İntegral Calculus

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com
Bu çalışma Creative Commons BY-NC-SA 4.0 lisansıyla paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 4 Kasım 2026

İçindekiler

Giriş 7

1 Dikdörtgen Bölgelerde İki Katlı İntegraller 8
1.1 Belirli İntegrali Hatırlayalım 8
1.2 Hacim Problemi ve İki Katlı İntegral 8
1.3 Temel Özellikler 13
1.4 Orta Nokta Kuralı 14
1.5 Ardışık İntegraller 16
1.6 Fubini Teoremi 17
1.7 Çarpım Biçimindeki Fonksiyonlar 22
1.8 Ortalama Değer 23
1.9 Alıştırmalar 25

2 Genel Bölgelerde İki Katlı İntegraller 32
2.1 Genel Bir Bölgede İki Katlı İntegral 32
2.2 Birinci ve İkinci Tip Bölgeler 33
2.3 İki Tip Bölgede Ardışık İntegral 34
2.4 İntegrasyon Sırasını Değiştirmek 42
2.5 İki Katlı İntegralin Özellikleri 43
2.6 Alıştırmalar 46

3 Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller 53
3.1 Kutupsal Koordinatlar ve Bölgeler 53
3.2 Kutupsal Dikdörtgen 54
3.3 İki Katlı İntegrali Kutupsal Koordinatlara Taşımak 55
3.4 Kutupsal Dikdörtgenlerde Hesap 59
3.5 Genel Kutupsal Bölgeler 62
3.6 Alıştırmalar 65

4 İki Katlı İntegralin Uygulamaları 72
4.1 Yoğunluk ve Kütle 72
4.2 Momentler ve Kütle Merkezi 74
4.3 Eylemsizlik Momenti 79
4.4 Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları 82
4.5 Bağımsız Rastgele Değişkenler 84
4.6 Beklenen Değerler 85
4.7 Alıştırmalar 87

 CC BY-NC-SA 4.0

5 Yüzey Alanı . . . 96
5.1 Yüzey Alanının Tanımı . . . 96
5.2 Yüzey Alanı Formülü . . . 97
5.3 İntegrandın Geometrik Anlamı . . . 100
5.4 Yüzey Alanının Hesaplanması . . . 101
5.5 Alıştırmalar . . . 105

6 Üç Katlı İntegraller . . . 113
6.1 Kutularda Üç Katlı İntegral . . . 113
6.2 Genel Bölgelerde Üç Katlı İntegral . . . 116
6.3 İntegrasyon Sırasını Değiştirmek . . . 123
6.4 Hacim . . . 125
6.5 Kütle, Momentler ve Kütle Merkezi . . . 126
6.6 Olasılık ve Ortalama Değer . . . 129
6.7 Alıştırmalar . . . 130

7 Silindirik Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller . . . 138
7.1 Silindirik Koordinatlar . . . 138
7.2 Koordinat Yüzeyleri . . . 140
7.3 Silindirik Koordinatlarda Üç Katlı İntegral . . . 142
7.4 Kütle Hesabı ve Dik Koordinatlardan Geçiş . . . 147
7.5 Alıştırmalar . . . 149

8 Küresel Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller . . . 156
8.1 Küresel Koordinatlar . . . 156
8.2 Sabit Koordinat Yüzeyleri . . . 159
8.3 Küresel Kama ve Hacmi . . . 160
8.4 Küresel Koordinatlarda Üç Katlı İntegral . . . 163
8.5 Alıştırmalar . . . 168

9 Çok Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme . . . 175
9.1 Düzlemde Dönüşümler . . . 175
9.2 Küçük Bir Dikdörtgenin Görüntüsü . . . 178
9.3 İki Katlı İntegralde Değişken Değiştirme . . . 179
9.4 Uygun Dönüşümü Seçmek . . . 183
9.5 Üç Katlı İntegralde Değişken Değiştirme . . . 186
9.6 Alıştırmalar . . . 189

10 Vektör Alanları . . . 195
10.1 Düzlemde ve Uzayda Vektör Alanları . . . 195
10.2 Vektör Alanlarını Çizmek . . . 196
10.3 Hız Alanları ve Akış Çizgileri . . . 199
10.4 Kuvvet Alanları . . . 202
10.5 Gradyan Alanları . . . 204

 CC BY-NC-SA 4.0

10.6 Konservatif Vektör Alanları . . . 206
10.7 Alıştırmalar . . . 207

11 Eğrisel İntegraller . . . 213
11.1 Yay Uzunluğuna Göre Eğrisel İntegral . . . 213
11.2 Perde Alanı Olarak Eğrisel İntegral . . . 216
11.3 Eğrisel İntegralin Hesabı . . . 216
11.4 Parçalı Düzgün Eğriler . . . 219
11.5 İnce Bir Telin Kütlesi ve Kütle Merkezi . . . 220
11.6 Koordinatlara Göre Eğrisel İntegraller . . . 221
11.7 Vektör Alanlarının Eğrisel İntegralleri ve İş . . . 225
11.8 Parametrizasyon ve Yön . . . 228
11.9 Alıştırmalar . . . 232

12 Eğrisel İntegraller için Temel Teorem . . . 240
12.1 Gradyan Alanlarının Eğrisel İntegrali . . . 240
12.2 Yoldan Bağımsızlık . . . 244
12.3 Yoldan Bağımsız Alanlar Konservatiftir . . . 246
12.4 Konservatiflik Ölçütü . . . 248
12.5 Potansiyel Fonksiyonun Bulunması . . . 253
12.6 Enerjinin Korunumu . . . 255
12.7 Alıştırmalar . . . 257

13 Green Teoremi . . . 263
13.1 Pozitif Yönlü Sınır Eğrisi . . . 263
13.2 Green Teoremi . . . 264
13.3 Eğrisel İntegrali İki Katlı İntegralle Hesaplamak . . . 267
13.4 Green Teoremiyle Alan Hesabı . . . 269
13.5 Green Teoreminin Genişletilmesi . . . 270
13.6 Konservatiflik Ölçütüne Dönüş . . . 275
13.7 Alıştırmalar . . . 275

14 Rotasyonel ve Diverjans . . . 284
14.1 Rotasyonel . . . 284
14.2 Rotasyonel ve Konservatif Alanlar . . . 285
14.3 Rotasyonelin Fiziksel Anlamı . . . 289
14.4 Diverjans . . . 291
14.5 Diverjansın Fiziksel Anlamı . . . 293
14.6 Laplace Operatörü . . . 294
14.7 İşlemlerin Bileşkeleri . . . 295
14.8 Green Teoreminin Vektör Biçimleri . . . 295
14.9 Alıştırmalar . . . 299

 CC BY-NC-SA 4.0

15 Parametrik Yüzeyler ve Alanları . . . 306
15.1 Parametrik Yüzeyler . . . 306
15.2 Yüzeyleri Parametrelemek . . . 310
15.3 Dönel Yüzeyler . . . 313
15.4 Teğet Düzlemler . . . 314
15.5 Parametrik Yüzeyin Alanı . . . 317
15.6 Fonksiyon Grafiğinin Alanı . . . 321
15.7 Dönel Yüzeyin Alanı . . . 322
15.8 Alıştırmalar . . . 323

16 Yüzey İntegralleri . . . 330
16.1 Parametrik Yüzeyler Üzerinde Yüzey İntegrali . . . 330
16.2 Yüzey İntegralinin Hesaplanması . . . 331
16.3 Fonksiyon Grafikleri Üzerinde Yüzey İntegrali . . . 335
16.4 Yönlendirilmiş Yüzeyler . . . 338
16.5 Vektör Alanlarının Yüzey İntegrali: Akı . . . 341
16.6 Akının Fizikteki Yorumları . . . 347
16.7 Alıştırmalar . . . 348

17 Stokes Teoremi . . . 356
17.1 Sınır Eğrisinin Pozitif Yönü . . . 356
17.2 Stokes Teoremi . . . 357
17.3 Stokes Teoremiyle Eğrisel İntegral Hesabı . . . 361
17.4 Aynı Sınırı Paylaşan Yüzeyler . . . 363
17.5 Rotasyonelin Anlamı: Dolanım . . . 366
17.6 Rotasyoneli Sıfır Olan Alanlar . . . 368
17.7 Alıştırmalar . . . 369

18 Diverjans Teoremi . . . 378
18.1 Basit Katı Bölgeler . . . 378
18.2 Diverjans Teoremi . . . 379
18.3 Delikli Bölgeler ve Gauss Yasası . . . 385
18.4 Diverjansın Fiziksel Anlamı . . . 388
18.5 Temel Teoremlerin Ortak Yapısı . . . 390
18.6 Alıştırmalar . . . 391

 CC BY-NC-SA 4.0

Giriş

İntegral Calculus, tek değişkenli integrali iki ve üç boyuta taşır ve vektör analizinin büyük teoremlerine ulaşır. İlk kısım bir bölge üzerindeki integrali Riemann toplamlarıyla tanımlar, ardışık integrallerle hesaplar ve uygun koordinat sistemini seçerek (kutupsal, silindirik, küresel ya da genel bir dönüşüm) hesabı sadeleştirir; hacim, kütle, kütle merkezi, eylemsizlik momenti, olasılık ve yüzey alanı bu integrallerle bulunur. İkinci kısım vektör alanlarını, eğriler boyunca ve yüzeyler üzerinde integrali tanımlar; iş, dolanım ve akı kavramlarını Green, Stokes ve diverjans teoremleriyle birbirine bağlar.

> **i** Not
>
> Dersin dayandığı kısmi türev, gradyan, Jacobi matrisi ve zincir kuralı için Analiz 4, tek değişkenli integral için Analiz 2 notlarına bakılabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

1. Dikdörtgen Bölgelerde İki Katlı İntegraller

Tek değişkenli analizde bir eğrinin altındaki alanı bulma problemi bizi belirli integrale götürmüştü: aralığı küçük parçalara böler, her parçanın üstüne bir dikdörtgen diker, alanları toplar ve parçalar küçülürken limite geçeriz. Bu bölümde aynı fikri bir boyut yukarı taşıyoruz. Bir dikdörtgenin üstünde ve bir yüzeyin altında kalan cismin hacmini ararken dikdörtgeni küçük dikdörtgenlere böleceğiz, her birinin üstüne ince bir kutu dikeceğiz ve kutuların hacimlerini toplayacağız. Bu toplamların limiti **iki katlı integraldir**.
Tanımdan integral hesaplamak çoğu zaman çok zahmetlidir. Tek değişkende bu yükü Analizin Temel Teoremi kaldırmıştı. İki değişkende aynı rolü Fubini Teoremi oynar: iki katlı integral, art arda alınan iki tek katlı integrale eşittir. Bölümü, bir fonksiyonun bir dikdörtgen üzerindeki ortalama değerini tanımlayarak bitireceğiz.

1.1 Belirli İntegrali Hatırlayalım

İki katlı integrali kurarken izleyeceğimiz yol, tek değişkenli belirli integralin kuruluşunun aynısıdır; bu yüzden o kuruluşu kısaca hatırlayalım.
f, $[a,b]$ aralığında tanımlı olsun. Aralığı genişliği $\Delta x = (b-a)/n$ olan n eş $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığına böler ve her alt aralıktan bir x_i^* örnek noktası seçeriz. Bu seçimle kurulan

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

toplamı bir Riemann toplamıdır (bkz. Analiz 2). $n \to \infty$ iken bu toplamların limiti belirli integraldir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x.$$

$f(x) \geq 0$ ise Riemann toplamı, yüksekliği $f(x_i^*)$ ve genişliği Δx olan dikdörtgenlerin alanları toplamıdır; integral ise $y = f(x)$ eğrisinin altında, a ile b arasında kalan alandır. Şimdi aralığın yerine bir dikdörtgen, dikdörtgenlerin yerine de kutular koyacağız.

1.2 Hacim Problemi ve İki Katlı İntegral

Bir yüzeyin altındaki hacmi, kutuların hacimlerini toplayarak yaklaşık hesaplamakla işe başlıyoruz.
İki değişkenli bir f fonksiyonu kapalı

$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d\}$$

dikdörtgeninde tanımlı olsun ve önce $f(x,y) \geq 0$ olduğunu varsayalım. f'nin grafiği $z = f(x,y)$ denklemli bir yüzeydir. R'nin üstünde ve bu yüzeyin altında kalan

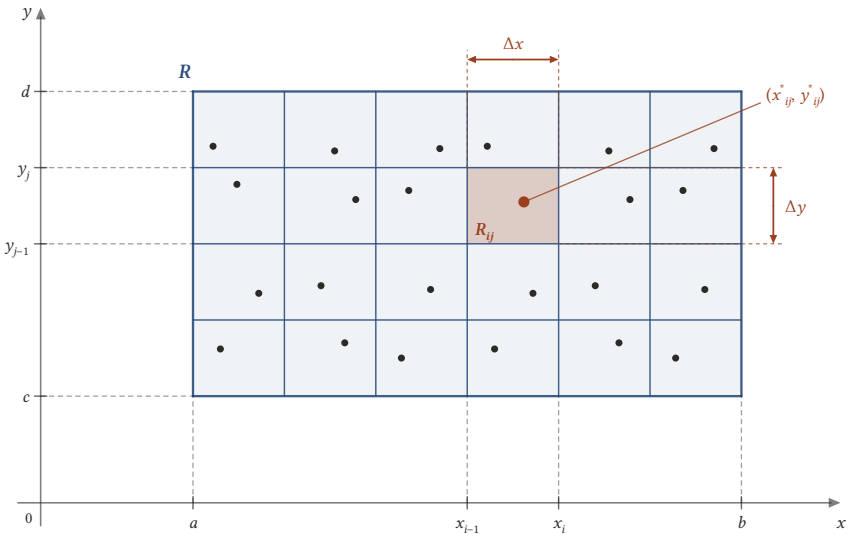
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq f(x,y),\, (x,y) \in R\}$$

cisminin hacmini bulmak istiyoruz.
İlk adım R'yi parçalamaktır. $[a,b]$ aralığını genişliği $\Delta x = (b-a)/m$ olan m eş $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığına, $[c,d]$ aralığını da genişliği $\Delta y = (d-c)/n$ olan n eş $[y_{j-1}, y_j]$ alt aralığına bölelim. Bölüm noktalarından eksenlere paralel doğrular çizince R,

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \qquad (1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n)$$

biçimindeki mn tane **alt dikdörtgene** ayrılır. Her alt dikdörtgenin alanı $\Delta A = \Delta x\,\Delta y$'dir.

CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.1: $R = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgeni $m = 6$, $n = 4$ için 24 alt dikdörtgene bölünmüştür. Turuncu R_{ij} alt dikdörtgeninin kenarları Δx ve Δy, alanı $\Delta A = \Delta x\,\Delta y$'dir; her alt dikdörtgenden bir örnek noktası (nokta) seçilir.

Her R_{ij} içinden bir (x^*_{ij}, y^*_{ij}) **örnek noktası** seçelim. S'nin R_{ij} üzerindeki ince parçasını, tabanı R_{ij} ve yüksekliği $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})$ olan bir kutuyla (sütunla) değiştirebiliriz. Bu kutunun hacmi taban alanı ile yüksekliğin çarpımıdır: $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\,\Delta A$. Bütün kutuların hacimlerini toplarsak S'nin hacmi için

$$V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\,\Delta A$$

yaklaşımını elde ederiz.

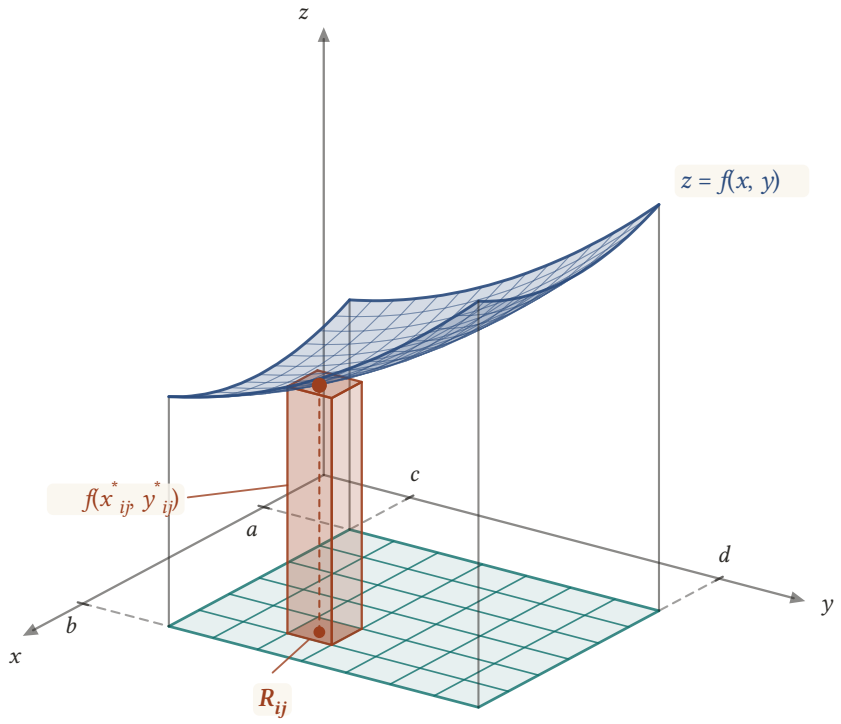
Tanım 1.1 (İki Katlı Riemann Toplamı). f, $R = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgeninde tanımlı olsun. R, yukarıdaki gibi alanı ΔA olan mn tane R_{ij} alt dikdörtgenine bölünsün ve her R_{ij} içinden bir (x^*_{ij}, y^*_{ij}) örnek noktası seçilsin.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})\,\Delta A$$

toplamına f'nin bu bölünüşe ve bu örnek noktalara karşılık gelen **iki katlı Riemann toplamı** (double Riemann sum) denir.

Yani her alt dikdörtgende f'yi seçtiğimiz noktada hesaplar, sonucu alt dikdörtgenin alanıyla çarpar ve elde edilen mn tane sayıyı toplarız. Tek değişkenli Riemann toplamıyla benzerlik açıktır: Δx uzunluğunun yerini ΔA alanı, tek toplamın yerini iki katlı toplam almıştır. f pozitifse iki katlı Riemann toplamı, aşağıdaki gibi kutuların hacimleri toplamıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.2: Tabanı R_{ij}, yüksekliği $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ olan kutu (turuncu), cismin R_{ij} üzerindeki ince parçasının yerini tutar; hacmi $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$'dır. Bütün alt dikdörtgenlerdeki kutuların hacimleri toplamı iki katlı Riemann toplamıdır.

Bölünüş inceldikçe kutular cismi daha iyi doldurur. Bu yüzden m ve n birlikte büyürken Riemann toplamlarının S'nin hacmine yaklaşmasını bekleriz. Bu tür limitler yalnız hacim hesabında değil, ilerideki bölümlerde kütle, moment ve olasılık hesaplarında da, üstelik f pozitif olmadığında da karşımıza çıkar. Bu yüzden limiti her fonksiyon için tanımlıyoruz.

Tanım 1.2 (Dikdörtgende İki Katlı İntegral). f, $R = [a,b] \times [c,d]$ dikdörtgeninde tanımlı olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan bir I sayısı varsa f'ye R üzerinde **integrallenebilir** (integrable) denir: her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N vardır ki $m, n > N$ olan her bölünüşte ve örnek noktalar R_{ij} içinden nasıl seçilirse seçilsin

$$\left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A - I \right| < \varepsilon$$

olur. Bu durumda I sayısına f'nin R üzerindeki **iki katlı integrali** (double integral) denir ve

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

yazılır.

Yani iki katlı integral, bölünüş inceldikçe iki katlı Riemann toplamlarının yaklaştığı sayıdır ve bu sayı örnek noktaların seçimine bağlı değildir. dA simgesi "küçük alan parçası" diye okunur; tek değişkendeki dx'in karşılığıdır.
Tanımla ilgili iki küçük not düşelim:

- Alt dikdörtgenlerin eşit boyutta olması şart değildir. Farklı boyutlu alt dikdörtgenler de kullanılabilir; yeter ki limitte hepsinin kenar uzunlukları 0'a gitsin. Eşit bölünüş yalnız hesapları sadeleştirir.
- Örnek noktayı her R_{ij}'nin sağ üst köşesi (x_i, y_j) olarak seçersek formül daha sade görünür:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i,y_j)\,\Delta A.$$

$f \geq 0$ olduğunda kutularla yaptığımız yaklaşımın limiti olan bu sayıyı cismin hacmi olarak tanımlarız.

Tanım 1.3 (Yüzeyin Altındaki Hacim). f, R üzerinde integrallenebilir ve her $(x,y) \in R$ için $f(x,y) \geq 0$ olsun. R dikdörtgeninin üstünde ve $z = f(x,y)$ yüzeyinin altında kalan cismin **hacmi**

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

sayısıdır.

Yani pozitif bir fonksiyonun iki katlı integrali, grafiğinin altındaki hacimdir. Bu tanım, tek değişkenli analizdeki dilim yöntemiyle (bkz. Analiz 2) bulunan hacimle uyumludur; bunu Fubini Teoremi'nin ardından göreceğiz.
Peki hangi fonksiyonlar integrallenebilir? Uygulamada karşılaşacağımız fonksiyonların hemen hepsi.

Teorem 1.1 (Hangi Fonksiyonlar İntegrallenebilir). *$R = [a,b]\times[c,d]$ olsun.*
(i) R üzerinde sürekli her fonksiyon R üzerinde integrallenebilir.
(ii) Daha genel olarak, R üzerinde sınırlı olan (yani her $(x,y) \in R$ için $\mid f(x,y) \mid \leq M$ olacak biçimde bir M sabiti bulunan) ve sonlu sayıda düzgün eğri dışında sürekli olan her f fonksiyonu R üzerinde integrallenebilir.

> ***İspatın fikri.***
> *(i) Kapalı ve sınırlı R üzerinde sürekli olan f düzgün süreklidir (bkz. Analiz 4). Buna göre her $\varepsilon > 0$ için alt dikdörtgenler yeterince küçük seçildiğinde f'nin her R_{ij} içindeki değerleri birbirinden ε'dan az farklıdır. Aynı bölünüşte iki farklı örnek nokta seçimiyle kurulan iki Riemann toplamının farkı bu yüzden en çok*
>
> $$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon\,\Delta A = \varepsilon\,(b-a)(d-c)$$
>
> *olur. İki farklı ince bölünüşün toplamları ise ikisinin ortak inceltmesine (bütün bölüm noktalarını birlikte kullanan bölünüşe) ait bir toplamla karşılaştırılır ve onlar da birbirine yakın çıkar. Bölünüş inceldikçe bütün Riemann toplamları birbirine yaklaştığından ortak bir limitleri vardır.*
> *(ii) Önce her süreksizlik eğrisinin, toplam alanı istendiği kadar küçük olan karelerle örtülebildiğini görelim. Eğri, türevi sürekli olan bir $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, $\alpha \leq t \leq \beta$ parametrizasyonuyla verilsin. x' ve y' kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olduklarından sınırlıdır: bir L sabiti için her t'de $\mid x'(t) \mid \leq L$ ve $\mid y'(t) \mid \leq L$ olur. Ortalama Değer Teoremi'nden (bkz. Analiz 2) $\mid x(t)-x(s) \mid \leq L \mid t-s \mid$ ve $\mid y(t)-y(s) \mid \leq L \mid t-s \mid$ elde edilir. $[\alpha,\beta]$ aralığını k eş parçaya bölelim. Her parçada $\mid t-s \mid \leq (\beta-\alpha)/k$ olduğundan eğrinin o parçası, kenarı $L(\beta-\alpha)/k$ olan bir karenin içinde kalır. Bu k karenin toplam alanı*
>
> $$k\left(\frac{L(\beta-\alpha)}{k}\right)^2 = \frac{L^2(\beta-\alpha)^2}{k}$$
>
> *olur ve k büyüdükçe 0'a gider. Bölünüş yeterince ince seçildiğinde bu karelere değen alt dikdörtgenlerin toplam alanı da istendiği kadar küçük olur. Bu dikdörtgenlerdeki katkı en çok $2M$ ile bu küçük alanın çarpımı kadar değişebilir, geri kalan dikdörtgenlerde ise (i)'deki akıl yürütme işler.*
> *"Birbirine yaklaşan toplamların ortak bir limiti vardır" adımı ise gerçel sayıların tamlığına dayanan Cauchy ölçütünü gerektirir; bu adımın ayrıntısı ileri analizin konusudur.* ■

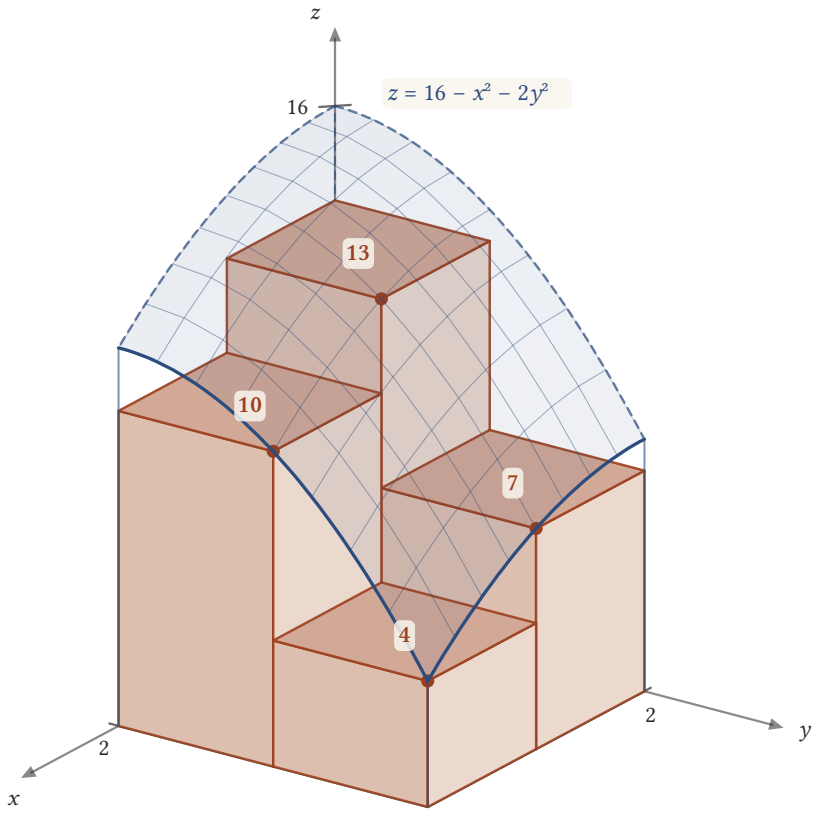
Örnek 1.1 (Dört Kutuyla Hacim Tahmini). $R = [0,2]\times[0,2]$ karesinin üstünde ve $z = 16 - x^2 - 2y^2$ eliptik paraboloidinin altında kalan cismin hacmini tahmin ediniz. Bunun için R'yi dört eş kareye bölünüz ve her karenin sağ üst köşesini örnek nokta olarak alınız.

> **Çözüm.**
> R'yi dört eş kareye bölmek, $m = n = 2$ almak demektir. O zaman $\Delta x = \Delta y = 1$ ve her karenin alanı $\Delta A = 1$'dir. Karelerin sağ üst köşeleri $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$ ve $(2,2)$ noktalarıdır. $f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} V &\approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\,\Delta A \\ &= f(1,1)\,\Delta A + f(1,2)\,\Delta A + f(2,1)\,\Delta A + f(2,2)\,\Delta A \\ &= 13 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 10 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 34 \end{aligned}$$

bulunur. Bu sayı, aşağıda paraboloidin altına çizilen dört kutunun toplam hacmidir.



Şekil 1.3: $z = 16 - x^2 - 2y^2$ paraboloidinin altına dikilen dört kutu (düşey eksen küçültülmüş ölçekte). Yükseklikler karelerin sağ üst köşelerindeki değerlerdir: 13, 7, 10 ve 4. Kutuların toplam hacmi 34'tür.

■

Kare sayısını artırdıkça tahminler iyileşir. Aynı yöntemle (sağ üst köşeler) elde edilen değerler şunlardır:

$m = n$	2	4	8	16
Kare sayısı	4	16	64	256
Tahmin	34	41,5	44,875	46,46875

Cismin gerçek hacmi 48'dir; bunu Örnek 1.8 içinde Fubini Teoremi'yle hesaplayacağız. $x, y \geq 0$ iken f hem x hem y arttıkça azaldığından, her karenin sağ üst köşesi f'nin o karedeki en küçük değerini verir. Bu yüzden bütün kutular cismin içinde kalır ve tahminler gerçek değere alttan yaklaşır.

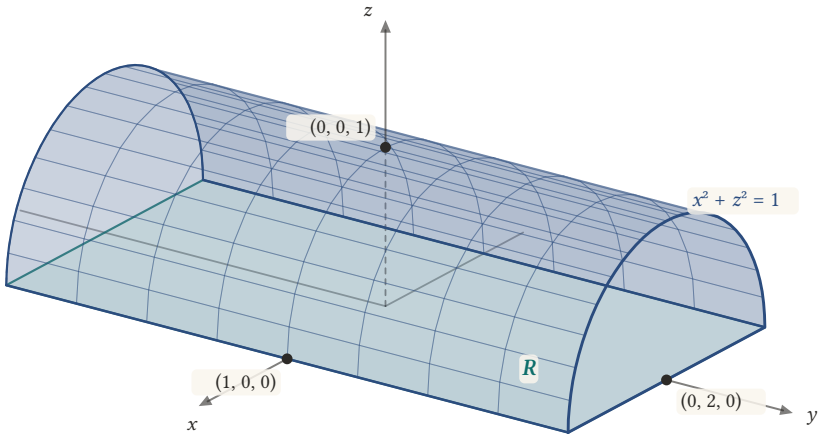
Örnek 1.2 (Hacim Olarak Yorumlanan Bir İntegral). $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ olmak üzere

$$\iint_R \sqrt{1 - x^2}\, dA$$

integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Bu integrali tanımdan, yani Riemann toplamlarının limiti olarak hesaplamak çok zordur. Ama $\sqrt{1-x^2} \geq 0$ olduğundan integrali bir hacim olarak yorumlayabiliriz (Tanım 1.3).
$z = \sqrt{1-x^2}$ ise $z \geq 0$ ve $x^2 + z^2 = 1$'dir. Bu denklem y içermediğinden uzayda ekseni y ekseni olan, yarıçapı 1 olan dairesel bir silindiri gösterir; $z \geq 0$ koşulu da silindirin üst yarısını seçer. Demek ki integral, bu yarım silindirin altında ve R dikdörtgeninin üstünde kalan S cisminin hacmidir.



Şekil 1.4: $z = \sqrt{(1 - x^2)}$ yüzeyi, ekseni y ekseni ve yarıçapı 1 olan silindirin üst yarısıdır. $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ üzerindeki cismin her kesiti alanı $\pi/2$ olan bir yarım dairedir ve cismin uzunluğu 4'tür.

S, y eksenine dik her düzlemle aynı kesiti veren bir cisimdir: kesit, yarıçapı 1 olan bir yarım dairedir. Cismin y yönündeki uzunluğu $2 - (-2) = 4$ olduğundan hacmi kesit alanı ile uzunluğun çarpımıdır:

$$\iint_R \sqrt{1-x^2}\, dA = \frac{1}{2}\,\pi\,(1)^2 \cdot 4 = 2\pi.$$

■

1.3 Temel Özellikler

Riemann toplamları toplamaya ve sabitle çarpmaya uyar; bu uyum limite de taşınır ve integral hesabında sürekli kullanacağımız şu kuralları verir.

Önerme 1.1 (Lineerlik ve Karşılaştırma). *f ve g, $R = [a, b] \times [c, d]$ üzerinde integrallenebilir ve c bir sabit olsun. O zaman $f + g$ ile cf de R üzerinde integrallenebilir ve*
(i) toplam kuralı:

$$\iint_R [\, f(x,y) + g(x,y) \,]\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA + \iint_R g(x,y)\, dA,$$

(ii) sabit çarpan kuralı:

$$\iint_R c\, f(x,y)\, dA = c \iint_R f(x,y)\, dA,$$

(iii) karşılaştırma: her $(x, y) \in R$ için $f(x, y) \geq g(x, y)$ ise

$$\iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
I_f ve I_g, sırasıyla f ile g'nin R üzerindeki integralleri olsun. Bir bölünüş ve örnek noktalar seçip f, g, $f+g$ ve cf için bu seçimle kurulan Riemann toplamlarını S_f, S_g, S_{f+g} ve S_{cf} ile gösterelim. Toplamlar terim terim kurulduğundan

$$S_{f+g} = S_f + S_g, \qquad S_{cf} = c\,S_f$$

olur.
(i) $\varepsilon > 0$ verilsin. f ve g integrallenebilir olduğundan öyle N_1 ve N_2 vardır ki $m, n > N_1$ iken $|\,S_f - I_f\,| < \varepsilon/2$, $m, n > N_2$ iken $|\,S_g - I_g\,| < \varepsilon/2$ olur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ alınırsa $m, n > N$ iken üçgen eşitsizliğiyle

$$|\,S_{f+g} - (I_f + I_g)\,| \le |\,S_f - I_f\,| + |\,S_g - I_g\,| < \varepsilon$$

bulunur. Bu, $f+g$'nin integrallenebilir olduğunu ve integralinin $I_f + I_g$ olduğunu gösterir.
(ii) $\varepsilon > 0$ verilsin ve $m, n > N$ iken $|\,S_f - I_f\,| < \varepsilon/(|\,c\,|+1)$ olacak biçimde N seçilsin. O zaman $m, n > N$ iken

$$|\,S_{cf} - c\,I_f\,| = |\,c\,|\,|\,S_f - I_f\,| < \frac{|\,c\,|\,\varepsilon}{|\,c\,|+1} < \varepsilon$$

olur; demek ki cf integrallenebilir ve integrali $c\,I_f$'dir.
(iii) $h = f - g = f + (-1)g$ olsun. (i) ve (ii) gereği h integrallenebilir ve integrali $I_h = I_f - I_g$'dir. Her $(x,y) \in R$ için $h(x,y) \ge 0$ olduğundan h'nin her Riemann toplamı $S_h \ge 0$'dır. $I_h < 0$ olsaydı $\varepsilon = -I_h > 0$ için, m, n yeterince büyükken $|\,S_h - I_h\,| < \varepsilon$, dolayısıyla

$$S_h < I_h + \varepsilon = I_h - I_h = 0$$

olurdu; bu $S_h \ge 0$ ile çelişir. Öyleyse $I_h \ge 0$, yani $I_f \ge I_g$'dir. ■

Karşılaştırma kuralının en sık kullanılan özel hâli şudur: R üzerinde $f \ge 0$ ise $\iint_R f\,dA \ge 0$ olur.

1.4 Orta Nokta Kuralı

Tek değişkenli integraller için kullanılan sayısal yöntemlerin (orta nokta, yamuk ve Simpson kuralları) iki katlı integrallerde de karşılıkları vardır. Burada yalnız en basitini, orta nokta kuralını ele alıyoruz.

Tanım 1.4 (İki Katlı İntegral için Orta Nokta Kuralı). $R = [a,b] \times [c,d]$ dikdörtgeni yukarıdaki gibi mn tane R_{ij} alt dikdörtgenine bölünsün.

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \qquad \bar{y}_j = \frac{y_{j-1} + y_j}{2}$$

sırasıyla $[x_{i-1}, x_i]$ ve $[y_{j-1}, y_j]$ aralıklarının orta noktaları olmak üzere

$$\iint_R f(x,y)\,dA \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\,\Delta A$$

yaklaşımına **orta nokta kuralı** (Midpoint Rule) denir.

Yani orta nokta kuralı, örnek noktası her R_{ij}'nin merkezi $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ olarak seçilmiş bir iki katlı Riemann toplamıdır. f integrallenebilirse bu toplam $m, n \to \infty$ iken integrale yaklaşır; pratikte küçük m ve n değerleriyle bile iyi sonuç verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Orta nokta kuralı dört adımda

1. $\Delta x = (b-a)/m$, $\Delta y = (d-c)/n$ ve $\Delta A = \Delta x\,\Delta y$ değerlerini bulun.
2. x yönündeki $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ ve y yönündeki $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n$ orta noktalarını yazın.
3. f'yi mn tane $(\bar{x}_i, \bar{y}_j)$ merkezinde hesaplayın.
4. Bu değerleri toplayıp ΔA ile çarpın.

Örnek 1.3 (Orta Nokta Kuralıyla Tahmin). $R = [0,2] \times [1,2]$ olmak üzere $\displaystyle\iint_R (x - 3y^2)\,dA$ integralini $m = n = 2$ alarak orta nokta kuralıyla tahmin ediniz.

Çözüm.
Adım 1. $\Delta x = (2-0)/2 = 1$, $\Delta y = (2-1)/2 = 1/2$ ve $\Delta A = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$'dir.
Adım 2. x yönündeki alt aralıklar $[0,1]$ ve $[1,2]$, y yönündekiler $[1, \frac{3}{2}]$ ve $[\frac{3}{2}, 2]$'dir. Orta noktalar

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{3}{2}, \quad \bar{y}_1 = \frac{5}{4}, \quad \bar{y}_2 = \frac{7}{4}$$

olur.
Adım 3. $f(x,y) = x - 3y^2$ için

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = \frac{8}{16} - \frac{75}{16} = -\frac{67}{16}, f\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right) = \frac{8}{16} - \frac{147}{16} = -\frac{139}{16},$$
$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right) = \frac{24}{16} - \frac{75}{16} = -\frac{51}{16}, f\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right) = \frac{24}{16} - \frac{147}{16} = -\frac{123}{16}$$

bulunur.
Adım 4. Toplayıp $\Delta A = \frac{1}{2}$ ile çarparsak

$$\begin{aligned}\iint_R (x - 3y^2)\,dA &\approx \left(-\frac{67}{16} - \frac{139}{16} - \frac{51}{16} - \frac{123}{16}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{380}{16} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{95}{8} = -11{,}875\end{aligned}$$

elde ederiz. ■

Her alt dikdörtgeni dört eş parçaya bölerek devam edersek orta nokta yaklaşımları şöyle olur:

Alt dikdörtgen sayısı	Orta nokta yaklaşımı
1	$-11{,}5$
4	$-11{,}875$
16	$-11{,}96875$
64	$-11{,}9921875$
256	$-11{,}998046875$
1024	$-11{,}99951171875$

İntegralin kesin değeri -12'dir (Örnek 1.6). Tabloda her satırda hatanın tam olarak dörtte birine indiğini görüyoruz: 0,5; 0,125; 0,03125; ...

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Her integral bir hacim değildir

Bir iki katlı integrali hacim olarak yorumlamak yalnız $f \geq 0$ iken doğrudur. Yukarıdaki $f(x,y) = x - 3y^2$ fonksiyonu R üzerinde negatif değerler alır; integralin -12 çıkması bu yüzdendir ve bir hacim değildir. Negatif değer alan fonksiyonların integralini hacimlerle nasıl yorumlayacağımızı Örnek 1.6 ve Örnek 1.7 sonrasında göreceğiz.

1.5 Ardışık İntegraller

Tek değişkenli integralleri tanımdan hesaplamak zordur; iki katlı integralleri tanımdan hesaplamak daha da zordur. Bu kısımda iki katlı integrali, art arda alınan iki tek katlı integrale çevirmenin zeminini hazırlıyoruz.
f, $R = [a,b] \times [c,d]$ üzerinde sürekli olsun. $\int_c^d f(x,y)\,dy$ yazdığımızda x'i sabit tutar ve $f(x,y)$'yi y'ye göre $y = c$'den $y = d$'ye kadar integralleriz. Bu işleme ***y*'ye göre kısmi integral** denir; kısmi türevde olduğu gibi diğer değişken sabit sayılır. Sonuç x'e bağlı bir sayıdır, yani x'in bir fonksiyonudur:

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Bu fonksiyonu x'e göre $x = a$'dan $x = b$'ye kadar integrallersek

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

elde ederiz. Sağdaki ifade, art arda alınan iki tek katlı integraldir.

Tanım 1.5 (Ardışık İntegral). f, $R = [a,b] \times [c,d]$ üzerinde tanımlı olsun ve aşağıda geçen tek katlı integraller var olsun.

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

ifadesine ve benzer biçimde

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

ifadesine **ardışık integral** (iterated integral) denir.

Yani $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$ yazdığımızda önce x'i sabit tutup y'ye göre c'den d'ye integral alırız; çıkan x fonksiyonunu sonra x'e göre a'dan b'ye integralleriz. İkinci ifadede sıra tersidir. Her iki durumda da **içten dışa** doğru çalışırız: en içteki diferansiyel (dy ya da dx) ilk integralin değişkenini, en içteki integral işaretinin sınırları da onun sınırlarını gösterir. Köşeli parantezler genellikle yazılmaz.

💡 Ardışık integral iki adımda

1. **İç integral.** Dıştaki değişkeni sabit sayıp içteki değişkene göre bir ilkel bulun ve içteki sınırları yerine koyun. Sonuç yalnız dıştaki değişkene bağlıdır.
2. **Dış integral.** Bu fonksiyonun dıştaki sınırlar arasında tek değişkenli integralini alın.

Örnek 1.4 (Önce y Değişkenine Göre Ardışık İntegral). $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx$ ardışık integralini hesaplayınız.

Çözüm.

İç integral. x'i sabit sayarsak x^2 bir sabit çarpandır ve

$$\int_1^2 x^2 y\,dy = \left[x^2\,\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2} = x^2\cdot\frac{4}{2} - x^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}\,x^2$$

olur. Yani yukarıdaki $A(x)$ fonksiyonu bu örnekte $A(x) = \frac{3}{2}x^2$'dir.
Dış integral. Bu fonksiyonu x'e göre 0'dan 3'e integrallersek

$$\int_0^3\int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^3 \frac{3}{2}\,x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{2}\right]_0^3 = \frac{27}{2}$$

bulunur. ■

Örnek 1.5 (Önce x Değişkenine Göre Ardışık İntegral). $\displaystyle\int_1^2\int_0^3 x^2 y\,dx\,dy$ ardışık integralini hesaplayınız.

Çözüm.
İç integral. Bu kez y'yi sabit sayarız; y bir sabit çarpandır:

$$\int_0^3 x^2 y\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\,y\right]_{x=0}^{x=3} = \frac{27}{3}\,y - 0 = 9y.$$

Dış integral.

$$\int_1^2\int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 9y\,dy = \left[\frac{9y^2}{2}\right]_1^2 = 18 - \frac{9}{2} = \frac{27}{2}.$$

■

İki örnekte integral sırası farklı olduğu hâlde aynı sonucu bulduk. Bu bir rastlantı değildir: bir sonraki teorem, sürekli fonksiyonlarda iki ardışık integralin her zaman eşit olduğunu, üstelik ikisinin de iki katlı integrale eşit olduğunu söyler.

1.6 Fubini Teoremi

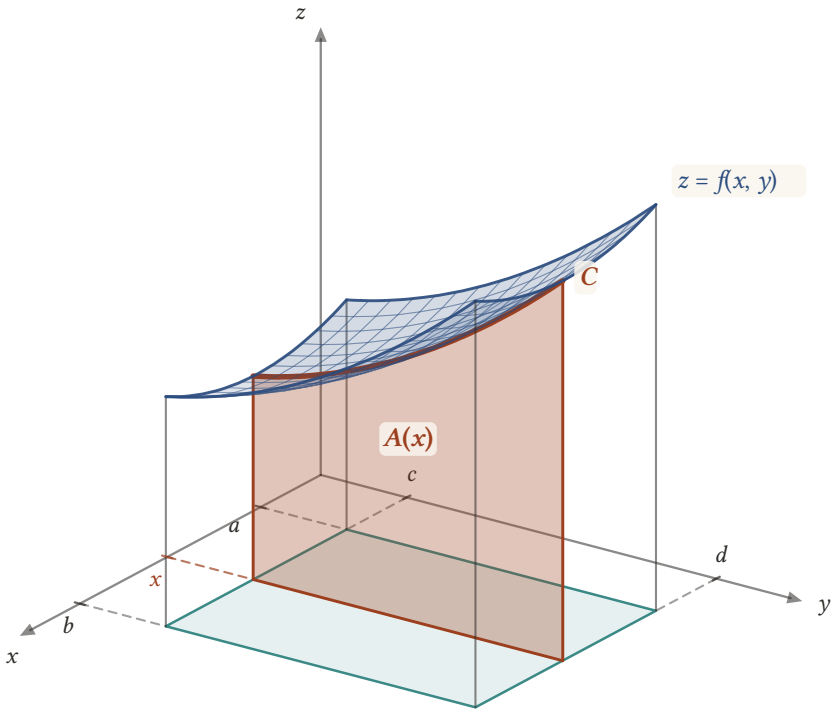
Ardışık integrallerin iki katlı integrale eşit olduğunu söyleyen Fubini Teoremi, iki katlı integral hesabının temel aracıdır. Önce bunun neden doğru olması gerektiğini hacim üzerinden görelim.
$f \geq 0$ ise $\iint_R f(x,y)\,dA$ integrali, R'nin üstünde ve $z = f(x,y)$ yüzeyinin altında kalan S cisminin hacmidir. Öte yandan dilim yöntemine göre bu hacim

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

ile de hesaplanır; burada $A(x)$, S'nin x noktasından geçen ve x eksenine dik düzlemle kesitinin alanıdır. x sabitken bu kesit, $c \leq y \leq d$ aralığında $z = f(x,y)$ eğrisinin altında kalan bölgedir. Bu bölgenin alanı tam da y'ye göre kısmi integraldir:

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.5: Cismin x noktasından geçen ve x eksenine dik düzlemle kesiti (turuncu), $c \le y \le d$ aralığında C: $z = f(x, y)$ eğrisinin altında kalan bölgedir. Alanı $A(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy$ olduğundan hacim $\int_a^b A(x)\, dx$ ardışık integraline eşittir.

Böylece

$$\iint_R f(x,y)\,dA = V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

olmalıdır. Cismi y eksenine dik düzlemlerle dilimlersek aynı akıl yürütme diğer sırayı verir. Teoremin kesin ifadesi ve ispatı şöyledir.

Teorem 1.2 (Fubini Teoremi). *f, $R = [a,b] \times [c,d]$ dikdörtgeninde sürekli olsun. O zaman*

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dA &= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy\end{aligned}$$

olur.

> ***İspat.***
> *İlk eşitliği gösterelim; ikincisi x ile y'nin rolleri değiştirilerek aynı biçimde gösterilir.*
> ***Adım 1: İfadeler anlamlıdır.*** *f sürekli olduğundan Teorem 1.1 gereği iki katlı integral vardır. Her sabit x için $y \mapsto f(x,y)$ sürekli olduğundan iç integral vardır. Ayrıca $c \le \gamma < \delta \le d$ olmak üzere*
>
> $$F(x) = \int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy$$
>
> *biçimindeki her fonksiyon $[a,b]$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 3), bu yüzden dış integraller de vardır.*
> ***Adım 2: Ardışık integrali parçalara ayırmak.*** *m ve n'yi sabitleyip R'yi R_{ij} alt dikdörtgenlerine bölelim ve*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$I_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy\,dx$$

diyelim. Tek değişkenli integral aralıklara göre toplamsal olduğundan, önce iç integrali $[c,d]$'nin alt aralıklarına, sonra dış integrali $[a,b]$'nin alt aralıklarına bölerek

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} I_{ij}$$

buluruz.
Adım 3: Her parçayı sıkıştırmak. *R_{ij} kapalı ve sınırlı olduğundan sürekli f burada bir en küçük m_{ij} ve bir en büyük M_{ij} değeri alır (bkz. Analiz 4). $x \in [x_{i-1}, x_i]$ sabitken her $y \in [y_{j-1}, y_j]$ için $m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij}$ olduğundan*

$$m_{ij}\,\Delta y \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \le M_{ij}\,\Delta y$$

olur. Bunu x'e göre $[x_{i-1}, x_i]$ üzerinde integrallersek

$$m_{ij}\,\Delta A \le I_{ij} \le M_{ij}\,\Delta A$$

elde ederiz.
Adım 4: Uygun örnek noktası. *Adım 3'e göre $I_{ij}/\Delta A$ sayısı m_{ij} ile M_{ij} arasındadır. f, m_{ij} değerini R_{ij}'nin bir P noktasında, M_{ij} değerini bir Q noktasında alır. P'yi Q'ya birleştiren doğru parçası R_{ij} içinde kalır ve*

$$g(t) = f\,\big(\,P + t(Q-P)\,\big), \qquad 0 \le t \le 1$$

fonksiyonu süreklidir; $g(0) = m_{ij}$ ve $g(1) = M_{ij}$'dir. Ara Değer Teoremi'ne (bkz. Analiz 1) göre $g(t) = I_{ij}/\Delta A$ olan bir t vardır. $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) = P + t(Q-P)$ dersek bu nokta R_{ij} içindedir ve

$$I_{ij} = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

olur.
Adım 5: Limite geçmek. *Adım 2 ve Adım 4'ü birleştirirsek her m ve n için*

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

buluruz. Sağ taraf bir iki katlı Riemann toplamıdır. f integrallenebilir olduğundan $m, n \to \infty$ iken bu toplamlar, örnek noktalar nasıl seçilmiş olursa olsun $\iint_R f(x,y)\,dA$'ya yaklaşır. Sol taraf ise m ve n'ye bağlı değildir. O hâlde iki taraf eşittir:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \iint_R f(x,y)\,dA.$$

■

Fubini Teoremi daha genel koşullarda da geçerlidir: f, R üzerinde sınırlıysa, yalnız sonlu sayıda düzgün eğri üzerinde süreksizse ve ardışık integraller varsa yine

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

olur. Bu genel hâlin ispatı ileri analiz gerektirir. Teorem, adını 1907'de çok genel bir biçimini ispatlayan İtalyan matematikçi Guido Fubini'den (1879–1943) alır; sürekli fonksiyonlar için olan hâli ise bundan neredeyse bir yüzyıl önce Cauchy tarafından biliniyordu.

 CC BY-NC-SA 4.0

İki ardışık integralin birbirine eşitliği, parametreye bağlı integraller yardımıyla ayrıca da gösterilebilir (bkz. Analiz 3). Bu eşitlik, karışık kısmi türevlerin eşitliğini söyleyen Clairaut Teoremi'ni (bkz. Analiz 4) hatırlatır: orada türev alma sırası, burada integral alma sırası önemsizdir. Fubini Teoremi bunun da ötesinde ardışık integralin iki katlı integrale eşit olduğunu söyler. Ayrıca $f \geq 0$ için Tanım 1.3 ile tanımladığımız hacmin dilim yönteminin verdiği $\int_a^b A(x)\,dx$ hacmiyle aynı olduğunu da göstermiş olduk.

Örnek 1.6 (Fubini Teoremiyle İki Yoldan Hesap). $R = [0,2] \times [1,2]$ olmak üzere $\displaystyle\iint_R (x - 3y^2)\,dA$ integralini hesaplayınız. Bu integrali Örnek 1.3 içinde orta nokta kuralıyla tahmin etmiştik.

Çözüm.
$f(x,y) = x - 3y^2$ bir polinom olduğundan süreklidir; Fubini Teoremi'ni iki sırada da uygulayabiliriz.
Önce y'ye göre. İç integralde x sabittir:

$$\begin{aligned}\iint_R (x-3y^2)\,dA &= \int_0^2 \int_1^2 (x-3y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \Big[\, xy - y^3 \Big]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^2 \big[\, (2x-8) - (x-1) \,\big]\,dx = \int_0^2 (x-7)\,dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - 7x\right]_0^2 = 2 - 14 = -12.\end{aligned}$$

Önce x'e göre. Bu kez iç integralde y sabittir:

$$\begin{aligned}\iint_R (x-3y^2)\,dA &= \int_1^2 \int_0^2 (x-3y^2)\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - 3xy^2\right]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_1^2 (2 - 6y^2)\,dy = \Big[\, 2y - 2y^3 \Big]_1^2 \\ &= (4-16) - (2-2) = -12.\end{aligned}$$

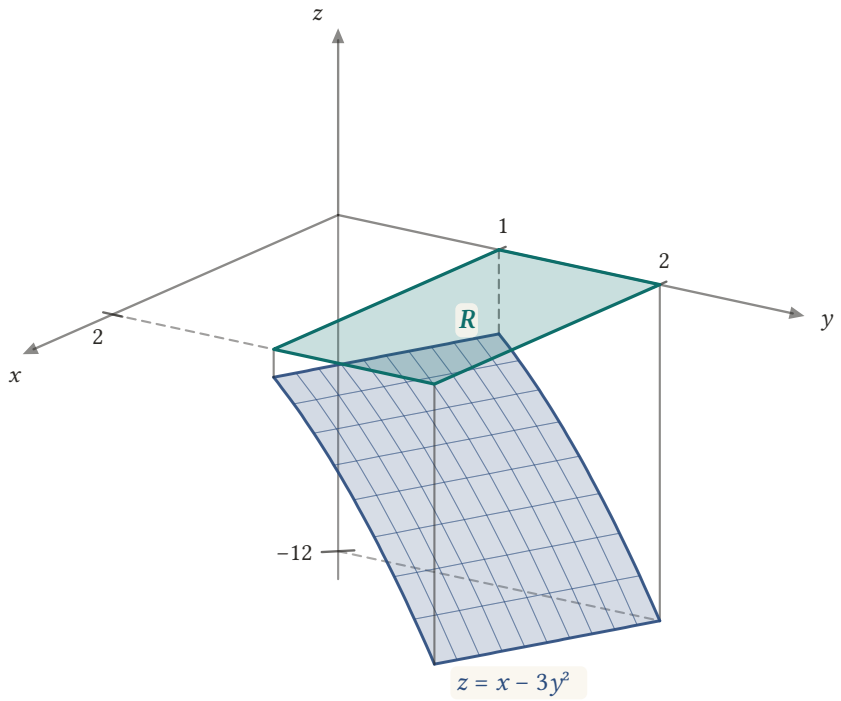
İki yol da aynı sonucu verir: $\iint_R (x-3y^2)\,dA = -12$. ■

Sonucun negatif çıkması bir hata değildir. R üzerinde $x \leq 2$ ve $y \geq 1$ olduğundan $x - 3y^2 \leq 2 - 3 = -1 < 0$'dır; yani f'nin grafiği tümüyle xy-düzleminin altındadır. Bu durumda $-f \geq 0$ olur ve Önerme 1.1 gereği

$$\iint_R f(x,y)\,dA = -\iint_R \big[\, -f(x,y) \,\big]\,dA$$

olur. Sağdaki integral, R'nin altında ve grafiğin üstünde kalan cismin hacmidir. Demek ki negatif bir fonksiyonun integrali, grafik ile R arasındaki hacmin ters işaretlisidir; burada bu hacim 12'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.6: $R = [0, 2] \times [1, 2]$ üzerinde $z = x - 3y^2$ yüzeyi xy-düzleminin tümüyle altındadır (düşey eksen küçültülmüş ölçekte). R ile yüzey arasındaki cismin hacmi 12'dir; integral bunun ters işaretlisi olan −12'dir.

Örnek 1.7 (İntegral Sırasının Seçimi). $R = [1, 2] \times [0, \pi]$ olmak üzere $\displaystyle\iint_R y \sin(xy)\, dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
İntegrand süreklidir. Önce x'e göre integral alırsak iç integralde y sabittir. x'e göre türev alındığında

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\cos(xy) \right] = y \sin(xy)$$

olduğundan $-\cos(xy)$, iç integrandın x'e göre bir ilkelidir. Buna göre

$$\begin{aligned}\iint_R y \sin(xy)\, dA &= \int_0^{\pi} \int_1^2 y \sin(xy)\, dx\, dy = \int_0^{\pi} \Big[-\cos(xy) \Big]_{x=1}^{x=2} dy \\ &= \int_0^{\pi} \left(-\cos 2y + \cos y \right) dy = \left[-\frac{1}{2} \sin 2y + \sin y \right]_0^{\pi} \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

bulunur. ■

Bu örnekteki $f(x, y) = y \sin(xy)$ hem pozitif hem negatif değerler alır. Böyle bir fonksiyonun integrali iki hacmin farkıdır:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = V_1 - V_2.$$

Burada V_1, R'nin üstünde ve grafiğin altında kalan hacim (f'nin pozitif olduğu yerlerden gelir), V_2 ise R'nin altında ve grafiğin üstünde kalan hacimdir (f'nin negatif olduğu yerlerden gelir). İntegralin 0 çıkması, bu örnekte bu iki hacmin eşit olduğunu söyler.

 CC BY-NC-SA 4.0

> ⚠ İntegral sırasını akıllıca seçin
>
> Aynı integrali önce y'ye göre alarak, yani $\int_1^2 \int_0^\pi y\sin(xy)\,dy\,dx$ biçiminde hesaplamaya kalksaydık iç integral için kısmi integrasyon, dış integral için de bir kez daha kısmi integrasyon gerekirdi. Fubini Teoremi iki sıranın aynı sonucu verdiğini güvenceye alır; bu yüzden hesaba başlamadan önce hangi sıranın daha kolay integraller verdiğine bakmak gerekir.

Örnek 1.8 (Eliptik Paraboloidin Altındaki Hacim). $x^2 + 2y^2 + z = 16$ eliptik paraboloidi, $x = 2$ ve $y = 2$ düzlemleri ve üç koordinat düzlemiyle sınırlanan S cisminin hacmini bulunuz.

Çözüm.
Paraboloidin denklemi $z = 16 - x^2 - 2y^2$ biçiminde yazılabilir. Koordinat düzlemleri ile $x = 2$ ve $y = 2$ düzlemleri, cismin tabanını $R = [0,2]\times[0,2]$ karesi olarak belirler. R üzerinde $x^2 \le 4$ ve $2y^2 \le 8$ olduğundan $16 - x^2 - 2y^2 \ge 4 > 0$'dır; yani S, R'nin üstünde ve paraboloidin altında kalan cisimdir. Bu, Örnek 1.1 içinde hacmini tahmin ettiğimiz cisimdir. Fubini Teoremi'yle (önce x'e göre):

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2 x\right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right) dy \\ &= \left[\frac{88}{3}\,y - \frac{4}{3}\,y^3\right]_0^2 = \frac{176}{3} - \frac{32}{3} = 48. \end{aligned}$$

■

1.7 Çarpım Biçimindeki Fonksiyonlar

İntegrand, yalnız x'e bağlı bir fonksiyonla yalnız y'ye bağlı bir fonksiyonun çarpımıysa iki katlı integral iki tek katlı integralin çarpımına dönüşür.

Önerme 1.2 (Çarpım Biçimindeki Fonksiyonun İntegrali). *g, $[a,b]$ üzerinde ve h, $[c,d]$ üzerinde sürekli olsun. $R = [a,b]\times[c,d]$ için*

$$\iint_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy$$

olur.

İspat.
$f(x,y) = g(x)\,h(y)$ iki sürekli fonksiyonun çarpımı olduğundan R üzerinde süreklidir. Fubini Teoremi'ni önce x'e göre integral alacak biçimde uygularsak

$$\iint_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_c^d \left[\int_a^b g(x)\,h(y)\,dx\right] dy$$

olur. İç integralde y sabit olduğundan $h(y)$ bir sabittir ve integralin dışına çıkar:

$$\int_a^b g(x)\,h(y)\,dx = h(y)\int_a^b g(x)\,dx = K\,h(y), \qquad K = \int_a^b g(x)\,dx.$$

K bir sayı olduğundan dış integralin de dışına çıkar:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_c^d K\,h(y)\,dy = K\int_c^d h(y)\,dy = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy.$$

■

Örnek 1.9 (Çarpım Biçiminde Bir İntegrand). $R = [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$ olmak üzere $\iint_R \sin x\cos y\,dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
İntegrand $g(x)=\sin x$ ile $h(y)=\cos y$'nin çarpımıdır. Önerme 1.2 gereği

$$\begin{aligned}\iint_R \sin x\cos y\,dA &= \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx\int_0^{\pi/2}\cos y\,dy\\ &= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2}\Big[\sin y\Big]_0^{\pi/2} = 1\cdot 1 = 1\end{aligned}$$

bulunur. R üzerinde $\sin x\cos y\geq 0$ olduğundan bu sayı, R'nin üstünde ve $z=\sin x\cos y$ yüzeyinin altında kalan cismin hacmidir. ■

1.8 Ortalama Değer

Tek değişkenli bir f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki ortalama değeri

$$f_{\text{ort}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

idi (bkz. Analiz 2). İki değişkende aralığın uzunluğunun yerini dikdörtgenin alanı alır.

Tanım 1.6 (Dikdörtgen Üzerinde Ortalama Değer). f, $R=[a,b]\times[c,d]$ üzerinde integrallenebilir ve $A(R)=(b-a)(d-c)$, R'nin alanı olsun.

$$f_{\text{ort}} = \frac{1}{A(R)}\iint_R f(x,y)\,dA$$

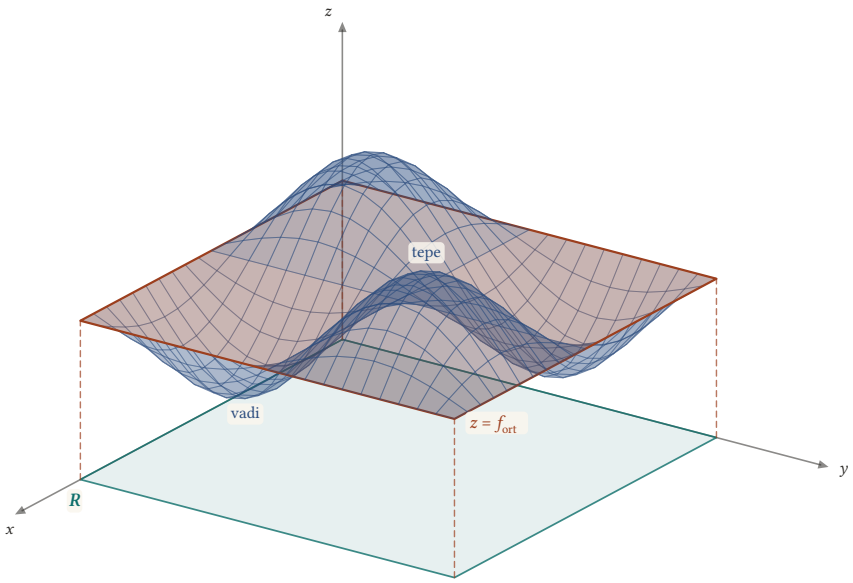
sayısına f'nin R üzerindeki **ortalama değeri** denir.

Yani ortalama değer, integrali alana bölmekle bulunur. $f\geq 0$ ise tanımdaki eşitliği

$$A(R)\cdot f_{\text{ort}} = \iint_R f(x,y)\,dA$$

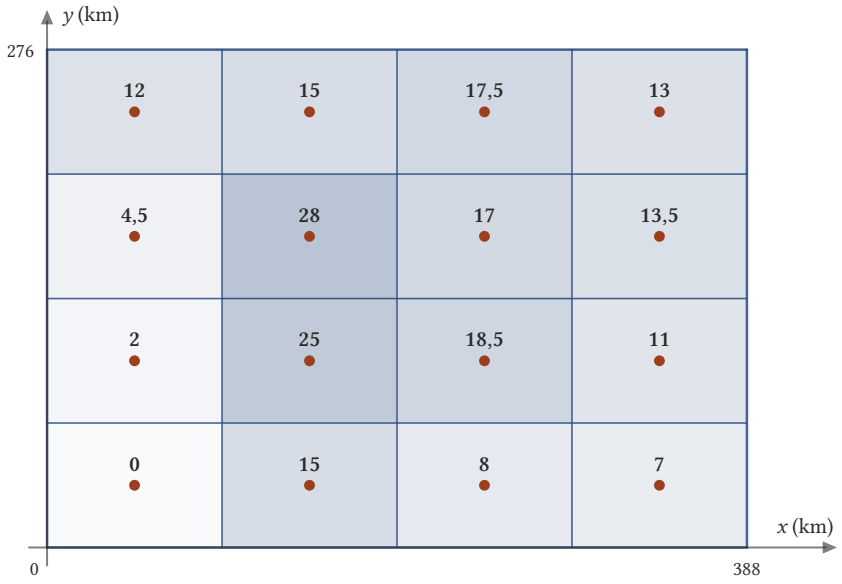
biçiminde okuyabiliriz: tabanı R ve yüksekliği f_{ort} olan kutunun hacmi, f'nin grafiğinin altındaki cismin hacmine eşittir. $z=f(x,y)$ dağlık bir araziyi gösteriyorsa, tepeleri f_{ort} yüksekliğinden kesip kesilen parçalarla vadileri doldurduğumuzda arazi tümüyle düzleşir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.7: Engebeli bir $z = f(x, y)$ yüzeyi ve $z = f_{ort}$ düzlemi (turuncu). Düzlemin üstünde kalan tepeler kesilip altında kalan vadilere doldurulursa yüzey tümüyle düzleşir; tabanı R, yüksekliği f_{ort} olan kutunun hacmi yüzeyin altındaki hacme eşittir.

Örnek 1.10 (Ortalama Kar Kalınlığı). Doğu–batı yönünde 388 km, güney–kuzey yönünde 276 km olan dikdörtgen biçimli bir bölgeye iki gün boyunca kar yağıyor. Bölge $4 \times 4 = 16$ eş dikdörtgene bölünüyor ve her parçanın merkezindeki kar kalınlığı (cm) ölçülüyor; ölçümler aşağıdaki şekildedir. Bölgedeki ortalama kar kalınlığını orta nokta kuralıyla tahmin ediniz.



Şekil 1.8: Bölge $4 \times 4 = 16$ eş dikdörtgene bölünmüştür; noktalar alt dikdörtgenlerin merkezleri, sayılar bu merkezlerde ölçülen kar kalınlığıdır (cm). Koyu renkli hücrelerde kar daha kalındır.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Başlangıç noktasını bölgenin güneybatı köşesine koyalım. x doğuya, y kuzeye doğru kilometre cinsinden ölçülsün ve $f(x,y)$, (x,y) noktasındaki kar kalınlığı olsun. Bölge $R=[0,388]\times[0,276]$ dikdörtgenidir ve $A(R)=388\cdot 276$'dır. Aradığımız sayı

$$f_{\text{ort}}=\frac{1}{A(R)}\iint_R f(x,y)\,dA$$

ortalamasıdır.
İntegrali $m=n=4$ ile orta nokta kuralıyla tahmin edelim. Her alt dikdörtgenin alanı

$$\Delta A=\frac{1}{16}\,(388)(276)=6693\ \text{km}^2$$

olur. Şekildeki 16 merkez değerini alt satırdan başlayarak toplarsak

$$\begin{aligned}&(0+15+8+7)+(2+25+18{,}5+11)\\&\quad+(4{,}5+28+17+13{,}5)+(12+15+17{,}5+13)\\&=30+56{,}5+63+57{,}5=207\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$\iint_R f(x,y)\,dA\approx\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}f(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\,\Delta A=6693\cdot 207$$

ve

$$f_{\text{ort}}\approx\frac{6693\cdot 207}{388\cdot 276}=\frac{207}{16}\approx 12{,}9$$

olur. Bölgeye ortalama olarak yaklaşık 13 cm kar düşmüştür. $\Delta A/A(R)=1/16$ olduğundan bu tahmin, 16 ölçümün aritmetik ortalamasından başka bir şey değildir. ■

1.9 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar Riemann toplamlarıyla tahminden başlayıp ardışık integral hesabına, hacim ve ortalama değer problemlerine ve Fubini Teoremi'nin koşullarına uzanır.

Alıştırma 1.1 (Sağ Alt Köşelerle Riemann Toplamı). $R=[0,4]\times[-1,2]$ olsun. $m=2$, $n=3$ alıp örnek noktaları alt dikdörtgenlerin sağ alt köşeleri olarak seçerek $\displaystyle\iint_R (1-xy^2)\,dA$ integralini bir Riemann toplamıyla tahmin ediniz.

