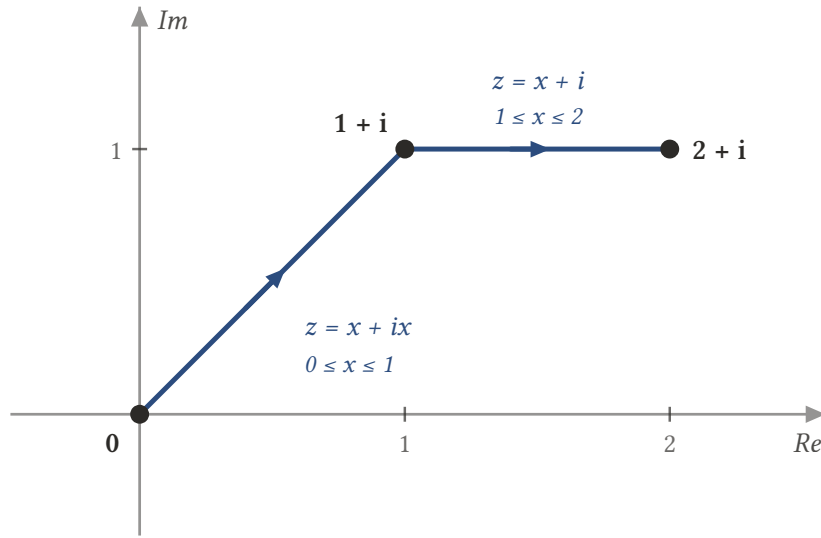
Aynı nokta kümesi, farklı parametrisasyonlarla **farklı yaylar** tanımlayabilir; yay kavramı kümeyle birlikte dolaşım biçimini de içerir. Dört örnek farkları gösterir:

Örnek 20.1 (Aynı Küme, Farklı Yaylar).

a) **Kırık çizgi:**

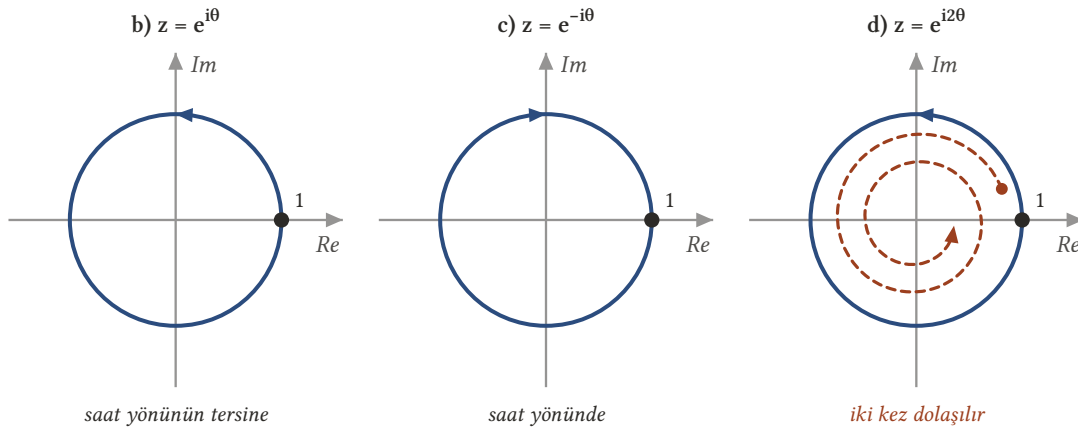
$$z = \begin{cases} x + ix, & 0 \leq x \leq 1 \\ x + i, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

0'dan $1 + i$ 'ye, oradan $2 + i$ 'ye giden iki doğru parçasından oluşan basit bir yaydır.



Şekil 20.1: Kırık çizgi tek bir yaydır: 0'dan $1 + i$ 'ye $z = x + ix$, oradan $2 + i$ 'ye $z = x + i$ parçası; parametre x baştan sona artar. $1 + i$ köşesinde yön aniden değişir. Farklı x değerleri farklı noktalar verdiği için yay basittir.

- b) **Birim çember:** $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), saat yönünün tersine dolaşılan pozitif yönlü bir basit kapalı eğridir. z_0 merkezli R yarıçaplı çember de $z = z_0 + Re^{i\theta}$ ile aynı biçimde temsil edilir.
- c) $z = e^{-i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$): nokta kümesi aynı birim çemberdir; ama dolaşım **saat yönündedir** – b'dekiyle aynı yay değildir.
- d) $z = e^{i2\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$): yine birim çember, ama iki kez dolaşılır; b ve c'den farklı bir yaydır ve basit kapalı eğri değildir.



Şekil 20.2: Üçünün nokta kümesi aynı birim çemberdir; yay olarak üçü de farklıdır. (b) pozitif yönlü basit kapalı eğridir; (c) aynı çemberi saat yönünde dolaşır; (d) ise θ bir kez 0'dan 2π 'ye giderken çemberi iki kez dolaşır – uçlar dışında da çakışan noktalar olduğundan basit kapalı eğri değildir.

20.2 Yeniden Parametrizasyon

Parametre aralığı, eğriyi değiştirmeden başka bir aralıkla takas edilebilir. φ , $[\alpha, \beta]$ 'yi $[a, b]$ 'ye gönderen, $\varphi(\alpha) = a$ ve $\varphi(\beta) = b$ koşullarını sağlayan, sürekli türevli ve her noktada $\varphi'(\tau) > 0$ olan bir fonksiyon olsun. O zaman

$$Z(\tau) = z[\varphi(\tau)] \quad (\alpha \leq \tau \leq \beta)$$

aynı yayı, aynı yöne temsil eder; $\varphi' > 0$ koşulu yön korumanın güvencesidir.

20.3 Düzgün Yaylar ve Uzunluk

Tanım 20.3 (Türevlenebilir ve Düzgün Yay). $x'(t)$ ve $y'(t)$, $[a, b]$ 'nin tamamında var ve sürekliyse C 'ye **türevlenebilir yay** denir; türevi $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ 'dir. Ek olarak açık aralıkta $z'(t) \neq 0$ ise C **düzgün yaydır**: her noktada iyi tanımlı, sürekli dönen bir birim teğet vektörü

$$\mathbf{T} = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$$

vardır.

Türevlenebilir bir yayın **uzunluğu**, kalkülüsten bilinen formülün kompleks yazımıdır:

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt, \quad |z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

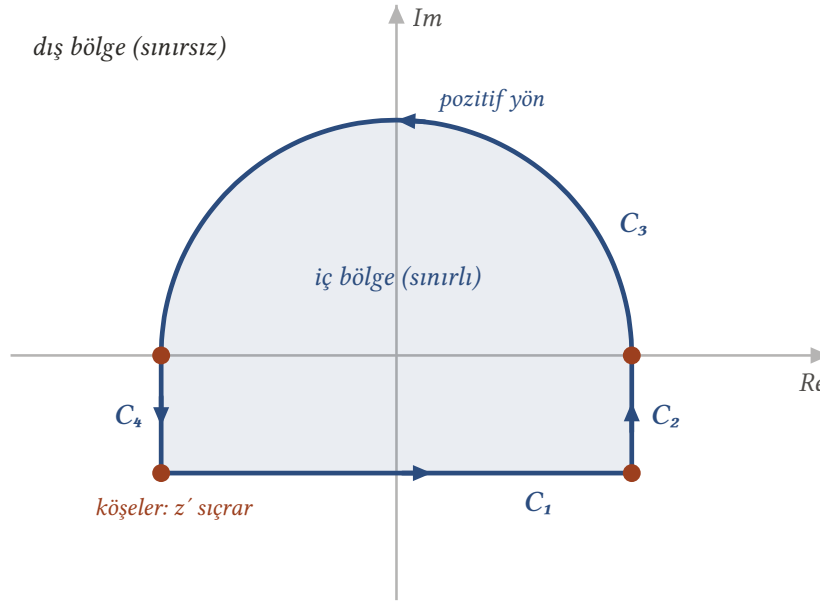
Uzunluk, temsil seçiminden bağımsızdır: $t = \varphi(\tau)$ değişimiyle, zincir kuralı $Z'(\tau) = z'[\varphi(\tau)]\varphi'(\tau)$ ve $\varphi' > 0$ sayesinde

$$\int_\alpha^\beta |Z'(\tau)| d\tau = \int_\alpha^\beta |z'[\varphi(\tau)]| \varphi'(\tau) d\tau = \int_a^b |z'(t)| dt$$

20.4 Çevreler

Tanım 20.4 (Çevre). **Çevre** (parçalı düzgün yay), uç uca eklenmiş sonlu sayıda düzgün yaydan oluşan yaydır: $z(t)$ sürekli, $z'(t)$ ise parçalı sürekli. Yalnızca başlangıç ve bitiş değerleri çakışıyorsa **basit kapalı çevre** denir.

Kırık çizgiler, çemberler, üçgen ve dikdörtgen sınırları — belirli bir yöne dolaşıldıklarında — hep basit kapalı çevrelerdir. Bir çevrenin uzunluğu, onu oluşturan düzgün yayların uzunluklarının toplamıdır.



Şekil 20.3: Dört düzgün yayın uç uca eklenmesiyle oluşan basit kapalı çevre $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$; uzunluğu parçaların uzunluklarının toplamıdır. Köşelerde $z(t)$ sürekli, $z'(t)$ sıçırır (parçalı sürekli). Jordan eğri teoremi: C , düzlemi sınırlı bir iç bölge ile sınırsız bir dış bölgeye ayırır.

i Jordan eğri teoremi

Basit kapalı bir eğri, düzlemi ikisi de sınırı C olan iki domene ayırır: biri sınırlı (**iç bölge**), diğeri sınırsız (**dış bölge**). Geometrik olarak apaçık görünen bu ifadenin kanıtı şaşırtıcı derecede zordur; kuram boyunca kanıtsız kabul edeceğiz.

20.5 Alıştırma

Alıştırma 20.1 (Parametrizasyon Alıştırmaları).

- $-1 - i$ noktasından $1 + i$ noktasına giden doğru parçasını $z(t)$ biçiminde parametreleyiniz.
- $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) birim çemberinin uzunluğunu $L = \int |z'| d\theta$ formülüyle doğrulayınız.
- $y = x^3$ ($-1 \leq x \leq 1$) eğrisinin, x 'i parametre alan temsilinin düzgün bir yay tanımladığını gösteriniz.

Çözüm.

a) İki nokta arasındaki doğru parçası, uç noktaların bir ağırlıklı ortalamasıyla yazılır. $-1 - i = -(1 + i)$ ve $1 + i$ noktaları başlangıca göre simetrik olduğundan en sade temsil

$$z(t) = (1 + i)t \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

Gerçekten $z(-1) = -1 - i$ ve $z(1) = 1 + i$ 'dir; ara değerler de $y = x$ doğrusu üzerindedir. Genel yazım da kullanılabilir:

$$z(t) = (-1 - i) + t[(1 + i) - (-1 - i)] = (-1 - i) + t(2 + 2i) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

b) Türevi alalım:

$$z'(\theta) = ie^{i\theta} \implies |z'(\theta)| = |i| |e^{i\theta}| = 1$$

Uzunluk formülü artık sabit bir integrand içerir:

$$L = \int_0^{2\pi} |z'(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Bu, birim çemberin bilinen çevresidir.

c) Eğrinin x parametrelili temsili

$$z(x) = x + ix^3 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

Türev

$$z'(x) = 1 + 3x^2i$$

olup her iki bileşeni de x 'in sürekli fonksiyonudur. Ayrıca reel kısmı sabit 1 olduğundan $z'(x)$ hiçbir x için sıfır olamaz. Son olarak $x \mapsto z(x)$ birebirdir: farklı x değerleri farklı reel kısımlar verir. Sürekli türevli ve türevi hiç sıfırlanmayan bu temsil, tanım gereği **düzgün bir yay** belirtir; birebir olduğundan bu yay ayrıca **basittir**.

■

Zemin hazır: eğrilerimiz üzerinde artık **çevre integrallerini** tanımlayabiliriz.

21. Çevre İntegralleri

Kompleks analizin merkez işlemi budur: bir f fonksiyonunun, düzlemde bir C çevresi boyunca integrali. Değeri genelde yalnız uç noktalara değil **izlenen yola** bağlıdır — ve tam da bu bağımlılığın ne zaman ortadan kalktığı sorusu, Cauchy kuramının kapısını açar.

21.1 Tanım

Tanım 21.1 (Çevre İntegrali). $C: z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$), $z_1 = z(a)$ 'dan $z_2 = z(b)$ 'ye uzanan bir çevre; f , C üzerinde parçalı sürekli olsun (yani $f[z(t)]$ parçalı sürekli). f 'nin C **boyunca çevre integrali**:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt$$

C bir çevre olduğundan $z'(t)$ parçalı sürekli; integrandın parçalı sürekliliği sağ taraftaki $w(t)$ **integralinin** varlığını garanti eder. Değer, yön koruyan yeniden parametrisasyon altında değişmez — **yay uzunluğundaki** hesapla aynı değişken değişimi bunu gösterir.

Tanımdan hemen çıkan özellikler (z_0 sabit):

$$\int_C z_0 f(z) dz = z_0 \int_C f(z) dz, \quad \int_C [f(z) + g(z)] dz = \int_C f dz + \int_C g dz$$

Ters yön. $-C$, aynı noktaları ters sırayla dolaşan çevre olsun ($z = z(-t)$, $-b \leq t \leq -a$). Zincir kuralı ve değişken değişimiyle

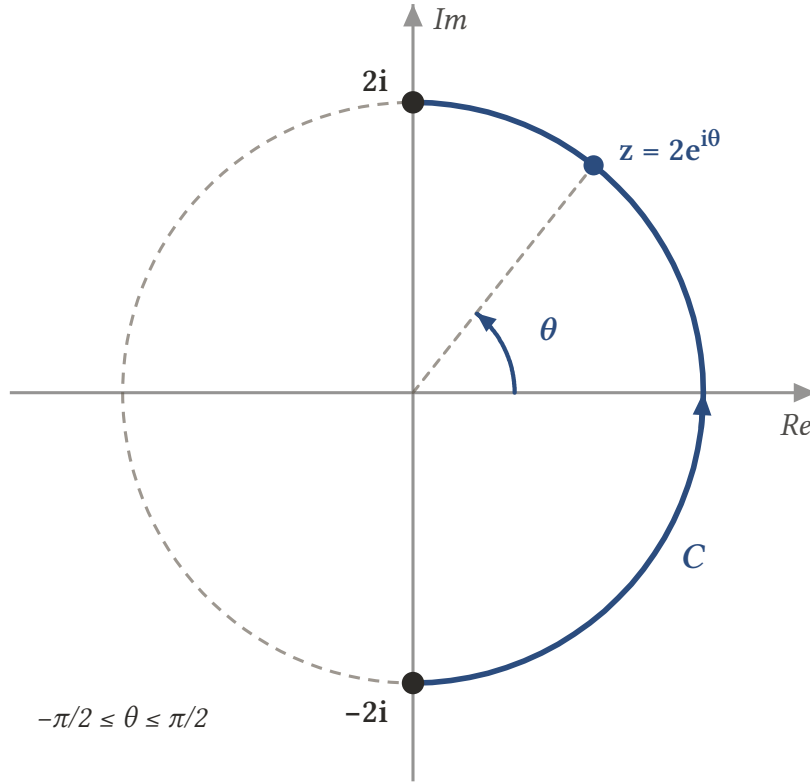
$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz$$

Parçalara ayırma. C , C_1 'in bitişi C_2 'nin başlangıcı olacak biçimde iki çevrenin eklenmesiye ($C = C_1 + C_2$):

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz$$

21.2 Yol Bağımlılığı: Üç Klasik Örnek

Örnek 21.1 (Eşleniğin Yarım Çember Üzerinde İntegrali). C , $|z| = 2$ çemberinin $z = -2i$ 'den $z = 2i$ 'ye sağ yarısı olsun: $z = 2e^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. $\int_C \bar{z} dz$ integralini hesaplayınız.



Şekil 21.1: $|z| = 2$ çemberinin sağ yarısı: θ , $-\pi/2$ 'den $\pi/2$ 'ye artarken $z = 2e^{i\theta}$ noktası $-2i$ 'den başlar, $2i$ 'den geçer ve $2i$ 'de biter; dolaşım saat yönünün tersinedir.