Çözüm.
$\Delta x=(4-0)/2=2$, $\Delta y=(2-(-1))/3=1$ ve $\Delta A=2$'dir. x yönündeki alt aralıklar $[0,2]$, $[2,4]$; y yönündekiler $[-1,0]$, $[0,1]$, $[1,2]$'dir. R_{ij}'nin sağ alt köşesi (x_i,y_{j-1}) noktasıdır; yani $x\in\{2,4\}$ ve $y\in\{-1,0,1\}$ değerlerini kullanırız. $f(x,y)=1-xy^2$ için

$$\begin{aligned}&f(2,-1)=-1,\ f(2,0)=1,\ f(2,1)=-1,\\&f(4,-1)=-3,\ f(4,0)=1,\ f(4,1)=-3\end{aligned}$$

olur. Bu değerlerin toplamı -6'dır. Dolayısıyla

$$\iint_R (1-xy^2)\,dA\approx(-6)\cdot\Delta A=(-6)\cdot 2=-12$$

bulunur. ■

Alıştırma 1.2 (Ölçüm Tablosundan Hacim Tahmini). 20 m'ye 30 m'lik dikdörtgen biçimli bir su deposu suyla dolu. Deponun derinliği bir köşeden başlayarak 5 m aralıklarla ölçülmüş ve aşağıdaki tabloya

 CC BY-NC-SA 4.0

yazılmıştır (satırlar 20 m'lik kenar, sütunlar 30 m'lik kenar boyunca uzaklığı, hücreler metre cinsinden derinliği gösterir). Orta nokta kuralını 20 m'lik kenarda $m = 2$, 30 m'lik kenarda $n = 3$ parçayla kullanarak depodaki suyun hacmini tahmin ediniz.

	0	5	10	15	20	25	30
0	2	3	4	6	7	8	8
5	2	3	4	7	8	10	8
10	2	4	6	8	10	12	10
15	2	3	4	5	6	8	7
20	2	2	2	2	3	4	4

Çözüm.
x değişkeni 20 m'lik kenar boyunca, y değişkeni 30 m'lik kenar boyunca ölçülsün ve $f(x,y)$, (x,y) noktasındaki derinlik olsun. Suyun hacmi, $R = [0,20] \times [0,30]$ üzerinde $\iint_R f(x,y)\,dA$ integralidir. $m = 2$ için $\Delta x = 10$ ve orta noktalar $\bar{x}_1 = 5$, $\bar{x}_2 = 15$'tir. $n = 3$ için $\Delta y = 10$ ve orta noktalar $\bar{y}_1 = 5$, $\bar{y}_2 = 15$, $\bar{y}_3 = 25$'tir. $\Delta A = 10 \cdot 10 = 100$ m² olur. Merkezlerdeki derinlikleri tablodan okursak

$$f(5,5) = 3,\;\; f(5,15) = 7,\;\; f(5,25) = 10,$$
$$f(15,5) = 3, f(15,15) = 5, f(15,25) = 8$$

ve toplam 36 bulunur. Buna göre

$$V \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} f(\bar{x}_i,\bar{y}_j)\,\Delta A = 36 \cdot 100 = 3600\ \text{m}^3$$

olur. ■

Alıştırma 1.3 (Alt ve Üst Köşe Toplamlarını Sıralamak). V, $f(x,y) = \sqrt{52 - x^2 - y^2}$ grafiğinin altında ve $2 \le x \le 4$, $2 \le y \le 6$ dikdörtgeninin üstünde kalan cismin hacmi olsun. Dikdörtgen $x = 3$ ve $y = 4$ doğrularıyla dört alt dikdörtgene bölünüyor. L örnek noktaları sol alt köşeler, U de sağ üst köşeler alınarak kurulan Riemann toplamları olsun. V, L ve U sayılarını hesaplamadan küçükten büyüğe sıralayınız ve gerekçesini açıklayınız.

Çözüm.
Alt dikdörtgenler $[2,3]\times[2,4]$, $[2,3]\times[4,6]$, $[3,4]\times[2,4]$ ve $[3,4]\times[4,6]$'dır.
***f*'nin davranışı.** Dikdörtgen üzerinde $x \ge 2$ ve $y \ge 2$'dir. y sabitken x arttıkça x^2 artar, $52 - x^2 - y^2$ azalır ve karekök artan bir fonksiyon olduğundan f azalır. Aynı biçimde x sabitken f, y arttıkça azalır. Ayrıca $x^2 + y^2 \le 16 + 36 = 52$ olduğundan f her yerde tanımlı ve $f \ge 0$'dır.
Sonuç. Bir alt dikdörtgenin sol alt köşesi hem en küçük x'e hem en küçük y'ye sahiptir; bu yüzden f'nin o alt dikdörtgendeki en büyük değeri sol alt köşededir. Sol alt köşedeki yükseklikle dikilen kutu, cismin o alt dikdörtgen üzerindeki parçasını içine alır; bu yüzden $V \le L$'dir. Sağ üst köşe ise f'nin en küçük değerini verir; o yükseklikle dikilen kutu cismin içinde kalır ve $U \le V$ olur. f kesin azalan olduğundan her kutu ile cisim arasında hacmi pozitif bir boşluk kalır; böylece

$$U < V < L$$

bulunur.
Sıralamayı sayılarla da görebiliriz. Her alt dikdörtgenin alanı 2'dir ve

$$L = 2\left(\,2\sqrt{11} + 4\sqrt{2} + \sqrt{39} + 3\sqrt{3}\,\right) \approx 47{,}46,$$
$$U = 2\left(\,3\sqrt{3} + \sqrt{7} + 2\sqrt{5} + 0\,\right) \approx 24{,}63$$

olur; sayısal olarak $V \approx 39{,}30$'dur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 1.4 (Hacim Olarak Yorumlayarak Hesaplamak). $R = [0,1] \times [0,1]$ olmak üzere $\iint_R (4 - 2y)\, dA$ integralini, onu bir cismin hacmi olarak yorumlayarak hesaplayınız.

Çözüm.
R üzerinde $4 - 2y \geq 4 - 2 = 2 > 0$ olduğundan integral, birim karenin üstünde ve $z = 4 - 2y$ düzleminin altında kalan cismin hacmidir.
$z = 4 - 2y$ ifadesi x'e bağlı değildir. Bu yüzden cismin x eksenine dik her kesiti aynıdır: yz-düzleminde köşeleri $(y, z) = (0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$ ve $(0,4)$ olan bir yamuk. Yamuğun paralel kenarları 4 ve 2, yüksekliği 1'dir; alanı

$$\frac{4+2}{2} \cdot 1 = 3$$

olur. Cisim, bu yamuğun x yönünde 1 birim boyunca ötelenmesiyle oluşan bir prizmadır; hacmi kesit alanı ile uzunluğun çarpımıdır:

$$\iint_R (4 - 2y)\, dA = 3 \cdot 1 = 3.$$

Fubini Teoremi'yle kontrol edelim:

$$\int_0^1 \int_0^1 (4 - 2y)\, dy\, dx = \int_0^1 \Big[\, 4y - y^2 \Big]_0^1 dx = \int_0^1 3\, dx = 3.$$

■

Alıştırma 1.5 (Logaritma Veren Bir Ardışık İntegral). $\displaystyle\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\, dx$ ardışık integralini hesaplayınız.

Çözüm.
İç integral. x sabitken $\frac{x}{y}$'nin y'ye göre ilkeli $x \ln y$, $\frac{y}{x}$'in ilkeli $\frac{y^2}{2x}$'tir:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy &= \left[x \ln y + \frac{y^2}{2x} \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= \left(x \ln 2 + \frac{2}{x} \right) - \left(0 + \frac{1}{2x} \right) = x \ln 2 + \frac{3}{2x}.\end{aligned}$$

Dış integral.

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(x \ln 2 + \frac{3}{2x} \right) dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln 2 + \frac{3}{2} \ln x \right]_1^4 \\ &= 8 \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= 8 \ln 2 + 3 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{21}{2} \ln 2.\end{aligned}$$

■

Alıştırma 1.6 (Uygun Sırayı Seçerek Hesap). $R = [0,2] \times [0,3]$ olmak üzere $\iint_R y e^{-xy}\, dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

İntegrand süreklidir, Fubini Teoremi her iki sırayı da kullanmamıza izin verir. y çarpanı, üsteki $-xy$ ifadesinin x'e göre türevi olan $-y$'nin ters işaretlisidir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-e^{-xy}\right) = ye^{-xy}.$$

Bu yüzden önce x'e göre integral almak, ilkeli doğrudan verir. (y'ye göre önce integral alsaydık kısmi integrasyon gerekirdi.)

$$\begin{aligned}\iint_R ye^{-xy}\,dA &= \int_0^3\int_0^2 ye^{-xy}\,dx\,dy = \int_0^3 \Big[-e^{-xy}\Big]_{x=0}^{x=2} dy \\ &= \int_0^3 \left(1-e^{-2y}\right) dy = \left[y+\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^3 \\ &= \left(3+\frac{1}{2}e^{-6}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}+\frac{1}{2}e^{-6}.\end{aligned}$$

■

Alıştırma 1.7 (Kesit Alanlarıyla Hacim). S, $z = x^2\sqrt{y}$ yüzeyinin altında ve $R=[0,2]\times[1,4]$ dikdörtgeninin üstünde kalan cisim olsun. $0\le x\le 2$ için S'nin x eksenine dik ve x noktasından geçen düzlemle kesitinin alanı $A(x)$'i bulunuz ve hacmi $\int_0^2 A(x)\,dx$ olarak hesaplayınız.

Çözüm.
Kesit alanı. x sabitken kesit, $1\le y\le 4$ aralığında $z=x^2\sqrt{y}$ eğrisinin altında kalan bölgedir. Alanı, x^2 sabit çarpan olmak üzere

$$A(x) = \int_1^4 x^2\sqrt{y}\,dy = x^2\left[\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_1^4 = x^2\cdot\frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}x^2$$

olur. Örneğin $x=1$'deki kesitin alanı $A(1)=14/3$, $x=2$'deki kesitin alanı $A(2)=56/3$'tür.
Hacim.

$$V = \int_0^2 A(x)\,dx = \int_0^2 \frac{14}{3}x^2\,dx = \frac{14}{3}\cdot\frac{8}{3} = \frac{112}{9}.$$

Cismi y eksenine dik düzlemlerle dilimleseydik kesit alanı $A(y)=\sqrt{y}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{8}{3}\sqrt{y}$ olurdu ve $\int_1^4 \frac{8}{3}\sqrt{y}\,dy = \frac{8}{3}\cdot\frac{14}{3} = \frac{112}{9}$ ile aynı sonuca ulaşırdık; Fubini Teoremi'nin söylediği de budur. ■

Alıştırma 1.8 (Paraboloit ile Düzlem Arasındaki Cisim). $z = 2+x^2+(y-2)^2$ paraboloidi ile $z=1$, $x=1$, $x=-1$, $y=0$ ve $y=4$ düzlemlerinin sınırladığı cismin hacmini bulunuz.

Çözüm.
Cismi tanımak. $x=\pm 1$ ve $y=0$, $y=4$ düzlemleri cismin izdüşümünü $R=[-1,1]\times[0,4]$ dikdörtgeni olarak belirler. R üzerinde $2+x^2+(y-2)^2\ge 2>1$ olduğundan paraboloit her yerde $z=1$ düzleminin üstündedir. Cisim, altta $z=1$ düzlemi, üstte paraboloit ile sınırlıdır; (x,y) noktasının üstündeki yüksekliği

$$\left(2+x^2+(y-2)^2\right) - 1 = 1+x^2+(y-2)^2$$

olur. Cismin hacmi, paraboloidin altındaki hacimden tabanı R ve yüksekliği 1 olan kutunun hacminin çıkarılmasıyla bulunur; Önerme 1.1 gereği bu fark

$$V = \iint_R \left[\,1+x^2+(y-2)^2\,\right] dA$$

integralidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Hesap. Önce y'ye göre integral alalım:

$$\begin{aligned}\int_0^4 \left[\, 1 + x^2 + (y-2)^2 \,\right] dy \\ &= 4 + 4x^2 + \left[\frac{(y-2)^3}{3}\right]_0^4 \\ &= 4 + 4x^2 + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 4x^2 + \frac{28}{3}.\end{aligned}$$

Sonra x'e göre:

$$V = \int_{-1}^{1} \left(4x^2 + \frac{28}{3}\right) dx = \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{28}{3}\,x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3} + \frac{56}{3} = \frac{64}{3}.$$

■

Alıştırma 1.9 (Bir Dikdörtgende Ortalama Değer). $f(x,y) = x^2 y$ fonksiyonunun, köşeleri $(-1,0)$, $(-1,5)$, $(1,5)$ ve $(1,0)$ olan R dikdörtgeni üzerindeki ortalama değerini bulunuz.

Çözüm.
Köşelerden $R = [-1,1] \times [0,5]$ ve $A(R) = 2 \cdot 5 = 10$ olduğu görülür. İntegrand çarpım biçiminde olduğundan Önerme 1.2 ile

$$\iint_R x^2 y \, dA = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx \int_0^5 y \, dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{3}$$

bulunur. Ortalama değer

$$f_{\text{ort}} = \frac{1}{A(R)} \iint_R x^2 y \, dA = \frac{1}{10} \cdot \frac{25}{3} = \frac{5}{6}$$

olur. ■

Alıştırma 1.10 (Simetriyle Hesap). $R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ olmak üzere $\iint_R \left(\, 1 + x^2 \sin y + y^2 \sin x \,\right) dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Önerme 1.1 gereği integrali üç parçaya ayırabiliriz:

$$\iint_R 1 \, dA + \iint_R x^2 \sin y \, dA + \iint_R y^2 \sin x \, dA.$$

Birinci parça. Önerme 1.2 ile

$$\iint_R 1 \, dA = \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} dy = 2\pi \cdot 2\pi = 4\pi^2$$

olur; bu, R'nin alanıdır.
İkinci parça. Yine Önerme 1.2 ile

$$\iint_R x^2 \sin y \, dA = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx \int_{-\pi}^{\pi} \sin y \, dy = \frac{2\pi^3}{3} \cdot 0 = 0$$

olur; çünkü $\sin y$ tek fonksiyondur ve simetrik bir aralıkta integrali sıfırdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üçüncü parça. Aynı nedenle, bu kez $\sin x$ tek olduğundan

$$\iint_R y^2 \sin x \, dA = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \, dy = 0 \cdot \frac{2\pi^3}{3} = 0$$

olur.
Sonuç olarak

$$\iint_R \left(\, 1 + x^2 \sin y + y^2 \sin x \, \right) dA = 4\pi^2$$

bulunur. ■

Alıştırma 1.11 (Fubini Teoreminin Koşulu Neden Gerekli).

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$$

olsun. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx$ ve $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy$ ardışık integrallerini hesaplayınız. Sonuç Fubini Teoremi ile çelişir mi?

Çözüm.
Önce y'ye göre. $0 < x \leq 1$ sabit olsun. Payı $x - y = 2x - (x+y)$ diye yazarsak

$$f(x,y) = \frac{2x}{(x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2}$$

olur. y'ye göre türev alınarak doğrulanabileceği gibi bunun bir ilkeli $-\dfrac{x}{(x+y)^2} + \dfrac{1}{x+y}$'dir. Buna göre

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x,y)\, dy &= \left[-\frac{x}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= -\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

bulunur. ($x = 0$ için iç integral ıraksaktır; tek bir nokta dış integrali etkilemez.) Dış integral

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

olur.
Önce x'e göre. x ile y'nin yerini değiştirmek f'nin işaretini değiştirir: $f(y,x) = -f(x,y)$. Bu yüzden yukarıdaki hesap, harflerin rolleri değiştirilerek, $\int_0^1 f(x,y)\, dx = -\dfrac{1}{(y+1)^2}$ verir ve

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy = -\int_0^1 \frac{dy}{(y+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

bulunur.
Yorum. İki ardışık integral farklıdır, ama bu Fubini Teoremi ile çelişmez. Teorem f'nin kapalı $R = [0,1] \times [0,1]$ dikdörtgeninin her noktasında sürekli olmasını (genel hâlinde en azından sınırlı olmasını) ister. Buradaki f ise $(0,0)$ noktasında tanımlı bile değildir ve bu noktanın yakınında sınırsızdır: örneğin $f(x,0) = x/x^3 = 1/x^2$, $x \to 0^+$ iken sonsuza gider. Demek ki teoremin koşulu sağlanmıyor. Hatta f, R üzerinde integrallenebilir de değildir: sol alt köşedeki alt dikdörtgende örnek noktayı $(x,0)$ biçiminde ve x'i yeterince küçük seçerek Riemann toplamlarını istediğimiz kadar büyütebiliriz. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 1.12 (İntegralle Tanımlanan Fonksiyonun Karışık Türevleri). $f, [a,b]\times[c,d]$ üzerinde sürekli olsun. $a<x<b$ ve $c<y<d$ için

$$g(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(s,t)\,dt\,ds$$

tanımlansın. $g_{xy}=g_{yx}=f(x,y)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Buradaki $g_{xy}=(g_x)_y$, önce x'e sonra y'ye göre alınan karışık kısmi türevdir.
$\boldsymbol{g_{xy}}$**.** y'yi sabit tutalım ve $\varphi(s)=\int_c^y f(s,t)\,dt$ diyelim. f, $[a,b]\times[c,y]$ üzerinde sürekli olduğundan φ, $[a,b]$ üzerinde süreklidir (bkz. Analiz 3). $g(x,y)=\int_a^x\varphi(s)\,ds$ olduğundan, analizin ikinci temel teoremi (bkz. Analiz 2) gereği

$$g_x(x,y)=\varphi(x)=\int_c^y f(x,t)\,dt$$

olur. Şimdi x'i sabit tutalım. $t\mapsto f(x,t)$ sürekli olduğundan aynı teorem bu kez y'ye göre uygulanır:

$$g_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\int_c^y f(x,t)\,dt=f(x,y).$$

$\boldsymbol{g_{yx}}$**.** f, $[a,x]\times[c,y]$ dikdörtgeninde sürekli olduğundan Fubini Teoremi integral sırasını değiştirmemize izin verir:

$$g(x,y)=\int_c^y\int_a^x f(s,t)\,ds\,dt.$$

Yukarıdaki akıl yürütmeyi x ile y'nin rolleri değiştirilerek tekrarlarsak önce $g_y(x,y)=\int_a^x f(s,y)\,ds$, sonra $g_{yx}(x,y)=f(x,y)$ bulunur.
Böylece $g_{xy}=g_{yx}=f(x,y)$ olur. ■

Bu bölümde integral hep bir dikdörtgen üzerinde alındı. Uygulamada ise integrasyon bölgesi çoğu zaman bir daire, bir üçgen ya da iki eğri arasında kalan bir bölgedir. Bir sonraki bölümde iki katlı integrali böyle genel bölgelere genişletiyor ve ardışık integralin sınırlarının bu bölgelerde nasıl kurulduğunu görüyoruz: Genel Bölgelerde İki Katlı İntegraller.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Genel Bölgelerde İki Katlı İntegraller

Tek değişkenli belirli integralde integrasyon bölgesi her zaman bir aralıktır. İki katlı integrali ise şimdiye kadar yalnız dikdörtgenler üzerinde tanımladık (Dikdörtgen Bölgelerde İki Katlı İntegraller). Oysa karşımıza çıkan bölgelerin çoğu dikdörtgen değildir: iki parabol arasında kalan bir bölge, bir üçgen ya da bir disk gibi.
Fikir basittir: bölgeyi bir dikdörtgenin içine koyar, fonksiyonu bölgenin dışında sıfır alarak bütün dikdörtgene genişletiriz. Böylece yeni bir limit tanımına gerek kalmaz; dikdörtgendeki tanım ve Fubini Teoremi (Teorem 1.2) yeterli olur. Bölge iki eğri arasında kaldığında integral yine bir ardışık integrale dönüşür. Tek fark, iç integralin sınırlarının artık sabit sayılar değil, dış değişkenin fonksiyonları olmasıdır.

2.1 Genel Bir Bölgede İki Katlı İntegral

Önce dikdörtgen olmayan bir bölge üzerinde integralin ne demek olduğunu belirleyelim.
D düzlemde sınırlı bir bölge olsun, yani D'yi içine alan bir $R = [a,b] \times [c,d]$ dikdörtgeni bulunsun. D üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunu R'ye, D'nin dışında sıfır değerini vererek genişletelim:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \ \text{ ise,} \\ 0, & (x,y) \in R \ \text{ ve } \ (x,y) \notin D \ \text{ ise .} \end{cases} \tag{1}$$

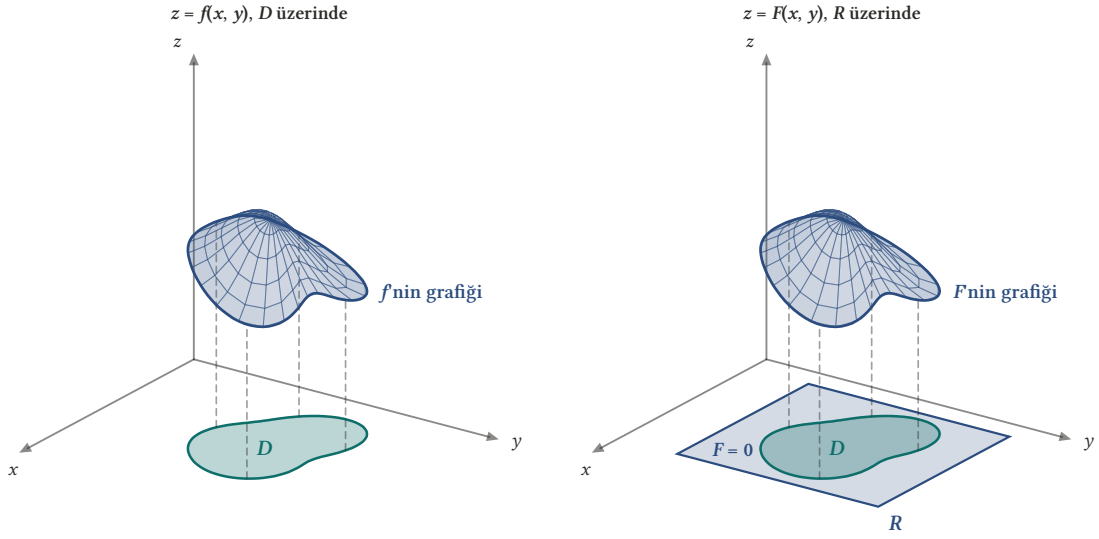
Tanım 2.1 (Genel Bir Bölgede İki Katlı İntegral). D sınırlı bir bölge, R onu içeren bir dikdörtgen ve F, (1) ile verilen fonksiyon olsun. F, R üzerinde integrallenebilir ise f fonksiyonunun D üzerindeki **iki katlı integrali**

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_R F(x,y)\,dA$$

ile tanımlanır.

Yani D üzerindeki integral, sıfırla genişletilmiş fonksiyonun dikdörtgen üzerindeki integralidir (Tanım 1.2). D'nin dışında $F = 0$ olduğundan bu noktalar integrale hiçbir katkı vermez. Bu yüzden D'yi içerdiği sürece hangi dikdörtgeni seçtiğimizin önemi yoktur: dikdörtgeni büyütmek, integrale yalnız F'nin sıfır olduğu parçalar ekler.
$f(x,y) \geq 0$ ise $\iint_D f(x,y)\,dA$, D'nin üstünde ve $z = f(x,y)$ grafiğinin altında kalan cismin hacmidir. Gerçekten F'nin grafiği, D üzerinde f'nin grafiğiyle aynıdır, R'nin geri kalanında ise taban düzlemine yapışıktır. İki grafiğin altında kalan hacim de bu yüzden aynıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.1: Solda f'nin D üzerindeki grafiği. Sağda D'yi içeren R dikdörtgeni ve F'nin grafiği: D üzerinde f ile aynı yüzey, R'nin geri kalanında taban düzlemi ($F = 0$). İki grafiğin altında kalan hacim aynıdır.

F, D'nin sınır noktalarında süreksiz olabilir: sınırın bir yanında f, öbür yanında 0 değerini alır. Dikdörtgenlerde, sınırlı ve yalnız sonlu sayıda düzgün eğri üzerinde süreksiz olan bir fonksiyonun integrallenebilir olduğunu gördük. f, kapalı ve sınırlı D bölgesinde sürekliyse sınırlıdır; D'nin sınırı da sonlu sayıda düzgün eğriden oluşuyorsa F, R üzerinde integrallenebilir ve $\iint_D f(x,y)\,dA$ vardır. Bu bölümde karşılaşacağımız bütün bölgelerin sınırı bu türdendir.

2.2 Birinci ve İkinci Tip Bölgeler

Tanım integralin var olduğunu söyler ama onu nasıl hesaplayacağımızı söylemez. Hesap için bölgeleri, sınırlarının biçimine göre iki türe ayırırız.

Tanım 2.2 (Birinci Tip Bölge). g_1 ve g_2, $[a,b]$ aralığında sürekli ve her $x \in [a,b]$ için $g_1(x) \le g_2(x)$ koşulunu sağlayan iki fonksiyon olsun.

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

biçiminde yazılabilen bir bölgeye **I. tip bölge** denir.

Yani I. tip bir bölge, $x = a$ ve $x = b$ düşey doğruları arasında, altta $y = g_1(x)$, üstte $y = g_2(x)$ grafiğiyle sınırlanır. Bölgeyi kesen her düşey doğru onu tek bir doğru parçası boyunca keser. g_1 ve g_2'nin tek bir formülle verilmesi gerekmez; sürekli oldukları sürece parçalı tanımlı da olabilirler.

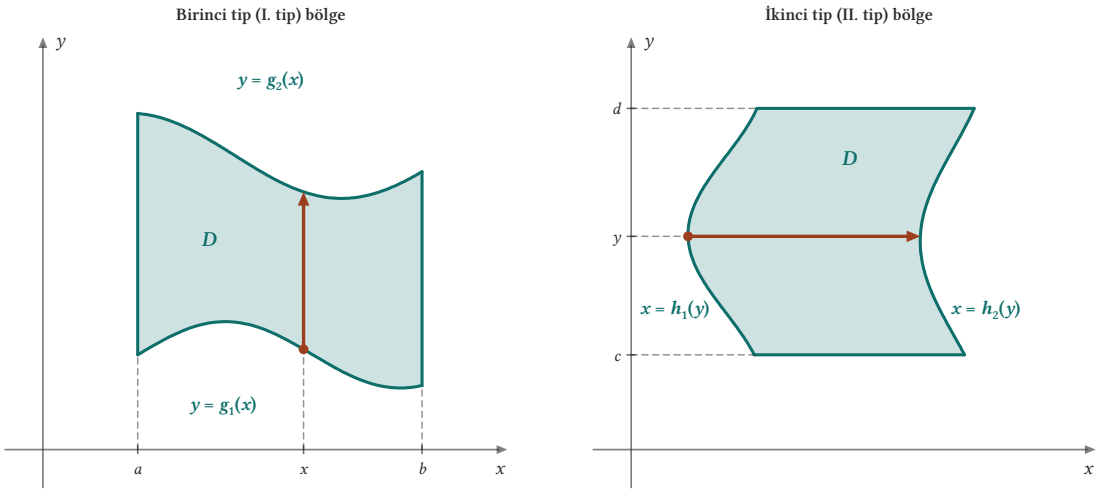
Tanım 2.3 (İkinci Tip Bölge). h_1 ve h_2, $[c,d]$ aralığında sürekli ve her $y \in [c,d]$ için $h_1(y) \le h_2(y)$ koşulunu sağlayan iki fonksiyon olsun.

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

biçiminde yazılabilen bir bölgeye **II. tip bölge** denir.

Yani II. tipte x ile y'nin rolleri yer değiştirir: bölge $y = c$ ve $y = d$ yatay doğruları arasında, solda $x = h_1(y)$, sağda $x = h_2(y)$ eğrisiyle sınırlanır ve her yatay doğru onu tek bir doğru parçası boyunca keser. Dikdörtgen, üçgen ve disk gibi pek çok bölge hem I. hem II. tiptir; ikisi de olmayan bölgeleri ise bölümün sonunda parçalara ayırarak inceleyeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.2: Solda I. tip bir bölge: alt ve üst kenarı x'in fonksiyonlarının grafikleridir. Düşey ok $y = g_1(x)$ eğrisinden girip $y = g_2(x)$ eğrisinden çıkar ve iç integralin sınırlarını verir. Sağda II. tip bir bölge: sol ve sağ kenarı y'nin fonksiyonlarıdır; yatay ok $x = h_1(y)$ eğrisinden $x = h_2(y)$ eğrisine gider.

2.3 İki Tip Bölgede Ardışık İntegral

Tanımı I. ve II. tip bölgelere uygulayınca iki katlı integral, dikdörtgenlerde gördüğümüz ardışık integrallere (Tanım 1.5) çok benzeyen bir biçim alır.

Teorem 2.1 (Birinci Tip Bölgede İki Katlı İntegral). *f, I. tip bir*

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b,\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

bölgesinde sürekli ise

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

olur.

İspat.
Adım 1: Bölge ve genişletme. *g_1 ve g_2, $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olduklarından sınırlıdır. Bu yüzden her $x \in [a, b]$ için $c \leq g_1(x)$ ve $g_2(x) \leq d$ olacak biçimde c, d sayıları seçebiliriz. $R = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgeni D'yi içerir; özellikle D sınırlıdır.*
D kapalıdır da. Terimleri D'de olan bir (x_k, y_k) dizisi (x, y)'ye yakınsasın. $a \leq x_k \leq b$ ve $g_1(x_k) \leq y_k \leq g_2(x_k)$ eşitsizliklerinde limite geçip g_1, g_2'nin sürekliliğini kullanırsak $a \leq x \leq b$ ve $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ buluruz. Yani $(x, y) \in D$'dir ve D kapalıdır (bkz. Analiz 4).
Kapalı ve sınırlı bir küme kompakttır (bkz. Analiz 4). Uç Değer Teoremi'ne (bkz. Analiz 4) göre sürekli f, D'de sınırlıdır. F, (1) ile verilen fonksiyon olsun. F de R üzerinde sınırlıdır ve tanım gereği

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA$$

olur.
Adım 2: Genişletilmiş fonksiyon integrallenebilir. *F yalnız D'nin sınırında, yani $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$ grafikleriyle $x = a$, $x = b$ doğru parçaları üzerinde süreksiz olabilir. Bu kümeler, toplam alanı istendiği kadar küçük dikdörtgenlerle örtülebilir. Düşey doğru parçaları için bu açıktır.*
g_1 ise $[a, b]$'de düzgün süreklidir (bkz. Analiz 4). Bu yüzden her $\varepsilon > 0$ için $[a, b]$'yi öyle $[x_{k-1}, x_k]$ parçalarına bölebiliriz ki her parçada g_1'in en büyük ve en küçük değeri arasındaki fark ε'dan küçük olsun. Grafiğin bir parça üzerindeki kısmı, tabanı $[x_{k-1}, x_k]$ ve yüksekliği ε olan bir dikdörtgenin içinde kalır. Bu dikdörtgenlerin toplam alanı $\varepsilon\,(b - a)$'dır. g_2'nin grafiği de aynı biçimde örtülür.

Dikdörtgenlerdeki integrallenebilirlik ölçütünün (ii) şıkkı ve Fubini Teoremi'nin (Teorem 1.2) ardından verilen genel hâli, ispatlarında süreksizlik eğrilerinden yalnız bu örtme özelliğini kullanır (bkz. Dikdörtgen Bölgelerde İki Katlı İntegraller). Bu yüzden ikisi de F'ye uygulanır; özellikle F, R üzerinde integrallenebilir.

Adım 3: Ardışık integral vardır. *Bir $x \in [a,b]$ sabitleyip iç integrale bakalım. $c \le y < g_1(x)$ ya da $g_2(x) < y \le d$ ise (x,y) noktası D'nin dışındadır ve $F(x,y) = 0$'dır. $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ ise $(x,y) \in D$ ve $F(x,y) = f(x,y)$'dir. Demek ki $y \mapsto F(x,y)$ sınırlıdır ve en çok iki noktada süreksizdir; bu yüzden iç integral vardır. Tek değişkenli integralin aralığa göre toplamsallığıyla*

$$\begin{aligned}\int_c^d F(x,y)\,dy &= \int_c^{g_1(x)} 0\,dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy + \int_{g_2(x)}^{d} 0\,dy \\ &= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\end{aligned}$$

bulunur. Bir fonksiyonun tek bir noktadaki değerini değiştirmek tek değişkenli integrali değiştirmez; bu yüzden F'nin $y = g_1(x)$ ve $y = g_2(x)$ noktalarındaki değerleri önemsizdir. Sağdaki integrale $G(x)$ diyelim.

Dış integralin var olduğunu görmek için G'nin sürekli olduğunu gösterelim. $\ell(x) = g_2(x) - g_1(x)$ olsun. $y = g_1(x) + t\,\ell(x)$ doğrusal değişken değiştirmesi (bkz. Analiz 2)

$$G(x) = \ell(x) \int_0^1 f\,\big(\,x,\, g_1(x) + t\,\ell(x)\,\big)\,dt$$

verir. $0 \le t \le 1$ iken $\big(\,x,\, g_1(x) + t\,\ell(x)\,\big)$ noktası D'dedir ve (x,t)'ye sürekli biçimde bağlıdır. Bu yüzden integralin içindeki fonksiyon $[a,b] \times [0,1]$ dikdörtgeninde süreklidir. Parametreye bağlı integralin sürekliliğine göre (bkz. Analiz 3) sağdaki integral x'in sürekli bir fonksiyonudur. ℓ de sürekli olduğundan G, $[a,b]$'de süreklidir ve $\int_a^b G(x)\,dx$ vardır.

Adım 4: Fubini Teoremi. *F sınırlıdır, R üzerinde integrallenebilir ve kullandığımız ardışık integral vardır. Fubini Teoremi'nin genel hâline göre*

$$\iint_R F(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b G(x)\,dx$$

olur. Adım 1'deki eşitlik ve G'nin tanımıyla bu, istenen eşitliktir. ■

Yani I. tip bir bölgede önce y'ye göre, sonra x'e göre integral alırız. İç integralde x sabittir; ama bu kez yalnız $f(x,y)$ değil, $g_1(x)$ ve $g_2(x)$ sınırları da x'e bağlıdır. İç integralin sonucu x'in bir fonksiyonudur ve dış integral onu sabit sınırlar arasında toplar.

Teorem 2.2 (İkinci Tip Bölgede İki Katlı İntegral). *f, II. tip bir*

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

bölgesinde sürekli ise

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

olur.

İspat.
I. tip bölgedeki ispatta (Teorem 2.1) x ile y'nin rollerini değiştiririz. h_1 ve h_2 sınırlı olduğundan her $y \in [c,d]$ için $a \le h_1(y)$ ve $h_2(y) \le b$ olacak biçimde a, b seçilir ve $R = [a,b] \times [c,d]$ alınır. O ispatın Adım 1 ve Adım 2'sindeki gibi D kapalı ve sınırlıdır, F sınırlıdır ve R üzerinde integrallenebilir.
Sabit bir $y \in [c,d]$ için $F(x,y)$, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$ iken $f(x,y)$'ye, bu aralığın dışında 0'a eşittir. Dolayısıyla iç integral vardır ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_a^b F(x,y)\,dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx$$

olur. Sağdaki integrale $H(y)$ diyelim. $x = h_1(y) + t\big(\,h_2(y) - h_1(y)\,\big)$ değişken değiştirmesiyle, Adım 3'teki gibi H'nin $[c,d]$'de sürekli olduğu, dolayısıyla dış integralin de var olduğu görülür. Fubini Teoremi'nin genel hâli bu kez öbür sırayı verir:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dA &= \iint_R F(x,y)\,dA \\ &= \int_c^d \int_a^b F(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d H(y)\,dy.\end{aligned}$$

Bu, istenen eşitliktir. ■

⚠ Sınırlar hangi değişkene bağlı olabilir?

Dış integralin sınırları her zaman sabit sayılardır. İç integralin sınırları yalnız dış değişkene bağlı olabilir. Örneğin $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f\,dy\,dx$ yazımı doğrudur. Ama dış sınırında x bulunan $\int_0^{2x} \int_0^1 f\,dy\,dx$ ya da iç sınırında kendi değişkeni y bulunan $\int_0^2 \int_0^y f\,dy\,dx$ anlamsızdır: bunların sonucu bir sayı olamaz.

Sınırları doğru yazmanın en güvenli yolu, bölgeyi çizip içinden bir ok geçirmektir.

Dört adımda iki katlı integralin sınırlarını belirleme

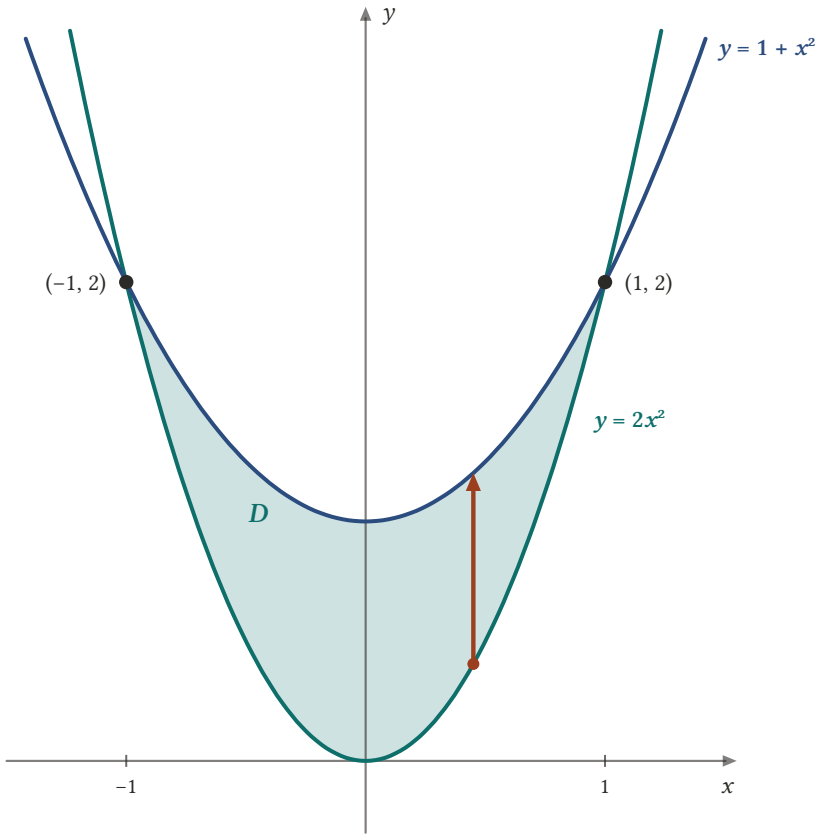
1. D bölgesini çiz ve sınır eğrilerinin kesişim noktalarını bul.
2. Bölgenin I. tip mi, II. tip mi, yoksa ikisi birden mi olduğuna karar ver. İkisi birden ise tek parça ve daha kolay integral veren biçimi seç.
3. I. tipte bölgeyi aşağıdan yukarı kesen bir düşey ok çiz: okun girdiği eğri $y = g_1(x)$ alt sınırı, çıktığı eğri $y = g_2(x)$ üst sınırı verir; a ve b, x'in bölgedeki en küçük ve en büyük değeridir. II. tipte ok yataydır ve soldan sağa, $x = h_1(y)$ eğrisinden $x = h_2(y)$ eğrisine gider.
4. Önce dış değişkeni sabit tutarak iç integrali, sonra dış integrali hesapla.

Örnek 2.1 (İki Parabol Arasında Kalan Bölge). D, $y = 2x^2$ ve $y = 1 + x^2$ parabollerinin sınırladığı bölge olmak üzere

$$\iint_D (x + 2y)\,dA$$

integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.3: $y = 2x^2$ ve $y = 1 + x^2$ parabolleri $(-1, 2)$ ve $(1, 2)$ noktalarında kesişir. Aradaki D bölgesi I. tiptir: her düşey ok alttaki $y = 2x^2$ parabolünden girer, üstteki $y = 1 + x^2$ parabolünden çıkar.

Çözüm.
Bölge. Paraboller $2x^2 = 1 + x^2$, yani $x^2 = 1$ iken kesişir: $x = -1$ ve $x = 1$, kesişim noktaları $(-1, 2)$ ve $(1, 2)$'dir. $-1 \le x \le 1$ için $x^2 \le 1$ olduğundan $2x^2 \le 1 + x^2$'dir; alttaki parabol $y = 2x^2$, üstteki $y = 1 + x^2$'dir. Bölge I. tiptir:

$$D = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 1 + x^2\}.$$

Bölge II. tip değildir: $1 < y < 2$ aralığındaki bir yatay doğru bölgeyi iki ayrı parça boyunca keser.
İç integral. Teorem 2.1'e göre

$$\iint_D (x + 2y)\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx$$

olur. x sabitken $x + 2y$'nin y'ye göre bir ilkeli $xy + y^2$'dir:

$$\begin{aligned} \Big[xy + y^2 \Big]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} &= x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2 \\ &= x + x^3 + 1 + 2x^2 + x^4 - 2x^3 - 4x^4 \\ &= -3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Dış integral. $-x^3$ ve x tek fonksiyonlar olduğundan simetrik $[-1, 1]$ aralığında integralleri sıfırdır; çift terimler için integral $[0, 1]$'deki değerin iki katıdır:

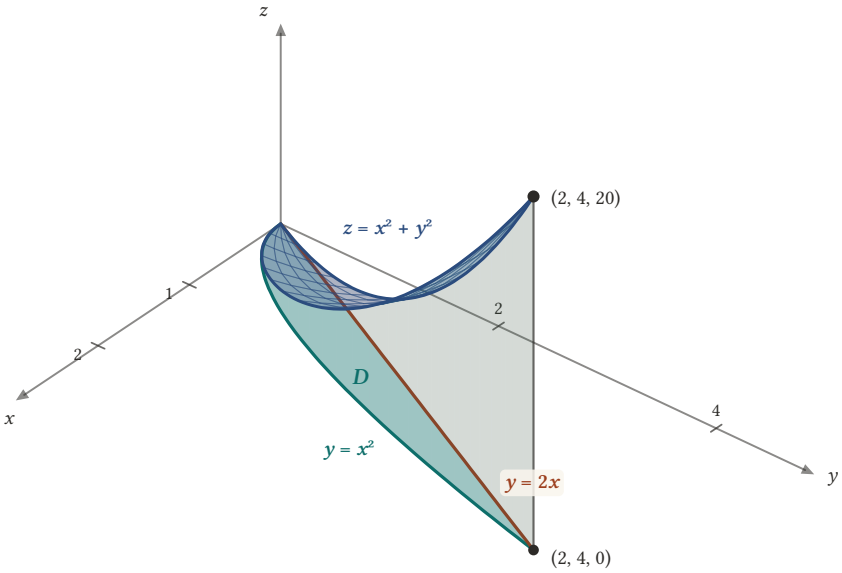
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{-1}^{1}(-3x^4-x^3+2x^2+x+1)\,dx = 2\int_{0}^{1}(-3x^4+2x^2+1)\,dx$$
$$= 2\left(-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = 2\cdot\frac{16}{15} = \frac{32}{15}.$$

■

Bazı bölgeler hem I. hem II. tiptir; o zaman integrali iki sırada da kurabiliriz.

Örnek 2.2 (Bir Paraboloidin Altındaki Hacim). $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin altında, xy-düzleminde $y = 2x$ doğrusu ile $y = x^2$ parabolünün sınırladığı D bölgesinin üstünde kalan cismin hacmini hem I. tip hem II. tip yazımla bulunuz.



Şekil 2.4: Örnekteki cisim: tabanı xy-düzlemindeki D bölgesi, tavanı $z = x^2 + y^2$ paraboloidi, yan yüzleri $y = 2x$ düzlemi ile $y = x^2$ parabolik silindiridir. En yüksek noktası (2, 4, 20)'dir; şekil sığsın diye z ekseni kısaltılarak çizilmiştir.

Çözüm.
I. tip olarak. Eğriler $x^2 = 2x$, yani $x = 0$ ve $x = 2$ iken kesişir; kesişim noktaları $(0,0)$ ve $(2,4)$'tür. $0 \le x \le 2$ için $x^2 \le 2x$ olduğundan

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}$$

olur. D üzerinde $x^2 + y^2 \ge 0$ olduğundan hacim

$$V = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2x} dx$$
$$= \int_0^2 \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{14x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx = \left[\frac{7x^4}{6} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right]_0^2$$
$$= \frac{56}{3} - \frac{32}{5} - \frac{128}{21} = \frac{1960 - 672 - 640}{105} = \frac{648}{105} = \frac{216}{35}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur.

II. tip olarak. Sınırları x'e göre çözelim: $y = 2x$ doğrusu $x = \frac{y}{2}$, $y = x^2$ parabolünün $x \geq 0$ kolu $x = \sqrt{y}$ olur. $0 \leq y \leq 4$ için $\frac{y}{2} \leq \sqrt{y}$ olduğundan

$$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \leq y \leq 4,\ \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\right\}$$

yazılır ve Teorem 2.2'e göre

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2}\right) dy \\ &= \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{13y^3}{24}\right) dy = \left[\frac{2y^{5/2}}{15} + \frac{2y^{7/2}}{7} - \frac{13y^4}{96}\right]_0^4 \end{aligned}$$

olur. $4^{5/2} = 32$, $4^{7/2} = 128$ ve $4^4 = 256$ olduğundan

$$V = \frac{64}{15} + \frac{256}{7} - \frac{104}{3} = \frac{448 + 3840 - 3640}{105} = \frac{648}{105} = \frac{216}{35}$$

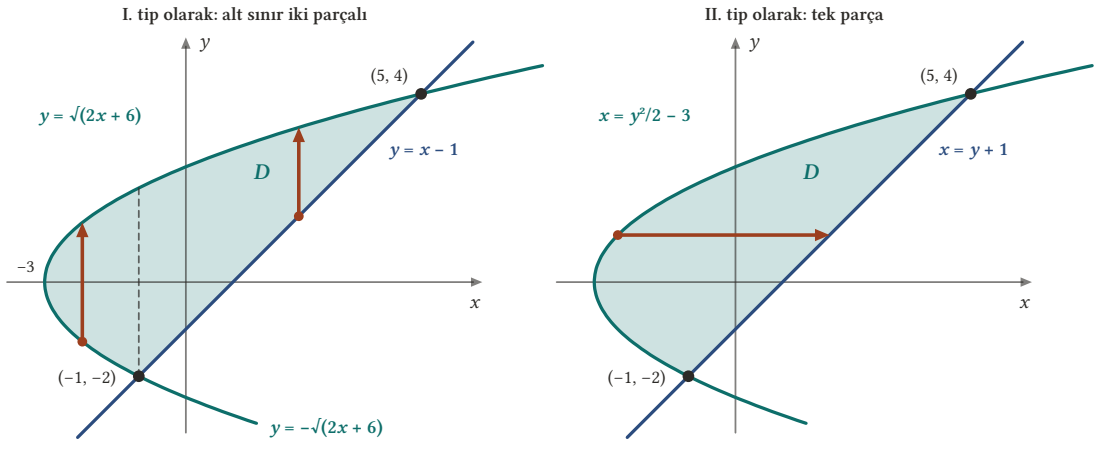
bulunur. İki yol aynı sonucu verir. ■

Bir bölge iki tipten de olsa, bu iki yazımdan biri çoğu zaman çok daha kısadır.

Örnek 2.3 (Doğru ile Parabol Arasında Kalan Bölge). D, $y = x - 1$ doğrusu ile $y^2 = 2x + 6$ parabolünün sınırladığı bölge olmak üzere

$$\iint_D xy\, dA$$

integralini hesaplayınız.



Şekil 2.5: $y = x - 1$ doğrusu ile $y^2 = 2x + 6$ parabolü arasındaki D bölgesi. Solda düşey oklar: $x = -1$'in solunda alt sınır parabolün alt kolu, sağında doğrudur; bu yüzden I. tip yazım iki integral ister. Sağda yatay oklar hep paraboldan girip doğrudan çıkar: II. tip yazım tek integraldir.

Çözüm.

Bölge. Doğru $x = y + 1$, parabol $x = \frac{y^2}{2} - 3$ biçiminde yazılabilir. Kesişimde $y^2 = 2(y + 1) + 6$, yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y^2 - 2y - 8 = (y-4)(y+2) = 0$$

olur. Buradan $y = -2$ ve $y = 4$, kesişim noktaları $(-1,-2)$ ve $(5,4)$ bulunur. $-2 \le y \le 4$ için $y^2 - 2y - 8 \le 0$ olduğundan $\frac{y^2}{2} - 3 \le y + 1$'dir: parabol solda, doğru sağdadır.
D hem I. hem II. tiptir. Ama I. tip yazımda alt sınır iki parçalıdır: $-3 \le x \le -1$ iken parabolün alt kolu $y = -\sqrt{2x+6}$, $-1 \le x \le 5$ iken $y = x - 1$ doğrusudur. II. tip yazım ise tek parçadır:

$$D = \left\{ (x,y) \;\middle|\; -2 \le y \le 4,\ \frac{y^2}{2} - 3 \le x \le y + 1 \right\}.$$

Hesap. Teorem 2.2'e göre

$$\iint_D xy\,dA = \int_{-2}^{4} \int_{y^2/2-3}^{y+1} xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{4} \left[\frac{x^2}{2}\, y \right]_{x=y^2/2-3}^{x=y+1} dy$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} y \left[(y+1)^2 - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right)^2 \right] dy.$$

Köşeli parantezin içini açalım: $(y+1)^2 = y^2 + 2y + 1$ ve $\left(\frac{y^2}{2} - 3\right)^2 = \frac{y^4}{4} - 3y^2 + 9$ olduğundan fark $-\frac{y^4}{4} + 4y^2 + 2y - 8$'dir. Bunu y ile çarparsak

$$\iint_D xy\,dA = \frac{1}{2} \int_{-2}^{4} \left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy$$
$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + \frac{2y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^{4}$$

olur. Köşeli parantezdeki ifade $y = 4$'te $-\frac{512}{3} + 256 + \frac{128}{3} - 64 = 64$, $y = -2$'de $-\frac{8}{3} + 16 - \frac{16}{3} - 16 = -8$ değerini alır. Böylece

$$\iint_D xy\,dA = \frac{1}{2} \left(\, 64 - (-8) \, \right) = 36$$

bulunur.
I. tip yazımla karşılaştırma. Aynı integral

$$\int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx + \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,dy\,dx$$

olarak da yazılabilir. Birinci integral sıfırdır, çünkü xy, y'ye göre tektir ve iç sınırlar simetriktir. İkincisinde iç integral

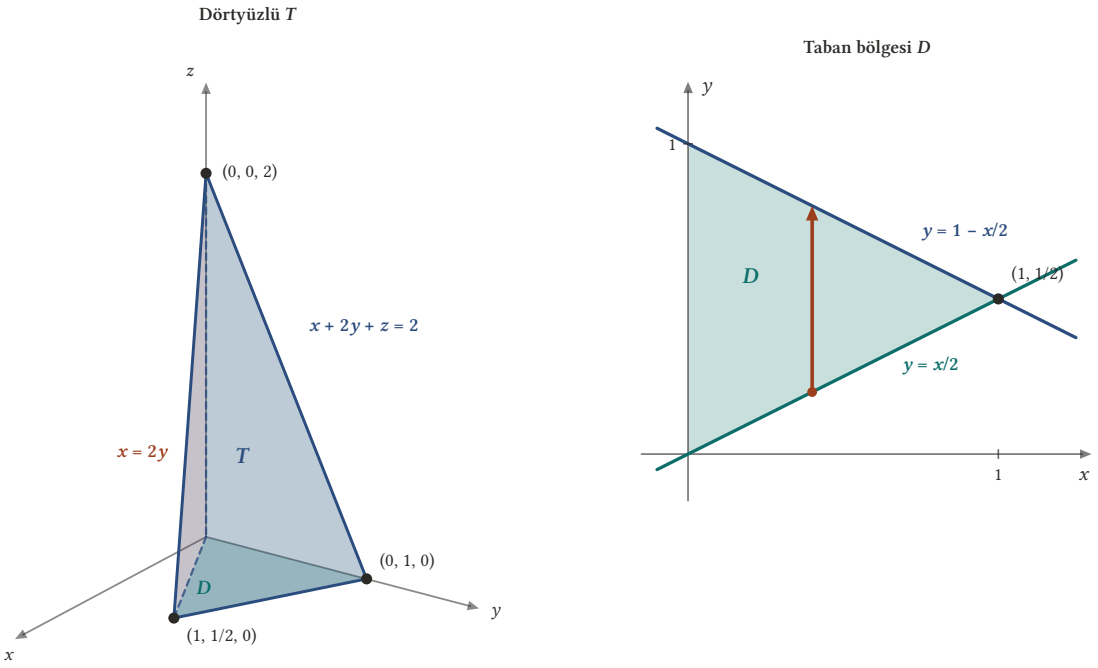
$$\frac{x}{2} \left[\, (2x+6) - (x-1)^2 \, \right] = -\frac{x^3}{2} + 2x^2 + \frac{5x}{2}$$

olur ve $[-1,5]$ üzerindeki integrali yine 36 çıkar. Sonuç aynıdır, ama iki parçalı yazım daha fazla iş ister. ■

Hacim problemlerinde iki ayrı çizim işimizi çok kolaylaştırır: biri üç boyutlu cismin, öbürü cismin xy-düzlemindeki tabanı olan D bölgesinin çizimi.

Örnek 2.4 (Bir Dörtyüzlünün Hacmi). $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ ve $z = 0$ düzlemlerinin sınırladığı dörtyüzlünün hacmini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.6: Solda $x = 0$, $z = 0$, $x = 2y$ ve $x + 2y + z = 2$ düzlemlerinin sınırladığı T dörtyüzlüsü. Sağda tabanı olan D üçgeni: $x + 2y + z = 2$ düzlemi xy-düzlemini $y = 1 - x/2$ doğrusu boyunca keser.

Çözüm.
Cisim. Dörtyüzlü T'nin tabanı $z = 0$ düzlemindedir; üstten $x + 2y + z = 2$, yani $z = 2 - x - 2y$ düzlemiyle, yanlardan $x = 0$ ve $x = 2y$ düşey düzlemleriyle sınırlanır.
Taban bölgesi. $x + 2y + z = 2$ düzlemi xy-düzlemini ($z = 0$) $x + 2y = 2$, yani $y = 1 - \frac{x}{2}$ doğrusu boyunca keser. Dolayısıyla T'nin altında kalan D bölgesi $x = 0$, $y = \frac{x}{2}$ ve $y = 1 - \frac{x}{2}$ doğrularının sınırladığı üçgendir. Son iki doğru $\frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2}$, yani $x = 1$ iken, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ noktasında kesişir. Böylece

$$D = \left\{(x, y) \;\middle|\; 0 \le x \le 1, \frac{x}{2} \le y \le 1 - \frac{x}{2}\right\}$$

olur. D üzerinde $y \le 1 - \frac{x}{2}$ olduğundan $2 - x - 2y \ge 0$'dır.
Hacim. $V = \iint_D (2 - x - 2y)\, dA$'dır:

$$V = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx = \int_0^1 \Big[\, 2y - xy - y^2 \Big]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx.$$

İlkelin üst sınırdaki değeri

$$2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = 1 - x + \frac{x^2}{4},$$

alt sınırdaki değeri $x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = x - \frac{3x^2}{4}$'tür. Farkları $1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2$ olduğundan

$$V = \int_0^1 (1 - x)^2\, dx = \left[-\frac{(1 - x)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

bulunur. Kontrol: D üçgeninin $x = 0$ üzerindeki kenarının uzunluğu 1, karşı köşesinin bu kenara uzaklığı 1 olduğundan alanı $\frac{1}{2}$'dir. Dörtyüzlünün yüksekliği 2 olduğundan $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{3}$ olur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

2.4 İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

Fubini Teoremi'ne göre bir iki katlı integrali iki farklı sırada ardışık integral olarak yazabiliriz. Bazen sıralardan biri çok zor, hatta elemanter fonksiyonlarla imkânsızdır. Böyle bir ardışık integralle karşılaşınca onu önce bir iki katlı integral olarak yorumlar, sonra öbür sırada yazarız.

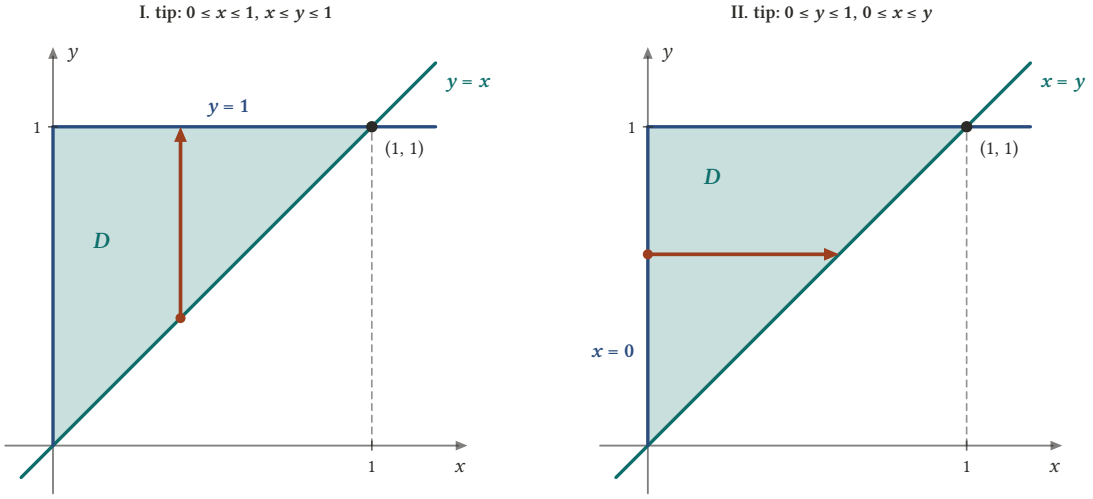
Üç adımda integrasyon sırasını değiştirme

1. Verilen ardışık integralin sınırlarından D bölgesini küme olarak yaz: dış sınırlar dış değişkenin, iç sınırlar iç değişkenin aralığıdır.
2. D'yi çiz.
3. D'yi öbür tipte yeniden betimle ve integrali ters sırada yaz.

Örnek 2.5 (Sıra Değiştirerek Hesaplanan Bir İntegral).

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx$$

ardışık integralini hesaplayınız.



Şekil 2.7: Aynı D üçgeni iki biçimde okunur. Solda düşey ok $y = x$ doğrusundan $y = 1$ doğrusuna gider; sağda yatay ok $x = 0$ ekseninden $x = y$ doğrusuna gider. İkinci okuma, iç integrali x'e göre almayı sağlar.

Çözüm.
Neden sıra değişmeli? Verilen sırada önce $\int \sin(y^2)\, dy$'yi bulmamız gerekir; ama $\sin(y^2)$'nin ilkeli elemanter bir fonksiyon değildir. Bu yüzden sırayı değiştiririz.
Bölge. Teorem 2.1'ü tersten okursak integral $\iint_D \sin(y^2)\, dA$'dır ve

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$$

köşeleri $(0, 0)$, $(1, 1)$ ve $(0, 1)$ olan üçgendir. Aynı üçgen II. tip olarak

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$$

biçiminde yazılır.
Hesap. Teorem 2.2'e göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \Big[\, x\sin(y^2)\Big]_{x=0}^{x=y} dy$$
$$= \int_0^1 y\sin(y^2)\,dy$$

olur. $u = y^2$, $du = 2y\,dy$ değişken değiştirmesiyle

$$\int_0^1 y\sin(y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin u\,du = \frac{1}{2}\Big[-\cos u\Big]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

bulunur. Bu değer yaklaşık 0,2298'dir. ■

2.5 İki Katlı İntegralin Özellikleri

Dikdörtgen üzerindeki integralin lineerlik ve karşılaştırma özellikleri (Önerme 1.1) genel bölgelere aynen taşınır. Bunlara bölgeye göre toplamsallık, alan ve sınırlama özellikleri eklenir.

Önerme 2.1 (İki Katlı İntegralin Özellikleri). *Aşağıdaki bütün integrallerin var olduğunu ve c'nin bir sabit olduğunu varsayalım.*
(i) ***Lineerlik.***

$$\iint_D \big[\, f(x,y) + g(x,y) \,\big]\,dA = \iint_D f(x,y)\,dA + \iint_D g(x,y)\,dA,$$

$$\iint_D c\,f(x,y)\,dA = c\iint_D f(x,y)\,dA.$$

(ii) ***Karşılaştırma.*** *D'nin her noktasında $f(x,y) \geq g(x,y)$ ise*

$$\iint_D f(x,y)\,dA \geq \iint_D g(x,y)\,dA.$$

(iii) ***Bölgeye göre toplamsallık.*** *$D = D_1 \cup D_2$ ise ve D_1 ile D_2'nin ortak noktaları yalnız sınırlarındaki sonlu sayıda düzgün eğri üzerindeyse*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_{D_1} f(x,y)\,dA + \iint_{D_2} f(x,y)\,dA.$$

(iv) ***Alan.*** *D'nin alanı $A(D)$ ile gösterilirse*

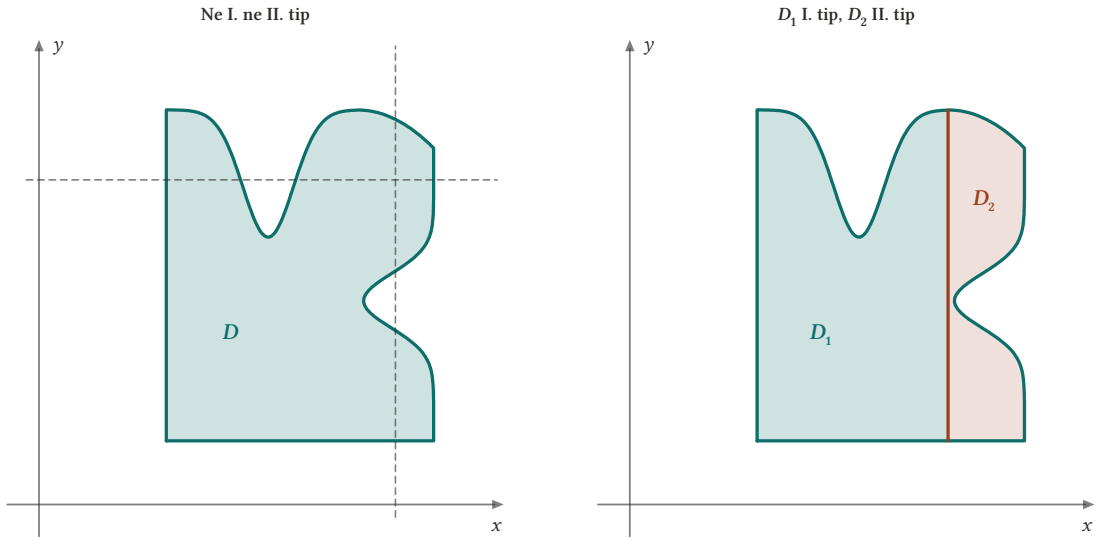
$$\iint_D 1\,dA = A(D).$$

(v) ***Sınırlama.*** *D'nin her noktasında $m \leq f(x,y) \leq M$ ise*

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x,y)\,dA \leq M \cdot A(D).$$

Toplamsallık özelliği, ne I. ne II. tip olan bir bölgeyi I. ve II. tip parçalara ayırarak integral almamızı sağlar:

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.8: Solda ne I. ne II. tip olan bir D *bölgesi: kesikli düşey doğru sınırı dört kez, kesikli yatay doğru da dört kez keser. Sağda* D *bir düşey doğru parçasıyla iki parçaya ayrılmıştır:* D_1 *I. tip,* D_2 *II. tip bir bölgedir ve iki parça yalnız bu doğru parçası boyunca ortaktır.*

İspat.
Her adımda D'yi içeren bir R dikdörtgeni alır ve bir fonksiyonun R'ye sıfırla genişletilmesini büyük harfle gösteririz.
(i) ve (ii) f ile g'nin genişletmeleri F ve G olsun. $f+g$'nin genişletmesi $F+G$'dir: D'de iki taraf da $f+g$'ye, D'nin dışında $0+0=0$'a eşittir. Aynı biçimde cf'nin genişletmesi cF'dir. D'de $f \geq g$ ise R'de $F \geq G$ olur, çünkü D'nin dışında ikisi de sıfırdır. Dikdörtgendeki özellikleri (Önerme 1.1) R üzerinde F ve G'ye uygulayıp tanımı kullanırsak (i) ve (ii) elde edilir.
(iii) f'nin D'den, D_1'den ve D_2'den sıfırla genişletmeleri F, F_1 ve F_2 olsun. C, D_1 ile D_2'nin ortak sınırı olsun. R'nin C üzerinde olmayan bir p noktasını alalım. $p \notin D$ ise üç fonksiyon da p'de sıfırdır. $p \in D$ ise p, D_1 ile D_2'den tam olarak birindedir; bu yüzden $F_1(p)$ ile $F_2(p)$'den biri $f(p)$'ye, öbürü 0'a eşittir. Her iki durumda $F_1(p)+F_2(p)=F(p)$'dir. Demek ki

$$H = F_1 + F_2 - F$$

fonksiyonu C'nin dışında sıfırdır. F, F_1, F_2 integrallenebilir olduğundan dikdörtgendeki lineerlik özelliği gereği H de R üzerinde integrallenebilirdir. C sonlu sayıda düzgün eğriden oluştuğu için hiçbir dikdörtgeni tamamen dolduramaz. Bu yüzden R'nin her bölüntüsünde her alt dikdörtgenden C üzerinde olmayan bir örnek nokta seçebiliriz. Bu seçimle H'nin bütün Riemann toplamları sıfırdır. İki katlı integral her örnek nokta seçimi için Riemann toplamlarının limiti olduğundan $\iint_R H\,dA = 0$ olur. Şimdi (i)'den

$$\iint_R F_1\,dA + \iint_R F_2\,dA = \iint_R F\,dA + \iint_R H\,dA = \iint_R F\,dA$$

bulunur. Tanım gereği bu eşitliğin terimleri sırasıyla D_1, D_2 ve D üzerindeki integrallerdir.
(iv) D I. tip ise Teorem 2.1'ü $f=1$ için uygularsak

$$\iint_D 1\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\,dy\,dx = \int_a^b \big(\, g_2(x) - g_1(x) \,\big)\,dx$$

olur. Bu, iki eğri arasında kalan bölgenin alanıdır (bkz. Analiz 2). II. tip bölgelerde x ile y'nin rolleri değişir; bu türden sonlu sayıda parçaya ayrılan bölgelerde de (iii) ve alanın toplamsallığı kullanılır. Daha genel bölgelerde ise $A(D) = \iint_D 1\,dA$ eşitliği alanın tanımı olarak alınır.
(v) $m \leq f \leq M$ olduğundan (ii) gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_D m\,dA \le \iint_D f(x,y)\,dA \le \iint_D M\,dA$$

olur. (i) ve (iv)'e göre

$$\iint_D m\,dA = m\iint_D 1\,dA = m\cdot A(D)$$

olur; aynı biçimde sağdaki integral $M\cdot A(D)$'ye eşittir. ■

Yani (iii), tek değişkenli integraldeki $\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$ özelliğinin iki boyutlu karşılığıdır. (iv)'ün geometrik anlamı da açıktır: tabanı D, yüksekliği 1 olan bir silindirin hacmi $A(D)\cdot 1 = A(D)$'dir ve bu hacim $\iint_D 1\,dA$'ya eşittir. (v) ise $m > 0$ iken $z = f(x,y)$ grafiğinin altındaki hacmin, tabanı D ve yükseklikleri m ile M olan iki silindirin hacimleri arasında kaldığını söyler.

Örnek 2.6 (Alanı İki Katlı İntegralle Bulmak). $y = x^2$ parabolü ile $y = 2x$ doğrusunun sınırladığı D bölgesinin alanını iki katlı integralle bulunuz.

Çözüm.
Örnek 2.2'de bu bölgeyi I. tip olarak

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\, x^2 \le y \le 2x\}$$

biçiminde yazdık. Önerme 2.1 (iv)'e göre

$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D 1\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 1\,dy\,dx = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx \\ &= \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

bulunur. ■

Sınırlama özelliği, hesaplanması zor bir integrali kabaca kestirmeye yarar.

Örnek 2.7 (Bir İntegrali Kestirmek). D, merkezi orijin ve yarıçapı 2 olan disk olmak üzere

$$\iint_D e^{\sin x \cos y}\,dA$$

integralinin alabileceği değerleri Önerme 2.1 (v) ile sınırlayınız.

Çözüm.
Her (x,y) için $-1 \le \sin x \le 1$ ve $-1 \le \cos y \le 1$ olduğundan $-1 \le \sin x \cos y \le 1$'dir. Üstel fonksiyon artan olduğundan

$$e^{-1} \le e^{\sin x \cos y} \le e^1 = e$$

olur. $m = \frac{1}{e}$, $M = e$ ve $A(D) = \pi\cdot 2^2 = 4\pi$ alırsak

$$\frac{4\pi}{e} \le \iint_D e^{\sin x \cos y}\,dA \le 4\pi e$$

bulunur. Bu, integralin yaklaşık 4,62 ile 34,16 arasında olduğunu söyler. Kestirim kabadır; integralin gerçek değeri yaklaşık 14,41'dir. ■

Dikdörtgende tanımladığımız ortalama değer (Tanım 1.6) genel bölgelere aynen taşınır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 2.4 (Genel Bir Bölgede Ortalama Değer). $A(D) > 0$ olan bir D bölgesinde integrallenebilir bir f fonksiyonunun **ortalama değeri**

$$f_{\text{ort}} = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\,dA$$

sayısıdır.