Çözüm.

$2e^{i\theta} = 2e^{-i\theta}$ ve $\frac{d}{d\theta} (2e^{i\theta}) = 2ie^{i\theta}$ olduğundan

$$\int_C \bar{z} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2e^{-i\theta} 2ie^{i\theta} d\theta = 4i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 4\pi i$$

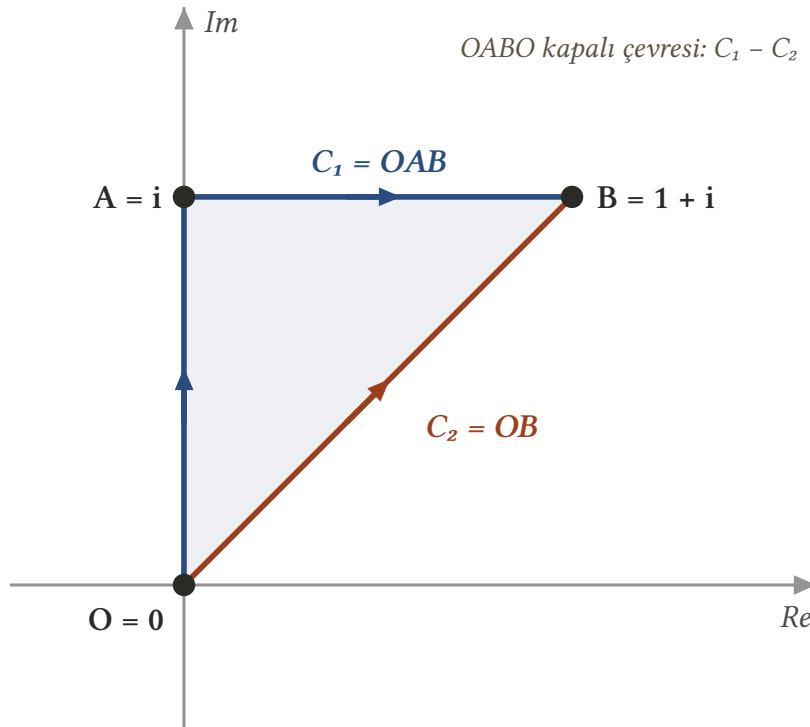
İkinci okuma: C üzerinde $z\bar{z} = |z|^2 = 4$, yani $\bar{z} = 4/z$ 'dir. Sonuç şu biçimde de yazılabilir:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \frac{1}{4} \int_C \bar{z} dz = \pi i$$

Bu küçük gözlem ileride **ters türevler bölümünde** yeniden karşımıza çıkacak.

■

Örnek 21.2 (Aynı Uçlar, Farklı Değerler). $f(z) = y - x - i3x^2$ ($z = x + iy$) olsun. $O = 0$, $A = i$, $B = 1 + i$ noktaları için iki yol düşünelim: $C_1 = OAB$ kırık çizgisi ve $C_2 = OB$ doğru parçası. İki integrali karşılaştıralım.



Şekil 21.2: $O = 0$ 'dan $B = 1 + i$ 'ye iki yol: $C_1 = OAB$ kırık çizgisi ve $C_2 = OB$ köşegeni. $f(z) = y - x - i3x^2$ için iki integral farklı çıkar; fark, $OABO$ üçgenini dolaşan kapalı $C_1 - C_2$ çevresi üzerindeki integraldır ve sıfır değildir.

Çözüm.

C_1 yolu. OA parçasında $z = iy$ ($0 \leq y \leq 1$): burada $x = 0$, $f = y$ ve $dz = i dy$;

$$\int_{OA} f dz = \int_0^1 y i dy = \frac{i}{2}$$

AB parçasında $z = x + i$ ($0 \leq x \leq 1$): burada $y = 1$, $f = 1 - x - i3x^2$ ve $dz = dx$;

$$\int_{AB} f dz = \int_0^1 (1 - x) dx - 3i \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{2} - i$$

Toplam:

$$I_1 = \int_{C_1} f dz = \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - i = \frac{1 - i}{2}$$

C_2 yolu. OB üzerinde $z = x + ix$ ($0 \leq x \leq 1$): burada $y = x$, $f = -i3x^2$ ve $dz = (1 + i) dx$;

$$I_2 = \int_{C_2} f dz = \int_0^1 (-i3x^2)(1 + i) dx = 3(1 - i) \int_0^1 x^2 dx = 1 - i$$

$I_1 \neq I_2$: uçları aynı iki yol farklı değerler üretti. Kapalı $OABO$ çevresi ($C_1 - C_2$) üzerindeki integral de sıfırdan farklıdır:

$$I_1 - I_2 = \frac{1 - i}{2} - (1 - i) = \frac{-1 + i}{2}$$

■

Örnek 21.3 (Her Yolda Aynı Değer). C , z_1 'den z_2 'ye herhangi bir çevre olsun. $\int_C z dz = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Önce C düzgün bir yay olsun: $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$. Gözlem:

$$\frac{d}{dt} \frac{[z(t)]^2}{2} = z(t) z'(t)$$

Dolayısıyla **temel teoremler**

$$\int_C z dz = \int_a^b z(t) z'(t) dt = \left[\frac{[z(t)]^2}{2} \right]_a^b = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$$

C , düzgün yayların eklenmesiyle oluşan genel bir çevreyse, her C_k parçası z_k 'den z_{k+1} 'e uzansın (z_1 başlangıç, z_{n+1} bitiş). Parça değerleri teleskopik toplanır:

$$\int_C z dz = \sum_{k=1}^n \frac{z_{k+1}^2 - z_k^2}{2} = \frac{z_{n+1}^2 - z_1^2}{2}$$

Değer yalnızca uçlara bağlıdır; özellikle **her kapalı çevre üzerinde** $\int_C z dz = 0$.

■

i İki örneğin dersi

$\bar{z}$ ve $y - x - i3x^2$ analitik değildir ve integralleri yola bağlı çıktı; z ise tamdır ve integrali yoldan bağımsız çıktı. Bu bir rastlantı değildir — bağlantının kesin ifadesi **ters türevler teoreminde** ve Cauchy-Goursat kuramında verilecek.

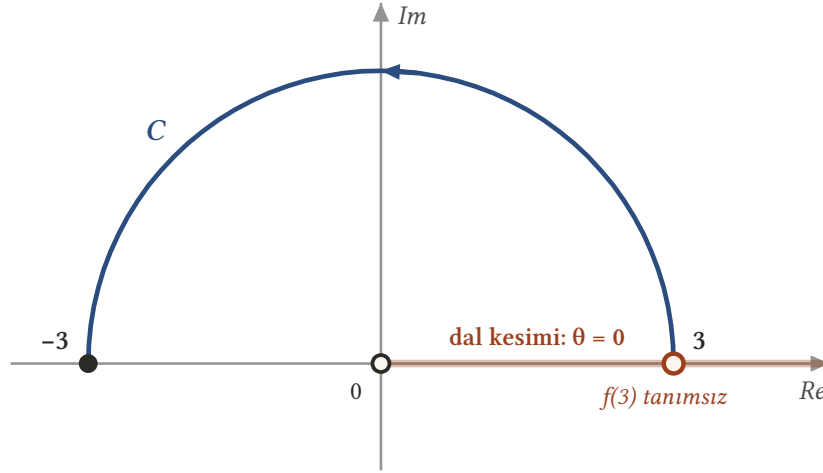
21.3 Dal Kesimli İntegrandlar

İntegrand, çok değerli bir fonksiyonun dalı olduğunda yol, dal kesimine dokunabilir; integral yine de var olabilir.

Örnek 21.4 (Kesime Dokunan Yarım Çember). $C: z = 3e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), $z = 3$ 'ten $z = -3$ 'e üst yarım çember;

$$f(z) = z^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right) \quad (|z| > 0, 0 < \arg z < 2\pi)$$

dalı verilsin. $I = \int_C z^{1/2} dz$ integralini hesaplayınız.