Yani f_{ort}, f'nin D üzerindeki integralinin bölgenin alanına bölünmesiyle bulunur; $f \geq 0$ ise tabanı D, yüksekliği f_{ort} olan silindir, grafiğin altındaki cisimle aynı hacme sahiptir. Önerme 2.1 (v)'i $A(D)$'ye bölersek $m \leq f_{\text{ort}} \leq M$ buluruz: ortalama, en küçük ve en büyük değer arasındadır. f sürekli ise ortalamanın f'nin gerçekten aldığı bir değer olduğunu da gösterebiliriz.

Önerme 2.2 (İki Katlı İntegraller için Ortalama Değer Teoremi). *f, $A(D) > 0$ olan I. ya da II. tip bir D bölgesinde sürekli olsun. Bu durumda*

$$\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0)\,A(D)$$

olacak biçimde bir $(x_0,y_0) \in D$ noktası vardır.

> ***İspat.***
> *D I. tip olsun:*
>
> $$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$
>
> *Bölge II. tip ise aynı adımlar x ile y'nin rolleri değiştirilerek yapılır.*
> ***En küçük ve en büyük değer.*** *I. tip bölgedeki integral formülünün ispatında (Teorem 2.1, Adım 1) D'nin kapalı ve sınırlı, dolayısıyla kompakt olduğunu gördük. Uç Değer Teoremi'ne (bkz. Analiz 4) göre D'de öyle P ve Q noktaları vardır ki $m = f(P)$ ve $M = f(Q)$ için her $(x,y) \in D$ noktasında $m \leq f(x,y) \leq M$ olur. Önerme 2.1 (v)'i $A(D) > 0$ sayısına bölersek*
>
> $$m \leq \mu \leq M, \qquad \mu = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x,y)\,dA$$
>
> *buluruz.*
> ***Ara değer.*** *$P = (x_1,y_1)$ ve $Q = (x_2,y_2)$ olsun. P'den düşey olarak $(x_1, g_1(x_1))$ noktasına inen, oradan $y = g_1(x)$ grafiği boyunca $(x_2, g_1(x_2))$ noktasına giden ve oradan düşey olarak Q'ya çıkan yolun bütün noktaları D'dedir. Bu yolu sürekli bir $\gamma : [0,1] \to D$ fonksiyonuyla, $\gamma(0) = P$ ve $\gamma(1) = Q$ olacak biçimde parametrelendirelim. $h(t) = f(\gamma(t))$ fonksiyonu $[0,1]$'de süreklidir ve $h(0) = m$, $h(1) = M$'dir. $m = M$ ise f sabittir ve her nokta işe yarar. $m < M$ ise μ, $h(0)$ ile $h(1)$ arasında (ya da bunlardan birine eşit) olduğundan Ara Değer Teoremi'ne (bkz. Analiz 1) göre $h(t_0) = \mu$ olan bir $t_0 \in [0,1]$ vardır. $(x_0,y_0) = \gamma(t_0)$ dersek*
>
> $$\iint_D f(x,y)\,dA = \mu\,A(D) = f(x_0,y_0)\,A(D)$$
>
> *olur.* ■

Yani $f \geq 0$ ise grafiğin altındaki hacim, tabanı D ve yüksekliği f'nin bir $f(x_0,y_0)$ değeri olan bir silindirin hacmine eşittir: grafiğin tepeleri kesilip çukurları doldurulunca düz bir tavan elde edilir.

2.6 Alıştırmalar

Alıştırma 2.1 (Değişken Sınırlı Bir Ardışık İntegral).

$$\int_0^1 \int_0^y x e^{y^3}\,dx\,dy$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ardışık integralini hesaplayınız.

Çözüm.
İç integral. İç integralde y sabittir; e^{y^3} çarpanı x'e göre sabit olduğundan dışarı çıkar:

$$\int_0^y x e^{y^3}\,dx = e^{y^3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y = \frac{y^2}{2}\,e^{y^3}.$$

Dış integral. $u = y^3$, $du = 3y^2\,dy$ değişken değiştirmesiyle

$$\int_0^1 \frac{y^2}{2}\,e^{y^3}\,dy = \frac{1}{6}\int_0^1 e^u\,du = \frac{1}{6}\Big[\,e^u\Big]_0^1 = \frac{e-1}{6}$$

bulunur. ■

Alıştırma 2.2 (Ardışık İntegrali Kurup Hesaplamak). D, $y = x$ doğrusu ile $y = 3x - x^2$ parabolünün sınırladığı bölge olmak üzere $\iint_D 2y\,dA$ integralini bir ardışık integral olarak yazıp hesaplayınız.

Çözüm.
Bölge. Kesişimde $x = 3x - x^2$, yani $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$ olur: $x = 0$ ve $x = 2$, noktalar $(0,0)$ ve $(2,2)$'dir. $0 \le x \le 2$ için $(3x - x^2) - x = x(2-x) \ge 0$ olduğundan parabol doğrunun üstündedir. Bölge I. tiptir:

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\, x \le y \le 3x - x^2\}.$$

Bu bölgeyi II. tip yazmak iki parça gerektirirdi, çünkü parabolün tepesi $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$, $y = 2$ doğrusunun üstündedir.
Hesap.

$$\begin{aligned}\iint_D 2y\,dA &= \int_0^2 \int_x^{3x-x^2} 2y\,dy\,dx = \int_0^2 \Big[\,y^2\Big]_{y=x}^{y=3x-x^2} dx \\ &= \int_0^2 \left(\,(3x-x^2)^2 - x^2\,\right) dx = \int_0^2 (8x^2 - 6x^3 + x^4)\,dx \\ &= \left[\frac{8x^3}{3} - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{64}{3} - 24 + \frac{32}{5} = \frac{56}{15}.\end{aligned}$$

■

Alıştırma 2.3 (İki Sıranın Karşılaştırılması). D, $y = x - 2$ doğrusu ile $x = y^2$ parabolünün sınırladığı bölge olmak üzere $\iint_D y\,dA$ integralini iki sırada da kurunuz, kolay olan sırayla hesaplayınız ve neden daha kolay olduğunu açıklayınız.

Çözüm.
Bölge. $x = y^2$ ile $x = y + 2$ eşitlenirse $y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1) = 0$ olur. Kesişim noktaları $(1,-1)$ ve $(4,2)$'dir. $-1 \le y \le 2$ için $(y+2) - y^2 \ge 0$ olduğundan parabol solda, doğru sağdadır.
II. tip yazım. Bölge tek parça hâlinde

$$D = \{(x,y) \mid -1 \le y \le 2,\, y^2 \le x \le y + 2\}$$

biçiminde yazılır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_D y\,dA = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} y\,dx\,dy = \int_{-1}^{2} y\,(y+2-y^2)\,dy$$
$$= \int_{-1}^{2} (y^2+2y-y^3)\,dy = \left[\frac{y^3}{3}+y^2-\frac{y^4}{4}\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{8}{3}-\frac{5}{12} = \frac{9}{4}.$$

I. tip yazım. $0 \le x \le 1$ iken düşey ok parabolün alt kolu $y=-\sqrt{x}$'ten üst kolu $y=\sqrt{x}$'e, $1 \le x \le 4$ iken $y=x-2$ doğrusundan $y=\sqrt{x}$'e gider:

$$\iint_D y\,dA = \int_0^1\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y\,dy\,dx + \int_1^4\int_{x-2}^{\sqrt{x}} y\,dy\,dx.$$

Birinci terim sıfırdır, çünkü y tek fonksiyondur ve iç sınırlar simetriktir. İkinci terim

$$\int_1^4 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x-2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\,x-(x-2)^2\,\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^4 (-x^2+5x-4)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}-4x\right]_1^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}+\frac{11}{6}\right) = \frac{9}{4}$$

verir. Sonuç aynıdır. II. tip sıra daha kolaydır: sol ve sağ sınır tek formülle verildiği için integral tek parçadır; I. tip sırada ise alt sınır $x=1$'de değiştiğinden integrali ikiye bölmek gerekir. ■

Alıştırma 2.4 (Silindir ve Düzlemlerle Sınırlı Bir Cisim). Birinci oktantta $y^2+z^2=4$ silindiri ile $x=2y$, $x=0$ ve $z=0$ düzlemlerinin sınırladığı cismin hacmini bulunuz.

Çözüm.
Cisim ve taban. Birinci oktantta $z \ge 0$ olduğundan cismin tavanı $z=\sqrt{4-y^2}$ yüzeyi, tabanı $z=0$ düzlemidir. Silindirin içinde $0 \le y \le 2$'dir ve x, $x=0$ ile $x=2y$ düzlemleri arasında kalır. Taban bölgesi

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 2,\, 0 \le x \le 2y\}$$

olur; bu bir II. tip üçgendir.
Sıra seçimi. Yükseklik yalnız y'ye bağlıdır. Önce x'e göre integral alırsak iç integral yalnız bir çarpma olur; öbür sırada ise $\int \sqrt{4-y^2}\,dy$ için trigonometrik değişken değiştirme gerekirdi.
Hesap.

$$V = \int_0^2\int_0^{2y} \sqrt{4-y^2}\,dx\,dy = \int_0^2 2y\sqrt{4-y^2}\,dy.$$

$u=4-y^2$, $du=-2y\,dy$ alırsak $y=0$ iken $u=4$, $y=2$ iken $u=0$ olur:

$$V = \int_0^4 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}.$$

■

Alıştırma 2.5 (Bir Ardışık İntegralin Cismi).

$$\int_0^1\int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx$$

 CC BY-NC-SA 4.0

integralinin hacmini verdiği cismi betimleyiniz ve integrali hesaplayınız.

Çözüm.
Cisim. Taban bölgesi

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1 - x\}$$

köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(0,1)$ olan üçgendir. D üzerinde yükseklik $z = 1 - x - y \ge 0$'dır; bu, $x + y + z = 1$ düzlemidir. Cisim, koordinat düzlemleri ile $x + y + z = 1$ düzleminin sınırladığı, köşeleri $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ve $(0,0,1)$ olan dörtyüzlüdür.
Hesap. İç integral

$$\int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy = \left[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} = (1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{(1-x)^2}{2}$$

olur. Dış integral

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\, dx = \left[-\frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

verir. Kontrol: taban alanı $\frac{1}{2}$, yükseklik 1 olduğundan dörtyüzlünün hacmi $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$'dır. ■

Alıştırma 2.6 (İki Hacmin Farkı). $y = x^2$ parabolik silindiri ile $z = 3y$ ve $z = 2 + y$ düzlemlerinin sınırladığı cismin hacmini, iki hacmin farkı olarak bulunuz.

Çözüm.
Taban. İki düzlem $3y = 2 + y$, yani $y = 1$ iken kesişir. $y < 1$ iken $3y < 2 + y$ olduğundan cisim altta $z = 3y$, üstte $z = 2 + y$ düzlemiyle sınırlanır. Silindirin içinde $y \ge x^2$'dir; düzlemlerin kesişim doğrusu da cismi $y = 1$'de kapatır. Taban bölgesi

$$D = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1,\, x^2 \le y \le 1\}$$

olur. D üzerinde $3y \ge 0$ olduğundan iki düzlem de xy-düzleminin üstündedir.
Hacim. Cismin hacmi, $z = 2 + y$ düzleminin altındaki hacimden $z = 3y$ düzleminin altındaki hacmin çıkarılmasıyla bulunur. (i) özelliğiyle iki integral birleştirilir:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (2 + y)\, dA - \iint_D 3y\, dA = \int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} (2 - 2y)\, dy\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} \Big[\, 2y - y^2 \Big]_{y=x^2}^{y=1} dx = \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)\, dx \\ &= 2\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = 2 \cdot \frac{8}{15} = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

Ayrı ayrı hesaplanırsa iki hacim $\frac{52}{15}$ ve $\frac{36}{15}$ çıkar; farkları yine $\frac{16}{15}$'tir. ■

Alıştırma 2.7 (İki Ardışık İntegrali Birleştirmek). Bir D bölgesi üzerindeki integral

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

biçiminde iki ardışık integralin toplamı olarak yazılmıştır. D'yi betimleyiniz ve integrali ters sırada tek bir ardışık integral olarak yazınız.

Çözüm.
Parçalar. İki integralin bölgeleri

 CC BY-NC-SA 4.0

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1, 0 \le x \le 2y\},$$
$$D_2 = \{(x,y) \mid 1 \le y \le 3, 0 \le x \le 3-y\}$$

olur. D_1, $x=0$ ekseni ile $x=2y$, yani $y=\frac{x}{2}$ doğrusu arasındadır. D_2, $x=0$ ile $x=3-y$, yani $y=3-x$ doğrusu arasındadır.
Bölge. $y=\frac{x}{2}$ ve $y=3-x$ doğruları $\frac{x}{2}=3-x$, yani $x=2$ iken $(2,1)$ noktasında kesişir. D_1 ile D_2 yalnız $y=1$ doğru parçası boyunca ortaktır ve birleşimleri köşeleri $(0,0)$, $(2,1)$ ve $(0,3)$ olan üçgendir.
Ters sıra. Bu üçgeni I. tip olarak yazalım. $0 \le x \le 2$ için düşey ok alttaki $y=\frac{x}{2}$ doğrusundan girip üstteki $y=3-x$ doğrusundan çıkar:

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{x/2}^{3-x} f(x,y)\,dy\,dx.$$

■

Alıştırma 2.8 (Sırayı Değiştirerek Hesaplamak).

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$$

integralini integrasyon sırasını değiştirerek hesaplayınız.

Çözüm.
Neden? e^{x^2}'nin ilkeli elemanter değildir; verilen sırada iç integral hesaplanamaz.
Bölge. İntegrasyon bölgesi

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1, 3y \le x \le 3\}$$

köşeleri $(0,0)$, $(3,0)$ ve $(3,1)$ olan üçgendir. Üst kenarı $x=3y$, yani $y=\frac{x}{3}$ doğrusudur. I. tip olarak

$$D = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \le x \le 3, 0 \le y \le \frac{x}{3}\right\}$$

yazılır.
Hesap.

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^3 \frac{x}{3}\,e^{x^2}\,dx.$$

$u=x^2$, $du=2x\,dx$ ile

$$\int_0^3 \frac{x}{3}\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{6}\int_0^9 e^u\,du = \frac{e^9-1}{6}$$

bulunur. ■

Alıştırma 2.9 (Bölgeyi Parçalara Ayırmak). D, $[-1,1]\times[-1,1]$ karesinden, köşeleri $(\pm 1,0)$ ve $(0,\pm 1)$ olan eğik karenin içi ($|\,x\,|+|\,y\,|<1$) çıkarılınca kalan bölge olsun. D'yi I. tip bölgelerin birleşimi olarak yazıp $\iint_D x^2\,dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Parçalar. D, karenin dört köşesindeki dört dik üçgenden oluşur ve bu üçgenlerin ortak noktaları yalnız köşelerdir. Her biri I. tiptir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$T_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\, 1-x \le y \le 1\},$$
$$T_2 = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 0,\, 1+x \le y \le 1\},$$
$$T_3 = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 0,\, -1 \le y \le -1-x\},$$
$$T_4 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\, -1 \le y \le x-1\}.$$

Hesap. Her parçada iç integral x^2 ile düşey parçanın uzunluğunun çarpımıdır. T_1 ve T_4'te bu uzunluk x, T_2 ve T_3'te $-x$'tir:

$$\iint_{T_1} x^2\,dA = \int_0^1 x^2 \cdot x\,dx = \frac{1}{4}, \qquad \iint_{T_2} x^2\,dA = \int_{-1}^0 x^2 \cdot (-x)\,dx = \frac{1}{4}.$$

Aynı biçimde T_3 ve T_4 üzerindeki integraller de $\frac{1}{4}$'tür. Önerme 2.1 (iii)'e göre

$$\iint_D x^2\,dA = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

bulunur.
Kontrol. Karenin tamamında integral $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2\,dy\,dx = \frac{4}{3}$, eğik karede ise $4\int_0^1 x^2(1-x)\,dx = \frac{1}{3}$'tür. Toplamsallık gereği D üzerindeki integral $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$'dir. ■

Alıştırma 2.10 (Yarım Diskte Bir Kestirim). $S = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\, x \ge 0\}$ olmak üzere

$$\iint_S \sqrt{4 - x^2y^2}\,dA$$

integralini Önerme 2.1 (v) ile sınırlayınız.

Çözüm.
Alan. S, yarıçapı 1 olan yarım disktir: $A(S) = \frac{\pi}{2}$.
İntegrandın sınırları. $(|\,x\,| - |\,y\,|)^2 \ge 0$ eşitsizliğinden $|\,xy\,| \le \frac{x^2+y^2}{2}$ çıkar. S'de $x^2+y^2 \le 1$ olduğundan $|\,xy\,| \le \frac{1}{2}$, yani $0 \le x^2y^2 \le \frac{1}{4}$'tür. Buradan

$$\frac{15}{4} \le 4 - x^2y^2 \le 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{15}}{2} \le \sqrt{4-x^2y^2} \le 2$$

olur.
Kestirim. $m = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $M = 2$ ile

$$\frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \le \iint_S \sqrt{4-x^2y^2}\,dA \le 2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

yani

$$\frac{\sqrt{15}\,\pi}{4} \le \iint_S \sqrt{4-x^2y^2}\,dA \le \pi$$

bulunur. Sayısal olarak integral $3{,}0418$ ile $3{,}1416$ arasındadır. ■

Alıştırma 2.11 (Bir Üçgende Ortalama Değer). $f(x,y) = xy$ fonksiyonunun, köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(1,3)$ olan D üçgeni üzerindeki ortalama değerini bulunuz.

Çözüm.
Bölge. Hipotenüs $(0,0)$ ile $(1,3)$'ten geçen $y = 3x$ doğrusudur. Üçgen I. tiptir:

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 3x\}.$$

Alanı $A(D) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2}$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İntegral.

$$\iint_D xy\,dA = \int_0^1 \int_0^{3x} xy\,dy\,dx = \int_0^1 x \cdot \frac{9x^2}{2}\,dx = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{8}.$$

Ortalama. Tanım 2.4'e göre

$$f_{\text{ort}} = \frac{1}{A(D)} \iint_D xy\,dA = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

bulunur. ■

Alıştırma 2.12 (Simetriyle Hesaplamak). $D = \{(x,y) \mid |\,x\,| + |\,y\,| \le 1\}$ olmak üzere

$$\iint_D \big(\,2 + x^2y^3 - y^2\sin x\,\big)\,dA$$

integralini simetri ve geometri kullanarak hesaplayınız.

Çözüm.
Ayırma. Lineerlik gereği integral üç integralin toplamıdır:

$$2\iint_D 1\,dA + \iint_D x^2y^3\,dA - \iint_D y^2\sin x\,dA.$$

Birinci terim. D, köşegenleri 2 uzunluğunda olan bir karedir; alanı $\frac{2\cdot 2}{2} = 2$'dir. Önerme 2.1 (iv) gereği birinci terim $2\cdot 2 = 4$'tür.
İkinci terim. D'yi I. tip olarak yazalım: $-1 \le x \le 1$ ve $-(1-|\,x\,|) \le y \le 1-|\,x\,|$. Sabit x için

$$\int_{-(1-|\,x\,|)}^{1-|\,x\,|} x^2y^3\,dy = 0$$

olur, çünkü y^3 tek fonksiyondur ve aralık simetriktir. Dolayısıyla ikinci terim 0'dır.
Üçüncü terim. Bu kez D'yi II. tip yazalım: $-1 \le y \le 1$ ve $-(1-|\,y\,|) \le x \le 1-|\,y\,|$. Sabit y için $\sin x$ tek olduğundan

$$\int_{-(1-|\,y\,|)}^{1-|\,y\,|} y^2\sin x\,dx = 0$$

olur ve üçüncü terim de 0'dır.
Sonuç.

$$\iint_D \big(\,2 + x^2y^3 - y^2\sin x\,\big)\,dA = 4 + 0 - 0 = 4.$$

■

Genel bölgelerde integrali artık iki adımda kuruyoruz: bölgeyi iki eğri arasına sıkıştırıyor, sonra ardışık integrali yazıyoruz. Bazı bölgeler ise x ve y ile değil, merkeze uzaklık ve açıyla çok daha kolay betimlenir: diskler, halkalar ve daire dilimleri. Bir sonraki bölümde böyle bölgeler için kutupsal koordinatlara geçiyoruz: Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. Kutupsal Koordinatlarda İki Katlı İntegraller

Merkezi orijinde olan bir disk üzerinde $\iint_R f(x,y)\,dA$ integralini hesaplamak istediğimizi düşünelim. Dik koordinatlarda a yarıçaplı disk

$$-a \le x \le a, \qquad -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2}$$

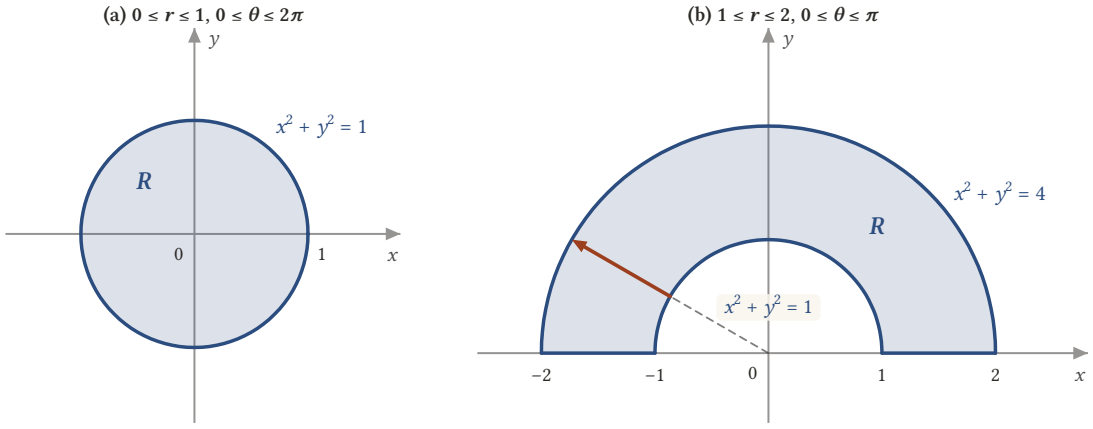
diye yazılır. Sınırlarda karekökler belirir ve iç integral çoğu zaman zahmetli bir hesaba dönüşür. Oysa aynı disk kutupsal koordinatlarda yalnızca $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$ demektir: bütün sınırlar sabittir.
Bu bölümde iki katlı integrali kutupsal koordinatlara taşımayı öğreneceğiz. Kural kısadır: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ yazılır ve dA yerine $r\,dr\,d\theta$ konur. Asıl iş, bu fazladan r çarpanının nereden geldiğini anlamaktır; cevap küçük kutupsal dikdörtgenlerin alanındadır. Daireler, halkalar, gül eğrileri ya da orijinden geçen çemberlerle sınırlı bölgelerde integral bu sayede birkaç satırda hesaplanır.

3.1 Kutupsal Koordinatlar ve Bölgeler

Önce kutupsal koordinatları kısaca hatırlayıp hangi bölgelerin bu koordinatlarla kolay yazıldığını görelim. Düzlemde bir P noktasının kutupsal koordinatları (r,θ)'dır: r, P'nin orijine uzaklığı; θ ise pozitif x ekseninden OP doğrultusuna saat yönünün tersine ölçülen açıdır (bkz. Analitik Geometri). Dik koordinatlarla bağlantı

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

eşitlikleriyle kurulur.
Bu koordinatlarda orijin merkezli çemberler $r = \text{sabit}$, orijinden çıkan ışınlar ise $\theta = \text{sabit}$ denklemleriyle yazılır. Bu yüzden çemberler ve ışınlarla sınırlı bir bölge, r ve θ için sabit sınırlarla betimlenir. Örneğin birim disk $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ ile; üst yarı düzlemde $x^2+y^2=1$ ile $x^2+y^2=4$ çemberleri arasında kalan yarım halka da $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$ ile verilir.



Şekil 3.1: Kutupsal koordinatlarla kolay yazılan iki bölge. (a) Birim disk: $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$. (b) Üst yarı düzlemde $x^2+y^2=1$ ile $x^2+y^2=4$ çemberleri arasındaki yarım halka: $1 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le \pi$. Okla gösterilen ışın bölgeye $r=1$'de girer, $r=2$'de çıkar.

 CC BY-NC-SA 4.0

3.2 Kutupsal Dikdörtgen

Yukarıdaki iki bölge, dik koordinatlardaki dikdörtgenin kutupsal karşılığı olan bir bölge türünün özel hâlleridir.

Tanım 3.1 (Kutupsal Dikdörtgen). $0 \le a < b$ ve $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$ olsun. Kutupsal koordinatları

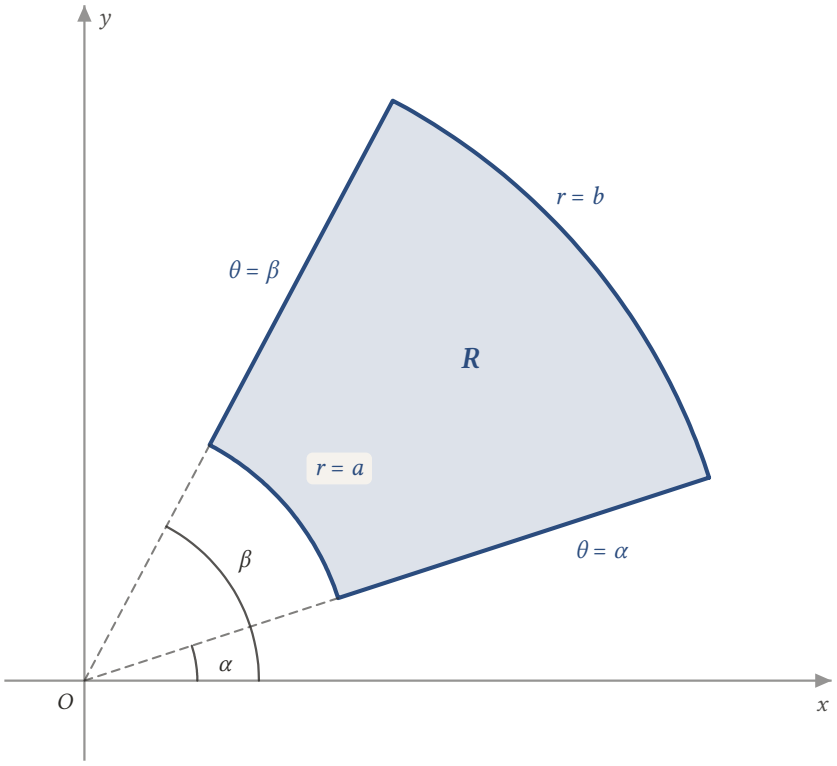
$$a \le r \le b, \qquad \alpha \le \theta \le \beta$$

koşullarını sağlayan noktaların oluşturduğu

$$R = \{(r, \theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$$

kümesine **kutupsal dikdörtgen** (polar rectangle) denir.

Yani kutupsal dikdörtgen, r ve θ için birer kapalı aralık seçilerek elde edilir. Sınırında iki çember yayı ($r = a$ ve $r = b$) ile iki ışın parçası ($\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$) vardır; biçimi bir halka dilimidir. $a = 0$ ise dilim orijine kadar uzanır ve bir daire dilimi olur. $\beta - \alpha = 2\pi$ ise tam bir halka ya da disk elde edilir. $\beta - \alpha \le 2\pi$ koşulu, düzlemin hiçbir parçasının iki kez sayılmamasını sağlar.



Şekil 3.2: Kutupsal dikdörtgen $R = \{(r, \theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$: iki çember yayı ile iki ışın parçasının sınırladığı halka dilimi.

Bir kutupsal dikdörtgenin alanı, iki daire diliminin alanları farkıdır. Bu küçük hesap, bölümün bütün formüllerinin kaynağıdır.

Önerme 3.1 (Kutupsal Dikdörtgenin Alanı). *$a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$ ile verilen R kutupsal dikdörtgeninin alanı*

$$A(R) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)(\beta - \alpha) = \bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta$$

olur. Burada $\bar{r} = \dfrac{a+b}{2}$ ortalama yarıçap, $\Delta r = b - a$ ve $\Delta\theta = \beta - \alpha$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Yarıçapı ρ ve merkez açısı φ ($0 < \varphi \leq 2\pi$) olan daire diliminin alanı $\frac{1}{2}\rho^2\varphi$'dir, çünkü bu dilim $\pi\rho^2$ alanlı dairenin $\frac{\varphi}{2\pi}$ kadarıdır.
R, yarıçapı b ve merkez açısı $\Delta\theta$ olan daire diliminden, aynı açılı ve yarıçapı a olan dilim çıkarılarak elde edilir. Bu yüzden

$$A(R) = \frac{1}{2}b^2\,\Delta\theta - \frac{1}{2}a^2\,\Delta\theta = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\Delta\theta$$

olur. $b^2 - a^2 = (b+a)(b-a)$ çarpanlarına ayrılırsa

$$A(R) = \frac{a+b}{2}\,(b-a)\,\Delta\theta = \bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta$$

bulunur. ■

Yani kutupsal dikdörtgenin alanı, kenarları Δr ve $\bar{r}\,\Delta\theta$ olan sıradan bir dikdörtgenin alanına tam olarak eşittir; $\bar{r}\,\Delta\theta$, ortalama yarıçaptaki yayın uzunluğudur. Alanın yalnızca $\Delta r\,\Delta\theta$ olmadığına dikkat edin: yanında bir $\bar{r}$ çarpanı vardır. Aynı Δr ve $\Delta\theta$ ile orijinden uzakta daha geniş bir dilim elde edilir.

3.3 İki Katlı İntegrali Kutupsal Koordinatlara Taşımak

Şimdi bir kutupsal dikdörtgen üzerindeki integrali, iki katlı integralin Riemann toplamlarıyla tanımını (Tanım 1.2) kutupsal hücrelerle tekrarlayarak hesaplayacağız.
R, $a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ile verilen bir kutupsal dikdörtgen olsun. $[a,b]$ aralığını m, $[\alpha,\beta]$ aralığını n eşit parçaya bölelim:

$$r_i = a + i\,\Delta r,\ \Delta r = \frac{b-a}{m},$$
$$\theta_j = \alpha + j\,\Delta\theta, \Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n}.$$

$r = r_i$ çemberleri ile $\theta = \theta_j$ ışınları R'yi mn tane küçük kutupsal dikdörtgene böler:

$$R_{ij} = \{(r,\theta) \mid r_{i-1} \leq r \leq r_i, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}.$$

Her hücrenin "merkezi" olarak kutupsal koordinatları

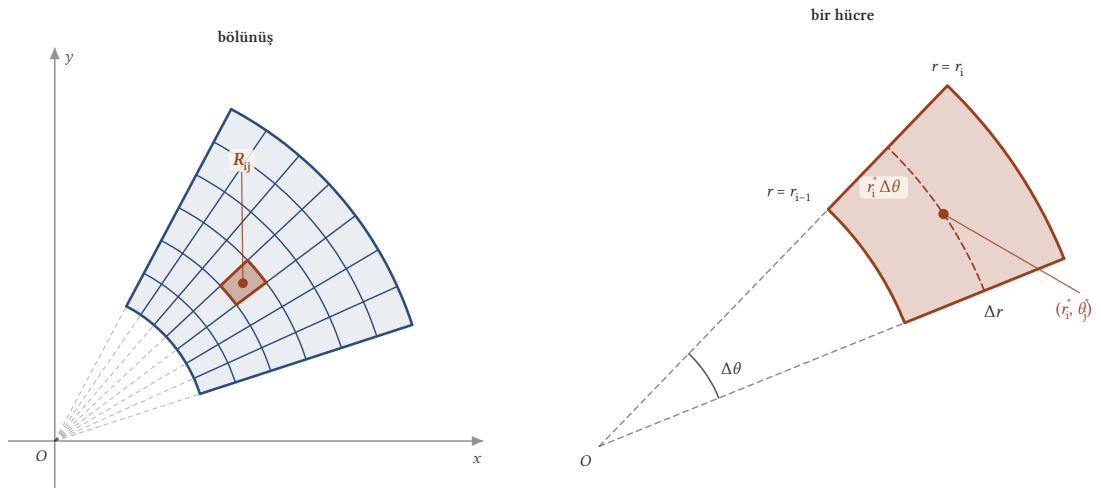
$$r_i^* = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, \qquad \theta_j^* = \frac{\theta_{j-1} + \theta_j}{2}$$

olan noktayı seçelim. Önerme 3.1 gereği hücrenin alanı tam olarak

$$\Delta A_{ij} = r_i^*\,\Delta r\,\Delta\theta$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.3: Sol: $r = r_i$ çemberleri ve $\theta = \theta_j$ ışınları R'yi küçük kutupsal dikdörtgenlere böler. Sağ: bir R_{ij} hücresi. Işın yönündeki kenarı Δr, merkezinden geçen yayın uzunluğu $r_i^* \Delta\theta$dır ve alanı tam olarak $\Delta A_{ij} = r_i^* \Delta r \Delta\theta$dır.

Dik koordinatlarda hücrenin merkezi $\left(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*\right)$ noktasıdır. Örnek noktaları bu merkezler olan Riemann toplamı şöyledir:

$$\begin{aligned} S_{mn} &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*\right)\Delta A_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*\right) r_i^* \, \Delta r \, \Delta\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Şimdi $r\theta$-düzleminde

$$g(r,\theta) = r\, f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman (1) toplamı

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g\left(r_i^*, \theta_j^*\right)\Delta r \, \Delta\theta$$

biçimini alır. Bu, g'nin $[a,b]\times[\alpha,\beta]$ sıradan dikdörtgeni üzerindeki bir Riemann toplamıdır. Bölünüş inceldikçe aynı S_{mn} sayıları bir yandan $\iint_R f\, dA$ integraline, öte yandan g'nin $r\theta$-düzlemindeki integraline yaklaşır. Fubini Teoremi (Teorem 1.2) bu son integrali bir ardışık integral olarak hesaplatır. Sonuç aşağıdaki teoremdir; (ii) şıkkı, sınırları sabit olmayan bölgeleri de kapsar.

Teorem 3.1 (Kutupsal Koordinatlara Geçiş). *(i) **Kutupsal dikdörtgen.** $0 \le a < b$ ve $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$ olsun. f, $a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$ ile verilen R kutupsal dikdörtgeninde sürekli ise*

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

olur.
*(ii) **Genel kutupsal bölge.** $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$ olsun; h_1 ve h_2, $[\alpha,\beta]$ aralığında sürekli ve $0 \le h_1(\theta) \le h_2(\theta)$ olsun. f,*

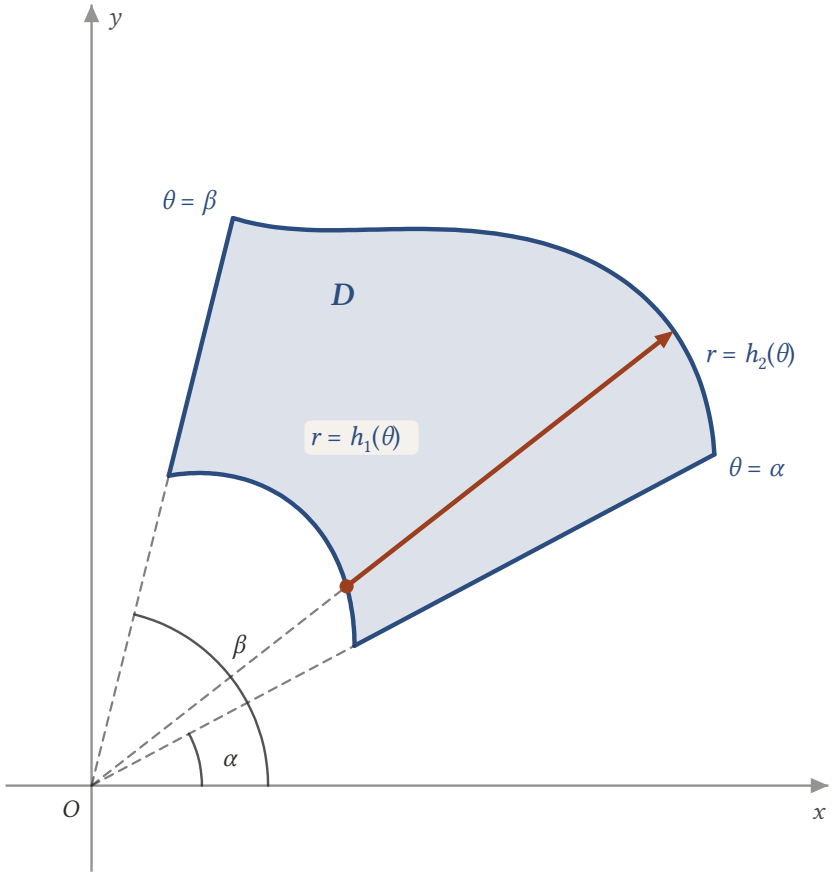
$$D = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$$

bölgesinde sürekli ise

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

olur.



Şekil 3.4: D = {(r, θ) | α ≤ θ ≤ β, h₁(θ) ≤ r ≤ h₂(θ)}. *Orijinden çıkan her ışın* D*'ye* r = h₁(θ) *eğrisinde girer,* r = h₂(θ) *eğrisinde çıkar; iç integralin sınırları bunlardır.*

İspat.
(i) *Bölünüşü yukarıdaki gibi kuralım;* P_{ij}, R_{ij} *hücresinin merkezi olsun.*
Bir hücrede. f, *kapalı ve sınırlı* R_{ij} *kümesinde sürekli olduğundan orada bir en küçük değer* m_{ij} *ve bir en büyük değer* M_{ij} *alır (bkz. Analiz 4).* ΔA_{ij} *hücrenin alanıdır; integralin sınırlama özelliğinden (Önerme 2.1) hem* $\iint_{R_{ij}} f\,dA$ *hem de* $f(P_{ij})\,\Delta A_{ij}$ *sayısı* $m_{ij}\,\Delta A_{ij}$ *ile* $M_{ij}\,\Delta A_{ij}$ *arasındadır. Bu yüzden*

$$\left| \iint_{R_{ij}} f\,dA - f(P_{ij})\,\Delta A_{ij} \right| \le (M_{ij} - m_{ij})\,\Delta A_{ij}.$$

Hücreleri toplama. *Hücreler* R*'yi örter ve ikişer ikişer yalnız alanı sıfır olan sınır yayları ve parçaları boyunca kesişir. Bölgeye göre toplamsallıktan (Önerme 2.1)* $\iint_R f\,dA$*, hücreler üzerindeki integrallerin toplamıdır. Üçgen eşitsizliğiyle*

$$\left| \iint_R f\,dA - S_{mn} \right| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (M_{ij} - m_{ij})\,\Delta A_{ij}$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Hücreler küçülünce. f, kapalı ve sınırlı R kümesinde sürekli olduğundan düzgün süreklidir (bkz. Analiz 4). Yani her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ vardır ki aralarındaki uzaklık δ'dan küçük olan her iki noktada f'nin değerleri ε'dan az farklıdır. Bir hücrenin iki noktası (r,θ) ile (r',θ') arasındaki uzaklık en çok $\Delta r + b\,\Delta\theta$'dır: (r,θ)'dan (r,θ')'ya giden kiriş, uzunluğu $r \mid \theta - \theta' \mid \le b\,\Delta\theta$ olan yaydan kısadır; (r,θ') ile (r',θ') arası da $\mid r - r' \mid \le \Delta r$'dir. m ve n yeterince büyükse $\Delta r + b\,\Delta\theta < \delta$ olur, her hücrede $M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$ sağlanır ve

$$\left| \iint_R f\,dA - S_{mn} \right| < \varepsilon \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta A_{ij} = \varepsilon\, A(R)$$

elde edilir.
Limit. $g(r,\theta) = r\,f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $Q = [a,b]\times[\alpha,\beta]$ dikdörtgeninde süreklidir; dolayısıyla integrallenebilirdir ve Riemann toplamları S_{mn}, $m,n\to\infty$ iken $\iint_Q g\,dA$ sayısına yakınsar. Fubini Teoremi (Teorem 1.2) bu sayıyı $\int_\alpha^\beta \int_a^b g\,dr\,d\theta$ ardışık integraline eşitler. Son eşitsizlikte limit alınırsa

$$\left| \iint_R f\,dA - \int_\alpha^\beta \int_a^b g\,dr\,d\theta \right| \le \varepsilon\, A(R)$$

olur. $\varepsilon > 0$ rastgele olduğundan iki integral eşittir.
(ii) $b > 0$, h_2'nin $[\alpha,\beta]$ üzerindeki en büyük değerinden küçük olmayan bir sayı olsun; D, $0 \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$ kutupsal dikdörtgeninin (R diyelim) içindedir. F, D'de f'ye, R'nin geri kalanında 0'a eşit olsun. F, D'nin sınırında süreksiz olabilir. Önce gereken integrallerin var olduğunu görelim, sonra (i)'deki adımları F için yeniden yapalım.
İntegraller vardır. D'nin sınırı, $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ ışınlarından birer doğru parçası ile $r = h_1(\theta)$, $r = h_2(\theta)$ eğrilerinden oluşur. h_1 ve h_2 türevlenebilir olmayabilir; yine de bu eğriler, toplam alanı istendiği kadar küçük karelerle örtülür. $\omega(\delta)$, aralarındaki fark δ'yı aşmayan iki açıda h_2'nin değerlerinin en büyük farkı olsun; h_2 düzgün sürekli olduğundan $\delta \to 0$ iken $\omega(\delta) \to 0$'dır. $[\alpha,\beta]$ aralığını uzunluğu δ olan k parçaya bölelim. Bir parçada eğrinin r değerleri uzunluğu en çok $\omega(\delta)$ olan bir aralıktadır. Bu aralığı uzunluğu en çok $b\,\delta$ olan, en çok $\omega(\delta)/(b\,\delta) + 1$ parçaya bölelim. Ortaya çıkan her küçük kutupsal dikdörtgenin iki noktası arasındaki uzaklık, (i)'deki gibi, en çok $b\,\delta + b\,\delta = 2b\,\delta$'dır; bu yüzden kenarı $2b\,\delta$ olan bir kareye sığar. Bu karelerin toplam alanı en çok

$$k\left(\frac{\omega(\delta)}{b\,\delta} + 1\right)(2b\,\delta)^2 = 4b\,(\beta-\alpha)\,\left(\,\omega(\delta) + b\,\delta\,\right)$$

olur ve $\delta \to 0$ iken 0'a gider. $r = h_1(\theta)$ eğrisi de aynı biçimde örtülür. Teorem 1.1 (ii)'nin ispatı, süreksizlik eğrilerinden yalnız bu örtülme özelliğini kullanır. f'nin D'den sıfırla genişletmesi sınırlıdır ve yalnız D'nin sınırında süreksiz olabilir; bu yüzden D'yi içeren her dikdörtgende integrallenebilirdir, yani $\iint_D f\,dA$ vardır. Aynı nedenle her hücrede $\iint_{R_{ij}} F\,dA$ da vardır; bu kez süreksizlikler, yaylar ve doğru parçalarından oluşan hücre sınırında da olabilir.
F, R'yi içeren bir koordinat dikdörtgenine sıfırla genişletilirse f'nin D'den sıfırla genişletmesi elde edilir. Bu yüzden tanım gereği (Tanım 2.1) $\iint_D f\,dA = \iint_R F\,dA$'dır.
Hücrelerde tahmin. D'nin sınırına değmeyen bir hücre ya tamamen D'nin içinde ya da tamamen dışında kalır. Orada F sürekli (f ya da 0) olduğundan (i)'deki tahmin aynen geçerlidir. K, $\mid f \mid$'nin D üzerindeki en büyük değeri olsun; D'nin sınırına değen hücrelerde kaba tahmin

$$\left| \iint_{R_{ij}} F\,dA - F(P_{ij})\,\Delta A_{ij} \right| \le 2K\,\Delta A_{ij}$$

yeterlidir, çünkü bu hücrelerin toplam alanı sıfıra gider:

- $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ ışınlarına orijin dışında değen hücreler ilk ve son açı dilimindedir; toplam alanları en çok $b^2\,\Delta\theta$'dır.
- Bir açı diliminde $r = h_2(\theta)$ eğrisinin r değerleri uzunluğu en çok $\omega(\Delta\theta)$ olan bir aralıktadır. İlk ve son dilimin dışında, eğriye orijin dışında bir noktada değen bir hücre bu aralığa da değer; böyle hücrelerin sayısı en çok $\omega(\Delta\theta)/\Delta r + 2$'dir ve her birinin alanı en çok $b\,\Delta r\,\Delta\theta$'dır. n dilim üzerinden toplam alan

 CC BY-NC-SA 4.0

en çok $b(\beta-\alpha)\,\big(\,\omega(\Delta\theta)+2\,\Delta r\,\big)$ olur ve $\omega(\Delta\theta)\to 0$ olduğundan sıfıra gider. $r=h_1(\theta)$ eğrisi için de aynısı geçerlidir.

- *Orijine değen hücreler $i=1$ olanlardır. Her birinin alanı $\frac{\Delta r}{2}\,\Delta r\,\Delta\theta$ olduğundan toplam alanları $\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\,\Delta r^2$'dir.*

Böylece $m,n\to\infty$ iken $\iint_R F\,dA - S_{mn}\to 0$ olur.
Limit. *S_{mn}'nin her terimi, (1)'deki gibi, $r\theta$-düzleminde (r_i^*,θ_j^*) noktasındaki $r\,F(r\cos\theta, r\sin\theta)$ değerinin $\Delta r\,\Delta\theta$ ile çarpımıdır. Bu örnek noktalarda $r>0$ ve $\alpha<\theta<\beta$'dır. Böyle bir noktanın görüntüsü olan $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ noktasının $[\alpha,\beta]$ aralığındaki tek kutupsal açısı, $\beta-\alpha\le 2\pi$ olduğundan, θ'dır. Bu yüzden görüntünün D'de olması için gerek ve yeter koşul, (r,θ) noktasının*

$$E=\{(r,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta,\, h_1(\theta)\le r\le h_2(\theta)\}$$

bölgesinde olmasıdır. Demek ki örnek noktalarda $r\,F(r\cos\theta, r\sin\theta)$, g'nin E'den $[0,b]\times[\alpha,\beta]$ dikdörtgenine sıfırla genişletmesiyle aynı değeri alır. Yani S_{mn} bu genişletmenin bir Riemann toplamıdır. r yatay, θ düşey eksende alınırsa E bir II. tip bölgedir (Tanım 2.3). Teorem 2.2 gereği $\iint_E g\,dA$ vardır ve $\int_\alpha^\beta\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} g\,dr\,d\theta$ ardışık integraline eşittir. Tanım gereği S_{mn} toplamları bu sayıya yakınsar. İki limit aynı olduğundan istenen eşitlik çıkar. ■

Teorem, dik koordinatlardan kutupsal koordinatlara geçişi üç işleme indirger: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ yazılır; r ve θ için uygun sınırlar konur; dA yerine $r\,dr\,d\theta$ yazılır. Bu son işlem, Önerme 3.1 ile bulduğumuz alan formülünün sonsuz küçük biçimidir: kenarları dr ve $r\,d\theta$ olan küçücük bir kutupsal dikdörtgen, alanı $dA=r\,dr\,d\theta$ olan bir dikdörtgen gibi davranır.

⚠ r çarpanını unutmayın

En sık yapılan hata, dA yerine yalnız $dr\,d\theta$ yazmaktır. $dA=r\,dr\,d\theta$ içindeki r, integrali alınan fonksiyon ne olursa olsun, $f=1$ olsa bile eklenir. Örneğin birim diskin alanı

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$$

olarak doğru çıkar; r unutulursa 2π gibi yanlış bir sonuç elde edilir.

3.4 Kutupsal Dikdörtgenlerde Hesap

Önce sınırları sabit olan bölgelerle, yani kutupsal dikdörtgenlerle başlayalım. Teoremi uygulamanın yolu her seferinde aynıdır.

Kutupsal koordinatlara geçiş dört adımda

1. **Bölgeyi çizin ve θ aralığını bulun.** Bölgeyi hangi ışınlar tarıyor? En küçük ve en büyük açı α ile β'dır.
2. **r sınırlarını okuyun.** Sabit bir θ için orijinden çıkan ışın bölgeye nerede girip nerede çıkıyor? Bu iki değer $h_1(\theta)$ ve $h_2(\theta)$'dır.
3. **Fonksiyonu dönüştürün.** $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $x^2+y^2=r^2$ yazın ve dA yerine $r\,dr\,d\theta$ koyun.
4. **Önce r'ye, sonra θ'ya göre integral alın.**

İlk örnekte bu dört adımı tek tek izliyoruz.

Örnek 3.1 (Yarım Halka Üzerinde Bir İntegral). R, üst yarı düzlemde $x^2+y^2=1$ ve $x^2+y^2=4$ çemberleri arasında kalan bölge olmak üzere

$$\iint_R (3x+4y^2)\,dA$$

integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Adım 1 ve 2: sınırlar. Bölge

$$R = \{(x, y) \mid y \geq 0,\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

yarım halkasıdır (bölümün başındaki şeklin (b) panelinde gösterilen bölge). Üst yarı düzlemi $0 \leq \theta \leq \pi$ açıları tarar. Bu açıların her birindeki ışın bölgeye $r = 1$'de girer, $r = 2$'de çıkar. Demek ki R, $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq \pi$ kutupsal dikdörtgenidir.
Adım 3: dönüşüm. $3x + 4y^2 = 3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta$ ve $dA = r\,dr\,d\theta$ olduğundan Teorem 3.1 gereği

$$\iint_R (3x + 4y^2)\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta)\,dr\,d\theta$$

olur.
Adım 4: integraller. İç integralde θ sabittir:

$$\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta)\,dr = \Big[\, r^3\cos\theta + r^4\sin^2\theta \,\Big]_{r=1}^{r=2} = 7\cos\theta + 15\sin^2\theta.$$

Burada $2^3 - 1^3 = 7$ ve $2^4 - 1^4 = 15$'tir. Dış integral için $\sin^2\theta = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ özdeşliğini kullanalım:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (7\cos\theta + 15\sin^2\theta)\,d\theta &= \int_0^{\pi}\left(7\cos\theta + \frac{15}{2} - \frac{15}{2}\cos 2\theta\right)d\theta \\ &= \left[7\sin\theta + \frac{15\theta}{2} - \frac{15}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{15\pi}{2}.\end{aligned}$$

Sinüs terimleri 0 ve π'de sıfır olduğundan yalnız $\frac{15\pi}{2}$ kalır. Sonuç $\iint_R (3x + 4y^2)\,dA = \dfrac{15\pi}{2}$'dir. ■

Bazen integral bize dik koordinatlarda bir ardışık integral olarak verilir. Önce bu ardışık integralin hangi bölge üzerinde alındığını bulur, sonra bölgeyi kutupsal koordinatlarla yeniden yazarız.

Örnek 3.2 (Ardışık İntegrali Kutupsal Koordinatlara Çevirme). Aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx.$$

Çözüm.
Bölge. Sınırlar

$$R = \left\{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\right\}$$

bölgesini verir. $y = \sqrt{1 - x^2}$, birim çemberin üst yarısıdır; demek ki R, birim diskin üst yarısıdır. Kutupsal koordinatlarda R, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ ile verilir.
Dönüşüm. $x^2 + y^2 = r^2$ ve $dA = r\,dr\,d\theta$'dır:

$$\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^1 r^2 \cdot r\,dr\,d\theta.$$

Hesap. İç integral $\displaystyle\int_0^1 r^3\,dr = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$'tür ve θ'ya bağlı değildir. Bu yüzden

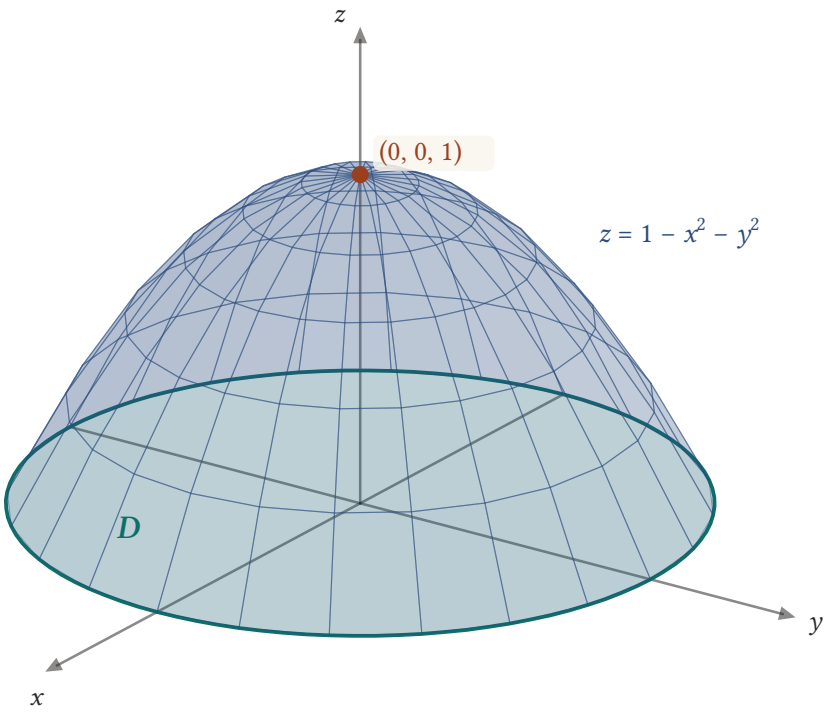
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{4}\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Dik koordinatlarda iç integral $x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$ ifadesini verir ve dış integral trigonometrik bir değişken değiştirme gerektirirdi. ■

Kutupsal koordinatların en çok işe yaradığı yerlerden biri, tabanı disk olan cisimlerin hacmidir.

Örnek 3.3 (Paraboloidin Altındaki Hacim). $z = 0$ düzlemi ile $z = 1 - x^2 - y^2$ paraboloidi arasında kalan cismin hacmini bulunuz.



Şekil 3.5: $z = 1 - x^2 - y^2$ paraboloidi ile xy-düzlemi arasındaki cisim. Paraboloit düzlemi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi boyunca keser; taban D birim disktir.

Çözüm.
Taban. Paraboloidin denkleminde $z = 0$ yazılırsa $x^2 + y^2 = 1$ bulunur; yani düzlem paraboloidi birim çember boyunca keser. Cisim, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ birim diskinin üstünde ve paraboloidin altındadır. Kutupsal koordinatlarda D, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ kutupsal dikdörtgenidir.
Hacim. Cismin yüksekliği $1 - x^2 - y^2 = 1 - r^2$'dir. Bu yüzden

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2) r\,dr\,d\theta$$

olur. İç integral

$$\int_0^1 (r - r^3)\,dr = \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

sabittir; dış integral bunu 2π ile çarpar. Sonuç

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

olur.
Dik koordinatlarda aynı hacim

 CC BY-NC-SA 4.0

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

olarak yazılırdı. İç integral $\frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}$ verir ve $\int (1-x^2)^{3/2}\, dx$ integrali trigonometrik değişken değiştirme ister. Kutupsal koordinatlar bu zahmeti ortadan kaldırır. ■

3.5 Genel Kutupsal Bölgeler

Teoremin (ii) şıkkı (Teorem 3.1), sınırları sabit olmayan bölgeleri de kapsar. Bu bölgeler II. tip bölgelerin (Tanım 2.3) kutupsal karşılığıdır. Orada x, y'ye bağlı iki eğri arasında, y ise sabit sınırlar arasında değişiyordu. Burada r, θ'ya bağlı iki eğri arasında, θ ise sabit sınırlar arasında değişir.
Teoremde $f = 1$, $h_1 = 0$ ve $h_2 = h$ alınırsa, kutupsal bir eğriyle sınırlı bölgenin alanı için tanıdık bir formül çıkar.

Sonuç 3.1 (Kutupsal Bölgenin Alanı). *$\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ olsun ve h, $[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ ışınları ile $r = h(\theta)$ eğrisinin sınırladığı*

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, 0 \leq r \leq h(\theta)\}$$

bölgesinin alanı

$$A(D) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[h(\theta)]^2 d\theta$$

olur.

İspat.
Bir bölgenin alanı, 1 fonksiyonunun o bölge üzerindeki integralidir (Önerme 2.1). Teorem 3.1, $h_1 = 0$ ve $h_2 = h$ ile uygulanırsa

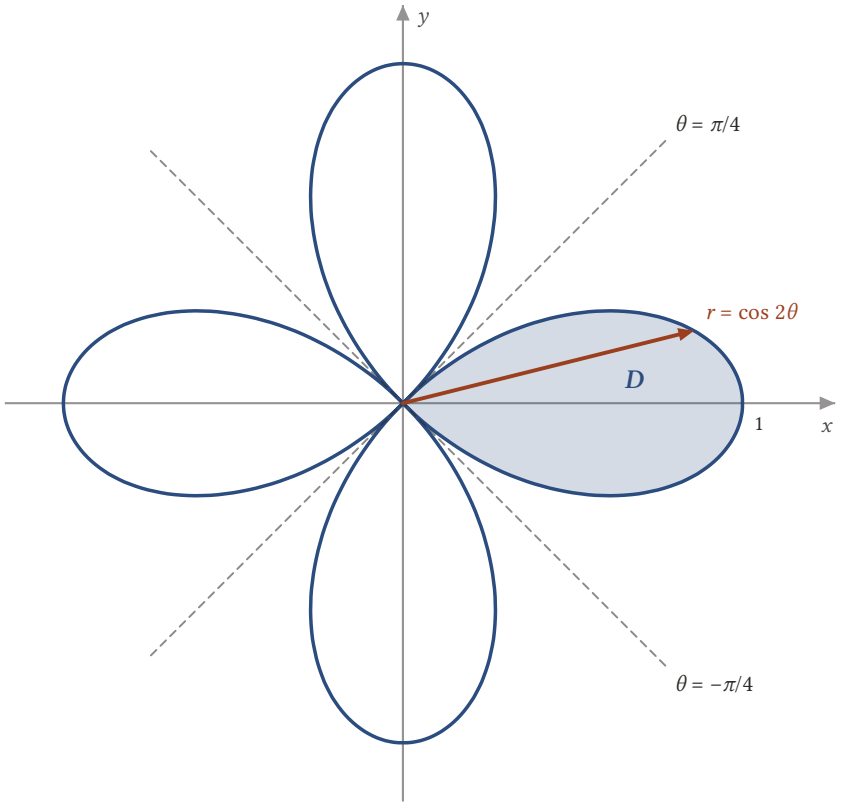
$$A(D) = \iint_D 1\, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{h(\theta)} r\, dr\, d\theta$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=h(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[h(\theta)]^2 d\theta$$

bulunur. ■

Yani iki katlı integral, tek değişkenli analizdeki kutupsal alan formülünü (bkz. Analiz 2) yeni bir yoldan verir.

Örnek 3.4 (Gülün Bir Yaprağının Alanı). $r = \cos 2\theta$ dört yapraklı gülünün bir yaprağının sınırladığı alanı iki katlı integralle bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.6: $r = \cos 2\theta$ dört yapraklı gülü. Sağdaki yaprak $\theta = -\pi/4$ ile $\theta = \pi/4$ ışınları arasındadır; bu açılardaki her ışın orijinden çıkıp eğriye $r = \cos 2\theta$'da ulaşır.

Çözüm.
Bölge. Sağdaki yaprağı alalım. $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ iken $-\frac{\pi}{2} \le 2\theta \le \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\cos 2\theta \ge 0$'dır. Uç açılarda $\cos 2\theta = 0$ olur, yani eğri bu iki ışın boyunca orijine döner ve bir yaprak tamamlanır. Bu açıların her birindeki ışın orijinden çıkar ve eğriye $r = \cos 2\theta$'da ulaşır:

$$D = \left\{(r,\theta) \mid -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le \cos 2\theta\right\}.$$

Alan. Sonuç 3.1 gereği

$$A(D) = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{0}^{\cos 2\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2}\cos^2 2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(1+\cos 4\theta)d\theta$$

olur; burada $\cos^2 2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 4\theta)$ özdeşliğini kullandık. Son integral

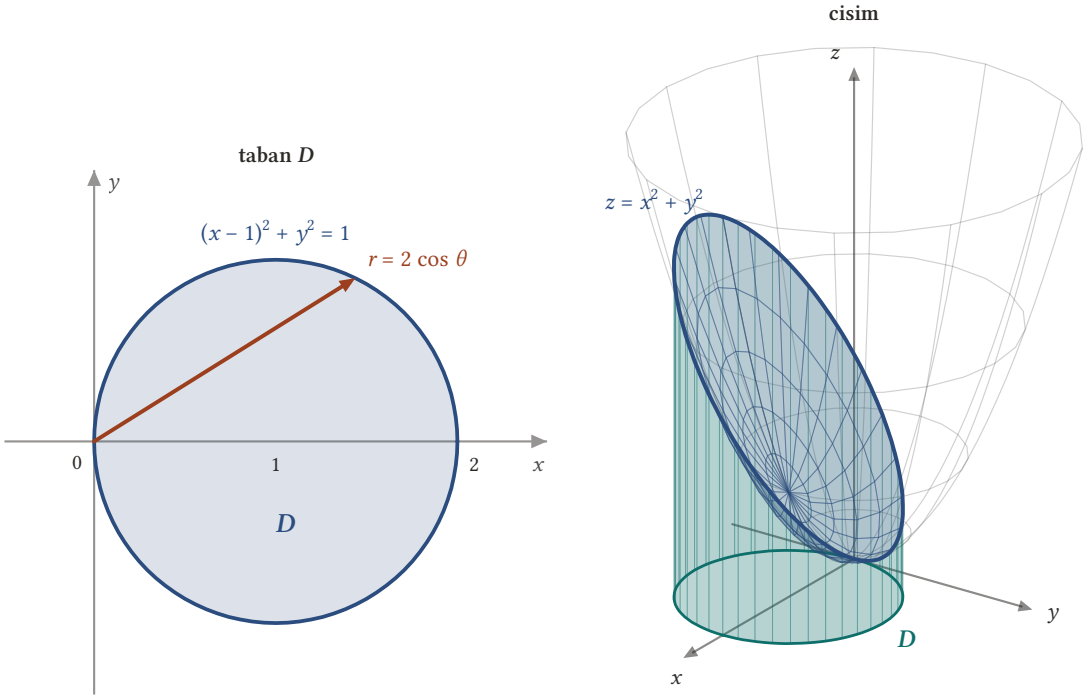
$$\frac{1}{4}\left[\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

olur, çünkü $\sin(\pm\pi) = 0$'dır. Bir yaprağın alanı $\frac{\pi}{8}$'dir. ■

Son örnekte taban bölgesi orijinden geçen bir çemberdir. Böyle bir çemberin kutupsal denklemi çok sadedir ve bölgeyi bir genel kutupsal bölge olarak yazmamızı sağlar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 3.5 (Silindirin İçinde, Paraboloidin Altında). $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin altında, xy-düzleminin üstünde ve $x^2 + y^2 = 2x$ silindirinin içinde kalan cismin hacmini bulunuz.



Şekil 3.7: Sol: taban D, $(x-1)^2 + y^2 = 1$ diskidir; kutupsal denklemi $r = 2\cos\theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Sağ: $x^2 + y^2 = 2x$ silindirinin içinde, xy-düzleminin üstünde ve $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin altında kalan cisim.

Çözüm.
Taban. Cisim, sınır çemberi $x^2 + y^2 = 2x$ olan D diskinin üstündedir. Kareye tamamlarsak

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$

bulunur: merkezi $(1, 0)$, yarıçapı 1 olan çember. Kutupsal koordinatlarda $x^2 + y^2 = r^2$ ve $x = r\cos\theta$ olduğundan çemberin denklemi $r^2 = 2r\cos\theta$, yani $r = 2\cos\theta$ olur ($r = 0$ çözümü orijindir, o da çemberin üstündedir). $r \ge 0$ olması için $\cos\theta \ge 0$, yani $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ gerekir; bu aralıkta $r = 2\cos\theta$ çemberi bir kez dolanır. Her ışın orijinden çıkıp çembere $r = 2\cos\theta$'da ulaştığından

$$D = \left\{(r,\theta) \mid -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\theta\right\}$$

olur.
Hacim. Cismin yüksekliği $x^2 + y^2 = r^2$'dir. Teorem 3.1 (ii) ile

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^4\theta\,d\theta$$

bulunur. $\cos^4\theta$ çift fonksiyon olduğundan bu integral $8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$'ya eşittir.
Trigonometrik integral. $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ özdeşliğini iki kez kullanalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$8\cos^4\theta = 2(1+\cos 2\theta)^2 = 2(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)$$
$$= 2\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right).$$

Buradan

$$V = 2\left[\frac{3\theta}{2}+\sin 2\theta+\frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

elde edilir; sinüs terimleri 0 ve $\frac{\pi}{2}$'de sıfırdır. ■

3.6 Alıştırmalar

Alıştırmalar kolaydan zora sıralıdır. Hepsinde işin yarısı, bölgeyi kutupsal koordinatlarla doğru yazmaktır.

Alıştırma 3.1 (Üç Çeyrek Diskte Koordinat Seçimi). R, merkezi orijinde ve yarıçapı 4 olan diskin birinci, ikinci ve üçüncü bölgelerde kalan kısmı olsun (dördüncü bölgedeki çeyrek dışarıda kalır). f, R üzerinde sürekli rastgele bir fonksiyondur. $\iint_R f(x,y)\,dA$ integralini kutupsal mı, dik koordinatlarla mı yazmak daha uygundur? Seçtiğiniz koordinatlarla bir ardışık integral olarak yazınız.

Çözüm.
R'nin sınırı $r=4$ çemberinin bir yayı ile iki ışın parçasından oluşur: pozitif x ekseni ($\theta=0$) ve negatif y ekseni ($\theta=\frac{3\pi}{2}$). Pozitif x ekseninden başlayıp saat yönünün tersine dönersek birinci, ikinci ve üçüncü bölgeleri tarar ve negatif y ekseninde dururuz. Her ışın orijinden çıkıp çembere $r=4$'te ulaşır. Demek ki R,

$$0\le r\le 4, \qquad 0\le\theta\le\frac{3\pi}{2}$$

kutupsal dikdörtgenidir ve kutupsal koordinatlar uygundur:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_0^{3\pi/2}\int_0^4 f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Dik koordinatlarda ise bölgeyi en az iki parçaya ayırmak gerekirdi: $-4\le x\le 0$ için $-\sqrt{16-x^2}\le y\le\sqrt{16-x^2}$ ve $0\le x\le 4$ için $0\le y\le\sqrt{16-x^2}$. ■

Alıştırma 3.2 (Üçgende Koordinat Seçimi). R, köşeleri $(-1,1)$, $(1,1)$ ve $(1,-1)$ olan üçgensel bölge olsun ve f, R üzerinde sürekli rastgele bir fonksiyon olsun. $\iint_R f(x,y)\,dA$ integralini kutupsal mı, dik koordinatlarla mı yazmak daha uygundur? Seçtiğiniz koordinatlarla bir ardışık integral olarak yazınız.

Çözüm.
Üçgenin kenarları $y=1$ (üst), $x=1$ (sağ) ve $(-1,1)$ ile $(1,-1)$ noktalarından geçen $y=-x$ doğrusudur. Her $-1\le x\le 1$ için düşey doğru bölgeye $y=-x$'te girer, $y=1$'de çıkar. Yani R bir I. tip bölgedir (Tanım 2.2):

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{-x}^{1} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Kutupsal koordinatlar burada elverişsizdir. $y=-x$ doğrusu orijinden geçer ve $\theta=-\frac{\pi}{4}$, $\theta=\frac{3\pi}{4}$ ışınlarını verir. Ama ışınlar bölgeden iki farklı kenardan çıkar: $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ için $x=1$ kenarından ($r=\frac{1}{\cos\theta}$), $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$ için $y=1$ kenarından ($r=\frac{1}{\sin\theta}$). Kutupsal yazım iki integral ve daha karmaşık sınırlar ister. Dik koordinatlar daha uygundur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 3.3 (İntegralin Bölgesini Bulma). $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta$ integrali hangi bölgenin alanıdır? Bölgeyi betimleyip integrali hesaplayınız.