Şekil 21.3: $0 < \arg z < 2\pi$ dalının kesimi pozitif reel eksendir ve yolun başlangıç noktası $z = 3$ tam bu ışın üzerindedir: f orada tanımsızdır (boş nokta). Yine de $\theta \rightarrow 0^+$ iken integrandın sağ limiti vardır; parçalı sürekli integrand integrali kurtarır.

Çözüm.

Dal, $\theta = 0$ ışınında tanımsızdır; dolayısıyla f , C 'nin başlangıç noktası $z = 3$ 'te tanımlı bile değildir. Ama integral yine de vardır, çünkü integrand parçalı sürekli: $0 < \theta \leq \pi$ için

$$f[z(\theta)] z'(\theta) = \sqrt{3} e^{i\theta/2} \cdot 3ie^{i\theta} = 3\sqrt{3} i e^{i3\theta/2}$$

ve bu ifadenin $\theta \rightarrow 0^+$ sağ limiti $3\sqrt{3} i$ olarak vardır; $\theta = 0$ 'da bu değerle tanımlanırsa $[0, \pi]$ üzerinde sürekli olur. Hesap:

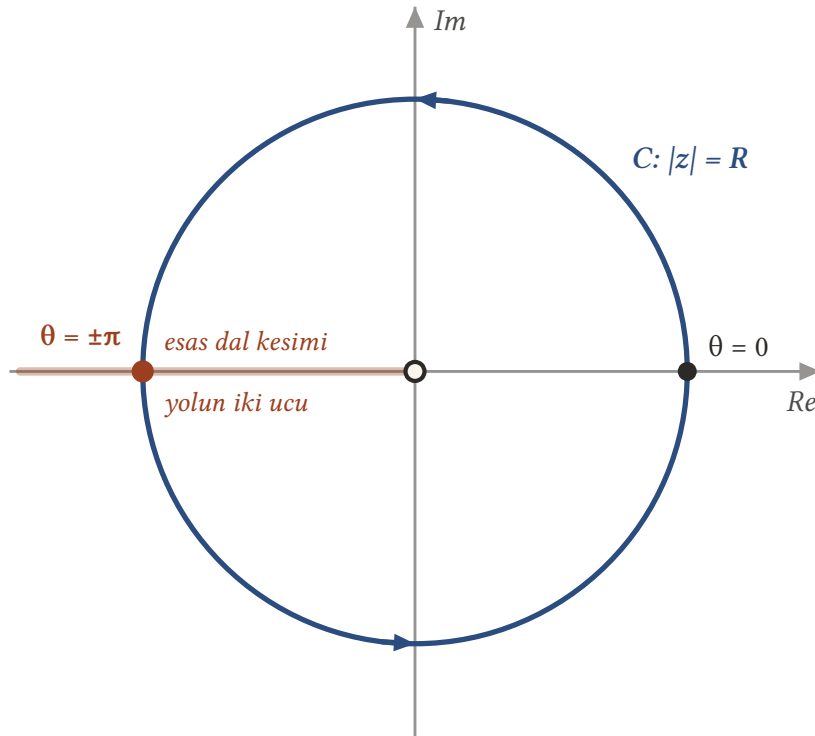
$$I = 3\sqrt{3} i \int_0^\pi e^{i3\theta/2} d\theta = 3\sqrt{3} i \left[\frac{2}{3i} e^{i3\theta/2} \right]_0^\pi = 2\sqrt{3} (e^{i3\pi/2} - 1) = -2\sqrt{3} (1 + i)$$

■

Örnek 21.5 (Kuvvet Fonksiyonunun Çember İntegrali). C , pozitif yönlü $z = Re^{i\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) çemberi ve a sıfırdan farklı bir reel sayı olsun. Esas dal

$$z^{a-1} = \exp[(a-1) \operatorname{Log} z] \quad (|z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi)$$

için $I = \int_C z^{a-1} dz$ integralini hesaplayınız.



Şekil 21.4: Esas dalın kesimi negatif reel eksendir; C çemberi kesime yalnız $z = -R$ noktasında değer ve tam da orası yolun başlangıcı ($\theta = -\pi$) ile bitişidir ($\theta = \pi$). İntegrand yalnız bu tek noktada tanımsızdır ve orada iki tek yanlı limiti vardır; parçalı süreklilik integral için yeterlidir.

Çözüm.

$\theta \in (-\pi, \pi)$ için

$$f[z(\theta)] z'(\theta) = e^{(a-1)(\ln R + i\theta)} i R e^{i\theta} = i R^a e^{ia\theta}$$

(R^a , pozitif değeriyle alınır). Uç noktada $\theta = \pm\pi$ tek yanlı limitler var olduğundan integrand parçalı süreklidir ve

$$I = i R^a \int_{-\pi}^{\pi} e^{ia\theta} d\theta = i R^a \left[\frac{e^{ia\theta}}{ia} \right]_{-\pi}^{\pi} = i R^a \frac{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}}{ia} = i \frac{2R^a}{a} \sin a\pi$$

İki özel durum dikkat çekicidir:

- $a = n$ **sıfırdan farklı bir tam sayıysa** $\sin n\pi = 0$, dolayısıyla $\int_C z^{n-1} dz = 0$. (Bu durumda integrand tek değerlidir ve dala gerek yoktur.)
- Formülün kapsamadığı $a = 0$ durumunda ($1/a$ tanımsız) integrand $1/z$ olur ve doğrudan hesapla

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{i R e^{i\theta}}{R e^{i\theta}} d\theta = i \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = 2\pi i$$

Sıfırdan farklı çıkan bu tek istisna, rezidü kuramının çekirdeğidir.

■

21.4 Alıştırma

Alıştırma 21.1 (Çevre İntegrali Hesapları).

- a) C , $z = 1 + i$ 'den $z = 3 + i$ 'ye yatay doğru parçası olmak üzere $\int_C \bar{z} dz$ integralini hesaplayınız.
- b) C , pozitif yönlü $|z| = 1$ çemberi olmak üzere $\int_C \bar{z} dz = 2\pi i$ olduğunu gösteriniz.
- c) C , $|z| = 2$ çemberinin üst yarısı ($z = 2$ 'den $z = -2$ 'ye) olmak üzere $\int_C \frac{dz}{z}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

a) Yatay parçayı parametreleyelim: $z(t) = t + i$, $1 \leq t \leq 3$. O zaman $\bar{z} = t - i$ ve $dz = dt$ 'dir:

$$\int_C \bar{z} dz = \int_1^3 (t - i) dt = \left[\frac{t^2}{2} - it \right]_1^3 = \left(\frac{9}{2} - 3i \right) - \left(\frac{1}{2} - i \right) = 4 - 2i$$

b) Çemberi $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) ile parametreleyelim. Bu durumda

$$\bar{z} = e^{-i\theta}, \quad dz = ie^{i\theta} d\theta$$

İntegrandda üsler birbirini götürür:

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Sonucun sıfır olmaması şaşırtıcı değildir: $\bar{z}$ analitik olmadığından, ikinci kısımda kanıtlanacak Cauchy-Goursat teoremi burada uygulanamaz. (Birim çember üzerinde $\bar{z} = 1/z$ olduğuna dikkat ediniz; hesap aslında $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$ integralini vermiştir.)

c) Üst yarı çemberi $z = 2e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) ile parametreleyelim; $\theta = 0$ noktası $z = 2$, $\theta = \pi$ noktası $z = -2$ 'dir, yani yön istenen yöndür. Türev $dz = 2ie^{i\theta} d\theta$ olduğundan

$$\frac{dz}{z} = \frac{2ie^{i\theta} d\theta}{2e^{i\theta}} = i d\theta$$

Yarıçap sadeleşir ve geriye sabit bir integrand kalır:

$$\int_C \frac{dz}{z} = \int_0^\pi i d\theta = \pi i$$

■

Bir integrali tam hesaplayamadığımızda bile modülünü sınırlamak çoğu zaman yeterlidir; bunun sistematik aracı [ML eşitsizliği](#)dir.

22. Çevre İntegrallerinin Modülleri İçin Üst Sınırlar

Kompleks analizde birçok teorem, bir integralin değerini hesaplamadan **modülünü sınırlayarak** kanıtlanır: sınır sıfıra çekilebiliyorsa integral yok olur, sabit kalıyorsa varlık garantiye alınır. Bu bölümün iki aracı — integral modülü lemması ve ML eşitsizliği — kuramın en çok kullanılan teknik gereçleridir.