Çözüm.
Bölge. $r\,dr\,d\theta = dA$ olduğundan integral, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, $0 \le r \le 2\sin\theta$ bölgesinin alanıdır. $r = 2\sin\theta$ eğrisini dik koordinatlara çevirelim: iki yanı r ile çarparsak

$$r^2 = 2r\sin\theta \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

olur. Bu, merkezi $(0,1)$, yarıçapı 1 olan çemberdir. $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ açıları $x \le 0$, $y \ge 0$ bölgesini taradığından bölge, bu diskin y ekseninin solunda kalan yarısıdır.
Hesap. Sonuç 3.1 ile

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2}(2\sin\theta)^2\,d\theta &= \int_{\pi/2}^{\pi} 2\sin^2\theta\,d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

bulunur. Bu, beklendiği gibi yarıçapı 1 olan dairenin alanının yarısıdır. ■

Alıştırma 3.4 (İki Çember Arasında Bir İntegral). D, birinci bölgede $x^2+y^2=4$ ve $x^2+y^2=2x$ çemberleri arasında kalan bölge olmak üzere $\iint_D x\,dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Bölge. $x^2+y^2=4$ çemberi $r=2$'dir. $x^2+y^2=2x$ çemberi, Örnek 3.5 içinde gördüğümüz gibi $r = 2\cos\theta$'dır; merkezi $(1,0)$, yarıçapı 1 olan bu çember büyük çemberin içindedir ve ona $(2,0)$'da teğettir. Birinci bölgede ($0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$) her ışın bölgeye küçük çemberden çıkarken girer, büyük çembere ulaşınca çıkar:

$$D = \left\{(r,\theta) \mid 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\, 2\cos\theta \le r \le 2\right\}.$$

İntegral. $x = r\cos\theta$ olduğundan

$$\iint_D x\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{2} r\cos\theta \cdot r\,dr\,d\theta$$

olur. İç integral

$$\cos\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_{2\cos\theta}^{2} = \frac{8}{3}(\cos\theta - \cos^4\theta)$$

verir. $\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta = 1$ ve Örnek 3.5 çözümünden $\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$ olduğundan

$$\iint_D x\,dA = \frac{8}{3}\left(1 - \frac{3\pi}{16}\right) = \frac{8}{3} - \frac{\pi}{2} \approx 1{,}0959$$

bulunur. ■

Alıştırma 3.5 (Bir Çemberin İçinde, Ötekinin Dışında Alan). $(x-1)^2+y^2=1$ çemberinin içinde ve $x^2+y^2=1$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.
Bölge. Çemberler kutupsal koordinatlarda $r = 2\cos\theta$ ve $r = 1$'dir. Kesişim noktalarında $2\cos\theta = 1$, yani $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$'tür. $-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$ için $2\cos\theta \ge 1$ olduğundan ışın bölgeye $r=1$'de girer, $r = 2\cos\theta$'da çıkar:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$D = \left\{ (r,\theta) \mid -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{3},\, 1 \le r \le 2\cos\theta \right\}.$$

Alan. İç integral $\displaystyle\int_1^{2\cos\theta} r\,dr = \frac{1}{2}(4\cos^2\theta - 1)$ verir. $4\cos^2\theta = 2 + 2\cos 2\theta$ olduğundan bu ifade $\frac{1}{2}(1 + 2\cos 2\theta)$'ya eşittir. Böylece

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1 + 2\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\,\theta + \sin 2\theta\Big]_{-\pi/3}^{\pi/3}$$

olur. $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\sin\!\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan

$$A(D) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1{,}9132$$

bulunur. ■

Alıştırma 3.6 (Çeyrek Halka Üzerinde Hacim). D, birinci bölgede $2 \le r \le 3$ ile verilen çeyrek halka olsun. $f(x,y) = xy^2$ fonksiyonunun grafiğinin altında ve D'nin üstünde kalan cismin hacmini, kutupsal koordinatlarda bir ardışık integral kurarak hesaplayınız.

Çözüm.
Kurulum. D üzerinde $x \ge 0$ olduğundan $f(x,y) = xy^2 \ge 0$'dır; hacim $\iint_D xy^2\,dA$'dır. D, $2 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ kutupsal dikdörtgenidir ve

$$xy^2 = r\cos\theta \cdot r^2\sin^2\theta = r^3\cos\theta\sin^2\theta$$

olur. $dA = r\,dr\,d\theta$ ile

$$V = \int_0^{\pi/2}\int_2^3 r^4\cos\theta\sin^2\theta\,dr\,d\theta$$

bulunur.
Hesap. İç integralde θ sabittir:

$$\cos\theta\sin^2\theta\left[\frac{r^5}{5}\right]_2^3 = \frac{243 - 32}{5}\cos\theta\sin^2\theta = \frac{211}{5}\cos\theta\sin^2\theta.$$

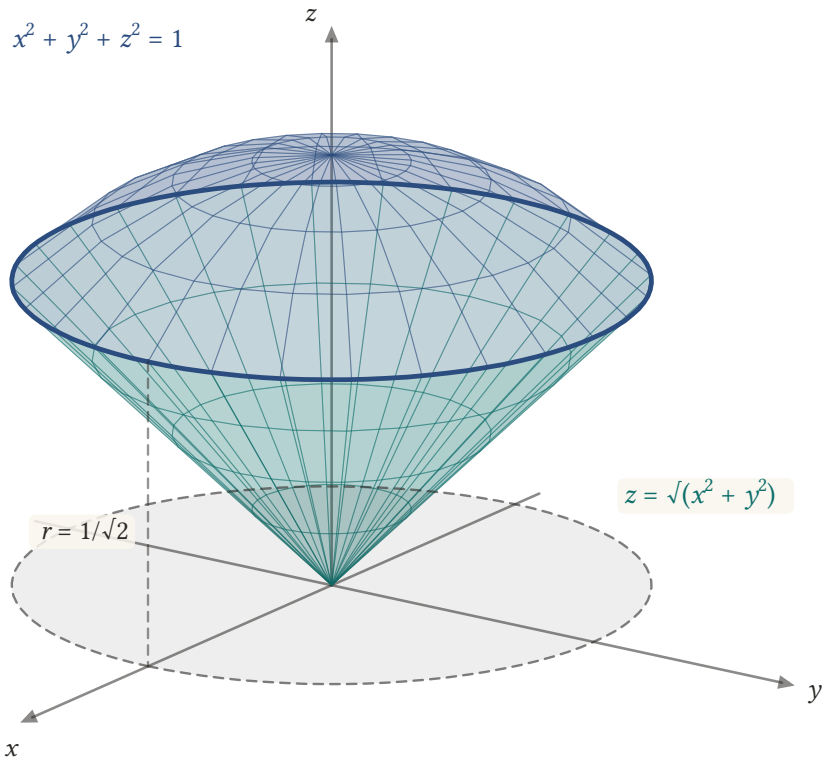
Dış integral $u = \sin\theta$ değişken değiştirmesiyle hesaplanır:

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta = \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}$$

olur. Sonuç $V = \dfrac{211}{5}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{211}{15}$'tir. ■

Alıştırma 3.7 (Koni ile Küre Arasındaki Hacim). $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisinin üstünde ve $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ küresinin altında kalan cismin hacmini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.8: $z = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ konisinin üstünde ve birim kürenin altında kalan dondurma külahı biçimli cisim. Koni ile küre $z = 1/\sqrt{2}$ yüksekliğinde, $r = 1/\sqrt{2}$ yarıçaplı çember boyunca kesişir; cismin xy-düzlemindeki izdüşümü bu yarıçaplı disktir.

Çözüm.
Taban. Kutupsal koordinatlarda koni $z = r$, kürenin üst yarısı $z = \sqrt{1 - r^2}$'dir. İki yüzey $r = \sqrt{1 - r^2}$, yani $r^2 = \frac{1}{2}$ olduğunda kesişir: $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Bu çemberin içinde ($r < \frac{1}{\sqrt{2}}$) $\sqrt{1 - r^2} > r$ olduğundan küre konunun üstündedir. Cismin xy-düzlemindeki izdüşümü $0 \le r \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ diskidir.
Hacim. Her noktada cismin yüksekliği üst yüzey ile alt yüzeyin farkıdır:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 - r^2} - r\right) r \, dr \, d\theta.$$

İç integralde $\int r\sqrt{1 - r^2}\, dr = -\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}$ ve $\int r^2\, dr = \frac{r^3}{3}$'tür:

$$\left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Burada $\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ve $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$'dır. Dış integral 2π ile çarpar:

$$V = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6}\right) = \frac{\pi}{3}\left(2 - \sqrt{2}\right) \approx 0{,}6134$$

bulunur. ■

Alıştırma 3.8 (Ardışık İntegrali Çevirerek Hesaplama). Aşağıdaki integrali kutupsal koordinatlara çevirerek hesaplayınız:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx.$$

Çözüm.
Bölge. $0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}$ koşulu $y \ge 0$ ve $y^2 \le 2x - x^2$, yani $(x-1)^2 + y^2 \le 1$ demektir. Bölge, merkezi $(1,0)$, yarıçapı 1 olan diskin üst yarısıdır. Sınır çemberi $r = 2\cos\theta$'dır (bkz. Örnek 3.5); üst yarıyı $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ açıları tarar:

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le r \le 2\cos\theta.$$

İntegral. $\sqrt{x^2+y^2} = r$ olduğundan

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{(2\cos\theta)^3}{3}\, d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta$$

olur. $\cos^3\theta = (1-\sin^2\theta)\cos\theta$ yazılırsa

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

bulunur. Sonuç $\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{9}$'dur. ■

Alıştırma 3.9 (Tek Bir İntegrale İndirgeme). D birim disk olmak üzere $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\, dA$ integralini r'ye göre tek bir integrale indirgeyiniz ve değerini dört ondalık basamakla bulunuz.

Çözüm.
İndirgeme. $x^2+y^2 = r^2$ olduğundan integrali alınan fonksiyon e^{r^4}'tür ve θ'ya bağlı değildir:

$$\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{r^4}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 r\, e^{r^4}\, dr.$$

Sayısal değer. $u = r^2$, $du = 2r\, dr$ yazılırsa integral $\pi\int_0^1 e^{u^2}\, du$ olur. e^{u^2}'nin ilkeli temel fonksiyonlarla yazılamaz; üstel fonksiyonun kuvvet serisini terim terim integralleyelim:

$$\int_0^1 e^{u^2}\, du = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{2k}}{k!}\, du = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,(2k+1)}.$$

İlk terimler

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{216} + \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} + \frac{1}{75600}$$

ve toplamları $1{,}4626501$'dir. Sonraki terimlerin her biri bir öncekinin dokuzda birinden küçüktür ve ilki $\frac{1}{685440} \approx 1{,}46\cdot 10^{-6}$'dır; kalanların toplamı $2\cdot 10^{-6}$'yı aşmaz. Demek ki $\int_0^1 e^{u^2}\, du \approx 1{,}462652$ ve

$$\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\, dA = \pi \cdot 1{,}462652\ldots \approx 4{,}5951$$

bulunur. ■

Alıştırma 3.10 (Diskte Orijine Ortalama Uzaklık). D, merkezi orijinde ve yarıçapı a olan disk olsun. D'nin noktalarının orijine ortalama uzaklığı nedir?

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bir noktanın orijine uzaklığı $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}=r$'dir. Ortalama değer (Tanım 2.4) integralin bölgenin alanına bölümüdür:

$$f_{\text{ort}}=\frac{1}{A(D)}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA.$$

$A(D)=\pi a^2$'dir. Pay kutupsal koordinatlarda

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{a^3}{3}$$

olur. Böylece

$$f_{\text{ort}}=\frac{2\pi a^3/3}{\pi a^2}=\frac{2a}{3}$$

bulunur. Ortalama uzaklık $\frac{a}{2}$'den büyüktür, çünkü diskin alanının çoğu merkezden uzaktaki halkalardadır: r ile $r+dr$ arasındaki halkanın alanı r ile orantılıdır. ■

Alıştırma 3.11 (Üç İntegrali Tek İntegralde Birleştirme). Aşağıdaki toplamı kutupsal koordinatlarda tek bir iki katlı integral olarak yazıp hesaplayınız:

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx+\int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx.$$

Çözüm.
Bölgeler. Üç integralin bölgeleri yan yana durur:

- $\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le 1$ için y, birim çemberden ($y=\sqrt{1-x^2}$) $y=x$ doğrusuna kadar;
- $1\le x\le\sqrt{2}$ için y, x ekseninden $y=x$ doğrusuna kadar;
- $\sqrt{2}\le x\le 2$ için y, x ekseninden $x^2+y^2=4$ çemberine kadar değişir.

$y=x$ doğrusu birim çemberi $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$'de, $r=2$ çemberini $x=\sqrt{2}$'de keser. Üç parçanın birleşimi, $1\le x^2+y^2\le 4$ halkasının x ekseni ile $y=x$ doğrusu arasındaki parçasıdır:

$$D=\left\{(r,\theta)\mid 1\le r\le 2,\,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}.$$

Tek integral. $xy=r^2\cos\theta\sin\theta$ ile

$$\iint_D xy\,dA=\int_0^{\pi/4}\int_1^2 r^3\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta$$

olur. İç integral $\cos\theta\sin\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2=\frac{15}{4}\cos\theta\sin\theta$ verir. Dış integral

$$\frac{15}{4}\int_0^{\pi/4}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{15}{4}\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}=\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{16}$$

olur. Üç integral tek tek hesaplanırsa $\frac{1}{16}$, $\frac{3}{8}$ ve $\frac{1}{2}$ bulunur; toplamları gerçekten $\frac{15}{16}$'dır. ■

Alıştırma 3.12 (Gauss İntegrali). Kutupsal koordinatlar yardımıyla

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğunu gösteriniz. (D_a yarıçapı a olan, merkezi orijinde bir disk; S_a köşeleri $(\pm a, \pm a)$ olan kare olsun. $e^{-(x^2+y^2)}$ fonksiyonunun bu iki bölge üzerindeki integrallerini karşılaştırınız.)

Çözüm.
Disk üzerinde. Kutupsal koordinatlarda integral tam olarak hesaplanır:

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{a} = \pi\left(1-e^{-a^2}\right).$$

Kare üzerinde. $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-x^2}e^{-y^2}$ olduğundan Fubini Teoremi (Teorem 1.2) integrali iki tek katlı integralin çarpımına ayırır:

$$\iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy = J(a)^2.$$

Burada $J(a) = \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$'tir.
Sıkıştırma. Kare diskin dışını sarar ve köşeleri orijinden $a\sqrt{2}$ uzaklıktadır; bu yüzden $D_a \subseteq S_a \subseteq D_{a\sqrt{2}}$'dir. Fonksiyon pozitif olduğundan, toplamsallık ve karşılaştırma özellikleri (Önerme 2.1) gereği daha büyük bölgede integral daha büyüktür:

$$\pi\left(1-e^{-a^2}\right) \le J(a)^2 \le \pi\left(1-e^{-2a^2}\right).$$

Limit. $a \to \infty$ iken iki sınır da π'ye gider; sıkıştırmayla $J(a)^2 \to \pi$ ve $J(a) > 0$ olduğundan $J(a) \to \sqrt{\pi}$ olur. e^{-x^2} çift olduğundan $\int_0^a e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}J(a) \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$'dir. Yani $[0,\infty)$ ve $(-\infty,0]$ üzerindeki genelleştirilmiş integrallerin ikisi de $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$'dir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

bulunur. Aynı sonuç Gamma fonksiyonuyla da elde edilebilir (bkz. Analiz 3). $x = \frac{t}{\sqrt{2}}$ değişken değiştirmesi ise olasılıkta sık kullanılan $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = \sqrt{2\pi}$ eşitliğini verir. ■

Kutupsal koordinatlar, iki katlı integrali bölgenin geometrisine uydurmanın ilk örneğiydi: bölge çemberler ve ışınlarla sınırlıysa sınırlar sadeleşir, karşılığında dA yerine $r\,dr\,d\theta$ yazılır. Aynı fikir üç boyutta silindirik ve küresel koordinatlarla, en genel hâliyle de değişken değiştirme formülüyle karşımıza çıkacak. Bir sonraki bölümde, İki Katlı İntegralin Uygulamaları içinde, iki katlı integrali kütle, kütle merkezi, eylemsizlik momenti ve olasılık hesaplarında kullanacağız; disk ve halka biçimli levhalarda bu bölümün kutupsal hesapları sık sık işimize yarayacak.

 CC BY-NC-SA 4.0

4. İki Katlı İntegralin Uygulamaları

Şimdiye kadar iki katlı integrali bir yüzeyin altındaki hacmi ve bir düzlem bölgesinin alanını bulmak için kullandık. Bu bölümde aynı aracı fiziğe ve olasılığa uygulayacağız. Bütün uygulamaların arkasında tek bir düşünce var: bölgeyi küçük dikdörtgenlere böl, her parçanın katkısını yaklaşık hesapla, katkıları topla ve parçaları küçülterek limite geç. Bu limit bir Riemann toplamının limitidir, yani bir iki katlı integraldir (Tanım 1.2, Tanım 2.1).

Önce yoğunluğu noktadan noktaya değişen ince bir levhanın kütlesini ve üzerindeki elektrik yükünü bulacağız. Sonra levhanın dengede durduğu noktayı, yani kütle merkezini, ve levhayı bir eksen etrafında döndürmenin ne kadar zor olduğunu ölçen eylemsizlik momentini hesaplayacağız. Son kısımda iki rastgele değişkenin birlikte davranışını betimleyen ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarına geçeceğiz. Orada olasılık düzleme yayılmış bir kütle gibi davranacak, kütle merkezinin karşılığı da beklenen değer olacak.

4.1 Yoğunluk ve Kütle

Önce yoğunluk kavramını kuralım ve toplam kütlenin neden bir iki katlı integral olduğunu görelim.

Levha (lamina), kalınlığı ihmal edilebilecek kadar ince ve düz bir cisimdir; onu xy-düzleminde kapladığı D bölgesiyle özdeşleştiririz. Levhanın bazı yerleri öbürlerinden ağırsa bunu **yoğunluk** ile ölçeriz. (x, y) noktasını içeren küçük bir dikdörtgenin kütlesi Δm, alanı ΔA ise

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

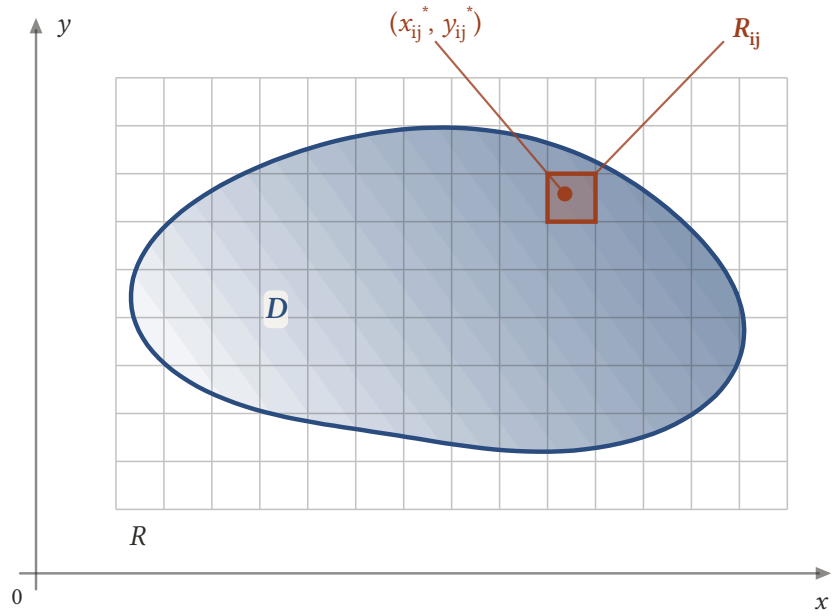
olarak tanımlanır; limit, dikdörtgenin boyutları 0'a giderken alınır. Yani $\rho(x, y)$, (x, y) noktasında birim alan başına düşen kütledir (örneğin kg/m²). Bölüm boyunca ρ'nun D üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyon olduğunu varsayacağız.

Toplam kütleyi bulmak için D'yi içeren bir R dikdörtgenini $k \cdot l$ tane eşit R_{ij} alt dikdörtgenine bölelim ve D'nin dışında $\rho = 0$ alalım. Her R_{ij} içinden bir (x^*_{ij}, y^*_{ij}) noktası seçelim. Küçük bir dikdörtgende yoğunluk neredeyse sabit olduğundan levhanın R_{ij} içindeki parçasının kütlesi yaklaşık $\rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\,\Delta A$'dır; burada ΔA, R_{ij}'nin alanıdır. Bu kütleleri toplarsak

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\,\Delta A$$

yaklaşımını elde ederiz. Sağ taraf ρ'nun bir Riemann toplamıdır. Alt dikdörtgen sayısını artırdıkça yaklaşım iyileşir ve limitte iki katlı integral çıkar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.1: D bölgesini içeren R dikdörtgeni eşit alt dikdörtgenlere bölünür ve D dışında $\rho = 0$ alınır; renk koyulaştıkça yoğunluk büyür. Turuncu R_{ij} parçasının kütlesi yaklaşık $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$'dır.

Tanım 4.1 (Levhanın Kütlesi). xy-düzleminde D bölgesini kaplayan ve yoğunluğu $\rho(x, y)$ olan bir levhanın **kütlesi**

$$m = \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A = \iint_D \rho(x, y)\, dA \tag{1}$$

sayısıdır.

Yani kütle, yoğunluğun bölge üzerindeki integralidir. Yoğunluk sabitse, yani $\rho(x, y) = \rho$ ise, sabit çarpan integralin dışına çıkar (Önerme 1.1) ve $m = \rho \iint_D dA = \rho \cdot A(D)$ bulunur; burada $A(D)$, D'nin alanıdır. Bu tanıdık "kütle = yoğunluk × alan" formülüdür. İki katlı integral onu yoğunluğun değiştiği duruma genişletir.
Aynı düşünce düzleme yayılmış başka nicelikler için de geçerlidir. Örneğin D bölgesine bir elektrik yükü dağılmış olsun ve (x, y) noktasındaki **yük yoğunluğu** (birim alan başına düşen yük) $\sigma(x, y)$ olsun.

Tanım 4.2 (Toplam Elektrik Yükü). D bölgesine, (x, y) noktasındaki yük yoğunluğu $\sigma(x, y)$ olacak biçimde dağılmış elektrik yükünün **toplam yükü**

$$Q = \iint_D \sigma(x, y)\, dA \tag{2}$$

sayısıdır.

Yani toplam yük de kütle gibi bulunur: σ'nın Riemann toplamı küçük parçalardaki yükleri toplar, limiti iki katlı integrali verir. Kütleden tek farkı, yük yoğunluğunun negatif değerler de alabilmesidir; o zaman pozitif ve negatif yükler integralde birbirini kısmen götürür.

Örnek 4.1 (Üçgen Bölgedeki Toplam Yük). Elektrik yükü, köşeleri $(0, 1)$, $(1, 1)$ ve $(1, 0)$ olan üçgen bölgeye dağılmıştır ve (x, y) noktasındaki yük yoğunluğu $\sigma(x, y) = xy$'dir (birimi C/m², yani metrekare başına coulomb). Toplam yükü bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üçgenin alt kenarı $(0,1)$ ile $(1,0)$ noktalarını birleştiren $y = 1 - x$ doğrusu, üst kenarı $y = 1$ doğrusudur ve x, 0 ile 1 arasında değişir. Bölge I. tip bir bölgedir (Tanım 2.2):

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\, 1 - x \le y \le 1\}.$$

(2) formülüyle

$$Q = \iint_D xy\,dA = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\left[1 - (1-x)^2\right] dx$$

bulunur. $1 - (1-x)^2 = 2x - x^2$ olduğundan integrand $\frac{1}{2}(2x^2 - x^3)$'tür:

$$Q = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{24}.$$

Toplam yük $\frac{5}{24}$ C'dir.
■

4.2 Momentler ve Kütle Merkezi

Bir levhayı tek bir noktadan destekleyerek dengede tutmak istersek desteği nereye koymalıyız? Yoğunluk sabitse cevap yalnız levhanın biçimine bağlıdır; yoğunluk değişince denge noktası ağır tarafa kayar. Bu noktayı bulmak için momentleri kullanacağız.
Kütlesi m olan bir parçacığın bir eksene göre **momenti**, kütlesi ile eksene olan *yönlü* uzaklığının çarpımıdır. Bir noktanın x eksenine yönlü uzaklığı y koordinatı, y eksenine yönlü uzaklığı da x koordinatıdır. Levhayı yine küçük R_{ij} dikdörtgenlerine bölelim. R_{ij} içindeki parçanın kütlesi yaklaşık $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$ olduğundan bu parçanın x eksenine göre momenti yaklaşık

$$\left[\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A\right] y_{ij}^*$$

olur. Bu momentleri toplayıp limite geçersek levhanın bütününün x eksenine göre momentini buluruz. y_{ij}^* yerine x_{ij}^* yazarsak aynı yol y eksenine göre momenti verir.

Tanım 4.3 (Eksenlere Göre Momentler). D bölgesini kaplayan ve yoğunluğu $\rho(x,y)$ olan levhanın x eksenine göre ve y eksenine göre **momentleri**

$$M_x = \iint_D y\,\rho(x,y)\,dA \tag{3}$$

$$M_y = \iint_D x\,\rho(x,y)\,dA \tag{4}$$

sayılarıdır.

Yani M_x'te her parçanın kütlesi y ile, M_y'de x ile çarpılır: her parça, eksene uzaklığı kadar uzun bir "kaldıraç koluyla" katkı verir. Eksenin bir yanındaki parçalar pozitif, öbür yanındakiler negatif katkı verdiği için bir moment negatif ya da sıfır da olabilir.

> ⚠ İndisler ters görünür
>
> M_x, *x eksenine göre* momenttir ve integrandında y bulunur, çünkü bir noktanın x eksenine uzaklığı $|\,y\,|$'dir. Aynı nedenle M_y'nin integrandında x vardır. Kütle merkezinde de bu yüzden $\bar{x} = M_y/m$ ve $\bar{y} = M_x/m$ yazılır.

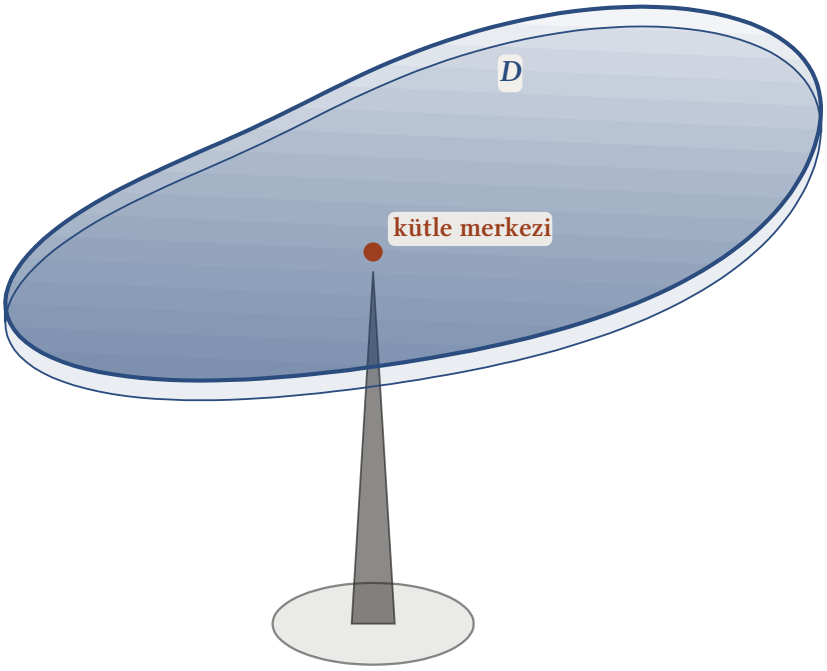
 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 4.4 (Kütle Merkezi). D bölgesini kaplayan, yoğunluğu $\rho(x,y)$ ve kütlesi $m>0$ olan levhanın **kütle merkezi**, $m\bar{x}=M_y$ ve $m\bar{y}=M_x$ eşitliklerini sağlayan $(\bar{x},\bar{y})$ noktasıdır:

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{M_y}{m}=\frac{1}{m}\iint_D x\,\rho(x,y)\,dA,\\ \bar{y}&=\frac{M_x}{m}=\frac{1}{m}\iint_D y\,\rho(x,y)\,dA.\end{aligned}\tag{5}$$

Burada $m=\iint_D \rho(x,y)\,dA$'dır.

Yani $\bar{x}$, levhanın noktalarının x koordinatlarının yoğunlukla ağırlıklandırılmış ortalamasıdır; $\bar{y}$ de y koordinatlarının aynı biçimde alınmış ortalamasıdır. Ağır bölgeler ortalamaya daha çok katkı verdiği için kütle merkezi ağır tarafa kayar. Fiziksel anlamı şudur: levha, bütün kütlesi kütle merkezinde toplanmış gibi davranır. Bu yüzden kütle merkezinin altından bir iğne ucuyla desteklenen levha yatay olarak dengede kalır. Yoğunluk sabitse ρ hem M_y'de hem m'de çarpan olarak çıkar ve sadeleşir; kütle merkezi yalnız D'nin biçimine bağlı kalır. Bu durumda $(\bar{x},\bar{y})$ noktasına D'nin **ağırlık merkezi** (centroid) denir.



Şekil 4.2: Levha, bütün kütlesi kütle merkezinde toplanmış gibi davranır: kütle merkezinin altından bir iğne ucuyla desteklenen levha yatay olarak dengede kalır. Koyu bölgeler daha yoğundur ve kütle merkezi o yana kayar.

Hesaba başlamadan önce simetriye bakmak çoğu zaman bir integrali gereksiz kılar.

Önerme 4.1 (Simetri ve Kütle Merkezi). *D bölgesi y eksenine göre simetrik olsun, yani $(x,y)\in D$ ise $(-x,y)\in D$ olsun. Yoğunluk da bu simetriyi taşısın: her $(x,y)\in D$ için $\rho(-x,y)=\rho(x,y)$. O zaman $M_y=0$, dolayısıyla $\bar{x}=0$'dır.*
Benzer biçimde D ve ρ x eksenine göre simetrikse, yani $(x,y)\in D$ iken $(x,-y)\in D$ ve $\rho(x,-y)=\rho(x,y)$ ise, $M_x=0$ ve $\bar{y}=0$ olur.

> ***İspat.***
> *İlk iddiayı gösterelim; ikincisi x ile y'nin rolleri değiştirilerek aynı biçimde gösterilir.*
> *$F(x,y)=x\,\rho(x,y)$ fonksiyonunu D üzerinde bu kuralla, D dışında 0 olarak tanımlayalım; $M_y=\iint_D x\,\rho\,dA$ integrali F'nin integralidir. Önce her (x,y) için $F(-x,y)=-F(x,y)$ olduğunu görelim:*

 CC BY-NC-SA 4.0

- $(x,y) \in D$ *ise* $(-x,y) \in D$*'dir ve yoğunluğun simetrisinden*

$$F(-x,y) = -x\,\rho(-x,y) = -x\,\rho(x,y) = -F(x,y)$$

olur.

- $(x,y) \notin D$ *ise* $(-x,y) \notin D$*'dir, çünkü aksi hâlde simetriden* $(x,y) = (-(-x),y) \in D$ *olurdu. İki taraf da* 0*'dır.*

D'yi, y eksenine göre simetrik bir $R = [-c,c] \times [d_1,d_2]$ dikdörtgeninin içine alalım. R'yi düşey doğrularla çift sayıda ($2k$ tane) eşit şeride, yatay doğrularla l eşit şeride bölelim. Bu bölüntü y eksenine göre simetriktir: sağ yarıdaki her alt dikdörtgenin sol yarıda bir ayna görüntüsü vardır. Sağ yarıdaki bir alt dikdörtgende örnek nokta (x^*,y^*) ise ayna görüntüsünde $(-x^*,y^*)$ noktasını seçelim. Riemann toplamında bu iki alt dikdörtgenin katkıları toplamı

$$F(x^*,y^*)\,\Delta A + F(-x^*,y^*)\,\Delta A = F(x^*,y^*)\,\Delta A - F(x^*,y^*)\,\Delta A = 0$$

olur. Bütün alt dikdörtgenler böyle çiftlere ayrıldığından Riemann toplamının tamamı 0'dır.
M_y integrali vardır ve tanım gereği, örnek noktalar nasıl seçilirse seçilsin Riemann toplamlarının bölüntü inceldikçe yaklaştığı sayıdır (Tanım 1.2). Bu özel bölüntüler ve örnek noktalarla kurulan toplamların hepsi 0 olduğundan limitleri olan M_y de 0'dır. Böylece $\bar{x} = M_y/m = 0$ bulunur.
■

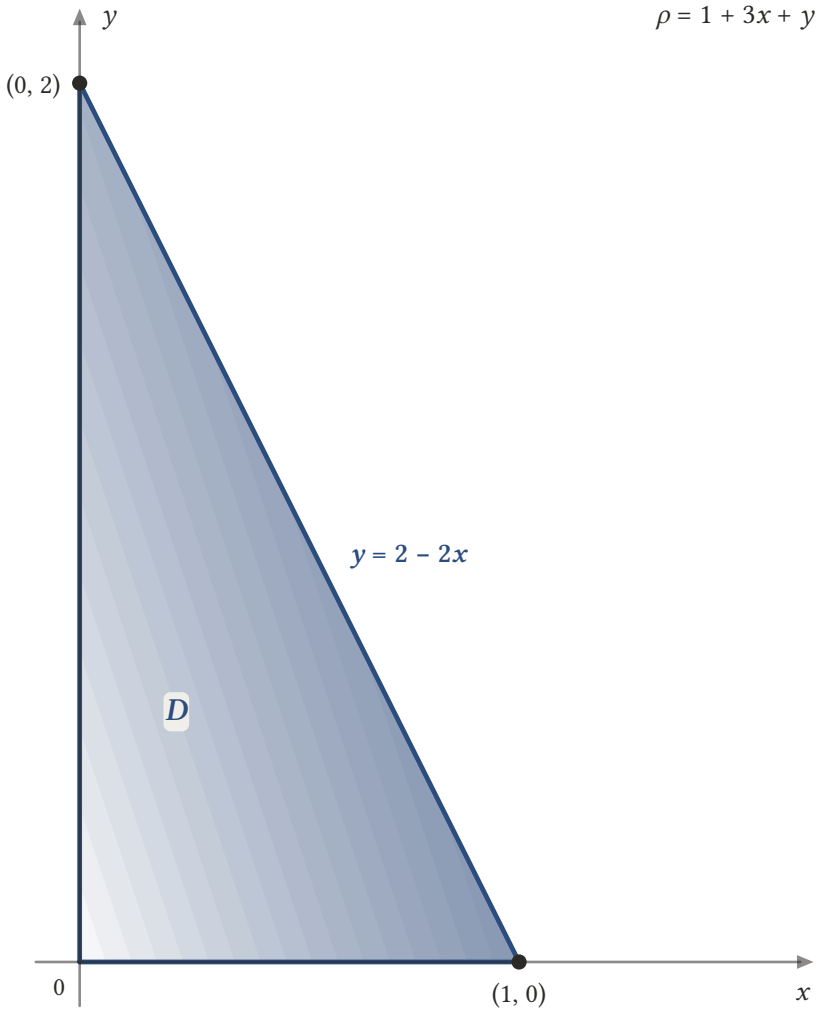
Kütle merkezi hesabı hep aynı adımları izler.

Kütle merkezini dört adımda bulmak

1. D bölgesini çizin ve I. tip, II. tip ya da kutupsal biçimde betimleyin. D ile ρ'nun ortak bir simetrisi varsa bir koordinatı Önerme 4.1 ile hemen yazın.
2. Kütleyi hesaplayın: $m = \iint_D \rho\,dA$.
3. Momentleri hesaplayın: $M_y = \iint_D x\rho\,dA$ ve $M_x = \iint_D y\rho\,dA$. Simetriden sıfır olduğu bilineni atlayın.
4. $\bar{x} = M_y/m$ ve $\bar{y} = M_x/m$ yazın ve sonucu denetleyin: kütle merkezi ağır tarafa doğru kaymış olmalı, D dışbükeyse D'nin içinde kalmalıdır.

Örnek 4.2 (Değişken Yoğunluklu Üçgen Levha). Köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(0,2)$ olan üçgen biçimli bir levhanın yoğunluğu $\rho(x,y) = 1 + 3x + y$'dir. Levhanın kütlesini ve kütle merkezini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.3: Köşeleri (0, 0), (1, 0) ve (0, 2) olan üçgen levha. Renk koyulaştıkça yoğunluk $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$ büyür: en hafif köşe orijin ($\rho = 1$), en ağır köşeler (1, 0) ve (0, 2)'dir ($\rho = 4$ ve 3).

Çözüm.
Bölge. Hipotenüs $(1, 0)$ ile $(0, 2)$ noktalarından geçen $y = 2 - 2x$ doğrusudur. Bu yüzden

$$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 - 2x\}$$

bir I. tip bölgedir. Bölge hiçbir eksene göre simetrik olmadığından üç integrali de hesaplayacağız.
Kütle. İç integralin ilkelinde $y = 2 - 2x$ yazınca

$$(2 - 2x) + 3x(2 - 2x) + \frac{(2 - 2x)^2}{2} = 4 - 4x^2$$

bulunur. Böylece

$$m = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (1 + 3x + y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[y + 3xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= 4 \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = 4 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Momentler. M_y'nin iç integrali, kütleninkinin x katıdır, yani $4x - 4x^3$'tür:

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x + 3x^2 + xy)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[xy + 3x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2-2x} dx$$

$$= 4\int_0^1 (x - x^3)\, dx = 4\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

M_x için iç integral

$$\left[\frac{y^2}{2} + \frac{3xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=2-2x} = \frac{2}{3}(7 - 9x - 3x^2 + 5x^3)$$

olur (her terimde $2 - 2x = 2(1 - x)$ yazıp açarak). Buradan

$$M_x = \frac{2}{3}\int_0^1 (7 - 9x - 3x^2 + 5x^3)\, dx = \frac{2}{3}\left[7x - \frac{9x^2}{2} - x^3 + \frac{5x^4}{4} \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{4} = \frac{11}{6}.$$

Kütle merkezi. (5) formülleriyle

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{8/3} = \frac{3}{8}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{11/6}{8/3} = \frac{11}{16}.$$

Kütle $\frac{8}{3}$, kütle merkezi $\left(\frac{3}{8}, \frac{11}{16}\right)$ noktasıdır.
Denetim. Yoğunluk sabit olsaydı aynı hesap ağırlık merkezini $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ verirdi: üçgenin alanı 1, $\int_0^1 x(2 - 2x)\, dx = \frac{1}{3}$ ve $\int_0^1 \frac{(2-2x)^2}{2}\, dx = \frac{2}{3}$'tür. $\rho = 1 + 3x + y$ hem x hem y ile arttığından kütle merkezi sağa ve yukarı kaymıştır: $\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$ ve $\frac{11}{16} > \frac{2}{3}$.
■

Örnek 4.3 (Yoğunluğu Merkeze Uzaklıkla Orantılı Yarım Daire). Yarım daire biçimindeki bir levhanın her noktasındaki yoğunluk, o noktanın dairenin merkezine uzaklığıyla orantılıdır. Levhanın kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.
Bölge ve yoğunluk. Levhayı $x^2 + y^2 \le a^2$ diskinin üst yarısı olarak yerleştirelim. (x, y) noktasının dairenin merkezine (orijine) uzaklığı $\sqrt{x^2 + y^2}$ olduğundan bir $K > 0$ sabiti için

$$\rho(x, y) = K\sqrt{x^2 + y^2}$$

olur. Hem bölge hem yoğunluk kutupsal koordinatlara uygundur: $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ ve $D = \{(r, \theta) : 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \pi\}$. Kutupsal koordinatlara geçişte dA yerine $r\, dr\, d\theta$ yazılır (Teorem 3.1).
Kütle.

$$m = \iint_D K\sqrt{x^2 + y^2}\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^{a} (Kr)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= K\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2\, dr = K\pi \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{K\pi a^3}{3}.$$

Simetri. Yarım disk y eksenine göre simetriktir ve $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$'dir. Önerme 4.1 gereği $\bar{x} = 0$'dır.
Moment. $y = r\sin\theta$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$M_x = \iint_D y\,\rho\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{a} (r\sin\theta)(Kr)\,r\,dr\,d\theta = K\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{a} r^3\,dr$$
$$= K[-\cos\theta]_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{a} = K\cdot 2\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{Ka^4}{2}.$$

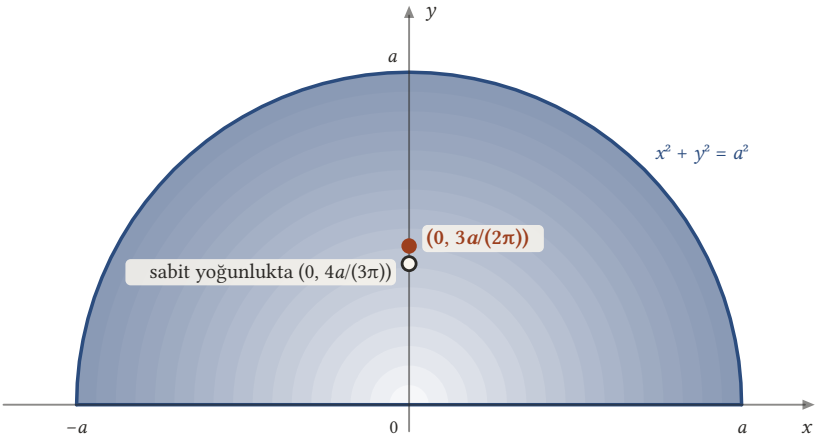
Kütle merkezi.

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{Ka^4/2}{K\pi a^3/3} = \frac{3a}{2\pi}.$$

Kütle merkezi $\left(0, \frac{3a}{2\pi}\right) \approx (0;\,0{,}477a)$ noktasıdır.
Karşılaştırma. Yoğunluk sabit (ρ) olsaydı $m = \rho\cdot\frac{\pi a^2}{2}$ ve

$$M_x = \rho\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{a} r^2\,dr = \rho\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{2\rho a^3}{3}$$

olurdu; bu da $\bar{y} = \frac{4a}{3\pi} \approx 0{,}424a$ verir. Burada yoğunluk kenara doğru arttığından kütle merkezi merkezden biraz daha uzağa kaymıştır.



Şekil 4.4: Yoğunluk merkeze uzaklıkla orantılı olduğunda (koyu renk büyük yoğunluk) kütle merkezi $(0,\,3a/(2\pi)) \approx (0;\,0{,}477a)$ noktasıdır. Yoğunluk sabit olsaydı kütle merkezi $(0,\,4a/(3\pi)) \approx (0;\,0{,}424a)$ olurdu (içi boş nokta): ağırlık dışa doğru arttığı için kütle merkezi yukarı kayar.

■

4.3 Eylemsizlik Momenti

Moment, kütlenin eksene uzaklığını birinci kuvvetiyle hesaba katar. Dönme hareketinde ise uzaklığın karesi önemlidir; bu bizi eylemsizlik momentine götürür.
Kütlesi m olan bir parçacığın bir eksene göre **eylemsizlik momenti** (ikinci moment) mr^2'dir; burada r, parçacığın eksene uzaklığıdır. Bir levha için yine D'yi küçük R_{ij} dikdörtgenlerine böleriz. R_{ij} içindeki parçanın x eksenine göre eylemsizlik momenti yaklaşık $(y_{ij}^*)^2\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$'dır; bunları toplayıp limite geçeriz. y eksenine ve orijine göre aynı işlem, uzaklık olarak $|\,x\,|$ ve $\sqrt{x^2+y^2}$ alınarak yapılır.

Tanım 4.5 (Eylemsizlik Momentleri). D bölgesini kaplayan ve yoğunluğu $\rho(x,y)$ olan levhanın x eksenine, y eksenine ve orijine göre **eylemsizlik momentleri**

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)\,dA \tag{6}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)\, dA \tag{7}$$

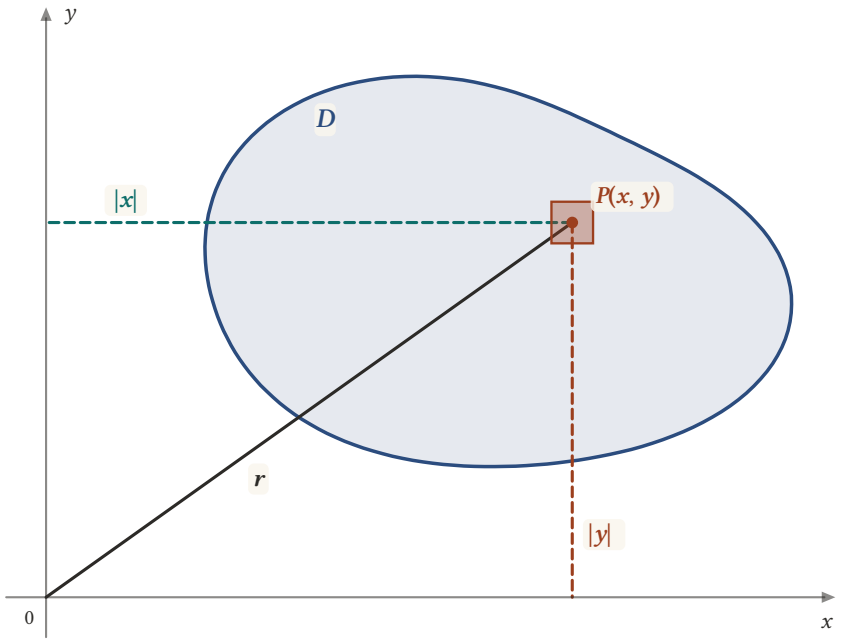
$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\, \rho(x,y)\, dA \tag{8}$$

sayılarıdır. Orijine göre eylemsizlik momenti I_0'a **kutupsal eylemsizlik momenti** de denir.

Yani her küçük parçanın kütlesi, ilgili eksene ya da orijine uzaklığının karesiyle çarpılıp toplanır. Kareler negatif olmadığından eylemsizlik momentleri hiçbir zaman negatif olmaz; momentlerdeki gibi bir götürme olmaz. Ayrıca $(x^2+y^2)\rho = x^2\rho + y^2\rho$ toplamı terim terim integre edilebildiğinden (Önerme 1.1) her zaman

$$I_0 = I_x + I_y$$

olur.



Şekil 4.5: Levhanın $P(x,\ y)$ noktasındaki küçük parçasının kütlesi yaklaşık $\rho(x,\ y)\Delta A$'dır. Bu parça x ekseninden $|y|$, y ekseninden $|x|$, orijinden $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ uzaklıktadır; I_x, I_y ve I_0 bu uzaklıkların kareleriyle kurulur.

Örnek 4.4 (Homojen Diskin Eylemsizlik Momentleri). Merkezi orijin, yarıçapı a olan ve yoğunluğu sabit $\rho(x,y) = \rho$ olan D diskinin I_x, I_y ve I_0 eylemsizlik momentlerini bulunuz.

Çözüm.
D'nin sınırı $x^2 + y^2 = a^2$ çemberidir; kutupsal koordinatlarda D, $0 \le r \le a$ ve $0 \le \theta \le 2\pi$ ile betimlenir (Teorem 3.1).
I_x. (6) formülünde $y = r\sin\theta$ yazalım ve $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ özdeşliğini kullanalım:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho\, dA = \rho \int_0^{2\pi}\int_0^a (r\sin\theta)^2\, r\, dr\, d\theta = \rho \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^a r^3\, dr$$
$$= \rho \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta \cdot \frac{a^4}{4} = \rho\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} \frac{a^4}{4} = \frac{\pi\rho a^4}{4}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

***I_y*.** Bu kez $x = r\cos\theta$ ve $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$:

$$I_y = \rho\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta\int_0^a r^3\,dr = \rho\cdot\pi\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{\pi\rho a^4}{4}.$$

Disk 90° döndürülünce değişmediğinden $I_x = I_y$ çıkması beklenen bir sonuçtur.
***I*$_0$.** $I_0 = I_x + I_y$ olduğundan

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{4} + \frac{\pi\rho a^4}{4} = \frac{\pi\rho a^4}{2}$$

bulunur. (8) formülüyle doğrudan hesap da aynı sonucu verir:

$$I_0 = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\cdot r\,dr\,d\theta = \rho\cdot 2\pi\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{\pi\rho a^4}{2}.$$

■

Diskin kütlesi $m = \rho\cdot\pi a^2$ olduğundan orijine göre eylemsizlik momenti, yani bir tekerleğin mili etrafındaki eylemsizlik momenti

$$I_0 = \frac{\pi\rho a^4}{2} = \frac{1}{2}(\rho\pi a^2)\,a^2 = \frac{1}{2}ma^2$$

biçiminde yazılabilir. Kütle ya da yarıçap büyüdükçe eylemsizlik momenti de büyür. Genel olarak eylemsizlik momenti dönme hareketinde, kütlenin doğrusal harekette oynadığı rolü oynar. Bir arabayı harekete geçirmeyi ya da durdurmayı zorlaştıran onun kütlesidir; bir tekerleği döndürmeyi ya da durdurmayı zorlaştıran da eylemsizlik momentidir.
Eylemsizlik momentini tek bir uzunlukla özetlemek de yararlıdır.

Tanım 4.6 (Dönme Yarıçapı). Kütlesi $m > 0$ olan bir levhanın bir eksene göre eylemsizlik momenti I olsun.

$$mR^2 = I \tag{9}$$

eşitliğini sağlayan tek $R \geq 0$ sayısına, yani $R = \sqrt{I/m}$ sayısına levhanın o eksene göre **dönme yarıçapı** (jirasyon yarıçapı) denir. Özel olarak x eksenine göre dönme yarıçapı $\bar{\bar{y}}$, y eksenine göre dönme yarıçapı $\bar{\bar{x}}$ ile gösterilir:

$$m\bar{\bar{y}}^2 = I_x, \qquad m\bar{\bar{x}}^2 = I_y. \tag{10}$$

Yani levhanın bütün kütlesi eksenden R uzaklıktaki tek bir noktada toplansaydı, bu noktasal kütlenin eylemsizlik momenti olan mR^2 levhanınkine eşit olurdu. Buna göre $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ noktası, levhanın bütün kütlesi oraya toplandığında koordinat eksenlerine göre eylemsizlik momentleri değişmeyen noktadır. Kütle merkeziyle benzerliğe dikkat edin: kütle merkezi momentleri, bu nokta eylemsizlik momentlerini korur.

Örnek 4.5 (Diskin Dönme Yarıçapı). Merkezi orijin, yarıçapı a ve yoğunluğu sabit ρ olan diskin x eksenine göre dönme yarıçapını bulunuz.

Çözüm.
Diskin kütlesi $m = \rho\pi a^2$'dir ve Örnek 4.4 örneğinde $I_x = \frac{\pi\rho a^4}{4}$ bulmuştuk. (10) eşitliğinden

$$\bar{\bar{y}}^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\frac{1}{4}\pi\rho a^4}{\rho\pi a^2} = \frac{a^2}{4}$$

olur. Dönme yarıçapı negatif olmadığından $\bar{\bar{y}} = \frac{a}{2}$'dir: diskin x eksenine göre dönme yarıçapı, yarıçapının yarısıdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

4.4 Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonları

İki katlı integralin ikinci büyük uygulama alanı olasılıktır. Burada olasılık, düzleme yayılmış bir kütle gibi davranır.

Sürekli bir X rastgele değişkeninin **olasılık yoğunluk fonksiyonu** f, her x için $f(x) \geq 0$ ve $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ koşullarını sağlayan ve X'in a ile b arasında olma olasılığını

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ile veren fonksiyondur (bkz. Olasılık Teorisi). Şimdi iki sürekli rastgele değişkeni birlikte ele alalım: bir makinenin iki parçasının ömürleri ya da rastgele seçilen bir yetişkinin boyu ve kilosu gibi.

Tanım 4.7 (Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu). X ile Y iki sürekli rastgele değişken olsun. Her (x, y) için $f(x, y) \geq 0$ olan ve düzlemin her D bölgesi için

$$P\left(\,(X, Y) \in D\,\right) = \iint_D f(x, y)\,dA$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonuna X ile Y'nin **ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir.

Yani (X, Y) noktasının bir D bölgesine düşme olasılığı, f'nin D üzerindeki integralidir; geometrik olarak D'nin üstünde ve $z = f(x, y)$ grafiğinin altında kalan cismin hacmidir. Özel olarak bir $[a, b] \times [c, d]$ dikdörtgeni için

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx$$

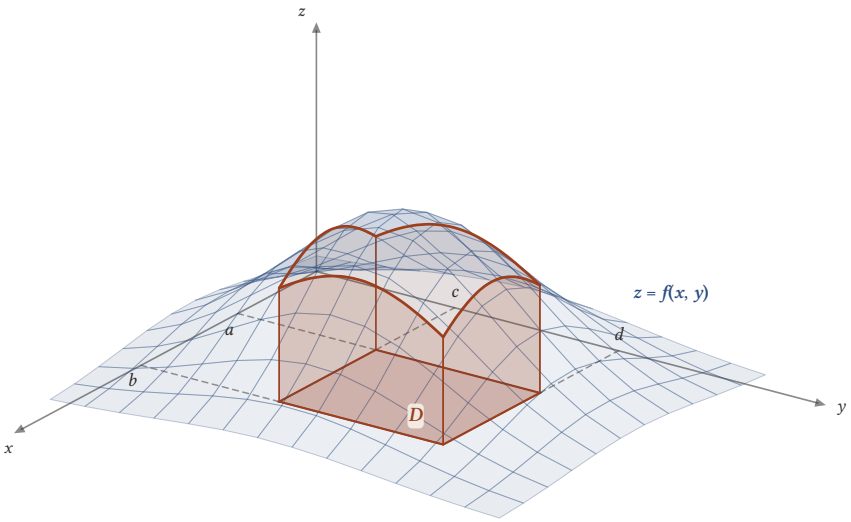
olur; ardışık integrale geçişi Fubini Teoremi (Teorem 1.2) sağlar. Yoğunluk süreksiz olabilir: örneğin bir karenin dışında sıfır olan yoğunluk, karenin kenarlarında sıçrar. Ama bu bölümdeki bütün yoğunluklar sınırlıdır ve yalnız sonlu sayıda düzgün eğri üzerinde süreksizdir; Fubini Teoremi bu tür fonksiyonlar için de geçerlidir.

Olasılıklar negatif olmadığından $f \geq 0$ istenir. (X, Y) noktası kesinlikle düzlemin bir yerindedir, bu yüzden toplam olasılık 1'dir:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dA = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1.$$

Bütün düzlem üzerindeki bu integral has olmayan (genelleştirilmiş) bir integraldir: merkezi orijin olan ve gittikçe büyüyen diskler ya da kareler üzerindeki integrallerin limiti olarak tanımlanır (tek değişkenli karşılığı için bkz. Analiz 3). $f \geq 0$ olduğundan bu limit, yukarıdaki gibi ardışık has olmayan integrallerle hesaplanabilir. Rastgele vektörler kuramındaki ayrıntılı kurulum için bkz. Olasılık Teorisi.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.6: $P(a \le X \le b,\, c \le Y \le d)$ olasılığı, $D = [a,\, b] \times [c,\, d]$ dikdörtgeninin üstünde ve ortak yoğunluk fonksiyonunun grafiğinin altında kalan cismin hacmidir. Bütün grafiğin altındaki hacim 1'dir.

Örnek 4.6 (Yoğunluktaki Sabitin Belirlenmesi). X ile Y'nin ortak yoğunluk fonksiyonu

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+2y), & 0 \le x \le 10 \ \text{ ve } \ 0 \le y \le 10, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. C sabitinin değerini bulunuz.

Çözüm.
Ortak yoğunluk fonksiyonunun bütün düzlem üzerindeki integrali 1 olmalıdır. f, $[0,10] \times [0,10]$ karesinin dışında 0 olduğundan integral bu kare üzerinde alınır:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dA &= \int_0^{10}\int_0^{10} C(x+2y)\,dy\,dx = C\int_0^{10} \left[xy + y^2\right]_{y=0}^{y=10} dx \\ &= C\int_0^{10} (10x + 100)\,dx = C\left[5x^2 + 100x\right]_0^{10} = 1500\,C. \end{aligned}$$

$1500\,C = 1$ koşulundan $C = \frac{1}{1500}$ bulunur. Bu değerde karenin her noktasında $x + 2y \ge 0$ olduğundan $f \ge 0$ koşulu da sağlanır.
■

Örnek 4.7 (Bir Dikdörtgen Olayın Olasılığı). X ile Y'nin ortak yoğunluk fonksiyonu $0 \le x \le 10$, $0 \le y \le 10$ için $f(x,y) = \frac{1}{1500}(x+2y)$, diğer durumlarda 0 olsun. $P(X \le 7, Y \ge 2)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
$X \le 7, Y \ge 2$ olayı sınırsız $\{(x,y) : x \le 7, y \ge 2\}$ bölgesidir. f, bu bölgenin $0 \le x \le 7$, $2 \le y \le 10$ dikdörtgeni dışında kalan kısmında 0'dır; bu yüzden integral bu dikdörtgen üzerinde alınır:

$$\begin{aligned} P(X \le 7, Y \ge 2) &= \int_{-\infty}^{7}\int_{2}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^7\int_2^{10} \frac{x+2y}{1500}\,dy\,dx \\ &= \frac{1}{1500}\int_0^7 \left[xy + y^2\right]_{y=2}^{y=10} dx = \frac{1}{1500}\int_0^7 (8x + 96)\,dx. \end{aligned}$$

İç integralin değeri $(10x + 100) - (2x + 4) = 8x + 96$'dır. Son olarak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$P(X \le 7, Y \ge 2) = \frac{1}{1500}\left[4x^2 + 96x\right]_0^7 = \frac{196 + 672}{1500} = \frac{868}{1500} \approx 0{,}5787$$

bulunur.
■

4.5 Bağımsız Rastgele Değişkenler

Ortak yoğunluk fonksiyonu çoğu uygulamada tek değişkenli yoğunluklardan kurulur.
X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_1(x)$, Y'ninki $f_2(y)$ olsun. Ortak yoğunluk fonksiyonları bu ikisinin çarpımı, yani

$$f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$$

ise X ile Y'ye **bağımsız rastgele değişkenler** denir (bkz. Olasılık Teorisi). Sezgisel olarak bağımsızlık, değişkenlerden birinin aldığı değerin öbürünün olasılıklarını etkilememesidir. Bağımsız değişkenlerde dikdörtgen biçimli olayların olasılığı çarpanlara ayrılır.

Önerme 4.2 (Bağımsız Değişkenlerde Dikdörtgen Olaylar). *X ile Y yoğunlukları f_1 ve f_2 olan bağımsız rastgele değişkenler olsun; f_1 ile f_2 her kapalı ve sınırlı aralıkta parçalı sürekli olsun (bkz. Analiz 3). $a < b$ ve $c < d$ için*

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = P(a \le X \le b) P(c \le Y \le d)$$

olur.

İspat.
$R = [a, b] \times [c, d]$ olsun. Ortak yoğunluk $f_1(x)\, f_2(y)$ olduğundan istenen olasılık $\iint_R f_1(x)\, f_2(y)\, dA$ integralidir.
Ardışık integrale geçiş. *Parçalı sürekli fonksiyonlar kapalı aralıklarda sınırlıdır: $[a, b]$ üzerinde $|\ f_1\ | \le M_1$ ve $[c, d]$ üzerinde $|\ f_2\ | \le M_2$ ise R üzerinde $|\ f_1(x)\, f_2(y)\ | \le M_1 M_2$ olur. f_1, x'te ve f_2, y'de sürekliyse $f_1(x)\, f_2(y)$ çarpımı (x, y) noktasında süreklidir. Bu yüzden çarpım R üzerinde yalnız sonlu sayıda doğru parçası üzerinde süreksiz olabilir: f_1'in süreksizlik noktalarından geçen düşey ve f_2'nin süreksizlik noktalarından geçen yatay doğru parçaları. Aşağıdaki hesap, ardışık integralin var olduğunu da gösterir. Fubini Teoremi (Teorem 1.2) sınırlı ve yalnız sonlu sayıda düzgün eğri üzerinde süreksiz fonksiyonlar için de geçerli olduğundan*

$$P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f_1(x)\, f_2(y)\, dy\, dx$$

olur.
Çarpanlara ayırma. *İç integralde $f_1(x)$, y'ye göre sabittir ve integralin dışına çıkar; kalan $\int_c^d f_2(y)\, dy$ integrali, f_2 parçalı sürekli olduğu için vardır. Bu sayı x'e bağlı olmadığından bu kez dış integralin dışına çıkar; f_1 de parçalı sürekli olduğundan kalan integral vardır:*

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_c^d f_1(x)\, f_2(y)\, dy\, dx &= \int_a^b f_1(x) \left(\int_c^d f_2(y)\, dy \right) dx \\ &= \left(\int_a^b f_1(x)\, dx \right) \left(\int_c^d f_2(y)\, dy \right).\end{aligned}$$

Sağdaki iki çarpan $P(a \le X \le b)$ ve $P(c \le Y \le d)$'dir.
■

Bekleme süreleri çoğu zaman **üstel yoğunluk fonksiyonuyla** modellenir:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \mu^{-1} e^{-t/\mu}, & t \ge 0. \end{cases}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Burada μ ortalama bekleme süresidir (bkz. Olasılık Teorisi; orada parametre $\lambda = 1/\mu$ olarak yazılır). Sonraki örnekte birbirinden bağımsız iki bekleme süresi var.

Örnek 4.8 (İki Bağımsız Bekleme Süresi). Bir sinemada seyircilerin bilet kuyruğunda ortalama 10 dakika, mısır kuyruğunda ortalama 5 dakika beklediği belirlenmiştir. İki bekleme süresinin birbirinden bağımsız olduğunu ve üstel yoğunlukla modellendiğini varsayarak, bir seyircinin yerine oturmadan önce toplam 20 dakikadan az bekleme olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Yoğunluklar. Bilet kuyruğundaki bekleme süresi X, mısır kuyruğundaki Y olsun. Ortalamalar 10 ve 5 olduğundan

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{10}e^{-x/10}, & x \geq 0, \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1}{5}e^{-y/5}, & y \geq 0 \end{cases}$$

olur. X ile Y bağımsız olduğundan ortak yoğunluk bunların çarpımıdır: $x \geq 0$, $y \geq 0$ için $f(x,y) = \frac{1}{50}e^{-x/10}e^{-y/5}$, diğer durumlarda $f(x,y) = 0$.
Bölge. İstenen olasılık $P(X + Y < 20) = P\big((X,Y) \in D\big)$'dir. f yalnız birinci bölgede sıfırdan farklı olduğundan D, köşeleri $(0,0)$, $(20,0)$ ve $(0,20)$ olan üçgendir: $0 \leq x \leq 20$, $0 \leq y \leq 20 - x$.
İntegral. İç integral

$$\int_0^{20-x} e^{-y/5}\,dy = \big[-5e^{-y/5}\big]_{y=0}^{y=20-x} = 5\big(1 - e^{(x-20)/5}\big)$$

olur. $e^{-x/10}e^{(x-20)/5} = e^{-4}e^{x/10}$ olduğundan

$$\begin{aligned} P(X+Y<20) &= \int_0^{20} \frac{1}{50}e^{-x/10}\cdot 5\big(1 - e^{(x-20)/5}\big)dx \\ &= \frac{1}{10}\int_0^{20}\big(e^{-x/10} - e^{-4}e^{x/10}\big)dx \\ &= \big[-e^{-x/10} - e^{-4}e^{x/10}\big]_0^{20} = \big(-e^{-2} - e^{-2}\big) - \big(-1 - e^{-4}\big) \\ &= 1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0{,}7476 \end{aligned}$$

bulunur. Yani seyircilerin yaklaşık yüzde 75'i yerine oturmadan önce 20 dakikadan az bekler.
■

4.6 Beklenen Değerler

Kütle merkezinin olasılıktaki karşılığı beklenen değerdir.
Tek değişkenli durumda yoğunluğu f olan X'in **beklenen değeri** (ortalaması) $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$ sayısıdır (bkz. Olasılık Teorisi). Ortak yoğunluk fonksiyonu bilindiğinde X ile Y'nin beklenen değerleri doğrudan iki katlı integralle bulunur.

Önerme 4.3 (Beklenen Değerlerin İki Katlı İntegralle Hesabı). *X ile Y'nin ortak yoğunluk fonksiyonu f olsun ve beklenen değerleri var olsun. X'in beklenen değeri (X-ortalaması) μ_1 ve Y'nin beklenen değeri (Y-ortalaması) μ_2,*

$$\mu_1 = \iint_{\mathbb{R}^2} x\, f(x,y)\,dA, \qquad \mu_2 = \iint_{\mathbb{R}^2} y\, f(x,y)\,dA \tag{11}$$

ile verilir.

İspatın fikri.
X'in tek başına yoğunluk fonksiyonu, ortak yoğunluğun y üzerinden integralidir: $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ (marjinal yoğunluk; bkz. Olasılık Teorisi). Bunu tek değişkenli tanımda yerine yazar ve iç integralde sabit olan x'i içeri alırsak

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x,y)\, dy\, dx$$

bulunur. Sağdaki ardışık has olmayan integral, $x f(x,y)$'nin bütün düzlem üzerindeki iki katlı integraline eşittir. Bu son adım, Fubini Teoremi'nin (Teorem 1.2) sınırsız bölgelerdeki hâlini kullanır ve ispatı ileri analiz gerektirir; teoremin koşulu olan $\iint_{\mathbb{R}^2} |\, x \,|\, f\, dA < \infty$, beklenen değerin var olması demektir. μ_2 için x ile y'nin rolleri değiştirilir.

■

(11)'deki ifadeler (3) ve (4)'teki M_x ve M_y momentlerine çok benzer. Gerçekten olasılığı düzleme sürekli yayılmış bir kütle gibi düşünebiliriz: olasılıkları da kütleyi hesapladığımız gibi, bir yoğunluk fonksiyonunu integre ederek buluruz. Toplam "olasılık kütlesi" 1 olduğundan (5)'teki $\bar{x} = M_y/m$ ve $\bar{y} = M_x/m$ formülleri $m = 1$ ile tam olarak μ_1 ve μ_2'yi verir. Yani (μ_1, μ_2) noktası olasılık dağılımının "kütle merkezidir". Sonraki örneklerde normal dağılım kullanılacak. Ortalaması μ, standart sapması σ olan **normal dağılımlı** bir rastgele değişkenin yoğunluk fonksiyonu şudur (bkz. Olasılık Teorisi):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

Bu yoğunluğun ilkel fonksiyonu elemanter fonksiyonlarla yazılamaz; bu yüzden $\int_a^b f(x)\, dx$ gibi integrallerin değerleri tablodan ya da sayısal hesapla bulunur. Örneğin normal dağılımlı bir değişkenin ortalamasından iki standart sapmadan az uzaklaşma olasılığı yaklaşık $0{,}9545$'tir.

Örnek 4.9 (Rulman Makaralarının Ortak Yoğunluğu). Bir fabrika, çapı $4{,}0$ cm ve uzunluğu $6{,}0$ cm olarak satılan silindir biçimli rulman makaraları üretiyor. Gerçekte bir makaranın çapı X, ortalaması $4{,}0$ cm ve standart sapması $0{,}01$ cm olan normal dağılımlıdır; uzunluğu Y ise ortalaması $6{,}0$ cm ve standart sapması $0{,}01$ cm olan normal dağılımlıdır. X ile Y'nin bağımsız olduğunu varsayarak bu iki değişkenin ortak yoğunluk fonksiyonunu yazınız.

Çözüm.
Ortalamalar $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 6$, standart sapmalar $\sigma_1 = \sigma_2 = 0{,}01$'dir; bu yüzden $2\sigma^2 = 0{,}0002$ olur ve tek tek yoğunluklar

$$f_1(x) = \frac{1}{0{,}01\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-4)^2/0{,}0002}, \qquad f_2(y) = \frac{1}{0{,}01\sqrt{2\pi}}\, e^{-(y-6)^2/0{,}0002}$$

biçimindedir. Bağımsızlıktan ortak yoğunluk bu ikisinin çarpımıdır. $\left(0{,}01\sqrt{2\pi}\right)^2 = 0{,}0002\,\pi$ ve $1/0{,}0002 = 5000$ olduğundan

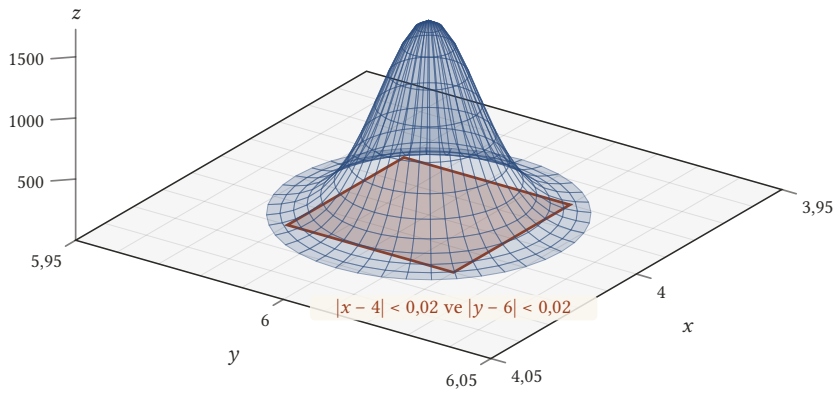
$$\begin{aligned} f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y) &= \frac{1}{0{,}0002\,\pi}\, e^{-(x-4)^2/0{,}0002}\, e^{-(y-6)^2/0{,}0002} \\ &= \frac{5000}{\pi}\, e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]} \end{aligned}$$

bulunur. Grafiği $(4,6)$ noktasının üzerinde yükselen dik bir tepedir; en büyük değeri $f(4,6) = 5000/\pi \approx 1592$'dir. Standart sapmalar çok küçük olduğundan olasılığın neredeyse tamamı $(4,6)$ çevresindeki küçük bir karede toplanır.