22.1 İntegral Modülü Lemması

Teorem 22.1 (İntegralin Modülü). $w(t)$, $[a, b]$ üzerinde parçalı sürekli kompleks değerli bir fonksiyonsa

$$\left| \int_a^b w(t) dt \right| \leq \int_a^b |w(t)| dt$$

İspat.

Sol taraf sıfırsa eşitsizlik apaçıktır; sıfır değilse integralin değerini kutupsal biçimde yazalım:

$$\int_a^b w(t) dt = r_0 e^{i\theta_0}, \quad r_0 = \left| \int_a^b w dt \right| > 0$$

r_0 'ı çekelim:

$$r_0 = e^{-i\theta_0} \int_a^b w(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta_0} w(t) dt$$

Sol taraf reel olduğundan sağ tarafın da reel olması, yani sanal kısmının sıfır olması gerekir:

$$r_0 = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{-i\theta_0} w(t)] dt$$

Reel kısım modülü aşamaz:

$$\operatorname{Re} [e^{-i\theta_0} w(t)] \leq | e^{-i\theta_0} w(t) | = | w(t) |$$

Reel integrallerin monotonluğuyla $r_0 \leq \int_a^b |w(t)| dt$; r_0 tam olarak sol taraf olduğundan kanıt biter. ■

22.2 ML Eşitsizliği

Teorem 22.2 (ML Eşitsizliği). C , L uzunluğunda bir çevre; f , C üzerinde parçalı sürekli olsun. C 'nin her z noktasında

$$|f(z)| \leq M$$

olacak biçimde negatif olmayan bir M sabiti varsa

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

İspat.

$z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$), C 'nin bir parametrik temsili olsun. Lemma ve modülün çarpımsallığıyla

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f[z(t)]| |z'(t)| dt \leq M \int_a^b |z'(t)| dt = ML$$

Son integral, *yay uzunluğunun* ta kendisidir.

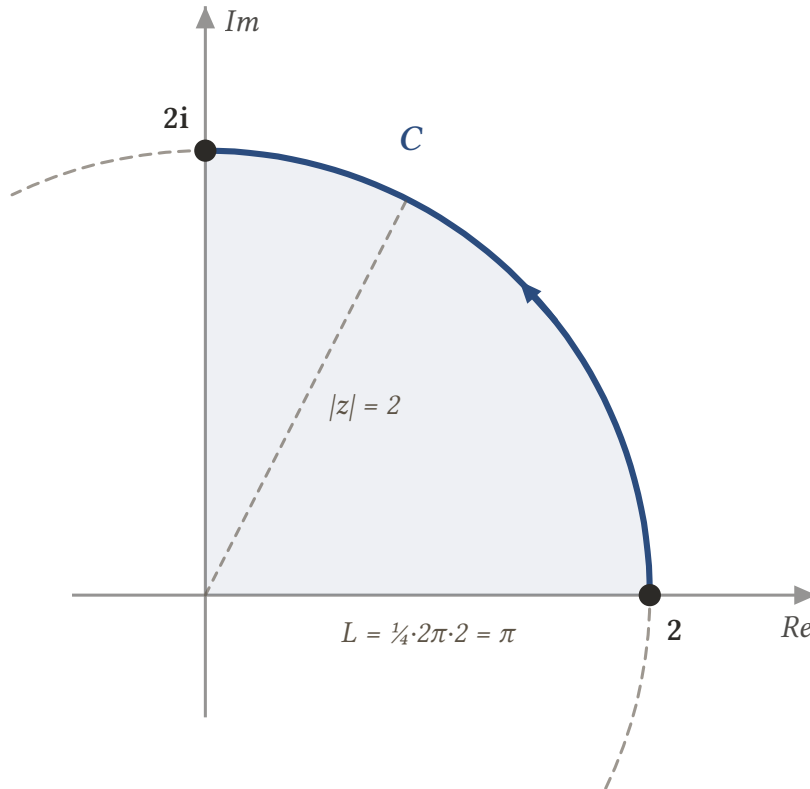
■

Böyle bir M **her zaman vardır**: $|f[z(t)]|$, kapalı $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli reel bir fonksiyondur ve orada sınırlıdır; f , C üzerinde sürekli olduğunda M olarak maksimum değer alınabilir.

22.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 22.1 (Hesapsız Kestirim). C , $|z| = 2$ çemberinin $z = 2$ 'den $z = 2i$ 'ye birinci çeyrekte kalan yayı olsun. Şunu gösteriniz:

$$\left| \int_C \frac{z+4}{z^3-1} dz \right| \leq \frac{6\pi}{7}$$



Şekil 22.1: C , $|z| = 2$ çemberinin birinci çeyrekte kalan yayıdır: $z = 2$ 'den $z = 2i$ 'ye saat yönünün tersine. Uzunluğu tam çemberin dörtte biri, $L = \pi$; ML eşitsizliğindeki L budur.

Çözüm.

C üzerinde $|z| = 2$ 'dir. Pay için üçgen eşitsizliği:

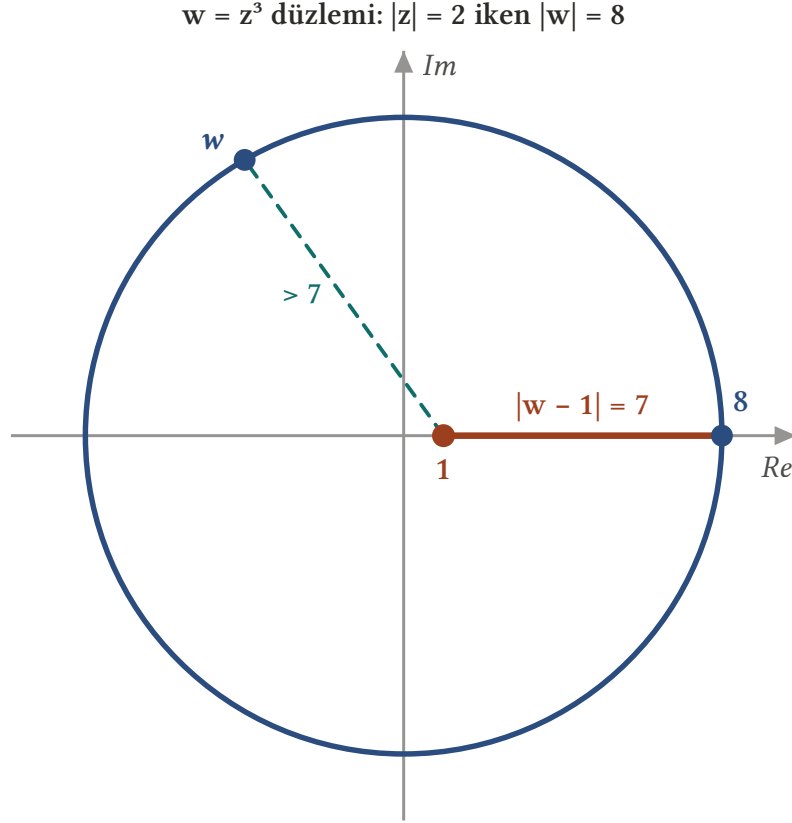
$$|z+4| \leq |z| + 4 = 6$$

Payda için ters yönlü üçgen eşitsizliği:

$$|z^3 - 1| \geq ||z|^3 - 1| = 7$$

Dolayısıyla C üzerinde integrandın modülü $M = \frac{6}{7}$ ile sınırlıdır. Çeyrek çemberin uzunluğu $L = \frac{1}{4}(2\pi \cdot 2) = \pi$; ML eşitsizliği istenen sınırı verir.

■



Şekil 22.2: $|z| = 2$ iken $w = z^3$ değeri $|w| = 8$ çemberi üzerindedir. 1 noktası bu çemberin içinde kaldığından çember üzerindeki her w için $|w - 1| \geq 8 - 1 = 7$; en kısa uzaklık $w = 8$ 'de alınır. Ters yönlü üçgen eşitsizliği $|z^3 - 1| \geq |z|^3 - 1$ 'in geometrik anlamı budur.