■

Örnek 4.10 (Ölçülerin Ortalamadan Sapma Olasılığı). Bir fabrikanın ürettiği rulman makaralarının çapı X ve uzunluğu Y bağımsızdır ve ikisi de standart sapması $0{,}01$ cm olan normal dağılımlıdır; çapın ortalaması 4 cm, uzunluğun ortalaması 6 cm'dir. Üretim hattından rastgele seçilen bir makaranın uzunluğunun ya da çapının ortalamadan $0{,}02$ cm'den fazla sapma olasılığını bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.7: Ortak yoğunluk $f(x,\,y) = (5000/\pi)\,e^{-5000[(x-4)^2+(y-6)^2]}$, $(4,\,6)$ noktası üzerinde dik bir tepedir; en büyük değeri $5000/\pi \approx 1592$'dir. Tabandaki turuncu kare $|x-4| < 0{,}02$, $|y-6| < 0{,}02$ bölgesidir; bu karenin üstünde ve grafiğin altında kalan hacim yaklaşık 0,91'dir.

Çözüm.
Tümleyen olay. İstenen olayın tümleyeni, iki ölçünün de ortalamadan 0,02 cm'den az sapmasıdır, yani (X, Y) noktasının $3{,}98 < x < 4{,}02$, $5{,}98 < y < 6{,}02$ karesine düşmesidir. Sürekli değişkenlerde karenin kenarlarının olasılığı 0 olduğundan $<$ ile $\leq$ arasında fark yoktur. X ile Y bağımsız olduğundan Önerme 4.2 ile

$$P(3{,}98 < X < 4{,}02,\, 5{,}98 < Y < 6{,}02) = P(3{,}98 < X < 4{,}02)\,P(5{,}98 < Y < 6{,}02)$$

olur.
Çarpanlar. $0{,}02 = 2\sigma$ olduğundan her çarpan, normal dağılımlı bir değişkenin ortalamasından iki standart sapmadan az uzaklaşma olasılığıdır. Örneğin birinci çarpanda $z = (x-4)/0{,}01$ değişken değiştirmesi yapılırsa $dx = 0{,}01\,dz$ olur, $x = 3{,}98$ iken $z = -2$, $x = 4{,}02$ iken $z = 2$'dir ve

$$\int_{3{,}98}^{4{,}02} f_1(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-z^2/2}\,dz \approx 0{,}9545$$

bulunur. İkinci çarpan da aynı değerdir.
Sonuç. Böylece

$$P(3{,}98 < X < 4{,}02,\, 5{,}98 < Y < 6{,}02) \approx 0{,}9545^2 \approx 0{,}91$$

ve istenen olasılık yaklaşık $1 - 0{,}91 = 0{,}09$'dur. Yani üretilen makaraların yaklaşık yüzde 9'unda en az bir ölçü ortalamadan 0,02 cm'den fazla sapar.
■

4.7 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar bölümün bütün başlıklarını kolaydan zora doğru tarar.

Alıştırma 4.1 (Dikdörtgendeki Toplam Yük). Elektrik yükü $0 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 5$ dikdörtgenine, (x, y) noktasındaki yük yoğunluğu $\sigma(x, y) = 2x + 4y$ (C/m²) olacak biçimde dağılmıştır. Dikdörtgendeki toplam yükü bulunuz.

Çözüm.

(2) formülüyle toplam yük, σ'nın dikdörtgen üzerindeki integralidir. Fubini Teoremi'yle (Teorem 1.2) önce y'ye göre integre edelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

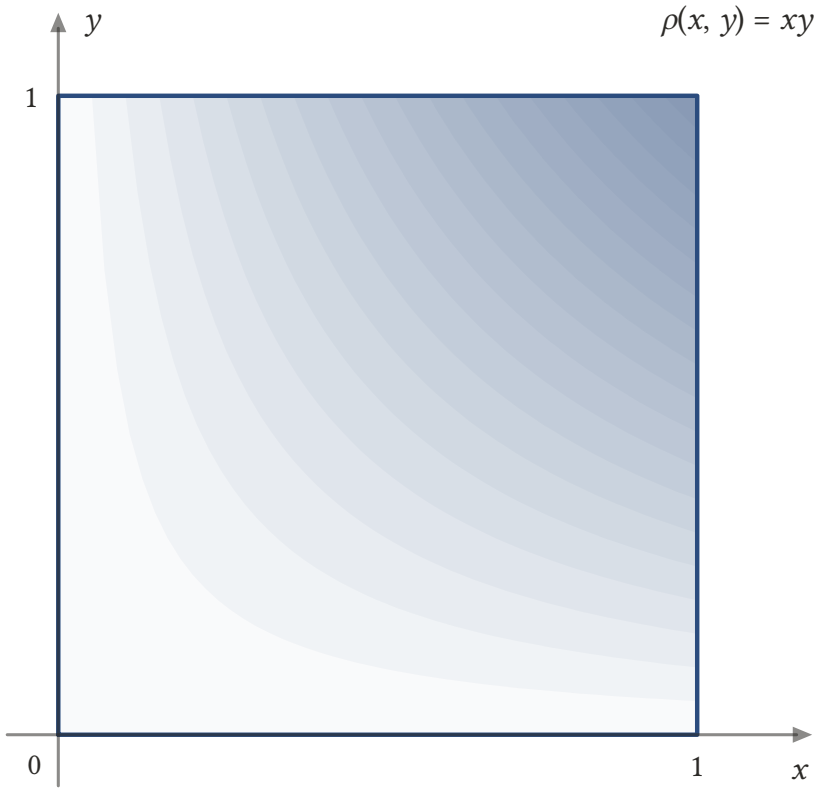
$$\int_2^5 (2x+4y)\,dy = \left[2xy+2y^2\right]_{y=2}^{y=5} = (10x+50)-(4x+8) = 6x+42.$$

Buradan

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^5 \int_2^5 (2x+4y)\,dy\,dx = \int_0^5 (6x+42)\,dx \\ &= \left[3x^2+42x\right]_0^5 = 75+210 = 285 \end{aligned}$$

bulunur. Toplam yük 285 C'dir.
■

Alıştırma 4.2 (Kütle Merkezini Önce Tahmin Etmek). Birim kareyi ($0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$) kaplayan levhanın yoğunluğu $\rho(x,y) = xy$'dir. Şekle bakarak kütle merkezinin yerini tahmin ediniz, sonra tam olarak hesaplayınız.



Şekil 4.8: Yoğunluğu $\rho(x, y) = xy$ olan kare levha; renk koyulaştıkça yoğunluk büyür. Sol ve alt kenarlarda yoğunluk 0'dır.

Çözüm.
Tahmin. Yoğunluk sol ve alt kenarlarda 0'dır ve $(1,1)$ köşesine doğru artar. Ayrıca $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ olduğundan levha $y = x$ köşegenine göre simetriktir. Bu yüzden kütle merkezi köşegen üzerinde, karenin merkezi $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$'den sağ üste doğru kaymış olmalıdır.
Kütle.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$m = \int_0^1 \int_0^1 xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{4}.$$

Momentler.

$$M_y = \int_0^1 \int_0^1 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{1}{6},$$
$$M_x = \int_0^1 \int_0^1 xy^2\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{6}.$$

Kütle merkezi.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1/6}{1/4} = \frac{2}{3}.$$

Kütle merkezi $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ noktasıdır; tahminimizle uyumludur.
■

Alıştırma 4.3 (Köşeleri Verilen Üçgen Levha). Köşeleri $(0,0)$, $(2,1)$ ve $(0,3)$ olan üçgen bölgeyi kaplayan levhanın yoğunluğu $\rho(x,y) = x + y$'dir. Levhanın kütlesini ve kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.
Bölge. $(0,0)$ ile $(2,1)$'i birleştiren kenar $y = \frac{x}{2}$, $(2,1)$ ile $(0,3)$'ü birleştiren kenar $y = 3 - x$ doğrusu üzerindedir; üçüncü kenar y ekseni üzerindedir. Böylece

$$D = \left\{(x,y) : 0 \le x \le 2,\, \frac{x}{2} \le y \le 3 - x\right\}$$

bir I. tip bölgedir.
Kütle. İç integral

$$\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{y=x/2}^{y=3-x} = x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{8} = \frac{9}{2} - \frac{9x^2}{8}$$

olur. Buradan

$$m = \int_0^2 \left(\frac{9}{2} - \frac{9x^2}{8}\right) dx = \left[\frac{9x}{2} - \frac{3x^3}{8}\right]_0^2 = 9 - 3 = 6.$$

Momentler. M_y'nin iç integrali kütleninkinin x katıdır:

$$M_y = \int_0^2 \left(\frac{9x}{2} - \frac{9x^3}{8}\right) dx = \left[\frac{9x^2}{4} - \frac{9x^4}{32}\right]_0^2 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}.$$

M_x için iç integral

$$\left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_{y=x/2}^{y=3-x} = 9 - \frac{9x}{2}$$

olur (açınca x^3 ve x^2 terimleri birbirini götürür). Buradan

$$M_x = \int_0^2 \left(9 - \frac{9x}{2}\right) dx = \left[9x - \frac{9x^2}{4}\right]_0^2 = 18 - 9 = 9.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Kütle merkezi. $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{9/2}{6} = \frac{3}{4}$ ve $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Kütle 6, kütle merkezi $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ noktasıdır. Denetim: $x = \frac{3}{4}$ iken üçgen $\frac{3}{8} \le y \le \frac{9}{4}$ aralığını kaplar ve $\frac{3}{2}$ bu aralıktadır.
■

Alıştırma 4.4 (Yarım Halka Biçimli Levha). Bir levhanın sınırı $y = \sqrt{1 - x^2}$ ve $y = \sqrt{4 - x^2}$ yarım çemberleri ile x ekseninin bu iki yarım çemberi birleştiren iki parçasından oluşur. Levhanın her noktasındaki yoğunluk o noktanın orijine uzaklığıyla orantılıysa kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.
Bölge ve yoğunluk. Levha, $1 \le r \le 2$ ve $0 \le \theta \le \pi$ ile betimlenen üst yarım halkadır. Bir $K > 0$ sabiti için $\rho = K\sqrt{x^2 + y^2} = Kr$'dir. Kutupsal koordinatlarda $dA = r\,dr\,d\theta$ (Teorem 3.1).
Simetri. Bölge y eksenine göre simetriktir ve ρ yalnız r'ye bağlıdır; Önerme 4.1 gereği $\bar{x} = 0$'dır.
Kütle ve moment.

$$m = \int_0^{\pi} \int_1^2 (Kr)\, r\, dr\, d\theta = K\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 = \frac{7\pi K}{3},$$

$$M_x = \int_0^{\pi} \int_1^2 (r\sin\theta)(Kr)\, r\, dr\, d\theta = K \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_1^2 r^3\, dr = K \cdot 2 \cdot \frac{15}{4} = \frac{15K}{2}.$$

Kütle merkezi.

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{15K/2}{7\pi K/3} = \frac{45}{14\pi} \approx 1{,}023.$$

Kütle merkezi $\left(0, \frac{45}{14\pi}\right)$ noktasıdır. $1 < \frac{45}{14\pi} < 2$ olduğundan bu nokta levhanın üzerindedir, ama iç yarım çembere çok yakındır.
■

Alıştırma 4.5 (İki Çember Arasındaki Levha). Bir levha $x^2 + y^2 = 2y$ çemberinin içinde ve $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin dışında kalan bölgeyi kaplıyor. Levhanın her noktasındaki yoğunluk o noktanın orijine uzaklığıyla ters orantılıysa kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.
Bölge. Kutupsal koordinatlarda $x^2 + y^2 = 2y$ çemberi $r^2 = 2r\sin\theta$, yani $r = 2\sin\theta$ olur; bu, merkezi $(0, 1)$ ve yarıçapı 1 olan çemberdir. İki çember $2\sin\theta = 1$ iken, yani $\theta = \frac{\pi}{6}$ ve $\theta = \frac{5\pi}{6}$'da kesişir. Bu yüzden

$$D = \left\{(r, \theta) : \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6},\, 1 \le r \le 2\sin\theta\right\}$$

olur. Bir $K > 0$ sabiti için $\rho = \frac{K}{r}$'dir.
Simetri. $(x, y) \mapsto (-x, y)$ yansıması iki çemberi de kendine gönderir ve ρ yalnız r'ye bağlıdır; Önerme 4.1 gereği $\bar{x} = 0$'dır.
Kütle. $dA = r\,dr\,d\theta$ olduğundan $\rho\,dA = K\,dr\,d\theta$'dır:

$$m = K \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_1^{2\sin\theta} dr\, d\theta = K \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (2\sin\theta - 1)\, d\theta = K[-2\cos\theta - \theta]_{\pi/6}^{5\pi/6}.$$

$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan

$$m = K\left[\left(\sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right) - \left(-\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right] = K\left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Moment. $y\,\rho\,dA = (r\sin\theta) \cdot K\,dr\,d\theta$ olduğundan

$$M_x = K\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin\theta \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^{2\sin\theta} d\theta = K\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(2\sin^3\theta - \frac{\sin\theta}{2}\right) d\theta$$

olur. $\sin^3\theta = \sin\theta\,(1-\cos^2\theta)$ yazılırsa bir ilkel fonksiyon $-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}$'tür; buradan

$$\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sin\theta\, d\theta = \sqrt{3}$$

bulunur. Böylece $M_x = K\left(2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}\,K$.

Kütle merkezi.

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3} - 2\pi} \approx 1{,}265.$$

Kütle merkezi $\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}-2\pi}\right)$ noktasıdır.

■

Alıştırma 4.6 (Vantilatör Kanadı). Kenar uzunluğu 2 olan kare biçimli bir vantilatör kanadı, sol alt köşesi orijinde ve kenarları koordinat eksenleri üzerinde olacak biçimde yerleştirilmiştir. Kanadın yoğunluğu $\rho(x,y) = 1 + 0{,}1x$ ise kanadı x ekseni etrafında döndürmek mi, y ekseni etrafında döndürmek mi daha zordur?

Çözüm.
Bir eksen etrafında döndürmenin zorluğunu o eksene göre eylemsizlik momenti ölçer. Kanat $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ karesidir ve $\rho = 1 + \frac{x}{10}$'dur.

I_x. (6) formülüyle

$$I_x = \int_0^2\int_0^2 y^2\left(1+\frac{x}{10}\right) dy\,dx = \frac{8}{3}\int_0^2 \left(1+\frac{x}{10}\right) dx$$
$$= \frac{8}{3}\left[x + \frac{x^2}{20}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\cdot\frac{11}{5} = \frac{88}{15} \approx 5{,}87.$$

I_y. (7) formülüyle

$$I_y = \int_0^2\int_0^2 x^2\left(1+\frac{x}{10}\right) dy\,dx = 2\int_0^2 \left(x^2 + \frac{x^3}{10}\right) dx$$
$$= 2\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{40}\right]_0^2 = 2\cdot\frac{46}{15} = \frac{92}{15} \approx 6{,}13.$$

Karşılaştırma. $I_y > I_x$ olduğundan kanadı y ekseni etrafında döndürmek daha zordur. Bunun nedeni, yoğunluğun x ile artması, yani kütlenin y ekseninden uzak tarafta daha çok toplanmasıdır.

■

Alıştırma 4.7 (Çeyrek Diskin Dönme Yarıçapları). Yoğunluğu sabit ρ olan bir levha, $x^2 + y^2 \le a^2$ diskinin birinci bölgede kalan çeyreğini kaplıyor. Levhanın I_x ve I_y eylemsizlik momentlerini ve $\bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{y}}$ dönme yarıçaplarını bulunuz.

Çözüm.
Kutupsal koordinatlarda levha $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ile betimlenir.
Eylemsizlik momentleri. Önce

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

olduğunu görelim. Buradan

$$I_x = \rho\int_0^{\pi/2}\int_0^{a} (r\sin\theta)^2\, r\,dr\,d\theta = \rho\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{a} r^3\,dr = \rho\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^4}{4} = \frac{\pi\rho a^4}{16}.$$

Aynı biçimde $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{4}$ olduğundan $I_y = \frac{\pi\rho a^4}{16}$'dır.
Dönme yarıçapları. Levhanın kütlesi, yoğunluk ile çeyrek diskin alanının çarpımıdır: $m = \rho\cdot\frac{\pi a^2}{4}$. (10) eşitliklerinden

$$\bar{\bar{x}}^2 = \frac{I_y}{m} = \frac{\pi\rho a^4/16}{\pi\rho a^2/4} = \frac{a^2}{4}$$

ve aynı biçimde $\bar{\bar{y}}^2 = \frac{a^2}{4}$ olur. Böylece $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}} = \frac{a}{2}$ bulunur.
■

Alıştırma 4.8 (Toplamın Olasılığı). X ile Y'nin ortak yoğunluk fonksiyonu $0\le x\le 1, 0\le y\le 2$ için $f(x,y) = Cx(1+y)$, diğer durumlarda 0'dır; burada C bir sabittir. $P(X+Y\le 1)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
Sabit. Önce C'yi bulalım. Toplam olasılık 1 olmalıdır:

$$\int_0^1\int_0^2 Cx(1+y)\,dy\,dx = C\int_0^1 x\left[y+\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2}dx = C\int_0^1 4x\,dx = 2C = 1,$$

dolayısıyla $C = \frac{1}{2}$'dir.
Bölge. f yalnız $[0,1]\times[0,2]$ dikdörtgeninde sıfırdan farklıdır. Bu dikdörtgenin $x+y\le 1$ olan kısmı, köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(0,1)$ olan üçgendir: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$.
İntegral. İç integral

$$\begin{aligned}\int_0^{1-x}\frac{x}{2}(1+y)\,dy &= \frac{x}{2}\left[(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right]\\ &= \frac{x(1-x)(3-x)}{4} = \frac{3x-4x^2+x^3}{4}\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}P(X+Y\le 1) &= \frac{1}{4}\int_0^1 (3x-4x^2+x^3)\,dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}\right)\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{12} = \frac{5}{48}\approx 0{,}104\end{aligned}$$

bulunur.
■

Alıştırma 4.9 (Üstel Ortak Yoğunluğun Beklenen Değerleri). X ile Y'nin ortak yoğunluk fonksiyonu $x\ge 0, y\ge 0$ için $f(x,y) = 0{,}1\,e^{-(0{,}5x+0{,}2y)}$, diğer durumlarda 0'dır. X ile Y'nin beklenen değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Hazırlık. $f(x,y) = \frac{1}{10}e^{-x/2}e^{-y/5}$ biçiminde yazılır. Kısmi integrasyonla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^\infty x\,e^{-x/2}\,dx = \left[-2x\,e^{-x/2}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = 0 + 2\cdot 2 = 4$$

ve aynı yolla $\int_0^\infty y\,e^{-y/5}\,dy = 25$ bulunur; ayrıca $\int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = 2$ ve $\int_0^\infty e^{-y/5}\,dy = 5$'tir. (Burada $x\,e^{-x/2}\to 0$, $x\to\infty$ iken.)

μ_1. (11) formülüyle, önce y'ye göre integre ederek,

$$\mu_1 = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{x}{10}\,e^{-x/2}e^{-y/5}\,dy\,dx = \int_0^\infty \frac{x}{10}\,e^{-x/2}\cdot 5\,dx = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2.$$

μ_2. Bu kez önce x'e göre integre edelim:

$$\mu_2 = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{y}{10}\,e^{-x/2}e^{-y/5}\,dx\,dy = \int_0^\infty \frac{y}{10}\,e^{-y/5}\cdot 2\,dy = \frac{1}{5}\cdot 25 = 5.$$

X'in beklenen değeri 2, Y'ninki 5'tir. Bu sonuç şaşırtıcı değildir: $f(x,y) = \left(\frac{1}{2}e^{-x/2}\right)\left(\frac{1}{5}e^{-y/5}\right)$ olduğundan X ile Y, ortalamaları 2 ve 5 olan bağımsız üstel dağılımlı değişkenlerdir.

■

Alıştırma 4.10 (Kafede Buluşma). Can ile Ece'nin dersleri öğlen biter ve her gün dersten sonra bir kafede buluşmak üzere anlaşırlar. Kafeye birbirlerinden bağımsız olarak gelirler. Can'ın geliş zamanı X, Ece'ninki Y olsun (öğlenden sonra geçen dakika). Yoğunluk fonksiyonları

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \ge 0,\\ 0, & x < 0,\end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \frac{y}{50}, & 0 \le y \le 10,\\ 0, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

dir: Can öğlenden sonra bir ara gelir ve erken gelmesi geç gelmesinden olasıdır; Ece her zaman 12.10'a kadar gelir ve geç gelmesi erken gelmesinden olasıdır. Ece geldikten sonra Can'ı en çok yarım saat bekler, Can ise Ece'yi hiç beklemez. Buluşma olasılıklarını bulunuz.

Çözüm.

Olay. Can Ece'yi beklemediğinden, Ece'den önce gelirse buluşamazlar. Ece de en çok 30 dakika beklediğinden buluşma, Can'ın Ece'den sonra ve en geç 30 dakika sonra gelmesi demektir: $Y \le X \le Y + 30$.

Ortak yoğunluk. Bağımsızlıktan $x \ge 0$, $0 \le y \le 10$ için $f(x,y) = e^{-x}\cdot\frac{y}{50}$, diğer durumlarda 0'dır.

İntegral. y dışta, x içte olacak biçimde integre edelim. İç integral

$$\int_y^{y+30} e^{-x}\,dx = e^{-y} - e^{-y-30} = e^{-y}\left(1 - e^{-30}\right)$$

olur. Buradan

$$P(Y \le X \le Y+30) = \int_0^{10} \frac{y}{50}\,e^{-y}(1-e^{-30})dy = \frac{1-e^{-30}}{50}\int_0^{10} y\,e^{-y}\,dy.$$

Kısmi integrasyonla $\int y\,e^{-y}\,dy = -y\,e^{-y} - e^{-y}$ olduğundan

$$\int_0^{10} y\,e^{-y}\,dy = \left(-10e^{-10} - e^{-10}\right) - (0-1) = 1 - 11e^{-10}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$P(Y \le X \le Y+30) = \frac{(1-e^{-30})(1-11e^{-10})}{50} \approx 0{,}0200.$$

Buluşma olasılıkları yalnız yüzde 2 kadardır: Can neredeyse her zaman ilk birkaç dakikada gelir, Ece ise genellikle daha geç gelir ve Can beklemez.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 4.11 (Salgında Şehir Merkezinin Maruziyeti). Bir salgın incelenirken, hasta bir kişinin sağlıklı bir kişiye hastalığı bulaştırma olasılığının aralarındaki uzaklığa bağlı olduğu varsayılıyor. Nüfusun düzgün dağıldığı, yarıçapı 10 km olan dairesel bir şehirde A noktasında oturan sağlıklı bir kişi için bu olasılık

$$f(P) = \frac{1}{20}[20 - d(P, A)]$$

ile veriliyor; $d(P, A)$, hasta kişinin bulunduğu P noktası ile A arasındaki uzaklıktır (km). Hastalar şehre düzgün dağılmıştır ve kilometrekare başına k hasta vardır. Kişinin **maruziyeti**, hastalığı şehirdeki bütün hastalardan kapma olasılıklarının toplamıdır. A şehrin merkezindeyse maruziyeti bir iki katlı integral olarak yazıp hesaplayınız.

Çözüm.
İntegralin kurulması. Şehri D diski ile gösterelim. P noktası çevresinde alanı ΔA olan küçük bir parçada yaklaşık $k\,\Delta A$ hasta vardır ve her biri hastalığı yaklaşık $f(P)$ olasılıkla bulaştırır. Bu parçanın maruziyete katkısı yaklaşık $f(P)\,k\,\Delta A$'dır. Katkıları toplayıp limite geçince maruziyet

$$E = \iint_D k\, f(P)\, dA = \frac{k}{20} \iint_D [20 - d(P, A)] dA$$

olur. Şehirde iki nokta arasındaki uzaklık en çok 20 km olduğundan $0 \le f(P) \le 1$'dir.
Hesap. A'yı orijine koyalım. O zaman $d(P, A) = r$ ve D, $0 \le r \le 10$, $0 \le \theta \le 2\pi$ ile betimlenir. Kutupsal koordinatlarla (Teorem 3.1)

$$E = \frac{k}{20} \int_0^{2\pi} \int_0^{10} (20 - r)\, r\, dr\, d\theta = \frac{k}{20} \cdot 2\pi \left[10r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^{10}$$
$$= \frac{k}{20} \cdot 2\pi \left(1000 - \frac{1000}{3} \right) = \frac{k}{20} \cdot 2\pi \cdot \frac{2000}{3} = \frac{200\pi k}{3} \approx 209{,}4\, k$$

bulunur.
■

Alıştırma 4.12 (Salgında Şehir Sınırının Maruziyeti). Alıştırma 4.11 alıştırmasındaki salgın modelinde (yarıçapı 10 km olan dairesel şehir, kilometrekare başına k hasta, bulaşma olasılığı $f(P) = \frac{1}{20}[20 - d(P, A)]$), A noktası şehrin sınırındaysa maruziyeti hesaplayınız. Şehrin merkezinde mi, sınırında mı oturmak daha güvenlidir?

Çözüm.
Bölge. Bu kez de A'yı orijine koyalım ve şehrin merkezini $(10, 0)$ noktası seçelim. Şehir $(x - 10)^2 + y^2 \le 100$, yani $x^2 + y^2 \le 20x$ diskidir. Kutupsal koordinatlarda bu $r^2 \le 20r\cos\theta$, yani $r \le 20\cos\theta$ demektir; $r \ge 0$ olması için $\cos\theta \ge 0$, yani $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ olmalıdır. Uzaklık yine $d(P, A) = r$'dir.
İntegral. İç integral

$$\int_0^{20\cos\theta} (20 - r)\, r\, dr = \left[10r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^{20\cos\theta} = 4000\cos^2\theta - \frac{8000}{3}\cos^3\theta$$

olur. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\cos^3\theta = (1 - \sin^2\theta)\cos\theta$ yazarak

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \left[\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

bulunur. Buradan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$E = \frac{k}{20}\left(4000 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{8000}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) = \frac{k}{20}\left(2000\pi - \frac{32000}{9}\right)$$
$$= 100\pi k - \frac{1600k}{9} \approx 136{,}4\,k.$$

Karşılaştırma. Merkezdeki maruziyet yaklaşık $209{,}4\,k$, sınırdaki ise yaklaşık $136{,}4\,k$'dir. Sınırda oturan biri hastaların çoğundan daha uzakta olduğu için maruziyeti yaklaşık üçte bir daha azdır; sınırda oturmak daha güvenlidir.
■

Bu bölümde iki katlı integralin, düzleme yayılmış bir niceliği "toplayan" genel bir araç olduğunu gördük: yoğunluğu integre edince kütle ya da olasılık, koordinatlarla çarpıp integre edince kütle merkezi ya da beklenen değer, uzaklığın karesiyle çarpıp integre edince eylemsizlik momenti çıkar. Sonraki bölümde iki katlı integrali yeniden geometriye döndürüp bir yüzeyin alanını hesaplayacağız: Yüzey Alanı.

 CC BY-NC-SA 4.0

5. Yüzey Alanı

Bir eğrinin uzunluğunu bulmak için eğriyi küçük parçalara bölmüş, her parçayı bir doğru parçasıyla değiştirmiş ve $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ formülüne ulaşmıştık (bkz. Analiz 2). Bir eğrinin bir eksen çevresinde dönmesiyle oluşan yüzeyin alanını da aynı yolla, kesik konilerle hesaplamıştık (bkz. Analiz 2). Bu bölümde soruyu genelleştiriyoruz: iki değişkenli bir f fonksiyonunun grafiği olan $z = f(x, y)$ yüzeyinin, xy-düzlemindeki bir D bölgesinin üstünde kalan parçasının alanı nedir?
Eğrideki fikir yüzeye olduğu gibi taşınamaz. Bir yüzeye içten çizilen üçgenlerden oluşan çokyüzlülerin alanları, üçgenler küçülse bile yüzeyin alanına yaklaşmak zorunda değildir: ince ve yüzeye neredeyse dik duran üçgenlerle alan istenildiği kadar büyütülebilir (Schwarz feneri). Bu yüzden yüzeyi küçük parçalarda kirişlerle değil, **teğet düzlemlerle** değiştireceğiz. Teğet düzlem yüzeyin o noktadaki eğimini tam olarak taşır; sonuçta yay uzunluğu formülünün iki boyutlu kardeşi olan bir iki katlı integral elde edeceğiz.

5.1 Yüzey Alanının Tanımı

Önce yüzeyi küçük parçalara bölüp her parçayı bir teğet düzlem parçasıyla değiştirelim; yüzey alanını bu yaklaşımların limiti olarak tanımlayacağız.
D, xy-düzleminde kapalı ve sınırlı bir bölge; f, D üzerinde tanımlı ve f_x, f_y kısmi türevleri D üzerinde var ve sürekli bir fonksiyon olsun. Grafiğin D üstündeki parçasını

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

ile gösterelim. D'yi bir $R = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgeninin içine alalım ve R'yi, iki katlı integralin tanımındaki gibi (bkz. Tanım 1.2), $m \cdot n$ tane eş alt dikdörtgene bölelim. Alt dikdörtgenlerin kenarları $\Delta x = (b - a)/m$ ve $\Delta y = (d - c)/n$, alanları $\Delta A = \Delta x\, \Delta y$ olsun. R_{ij} alt dikdörtgeninin sol alt köşesini (x_i, y_j) ile gösterelim, çünkü teğet düzlemi bu köşede kuracağız. İki katlı integralin tanımının ardından (x_i, y_j) ile sağ üst köşeyi göstermiştik; integral örnek noktaların seçimine bağlı olmadığından indisleri böyle kaydırmak sonucu değiştirmez. Böylece

$$R_{ij} = [x_i, x_i + \Delta x] \times [y_j, y_j + \Delta y].$$

D'nin içinde kalan her R_{ij} için şu nesnelere bakacağız:

- $P_{ij} = (\, x_i, y_j, f(x_i, y_j)\,)$, yani S üzerinde (x_i, y_j)'nin tam üstündeki nokta.
- ΔS_{ij}, yani S'nin R_{ij}'nin üstünde kalan parçasının alanı. Henüz tanımlamadığımız, aradığımız büyüklük budur.
- S'nin P_{ij} noktasındaki teğet düzlemi (bkz. Analiz 4):

$$z = f(x_i, y_j) + f_x(x_i, y_j)\,(x - x_i) + f_y(x_i, y_j)\,(y - y_j).$$

- ΔT_{ij}, yani bu teğet düzlemin R_{ij}'nin tam üstünde kalan parçasının alanı. Bu parça bir paralelkenardır; bunu aşağıdaki teoremin ispatında göreceğiz.

P_{ij}'nin yakınında yüzey teğet düzlemine çok yakın olduğundan $\Delta T_{ij} \approx \Delta S_{ij}$'dir. Bu küçük alanları toplayınca S'nin alanı için bir yaklaşım elde ederiz ve ızgara sıklaştıkça yaklaşım iyileşir. Tanımı bu gözlem verir.

Tanım 5.1 (Yüzey Alanı). Yukarıdaki gösterimle $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ yüzeyinin **yüzey alanı**

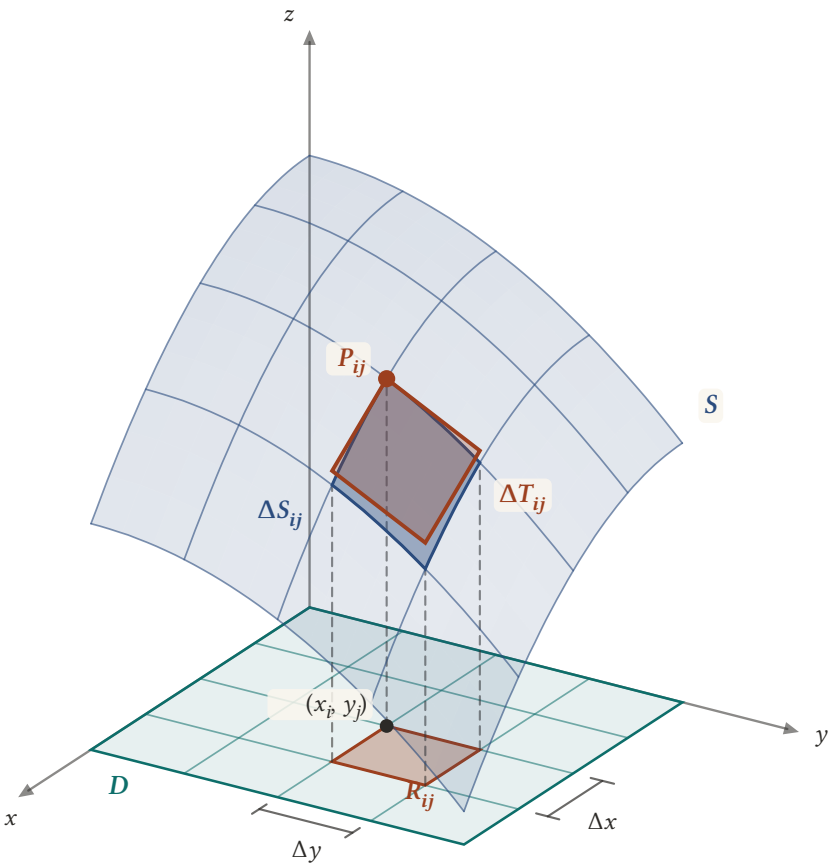
$$A(S) = \lim_{m,n \to \infty} \sum_i \sum_j \Delta T_{ij}$$

limitidir. Toplam, D'nin içinde kalan R_{ij} alt dikdörtgenleri üzerinden alınır.

Yani yüzeyi, her biri yüzeye tek bir noktada teğet olan küçük ve düz "pullarla" kaplıyoruz. Pullar küçüldükçe yüzeye daha iyi uyar ve alanlarının toplamı yüzeyin alanına yaklaşır. D bir dikdörtgense bütün

 CC BY-NC-SA 4.0

R_{ij}'ler toplama girer. Limitin her zaman var olduğunu ve bir iki katlı integrale eşit olduğunu aşağıdaki teorem gösterecek.



Şekil 5.1: D dikdörtgeni $\Delta x \times \Delta y$ boyutlu alt dikdörtgenlere bölünür. R_{ij}'nin sol alt köşesi (x_i, y_j)'nin üstündeki P_{ij} noktasında S'ye teğet olan düzlemin R_{ij} üstündeki parçası bir paralelkenardır (turuncu). Alanı ΔT_{ij}, yüzeyin R_{ij} üstündeki parçasının (mavi) alanı ΔS_{ij}'ye yakındır.

5.2 Yüzey Alanı Formülü

Tanımdaki her ΔT_{ij} bir paralelkenarın alanıdır ve vektörel çarpımla hesaplanır. Bu hesap, toplamı bir Riemann toplamına, limiti de bir iki katlı integrale dönüştürür.

Teorem 5.1 (Yüzey Alanı Formülü). *D kapalı ve sınırlı bir bölge olsun: bir dikdörtgen, I. ya da II. tip bir bölge (bkz. Tanım 2.2 ve Tanım 2.3) ya da bunların sonlu sayıda birleşimi. f_x ve f_y, D üzerinde sürekli ise $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ yüzeyinin alanı*

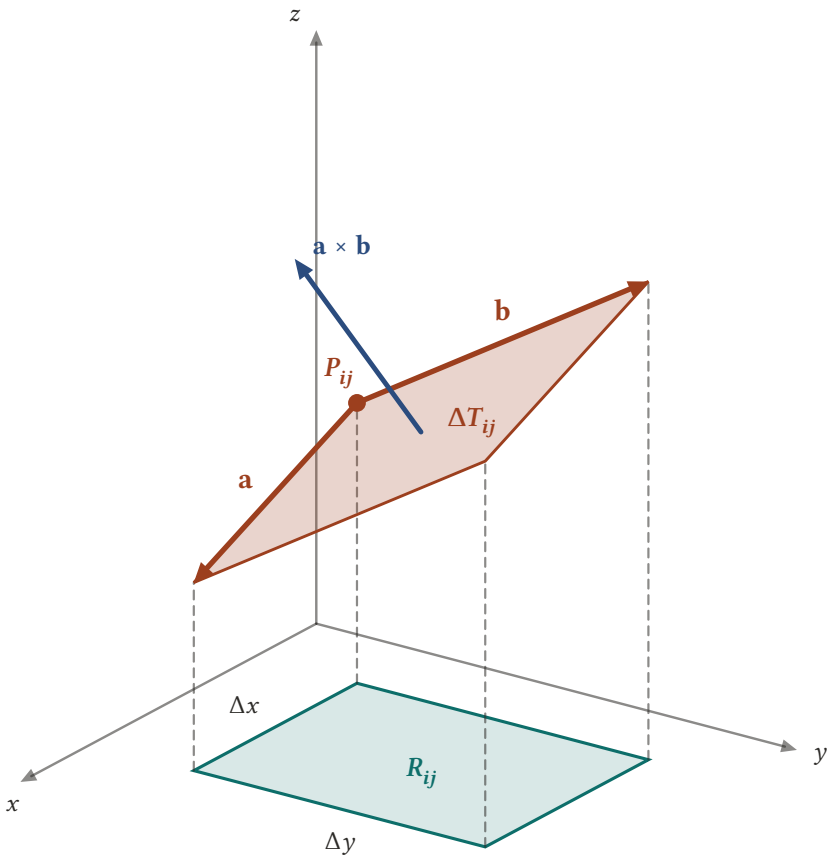
$$A(S) = \iint_D \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2 + 1}\, dA$$

olur. $z = f(x, y)$ yazılırsa aynı formül

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

biçimini alır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.2: Teğet düzlemin $\mathrm{R_{ij}}$ *üstündeki parçası,* $\mathrm{P_{ij}}$ *köşesinden çıkan* $\boldsymbol{a} = \Delta\mathrm{x}\ \boldsymbol{i} + \mathrm{f_x}\ \Delta\mathrm{x}\ \boldsymbol{k}$ *ve* $\boldsymbol{b} = \Delta\mathrm{y}\ \boldsymbol{j} + \mathrm{f_y}\ \Delta\mathrm{y}\ \boldsymbol{k}$ *vektörlerinin gerdiği paralelkenardır.* $\boldsymbol{a}$ *ve* $\boldsymbol{b}$*'nin* xy*-düzlemine izdüşümleri* $\mathrm{R_{ij}}$*'nin kenarlarıdır;* $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ *paralelkenara diktir ve uzunluğu alanını verir.*

İspat.
Adım 1: Teğet parça bir paralelkenardır. *Kısalık için* $p = f_x(x_i, y_j)$ *ve* $q = f_y(x_i, y_j)$ *yazalım ve*

$$\mathbf{a} = \Delta x\,\mathbf{i} + p\,\Delta x\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = \Delta y\,\mathbf{j} + q\,\Delta y\,\mathbf{k}$$

vektörlerini alalım. $s, t \in [0,1]$ *için* $P_{ij} + s\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}$ *noktasının koordinatları*

$$x = x_i + s\,\Delta x, \qquad y = y_j + t\,\Delta y,$$
$$z = f(x_i, y_j) + p\,s\,\Delta x + q\,t\,\Delta y$$

olur. $s\,\Delta x = x - x_i$ *ve* $t\,\Delta y = y - y_j$ *olduğundan bu nokta teğet düzlemin denklemini sağlar. Ayrıca* (s,t) *birim kareyi tararken* (x,y) *tam olarak* R_{ij}*'yi tarar. Demek ki teğet düzlemin* R_{ij} *üstündeki parçası,* P_{ij} *köşesinden çıkan* $\mathbf{a}$ *ve* $\mathbf{b}$ *vektörlerinin gerdiği paralelkenardır. Paralelkenarın alanı kenar vektörlerinin vektörel çarpımının uzunluğu olduğundan* $\Delta T_{ij} = |\ \mathbf{a} \times \mathbf{b}\ |$*'dir.*
Adım 2: Paralelkenarın alanı. *Determinantı birinci satıra göre açalım:*

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x & 0 & p\,\Delta x \\ 0 & \Delta y & q\,\Delta y \end{vmatrix} \\ &= -p\,\Delta x\,\Delta y\,\mathbf{i} - q\,\Delta x\,\Delta y\,\mathbf{j} + \Delta x\,\Delta y\,\mathbf{k} \\ &= (-p\,\mathbf{i} - q\,\mathbf{j} + \mathbf{k})\,\Delta A.\end{aligned}$$

Buradan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\Delta T_{ij} = |\ \mathbf{a} \times \mathbf{b}\ | = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\Delta A$$

bulunur.
Adım 3: Limit. *D üzerinde*

$$g(x,y) = \sqrt{[f_x(x,y)]^2 + [f_y(x,y)]^2 + 1}$$

diyelim. f_x, f_y ve karekök sürekli olduğundan g, D üzerinde süreklidir; kapalı ve sınırlı D üzerinde bir M üst sınırı vardır. Adım 2'ye göre

$$\sum_i \sum_j \Delta T_{ij} = \sum_{R_{ij} \subseteq D} g(x_i, y_j)\, \Delta A$$

olur. $D = R$ bir dikdörtgense sağ taraf, g'nin R üzerindeki, örnek noktaları alt dikdörtgenlerin sol alt köşeleri olan Riemann toplamıdır. g sürekli olduğundan R üzerinde integrallenebilirdir (bkz. Dikdörtgen Bölgelerde İki Katlı İntegraller). İntegralin tanımı örnek noktaların her seçimine izin verdiğinden $m, n \to \infty$ iken bu toplam $\iint_D g\, dA$'ya yakınsar (bkz. Tanım 1.2).
Genel D için g'yi D'nin dışında 0 alarak R'ye genişletelim ve bu fonksiyona G diyelim. G sınırlıdır ($|\ G\ | \leq M$) ve yalnız D'nin sınırında süreksiz olabilir. Aşağıda bu sınırın, toplam alanı istenildiği kadar küçük alt dikdörtgenlerle örtülebildiğini göreceğiz; bu yüzden G, R üzerinde integrallenebilirdir (bkz. Dikdörtgen Bölgelerde İki Katlı İntegraller) ve tanım gereği $\iint_D g\, dA = \iint_R G\, dA$'dır (bkz. Tanım 2.1). G'nin örnek noktaları yine (x_i, y_j) olan Riemann toplamı, bizim toplamımızdan yalnız köşesi D'de olduğu hâlde kendisi D'nin içinde kalmayan R_{ij}'lerin terimleri kadar farklıdır. Böyle bir R_{ij} hem D'nin bir noktasını hem de D'nin dışından bir nokta içerir; bu iki noktayı birleştiren doğru parçası D'nin sınırını keser. Her terim en çok $M\,\Delta A$ olduğundan iki toplamın farkı, en çok M çarpı D'nin sınırına değen alt dikdörtgenlerin toplam alanıdır.
Bu toplam alan ızgara sıklaştıkça 0'a gider. Gerçekten D'nin sınırı sonlu sayıda sürekli fonksiyon grafiğinden ve doğru parçasından oluşur. Sınırın bir parçası $y = \varphi(x)$, $\alpha \leq x \leq \beta$ grafiği olsun. φ kapalı aralıkta sürekli, dolayısıyla düzgün sürekli olduğundan, verilen her $\varepsilon > 0$ için ızgara yeterince sık olunca Δx genişliğindeki her sütunda φ'nin değerleri ε'dan az değişir. Grafik o sütunda en çok $\varepsilon/\Delta y + 2$ alt dikdörtgene değer; bunların toplam alanı en çok $(\varepsilon + 2\,\Delta y)\,\Delta x$'tir. Grafiğin geçtiği sütun sayısı en çok $(\beta - \alpha)/\Delta x + 2$ olduğundan bu parçanın değdiği alt dikdörtgenlerin toplam alanı en çok

$$(\beta - \alpha + 2\,\Delta x)(\varepsilon + 2\,\Delta y)$$

olur ve bu sayı istenildiği kadar küçük yapılabilir. $x = \varphi(y)$ biçimindeki parçalar için aynı hesap satırlarla yapılır; düşey bir doğru parçası en çok iki sütuna değer ve o sütunların alanı $2(d - c)\,\Delta x \to 0$'dır.
Böylece iki toplamın limiti aynıdır ve

$$A(S) = \lim_{m,\, n \to \infty} \sum_{R_{ij} \subseteq D} g(x_i, y_j)\, \Delta A = \iint_R G\, dA = \iint_D g\, dA$$

elde edilir. İkinci formül, aynı integrandın $f_x = \partial z/\partial x$ ve $f_y = \partial z/\partial y$ gösterimiyle yazılışıdır.
■

Yani yüzey alanı, D üzerinde $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$ fonksiyonunun iki katlı integralidir. İntegrale f'nin kendisi değil, yalnız eğimleri girer: f'ye bir sabit eklemek (yüzeyi yukarı kaydırmak) alanı değiştirmez ve $f \geq 0$ olması da gerekmez.
Rollerin değiştiği yüzeyler için de aynı formül geçerlidir; teoremde değişkenlerin adlarını değiştirmek yeter. $y = h(x, z)$ biçimindeki bir yüzeyin alanı, yüzeyin xz-düzlemine izdüşümü D üzerinde

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + h_x^2 + h_z^2}\, dA$$

integraliyle bulunur. $x = k(y, z)$ biçimindeki bir yüzeyde de aynı integral, yüzeyin yz-düzlemine izdüşümü üzerinde k_y ve k_z ile yazılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

5.3 İntegrandın Geometrik Anlamı

Formüldeki karekök, bir alan parçasının yüzeye çıkarken kaç kat büyüdüğünü söyler; bunu teğet düzlemin eğim açısıyla ifade edelim.
İspattaki $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektörü teğet düzleme diktir. Onu ΔA'ya bölersek teğet düzlemin yukarı bakan bir normalini buluruz:

$$\mathbf{n} = -f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad |\,\mathbf{n}\,| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}.$$

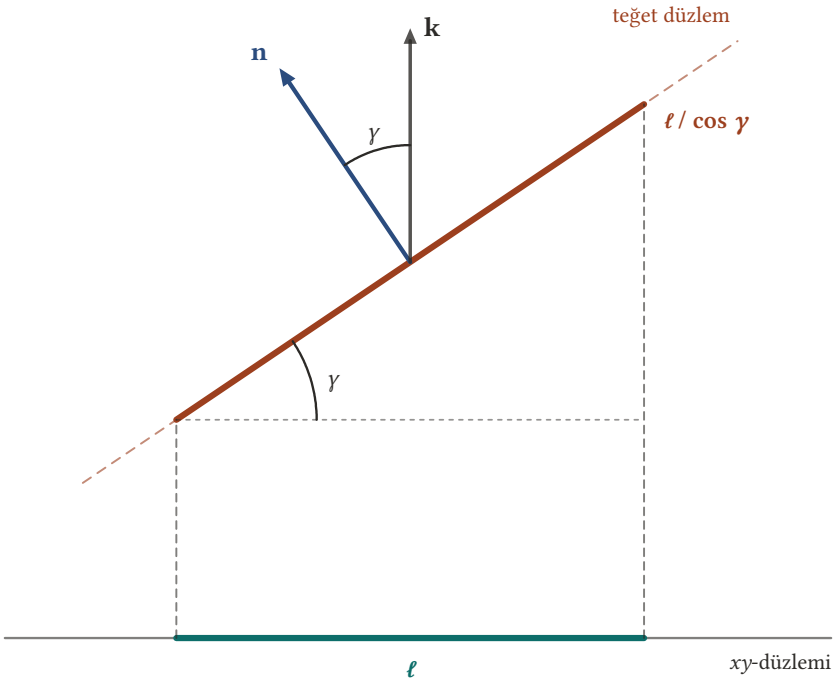
γ, $\mathbf{n}$ ile $\mathbf{k}$ arasındaki açı olsun; bu, teğet düzlemin xy-düzlemiyle yaptığı açıya da eşittir. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 1$ olduğundan

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}{|\,\mathbf{n}\,||\,\mathbf{k}\,|} = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

olur ve yüzey alanı formülü

$$A(S) = \iint_D \frac{1}{\cos\gamma}\,dA = \iint_D \sec\gamma\, dA$$

biçiminde de yazılabilir. Yani her ΔA alan parçası, teğet düzleme çıkarken $\sec\gamma$ katına büyür. Bunun sezgisel nedeni şudur: teğet düzlem xy-düzlemine göre yalnız en dik doğrultusunda eğiktir. O doğrultudaki uzunluklar $1/\cos\gamma$ katına çıkar, ona dik olan yatay doğrultudaki uzunluklar ise değişmez.



Şekil 5.3: Teğet düzlemi en dik doğrultusu boyunca kesen düşey düzlem. Düzlem xy-düzlemiyle γ açısı yapar; bu, $\mathbf{n}$ normali ile $\mathbf{k}$ arasındaki açıdır. Bu doğrultudaki ℓ uzunluğundaki bir gölge düzlemde $\ell/\cos\gamma$ uzunluğuna karşılık gelir; buna dik (yatay) doğrultudaki uzunluklar değişmez.

Bu yorumdan üç sonuç çıkar:

- Teğet düzlem yatay olduğunda ($f_x = f_y = 0$) çarpan 1'dir. Yüzey, gölgesinden yalnız eğimli olduğu yerlerde büyüktür.
- Çarpan her zaman en az 1 olduğundan $A(S) \geq A(D)$'dir: bir yüzey parçasının alanı, xy-düzlemindeki gölgesinin alanından küçük olamaz. Bu, hesapların sonucunu denetlemek için kullanışlı bir ölçüttür.

 CC BY-NC-SA 4.0

- Formül, yay uzunluğu formülüyle aynı kalıptadır. Orada $\sqrt{1+f'(x)^2} = 1/\cos\alpha$ idi; α, teğet doğrunun x ekseniyle yaptığı açıdır.

5.4 Yüzey Alanının Hesaplanması

Formülü uygularken her seferinde aynı dört adımı izleriz.

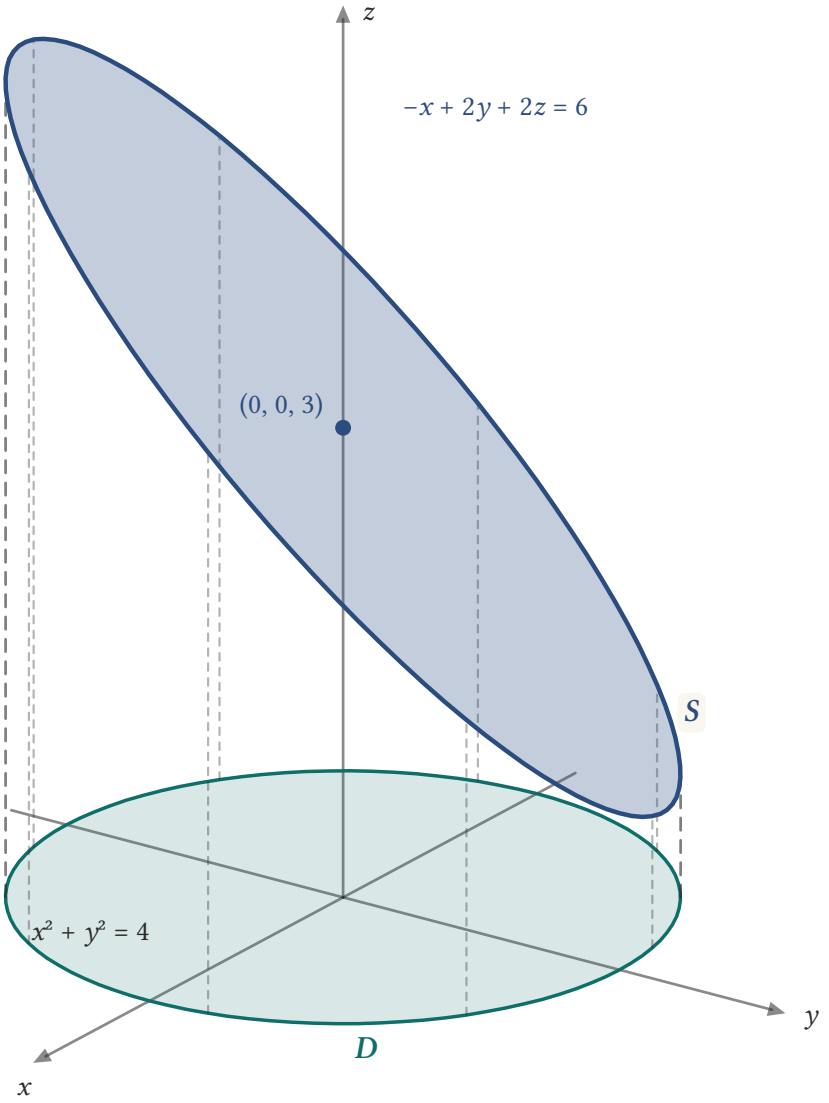
Yüzey alanı dört adımda

1. **Yüzeyi ve D'yi belirle.** Yüzeyi $z = f(x,y)$ biçiminde yaz. D, yüzey parçasının xy-düzlemine dik izdüşümüdür (gölgesidir); sınırları çoğu zaman yüzeyin başka bir yüzeyle kesişiminden bulunur.
2. **İntegrandı hazırla.** f_x ve f_y'yi hesapla, $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$ ifadesini sadeleştir.
3. **Ardışık integrali kur.** D'yi I. tip, II. tip ya da kutupsal biçimde yaz. D bir daire ya da halkaysa ve integrand x^2+y^2'ye bağlıysa kutupsal koordinatlar en kolayıdır; $dA = r\,dr\,d\theta$ olur (bkz. Teorem 3.1).
4. **Hesapla.** İç integral çoğu zaman, kökün içini yeni değişken alan bir değişken değiştirmesiyle çözülür.

Önce integrandın sabit olduğu en basit durumla başlayalım.

Örnek 5.1 (Bir Düzlem Parçasının Alanı). $-x + 2y + 2z = 6$ düzleminin $x^2 + y^2 = 4$ silindirinin içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.4: $-x + 2y + 2z = 6$ düzleminin $x^2 + y^2 = 4$ silindiri içinde kalan parçası S bir elipstir; gölgesi D ise 2 yarıçaplı dairedir. Eğik düzlem gölgesinden büyüktür: alanı D'nin alanının 3/2 katıdır.

Çözüm.
Yüzey ve D. Düzlemin denklemini z'ye göre çözersek

$$z = f(x, y) = 3 + \frac{x}{2} - y$$

olur. Silindirin içi $x^2 + y^2 \leq 4$ olduğundan D, merkezi orijin ve yarıçapı 2 olan dairedir.
İntegrand. $f_x = \frac{1}{2}$ ve $f_y = -1$ olduğundan

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

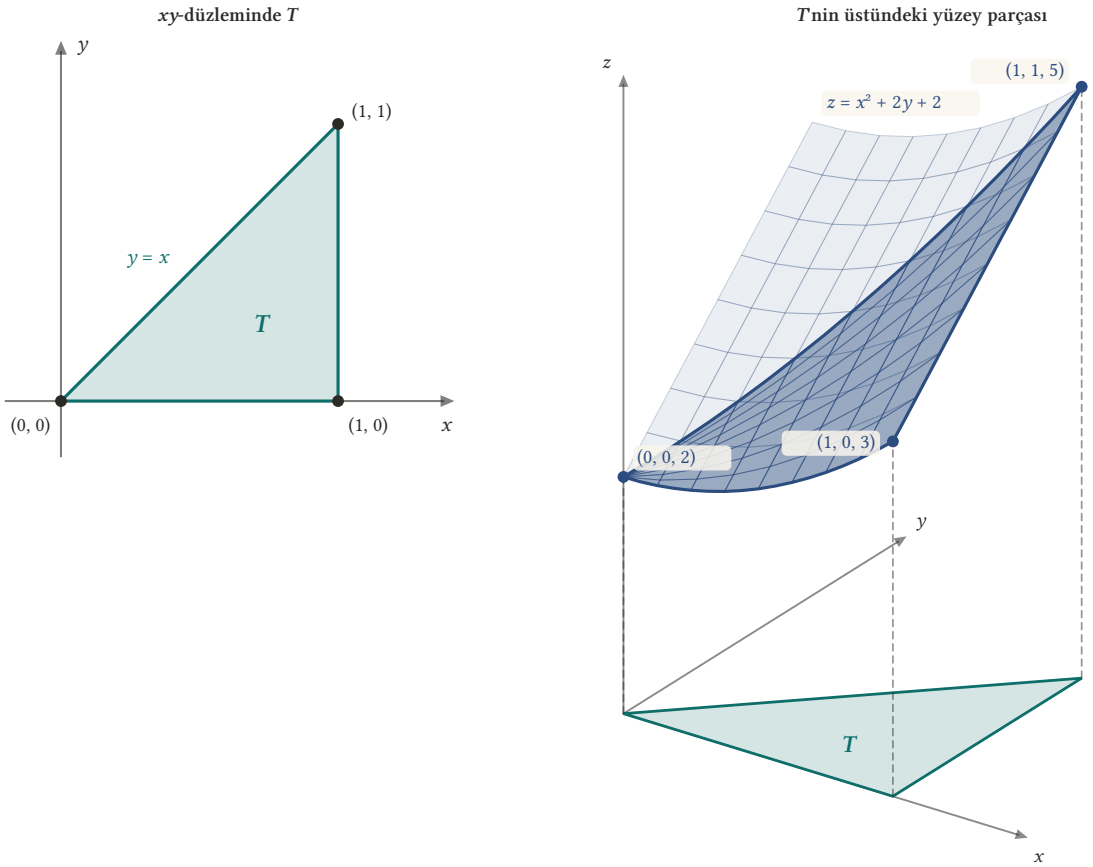
bulunur.
İntegral. İntegrand sabit olduğundan, $\iint_D 1\, dA = A(D)$ özelliğiyle (bkz. Önerme 2.1)

$$A(S) = \iint_D \frac{3}{2}\, dA = \frac{3}{2}\, A(D) = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 6\pi$$

 CC BY-NC-SA 4.0

elde edilir. Düzlemin normali $\mathbf{n} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $|\,\mathbf{n}\,| = \frac{3}{2}$ olduğundan düzlem xy-düzlemiyle $\cos\gamma = \frac{2}{3}$ olan bir açı yapar; bu yüzden alanı, gölgesinin alanının $\frac{3}{2}$ katıdır.
■

Örnek 5.2 (Üçgen Üzerindeki Bir Yüzey Parçası). $z = x^2 + 2y + 2$ yüzeyinin, xy-düzleminde köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(1,1)$ olan T üçgeninin üstünde kalan parçasının alanını bulunuz.



Şekil 5.5: Solda (0, 0), (1, 0), (1, 1) köşeli T üçgeni: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$. Sağda $z = x^2 + 2y + 2$ yüzeyinin T üstündeki parçası (koyu) ve birim kare üstündeki devamı (açık). Sağ panelde düşey ölçek küçültülmüştür.

Çözüm.
Yüzey ve D. Burada $D = T$'dir. Üçgenin üst kenarı $y = x$ doğrusu olduğundan T, I. tip bir bölgedir:

$$T = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le x\}.$$

İntegrand. $f(x,y) = x^2 + 2y + 2$ için $f_x = 2x$ ve $f_y = 2$ olduğundan

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{(2x)^2 + 2^2 + 1} = \sqrt{4x^2 + 5}$$

bulunur.
Ardışık integral. İntegrand y'ye bağlı olmadığından önce y'ye göre integral almak işimizi kolaylaştırır:

$$A = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{4x^2 + 5}\, dy\, dx = \int_0^1 x\sqrt{4x^2 + 5}\, dx.$$

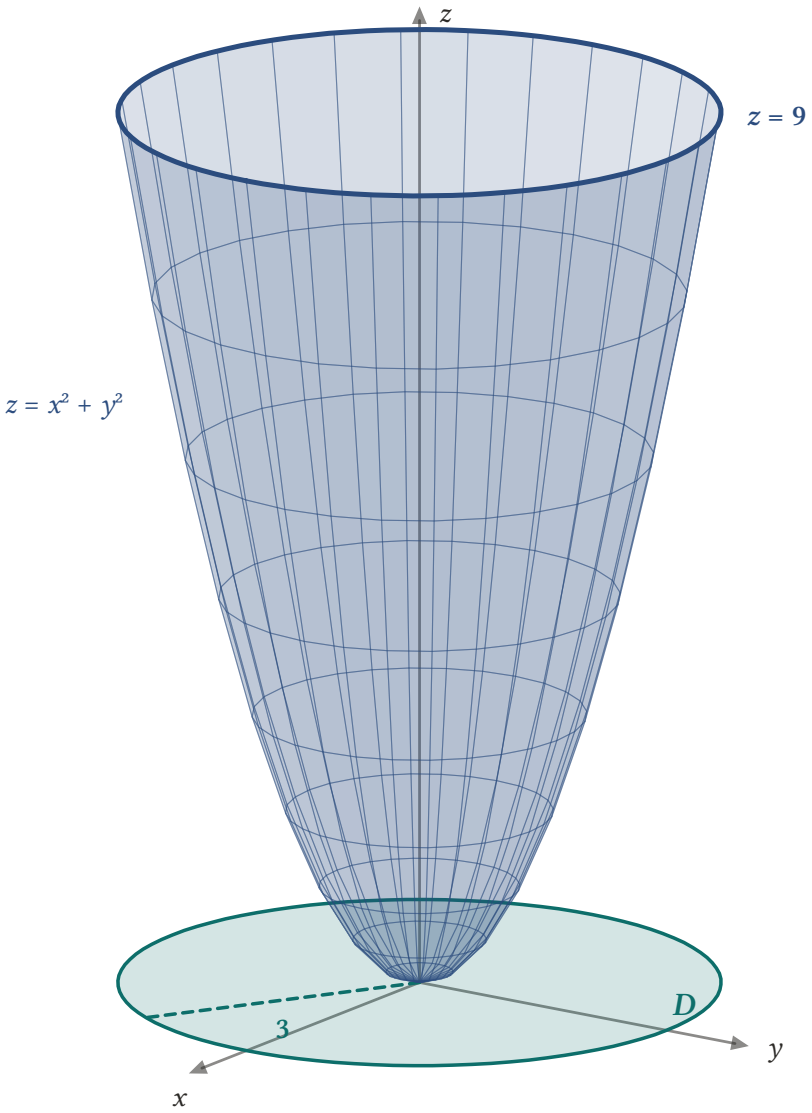
Hesap. $u = 4x^2 + 5$ dersek $du = 8x\,dx$ olur; $x = 0$ iken $u = 5$, $x = 1$ iken $u = 9$'dur. Buradan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$A = \frac{1}{8}\int_5^9 u^{1/2}\,du = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[\,u^{3/2}\right]_5^9$$
$$= \frac{1}{12}\left(\,27 - 5\sqrt{5}\,\right) \approx 1{,}3183$$

elde edilir. İntegrali öbür sırayla, önce x'e göre kurmak da mümkündü, ama o zaman $\int \sqrt{4x^2+5}\,dx$ gibi çok daha zor bir integralle karşılaşırdık.
■

Örnek 5.3 (Bir Paraboloit Parçasının Alanı). $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z = 9$ düzleminin altında kalan parçasının alanını bulunuz.



Şekil 5.6: $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z = 9$ düzleminin altında kalan parçası. Paraboloit bu düzlemi $x^2 + y^2 = 9$ çemberi boyunca keser; bu yüzden parçanın xy-düzlemine izdüşümü 3 yarıçaplı D dairesidir.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yüzey ve D. Düzlem paraboloidi $x^2+y^2=9$, $z=9$ çemberi boyunca keser. Paraboloidin $z\le 9$ olan parçası $x^2+y^2\le 9$ dairesinin üstündedir; yani D, merkezi orijin ve yarıçapı 3 olan dairedir.
İntegrand. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x$ ve $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y$ olduğundan

$$\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}$$

bulunur.
Ardışık integral. D bir daire ve integrand x^2+y^2'ye bağlı olduğundan kutupsal koordinatlara geçeriz: $D=\{0\le r\le 3,\,0\le\theta\le 2\pi\}$, $x^2+y^2=r^2$ ve $dA=r\,dr\,d\theta$ olur (bkz. Teorem 3.1). Böylece

$$A=\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{3}r\sqrt{1+4r^2}\,dr.$$

Hesap. İç integralde $u=1+4r^2$, $du=8r\,dr$ dersek $r=0$ iken $u=1$, $r=3$ iken $u=37$ olur:

$$\int_0^{3}r\sqrt{1+4r^2}\,dr=\frac{1}{8}\int_1^{37}u^{1/2}\,du=\frac{1}{12}\left(\,37\sqrt{37}-1\,\right).$$

Dış integral 2π verdiğinden

$$A=2\pi\cdot\frac{1}{12}\left(\,37\sqrt{37}-1\,\right)=\frac{\pi}{6}\left(\,37\sqrt{37}-1\,\right)\approx 117{,}32$$

elde edilir. Sonuç, gölgenin alanı $9\pi\approx 28{,}27$'den büyüktür; paraboloidin kenarları dik olduğundan bu beklenen bir şeydir.
■

⚠ Sık yapılan hatalar

- $\iint_D f\,dA$ yüzeyin altındaki hacmi verir, alanını değil. Yüzey alanında integrale yalnız f_x ve f_y girer.
- Kökün içindeki 1 unutulmamalıdır; o terim $\mathbf{n}=-f_x\,\mathbf{i}-f_y\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$ normalinin $\mathbf{k}$ bileşeninden gelir. O olmasaydı yatay bir düzlem parçasının alanı 0 çıkardı.
- D yüzeyin kendisi değil, xy-düzlemindeki izdüşümüdür. Sınırını bulmak için çoğu zaman yüzeyin kesiştiği öbür yüzeyle ortak noktaları bulunur.
- Kutupsal koordinatlara geçerken $dA=r\,dr\,d\theta$'daki r çarpanı unutulmamalıdır.

5.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar kolaydan zora sıralanmıştır. Son ikisinde f_x, D'nin sınırının bir kısmında tanımsızdır ve integrand oraya yaklaşırken sınırsız büyür; bu yüzden ne yüzey alanının tanımı ne de formülü D'nin tamamına doğrudan uygulanabilir. Böyle bir yüzeyde, D'nin içinde kalan, integrandın sürekli olduğu ve t büyüdükçe D'yi dolduran D_t bölgeleri alınır. D_t'nin üstündeki parçaların alanları formülle bulunur. Bu parçalar giderek yüzeyin tamamını kapladığından yüzeyin alanı, $\iint_{D_t}\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}\,dA$ alanlarının limiti olarak tanımlanır. Bu, tek değişkenli genelleştirilmiş integralin iki katlı karşılığıdır (bkz. Analiz 3).

Alıştırma 5.1 (Birinci Bölgedeki Düzlem Parçası). $3x+2y+z=6$ düzleminin birinci bölgede $(x,y,z\ge 0)$ kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm.
Düzlem $z=f(x,y)=6-3x-2y$ biçiminde yazılır. $f_x=-3$ ve $f_y=-2$ olduğundan integrand sabittir:

$$\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+1}=\sqrt{14}.$$

Parçanın gölgesi D, $x\ge 0$, $y\ge 0$ ve $z=6-3x-2y\ge 0$, yani $3x+2y\le 6$ koşullarıyla verilir. Bu, köşeleri $(0,0)$, $(2,0)$ ve $(0,3)$ olan üçgendir ve alanı $\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3=3$'tür. Böylece

 CC BY-NC-SA 4.0

$$A(S) = \iint_D \sqrt{14}\,dA = \sqrt{14}\,A(D) = 3\sqrt{14} \approx 11{,}22$$

bulunur.
■

Alıştırma 5.2 (Bir Üçgenin Üstündeki Yüzey). $z = 10 + x + y^2$ yüzeyinin, köşeleri $(0,0)$, $(0,-2)$ ve $(2,-2)$ olan D üçgeninin üstünde kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm.
$f_x = 1$ ve $f_y = 2y$ olduğundan integrand

$$\sqrt{1^2 + (2y)^2 + 1} = \sqrt{2 + 4y^2}$$

olur ve yalnız y'ye bağlıdır. Bu yüzden D'yi II. tip bölge olarak yazmak uygundur. $(0,0)$ ile $(2,-2)$'den geçen kenar $x = -y$ doğrusu üzerindedir; dolayısıyla

$$D = \{(x,y) : -2 \le y \le 0,\, 0 \le x \le -y\}$$

olur. İç integral x'e göre olduğundan integrand sabit gibi davranır:

$$A = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{-y} \sqrt{2+4y^2}\,dx\,dy = \int_{-2}^{0} (-y)\sqrt{2+4y^2}\,dy.$$

$u = 2 + 4y^2$ dersek $du = 8y\,dy$, yani $(-y)\,dy = -\frac{1}{8}\,du$ olur; $y = -2$ iken $u = 18$, $y = 0$ iken $u = 2$'dir:

$$A = -\frac{1}{8}\int_{18}^{2} u^{1/2}\,du = \frac{1}{8}\int_{2}^{18} u^{1/2}\,du = \frac{1}{12}\left[\,u^{3/2}\right]_{2}^{18}$$
$$= \frac{1}{12}\left(\,54\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,\right) = \frac{13\sqrt{2}}{3} \approx 6{,}13.$$

Burada $18^{3/2} = 18\sqrt{18} = 54\sqrt{2}$ ve $2^{3/2} = 2\sqrt{2}$ eşitliklerini kullandık.
■

Alıştırma 5.3 (Bir Karenin Üstündeki Yüzey). $z = \frac{2}{3}\left(\,x^{3/2} + y^{3/2}\,\right)$ yüzeyinin $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ karesinin üstünde kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm.
$f_x = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\,x^{1/2} = \sqrt{x}$ ve aynı biçimde $f_y = \sqrt{y}$ olduğundan

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{x + y + 1}$$

olur. Önce y'ye göre integral alalım:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x+y}\,dy = \frac{2}{3}\left[\,(1+x+y)^{3/2}\right]_{y=0}^{y=1}$$
$$= \frac{2}{3}\left[\,(2+x)^{3/2} - (1+x)^{3/2}\,\right].$$

Sonra x'e göre:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{3}\int_0^1 \Big[\,(2+x)^{3/2} - (1+x)^{3/2}\,\Big]\,dx \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\Big[\,(2+x)^{5/2} - (1+x)^{5/2}\Big]_0^1 \\ &= \frac{4}{15}\Big[\,\big(\,3^{5/2} - 2^{5/2}\,\big) - \big(\,2^{5/2} - 1\,\big)\,\Big]. \end{aligned}$$

$3^{5/2} = 9\sqrt{3}$ ve $2^{5/2} = 4\sqrt{2}$ olduğundan

$$A = \frac{4}{15}\,\big(\,9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1\,\big) \approx 1{,}4066$$

bulunur. Sonuç, gölgenin alanı olan 1'den büyüktür.
■

Alıştırma 5.4 (Bir Silindir Parçası). $x^2 + z^2 = 4$ silindirinin, köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ ve $(1,1)$ olan karenin üstünde kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm.
Karenin üstündeki parça silindirin $z \geq 0$ yarısındadır: $z = f(x,y) = \sqrt{4 - x^2}$. Buradan

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}, \qquad f_y = 0$$

ve

$$f_x^2 + f_y^2 + 1 = \frac{x^2}{4-x^2} + 1 = \frac{4}{4-x^2}$$

bulunur. $0 \leq x \leq 1$ için integrand $2/\sqrt{4-x^2}$ sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \\ &= 2\left[\arcsin\frac{x}{2}\right]_0^1 = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}0472 \end{aligned}$$

olur. Sonucu geometriyle de denetleyebiliriz: parça, y doğrultusunda 1 birim uzunluğunda, eğri doğrultusunda ise 2 yarıçaplı çemberin $x = 0$ ile $x = 1$ arasındaki yayı kadar ($2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$) genişliğinde, kıvrılmış bir dikdörtgendir.
■

Alıştırma 5.5 (Bir Eyer Yüzeyinin Parçası). $z = xy$ yüzeyinin $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm.
$f_x = y$ ve $f_y = x$ olduğundan integrand $\sqrt{1 + x^2 + y^2}$'dir. D birim daire olduğundan kutupsal koordinatlara geçeriz:

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr.$$

$u = 1 + r^2$, $du = 2r\,dr$ ile

$$\int_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}\,\big(\,2\sqrt{2} - 1\,\big)$$

olur ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$A = \frac{2\pi}{3}\left(\,2\sqrt{2}-1\,\right) \approx 3{,}8294$$

bulunur.
■

Alıştırma 5.6 (Bir Küre Kapağı). $x^2+y^2+z^2=4$ küresinin $z=1$ düzleminin üstünde kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm.
Parça üst yarım küre üzerindedir: $z=f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Düzlemle kesişimde $x^2+y^2=4-1=3$ olduğundan D, yarıçapı $\sqrt{3}$ olan dairedir. Kısmi türevler

$$f_x=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \qquad f_y=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

olduğundan

$$f_x^2+f_y^2+1=\frac{x^2+y^2}{4-x^2-y^2}+1=\frac{4}{4-x^2-y^2}$$

bulunur. Kutupsal koordinatlarda integrand $2/\sqrt{4-r^2}$ olur; $r\le\sqrt{3}<2$ olduğundan sürekli ve sınırlıdır:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}}\,dr\,d\theta = 2\pi\left[-2\sqrt{4-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2\pi(-2+4) = 4\pi. \end{aligned}$$

Bu, Arşimet'in küre kapağı için bulduğu $2\pi Rh$ sonucudur: burada küre yarıçapı $R=2$, kapağın yüksekliği $h=2-1=1$'dir.
■

Alıştırma 5.7 (Orta Nokta Kuralıyla Tahmin). $z=x^2+y^2$ paraboloidinin $[0,1]\times[0,1]$ karesinin üstünde kalan parçasının alanını, kareyi dört eş kareye bölüp iki katlı integraller için orta nokta kuralıyla (bkz. Dikdörtgen Bölgelerde İki Katlı İntegraller) tahmin ediniz.

Çözüm.
Alan $A=\iint_R g\,dA$'dır; burada $g(x,y)=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$ ve $R=[0,1]\times[0,1]$'dir. Dört karenin her birinin kenarı $\frac{1}{2}$, alanı $\Delta A=\frac{1}{4}$'tür ve orta noktaları

$$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\quad \left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right),\quad \left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right),\quad \left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$$

noktalarıdır. g'nin bu noktalardaki değerleri:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) &= \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}2247, \\ g\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right) = g\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) &= \sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{7}{2}} \approx 1{,}8708, \\ g\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right) &= \sqrt{1+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{11}{2}} \approx 2{,}3452. \end{aligned}$$

Orta nokta kuralı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$A \approx \frac{1}{4}\,\bigl(\,1{,}2247 + 2\cdot 1{,}8708 + 2{,}3452\,\bigr)$$
$$= \frac{1}{4}\cdot 7{,}3115 \approx 1{,}8279$$

tahminini verir. İntegrali bilgisayarla hesaplarsak $A \approx 1{,}8616$ buluruz; dört karelik kaba bölünüşe rağmen tahminin bağıl hatası yalnız yüzde 1,8 kadardır.
■

Alıştırma 5.8 (Tek Katlı İntegrale İndirgeme). $z = \cos(x^2+y^2)$ yüzeyinin $x^2+y^2=1$ silindirinin içinde kalan parçasının alanını, önce tek katlı bir integrale indirgeyip sonra sayısal olarak dört ondalık basamağa kadar hesaplayınız.

Çözüm.
Zincir kuralıyla

$$f_x = -2x\sin(x^2+y^2), \qquad f_y = -2y\sin(x^2+y^2)$$

ve

$$f_x^2 + f_y^2 = 4(x^2+y^2)\sin^2(x^2+y^2)$$

olur. D birim daire olduğundan kutupsal koordinatlarda $x^2+y^2 = r^2$ yazarız:

$$A = \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{1} \sqrt{1 + 4r^2\sin^2(r^2)}\, r\,dr\,d\theta$$
$$= 2\pi \int_0^{1} r\sqrt{1+4r^2\sin^2(r^2)}\,dr.$$

$u = r^2$, $du = 2r\,dr$ değişken değiştirmesiyle tek katlı integrale ulaşırız:

$$A = \pi \int_0^{1} \sqrt{1 + 4u\sin^2 u}\,du.$$

Bu integrandın elemanter bir ilkel fonksiyonu yoktur; integrali sayısal olarak hesaplarız. $F(u) = \sqrt{1+4u\sin^2 u}$ için $[0,1]$'i $h = 0{,}25$ genişliğinde dört parçaya bölüp Simpson kuralını uygulayalım (bkz. Nümerik Analiz). Değerler

$$F(0) = 1, \qquad F(0{,}25) \approx 1{,}030150,$$
$$F(0{,}5) \approx 1{,}208179, \quad F(0{,}75) \approx 1{,}547221,$$
$$F(1) \approx 1{,}957624$$

olduğundan

$$\int_0^1 F(u)\,du \approx \frac{h}{3}\,\bigl[\,F(0) + 4F(0{,}25) + 2F(0{,}5) + 4F(0{,}75) + F(1)\,\bigr]$$
$$= \frac{1}{12}\cdot 15{,}683466 \approx 1{,}306956$$

ve $A \approx \pi\cdot 1{,}306956 \approx 4{,}1059$ bulunur. Bölünüşü sıklaştırınca tahmin düzelir: 10 parçayla $4{,}10726$, 20 parçayla $4{,}10729$ elde edilir ve ilk dört ondalık basamak artık değişmez. Sonuç olarak

$$A \approx 4{,}1073$$

olur. Gölgenin alanı $\pi \approx 3{,}1416$ olduğundan yüzey gölgesinden yaklaşık yüzde 31 büyüktür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 5.9 (Bir Düzlem Parçasının Alanı ve Gölgesi). $z = ax + by + c$ düzleminin, xy-düzlemindeki izdüşümü alanı $A(D)$ olan bir D bölgesi olan parçasının alanının $\sqrt{a^2+b^2+1}A(D)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f(x,y) = ax + by + c$ için $f_x = a$ ve $f_y = b$ sabittir. Yüzey alanı formülünde sabit çarpanı integralin dışına alıp $\iint_D 1\,dA = A(D)$ özelliğini kullanırsak (bkz. Önerme 2.1)

$$A(S) = \iint_D \sqrt{a^2+b^2+1}\,dA = \sqrt{a^2+b^2+1}\iint_D 1\,dA = \sqrt{a^2+b^2+1}A(D)$$

bulunur. Geometrik olarak: düzlemin normali $\mathbf{n} = -a\,\mathbf{i} - b\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ her yerde aynıdır, dolayısıyla $\sec\gamma = \sqrt{a^2+b^2+1}$ çarpanı da her yerde aynıdır. Örnek 5.1 bunun $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ olan özel hâlidir: $\sqrt{\frac{1}{4}+1+1} = \frac{3}{2}$.
■

Alıştırma 5.10 (Başka Bir Düzleme İzdüşüm). $y = x^2 + z^2$ paraboloidinin $y = 25$ düzlemiyle kesilen sonlu parçasının alanını, yüzeyi xz-düzlemine izdüşürerek bulunuz.

Çözüm.
Yüzey, xz-düzlemi üzerinde $y = h(x,z) = x^2 + z^2$ fonksiyonunun grafiğidir. Sonlu parça $y \le 25$, yani $x^2 + z^2 \le 25$ koşuluyla verilir; bu yüzden izdüşümü D, xz-düzleminde merkezi orijin ve yarıçapı 5 olan dairedir. $h_x = 2x$ ve $h_z = 2z$ olduğundan rolleri değişmiş formülle

$$A = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2}\,dA$$

olur. xz-düzleminde kutupsal koordinatlar $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ ile

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{5} \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{1}{12}\left[(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^5 \\ &= \frac{\pi}{6}\left(\,101\sqrt{101} - 1\,\right) \approx 530{,}95 \end{aligned}$$

bulunur. Bu, Örnek 5.3 ile aynı hesaptır; yalnız eksenlerin adları ve yarıçap değişmiştir.
■

Alıştırma 5.11 (Kürenin Alanı). a yarıçaplı kürenin alanının $4\pi a^2$ olduğunu gösteriniz. Üst yarım küre $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ için integrand $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinde sınırsız büyür; bu yüzden integrali $x^2 + y^2 \le t^2$ dairesi üzerinde hesaplayıp $t \to a^-$ iken limit alınız.

Çözüm.
$f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ için, küre kapağı alıştırmasındaki (Alıştırma 5.6) hesabın aynısıyla

$$f_x^2 + f_y^2 + 1 = \frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2} + 1 = \frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$$

olur; integrand kutupsal koordinatlarda $a/\sqrt{a^2-r^2}$'dir ve $r \to a$ iken sınırsız büyür. $0 < t < a$ için $r \le t$ dairesinde integrand sürekli olduğundan

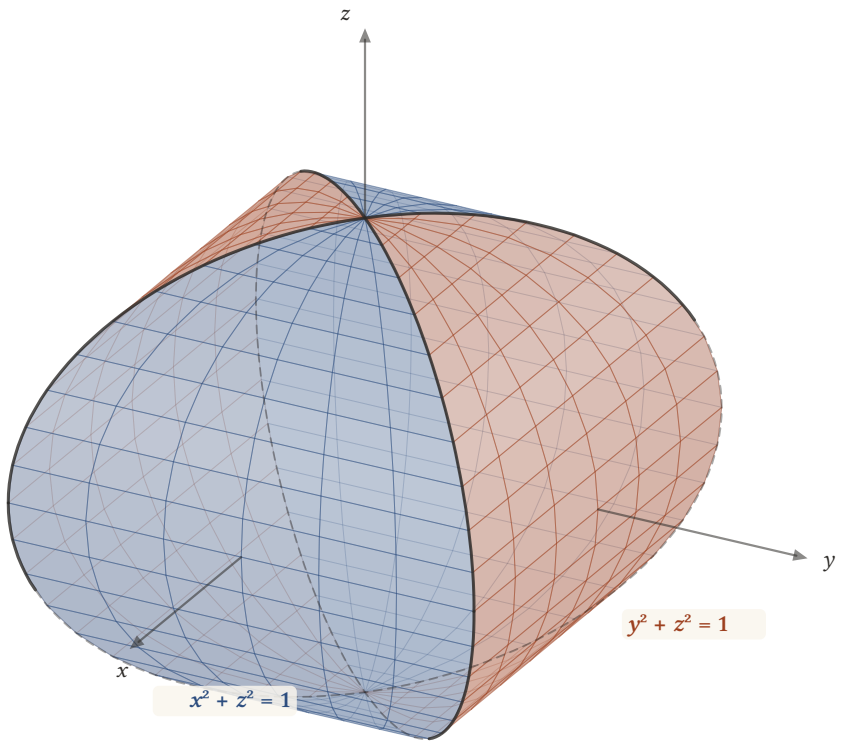
$$\begin{aligned} A_t &= \int_0^{2\pi}\int_0^{t} \frac{a\,r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr\,d\theta = 2\pi a\left[-\sqrt{a^2-r^2}\right]_0^t \\ &= 2\pi a\left(\,a - \sqrt{a^2-t^2}\,\right) \end{aligned}$$

bulunur. $t \to a^-$ iken $\sqrt{a^2-t^2} \to 0$ olduğundan üst yarım kürenin alanı $2\pi a^2$'dir. Alt yarım küre simetrik olduğundan kürenin alanı $2\cdot 2\pi a^2 = 4\pi a^2$ olur. Bu, dönel yüzey alanıyla bulunan sonuçla aynıdır (bkz. Analiz 2).

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 5.12 (İki Silindirin Ortak Parçası). $y^2 + z^2 \leq 1$ ve $x^2 + z^2 \leq 1$ eşitsizliklerini birlikte sağlayan cismin yüzeyinin alanını bulunuz.



Şekil 5.7: $y^2 + z^2 \leq 1$ ve $x^2 + z^2 \leq 1$ eşitsizliklerini birlikte sağlayan cismin yüzeyi. Mavi parçalar $x^2 + z^2 = 1$ silindirinden ($|y| \leq |x|$), turuncu parçalar $y^2 + z^2 = 1$ silindirinden ($|x| \leq |y|$) gelir; iki silindir $y = \pm x$ düzlemlerindeki elipsler boyunca birleşir.

Çözüm.
Yüzeyin parçaları. Cismin yüzeyindeki her nokta iki silindirden en az birinin üzerindedir. $x^2 + z^2 = 1$ silindirindeki bir nokta için ikinci koşul $y^2 \leq 1 - z^2 = x^2$, yani $|\, y \,| \leq |\, x \,|$ demektir. Aynı biçimde $y^2 + z^2 = 1$ silindirinden gelen parça $|\, x \,| \leq |\, y \,|$ koşuluyla verilir. İki parçanın ortak noktaları iki elips üzerindedir ve alana katkı yapmaz. x ile y'nin yer değiştirmesi cismi kendisine, birinci parçayı da ikinci parçaya götürür; bu yüzden iki parçanın alanı eşittir.
Birinci parçanın üst yarısı. Birinci parça $z \geq 0$ ve $z \leq 0$ olan iki eş yarıdan oluşur. Üst yarı $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ grafiğidir ve gölgesi

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -|\, x \,| \leq y \leq |\, x \,|\}$$

kümesidir (orijinde birleşen iki üçgen). $f_x = -x/\sqrt{1 - x^2}$ ve $f_y = 0$ olduğundan

$$\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} = \sqrt{\frac{x^2}{1 - x^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

olur. Bu fonksiyon $x \to \pm 1$ iken sınırsız büyüdüğünden, kürenin alanında (Alıştırma 5.11) yaptığımız gibi önce $|\, x \,| \leq t < 1$ bölgesi üzerinde integral alıp sonra $t \to 1^-$ limitini alırız. İntegrand çift olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{-t}^{t}\int_{-|x|}^{|x|}\frac{dy\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-t}^{t}\frac{2\,|x|}{\sqrt{1-x^2}}dx = 4\int_{0}^{t}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$
$$= 4\left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^t = 4\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)$$

bulunur ve $t \to 1^-$ iken bu değer 4'e gider.
Toplam. Birinci parçanın alanı $2 \cdot 4 = 8$, ikinci parçanınki de 8 olduğundan yüzeyin alanı

$$8 + 8 = 16$$

olur. Silindirlerin yarıçapı 1 yerine r alınırsa aynı hesap $16r^2$ verir.
■

Bu bölümde yüzeyleri $z = f(x, y)$ grafikleri olarak ele aldık. Küre gibi kapalı yüzeyler ya da dönel yüzeyler tek bir grafik olarak yazılamaz; onları Parametrik Yüzeyler ve Alanları bölümünde parametrik olarak inceleyecek, buradaki formülün de dönel yüzey alanı formülünün de oradaki genel formülün özel hâlleri olduğunu göreceğiz. Şimdi iki katlı integralden üç katlı integrale geçiyoruz: Üç Katlı İntegraller.

 CC BY-NC-SA 4.0

6. Üç Katlı İntegraller

Tek değişkenli bir fonksiyonu bir aralık üzerinde, iki değişkenli bir fonksiyonu düzlemdeki bir bölge üzerinde integralledik. Şimdi aynı fikri bir adım ileri taşıyıp üç değişkenli bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunu uzaydaki bir cisim üzerinde integralleyeceğiz. Böyle bir integrale en doğal ihtiyaç fizikten gelir: yoğunluğu noktadan noktaya değişen bir cismin kütlesini, kütle merkezini ya da bir eksen etrafında dönmeye karşı direncini bulmak için cismi küçük parçalara bölüp parçaların katkılarını toplamamız gerekir.
Yol haritamız iki katlı integraldekiyle aynıdır. Önce en basit bölge olan dikdörtgen kutuda integrali Riemann toplamlarının limiti olarak tanımlayacak ve Fubini Teoremi ile onu art arda alınan üç tek katlı integrale indireceğiz. Sonra integrali genel cisimlere taşıyıp cismi iki yüzey arasına sıkıştırarak hesaplamayı öğreneceğiz. Bölümü hacim, kütle, kütle merkezi, eylemsizlik momenti, olasılık ve ortalama değer uygulamalarıyla bitireceğiz.

6.1 Kutularda Üç Katlı İntegral

İşe, kenarları koordinat eksenlerine paralel olan bir kutuda tanımlı fonksiyonlarla başlayalım:

$$B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] = \{(x, y, z) \mid a \le x \le b, c \le y \le d, r \le z \le s\}.$$

$[a, b]$ aralığını genişliği Δx olan l eşit alt aralığa, $[c, d]$ aralığını genişliği Δy olan m eşit alt aralığa ve $[r, s]$ aralığını genişliği Δz olan n eşit alt aralığa bölelim. Bölüm noktalarından geçen ve koordinat düzlemlerine paralel olan düzlemler B kutusunu lmn tane alt kutuya ayırır:

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k].$$

Her alt kutunun hacmi $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$'dir.

Tanım 6.1 (Kutuda Üç Katlı İntegral). f, B kutusunda tanımlı bir fonksiyon olsun ve her B_{ijk} alt kutusundan bir $P^*_{ijk} = (x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ örnek noktası seçilsin.

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(P^*_{ijk})\, \Delta V$$

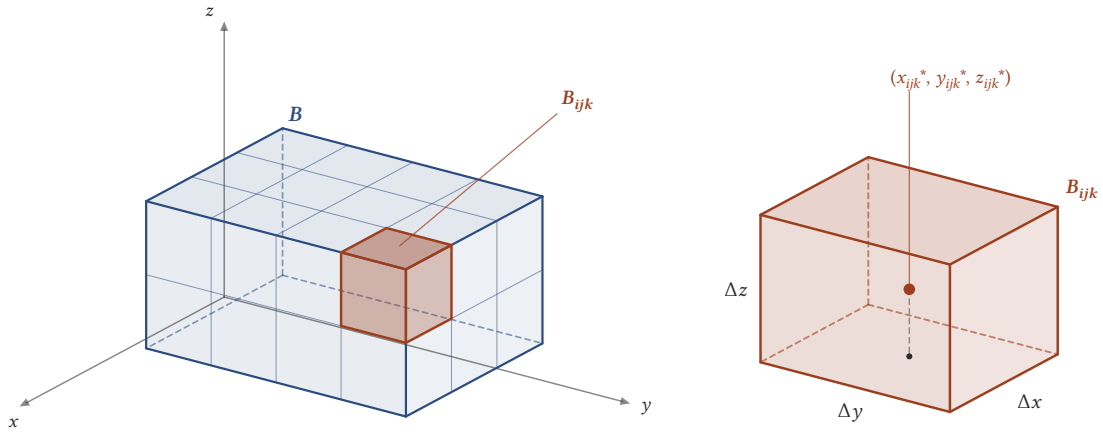
toplamına **üç katlı Riemann toplamı** denir. f'nin B üzerindeki **üç katlı integrali** (triple integral)

$$\iiint_B f(x, y, z)\, dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(P^*_{ijk})\, \Delta V$$

limitidir. Bu limit örnek noktaların seçiminden bağımsız olarak varsa f'ye B üzerinde **integrallenebilir** denir.

Yani kutuyu küçük kutulara bölüyor, her küçük kutuda fonksiyonun bir değerini o kutunun hacmiyle çarpıyor ve bu çarpımları topluyoruz. Bölüntü inceldikçe bu toplamların yaklaştığı sayı üç katlı integraldir. Tanım, dikdörtgende iki katlı integralin (Tanım 1.2) bir boyut eklenmiş hâlidir. Örneğin f bir cismin yoğunluğuysa $f(P^*_{ijk})\, \Delta V$ küçük kutudaki kütleye yakındır ve Riemann toplamı cismin kütlesine bir yaklaşımdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.1: Solda B kutusu $l = 3$, $m = 4$, $n = 2$ için 24 alt kutuya bölünmüş; turuncu alt kutu B_{ijk}'dır. Sağda bu alt kutu büyütülmüştür: kenarları Δx, Δy, Δz, hacmi $\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$'dir ve içinden bir örnek nokta seçilir.

Tek ve iki katlı integralde olduğu gibi, f kutuda sürekliyse bu limit her zaman vardır; bunun ispatı ileri analizin konusudur. Limit var olduğunda örnek noktayı istediğimiz gibi seçebiliriz. Her alt kutunun (x_i, y_j, z_k) köşesini seçersek integral daha sade bir biçim alır:

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta V.$$

Örnek nokta olarak her alt kutunun merkezini alıp limite geçmeden durursak integral için pratik bir tahmin elde ederiz.

Tanım 6.2 (Üç Katlı İntegral için Orta Nokta Kuralı). B kutusu yukarıdaki gibi lmn eş alt kutuya bölünsün ve $\bar{x}_i$, $\bar{y}_j$, $\bar{z}_k$ sırasıyla $[x_{i-1}, x_i]$, $[y_{j-1}, y_j]$, $[z_{k-1}, z_k]$ aralıklarının orta noktaları olsun.

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV \approx \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)\,\Delta V$$

yaklaşımına **orta nokta kuralı** denir.

Yani B_{ijk} alt kutusunun merkezi $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ noktasıdır ve orta nokta kuralı, örnek noktaları bu merkezler olan Riemann toplamıdır. Bölüntü inceldikçe tahmin integrale yaklaşır.
Bir üç katlı integrali tanımdan hesaplamak çok zahmetlidir. İki katlı integralde olduğu gibi, pratik yol onu art arda alınan tek katlı integrallere, yani bir ardışık integrale indirmektir.

Teorem 6.1 (Kutuda Fubini Teoremi). *f, $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ kutusunda sürekli ise*

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

olur. Sağdaki ardışık integral öteki beş integrasyon sırasından herhangi biriyle yazıldığında da aynı değer elde edilir.

> ***İspat.***
> *En içteki integrali, y ve z'nin bir fonksiyonu olarak adlandıralım:*
>
> $$g(y,z) = \int_a^b f(x,y,z)\,dx, \qquad (y,z) \in R = [c,d] \times [r,s].$$
>
> ***g süreklidir.*** *f kapalı ve sınırlı B kutusunda sürekli olduğundan orada düzgün süreklidir (bkz. Analiz 4). $\varepsilon > 0$ verilsin. Aralarındaki uzaklık δ'dan küçük her $P, Q \in B$ için $|\ f(P) - f(Q)\ | < \varepsilon$ olacak biçimde*

 CC BY-NC-SA 4.0

bir $\delta > 0$ vardır. (y, z) ile (y', z') arasındaki uzaklık δ'dan küçükse her x için (x, y, z) ile (x, y', z') arasındaki uzaklık da δ'dan küçüktür. Dolayısıyla

$$| g(y,z) - g(y',z') | \leq \int_a^b | f(x,y,z) - f(x,y',z') | \, dx \leq (b-a)\,\varepsilon$$

olur.

Örnek noktaları uygun seçmek. *B'yi alt kutulara bölelim ve her j, k için $y_j^* \in [y_{j-1}, y_j]$, $z_k^* \in [z_{k-1}, z_k]$ noktalarını seçelim. $x \mapsto f(x, y_j^*, z_k^*)$ sürekli olduğundan integraller için ortalama değer teoremine (bkz. Analiz 2) göre her i için*

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y_j^*, z_k^*)\, dx = f(x_{ijk}^*, y_j^*, z_k^*)\, \Delta x$$

eşitliğini sağlayan bir $x_{ijk}^* \in [x_{i-1}, x_i]$ vardır. B_{ijk}'nin örnek noktası olarak $(x_{ijk}^*, y_j^*, z_k^*)$'yi alalım. i üzerinden toplayınca alt aralıklardaki integraller birleşir:

$$\sum_{i=1}^{l} f(x_{ijk}^*, y_j^*, z_k^*)\, \Delta x = \int_a^b f(x, y_j^*, z_k^*)\, dx = g(y_j^*, z_k^*).$$

$\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ olduğundan üç katlı Riemann toplamı

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}^*, y_j^*, z_k^*)\, \Delta V \\
&\quad = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{l} f(x_{ijk}^*, y_j^*, z_k^*)\, \Delta x\right] \Delta y\, \Delta z \\
&\quad = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} g(y_j^*, z_k^*)\, \Delta y\, \Delta z
\end{aligned}$$

biçimini alır.

Limit. *$l, m, n \to \infty$ iken soldaki toplam $\iiint_B f\, dV$'ye yakınsar, çünkü f süreklidir ve limit örnek noktaların seçimine bağlı değildir. Sağdaki toplam l'ye bağlı değildir ve sürekli g fonksiyonunun R dikdörtgenindeki bir iki katlı Riemann toplamıdır; $m, n \to \infty$ iken $\iint_R g\, dA$'ya yakınsar. Demek ki*

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \iint_R g(y,z)\, dA = \int_r^s \int_c^d g(y,z)\, dy\, dz$$

olur; son eşitlik iki katlı integral için Fubini Teoremi'dir (Teorem 1.2). g'nin tanımı yerine yazılınca istenen formül çıkar. Öteki sıralar için aynı akıl yürütme, değişkenlerin rolleri değiştirilerek tekrarlanır.

■

Sağdaki ardışık integral içten dışa doğru okunur: önce y ve z sabit tutularak x'e göre, sonra z sabit tutularak y'ye göre, en sonda z'ye göre integral alınır. Üç değişken $3! = 6$ farklı sırada integrallenebilir ve teorem hepsinin aynı sonucu verdiğini söyler. Örneğin önce y'ye, sonra z'ye, en sonda x'e göre integral alırsak

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx$$

yazarız. Her integral işaretinin sınırları, aynı sıradaki diferansiyelin değişkenine aittir: en içteki $\int_c^d$ en içteki dy ile eşleşir.

Örnek 6.1 (Bir Kutuda Üç Katlı İntegral). B kutusu

$$B = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$$

olmak üzere $\iiint_B xyz^2\,dV$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Altı sıradan herhangi birini kullanabiliriz (Teorem 6.1). Önce x'e, sonra y'ye, en sonda z'ye göre integral alalım.
***x*'e göre.** y ve z sabittir:

$$\int_0^1 xyz^2\,dx = \left[\frac{x^2yz^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{yz^2}{2}.$$

***y*'ye göre.** z sabittir:

$$\int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2}\,dy = \left[\frac{y^2z^2}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} = \frac{4z^2}{4} - \frac{z^2}{4} = \frac{3z^2}{4}.$$

***z*'ye göre.**

$$\int_0^3 \frac{3z^2}{4}\,dz = \left[\frac{z^3}{4}\right]_0^3 = \frac{27}{4}.$$

Böylece $\iiint_B xyz^2\,dV = \frac{27}{4}$ olur.
Sağlama: integrand x'in, y'nin ve z'nin ayrı fonksiyonlarının çarpımı ve sınırlar sabit olduğundan integral üç tek katlı integralin çarpımına ayrılır:

$$\int_0^1 x\,dx \cdot \int_{-1}^2 y\,dy \cdot \int_0^3 z^2\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 9 = \frac{27}{4}.$$

■

6.2 Genel Bölgelerde Üç Katlı İntegral

Kutu olmayan cisimler için iki katlı integralde kullandığımız yolu izliyoruz: cismi bir kutunun içine koyup fonksiyonu kutunun geri kalanında sıfır kabul ediyoruz.

Tanım 6.3 (Genel Bir Bölgede Üç Katlı İntegral). E uzayda sınırlı bir bölge (bir cisim), f de E üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. E'yi içeren bir B kutusu seçelim ve

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in E, \\ 0, & (x,y,z) \in B \setminus E \end{cases}$$

tanımlayalım. F, B üzerinde integrallenebiliyorsa

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iiint_B F(x,y,z)\,dV$$

olarak tanımlanır.

Yani E'nin dışında kalan noktalar Riemann toplamlarına sıfır katkı verir; geriye yalnız cismin içindeki parçaların katkıları kalır. F, E'nin dışında sıfır olduğundan kutuyu büyütmek sonucu değiştirmez, bu yüzden tanım B'nin seçimine bağlı değildir. Bu, düzlemde genel bölge tanımının (Tanım 2.1) aynısıdır. f sürekli ve E'nin sınırı "yeterince düzgün" ise, örneğin sınır sonlu tane sürekli fonksiyonun grafiğinden oluşuyorsa, bu integral vardır.
Üç katlı integral, iki katlı integralin temel özelliklerini aynen taşır.

Önerme 6.1 (Üç Katlı İntegralin Özellikleri). *f ve g, E üzerinde integrallenebilir ve c bir sabit olsun.*

 CC BY-NC-SA 4.0

(i) Lineerlik:

$$\iiint_E (f+g)\,dV = \iiint_E f\,dV + \iiint_E g\,dV, \qquad \iiint_E cf\,dV = c\iiint_E f\,dV.$$

(ii) Karşılaştırma: E'nin her noktasında $f \geq g$ ise

$$\iiint_E f\,dV \geq \iiint_E g\,dV.$$

(iii) Toplamsallık: $E = E_1 \cup E_2$ ve E_1 ile E_2 yalnız sınırlarında örtüşüyorsa

$$\iiint_E f\,dV = \iiint_{E_1} f\,dV + \iiint_{E_2} f\,dV.$$

İspatın fikri.

(i) ve (ii) Riemann toplamlarında doğrudur: $f+g$'nin Riemann toplamı f ile g'nin Riemann toplamlarının toplamıdır, cf'ninki f'ninkinin c katıdır, $f \geq g$ ise her terimde $f(P^*_{ijk})\,\Delta V \geq g(P^*_{ijk})\,\Delta V$ olur. Limite geçmek eşitlikleri ve $\geq$ eşitsizliğini korur. Genel bir bölgede aynı akıl yürütme F ve G uzantılarına uygulanır.

(ii) için E_1, E_2 ve E'nin uzantıları F_1, F_2 ve F olsun. $F = F_1 + F_2$ eşitliği ortak sınır dışında her yerde sağlanır ve (i)'den $\iiint_B (F_1+F_2)\,dV$ iki integralin toplamıdır. Ortak sınırın hacmi sıfır olduğundan oradaki farkın integrale etkisi yoktur; hacmi sıfır olan kümelerin integrali değiştirmediğinin tam ispatı ileri analiz gerektirir. İki katlı integraldeki karşılıkları için bkz. Önerme 1.1 ve Önerme 2.1.

■

Genel bir bölgede integrali hesaplamak için cismi iki yüzey arasına sıkıştırırız. Hangi değişkenin iki yüzey arasında değiştiğine göre üç tip bölge vardır.

Tanım 6.4 (Tip 1 Bölge). D, xy-düzleminde bir bölge ve u_1, u_2 bu bölgede sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\, u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

biçimindeki bir cisme **tip 1 bölge** denir.

Yani E alttan $z = u_1(x,y)$, üstten $z = u_2(x,y)$ yüzeyiyle sınırlıdır ve D, E'nin xy-düzlemine dik izdüşümüdür. Her $(x,y) \in D$ noktasından geçen dikey doğru E'yi tek bir doğru parçası boyunca keser.

Tanım 6.5 (Tip 2 Bölge). D, yz-düzleminde bir bölge ve u_1, u_2 bu bölgede sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$E = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in D,\, u_1(y,z) \leq x \leq u_2(y,z)\}$$

biçimindeki bir cisme **tip 2 bölge** denir.

Yani bu kez D, E'nin yz-düzlemine izdüşümüdür; E arkadan $x = u_1(y,z)$, önden $x = u_2(y,z)$ yüzeyiyle sınırlıdır.

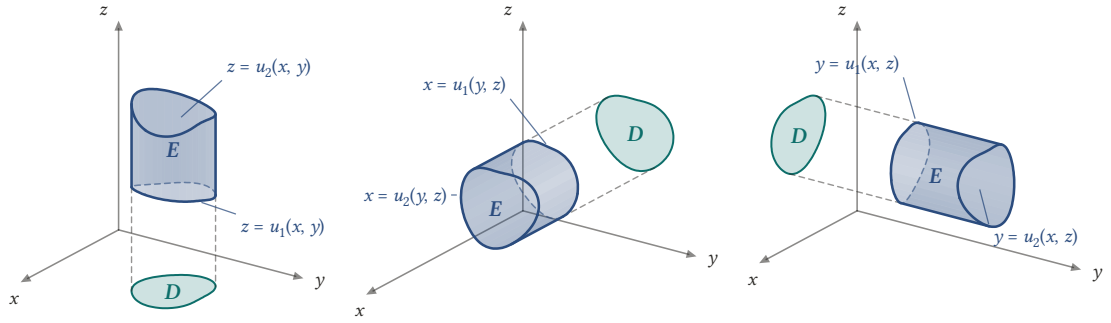
Tanım 6.6 (Tip 3 Bölge). D, xz-düzleminde bir bölge ve u_1, u_2 bu bölgede sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in D,\, u_1(x,z) \leq y \leq u_2(x,z)\}$$

biçimindeki bir cisme **tip 3 bölge** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani D, E'nin xz-düzlemine izdüşümüdür; E soldan $y = u_1(x,z)$, sağdan $y = u_2(x,z)$ yüzeyiyle sınırlıdır.
Aşağıdaki şekil üç tipi yan yana gösteriyor. Bir cisim aynı anda birden çok tipte olabilir; o zaman integrali kurmak için en elverişli tipi seçeriz.



tip 1: D, xy-düzleminde | tip 2: D, yz-düzleminde | tip 3: D, xz-düzleminde

Şekil 6.2: Üç tip katı bölge. Tip 1'de E, xy-düzlemindeki D izdüşümünün üstünde $z = u_1(x, y)$ ile $z = u_2(x, y)$ yüzeyleri arasında kalır. Tip 2'de D yz-düzlemindedir ve x iki yüzey arasında değişir; tip 3'te D xz-düzlemindedir ve y iki yüzey arasında değişir. Kesikli çizgiler cismi izdüşümüne bağlar.

Teorem 6.2 (Tip 1, Tip 2 ve Tip 3 Bölgelerde Üç Katlı İntegral). *f, E üzerinde sürekli olsun. E'nin ilgili koordinat düzlemine izdüşümü D de kapalı, sınırlı ve sınırının alanı sıfır olan bir bölge olsun; I. ve II. tip bölgeler (Tanım 2.2, Tanım 2.3) böyledir.*
(i) E tip 1 bölgeyse

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA. \tag{1}$$

(ii) E tip 2 bölgeyse

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx\right] dA. \tag{2}$$

(iii) E tip 3 bölgeyse

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,z)}^{u_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy\right] dA. \tag{3}$$

İspatın fikri.

(i) E'yi bir $B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$ kutusunun içine alalım, $R = [a,b] \times [c,d]$ olsun ve F, genel bölge tanımındaki (Tanım 6.3) uzantı olsun. Fubini Teoremi'ni en içte z olacak biçimde uygulayalım:

$$\iiint_B F\,dV = \iint_R \left[\int_r^s F(x,y,z)\,dz\right] dA.$$

$(x,y) \in D$ ise $F(x,y,z)$, $u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)$ için $f(x,y,z)$'ye, bu aralığın dışında 0'a eşittir; bu yüzden iç integral $\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ olur. $(x,y) \notin D$ ise dikey doğru E'ye hiç değmez, F orada sıfırdır ve iç integral 0'dır. Böylece R üzerindeki iki katlı integral D üzerindeki integrale indirgenir ve (1) çıkar. (ii) ve (iii) aynı hesapla, en içte sırasıyla x ve y alınarak elde edilir.
Burada ileri analiz gerektiren tek adım şudur: F, E'nin sınırında süreksiz olabildiğinden Teorem 6.1 doğrudan uygulanamaz. Fubini Teoremi, süreksizlikleri hacmi sıfır olan bir kümede (yani toplam hacmi istendiği kadar küçük kutularla örtülebilen bir kümede) kalan sınırlı fonksiyonlar için de geçerlidir. F'nin süreksizlikleri, sürekli u_1 ve u_2 fonksiyonlarının grafiklerinde ve D'nin sınırı üzerinde yükselen dikey

 CC BY-NC-SA 4.0

duvarda kalır. Bu küme hacmi sıfır olan bir kümedir: u_1 ve u_2, kapalı ve sınırlı D'de düzgün sürekli olduğundan grafikleri, tabanları küçük dikdörtgenler ve yükseklikleri istendiği kadar küçük olan kutularla örtülür; duvar ise D'nin sınırını örten küçük toplam alanlı dikdörtgenlerin üzerine kurulan, yüksekliği $s - r$ olan kutuların içinde kalır. Fubini Teoremi'nin bu genel hâlinin ispatı hacmi sıfır olan kümeler üzerine bir çalışma ister.

■

(1)'in iç integralinde x ve y sabittir; $u_1(x,y)$ ve $u_2(x,y)$ sabit sayılar gibi davranır ve $f(x,y,z)$ yalnız z'ye göre integrallenir. Dıştaki iki katlı integral için D'nin düzlemdeki tipine bakarız. D bir I. tip bölgeyse (Tanım 2.2), yani

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\, g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

ise (1)

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \tag{4}$$

olur. D bir II. tip bölgeyse (Tanım 2.3), yani

$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

ise

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy \tag{5}$$

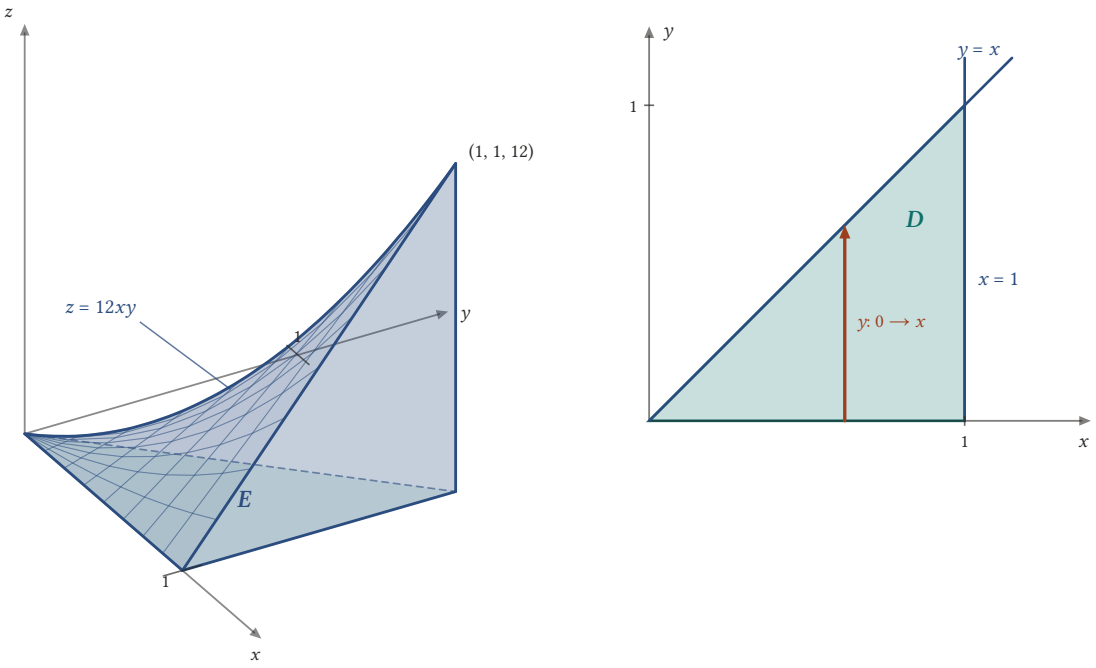
olur. (2) ve (3) için de D'nin I. ya da II. tip olmasına göre aynı biçimde iki ardışık integral yazılabilir.

Üç katlı integrali dört adımda kurmak

1. Cismi ve onun bir koordinat düzlemine izdüşümünü ayrı ayrı çizin.
2. En içteki değişkeni seçin ve cismin o yöndeki alt ve üst sınır yüzeylerini bulun; bunlar iç integralin sınırlarıdır.
3. İzdüşüm D'yi düzlemde I. ya da II. tip bölge olarak yazın; ortadaki ve dıştaki integralin sınırları buradan gelir.
4. Sınırları denetleyin: iç integralin sınırları en çok iki değişkene, ortadakininkiler en çok bir değişkene bağlı olabilir, dıştakininkiler sabittir. Sonra içten dışa doğru hesaplayın.

Örnek 6.2 (Bir Yüzeyin Altında Kalan Cisim). E, birinci oktantta $z = 12xy$ yüzeyi ile $y = x$, $x = 1$ ve $z = 0$ düzlemleri arasında kalan cisim olsun. $\iiint_E z\,dV$ integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.3: Solda E cismi: altta $z = 0$, üstte $z = 12xy$ yüzeyi, yanlarda $y = x$ ve $x = 1$ düzlemleri (dikey eksen 1/10 ölçeklidir). Sağda E'nin xy-düzlemine izdüşümü olan D üçgeni; ok, sabit x için y'nin 0'dan x'e değiştiğini gösterir.

Çözüm.
Cisim ve izdüşüm. E alttan $z = 0$ düzlemiyle, üstten $z = 12xy$ yüzeyiyle sınırlıdır; bu yüzden $u_1(x, y) = 0$ ve $u_2(x, y) = 12xy$ alarak E'ye tip 1 bölge olarak bakarız. E'nin xy-düzlemine izdüşümü $y = 0$, $y = x$ ve $x = 1$ doğrularıyla çevrili D üçgenidir ve bir I. tip bölgedir: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$. Demek ki

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x, 0 \le z \le 12xy\}$$

ve (4)'e göre

$$\iiint_E z\,dV = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{12xy} z\,dz\,dy\,dx$$

olur.
İç integral.

$$\int_0^{12xy} z\,dz = \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=12xy} = \frac{(12xy)^2}{2} = 72x^2y^2.$$

Ortadaki integral.

$$\int_0^x 72x^2y^2\,dy = 72x^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x} = 24x^5.$$

Dıştaki integral.

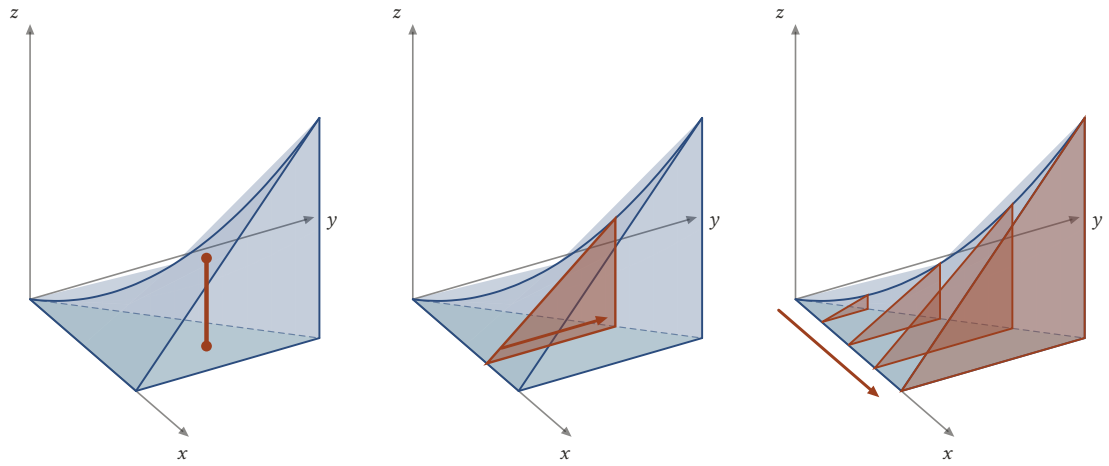
$$\int_0^1 24x^5\,dx = 24\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = 4.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç olarak $\iiint_E z\,dV = 4$ olur.

■

Bu ardışık integralin cismi nasıl taradığını adım adım izleyelim. En içteki integralde x ve y sabittir ve z, 0'dan $12xy$'ye giderek dikey bir çubuğu tarar. Ortadaki integralde x sabittir ve y, 0'dan x'e giderken bu çubuklar bir üçgen dilim oluşturur. Dıştaki integralde x, 0'dan 1'e giderken dilimler bütün cismi doldurur.



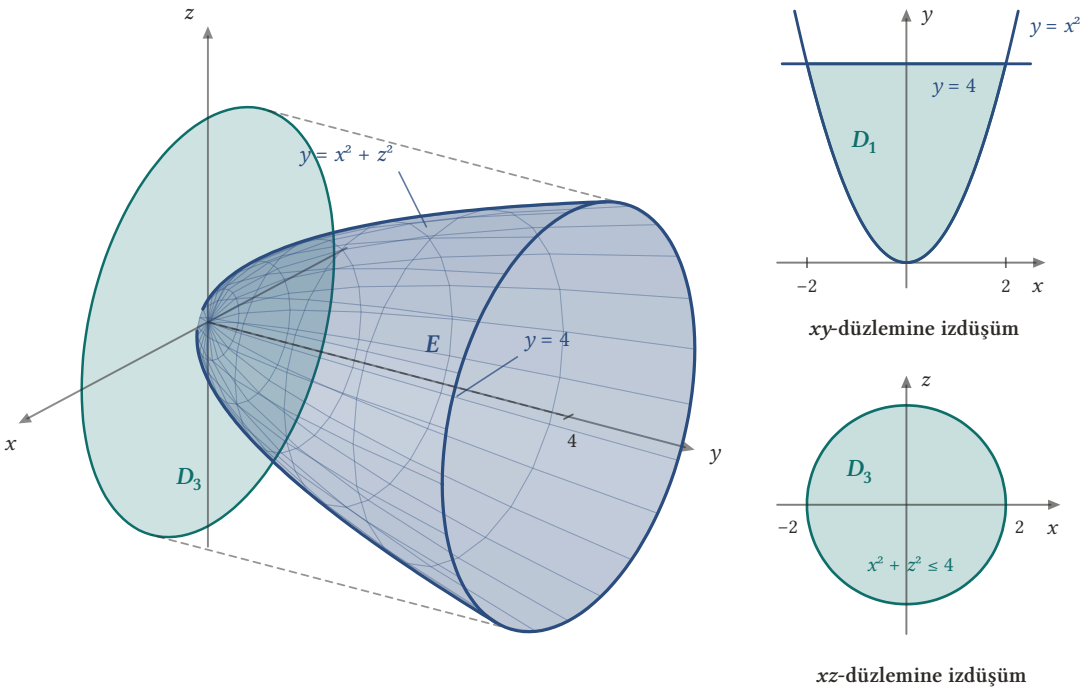
z, 0'dan $12xy$'ye (x ve y sabit) | **y, 0'dan x'e** (x sabit) | **x, 0'dan 1'e**

Şekil 6.4: $z \longrightarrow y \longrightarrow x$ sırasındaki ardışık integral E'yi üç adımda tarar. Önce sabit (x, y) için z 0'dan $12xy$'ye giden bir dikey çubuk, sonra sabit x için bu çubukların süpürdüğü üçgen dilim, en sonda x 0'dan 1'e giderken dilimlerin doldurduğu cisim.

Bazen aynı cisim birden çok tipte yazılabilir ve tiplerden biri hesabı çok daha kolay kılar. Bir sonraki örnek bunu gösteriyor.

Örnek 6.3 (Bir Paraboloitle Sınırlı Cisim). E, $y = x^2 + z^2$ paraboloidi ile $y = 4$ düzlemi arasında kalan cisim olsun. $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\,dV$ integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.5: Solda $y = x^2 + z^2$ paraboloidi ile $y = 4$ düzlemi arasındaki E cismi ve onun xz-düzlemine izdüşümü D_3. Sağ üstte E'nin xy-düzlemine izdüşümü D_1 ($x^2 \le y \le 4$), sağ altta D_3 diski ($x^2 + z^2 \le 4$).

Çözüm.
Tip 1 olarak bakarsak. Paraboloidin $z = 0$ düzlemindeki izi $y = x^2$ parabolüdür; bu yüzden E'nin xy-düzlemine izdüşümü

$$D_1 = \{(x, y) \mid -2 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4\}$$

bölgesidir. $y = x^2 + z^2$ eşitliğinden $z = \pm\sqrt{y - x^2}$ bulunur; alt sınır yüzeyi $z = -\sqrt{y - x^2}$, üst sınır yüzeyi $z = \sqrt{y - x^2}$'dir. Böylece

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV = \int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$$

olur. Bu ifade doğrudur, ama en içteki integral bile çok zahmetlidir.
Tip 3 olarak bakarsak. Paraboloidin $y = 4$ düzlemindeki izi $x^2 + z^2 = 4$ çemberidir; bu yüzden E'nin xz-düzlemine izdüşümü $D_3 = \{(x, z) \mid x^2 + z^2 \le 4\}$ diskidir. E soldan $y = x^2 + z^2$ paraboloidiyle, sağdan $y = 4$ düzlemiyle sınırlıdır. (3)'te $u_1(x, z) = x^2 + z^2$ ve $u_2(x, z) = 4$ alırsak, $\sqrt{x^2 + z^2}$ çarpanı y'ye bağlı olmadığından

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\, dV &= \iint_{D_3} \left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2}\, dy \right] dA \\ &= \iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dA\end{aligned}$$

bulunur.
Kutupsal koordinatlar. Bu integral

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2 + z^2}\, dz\, dx$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olarak da yazılabilir; ama D_3 bir disk olduğundan xz-düzleminde kutupsal koordinatlara geçmek (Teorem 3.1) çok daha kolaydır: $x = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, $x^2 + z^2 = r^2$, $dA = r\,dr\,d\theta$ ve D_3 için $0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Buna göre

$$\begin{aligned}\iint_{D_3} (4 - x^2 - z^2)\sqrt{x^2+z^2}\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4 - r^2)\, r \cdot r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r^2 - r^4)\,dr \\ &= 2\pi\left[\frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\right]_0^2 \\ &= 2\pi\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{128\pi}{15}.\end{aligned}$$

■

6.3 İntegrasyon Sırasını Değiştirmek

Fubini Teoremi bir üç katlı integrali altı farklı sırada ardışık integral olarak yazmamıza izin verir. Bir sırada zor olan integral başka bir sırada kolaylaşabilir; bu yüzden verilen bir ardışık integrali başka bir sıraya çevirmeyi bilmek gerekir.

Sırayı üç adımda değiştirmek

1. Verilen sınırlardan cismi eşitsizliklerle yazın: $E = \{(x, y, z) \mid \ldots\}$.
2. E'nin üç koordinat düzlemine izdüşümlerini bulun ve her birini hem I. tip hem II. tip bölge olarak yazın.
3. İstenen sıranın en içteki değişkeni için cismin alt ve üst sınır yüzeylerini okuyun; kalan iki değişkenin sınırlarını ilgili izdüşümün uygun biçiminden alın.

Aşağıdaki iki örnekte

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$$

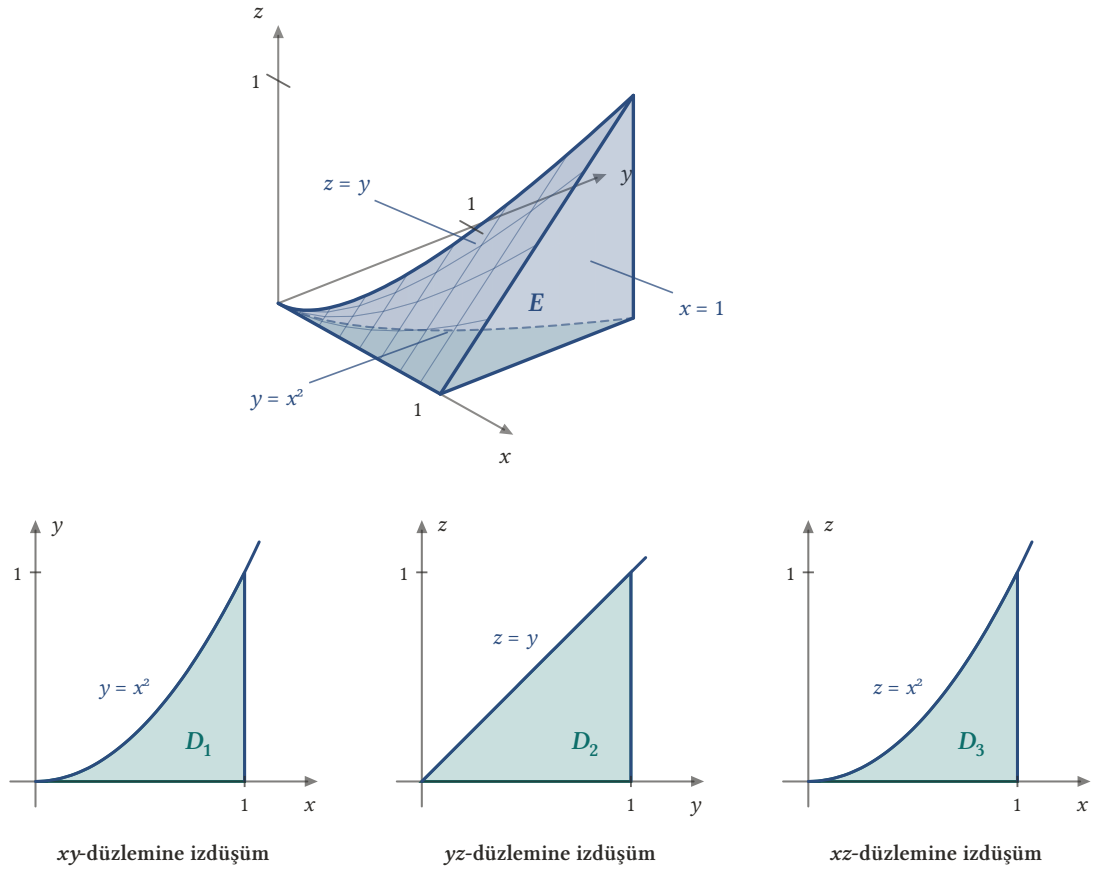
ardışık integralini başka sıralara çevireceğiz. Sınırlar cismi

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2, 0 \le z \le y\}$$

olarak verir. Bu bir tip 1 betimlemedir: E alttan $z = 0$, üstten $z = y$ düzlemiyle sınırlıdır ve xy-düzlemine izdüşümü $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$ bölgesidir. Demek ki E, birinci oktantta $z = 0$, $x = 1$ ve $y = z$ düzlemleri ile $y = x^2$ (yani $x = \sqrt{y}$) parabolik silindiri arasında kalan cisimdir.
Üç izdüşümü de iki biçimde yazalım. D_1 doğrudan sınırlardan okunur. (y, z) sabitken x, $\sqrt{y} \le x \le 1$ aralığında değer alabilmelidir; bu $y \le 1$ demektir, dolayısıyla D_2 için $0 \le z \le y \le 1$ koşulu kalır. (x, z) sabitken $z \le y \le x^2$ olan bir y bulunması $z \le x^2$ demektir; bu da D_3'ü verir:

$$\begin{aligned}D_1 &= \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\} \\ &= \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le 1\}, \\ D_2 &= \{(y, z) \mid 0 \le y \le 1, 0 \le z \le y\} \\ &= \{(y, z) \mid 0 \le z \le 1, z \le y \le 1\}, \\ D_3 &= \{(x, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le z \le x^2\} \\ &= \{(x, z) \mid 0 \le z \le 1, \sqrt{z} \le x \le 1\}.\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.6: Üstte E cismi: altta $z = 0$, üstte $z = y$ düzlemi, önde $x = 1$ düzlemi, arkada $y = x^2$ parabolik silindiri. Altta E'nin üç koordinat düzlemine izdüşümleri: D_1 ($0 \le y \le x^2$), D_2 ($0 \le z \le y \le 1$) ve D_3 ($0 \le z \le x^2$).

Örnek 6.4 (Sırayı Değiştirme, Önce x). $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$ ardışık integralini önce x'e, sonra z'ye, en sonda y'ye göre integral alınacak biçimde yazınız.

Çözüm.
En içteki değişken x. (y,z) sabitken x'in değiştiği aralığa bakarız, yani E'ye tip 2 bölge olarak bakarız. E arkadan $x = \sqrt{y}$ yüzeyiyle ($y = x^2$ silindiri), önden $x = 1$ düzlemiyle sınırlıdır: $\sqrt{y} \le x \le 1$.
Kalan iki değişken. (y,z) ikilisi E'nin yz-düzlemine izdüşümü D_2'de değişir. Önce z'ye, sonra y'ye göre integral alacağımız için D_2'nin $0 \le y \le 1, 0 \le z \le y$ biçimini kullanırız. Böylece

$$E = \{(x,y,z) \mid 0 \le y \le 1, 0 \le z \le y, \sqrt{y} \le x \le 1\}$$

ve

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

olur.
■

Örnek 6.5 (Sırayı Değiştirme, Önce y). $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$ ardışık integralini önce y'ye, sonra x'e, en sonda z'ye göre integral alınacak biçimde yazınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
En içteki değişken y. (x, z) sabitken y'nin değiştiği aralığa bakarız, yani E'ye tip 3 bölge olarak bakarız. E soldan $y = z$ düzlemiyle, sağdan $y = x^2$ yüzeyiyle sınırlıdır: $z \le y \le x^2$.
Kalan iki değişken. (x, z) ikilisi E'nin xz-düzlemine izdüşümü D_3'te değişir. Önce x'e, sonra z'ye göre integral alacağımız için D_3'ün $0 \le z \le 1$, $\sqrt{z} \le x \le 1$ biçimini kullanırız. Böylece

$$E = \left\{(x, y, z) \mid 0 \le z \le 1,\ \sqrt{z} \le x \le 1,\ z \le y \le x^2\right\}$$

ve

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_z^{x^2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$$

olur.
■

> ⚠ **Sınırları taşımak yetmez**
>
> Sırayı değiştirirken sınırları olduğu gibi bırakıp yalnız diferansiyellerin yerini değiştirmek yanlıştır. Örneğin $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f\, dz\, dy\, dx$ yerine $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f\, dy\, dz\, dx$ yazarsak ifade anlamsız olur: en içteki integral y'ye göre alınır, ama üst sınırı yine y'dir. Sınırlar her zaman cismin eşitsizliklerinden ve izdüşümlerinden yeniden okunmalıdır.

6.4 Hacim

Üç katlı integralin en basit yorumu, integrand yerine sabit 1 fonksiyonu koyduğumuzda ortaya çıkar. $f \ge 0$ iken tek katlı integral bir eğrinin altındaki alanı, iki katlı integral bir yüzeyin altındaki hacmi verir. Üç katlı integralin benzer yorumu dört boyutlu bir cismin "hiperhacmi" olurdu: E yalnız f'nin tanım kümesidir, f'nin grafiği ise dört boyutlu uzaydadır. Bu yorum pek işe yaramaz. Buna karşılık x, y, z ve f'nin anlamına göre üç katlı integral kütle, yük ya da olasılık gibi çok farklı nicelikleri ölçer. En basit durum $f = 1$ durumudur.

Önerme 6.2 (Üç Katlı İntegral ile Hacim). *E bir cisim ise hacmi*

$$V(E) = \iiint_E dV$$

ile verilir.

İspat.
E tip 1 bölge olsun. (1)'de $f = 1$ alırsak

$$\iiint_E 1\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz\right] dA = \iint_D \left[\, u_2(x, y) - u_1(x, y) \,\right] dA$$

olur. Sağdaki iki katlı integral, D üzerinde $z = u_1(x, y)$ ile $z = u_2(x, y)$ yüzeyleri arasında kalan cismin, yani E'nin hacmidir: her $(x, y) \in D$ noktasının üstündeki dikey parçanın uzunluğu $u_2(x, y) - u_1(x, y)$'dir ve iki katlı integral bu uzunlukları D üzerinde toplar. Tip 2 ve tip 3 bölgeler için aynı hesap (2) ve (3) ile yapılır.
■

Hacim hesaplamak için üç katlı integral zorunlu değildir; aynı hacim yukarıdaki gibi bir iki katlı integralle de bulunur. Ama üç katlı integral, sınırları doğrudan cismin yüzeylerinden okuduğumuz için kurulumu çoğu zaman kolaylaştırır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 6.6 (Bir Dörtyüzlünün Hacmi). $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ ve $z = 0$ düzlemleriyle sınırlı T dörtyüzlüsünün hacmini üç katlı integralle bulunuz.

Çözüm.
Sınırlar. T alttan $z = 0$ düzlemiyle, üstten $x + 2y + z = 2$, yani $z = 2 - x - 2y$ düzlemiyle sınırlıdır. Üst düzlemin $z = 0$ düzlemindeki izi $x + 2y = 2$, yani $y = 1 - x/2$ doğrusudur. Bu yüzden T'nin xy -düzlemine izdüşümü D; $x = 0$, $y = x/2$ ve $y = 1 - x/2$ doğrularıyla çevrili üçgendir. Son iki doğru $x = 1$, $y = 1/2$ noktasında kesiştiğinden

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\, x/2 \le y \le 1 - x/2\}$$

olur. T'nin köşeleri $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$ ve $(1, 1/2, 0)$'dır.
İntegral. Önerme 6.2 ve (4)'e göre

$$V(T) = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx.$$

İç integralde x sabittir:

$$\begin{aligned}\int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy &= \Big[(2 - x)\, y - y^2 \Big]_{y=x/2}^{y=1-x/2} \\ &= \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3x^2}{4}\right) = (1 - x)^2.\end{aligned}$$

Burada üst sınırdaki değer, $2 - x = 2(1 - x/2)$ olduğundan

$$(2 - x)\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2$$

olarak sadeleşti. Son olarak

$$V(T) = \int_0^1 (1 - x)^2\, dx = \left[-\frac{(1 - x)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Sağlama: T'nin $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$ köşeli yüzü yz-düzlemindedir ve alanı $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$'dir. Dördüncü köşe $(1, 1/2, 0)$'ın bu düzleme uzaklığı 1 olduğundan dörtyüzlünün hacmi $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$'tür. ■

6.5 Kütle, Momentler ve Kütle Merkezi

İki katlı integralin fiziksel uygulamaları (Tanım 4.4, Tanım 4.5) üç boyuta aynen taşınır; tek fark, ince bir levha yerine hacmi olan bir cisimle çalışmamızdır.
E bölgesini kaplayan bir cismin (x, y, z) noktasındaki yoğunluğu, yani birim hacim başına kütlesi $\rho(x, y, z)$ olsun. E'yi içeren bir B kutusunu B_{ijk} alt kutularına bölelim ve E'nin dışında $\rho = 0$ kabul edelim. Bir $P^*_{ijk} \in B_{ijk}$ noktası seçersek cismin B_{ijk} içindeki parçasının kütlesi yaklaşık $\rho(P^*_{ijk})\, \Delta V$ olur. Bu yaklaşık kütlelerin toplamı ρ'nun bir Riemann toplamıdır; bölüntüyü inceltiğimizde toplam kütleyi elde ederiz.

Tanım 6.7 (Bir Cismin Kütlesi). E bölgesini kaplayan bir cismin yoğunluğu sürekli bir $\rho(x, y, z)$ fonksiyonuyla veriliyorsa cismin **kütlesi**

$$m = \iiint_E \rho(x, y, z)\, dV$$

sayısıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani kütle, yoğunluğun cisim üzerindeki üç katlı integralidir: küçük parçaların yaklaşık kütlelerinin toplamı tam da bu integralin Riemann toplamıdır. Aynı düşünce başka yoğunluklar için de çalışır: yük yoğunluğu $\sigma(x,y,z)$ olan bir cismin toplam **elektrik yükü** $Q = \iiint_E \sigma(x,y,z)\,dV$ olur.

Tanım 6.8 (Momentler ve Kütle Merkezi). Yoğunluğu ρ ve kütlesi m olan E cisminin koordinat düzlemlerine göre **momentleri**

$$M_{yz} = \iiint_E x\,\rho\,dV, \qquad M_{xz} = \iiint_E y\,\rho\,dV, \qquad M_{xy} = \iiint_E z\,\rho\,dV$$

sayılarıdır. Cismin **kütle merkezi**

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

olmak üzere $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ noktasıdır. Yoğunluk sabitse kütle merkezine E'nin **geometrik merkezi** (centroid) denir.

Yani M_{yz}, her küçük parçanın kütlesini o parçanın yz-düzlemine işaretli uzaklığı olan x ile çarpıp toplar; $\bar{x}$ bu uzaklıkların kütleye göre ağırlıklı ortalamasıdır. Cisim kütle merkezinden desteklense dengede kalır. Yoğunluk sabitse ρ hem pay hem paydada çarpan olarak çıkar ve sadeleşir; bu yüzden geometrik merkez yalnız cismin biçimine bağlıdır.