Örnek 22.2 (Sonsuzda Sönen İntegral). $C_R: z = Re^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), $R > 1$; karekökün

$$z^{1/2} = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

dalı alınsın. Şunu kanıtlayınız:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz = 0$$

Çözüm.

C_R üzerinde $|z| = R$ için

$$|z^{1/2}| = |\sqrt{R} e^{i\theta/2}| = \sqrt{R}, \quad |z^2 + 1| \geq ||z|^2 - 1| = R^2 - 1$$

Dolayısıyla integrand $M_R = \frac{\sqrt{R}}{R^2 - 1}$ ile sınırlıdır; yarım çemberin uzunluğu $L = \pi R$. ML eşitsizliğiyle

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz \right| \leq M_R L = \frac{\pi R \sqrt{R}}{R^2 - 1} = \frac{\pi / \sqrt{R}}{1 - 1/R^2}$$

Son ifadede $R \rightarrow \infty$ iken pay sıfıra, payda 1'e gider; sınır sıfıra çöker ve integral de sıfıra gitmek zorunda kalır.

💡 Kestirim reçetesi

ML uygulamalarının değişmez şablonu: paydaki her terime üçgen eşitsizliği ($|toplama| \leq$ modüller toplamı), paydadaki farka ters yönlü üçgen eşitsizliği ($|fark| \geq$ modüller farkı) uygulanır; yol uzunluğu geometriden okunur. Rezidü kuramındaki has olmayan integral hesaplarının tamamı bu şablonla kapanır.

22.4 Alıştırma

Alıştırma 22.1 (Kestirim Alıştırmaları).

- a) C , $z = i$ 'den $z = 1$ 'e doğru parçası olmak üzere $\left| \int_C \frac{dz}{z^4} \right| \leq 4\sqrt{2}$ olduğunu gösteriniz. *İpucu:* Parça üzerindeki bir noktanın başlangıca en kısa uzaklığı $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 'dir.
- b) C_R , $|z| = R$ ($R > 2$) pozitif yönlü çemberi olmak üzere

$$\left| \int_{C_R} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \frac{2\pi R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

kestirimini kurunuz ve $R \rightarrow \infty$ iken integralin sıfıra gittiği sonucunu çıkarınız.

Çözüm.

a) ML eşitsizliği için iki büyüklük gerekir: yolun uzunluğu ve integrandın yol üzerindeki bir üst sınırı. Uzunluk doğrudan okunur; i ile 1 arasındaki doğru parçası için

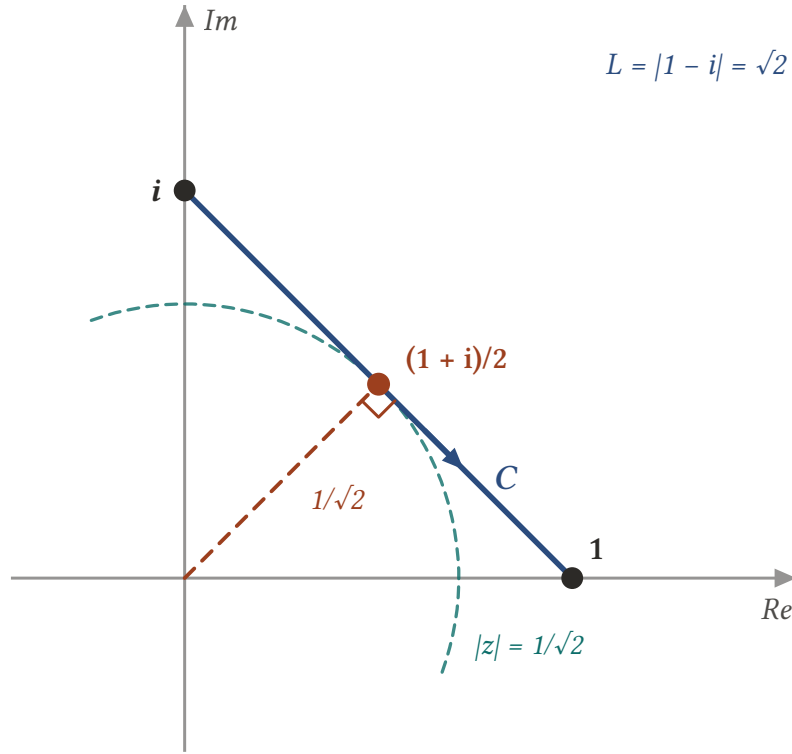
$$L = |1 - i| = \sqrt{2}$$

Üst sınır için integrandın modülünü yazalım:

$$\left| \frac{1}{z^4} \right| = \frac{1}{|z|^4}$$

Bu ifadenin **en büyük** olduğu yer, $|z|$ 'nin en küçük olduğu noktadır. İpucundaki gibi, parça üzerindeki noktaların başlangıca uzaklığı en az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 'dir (parçanın orta noktası $\frac{1+i}{2}$, uzaklığı $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Dolayısıyla parça üzerinde

$$|z| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \implies \frac{1}{|z|^4} \leq (\sqrt{2})^4 = 4 = M$$



Şekil 22.3: i 'den 1 'e giden doğru parçasının başlangıca en yakın noktası, başlangıçtan indirilen dikmenin ayağı olan orta nokta $(1 + i)/2$ 'dir; uzaklığı $1/\sqrt{2}$. Parça, $|z| = 1/\sqrt{2}$ çemberine orada teğettir; dolayısıyla parça üzerinde $|z| \geq 1/\sqrt{2}$ ve $1/|z|^4 \leq 4 = M$ olur. Uzunluk $L = \sqrt{2}$.

ML eşitsizliği sonucu verir:

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^4} \right| \leq ML = 4\sqrt{2}$$

b) Paydayı çarpanlarına ayırılım:

$$z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4)$$

$|z| = R$ üzerinde payı üstten, paydayı alttan sınırlayacağız. Üçgen eşitsizliği payı verir:

$$|2z^2 - 1| \leq 2|z|^2 + 1 = 2R^2 + 1$$

Ters üçgen eşitsizliği paydanın iki çarpanını alttan sınırlar; $R > 2$ olduğundan her iki alt sınır da pozitiftir:

$$|z^2 + 1| \geq R^2 - 1, \quad |z^2 + 4| \geq R^2 - 4$$

Bölümün modülü için

$$\left| \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} \right| \leq \frac{2R^2 + 1}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} = M$$

Çemberin uzunluğu $L = 2\pi R$ olduğundan ML eşitsizliği istenen kestirimi verir:

$$\left| \int_{C_R} \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} dz \right| \leq \frac{2\pi R (2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

$R \rightarrow \infty$ davranışını görmek için sağ tarafta payın R^3 , paydanın R^4 mertebesinde olduğuna bakmak yeterlidir: oran R^{-1} gibi davranır. Kesin ifadeyle, pay ve paydayı R^4 'e bölersek

$$\frac{2\pi R (2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} = \frac{2\pi(2 + \frac{1}{R^2})}{R(1 - \frac{1}{R^2})(1 - \frac{4}{R^2})} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Sıkıştırma ilkesiyle integralin kendisi de sıfıra gider. Bu tür kestirimler, [has olmayan integrallerin](#) rezidülerle hesaplanmasında büyük yarım çemberlerin katkısını yok etmek için kullanılacaktır.

■

Kestirim araçları hazır. Kapanış bölümünde, integralin yoldan bağımsızlığını tam olarak karakterize eden teoremi kanıtlıyoruz: [ters türevler](#).

23. Ters Türevler

$\int_C z dz$ her yolda aynı çıkmış, $\int_C \bar{z} dz$ ise yola göre değişmişti. Aradaki fark tek bir kavramda düğümlenir: integrandın bir **ters türevinin** var olup olmaması. Bu bölümün teoremi, yoldan bağımsızlığı üç eşdeğer yüzüyle karakterize eder — ve kalkülüsün temel teoremini çevre integrallerine taşır.

23.1 Ters Türev

Tanım 23.1 (Ters Türev). f , bir D domeninde sürekli olsun. D 'nin her noktasında $F'(z) = f(z)$ koşulunu sağlayan bir F fonksiyonuna f 'nin D 'deki bir **ters türevi** denir.