Tanım 6.9 (Eylemsizlik Momentleri). Yoğunluğu ρ olan E cisminin koordinat eksenlerine göre **eylemsizlik momentleri**

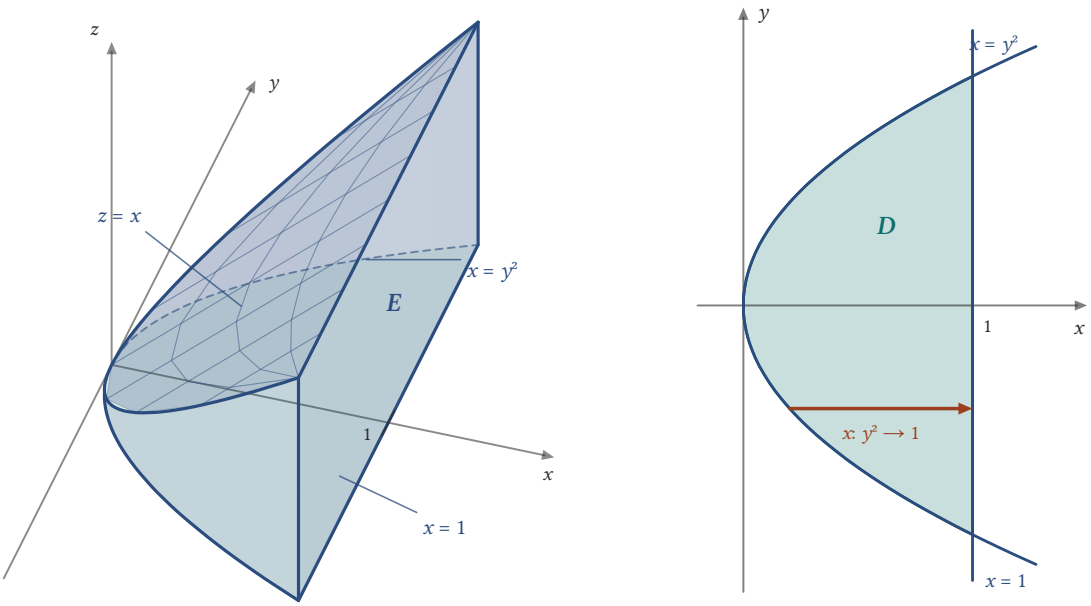
$$I_x = \iiint_E (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dV,$$
$$I_y = \iiint_E (x^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dV,$$
$$I_z = \iiint_E (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dV$$

sayılarıdır.

Yani her küçük parçanın kütlesi, eksene olan uzaklığının karesiyle çarpılıp toplanır; örneğin (x,y,z) noktasının x eksenine uzaklığının karesi y^2+z^2'dir. Eylemsizlik momenti, cismin o eksen etrafında döndürülmeye karşı gösterdiği direncin ölçüsüdür: kütle eksenden uzaklaştıkça moment büyür.

Örnek 6.7 (Sabit Yoğunluklu Bir Cismin Kütle Merkezi). Yoğunluğu sabit olan ve $x = y^2$ parabolik silindiri ile $x = z$, $z = 0$ ve $x = 1$ düzlemleriyle sınırlı cismin kütle merkezini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.7: Solda E cismi: altta $z = 0$, üstte $z = x$ düzlemi; yan yüzleri $x = 1$ düzlemi ve $x = y^2$ parabolik silindiridir. Sağda izdüşümü D: sabit y için x, y^2'den 1'e değişir.

Çözüm.
Bölge. E alttan $z = 0$, üstten $z = x$ düzlemiyle sınırlıdır; bu yüzden ona tip 1 bölge olarak bakarız. İzdüşümü D, $x = y^2$ parabolü ile $x = 1$ doğrusu arasındaki bölgedir; ikisi $y = \pm 1$'de kesişir. D'yi II. tip bölge olarak yazarsak

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \le y \le 1,\, y^2 \le x \le 1,\, 0 \le z \le x\}$$

olur. Yoğunluk $\rho(x, y, z) = \rho$ sabiti olsun.
Kütle.

$$m = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} \rho \, dz\, dx\, dy = \rho \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x \, dx\, dy$$
$$= \rho \int_{-1}^{1} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=1} dy = \frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1} (1 - y^4)\, dy.$$

Son integrand çift fonksiyon olduğundan

$$m = \rho \int_{0}^{1} (1 - y^4)\, dy = \rho \left[y - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4\rho}{5}.$$

Simetri. E ve ρ, xz-düzlemine göre simetriktir: $(x, y, z) \in E$ ise $(x, -y, z) \in E$'dir. Gerçekten de

$$M_{xz} = \int_{-1}^{1} y \left[\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} \rho \, dz\, dx\right] dy = \int_{-1}^{1} y \cdot \frac{\rho}{2}(1 - y^4)\, dy = 0$$

olur, çünkü son integrand tek fonksiyondur. Demek ki $\bar{y} = 0$'dır.
$\boldsymbol{M_{yz}}$**.**

 CC BY-NC-SA 4.0

$$M_{yz} = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} x\rho\,dz\,dx\,dy = \rho\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\,dx\,dy$$
$$= \rho\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=y^2}^{x=1} dy = \frac{2\rho}{3}\int_{0}^{1}(1-y^6)\,dy$$
$$= \frac{2\rho}{3}\left[y - \frac{y^7}{7}\right]_0^1 = \frac{2\rho}{3}\cdot\frac{6}{7} = \frac{4\rho}{7}.$$

$\boldsymbol{M_{xy}}$**.**

$$M_{xy} = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} z\rho\,dz\,dx\,dy = \rho\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=x} dx\,dy$$
$$= \frac{\rho}{2}\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\,dx\,dy = \frac{\rho}{2}\cdot\frac{4}{7} = \frac{2\rho}{7}.$$

Burada $\int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} x^2\,dx\,dy = \frac{4}{7}$ değerini M_{yz} hesabından aldık.
Kütle merkezi.

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{4\rho/7}{4\rho/5} = \frac{5}{7}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2\rho/7}{4\rho/5} = \frac{5}{14}.$$

Kütle merkezi $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{5}{7}, 0, \frac{5}{14}\right)$ noktasıdır. Beklendiği gibi sonuç ρ'ya bağlı değildir.
■

6.6 Olasılık ve Ortalama Değer

Üç katlı integralin iki uygulaması daha, düzlemdeki karşılıklarının doğrudan genişlemesidir.

Tanım 6.10 (Üç Değişkenli Ortak Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu). X, Y ve Z sürekli rastgele değişkenler olsun. Uzaydaki her E bölgesi için

$$P\left(\,(X,Y,Z)\in E\,\right) = \iiint_E f(x,y,z)\,dV$$

eşitliğini sağlayan f fonksiyonuna X, Y, Z'nin **ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu** denir. Böyle bir fonksiyon her yerde $f(x,y,z)\geq 0$ koşulunu ve

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = 1$$

eşitliğini sağlar.

Yani bir olasılık, yoğunluğun ilgili bölge üzerindeki integralidir; özel olarak bir kutu için

$$P(a\leq X\leq b, c\leq Y\leq d, r\leq Z\leq s) = \int_a^b\int_c^d\int_r^s f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

olur. Bütün uzay üzerindeki integral, bir genelleştirilmiş integraldir (bkz. Analiz 3) ve (X,Y,Z) noktası mutlaka bir yerde bulunduğu için değeri 1'dir. Bu tanım, iki değişkenli ortak yoğunluğun (Tanım 4.7) doğal genişlemesidir.

Tanım 6.11 (Bir Cisim Üzerinde Ortalama Değer). f'nin E cismi üzerindeki **ortalama değeri**

$$f_{\text{ort}} = \frac{1}{V(E)}\iiint_E f(x,y,z)\,dV$$

 CC BY-NC-SA 4.0

sayısıdır.

Yani integrali cismin hacmine bölüyoruz; bu, bir aralık ve bir düzlem bölgesi üzerinde tanımladığımız ortalamanın (Tanım 1.6) üç boyutlu karşılığıdır. Örneğin ρ bir yoğunluksa $\rho_{\text{ort}} = m/V(E)$, cismin ortalama yoğunluğudur.

Örnek 6.8 (Bir Küpte Ortalama Değer). Bir köşesi orijinde olan, kenarları koordinat eksenleri boyunca uzanan ve birinci oktantta bulunan, kenar uzunluğu L olan küpte $f(x,y,z) = xyz$ fonksiyonunun ortalama değerini bulunuz.

Çözüm.
Küp $B = [0,L]\times[0,L]\times[0,L]$ kutusudur ve hacmi $V(B) = L^3$'tür. Fubini Teoremi'ne göre integrali içten dışa hesaplayalım:

$$\int_0^L xyz\,dx = \frac{L^2}{2}\,yz, \qquad \int_0^L \frac{L^2}{2}\,yz\,dy = \frac{L^4}{4}\,z, \qquad \int_0^L \frac{L^4}{4}\,z\,dz = \frac{L^6}{8}.$$

Buna göre

$$f_{\text{ort}} = \frac{1}{L^3}\cdot\frac{L^6}{8} = \frac{L^3}{8}$$

olur. Bu değer f'nin küpün merkezindeki değerine eşittir: $f\left(\tfrac{L}{2},\tfrac{L}{2},\tfrac{L}{2}\right) = \tfrac{L^3}{8}$.
■

6.7 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar kutuda Fubini Teoremi'nden integrasyon sırasını değiştirmeye, hacimden kütle merkezine ve olasılığa kadar bölümün bütün konularını kapsıyor.

Alıştırma 6.1 (Üç Farklı Sırayla Aynı Sonuç). $E = [0,2]\times[0,1]\times[0,3]$ kutusu üzerinde $\iiint_E (xy + z^2)\,dV$ integralini üç farklı integrasyon sırasıyla hesaplayınız.

Çözüm.
Önce z, sonra y, sonra x.

$$\int_0^3 (xy+z^2)\,dz = 3xy + 9,$$
$$\int_0^1 (3xy+9)\,dy = \frac{3x}{2} + 9,$$
$$\int_0^2 \left(\frac{3x}{2}+9\right)dx = 3 + 18 = 21.$$

Önce x, sonra y, sonra z.

$$\int_0^2 (xy+z^2)\,dx = 2y + 2z^2,$$
$$\int_0^1 (2y+2z^2)\,dy = 1 + 2z^2,$$
$$\int_0^3 (1+2z^2)\,dz = 3 + 18 = 21.$$

Önce y, sonra z, sonra x.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^1 (xy + z^2)\,dy = \frac{x}{2} + z^2,$$
$$\int_0^3 \Big(\frac{x}{2} + z^2\Big)dz = \frac{3x}{2} + 9,$$
$$\int_0^2 \Big(\frac{3x}{2} + 9\Big)dx = 21.$$

Üç sıra da Fubini Teoremi'nin (Teorem 6.1) söylediği gibi aynı değeri verir: $\iiint_E (xy + z^2)\,dV = 21$.

■

Alıştırma 6.2 (Bir Düzlemin Altında Kalan Cisim). E, $z = 1 + x + y$ düzleminin altında ve xy-düzleminde $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ ve $x = 1$ eğrileriyle sınırlı bölgenin üstünde kalan cisim olsun. $\iiint_E 6xy\,dV$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Kurulum. E tip 1 bölgedir: $0 \le z \le 1 + x + y$. İzdüşüm

$$D = \big\{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le \sqrt{x}\big\}$$

bir I. tip bölgedir. (4)'e göre

$$\iiint_E 6xy\,dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{1+x+y} 6xy\,dz\,dy\,dx.$$

İç integral. $6xy$, z'ye bağlı değildir:

$$\int_0^{1+x+y} 6xy\,dz = 6xy(1 + x + y) = 6xy + 6x^2y + 6xy^2.$$

Ortadaki integral.

$$\int_0^{\sqrt{x}} (6xy + 6x^2y + 6xy^2)\,dy = \Big[\,3xy^2 + 3x^2y^2 + 2xy^3\Big]_{y=0}^{y=\sqrt{x}}$$
$$= 3x^2 + 3x^3 + 2x^{5/2}.$$

Dıştaki integral.

$$\int_0^1 (3x^2 + 3x^3 + 2x^{5/2})\,dx = 1 + \frac{3}{4} + \frac{4}{7} = \frac{28 + 21 + 16}{28} = \frac{65}{28}.$$

■

Alıştırma 6.3 (Bir Paraboloidin İçinde İntegral). E, $x = 4y^2 + 4z^2$ paraboloidi ile $x = 4$ düzlemi arasında kalan cisim olsun. $\iiint_E x\,dV$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Kurulum. Paraboloit x ekseni boyunca açılır; bu yüzden E'ye tip 2 bölge olarak bakarız. E arkadan $x = 4y^2 + 4z^2$, önden $x = 4$ ile sınırlıdır. İkisi $4y^2 + 4z^2 = 4$, yani $y^2 + z^2 = 1$ çemberi boyunca kesişir; bu yüzden E'nin yz-düzlemine izdüşümü birim disk $D = \big\{(y, z) \mid y^2 + z^2 \le 1\big\}$'tir. (2)'ye göre

$$\iiint_E x\,dV = \iint_D \left[\int_{4(y^2+z^2)}^{4} x\,dx\right] dA.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İç integral.

$$\int_{4(y^2+z^2)}^{4} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{4(y^2+z^2)}^{4} = 8 - 8(y^2+z^2)^2.$$

Kutupsal koordinatlar. yz-düzleminde $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ alırsak $y^2+z^2 = r^2$, $dA = r\,dr\,d\theta$ ve D için $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ olur (Teorem 3.1):

$$\begin{aligned}\iiint_E x\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 8(1-r^4)\,r\,dr\,d\theta = 8\cdot 2\pi\int_0^1 (r-r^5)\,dr \\ &= 16\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{16\pi}{3}.\end{aligned}$$

■

Alıştırma 6.4 (Parabolik Silindirden Kesilen Cismin Hacmi). $y = x^2$ silindiri ile $z = 0$ ve $y + z = 1$ düzlemlerinin sınırladığı cismin hacmini bulunuz.

Çözüm.
Kurulum. Cisim alttan $z = 0$, üstten $z = 1 - y$ düzlemiyle sınırlıdır; bunun için $y \le 1$ olmalıdır. Üst düzlem tabanı $y = 1$ doğrusu boyunca keser, yan yüzey $y = x^2$ silindiridir. İzdüşüm

$$D = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1,\, x^2 \le y \le 1\}$$

bölgesidir. Önerme 6.2 ve (4)'e göre

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_0^{1-y} dz\,dy\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}(1-y)\,dy\,dx.$$

Hesap.

$$\int_{x^2}^{1}(1-y)\,dy = \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=x^2}^{y=1} = \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2},$$

$$V = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2}\right)dx = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right) = 2\cdot\frac{8}{30} = \frac{8}{15}.$$

İntegrand çift olduğundan $[-1,1]$ üzerindeki integrali $[0,1]$ üzerindekinin iki katı olarak yazdık.
■

Alıştırma 6.5 (Orta Nokta Kuralıyla Tahmin). $B = [0,4]\times[0,4]\times[0,4]$ kutusunu sekiz eş alt kutuya bölerek orta nokta kuralıyla $\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$ integralini tahmin ediniz.

Çözüm.
Bölüntü. Her $[0,4]$ aralığını $[0,2]$ ve $[2,4]$ diye ikiye böleriz ($l = m = n = 2$). Orta noktalar 1 ve 3'tür, her alt kutunun hacmi $\Delta V = 2\cdot 2\cdot 2 = 8$'dir. Sekiz alt kutunun merkezleri, koordinatları 1 ya da 3 olan noktalardır.
Fonksiyon değerleri. $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ değeri yalnız koordinatlardan kaçının 3 olduğuna bağlıdır:

- hiç 3 yok, $(1,1,1)$: $\sqrt{3}$, bir kutu;
- bir tane 3: $\sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$, üç kutu;
- iki tane 3: $\sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$, üç kutu;
- üç tane 3, $(3,3,3)$: $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, bir kutu.

Tahmin.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV \approx 8\bigl(\sqrt{3}+3\sqrt{11}+3\sqrt{19}+3\sqrt{3}\bigr)$$
$$= 32\sqrt{3}+24\sqrt{11}+24\sqrt{19} \approx 239{,}64.$$

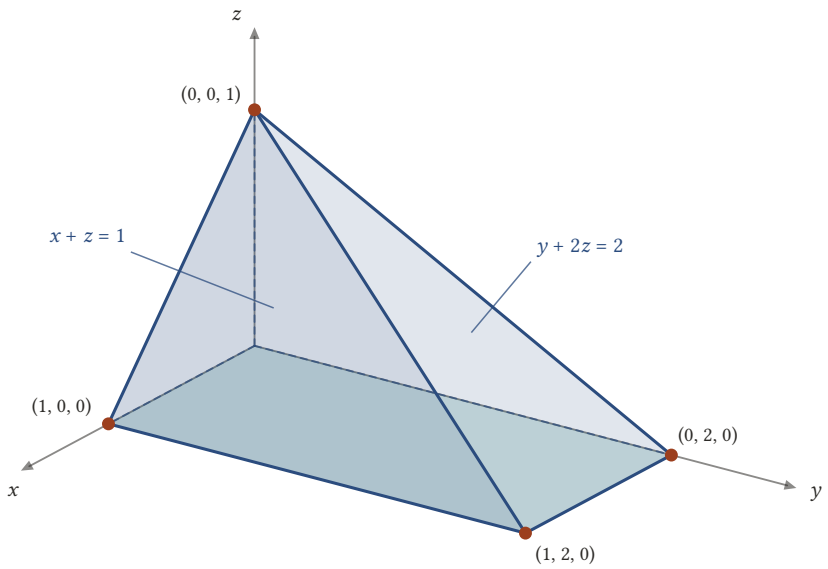
Ara değerler $32\sqrt{3}\approx 55{,}43$, $24\sqrt{11}\approx 79{,}60$ ve $24\sqrt{19}\approx 104{,}61$'dir. İntegralin gerçek değeri yaklaşık $245{,}9$ olduğundan yalnız sekiz alt kutuyla bile tahmin yüzde 3'ten az sapar.
■

Alıştırma 6.6 (Ardışık İntegralden Cisme). Hacmi $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-2z} dy\,dz\,dx$ ardışık integraliyle verilen cismi belirleyip çiziniz.

Çözüm.
Eşitsizlikler. Sınırlar cismi

$$E=\{(x,y,z)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 1-x,\ 0\le y\le 2-2z\}$$

olarak verir. En içte y, $y=0$ düzlemi ile $y=2-2z$, yani $y+2z=2$ düzlemi arasında değişir. Kalan (x,z) ikilisi xz-düzleminde $x=0$, $z=0$ ve $x+z=1$ doğrularıyla çevrili üçgende değişir. Demek ki E; $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+z=1$ ve $y+2z=2$ düzlemleriyle sınırlı cisimdir.
Köşeler. $z=0$ tabanında $0\le x\le 1$ ve $0\le y\le 2$ olur; taban $[0,1]\times[0,2]$ dikdörtgenidir. z arttıkça hem $x\le 1-z$ hem $y\le 2-2z$ sınırları daralır ve $z=1$'de cisim $(0,0,1)$ noktasına iner. Cisim, tabanı bu dikdörtgen ve tepesi $(0,0,1)$ olan bir piramittir.



Şekil 6.8: Ardışık integralin cismi: tabanı xy-düzlemindeki $[0,1]\times[0,2]$ dikdörtgeni, tepesi $(0,0,1)$ olan bir piramit. Eğik yüzleri $x+z=1$ ve $y+2z=2$ düzlemleridir; arka yüzleri koordinat düzlemleridir.

Sağlama. İntegral hacmi verir:

$$\int_0^{1-x}(2-2z)\,dz = 2(1-x)-(1-x)^2 = 1-x^2, \qquad \int_0^1 (1-x^2)\,dx = \frac{2}{3}.$$

Piramidin taban alanı 2, yüksekliği 1 olduğundan hacmi de $\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 1=\frac{2}{3}$'tür.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 6.7 (Beş Farklı Sıra). $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$ ardışık integraline eşit olan öteki beş ardışık integrali yazınız.

Çözüm.
Cisim. Sınırlar

$$E=\{(x,y,z)\mid 0\le y\le 1,\, y\le x\le 1,\, 0\le z\le y\}$$

cismini verir. Her değişkenin iki yanındaki sınırlar şunlardır: $0\le z\le y$, $y\le x\le 1$ ve bunlardan $z\le y\le x$.
İzdüşümler. xy-düzleminde koşul $0\le y\le x\le 1$'dir. (y,z) sabitken $y\le x\le 1$ olan bir x her zaman bulunur, bu yüzden yz-düzleminde koşul $0\le z\le y\le 1$ olur. (x,z) sabitken $z\le y\le x$ olan bir y bulunması $z\le x$ demektir; xz-düzleminde koşul $0\le z\le x\le 1$'dir. Her birini iki biçimde yazalım:

$$\begin{aligned}
D_{xy}&=\{0\le y\le 1,\, y\le x\le 1\}\\
&=\{0\le x\le 1,\, 0\le y\le x\},\\
D_{yz}&=\{0\le y\le 1,\, 0\le z\le y\}\\
&=\{0\le z\le 1,\, z\le y\le 1\},\\
D_{xz}&=\{0\le x\le 1,\, 0\le z\le x\}\\
&=\{0\le z\le 1,\, z\le x\le 1\}.
\end{aligned}$$

Beş ardışık integral. En içteki değişkenin sınırları cisimden, kalanlarınki ilgili izdüşümden okunur:

$$\int_0^1\int_0^x\int_0^y f\,dz\,dy\,dx,\qquad \int_0^1\int_0^y\int_y^1 f\,dx\,dz\,dy,$$
$$\int_0^1\int_z^1\int_y^1 f\,dx\,dy\,dz,\qquad \int_0^1\int_0^x\int_z^x f\,dy\,dz\,dx,$$
$$\int_0^1\int_z^1\int_z^x f\,dy\,dx\,dz.$$

Sağlama olarak $f=1$ alındığında altı ardışık integralin hepsi E'nin hacmi olan $\frac{1}{6}$'yı verir.
■

Alıştırma 6.8 (Geometri ve Simetriyle Hesap). C, $x^2+y^2\le 4$, $-2\le z\le 2$ silindirik bölgesi olmak üzere $\displaystyle\iiint_C (4+5x^2yz^2)\,dV$ integralini yalnız geometrik yorum ve simetri kullanarak hesaplayınız.

Çözüm.
Ayırma. Lineerlikten (Önerme 6.1)

$$\iiint_C (4+5x^2yz^2)\,dV=4\iiint_C dV+\iiint_C 5x^2yz^2\,dV$$

yazarız.
Birinci terim. $\iiint_C dV$, C'nin hacmidir (Önerme 6.2). C yarıçapı 2, yüksekliği 4 olan bir silindir olduğundan hacmi $\pi\cdot 2^2\cdot 4=16\pi$'dir; birinci terim $4\cdot 16\pi=64\pi$ olur.
İkinci terim. C, xz-düzlemine göre simetriktir ve $5x^2yz^2$ integrandı y'ye göre tektir. Bunu ardışık integralle görelim; en içte y'yi alırsak

$$\iiint_C 5x^2yz^2\,dV=\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left[\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 5x^2yz^2\,dy\right]dx\,dz$$

olur. Simetrik bir aralıkta tek bir fonksiyonun integrali sıfır olduğundan iç integral, dolayısıyla ikinci terim 0'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç. $\iiint_C (4 + 5x^2yz^2)\,dV = 64\pi$.

■

Alıştırma 6.9 (Değişken Yoğunluklu Dörtyüzlü). $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ve $x + y + z = 1$ düzlemleriyle sınırlı dörtyüzlünün yoğunluğu $\rho(x, y, z) = y$ ise kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.
Bölge. Dörtyüzlü

$$E = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\}$$

bölgesidir. Hesapları kısaltmak için $a = 1 - x$ yazalım; ortadaki integrallerde y, 0'dan a'ya gider ve en içteki integralin üst sınırı $a - y$ olur.
Kütle.

$$m = \int_0^1 \int_0^a y\,(a - y)\,dy\,dx, \qquad \int_0^a y\,(a - y)\,dy = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6},$$

$$m = \int_0^1 \frac{(1 - x)^3}{6}\,dx = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

$\boldsymbol{M_{yz}}$**.** İç iki integral aynıdır, yalnız fazladan bir x çarpanı vardır:

$$M_{yz} = \iiint_E x\,y\,dV = \int_0^1 x\,\frac{(1 - x)^3}{6}\,dx.$$

$u = 1 - x$ dönüşümüyle

$$\int_0^1 x(1 - x)^3\,dx = \int_0^1 (1 - u)\,u^3\,du = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

olduğundan $M_{yz} = \frac{1}{120}$'dir.
$\boldsymbol{M_{xz}}$**.**

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_E y^2\,dV = \int_0^1 \int_0^a y^2(a - y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right) dx = \int_0^1 \frac{(1 - x)^4}{12}\,dx = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

$\boldsymbol{M_{xy}}$**.** En içteki integral $\int_0^{a-y} z\,dz = \frac{(a-y)^2}{2}$'dir. Ortadaki integral

$$\int_0^a y\,\frac{(a - y)^2}{2}\,dy = \frac{1}{2}\left(\frac{a^4}{2} - \frac{2a^4}{3} + \frac{a^4}{4}\right) = \frac{a^4}{24}$$

olduğundan

$$M_{xy} = \int_0^1 \frac{(1 - x)^4}{24}\,dx = \frac{1}{120}.$$

Kütle merkezi. $1/m = 24$ olduğundan

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{24}{120}, \frac{24}{60}, \frac{24}{120}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

Yoğunluk y ile arttığından kütle merkezi, sabit yoğunluklu dörtyüzlünün geometrik merkezine $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ göre y yönünde kaymıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 6.10 (Bir Küpün Eylemsizlik Momentleri). Yoğunluğu k sabiti olan, kenar uzunluğu L olan, bir köşesi orijinde ve üç kenarı koordinat eksenleri üzerinde bulunan küpün eksenlere göre eylemsizlik momentlerini bulunuz.

Çözüm.
Kurulum. Küp $B = [0,L]\times[0,L]\times[0,L]$'dir. Eylemsizlik momentinin tanımına (Tanım 6.9) göre

$$I_x = \iiint_B (y^2+z^2)\,k\,dV = k\iiint_B y^2\,dV + k\iiint_B z^2\,dV.$$

Hesap. Sınırlar sabit olduğundan integral tek katlı integrallerin çarpımına ayrılır:

$$\iiint_B y^2\,dV = \int_0^L dx\cdot\int_0^L y^2\,dy\cdot\int_0^L dz = L\cdot\frac{L^3}{3}\cdot L = \frac{L^5}{3}.$$

Aynı biçimde $\iiint_B z^2\,dV = \frac{L^5}{3}$'tür. Buna göre

$$I_x = k\left(\frac{L^5}{3}+\frac{L^5}{3}\right) = \frac{2kL^5}{3}.$$

Simetri. Küp ve yoğunluk koordinatların yer değiştirmesiyle değişmediğinden I_y ve I_z de aynı hesapla bulunur:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2kL^5}{3}.$$

Küpün kütlesi $M = kL^3$ olduğundan bu sonuç $I = \frac{2}{3}ML^2$ biçiminde de yazılabilir.
■

Alıştırma 6.11 (Bir Olasılık Hesabı). X, Y, Z rastgele değişkenlerinin ortak yoğunluk fonksiyonu $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 2$ için $f(x,y,z) = Cxyz$, başka yerlerde $f(x,y,z)=0$ olsun. $P(X+Y+Z\le 1)$ olasılığını bulunuz.

Çözüm.
C sabiti. Ortak yoğunluğun tanımına (Tanım 6.10) göre f'nin bütün uzaydaki integrali 1'dir. f yalnız $[0,2]^3$ kutusunda sıfırdan farklı olduğundan

$$1 = \iiint_{[0,2]^3} Cxyz\,dV = C\int_0^2 x\,dx\int_0^2 y\,dy\int_0^2 z\,dz = C\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 8C$$

ve $C = \frac{1}{8}$ olur.
Olay. $X+Y+Z\le 1$ olayı, f'nin sıfırdan farklı olduğu yerde

$$T = \{(x,y,z)\mid x,y,z\ge 0,\ x+y+z\le 1\}$$

dörtyüzlüsüne karşılık gelir; bu dörtyüzlü kutunun içindedir. Bu yüzden

$$P(X+Y+Z\le 1) = \frac{1}{8}\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} xyz\,dz\,dy\,dx.$$

Hesap. $a = 1-x$ yazalım. En içteki integral $\int_0^{a-y} z\,dz = \frac{(a-y)^2}{2}$'dir. Ortadaki integral için

$$\int_0^a y\,(a-y)^2\,dy = \int_0^a (a^2y - 2ay^2 + y^3)\,dy = \frac{a^4}{2} - \frac{2a^4}{3} + \frac{a^4}{4} = \frac{a^4}{12}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan $\int_0^a xy\,\frac{(a-y)^2}{2}\,dy = \frac{x\,a^4}{24}$ bulunur. Son olarak $u = 1-x$ ile

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^4}{24}\,dx = \frac{1}{24}\int_0^1 (1-u)\,u^4\,du = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{720}.$$

Sonuç.

$$P(X+Y+Z\le 1) = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{720} = \frac{1}{5760}.$$

■

Alıştırma 6.12 (Yarım Toptaki Noktaların Ortalama Yüksekliği). $x^2+y^2+z^2\le 1$, $z\ge 0$ yarım topundaki noktaların ortalama yüksekliğini bulunuz.

Çözüm.
Kurulum. Bir noktanın yüksekliği z'dir; bu yüzden $f(x,y,z)=z$ fonksiyonunun H yarım topu üzerindeki ortalamasını arıyoruz (Tanım 6.11). H tip 1 bölgedir: $0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2}$ ve izdüşümü birim disk $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$'tir. D üzerindeki integralleri kutupsal koordinatlarla (Teorem 3.1) hesaplayacağız.
Hacim.

$$V(H) = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,r\,dr\,d\theta$$
$$= 2\pi\left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Yüksekliğin integrali.

$$\iiint_H z\,dV = \iint_D \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} dA = \frac{1}{2}\iint_D (1-x^2-y^2)\,dA$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)\,r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Ortalama.

$$z_{\text{ort}} = \frac{\pi/4}{2\pi/3} = \frac{3}{8}.$$

Noktaların ortalama yüksekliği yarıçapın $\frac{3}{8}$'idir; bu, yarım topun geometrik merkezinin yüksekliğidir.
■

Bu bölümde disk biçimli izdüşümlerle karşılaştığımızda ilgili koordinat düzleminde kutupsal koordinatlara geçtik. Silindir, koni ve paraboloit gibi bir eksen etrafında simetrik cisimlerde bu geçişi baştan yapmak hesabı belirgin biçimde kısaltır. Bir sonraki bölümde bunu sistemli hâle getiriyoruz: Silindirik Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller.

 CC BY-NC-SA 4.0

7. Silindirik Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller

Düzlemde bir disk ya da halka üzerindeki iki katlı integrali kutupsal koordinatlara geçerek kolayca hesaplayabiliyorduk (Teorem 3.1). Uzayda da benzer bir durumla sık karşılaşırız. Silindir, koni ve paraboloit gibi bir eksen etrafında simetrik yüzeylerle sınırlanan cisimleri dik koordinatlarda anlatmak, $\pm\sqrt{a^2-x^2}$ türünden sınırlar yüzünden zahmetlidir; integrandda x^2+y^2 geçtiğinde hesap daha da ağırlaşır.
Silindirik koordinatlar bu durumun doğal çözümüdür: bir noktanın yüksekliğini olduğu gibi bırakır, yalnız xy-düzlemindeki izdüşümünü kutupsal koordinatlarla yazarız. Bu bölümde önce bu koordinat sistemini ve temel yüzeylerini tanıyacak, sonra üç katlı integrali silindirik koordinatlara taşıyan formülü ispatlayıp örneklerle kullanacağız.
Düzlemde (x,y) noktasının kutupsal koordinatları (r,θ) ise

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad r^2 = x^2+y^2$$

olduğunu ve $x \neq 0$ iken $\tan\theta = y/x$ eşitliğinin sağlandığını hatırlayalım.

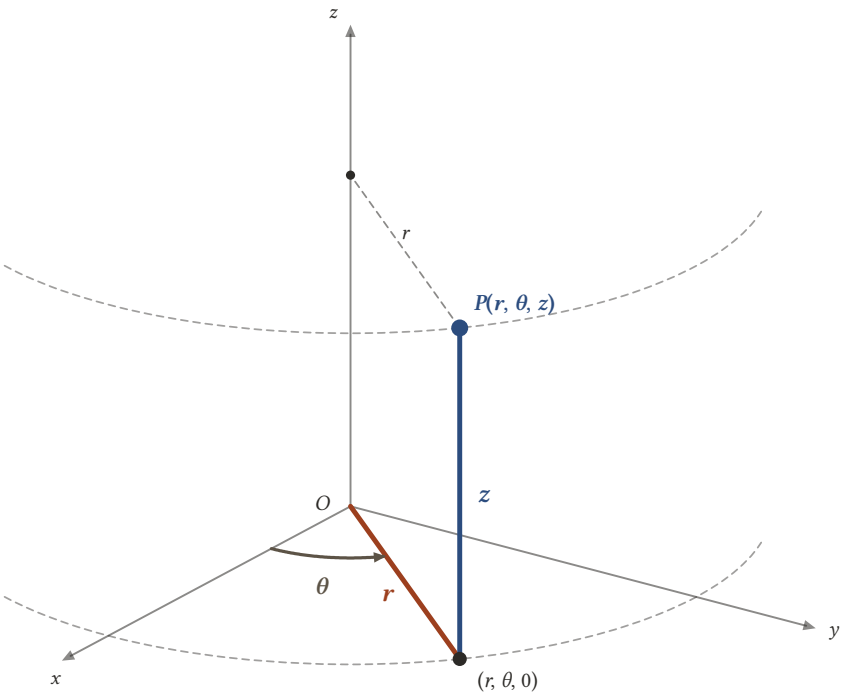
7.1 Silindirik Koordinatlar

Önce uzaydaki bir noktayı kutupsal koordinatlar ve yükseklik yardımıyla nasıl adlandıracağımızı görelim.

Tanım 7.1 (Silindirik Koordinatlar). Uzayda bir P noktası ve onun xy-düzlemindeki dik izdüşümü P' verilsin. P' noktasının kutupsal koordinatları (r,θ), P'nin xy-düzlemine göre yönlü uzaklığı z ise (r,θ,z) üçlüsüne P'nin **silindirik koordinatları** (cylindrical coordinates) denir. Burada $r \geq 0$'dır.

Yani r, P'nin z eksenine uzaklığıdır; θ, P'nin z ekseni etrafında hangi doğrultuda durduğunu söyler; z ise dik koordinatlardaki yüksekliğin aynısıdır. θ'ya 2π'nin bir katını eklemek noktayı değiştirmez; bu yüzden çoğu zaman $0 \leq \theta < 2\pi$ seçilir, ama başka bir seçim de aynı noktayı verir. z ekseni üzerindeki noktalarda $r = 0$'dır ve θ herhangi bir değer alabilir. Bu koordinatların analitik geometri açısından ayrıntılı bir incelemesi için bkz. Analitik Geometri.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.1: P noktasının silindirik koordinatları: $(r,\ \theta)$, P'nin xy-düzlemindeki izdüşümünün kutupsal koordinatları, z ise P'nin yüksekliğidir. r aynı zamanda P'nin z eksenine uzaklığıdır; kesikli yaylar P'den geçen r = sabit silindirinin izleridir.

İki sistem arasındaki geçiş, kutupsal koordinatlardaki geçişin üstüne $z = z$ eşitliğini eklemekten ibarettir.

Önerme 7.1 (Dik ve Silindirik Koordinatlar Arasında Geçiş). *Silindirik koordinatları (r, θ, z) olan noktanın dik koordinatları*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z \tag{1}$$

olur. Tersine, dik koordinatları (x, y, z) olan noktanın silindirik koordinatları

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0), \qquad z = z \tag{2}$$

eşitliklerini sağlar.

> ***İspat.***
> *z koordinatı iki sistemde de aynı sayıdır. P'nin izdüşümü $P'(x, y, 0)$'ın düzlemdeki dik koordinatları (x, y), kutupsal koordinatları da tanım gereği (r, θ)'dır. Kutupsal koordinatlardaki geçiş formülleri P''ye uygulanınca $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ bulunur; bu (1)'dir. Buradan*
>
> $$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$$
>
> *olur. $x \neq 0$ ise $r \neq 0$ ve $\cos\theta \neq 0$'dır; bu durumda*
>
> $$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta$$
>
> *elde edilir. Böylece (2) de sağlanır.* ■

(2)'deki $\tan\theta = y/x$ eşitliği θ'yı tek başına belirlemez, çünkü tanjantın periyodu π'dir ve $[0, 2\pi)$ aralığında bu eşitliği sağlayan iki açı vardır. Bunlardan biri doğru noktayı, öteki onun z eksenine göre simetriğini verir. Doğru açıyı (x, y) noktasının hangi bölgede olduğuna bakarak seçeriz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dik koordinatlardan silindirik koordinatlara üç adımda

1. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ hesaplanır.
2. (x, y) noktasının hangi bölgede olduğuna bakılır ve $\tan\theta = y/x$ eşitliğinin bu bölgeye düşen çözümü θ olarak alınır. $x = 0$ ise $y > 0$ için $\theta = \pi/2$, $y < 0$ için $\theta = 3\pi/2$'dir.
3. z olduğu gibi bırakılır.

Örnek 7.1 (Silindirik Koordinatlardan Dik Koordinatlara). Silindirik koordinatları $(2, 2\pi/3, 1)$ olan noktanın dik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Noktanın yerini önce sözle tarif edelim: xy-düzleminde pozitif x ekseninden saat yönünün tersine $2\pi/3$ radyan ($120°$) dönüp orijinden 2 birim uzaklaşırız; nokta, varılan yerin 1 birim yukarısındadır. $\cos(2\pi/3) = -1/2$ ve $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$ olduğundan (1) formülleri

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1,$$
$$y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$
$$z = 1$$

verir. Noktanın dik koordinatları $(-1, \sqrt{3}, 1)$'dir. Kontrol: $x^2 + y^2 = 1 + 3 = 4 = r^2$. ■

Örnek 7.2 (Dik Koordinatlardan Silindirik Koordinatlara). Dik koordinatları $(3, -3, -7)$ olan noktanın silindirik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Üç adımı sırayla uygulayalım.

1. $r = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
2. $x = 3 > 0$ ve $y = -3 < 0$ olduğundan $(3, -3)$ noktası dördüncü bölgededir. $\tan\theta = -3/3 = -1$ eşitliğinin $[0, 2\pi)$'deki çözümleri $3\pi/4$ ve $7\pi/4$'tür; dördüncü bölgeye düşen $\theta = 7\pi/4$'tür.
3. $z = -7$.

Buna göre $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$ aranan silindirik koordinatlardır. Kontrol:

$$3\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{4} = 3\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 3, \qquad 3\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{4} = -3.$$

θ yerine $7\pi/4 + 2n\pi$ (n tam sayı) yazmak aynı noktayı verir; örneğin $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$ de bu noktanın silindirik koordinatlarıdır. ■

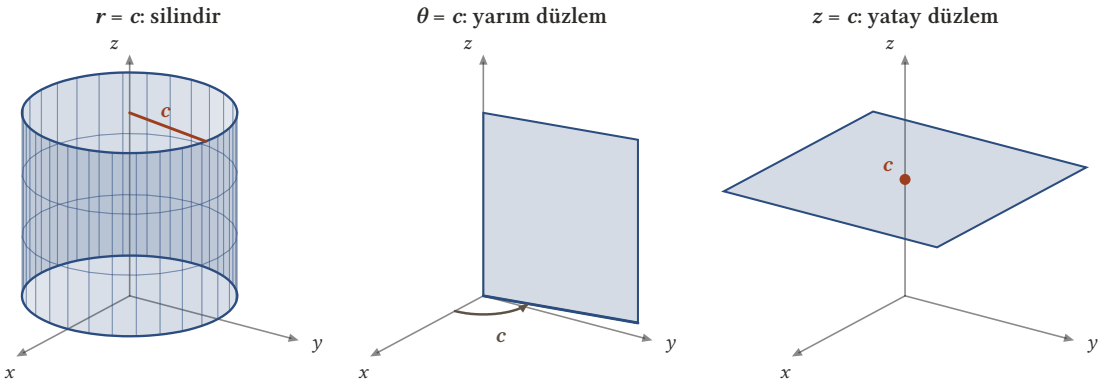
7.2 Koordinat Yüzeyleri

Bir koordinatı sabit tutup ötekileri serbest bıraktığımızda elde edilen yüzeyler, silindirik koordinatların hangi cisimleri kolay anlattığını gösterir.

Önerme 7.2 (Silindirik Koordinat Yüzeyleri). *c bir sabit olsun.*

- *$c > 0$ ise $r = c$ denklemi, ekseni z ekseni olan ve yarıçapı c olan $x^2 + y^2 = c^2$ dairesel silindiridir.*
- *$\theta = c$ denklemi, kenarı z ekseni olan ve xy-düzlemini $(\cos c, \sin c, 0)$ doğrultusundaki ışın boyunca kesen düşey bir yarım düzlemdir.*
- *$z = c$ denklemi, xy-düzlemine paralel olan yatay bir düzlemdir.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.2: Silindirik koordinatlarda bir koordinatı sabitlemek: r = c *ekseni* z *ekseni olan dairesel bir silindir,* θ = c *kenarı* z *ekseni olan düşey bir yarım düzlem,* z = c *yatay bir düzlemdir. Her yüzeyin yalnız bir parçası çizilmiştir.*

İspat.
Silindir: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *olduğundan*

$$r = c \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = c \Leftrightarrow x^2 + y^2 = c^2$$

olur; iki taraf da negatif olmadığından kare almak bilgi kaybettirmez.
Yarım düzlem: $\mathbf{u} = (\cos c, \sin c, 0)$ *diyelim.* $\theta = c$ *olan noktalar (1) gereği*

$$(r\cos c, r\sin c, z) = r\,\mathbf{u} + z\,\mathbf{k} \qquad (r \geq 0, z \in \mathbb{R})$$

noktalarıdır. $\mathbf{u}$ *ile* $\mathbf{k}$ *birbirine dik iki birim vektör olduğundan bu küme,* z *ekseniyle* $(r = 0)$ *sınırlanan ve* $\mathbf{u}$ *yönünde açılan yarım düzlemdir.* $\mathbf{k}$ *düşey olduğundan yarım düzlem de düşeydir.*
Yatay düzlem: z *koordinatı iki sistemde aynıdır, dolayısıyla* $z = c$ *silindirik koordinatlarda da yatay düzlemi anlatır.* ■

"Silindirik" adı ilk maddeden gelir: sistemin en basit denklemi olan $r = c$ bir silindiri anlatır. Ayrıca $\theta = c$ ve $\theta = c + \pi$ yarım düzlemleri birlikte z ekseninden geçen tam bir düşey düzlem oluşturur. z ekseni etrafındaki bir dönme yalnız θ'yı değiştirir, r ile z'yi değiştirmez. Bu yüzden silindirik koordinatlar bir eksen etrafında simetrik problemlerde işe yarar; koordinat sistemini, simetri ekseni z ekseni olacak biçimde yerleştiririz.

Örnek 7.3 (Bir Koninin Silindirik Denklemi). Silindirik koordinatlardaki denklemi $z = r$ olan yüzeyi tanımlayınız.

Çözüm.
Denklem, yüzeydeki her noktanın yüksekliğinin o noktanın z eksenine uzaklığına eşit olduğunu söylüyor. Denklemde θ geçmediğinden yüzey z ekseni etrafındaki dönmelerle değişmez.
Yatay kesitlere bakalım. $k > 0$ için $z = k$ düzlemi yüzeyi $r = k$ olan noktalarda keser; bu kesit, merkezi z ekseni üzerinde ve yarıçapı k olan bir çemberdir. $z = 0$ için kesit yalnız orijindir. $r \geq 0$ olduğundan $z < 0$ olan nokta yoktur. Yükseklik arttıkça yarıçapı aynı oranda büyüyen çemberler bir koni oluşturur.
Bunu dik koordinatlarda doğrulayalım. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ olduğundan denklem

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

olur. Bu, ekseni z ekseni ve tepesi orijin olan $z^2 = x^2 + y^2$ dairesel konisinin üst yarısıdır. Tam (iki yapraklı) koni silindirik koordinatlarda $z^2 = r^2$ diye yazılır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

7.3 Silindirik Koordinatlarda Üç Katlı İntegral

Şimdi bir üç katlı integrali silindirik koordinatlarda nasıl yazacağımızı görelim.
Üç katlı integrallerde tip 1 bölgeleri gördük (Tanım 6.4): D düzlemde bir bölge, $u_1 \leq u_2$ de D üzerinde sürekli iki fonksiyon olmak üzere

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

biçimindeki bir cisim üzerinde, sürekli bir f için (Teorem 6.2)

$$\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA \tag{3}$$

olur. D kutupsal koordinatlarda kolayca anlatılabiliyorsa iç integrali aldıktan sonra kalan iki katlı integrali kutupsal koordinatlarda hesaplarız. Bu iki adım birleşince aşağıdaki formül çıkar.

Teorem 7.1 (Silindirik Koordinatlarda Üç Katlı İntegral). *$\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ olsun; h_1 ve h_2, $[\alpha, \beta]$ üzerinde sürekli ve $0 \leq h_1(\theta) \leq h_2(\theta)$ olan fonksiyonlar olsun. D, kutupsal koordinatlarda*

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

ile verilen bölge; $u_1 \leq u_2$, D üzerinde sürekli iki fonksiyon ve

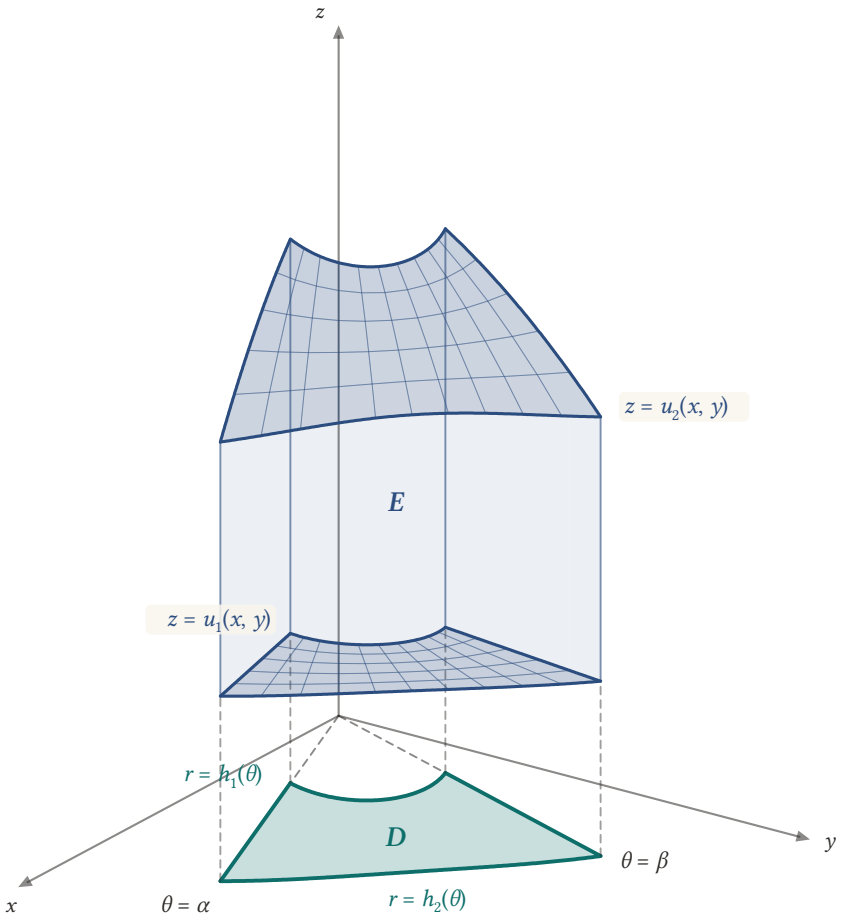
$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

olsun. f, E üzerinde sürekli ise

$$\begin{aligned} &\iiint_E f(x, y, z)\, dV \\ &= \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta \end{aligned} \tag{4}$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.3: E *cismi,* xy*-düzlemindeki izdüşümü* D*'nin üstünde,* $z = u_1(x, y)$ *ile* $z = u_2(x, y)$ *yüzeyleri arasında kalır.* D *kutupsal koordinatlarda* $\alpha \le \theta \le \beta$, $h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)$ *ile verilir.*

İspat.
İspatı dört adımda yapalım.
Adım 1. *E bir tip 1 bölgedir; Teorem 6.2 (i) gereği*

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D F(x,y)\,dA, \qquad F(x,y) = \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

olur.
Adım 2. *F, D üzerinde süreklidir. Bunu görmek için iç integralde $z = u_1 + s\,(u_2 - u_1)$, $0 \le s \le 1$ değişken değiştirmesini yapalım ($dz = (u_2 - u_1)\,ds$):*

$$F(x,y) = \big(\, u_2(x,y) - u_1(x,y) \,\big) \int_0^1 f\,\big(\, x, y, u_1 + s\,(u_2 - u_1) \,\big)\,ds.$$

Sağdaki integrand (x, y, s)'nin sürekli bir fonksiyonudur ve $D \times [0,1]$ kapalı ve sınırlı bir kümedir. Böyle bir küme üzerinde sürekli bir integrandın sabit sınırlı integrali parametreye sürekli bağlıdır; ispat, düzgün süreklilik kullanan Analiz 3'teki ispatın (x, y) parametresi için aynen tekrarıdır. $u_2 - u_1$ da sürekli olduğundan çarpım olan F süreklidir.
Adım 3. *D kutupsal koordinatlarda verilmiş bir bölge ve F üzerinde sürekli olduğundan kutupsal koordinatlara geçiş formülü (Teorem 3.1)*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_D F(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} F(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

verir.
Adım 4. *F'nin tanımından*

$$F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\sin\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dz$$

olur. r çarpanı z'ye bağlı olmadığından bu integralin içine alınabilir. Adım 1 ve Adım 3'teki eşitlikler birleştirilip bu ifade yerine yazılınca (4) elde edilir. ■

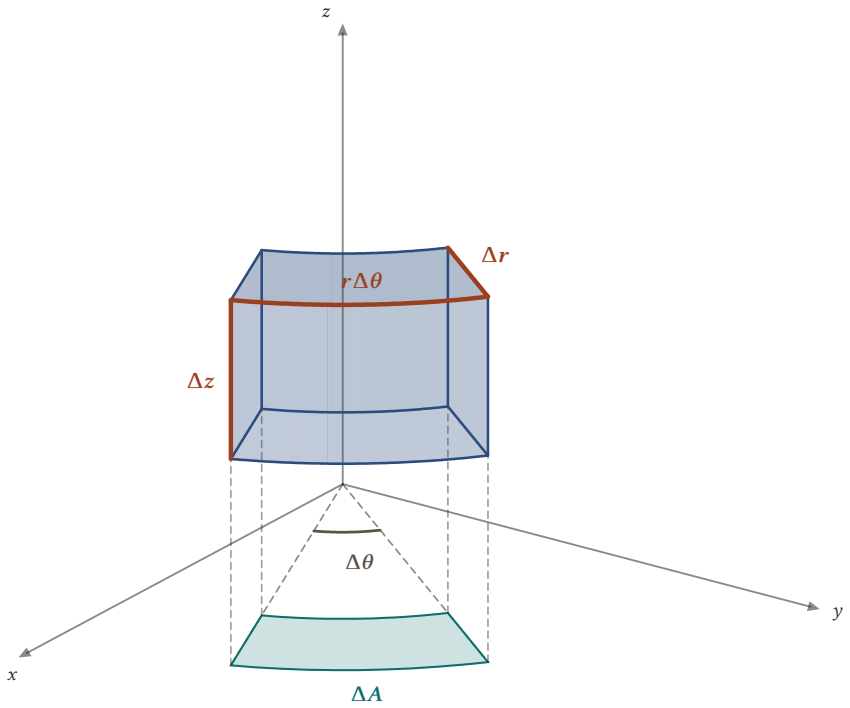
Yani bir üç katlı integrali silindirik koordinatlara çevirmek için x yerine $r\cos\theta$, y yerine $r\sin\theta$ yazarız, z'yi olduğu gibi bırakırız, sınırları z, r ve θ cinsinden yazarız ve dV yerine

$$dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

koyarız. Bu formül, E silindirik koordinatlarda kolayca anlatılabildiğinde ve özellikle integrandda $x^2 + y^2 = r^2$ ifadesi geçtiğinde işe yarar.
dV'deki r çarpanının nereden geldiğini görmek için r, θ ve z'yi birer küçük adım artıralım. r ile $r + \Delta r$, θ ile $\theta + \Delta\theta$, z ile $z + \Delta z$ arasında kalan **silindirik kutunun** tabanı bir kutupsal dikdörtgendir. Bu kutupsal dikdörtgenin alanı, orta yarıçap $\bar{r} = r + \Delta r/2$ olmak üzere tam olarak $\Delta A = \bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta$'dır. Kutunun yüksekliği Δz olduğundan hacmi

$$\Delta V = \bar{r}\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta z$$

olur. Kenarlara bakarak da aynı sonuca varırız: kutu, kenarları yaklaşık Δr, $r\,\Delta\theta$ (yarıçapı r olan yayın uzunluğu) ve Δz olan dikdörtgenler prizmasına benzer. Hacim elemanındaki r, açısal kenarın uzunluğunun $\Delta\theta$ değil $r\,\Delta\theta$ olmasından gelir.



Şekil 7.4: Silindirik bir kutu: tabanı alanı ΔA olan bir kutupsal dikdörtgen, yüksekliği Δz'dir. Kenarları yaklaşık Δr, $r\Delta\theta$ ve Δz olduğundan hacmi yaklaşık $r\Delta r\Delta\theta\Delta z$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ r çarpanını unutmayın

dV yerine $dz\,dr\,d\theta$ yazmak en sık yapılan hatadır. Örneğin yarıçapı a, yüksekliği h olan silindirin hacmi r çarpanı unutulursa $\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h} dz\,dr\,d\theta = 2\pi ah$ çıkar; bu, doğru değer olan $\pi a^2 h$ değildir.

Silindirik koordinatlarda üç katlı integral dört adımda

1. Cismi çizin ve z yönünde hangi yüzeyin altta ($z = u_1$), hangisinin üstte ($z = u_2$) olduğunu belirleyin.
2. Cismin xy-düzlemine izdüşümü D'yi bulun ve onu kutupsal koordinatlarda $\alpha \le \theta \le \beta$, $h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)$ diye yazın.
3. İntegrandda ve z sınırlarında $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ koyun, $x^2 + y^2$ yerine r^2 yazın, dV yerine $r\,dz\,dr\,d\theta$ koyun.
4. Önce z'ye, sonra r'ye, en son θ'ya göre integral alın.

Örnek 7.4 (Dairesel Silindirin Hacmi). Yarıçapı a, yüksekliği h olan dairesel silindirin hacmini silindirik koordinatlarla hesaplayınız.

Çözüm.
Silindiri, ekseni z ekseni ve tabanı xy-düzleminde olacak biçimde yerleştirelim.

1. Alttaki yüzey $z = 0$, üstteki yüzey $z = h$'dir.
2. İzdüşüm, yarıçapı a olan disktir: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$.
3. Hacim, 1 fonksiyonunun integralidir; $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$ olur.
4. İntegralleri sırayla alalım:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} rh\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^2 h}{2}\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{a^2 h}{2} = \pi a^2 h.$$

Bu, bilinen taban alanı çarpı yükseklik formülüdür. ■

Örnek 7.5 (Paraboloidin Altındaki Cisim). E, $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidinin altında ve xy-düzleminin üstünde kalan cisim olmak üzere

$$\iiint_E x^2\,dV$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
E, z eksenine göre simetrik olduğundan silindirik koordinatlar uygundur. Paraboloidin denklemi

$$z = 4 - (x^2 + y^2) = 4 - r^2$$

olur.

1. Alttaki yüzey $z = 0$, üstteki yüzey $z = 4 - r^2$'dir.
2. Paraboloit xy-düzlemini $4 - r^2 = 0$, yani $r = 2$ çemberinde keser. İzdüşüm D, yarıçapı 2 olan disktir: $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$.
3. $x^2 = r^2\cos^2\theta$ ve $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$'dır.

Buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iiint_E x^2\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{4-r^2} r^2\cos^2\theta\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

olur. İç integralde $r^3\cos^2\theta$ çarpanı z'ye bağlı değildir:

$$\int_0^{4-r^2} r^3\cos^2\theta\,dz = r^3\cos^2\theta\,(4-r^2) = (4r^3-r^5)\cos^2\theta.$$

Kalan integrand θ'ya bağlı bir çarpanla r'ye bağlı bir çarpanın çarpımı, sınırlar da sabit olduğundan integral iki tek katlı integralin çarpımına ayrılır:

$$\iiint_E x^2\,dV = \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2}(4r^3-r^5)\,dr\right).$$

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ olduğundan

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{2\pi} = \pi,$$

ayrıca

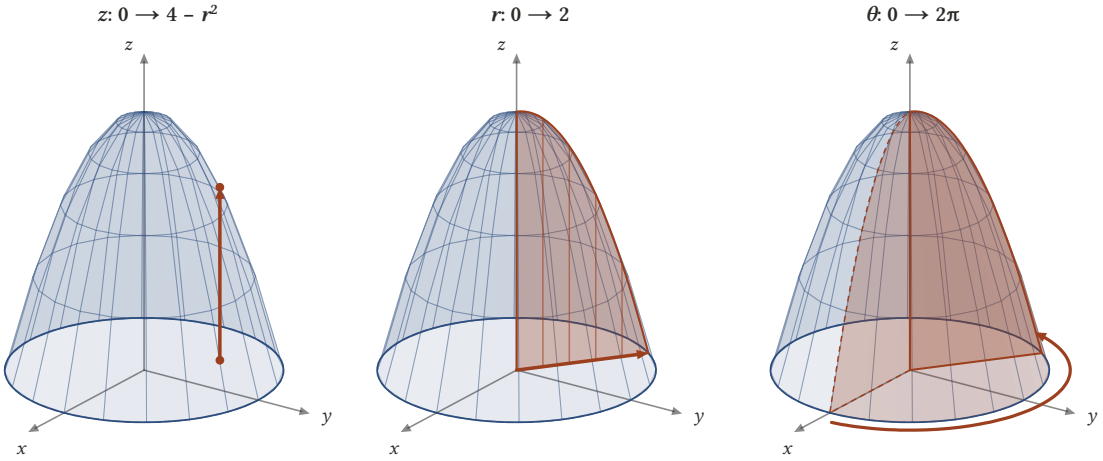
$$\int_0^{2}(4r^3-r^5)\,dr = \left[r^4-\frac{r^6}{6}\right]_0^{2} = 16-\frac{64}{6} = 16-\frac{32}{3} = \frac{16}{3}$$

bulunur. Sonuç:

$$\iiint_E x^2\,dV = \pi\cdot\frac{16}{3} = \frac{16\pi}{3}.$$

■

Ardışık integralin cismi nasıl taradığını görmek yararlıdır. Önceki örnekte r ve θ sabitken z değişkeni 0'dan $4-r^2$'ye giderek tabandan paraboloide uzanan düşey bir çizgiyi tarar. θ sabitken bu çizgiler $r=0$'dan $r=2$'ye kayarak düşey bir dilim oluşturur. Son olarak dilim z ekseni etrafında $\theta=0$'dan 2π'ye döner ve bütün cismi süpürür.



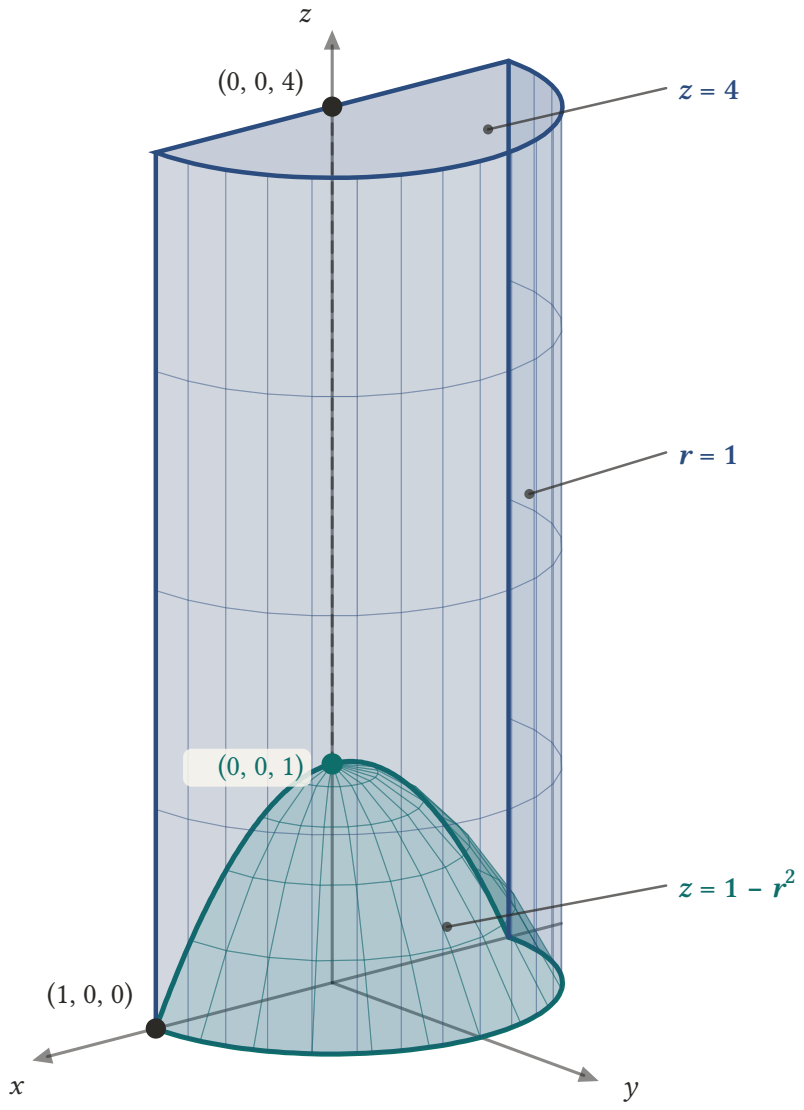
Şekil 7.5: Ardışık integral cismi adım adım tarar. Solda r ve θ sabitken z tabandan paraboloide çıkar; ortada θ sabitken bu dik çizgiler $r=0$'dan $r=2$'ye kayarak düşey bir dilim oluşturur; sağda dilim z ekseni etrafında $\theta=0$'dan 2π'ye dönerek bütün cismi süpürür.

 CC BY-NC-SA 4.0

7.4 Kütle Hesabı ve Dik Koordinatlardan Geçiş

Silindirik koordinatlar, yoğunluğu z eksenine uzaklığa bağlı olan cisimlerde ve dik koordinatlarda karekök sınırlarıyla verilmiş ardışık integrallerde de doğal seçimdir.
Bir cismin yoğunluğu $\rho(x,y,z)$ ise kütlesi $m = \iiint_E \rho(x,y,z)\,dV$'dir (Tanım 6.7).

Örnek 7.6 (Yoğunluğu Eksene Uzaklıkla Orantılı Cisim). E cismi $x^2+y^2=1$ silindirinin içinde, xz-düzleminin sağında ($y \geq 0$), $z=4$ düzleminin altında ve $z = 1-x^2-y^2$ paraboloidinin üstünde kalsın. Cismin her noktasındaki yoğunluk o noktanın silindirin eksenine uzaklığıyla orantılı olduğuna göre E'nin kütlesini bulunuz.



Şekil 7.6: $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin içinde, $y \geq 0$ tarafında, $z = 1 - x^2 - y^2$ paraboloidinin üstünde ve $z = 4$ düzleminin altında kalan cisim. Silindirik koordinatlarda $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq r \leq 1$, $1 - r^2 \leq z \leq 4$'tür.

Çözüm.
Silindirik koordinatlarda silindir $r=1$, paraboloit $z = 1-r^2$ olur. $y \geq 0$ koşulu $0 \leq \theta \leq \pi$ demektir. $0 \leq r \leq 1$ için $1 - r^2 \leq 1 < 4$ olduğundan paraboloit hep düzlemin altındadır. Buna göre

$$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1, 1-r^2 \leq z \leq 4\}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Silindirin ekseni z eksenidir; (x, y, z) noktasının bu eksene uzaklığı $\sqrt{x^2+y^2} = r$'dir. Yoğunluk bu uzaklıkla orantılı olduğundan bir K orantı sabiti için

$$\rho(x, y, z) = K\sqrt{x^2+y^2} = Kr$$

yazılır. Kütle:

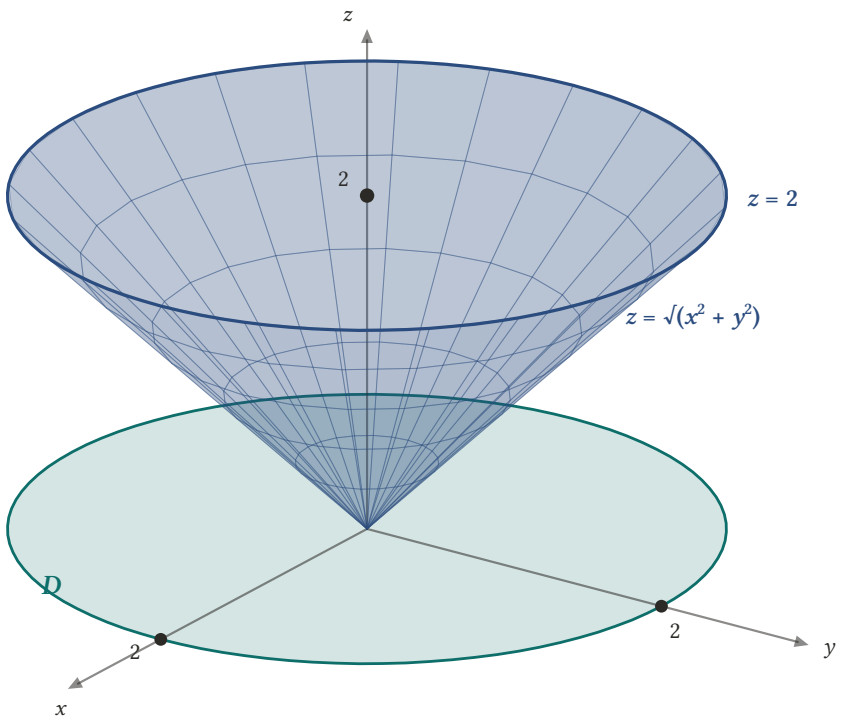
$$m = \int_0^{\pi}\int_0^{1}\int_{1-r^2}^{4} Kr \cdot r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{1} Kr^2 \left[\, 4-(1-r^2)\,\right] dr\, d\theta$$

$$= K\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{1} (3r^2+r^4)\, dr = K\pi\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^{1} = K\pi\left(1+\frac{1}{5}\right) = \frac{6\pi K}{5}.$$

■

Örnek 7.7 (Dik Koordinatlardaki Bir İntegralin Dönüştürülmesi). Aşağıdaki integrali hesaplayınız:

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} (x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx.$$



Şekil 7.7: Altta $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisi, üstte $z = 2$ düzlemiyle sınırlanan cisim. xy-düzlemine izdüşümü D: $x^2+y^2 \le 4$ diskidir; silindirik koordinatlarda cisim $0 \le r \le 2$, $r \le z \le 2$ ile verilir.

Çözüm.
Önce integralin hangi cisim üzerinde alındığını okuyalım. Sınırlar

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \le x \le 2, \mid y \mid \le \sqrt{4-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\right\}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

cismini anlatır. x ve y sınırları, $x^2+y^2\le 4$ diskini verir; bu disk E'nin xy-düzlemine izdüşümüdür. E'nin alt yüzeyi $z=\sqrt{x^2+y^2}$ konisi, üst yüzeyi $z=2$ düzlemidir.
Silindirik koordinatlarda bu cisim çok daha sade anlatılır:

$$E=\{(r,\theta,z)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\,0\le r\le 2,\,r\le z\le 2\}.$$

İntegrand $x^2+y^2=r^2$ olur. Buna göre

$$\iiint_E (x^2+y^2)\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_r^{2} r^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2} r^3(2-r)\,dr$$
$$=2\pi\left[\frac{r^4}{2}-\frac{r^5}{5}\right]_0^{2}=2\pi\left(8-\frac{32}{5}\right)=2\pi\cdot\frac{8}{5}=\frac{16\pi}{5}$$

bulunur. ■

7.5 Alıştırmalar

Alıştırma 7.1 (Silindirikten Dike Bir Nokta). Silindirik koordinatları $(2,5\pi/6,1)$ olan noktanın dik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
$\cos(5\pi/6)=-\sqrt{3}/2$ ve $\sin(5\pi/6)=1/2$ olduğundan (1) formülleri

$$x=2\cos\frac{5\pi}{6}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3},$$
$$y=2\sin\frac{5\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1,$$
$$z=1$$

verir. Nokta $(-\sqrt{3},1,1)$'dir. $x<0<y$ olduğundan izdüşüm ikinci bölgededir; bu, $\pi/2<5\pi/6<\pi$ ile uyumludur. Kontrol: $x^2+y^2=3+1=4=r^2$. ■

Alıştırma 7.2 (Dikten Silindirige Bir Nokta). Dik koordinatları $(5\sqrt{3},-5,\sqrt{3})$ olan noktanın silindirik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Üç adımı uygulayalım.