Ters türev, türevi olan bir fonksiyon olduğundan zorunlu olarak **analitiktir**. Ayrıca toplamsal sabit dışında **tektir**: iki ters türevin farkının türevi D 'de sıfırdır ve **sabitlik teoremi** gereği fark sabittir.

23.2 Denklik Teoremi

Teorem 23.1 (Üçlü Denklik). f , bir D domeninde sürekli olsun. Aşağıdaki ifadelerden biri doğruysa üçü birden doğrudur:

- a) f 'nin D 'de bir F ters türevi vardır;
- b) sabit z_1 noktasından sabit z_2 noktasına giden, tamamen D 'de kalan **tüm çevreler** boyunca f 'nin integraleri aynı değere sahiptir ve bu ortak değer

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$$

- c) tamamen D 'de kalan **her kapalı çevre** üzerinde f 'nin integrali sıfırdır.

İspat.

Üç ifadenin denkliği için $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$ zincirini kurmak yeterlidir.

(a) $\Rightarrow$ (b). $F' = f$ olsun. $C: z = z(t)$ ($a \leq t \leq b$), z_1 'den z_2 'ye D 'de kalan düzgün bir yay ise zincir kuralıyla

$$\frac{d}{dt} F[z(t)] = F'[z(t)] z'(t) = f[z(t)] z'(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

Temel teorem uygulanır:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] z'(t) dt = F[z(t)] \Big|_a^b = F(z_2) - F(z_1)$$

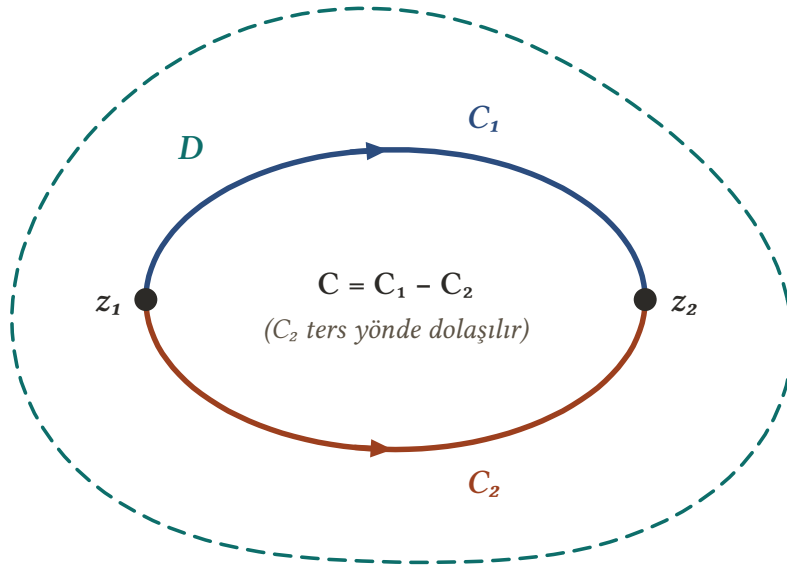
C , düzgün yayların eklenmesiyle oluşan genel bir çevreyse, her C_k parçası z_k 'den z_{k+1} 'e uzansın; parça değerleri teleskopik toplanır:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n [F(z_{k+1}) - F(z_k)] = F(z_{n+1}) - F(z_1)$$

Değer yalnız uçlara bağlıdır; (b) kanıtlandı.

(b) $\Rightarrow$ (c). C , D 'de kapalı bir çevre olsun; üzerinde iki nokta z_1, z_2 seçip C 'yi, ikisi de z_1 'den z_2 'ye giden C_1 ve C_2 yollarına ayıralım: $C = C_1 - C_2$. Yoldan bağımsızlıkla

$$\int_{C_1} f dz = \int_{C_2} f dz \Rightarrow \int_C f dz = \int_{C_1} f dz + \int_{-C_2} f dz = \int_{C_1} f dz - \int_{C_2} f dz = 0$$



Şekil 23.1: Kapalı C çevresi üzerinde iki nokta seçilince C, ikisi de z_1 'den z_2 'ye giden iki yola ayrılır: C_1 (üst) ve C_2 (alt). C'yi dolaşmak C_1 'i ileri, C_2 'yi geri ($-C_2$) izlemektir; yoldan bağımsızlıkla iki integral eşit olduğundan C üzerindeki integral sıfırdır.

(c) $\Rightarrow$ (a). Kapalı çevre integralleri sıfır olsun. Önce (c)'nin (b)'yi verdiğiine dikkat edelim: z_1 'den z_2 'ye iki yol C_1, C_2 için $C_1 - C_2$ kapalıdır, integrali sıfırdır, dolayısıyla iki yol aynı değeri verir. Şimdi $z_0 \in D$ sabitleyip

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds \quad (z \in D)$$

tanımlayalım; yoldan bağımsızlık sayesinde bu tanım tek değerlidir. $F' = f$ olduğunu gösterelim. $z \in D$ verilsin; $z + \Delta z$, z 'nin tamamen D 'de kalan bir komşuluğunda olsun ($\Delta z \neq 0$). Yolları z 'den $z + \Delta z$ 'ye bir doğru parçasıyla tamamlayarak

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds$$

yazabiliriz (integral doğru parçası üzerinden alınabilir). $\int_z^{z+\Delta z} ds = \Delta z$ olduğundan

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) ds \Rightarrow \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)] ds$$

f, z 'de süreklidir: her $\varepsilon > 0$ için $|s - z| < \delta$ iken $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ olacak bir $\delta > 0$ vardır. $|\Delta z| < \delta$ seçilirse doğru parçası üzerindeki her s için bu kestirim geçerlidir ve [ML eşitsizliğiyle](#)

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon$$

Demek ki

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

yani $F'(z) = f(z)$; (a) kanıtlandı ve zincir kapandı.

■

Teorem, üç ifadeden herhangi birinin belirli bir f için doğru olduğunu **iddia etmez**; yalnızca ya üçünün birden doğru ya üçünün birden yanlış olduğunu söyler. İspat, teorem kutusunun içinde katlanmış olarak duruyor; önce teoremin nasıl kullanıldığını görelim.

23.3 Çözümlü Uygulamalar

Örnek 23.1 (Doğrudan Temel Teorem). Sürekli $f(z) = z^2$ fonksiyonu tüm düzlemde $F(z) = \frac{z^3}{3}$ ters türevine sahiptir; $z = 0$ 'dan $z = 1 + i$ 'ye **her** çevre için

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{2}{3}(-1+i)$$

Örnek 23.2 (Delinmiş Düzlemde $1/z^2$). $f(z) = \frac{1}{z^2}$, delinmiş düzlem $|z| > 0$ 'da sürekli ve orada $F(z) = -\frac{1}{z}$ ters türevine sahiptir. Dolayısıyla başlangıç noktasını çevreleyen pozitif yönlü $z = 2e^{i\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) çemberi için — hesaba gerek kalmadan —

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

Kapalı çevre başlangıçtan geçmediği sürece bu sonuç tüm kapalı çevrelerde geçerlidir.

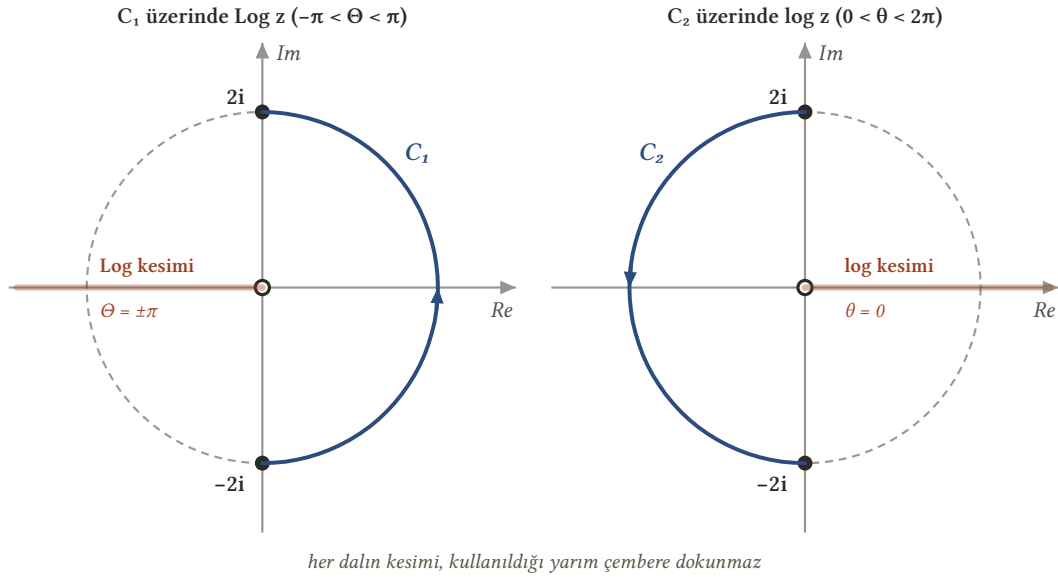
⚠ $1/z$ aynı oyuna gelmez

$\frac{1}{z}$ 'nin ters türevi olmaya tek aday $\log z$ 'nin dallarıdır; ama **hiçbir dal**, delinmiş düzlemin tamamında tanımlı ve analitik değildir — her dal kendi kesimi üzerinde çöker. Nitekim $|z| = 2$ çemberi üzerinde $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$ **bulunmuştu**; teorem gereği delinmiş düzlemde ters türev **var olamaz**. Yine de dallar, çemberin parçaları üzerinde kullanılabilir — sıradaki örnek tekniği gösterir.

Örnek 23.3 (İki Dalla Tam Çember). C , pozitif yönlü $|z| = 2$ çemberi olsun. $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$ değerini, logaritmanın iki dalını kullanarak yeniden elde edelim.

Çözüm.

Çemberi iki yarıya bölelim: C_1 , $-2i$ 'den $2i$ 'ye **sağ yarı**; C_2 , $2i$ 'den $-2i$ 'ye **sol yarı**.



Şekil 23.2: Her yarım çember için kesimi öbür tarafta kalan bir dal seçilir: sağ yarı C_1 üzerinde esas dal $\text{Log } z$ (kesimi negatif reel eksen), sol yarı C_2 üzerinde $0 < \theta < 2\pi$ dalı (kesimi pozitif reel eksen). İki parçanın toplamı $2\pi i$ 'yi verir. Tek bir dal çemberin tamamını kapsayamaz, çünkü her dalın kesimi çemberi keser.

Sağ yarıda esas dal iş görür: $\text{Log } z$ ($r > 0, -\pi < \theta < \pi$), sağ yarı düzlemi içeren domende $1/z$ 'nin ters türevidir:

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z} = \text{Log } z \Big|_{-2i}^{2i} = \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2} \right) - \left(\ln 2 - i\frac{\pi}{2} \right) = \pi i$$

Sol yarıda esas dalın kesimi yolu keser; $\log z = \ln r + i\theta$ ($0 < \theta < 2\pi$) dalına geçilir:

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} = \log z \Big|_{2i}^{-2i} = \left(\ln 2 + i\frac{3\pi}{2} \right) - \left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2} \right) = \pi i$$

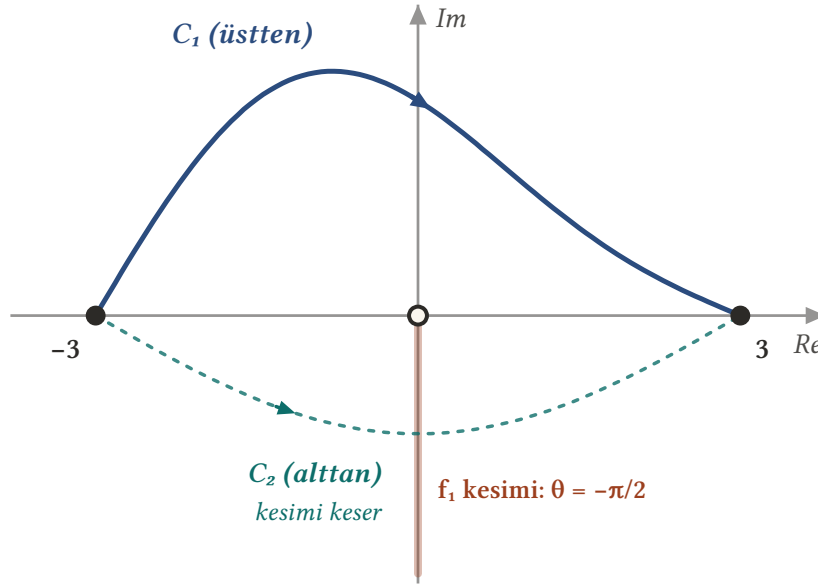
Toplam: $\int_C \frac{dz}{z} = \pi i + \pi i = 2\pi i$.

■

Örnek 23.4 (Karekök Dalıyla İntegral). C_1 , $z = -3$ 'ten $z = 3$ 'e reel eksenin **üstünden** geçen herhangi bir çevre olsun. Çok değerli $z^{1/2}$ 'nin

$$f_1(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

dalını alarak $\int_{C_1} z^{1/2} dz$ integralini hesaplayınız.



Şekil 23.3: $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ dalının kesimi negatif sanal eksenidir: reel eksenin üstünden geçen her C_1 yolu kesime hiç dokunmaz, dolayısıyla f_1 bu yol üzerinde süreklidir ve ters türevi F_1 kullanılabilir. Altından geçen bir C_2 ise kesimi keser; onun için $\pi/2 < \theta < 5\pi/2$ dalı gerekir.

Çözüm.

Bu dal, üst yarı düzlemi ve reel eksenini (0 hariç) kapsayan domende tanımlı ve C_1 üzerinde süreklidir. Domende bir ters türevi vardır:

$$F_1(z) = \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} r\sqrt{r} e^{i3\theta/2} \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \right)$$

Uç değerlerle ($z = 3: r = 3, \theta = 0$; $z = -3: r = 3, \theta = \pi$):

$$\int_{C_1} z^{1/2} dz = F_1(3) - F_1(-3) = 2\sqrt{3} (e^{i0} - e^{i3\pi/2}) = 2\sqrt{3} (1 + i)$$

Aynı uçlar arasında reel eksenin **altından** geçen bir C_2 çevresi için ($\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$) dalıyla aynı yöntem uygulanabilir.

■

23.4 Alıştırma

Alıştırma 23.1 (Ters Türev Uygulamaları). Aşağıdaki integralleri uygun ters türevlerle hesaplayınız.

- $\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz$
- $\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz$
- $\int_1^3 (z-2)^3 dz$

Çözüm.

a) $e^{\pi z}$ fonksiyonu tüm düzlemde analitiktir ve ters türevi $\frac{e^{\pi z}}{\pi}$ 'dir; integral yoldan bağımsızdır:

$$\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz = \frac{e^{\pi z}}{\pi} \Big|_i^{i/2} = \frac{e^{i\pi/2} - e^{i\pi}}{\pi}$$

$e^{i\pi/2} = i$ ve $e^{i\pi} = -1$ değerleriyle

$$\int_i^{i/2} e^{\pi z} dz = \frac{i - (-1)}{\pi} = \frac{1+i}{\pi}$$

b) $\cos \frac{z}{2}$ fonksiyonunun ters türevi $2 \sin \frac{z}{2}$ 'dir:

$$\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz = 2 \sin \frac{z}{2} \Big|_0^{\pi+2i} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} + i \right) - 2 \sin 0$$

Toplam formülünü uygulayalım:

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + i \right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos i + \cos \frac{\pi}{2} \sin i = \cos i = \cosh 1$$

Böylece

$$\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz = 2 \cosh 1 = e + \frac{1}{e}$$

c) $(z-2)^3$ fonksiyonunun ters türevi $\frac{(z-2)^4}{4}$, tür:

$$\int_1^3 (z-2)^3 dz = \frac{(z-2)^4}{4} \Big|_1^3 = \frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = 0$$

Sonucun sıfır çıkması, integrandın $z = 2$ noktasına göre tek simetrik olmasının doğal karşılığıdır.

■

Birinci kısmın sonuna geldik. Doğal soru şudur: f **analitikse** kapalı çevre integralleri ne zaman kendiliğinden sıfırlanır? Yanıt — Cauchy-Goursat teoremi — ders notlarının ikinci kısmının açılış konusudur.