1. $r=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+(-5)^2}$, yani $r=\sqrt{75+25}=10$.
2. $x>0$, $y<0$ olduğundan izdüşüm dördüncü bölgededir. $\tan\theta=\dfrac{-5}{5\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ eşitliğinin $[0,2\pi)$'deki çözümleri $5\pi/6$ ve $11\pi/6$'dır; dördüncü bölgeye düşen $\theta=11\pi/6$'dır.
3. $z=\sqrt{3}$.

Nokta $(10,11\pi/6,\sqrt{3})$'tür. Kontrol:

$$10\cos\frac{11\pi}{6}=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3},\qquad 10\sin\frac{11\pi}{6}=10\left(-\frac{1}{2}\right)=-5.$$

■

Alıştırma 7.3 (Bir Eyer Yüzeyinin Silindirik Denklemi). $z=x^2-y^2$ yüzeyinin silindirik koordinatlardaki denklemini yazınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ yazalım:

$$x^2 - y^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r^2\cos 2\theta.$$

Denklem $z = r^2\cos 2\theta$ olur. Bu biçim yüzeyin şeklini de gösterir: $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ yarım düzlemlerinde $z = r^2$ olduğundan yüzey yukarı, $\theta = \pi/2$ ve $\theta = 3\pi/2$ yarım düzlemlerinde $z = -r^2$ olduğundan aşağı kıvrılır; $\theta = \pi/4$ gibi $\cos 2\theta = 0$ olan doğrultularda $z = 0$'dır. Yüzey bir eyerdir (hiperbolik paraboloit). ■

Alıştırma 7.4 (Bir Silindirik Denklemin Tanınması). Silindirik koordinatlardaki denklemi $r = 2\sin\theta$ olan yüzeyi tanımlayınız.

Çözüm.
Denklemi r ile çarpalım: $r^2 = 2r\sin\theta$. $r^2 = x^2 + y^2$ ve $r\sin\theta = y$ olduğundan

$$x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 1$$

bulunur. Çarpma işlemi yeni nokta eklemedi: eklenebilecek tek noktalar $r = 0$ olan z ekseni noktalarıdır, onlar da $\theta = 0$ alınınca $r = 2\sin\theta$ denklemini zaten sağlar. Tersine, $x^2 + (y-1)^2 = 1$ yüzeyinin z ekseni dışındaki her noktasında $r > 0$'dır ve $r^2 = 2r\sin\theta$ eşitliği r ile bölünerek $r = 2\sin\theta$ verir. Denklemde z geçmediğinden yüzey, xy-düzlemindeki $x^2 + (y-1)^2 = 1$ çemberinin her noktasından geçen düşey doğrulardan oluşur. Yani yüzey, yarıçapı 1 olan ve ekseni z eksenine paralel $x = 0$, $y = 1$ doğrusu olan dairesel bir silindirdir. $r \geq 0$ koşulu $\sin\theta \geq 0$, yani $0 \leq \theta \leq \pi$ gerektirir; θ bu aralıkta değişirken çember bir kez çizilir. ■

Alıştırma 7.5 (Silindirik Bir Kabuk). Uzunluğu 20 cm, iç yarıçapı 6 cm, dış yarıçapı 7 cm olan silindirik bir kabuğu (boru parçasını) uygun bir koordinat sisteminde eşitsizliklerle anlatınız ve koordinat sistemini kabuğa göre nasıl yerleştirdiğinizi açıklayınız.

Çözüm.
Kabuk, ekseni etrafında simetrik olduğundan silindirik koordinatları seçeriz. Koordinat sistemini, kabuğun ekseni z ekseni olacak ve kabuğun bir ucu xy-düzleminde, öteki ucu $z = 20$ düzleminde kalacak biçimde yerleştirelim (birim cm).
Kabuğun noktaları eksene 6 ile 7 cm arasında uzaklıktadır; eksen etrafında tam bir tur kaplar; yükseklikleri 0 ile 20 arasındadır. Buna göre kabuk

$$6 \leq r \leq 7, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \qquad 0 \leq z \leq 20$$

eşitsizlikleriyle anlatılır. Dik koordinatlarda aynı kabuk $36 \leq x^2 + y^2 \leq 49$, $0 \leq z \leq 20$ olurdu. Bu tarifle hacim de hemen bulunur:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_6^7\int_0^{20} r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot 20 \cdot \frac{49-36}{2} = 260\pi \text{ cm}^3.$$

■

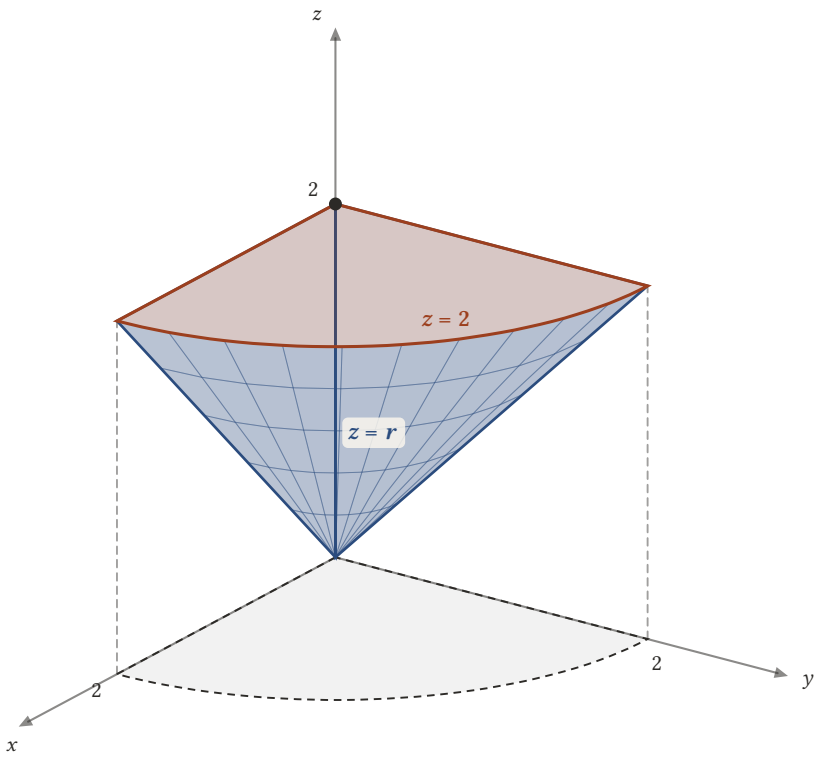
Alıştırma 7.6 (Eşitsizliklerle Verilen Bir Cisim). Silindirik koordinatlarda $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $r \leq z \leq 2$ eşitsizlikleriyle verilen cismi çiziniz.

Çözüm.
Eşitsizlikleri tek tek okuyalım.

- $z = r$ yüzeyi, tepesi orijinde olan ve z ekseni etrafında açılan konidir (Örnek 7.3). $z \geq r$ koşulu bu koninin üstünde, yani "içinde" kalmak demektir.
- $z \leq 2$ koşulu $z = 2$ düzleminin altında kalmak demektir. $r \leq z \leq 2$ olabilmesi için $r \leq 2$ olmalıdır.
- $0 \leq \theta \leq \pi/2$ koşulu yalnız $x \geq 0$, $y \geq 0$ olan çeyreği alır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Demek ki cisim, tepesi orijinde, tabanı $z = 2$ düzleminde ve taban yarıçapı 2 olan dolu koninin $x \geq 0$, $y \geq 0$ tarafında kalan çeyreğidir. Cismi $z = r$ konisi, $z = 2$ düzlemi ve xz-, yz-düzlemleri sınırlar.



Şekil 7.8: $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $r \leq z \leq 2$ cismi: $z = r$ konisinin üstünde, $z = 2$ düzleminin altında kalan dolu koninin $x \geq 0$, $y \geq 0$ tarafındaki çeyreği.

Hacmi de kolayca bulunur:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_r^2 r \, dz \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{2} \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Bu, yüksekliği 2 ve taban yarıçapı 2 olan koninin hacmi $\frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8\pi}{3}$'ün dörtte biridir. ■

Alıştırma 7.7 (Hacmi Bir İntegralle Verilen Cisim). Aşağıdaki integralin hacmini verdiği cismi tarif ederek integrali hesaplayınız:

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^3 \int_{r^2}^9 r \, dz \, dr \, d\theta.$$

Çözüm.
$r \, dz \, dr \, d\theta = dV$ olduğundan integral,

$$E = \{(r, \theta, z) \mid \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2, 0 \leq r \leq 3, r^2 \leq z \leq 9\}$$

cisminin hacmidir. $z = r^2$ yüzeyi $z = x^2 + y^2$ paraboloididir; $z = 9$ yatay bir düzlemdir ve paraboloidi $r = 3$ çemberinde keser. $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ koşulu $x \leq 0$ demektir. Yani E, $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ile $z = 9$ düzlemi arasında kalan "kâse" biçimli cismin $x \leq 0$ olan yarısıdır.
Hesap:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$V = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^3 r(9 - r^2)\, dr\, d\theta = \pi \int_0^3 (9r - r^3)\, dr$$
$$= \pi \left[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^3 = \pi\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} \right) = \frac{81\pi}{4}.$$

■

Alıştırma 7.8 (Silindirik Koordinatlara Geçerek Hesaplama). Silindirik koordinatlara geçerek hesaplayınız:

$$\int_{-3}^{3} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx.$$

Çözüm.
Sınırları okuyalım: $-3 \le x \le 3$ ve $0 \le y \le \sqrt{9-x^2}$ koşulları, $x^2+y^2 \le 9$ diskinin $y \ge 0$ olan yarısını verir. Kutupsal koordinatlarda bu yarım disk $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le r \le 3$'tür. z, 0'dan $9-x^2-y^2 = 9-r^2$ paraboloidine gider. İntegrand $\sqrt{x^2+y^2} = r$ olur. Buna göre

$$\int_0^{\pi} \int_0^3 \int_0^{9-r^2} r \cdot r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^3 r^2(9-r^2)\, dr = \pi \left[3r^3 - \frac{r^5}{5} \right]_0^3$$
$$= \pi\left(81 - \frac{243}{5} \right) = \frac{162\pi}{5}$$

bulunur. ■

Alıştırma 7.9 (Küre ile Silindirin Ortak Kısmı). Hem $x^2+y^2=1$ silindirinin hem de $x^2+y^2+z^2=4$ küresinin içinde kalan cismin hacmini bulunuz.

Çözüm.
Silindirik koordinatlarda silindirin içi $r \le 1$, kürenin içi $r^2+z^2 \le 4$, yani $-\sqrt{4-r^2} \le z \le \sqrt{4-r^2}$'dir. Cisim

$$E = \left\{ (r,\theta,z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\, 0 \le r \le 1,\, |\, z \,| \le \sqrt{4-r^2} \right\}$$

olur. Hacim:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{4-r^2}\, dr.$$

Son integralde $u = 4-r^2$ diyelim: $du = -2r\, dr$; $r=0$ iken $u=4$, $r=1$ iken $u=3$ olur. Böylece

$$\int_0^1 2r\sqrt{4-r^2}\, dr = \int_3^4 \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3}\left[u^{3/2} \right]_3^4 = \frac{2}{3}\left(8 - 3\sqrt{3} \right)$$

ve

$$V = 2\pi \cdot \frac{2}{3}\left(8 - 3\sqrt{3} \right) = \frac{4\pi}{3}\left(8 - 3\sqrt{3} \right) \approx 11{,}74$$

bulunur. Kontrol: cisim, yarıçapı 1 ve yüksekliği 4 olan silindirin (hacmi $4\pi \approx 12{,}57$) içindedir ve ondan biraz küçüktür. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 7.10 (İki Silindir Arasındaki Bir Cisim). E, $x^2+y^2=1$ ve $x^2+y^2=16$ silindirleri arasında, xy-düzleminin üstünde ve $z=y+4$ düzleminin altında kalan cisim olmak üzere $\iiint_E (x-y)\,dV$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Silindirik koordinatlarda iki silindirin arası $1\le r\le 4$'tür ve cisim eksen etrafında tam bir tur kaplar: $0\le\theta\le 2\pi$. Üstteki düzlem $z=r\sin\theta+4$ olur. $|\,y\,|\le r\le 4$ olduğundan $y+4\ge 0$'dır; yani düzlem cismin üstünde hep xy-düzleminin üzerinde kalır. Buna göre

$$E=\{(r,\theta,z)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\,1\le r\le 4,\,0\le z\le r\sin\theta+4\}.$$

İntegrand $x-y=r(\cos\theta-\sin\theta)$'dır. Önce z'ye göre integral alalım:

$$\begin{aligned}\int_0^{r\sin\theta+4} r(\cos\theta-\sin\theta)\cdot r\,dz &= r^2(\cos\theta-\sin\theta)(r\sin\theta+4)\\ &= r^3\sin\theta\cos\theta+4r^2\cos\theta-r^3\sin^2\theta-4r^2\sin\theta.\end{aligned}$$

r ve θ sınırları sabit olduğundan Fubini Teoremi (Teorem 1.2) gereği kalan iki integralin sırası değiştirilebilir; önce θ'ya göre integral alalım. Tam bir periyot üzerinde

$$\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta=0,\qquad \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta=\pi$$

olduğundan dört terimden yalnız üçüncüsü katkı verir:

$$\int_0^{2\pi}\left(\,r^3\sin\theta\cos\theta+4r^2\cos\theta-r^3\sin^2\theta-4r^2\sin\theta\,\right)d\theta=-\pi r^3.$$

Son olarak

$$\iiint_E (x-y)\,dV=\int_1^4(-\pi r^3)\,dr=-\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^4=-\pi\cdot\frac{256-1}{4}=-\frac{255\pi}{4}.$$

Sonucun negatif çıkması şaşırtıcı değildir: x teriminin katkısı simetri yüzünden sıfırdır; $-y$ terimi ise cismin daha yüksek olduğu $y>0$ tarafında negatiftir. ■

Alıştırma 7.11 (Bir Paraboloit Cisminin Kütle Merkezi). $z=4x^2+4y^2$ paraboloidi ve $z=a$ düzlemiyle ($a>0$) sınırlanan S cisminin yoğunluğu her yerde K sabitidir. S'nin kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.
Kütle $m=\iiint_S K\,dV$ (Tanım 6.7), xy-düzlemine göre moment $M_{xy}=\iiint_S zK\,dV$'dir ve kütle merkezinin yüksekliği $\bar z=M_{xy}/m$'dir; $\bar x$ ve $\bar y$ de $M_{yz}=\iiint_S xK\,dV$ ve $M_{xz}=\iiint_S yK\,dV$ momentleriyle benzer biçimde bulunur (Tanım 6.8).
Silindirik koordinatlarda paraboloit $z=4r^2$ olur ve $z=a$ düzlemini $4r^2=a$, yani $r=\sqrt{a}/2$ çemberinde keser. Buna göre

$$S=\left\{(r,\theta,z)\mid 0\le\theta\le 2\pi,\,0\le r\le\sqrt{a}/2,\,4r^2\le z\le a\right\}.$$

Kütle:

$$\begin{aligned}m&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a}/2}\int_{4r^2}^{a}Kr\,dz\,dr\,d\theta=2\pi K\int_0^{\sqrt{a}/2}(ar-4r^3)\,dr\\ &=2\pi K\left[\frac{ar^2}{2}-r^4\right]_0^{\sqrt{a}/2}=2\pi K\left(\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{16}\right)=\frac{\pi K a^2}{8}.\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Simetri: M_{yz} integralinde integrand $xK = Kr\cos\theta$ olur ve $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$ çarpanı yüzünden $M_{yz} = 0$ çıkar. Aynı biçimde $\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = 0$ olduğundan $M_{xz} = 0$'dır. Demek ki $\bar{x} = \bar{y} = 0$; kütle merkezi z ekseni üzerindedir.
xy-düzlemine göre moment:

$$M_{xy} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{a}/2}\int_{4r^2}^{a} zKr\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi K\int_0^{\sqrt{a}/2} r\cdot\frac{a^2-16r^4}{2}\,dr$$
$$= 2\pi K\left[\frac{a^2r^2}{4} - \frac{4r^6}{3}\right]_0^{\sqrt{a}/2} = 2\pi K\left(\frac{a^3}{16} - \frac{a^3}{48}\right) = \frac{\pi K a^3}{12}.$$

Buradan

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\pi K a^3/12}{\pi K a^2/8} = \frac{2a}{3}$$

bulunur. Kütle merkezi $(0, 0, 2a/3)$ noktasıdır. Cismin genişliği yukarı doğru arttığından kütle merkezinin orta yüksekliğin $(a/2)$ üstünde çıkması beklenen bir sonuçtur. ■

Alıştırma 7.12 (Bir Dağı Oluşturmak İçin Gereken İş). Jeologlar, bir dağ sırasının oluşumunu incelerken malzemeyi deniz seviyesinden yerine kaldırmak için gereken işi tahmin eder. Bir dağı, tabanı deniz seviyesinde olan, taban yarıçapı $R = 19\,000$ m ve yüksekliği $H = 3\,800$ m olan dik dairesel bir koni olarak düşünelim. Malzemenin birim hacminin ağırlığı her yerde $\delta = 31\,400\ \mathrm{N/m^3}$ olsun. Dağın bütün malzemesini deniz seviyesinden bulunduğu yere kaldırmak için yapılan işi bulunuz.

Çözüm.
Modeli kuralım. Yüksekliği z olan bir noktadaki küçük bir ΔV hacim parçasının ağırlığı $\delta\,\Delta V$'dir. Bu parçayı deniz seviyesinden z yüksekliğine kaldırmak için yapılan iş yaklaşık $z\,\delta\,\Delta V$'dir. Bütün parçaların katkısını toplayıp limite geçince

$$W = \iiint_E \delta\, z\, dV$$

elde edilir; burada E koninin kapladığı cisimdir.
Koniyi silindirik koordinatlarda yazalım. Koninin ekseni z ekseni, tabanı xy-düzleminde (deniz seviyesi) ve tepesi $(0, 0, H)$ olsun. Yan yüzey tabanın kenarındaki $r = R$, $z = 0$ noktalarını tepeye birleştirir; denklemi $z = H(1 - r/R)$'dir. Buna göre

$$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le R,\ 0 \le z \le H(1 - r/R)\}.$$

İntegrali hesaplayalım.

$$W = \int_0^{2\pi}\int_0^{R}\int_0^{H(1-r/R)} \delta z\, r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\delta\int_0^R r\cdot\frac{H^2(1-r/R)^2}{2}\,dr$$
$$= \pi\delta H^2\int_0^R\left(r - \frac{2r^2}{R} + \frac{r^3}{R^2}\right)dr = \pi\delta H^2\left(\frac{R^2}{2} - \frac{2R^2}{3} + \frac{R^2}{4}\right)$$
$$= \pi\delta H^2\cdot\frac{R^2}{12} = \frac{\pi\delta R^2 H^2}{12}.$$

Sayıları yerine koyalım. $RH = 19\,000\cdot 3\,800$ çarpımı $7{,}22\cdot 10^7\ \mathrm{m^2}$, karesi de yaklaşık $5{,}213\cdot 10^{15}\ \mathrm{m^4}$ olduğundan

$$W = \frac{\pi\cdot 31\,400\cdot(RH)^2}{12} \approx 4{,}29\cdot 10^{19}\ \mathrm{J}$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

> Sonucu başka bir yoldan kontrol edebiliriz: koninin ağırlığı $\delta \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 H$, ağırlık merkezinin yüksekliği $H/4$'tür ve çarpımları $\frac{\pi\delta R^2 H^2}{12}$'dir. ■

Silindirik koordinatlar, bir eksen etrafında simetrik cisimlerde üç katlı integrali sadeleştirdi. Bir noktaya göre simetrik cisimler, özellikle küreler ve koniler için daha uygun olan koordinat sistemini bir sonraki bölümde, Küresel Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller bölümünde kuracağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

8. Küresel Koordinatlarda Üç Katlı İntegraller

Silindirik koordinatlar, z ekseni etrafında simetrik olan cisimlerde üç katlı integrali kolaylaştırdı. Bu bölümde sınırları aynı merkezli küreler, tepesi bu merkezde olan düşey eksenli koniler ve merkezden geçen düşey düzlemlerle verilen cisimlerle uğraşacağız: bir top, iki eş merkezli küre arasında kalan bir kabuk ya da bir topun koniyle kesilmiş bir parçası. Böyle cisimlerin sınırları dik koordinatlarda iç içe kareköklerle yazılır. Örneğin birim top üzerindeki bir integral

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

biçimini alır ve hesaplaması çoğu zaman çok zahmetlidir.
Ortak merkezi orijine koyalım ve bir noktayı orijine uzaklığı ile iki açıyla belirtelim. Bu durumda birim top, "uzaklığı 0 ile 1 arasında olan, açıları serbest" noktaların kümesi olur ve integralin bütün sınırları sabitlere iner. Bu fikir **küresel koordinatlara** götürür. Önce koordinat sistemini ve dik koordinatlarla bağlantısını kuracağız. Sonra küçük bir küresel parçanın hacmini tam olarak hesaplayıp üç katlı integralin küresel koordinatlardaki biçimini ispatlayacağız.

8.1 Küresel Koordinatlar

Uzaydaki bir noktanın yerini, orijine uzaklığı ile iki açı tek başına belirler.

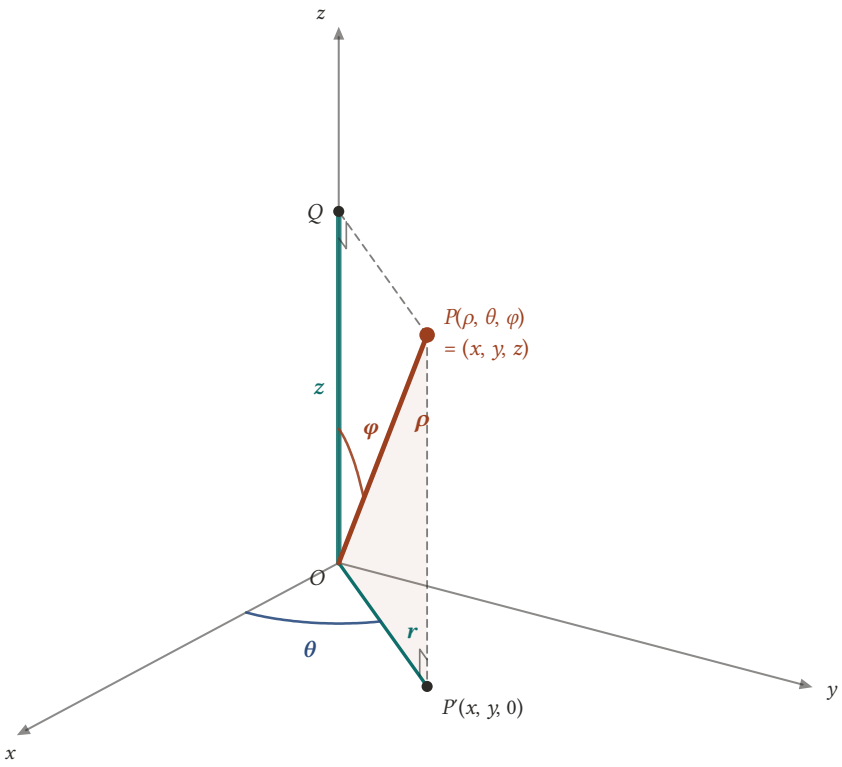
Tanım 8.1 (Küresel Koordinatlar). Uzayda bir P noktası ve onun xy-düzlemine dik izdüşümü P' verilsin. P noktasının **küresel koordinatları** (spherical coordinates) şu üç sayıdır:

- $\rho = |\,OP\,|$, yani P'nin orijine uzaklığı; $\rho \geq 0$,
- θ, silindirik koordinatlardaki açı, yani P' noktasının xy-düzlemindeki kutupsal açısı,
- ϕ, pozitif z ekseni ile OP doğru parçası arasındaki açı; $0 \leq \phi \leq \pi$.

Bu durumda $P = (\rho, \theta, \phi)$ yazılır.

Yani ρ noktanın merkezden ne kadar uzakta olduğunu, ϕ "kuzey kutbundan" ne kadar aşağı indiğini, θ ise z ekseni etrafında hangi yöne baktığını söyler. Dünya haritasına benzetirsek θ boylama karşılık gelir, ϕ ise kuzey kutbundan ölçülen açıdır; enlem $90^\circ - \phi$ olur. $\phi = 0$ pozitif z eksenini, $\phi = \pi/2$ xy-düzlemini, $\phi = \pi$ negatif z eksenini verir. θ için, silindirik koordinatlarda olduğu gibi (bkz. Tanım 7.1), genellikle $0 \leq \theta < 2\pi$ aralığı kullanılır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.1: P noktasının küresel koordinatları: $\rho = |OP|$ orijine uzaklık, φ pozitif z ekseniyle OP arasındaki açı, θ ise P' izdüşümünün kutupsal açısıdır. OQP ve $OP'P$ dik üçgenlerinden $z = \rho\cos\varphi$ ve $r = |OP'| = \rho\sin\varphi$ okunur.

> ⚠ Gösterim farkı
>
> Fizik ve mühendislik metinlerinin çoğunda θ ile ϕ'nin rolleri yer değiştirir: θ kutup açısı, ϕ boylam olur ve ρ yerine r yazılır. Bu notlarda ϕ daima pozitif z ekseninden ölçülen açıdır; θ ise kutupsal ve silindirik koordinatlardaki açının aynısıdır.

Küresel koordinatlarla dik koordinatlar arasındaki geçiş, yukarıdaki şekilde P'den z eksenine ve xy-düzlemine inilen dikmelerin oluşturduğu iki dik üçgenden okunur.

Önerme 8.1 (Küresel ve Dik Koordinatlar Arasında Dönüşüm). *Küresel koordinatları (ρ, θ, ϕ) olan noktanın dik koordinatları*

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi \tag{1}$$

olur. Tersine, dik koordinatlardan küresel koordinatlara

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \cos\phi = \frac{z}{\rho} \quad (\rho \neq 0) \tag{2}$$

eşitlikleriyle geçilir; θ ise (x, y) noktasının kutupsal açısıdır. Silindirik koordinatlarla bağlantı $r = \rho\sin\phi$, $z = \rho\cos\phi$ ve ortak θ açısıdır.

İspat.
$P = (x, y, z)$ ve $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$ olsun. $\overrightarrow{OP}$ vektörünün uzunluğu ρ, $\mathbf{k}$ ile arasındaki açı ϕ olduğundan, iç çarpımın geometrik ifadesinden

$$z = \overrightarrow{OP}\cdot\mathbf{k} = |\,\overrightarrow{OP}\,|\,|\,\mathbf{k}\,|\cos\phi = \rho\cos\phi$$

bulunur. $P' = (x, y, 0)$ izdüşümünün orijine uzaklığı $r = \sqrt{x^2 + y^2}$'dir; bu, P'nin silindirik koordinatlarındaki r'dir. Uzaklık formülünden

$$\rho^2 = |\, OP \,|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2$$

olduğundan $r^2 = \rho^2 - \rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \sin^2\phi$ olur. $0 \le \phi \le \pi$ aralığında $\sin\phi \ge 0$ olduğu için buradan $r = \rho \sin\phi$ çıkar. θ, (x, y) noktasının kutupsal açısı olduğundan $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$'dır. Bunlarda $r = \rho\sin\phi$ yazılınca (1) elde edilir.
Ters yönde $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ eşitliğini zaten gördük. $\rho \neq 0$ ise $z = \rho\cos\phi$ eşitliği $\cos\phi = z/\rho$ verir. Kosinüs $[0, \pi]$ aralığında birebir olduğundan ϕ bu değerle tek türlü belirlenir.
■

Örnek 8.1 (Küresel Koordinatlardan Dik Koordinatlara). Küresel koordinatları $(2, \pi/4, \pi/3)$ olan noktayı çiziniz ve dik koordinatlarını bulunuz.

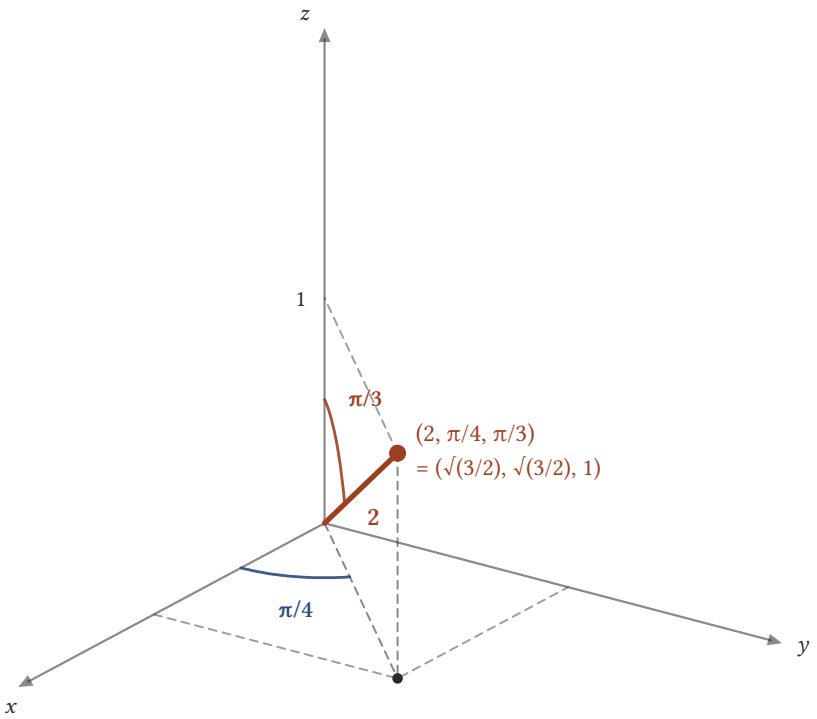
Çözüm.
Burada $\rho = 2$, $\theta = \pi/4$ ve $\phi = \pi/3$'tür. Nokta, orijinden 2 birim uzakta; pozitif z ekseniyle $\pi/3$ açı yapan ve xy-düzlemine izdüşümü x ekseniyle $\pi/4$ açı yapan doğrultudadır. (1) formüllerinden

$$x = 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$z = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

bulunur. Noktanın dik koordinatları $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$'dir. Kontrol olarak kareler toplamı $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 4 = \rho^2$ olur.



Şekil 8.2: Küresel koordinatları (2, π/4, π/3) olan nokta: orijinden 2 birim uzakta, z ekseniyle π/3 açı yapan ve izdüşümü x ekseniyle π/4 açı yapan doğrultuda. Dik koordinatları (√(3/2), √(3/2), 1)'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 8.2 (Dik Koordinatlardan Küresel Koordinatlara). Dik koordinatları $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
(2)'den uzaklık

$$\rho = \sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

olur. Kutup açısı için

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

ve $0 \le \phi \le \pi$ olduğundan $\phi = 2\pi/3$ bulunur. Buna göre $\rho \sin\phi = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$'tür. Son olarak (1)'deki x ve y eşitliklerinden

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho\sin\phi} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\rho\sin\phi} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$$

elde edilir. Kosinüsün sıfır olması $\theta = \pi/2$ ya da $\theta = 3\pi/2$ demektir; sinüs pozitif olduğundan (yani $y = 2\sqrt{3} > 0$ olduğundan) $\theta = \pi/2$'dir. Noktanın küresel koordinatları $(4, \pi/2, 2\pi/3)$'tür.
■

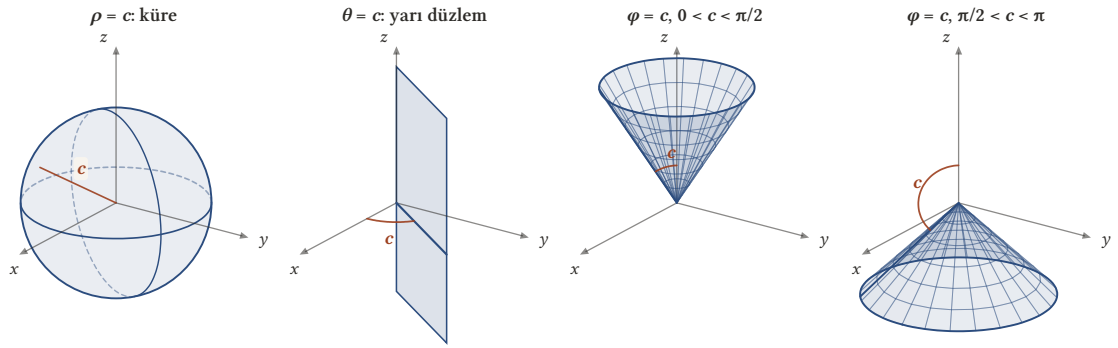
8.2 Sabit Koordinat Yüzeyleri

Küresel koordinatların gücü, bir koordinat sabit tutulunca ortaya çıkan yüzeylerin basitliğinden gelir.

Önerme 8.2 (Sabit Koordinat Yüzeyleri). *c bir sabit olsun.*
*(i) $c > 0$ ise $\rho = c$ yüzeyi, merkezi orijin ve yarıçapı c olan $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ **küresidir**.*
*(ii) $\theta = c$ yüzeyi, z eksenini kenar kabul eden ve xy-düzlemini $\theta = c$ ışını boyunca kesen düşey **yarı düzlemdir**.*
(iii) $0 < c < \pi$ ve $c \neq \pi/2$ ise $\phi = c$ yüzeyi, tepesi orijinde ve ekseni z ekseni olan

$$z = \cot c \sqrt{x^2 + y^2}$$

***yarı konisidir**. $0 < c < \pi/2$ ise koni yukarı ($z \ge 0$), $\pi/2 < c < \pi$ ise aşağı ($z \le 0$) açılır. $\phi = \pi/2$ yüzeyi xy-düzlemidir.*



Şekil 8.3: Küresel koordinatlarda bir koordinatı sabitleyen yüzeyler. ρ = c merkezi orijinde olan bir küre, θ = c kenarı z ekseni olan düşey bir yarı düzlem, φ = c ise ekseni z ekseni olan bir yarı konidir: c < π/2 iken yukarı, c > π/2 iken aşağı açılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
(i) (2)'ye göre $\rho = c$ eşitliği $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ eşitliğine denktir.
(ii) $\theta = c$ olan noktaların xy-düzlemine izdüşümü, kutupsal açısı c olan noktalardır. Bu yüzden bu noktalar $r \geq 0$ ve z serbest olmak üzere $(r\cos c, r\sin c, z)$ biçimindedir. Bu küme, z ekseninden $(r = 0)$ başlayıp $(\cos c, \sin c, 0)$ yönünde uzanan düşey yarı düzlemdir.
(iii) $\phi = c$ olan bir noktada (1)'e göre $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \sin c$ ve $z = \rho \cos c$'dir. $\sin c > 0$ olduğundan $\rho = r/\sin c$ ve buradan $z = r\cos c/\sin c = r\cot c$ bulunur. Tersine, $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ ve $z = r\cot c$ olan bir nokta alalım. $1 + \cot^2 c = 1/\sin^2 c$ olduğundan

$$\rho = \sqrt{r^2 + r^2\cot^2 c} = \frac{r}{\sin c}, \qquad \cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{r\cot c}{r/\sin c} = \cos c$$

olur ve kosinüs $[0, \pi]$ aralığında birebir olduğundan $\phi = c$'dir. Orijin $(r = 0)$ her iki kümede de vardır. Böylece $\phi = c$ yüzeyi $z = \cot c\,\sqrt{x^2 + y^2}$ yarı konisidir. $\cot c$, $0 < c < \pi/2$ iken pozitif, $\pi/2 < c < \pi$ iken negatif olduğundan z'nin işareti de buna göre belirlenir. $c = \pi/2$ için $z = \rho\cos(\pi/2) = 0$ olur, yani yüzey xy-düzlemidir.
■

Yani küreler, z ekseninden geçen yarı düzlemler ve ekseni z ekseni olan koniler küresel koordinatlarda tek bir koordinatın sabit olmasıyla yazılır. Sınırları bunlardan oluşan cisimlerin tarifi bu yüzden çok kısalır. Örneğin $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi $\cot c = 1$, yani $\phi = \pi/4$ yüzeyidir.
Başka yüzeylerin küresel denklemini bulmak için (1)'i yerine yazmak ve sadeleştirmek yeterlidir. Sık kullanılan iki kısaltma

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \qquad x^2 + y^2 = \rho^2\sin^2\phi$$

eşitlikleridir.

Örnek 8.3 (Bir Silindirin Küresel Denklemi). $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin küresel koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
$x^2 + y^2 = \rho^2\sin^2\phi$ olduğundan denklem $\rho^2\sin^2\phi = 1$ olur. $\rho \geq 0$ ve $0 \leq \phi \leq \pi$ aralığında $\sin\phi \geq 0$ olduğundan iki yanın karekökünü alabiliriz:

$$\rho\sin\phi = 1.$$

z ekseni üzerindeki noktalar ($\sin\phi = 0$) silindirin üzerinde değildir; bu yüzden silindirde $0 < \phi < \pi$'dir ve denklem $\rho = 1/\sin\phi = \csc\phi$ biçiminde de yazılabilir.
■

8.3 Küresel Kama ve Hacmi

Dik koordinatlarda üç katlı integrali tanımlarken cismi küçük kutulara böldük. Küresel koordinatlarda kutunun karşılığı, üç koordinatın da birer aralıkta değiştiği bölgedir.

Tanım 8.2 (Küresel Kama). $0 \leq a < b$, $\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ ve $0 \leq c < d \leq \pi$ olmak üzere

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \phi \leq d\}$$

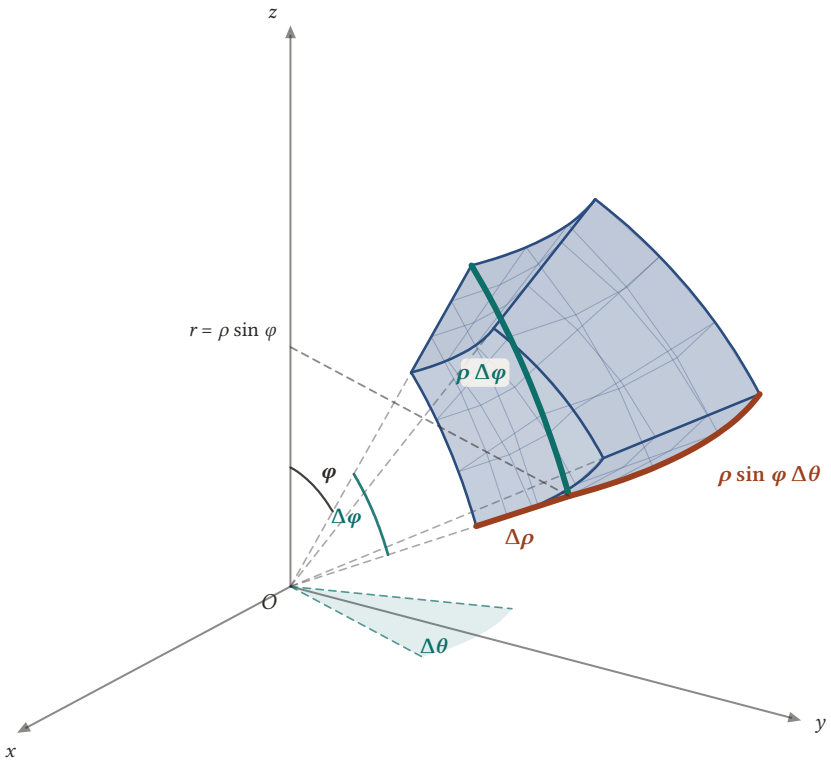
kümesine bir **küresel kama** (spherical wedge) denir.

Yani küresel kama, $\rho = a$ ve $\rho = b$ küreleri, $\theta = \alpha$ ve $\theta = \beta$ yarı düzlemleri ve $\phi = c$ ve $\phi = d$ yarı konileriyle sınırlanan bölgedir. Örneğin $a = 0$, $b = R$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, $c = 0$, $d = \pi$ seçilirse R yarıçaplı top elde edilir.
İnce bir kamayı yaklaşık olarak bir kutu gibi düşünebiliriz. ρ yönündeki kenarı $\Delta\rho$'dur. ϕ yönündeki kenar, ρ yarıçaplı bir çemberin $\Delta\phi$ açılık yayıdır ve uzunluğu $\rho\,\Delta\phi$'dir. θ yönündeki kenar ise z eksenine uzaklığı $r = \rho\sin\phi$ olan yatay bir çemberin $\Delta\theta$ açılık yayıdır ve uzunluğu $\rho\sin\phi\,\Delta\theta$'dır. Bu üç kenar karşılıklı dik olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\Delta V \approx \Delta\rho \cdot \rho\,\Delta\phi \cdot \rho \sin\phi\,\Delta\theta = \rho^2 \sin\phi\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

beklenir.



Şekil 8.4: İnce bir küresel kama yaklaşık bir kutudur. Kenarları: ρ yönünde $\Delta\rho$; ρ yarıçaplı çemberin $\Delta\varphi$ açılık yayı $\rho\,\Delta\varphi$; z eksenine uzaklığı $r = \rho \sin\varphi$ olan yatay çemberin $\Delta\theta$ açılık yayı $\rho \sin\varphi\,\Delta\theta$. Bu yüzden hacmi yaklaşık $\rho^2 \sin\varphi\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\varphi$'dir.

Aşağıdaki sonuç bu yaklaşımın aslında kamanın içinden uygun seçilmiş bir noktada tam eşitlik olduğunu söyler. İspatta önceki bölümün silindirik koordinatlar formülünü (Teorem 7.1) kullanacağız.

Lemma 8.1 (Küresel Kamanın Hacmi). *$0 \le \rho_1 < \rho_2$, $\theta_1 < \theta_2 \le \theta_1 + 2\pi$ ve $0 \le \phi_1 < \phi_2 \le \pi$ olsun. $\rho_1 \le \rho \le \rho_2$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, $\phi_1 \le \phi \le \phi_2$ küresel kamasının hacmi*

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}\,(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)\,(\theta_2 - \theta_1) \tag{3}$$

olur. Ayrıca $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ve $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ olmak üzere $\rho_1 < \bar\rho < \rho_2$ ve $\phi_1 < \bar\phi < \phi_2$ koşullarını sağlayan öyle $\bar\rho$ ve $\bar\phi$ sayıları vardır ki

$$\Delta V = \bar\rho^{\,2} \sin\bar\phi\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi \tag{4}$$

olur.

İspat.
1. adım: koniyle kesilmiş top dilimi. *$a > 0$ ve $0 < \gamma \le \pi$ için*

$$K(a,\gamma) = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \le \rho \le a,\, \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\, 0 \le \phi \le \gamma\}$$

bölgesinin hacminin

$$V(a,\gamma) = \frac{a^3}{3}\,(1 - \cos\gamma)\,(\theta_2 - \theta_1)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğunu gösterelim. Üç durum vardır.
$0 < \gamma < \pi/2$ durumu. *Silindirik koordinatları* (r, θ, z) *olan ve orijinden farklı bir nokta için* $r = \rho \sin\phi$ *ve* $z = \rho\cos\phi$*'dir. Buradan*

$$z - r\cot\gamma = \frac{\rho\,(\cos\phi\sin\gamma - \sin\phi\cos\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{\rho\sin(\gamma-\phi)}{\sin\gamma}$$

bulunur. $\gamma - \phi$ *farkı* $(-\pi, \pi/2)$ *aralığında olduğundan* $\sin(\gamma-\phi) \geq 0$ *olması* $\phi \leq \gamma$ *olmasına denktir. Yani* $\phi \leq \gamma$ *koşulu* $z \geq r\cot\gamma$ *demektir.* $\rho \leq a$ *koşulu da* $r^2 + z^2 \leq a^2$ *demektir.* $r\cot\gamma \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$ *aralığının boş olmaması için* $r^2\cot^2\gamma \leq a^2 - r^2$*, yani* $r^2(1 + \cot^2\gamma) \leq a^2$ *olmalıdır.* $1 + \cot^2\gamma = 1/\sin^2\gamma$ *olduğundan bu,* $r \leq a\sin\gamma$ *demektir. O hâlde silindirik koordinatlarda*

$$K(a,\gamma) = \left\{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\, 0 \leq r \leq a\sin\gamma,\, r\cot\gamma \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}\right\}$$

olur. Teorem 7.1 ile

$$\begin{aligned} V(a,\gamma) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{a\sin\gamma}\int_{r\cot\gamma}^{\sqrt{a^2-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\ &= (\theta_2 - \theta_1)\int_0^{a\sin\gamma}\left(r\sqrt{a^2-r^2} - r^2\cot\gamma\right)dr \\ &= (\theta_2 - \theta_1)\left[-\frac{(a^2-r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^3\cot\gamma}{3}\right]_0^{a\sin\gamma} \end{aligned}$$

bulunur. Üst sınırda $a^2 - a^2\sin^2\gamma = a^2\cos^2\gamma$ *ve* $\cos\gamma > 0$ *olduğundan* $(a^2-r^2)^{3/2} = a^3\cos^3\gamma$*'dır. Ayrıca* $\sin^3\gamma\cot\gamma = \sin^2\gamma\cos\gamma$*'dır. Böylece*

$$\begin{aligned} V(a,\gamma) &= (\theta_2 - \theta_1)\,\frac{a^3}{3}(1 - \cos^3\gamma - \sin^2\gamma\cos\gamma) \\ &= (\theta_2 - \theta_1)\,\frac{a^3}{3}\,(1 - \cos\gamma) \end{aligned}$$

olur; son adımda

$$\cos^3\gamma + \sin^2\gamma\cos\gamma = \cos\gamma\,(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) = \cos\gamma$$

eşitliği kullanıldı.
$\gamma = \pi/2$ durumu. *Bu kez bölge* $0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - r^2}$ *ile verilir ve*

$$V\left(a, \frac{\pi}{2}\right) = (\theta_2 - \theta_1)\int_0^a r\sqrt{a^2-r^2}\,dr = (\theta_2 - \theta_1)\,\frac{a^3}{3}$$

bulunur. Bu, formülün $\cos(\pi/2) = 0$ *için verdiği değerdir.*
$\pi/2 < \gamma \leq \pi$ durumu. $K(a,\gamma)$ *bölgesi,* $K(a,\pi/2)$ *ile*

$$L = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \leq \rho \leq a,\, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\, \pi/2 \leq \phi \leq \gamma\}$$

bölgesinin birleşimidir ve ikisi yalnız xy*-düzleminin bir parçasında, yani hacmi sıfır olan bir kümede örtüşür.* $z \mapsto -z$ *yansıması* ϕ *açısını* $\pi - \phi$ *açısına götürür. Bu yansıma* L*'yi* $\pi - \gamma \leq \phi \leq \pi/2$ *ile verilen* M *bölgesine, yani* $K(a,\pi/2)$*'den* $K(a,\pi-\gamma)$ *çıkarılınca kalan parçaya götürür (*$\gamma = \pi$ *ise* $K(a,0)$ *bir doğru parçasıdır ve hacmi sıfırdır).*
L *ile* M*'nin hacimleri eşittir. Gerçekten,* $\gamma < \pi$ *ise ilk durumdaki hesapta* γ *yerine* $\pi - \gamma$ *alınınca* $\phi \geq \pi - \gamma$ *koşulunun* $z \leq r\cot(\pi - \gamma)$ *demek olduğu görülür. Bu yüzden* M*, silindirik koordinatlarda* $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, $0 \leq r \leq a$, $0 \leq z \leq h(r)$ *ile verilir; burada* $h(r)$*,* $\sqrt{a^2 - r^2}$ *ile* $r\cot(\pi-\gamma)$ *sayılarının küçüğüdür (*$\gamma = \pi$ *ise* $h(r) = \sqrt{a^2 - r^2}$*). Yansıma yalnız* z*'nin işaretini değiştirdiğinden* L *de aynı* θ *ve* r *aralıklarıyla* $-h(r) \leq z \leq 0$ *biçiminde yazılır. Teorem 7.1 ile iki bölgenin hacmi de*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^a h(r)\, r\, dr\, d\theta$$

olur. $0 \le \pi - \gamma < \pi/2$ *olduğundan önceki iki durumdan*

$$\begin{aligned} V(a,\gamma) &= V(a,\frac{\pi}{2}) + \Big[V(a,\frac{\pi}{2}) - V(a,\pi-\gamma)\Big] \\ &= (\theta_2-\theta_1)\,\frac{a^3}{3}[2-(1-\cos(\pi-\gamma))] \\ &= (\theta_2-\theta_1)\,\frac{a^3}{3}\,(1-\cos\gamma) \end{aligned}$$

elde edilir; burada $\cos(\pi-\gamma) = -\cos\gamma$ *kullanıldı.*
2. adım: kamanın hacmi. $\rho \le a$ *ve* $\phi_1 \le \phi \le \phi_2$ *koşullarıyla verilen bölge,* $K(a,\phi_2)$*'den* $K(a,\phi_1)$ *çıkarılınca kalan bölgedir (*$\phi_1 = 0$ *ise çıkarılan küme bir doğru parçasıdır ve hacmi sıfırdır). Hacmi*

$$V(a,\phi_2) - V(a,\phi_1) = \frac{a^3}{3}\,(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)\,(\theta_2-\theta_1)$$

olur. Kama da $a = \rho_2$ *için bu bölgeden* $a = \rho_1$ *için olanın çıkarılmasıyla elde edilir (*$\rho_1 = 0$ *ise hiçbir şey çıkarılmaz). Farkı almak (3)'ü verir.*
3. adım: ortalama değer. *Ortalama Değer Teoremi'ni (bkz. Analiz 2)* $t \mapsto t^3$ *fonksiyonuna* $[\rho_1,\rho_2]$ *aralığında uygularsak bir* $\bar\rho \in (\rho_1,\rho_2)$ *için*

$$\rho_2^3 - \rho_1^3 = 3\bar\rho^{\,2}\,(\rho_2-\rho_1)$$

bulunur. Aynı teoremi $t \mapsto -\cos t$ *fonksiyonuna* $[\phi_1,\phi_2]$ *aralığında uygularsak bir* $\bar\phi \in (\phi_1,\phi_2)$ *için*

$$\cos\phi_1 - \cos\phi_2 = \sin\bar\phi\,(\phi_2-\phi_1)$$

bulunur. Bu iki eşitlik (3)'te yerine yazılınca (4) elde edilir.
■

8.4 Küresel Koordinatlarda Üç Katlı İntegral

Bir cismi küçük küresel kamalara bölüp her parçanın hacmi için (4)'ü kullanarak üç katlı integralin küresel koordinatlardaki biçimine ulaşırız.

Teorem 8.1 (Küresel Koordinatlarda Üç Katlı İntegral). *(i)* E*,* $a \le \rho \le b$*,* $\alpha \le \theta \le \beta$*,* $c \le \phi \le d$ *küresel kaması ve* f*,* E *üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta,\, \rho\sin\phi\sin\theta,\, \rho\cos\phi) \cdot \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi \tag{5}$$

olur.
(ii) Daha genel olarak $\alpha < \beta \le \alpha + 2\pi$ *ve* $0 \le c < d \le \pi$ *olsun;* g_1 *ve* g_2*,* $[\alpha,\beta]\times[c,d]$ *üzerinde sürekli ve* $0 \le g_1 \le g_2$ *olan fonksiyonlar olsun.*

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\, c \le \phi \le d,\, g_1(\theta,\phi) \le \rho \le g_2(\theta,\phi)\}$$

ve f*,* E *üzerinde sürekli ise (5) formülü,* ρ*'nun sınırları* $g_1(\theta,\phi)$ *ve* $g_2(\theta,\phi)$ *alınarak geçerlidir.*

İspat.
(i) $\rho\theta\phi$*-uzayında* $B = [a,b]\times[\alpha,\beta]\times[c,d]$ *kutusunu ve*

$$F(\rho,\theta,\phi) = f(\rho\sin\phi\cos\theta,\, \rho\sin\phi\sin\theta,\, \rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi$$

 CC BY-NC-SA 4.0

fonksiyonunu alalım. F, B üzerinde süreklidir. Bu yüzden B üzerindeki üç katlı integrali vardır ve Fubini Teoremi'ne (Teorem 6.1) göre (5)'in sağ yanındaki ardışık integrale eşittir. O hâlde $\iiint_E f\,dV = \iiint_B F\,dV$ olduğunu göstermek yeter.

Bölme. *$[a,b]$, $[\alpha,\beta]$, $[c,d]$ aralıklarını sırasıyla l, m, n eş parçaya bölelim. Bölüm noktaları ρ_i, θ_j, ϕ_k, parça uzunlukları $\Delta\rho$, $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ olsun. B küçük B_{ijk} kutularına, E de $\rho = \rho_i$ küreleri, $\theta = \theta_j$ yarı düzlemleri ve $\phi = \phi_k$ yarı konileriyle küçük E_{ijk} kamalarına ayrılır. Kamalar yalnız sınır yüzeyleri boyunca, yani hacmi sıfır olan kümelerde örtüşür. Üç katlı integral bölgeye göre toplamsal olduğundan (bkz. Önerme 6.1, (iii))*

$$\iiint_E f\,dV = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\iiint_{E_{ijk}} f\,dV$$

olur.

Örnek noktalar. *Lemma 8.1 uyarınca $V(E_{ijk}) = \bar{\rho}_i^2 \sin\bar{\phi}_k\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$ olacak biçimde $\bar{\rho}_i \in (\rho_{i-1}, \rho_i)$ ve $\bar{\phi}_k \in (\phi_{k-1}, \phi_k)$ sayıları vardır. Lemmanın ispatında $\bar{\rho}_i$ yalnız ρ aralığından, $\bar{\phi}_k$ yalnız ϕ aralığından bulunduğu için bu sayılar j'ye bağlı değildir. $\bar{\theta}_j$, $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ aralığının orta noktası olsun. $Q_{ijk} = (\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_j, \bar{\phi}_k)$ noktası B_{ijk} kutusunda, küresel koordinatları bu üç sayı olan P_{ijk} noktası da E_{ijk} kamasındadır. Buna göre*

$$S = \sum_{i,j,k} f(P_{ijk})\,V(E_{ijk}) = \sum_{i,j,k} F(Q_{ijk})\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

toplamı, F'nin B üzerindeki bir Riemann toplamıdır. F sürekli olduğundan $l, m, n \to \infty$ iken $S \to \iiint_B F\,dV$ olur.

Tahmin. *$\varepsilon > 0$ verilsin. E kapalı ve sınırlı, f de E üzerinde sürekli olduğundan f düzgün süreklidir (Heine–Cantor Teoremi, bkz. Analiz 4). Yani öyle bir $\delta > 0$ vardır ki E'nin $|\,P - P'\,| < \delta$ olan her P, P' noktası için $|\,f(P) - f(P')\,| < \varepsilon$ olur. Aynı kamadaki iki noktayı önce bir ışın boyunca (uzunluk en çok $\Delta\rho$), sonra θ sabitken yarıçapı en çok b olan bir çember yayı boyunca (uzunluk en çok $b\,\Delta\phi$), sonra ϕ sabitken yarıçapı en çok b olan yatay bir çember yayı boyunca (uzunluk en çok $b\,\Delta\theta$) birleştirebiliriz. İki nokta arasındaki uzaklık bu yolun uzunluğunu aşmadığından*

$$|\,P - P'\,| \le \Delta\rho + b\,\Delta\phi + b\,\Delta\theta$$

olur ve l, m, n yeterince büyükken bu sayı δ'dan küçüktür. O zaman E_{ijk} üzerinde $f(P_{ijk}) - \varepsilon < f < f(P_{ijk}) + \varepsilon$ olur ve integralin karşılaştırma özelliği (bkz. Önerme 6.1, (ii)) ile

$$\left|\iiint_{E_{ijk}} f\,dV - f(P_{ijk})\,V(E_{ijk})\right| \le \varepsilon\,V(E_{ijk})$$

elde edilir. Bu eşitsizlikleri toplarsak $\left|\iiint_E f\,dV - S\right| \le \varepsilon\,V(E)$ buluruz.

Sonuç. *$l, m, n \to \infty$ iken $S \to \iiint_B F\,dV$ olduğundan son eşitsizlik $\left|\iiint_E f\,dV - \iiint_B F\,dV\right| \le \varepsilon\,V(E)$ verir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan iki integral eşittir.*

■

(ii) için ispatın fikri.

b sayısı g_2'nin en büyük değeri olsun. E bölgesi $0 \le \rho \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, $c \le \phi \le d$ kamasının içindedir. f'yi E'nin dışında 0 diye tanımlayıp (i)'yi bu kamaya uygularsak, sabit (θ, ϕ) için ρ'ya göre iç integralde fonksiyon yalnız $g_1(\theta,\phi) \le \rho \le g_2(\theta,\phi)$ aralığında sıfırdan farklıdır ve (ii)'deki formül çıkar. Ancak sıfırla genişletilen fonksiyon E'nin sınır yüzeylerinde süreksizdir. (i)'deki ispatın bu fonksiyona uyarlanması, sınıra değen küçük kamaların toplam hacminin sıfıra gittiğini göstermeyi gerektirir. Bu adım, genel bölgelerdeki Fubini teoreminde olduğu gibi ileri analizin konusudur.

Yani küresel koordinatlara geçerken üç şey yapılır: f'nin içinde x, y, z yerine (1) yazılır; sınırlar ρ, θ, ϕ cinsinden yazılır; dV yerine

$$dV = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

 CC BY-NC-SA 4.0

konur. Bu ifadeye küresel koordinatlarda **hacim elemanı** denir. $\rho^2 \sin\phi \geq 0$ çarpanı, kutupsal koordinatlardaki (Teorem 3.1) ve silindirik koordinatlardaki (Teorem 7.1) r çarpanının karşılığıdır. Bir sonraki bölümde bu üç çarpanın da birer Jacobi determinantı olduğunu göreceğiz (bkz. Teorem 9.2).
(i)'de F sürekli olduğundan Fubini Teoremi'ne göre altı integrasyon sırası da aynı sonucu verir. (ii)'de ise ρ'nun sınırları θ ve ϕ'ye bağlı olduğundan ρ'ya göre integral en içte alınmalıdır.

Küresel koordinatlarda üç katlı integral dört adımda

1. Cismi çiz; onu sınırlayan küreleri, konileri ve z ekseninden geçen düzlemleri belirle.
2. Sınır yüzeylerini küresel koordinatlarda yaz: $x^2+y^2+z^2=\rho^2$, $z=\rho\cos\phi$ ve $x^2+y^2=\rho^2\sin^2\phi$ kısaltmalarını kullan.
3. Sınırları kur: önce θ'nın ve ϕ'nin aralığını bul; sonra sabit (θ,ϕ) için orijinden çıkan ışının cisme girdiği ve cisimden çıktığı ρ değerlerini bul.
4. f'de (1)'i yerine yaz, dV yerine $\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$ koy ve ardışık integrali hesapla.

Örnek 8.4 (Topun Hacmi). a yarıçaplı topun hacminin $\frac{4}{3}\pi a^3$ olduğunu küresel koordinatlarla gösteriniz.

Çözüm.
Merkezi orijine koyalım. Sınır $\rho=a$ küresidir ve top

$$E=\{(\rho,\theta,\phi)\mid 0\leq\rho\leq a,\,0\leq\theta\leq 2\pi,\,0\leq\phi\leq\pi\}$$

küresel kamasıdır. Hacim $f=1$ fonksiyonunun integrali olduğundan (5) ile

$$V=\iiint_E dV=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

olur. Sınırlar sabit ve integrand ρ^2 ile $\sin\phi$'nin çarpımı olduğundan ardışık integral üç tek katlı integralin çarpımına ayrılır:

$$V=\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{a}\rho^2\,d\rho\right)=2\cdot 2\pi\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

Burada ilk çarpan $[-\cos\phi]_0^{\pi}=1-(-1)=2$'dir.
■

Örnek 8.5 (Birim Topta Bir Üstel İntegral). $B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ birim topu olmak üzere

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
B'nin sınırı bir küre olduğundan küresel koordinatlara geçeriz:

$$B=\{(\rho,\theta,\phi)\mid 0\leq\rho\leq 1,\,0\leq\theta\leq 2\pi,\,0\leq\phi\leq\pi\}.$$

Ayrıca $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ olduğundan $(x^2+y^2+z^2)^{3/2}=(\rho^2)^{3/2}=\rho^3$ olur. (5) ile

$$\begin{aligned}\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dV&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi\\&=\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_0^{1}\rho^2 e^{\rho^3}\,d\rho\right)\end{aligned}$$

bulunur. İlk iki çarpan 2 ve 2π'dir. Üçüncüsünde $u=\rho^3$, $du=3\rho^2\,d\rho$ değişken değiştirmesiyle

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3}\, d\rho = \frac{1}{3}\int_0^1 e^u\, du = \frac{1}{3}\,(e-1)$$

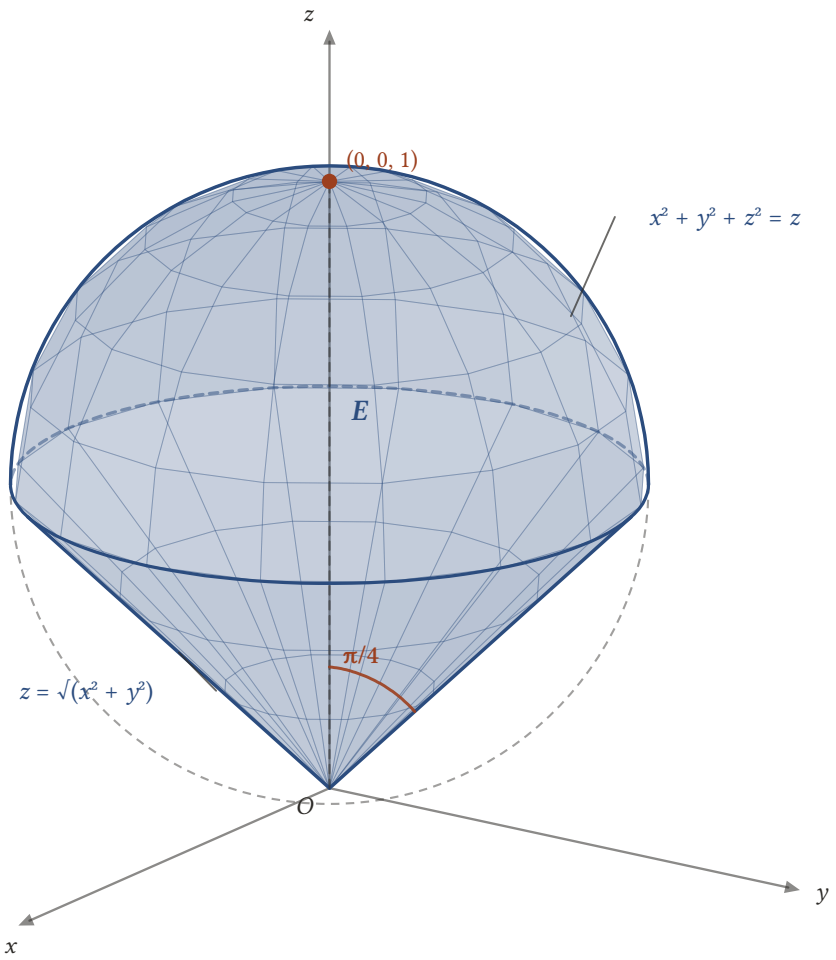
olur. Sonuç

$$\iiint_B e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\, dV = 2\cdot 2\pi \cdot \frac{e-1}{3} = \frac{4\pi}{3}\,(e-1)$$

olarak bulunur. Aynı integral dik koordinatlarda bölümün başındaki ardışık integral biçiminde yazılırdı; integrandın z'ye göre ilkeli bile kolayca bulunamadığından o yoldan elle hesaplamak son derece güç olurdu.
■

Şimdi dört adımlık reçeteyi, sınırlarından biri ρ'ya bağlı olan bir cisme uygulayalım.

Örnek 8.6 (Koni ile Küre Arasındaki Cismin Hacmi). $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisinin üstünde ve $x^2 + y^2 + z^2 = z$ küresinin altında kalan E cisminin hacmini küresel koordinatlarla bulunuz.



Şekil 8.5: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisinin üstünde ve $x^2 + y^2 + z^2 = z$ küresinin altında kalan E cismi. Küre orijinden geçer, merkezi (0, 0, 1/2), yarıçapı 1/2'dir; kesikli çizgi kürenin cisme girmeyen alt kısmıdır. Koni ile z ekseni arasındaki açı $\pi/4$'tür.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

1. adım: cisim. Küre denklemini tam kareye tamamlarsak $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ olur. Küre, merkezi $(0, 0, \frac{1}{2})$, yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan ve orijinden geçen küredir. Cisim, tepesi orijinde olan bir koninin üstüne oturmuş bir küre kapağı gibidir.
2. adım: yüzeylerin denklemleri. Kürenin denklemi $\rho^2 = \rho \cos\phi$ olur. $\rho = 0$ yalnız orijini verdiğinden ve orijin de aşağıdaki denklemi sağladığından küre

$$\rho = \cos\phi$$

denklemiyle verilir. Koninin denklemi ise

$$\rho\cos\phi = \sqrt{\rho^2 \sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta} = \rho\sin\phi$$

olur. Buradan $\sin\phi = \cos\phi$, yani $\phi = \pi/4$ bulunur (Önerme 8.2 ile de aynı sonuç).
3. adım: sınırlar. Koninin üstündeki noktalar z eksenine daha yakındır, yani $0 \le \phi \le \pi/4$'tür. Cisim z ekseni etrafında tam bir dönüş yaptığından $0 \le \theta \le 2\pi$'dir. Sabit bir (θ, ϕ) için orijinden çıkan ışın cisme orijinde girer ve küreden $\rho = \cos\phi$'de çıkar. Böylece

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \phi \le \pi/4, 0 \le \rho \le \cos\phi\}$$

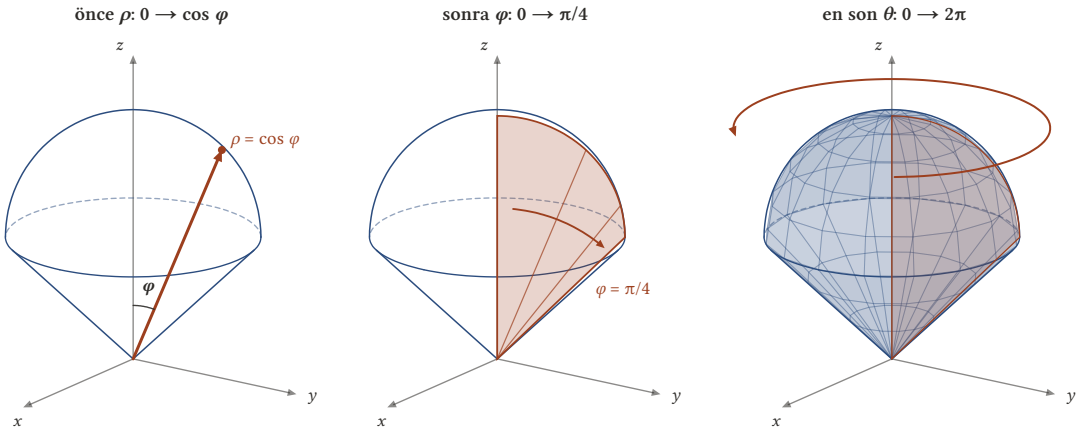
olur.
4. adım: hesap. ρ'nun üst sınırı ϕ'ye bağlı olduğundan önce ρ'ya, sonra ϕ'ye, en son θ'ya göre integral alırız:

$$\begin{aligned} V(E) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} \sin\phi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\phi} d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/4} \sin\phi\cos^3\phi \, d\phi = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^{\pi/4}. \end{aligned}$$

$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ olduğundan $\cos^4(\pi/4) = 4/16 = 1/4$'tür. Buna göre

$$V(E) = \frac{2\pi}{3}\left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right) = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{3}{16} = \frac{\pi}{8}$$

bulunur. Aşağıdaki şekil, bu ardışık integralin cismi nasıl taradığını gösterir.



Şekil 8.6: Ardışık integralin cismi taraması. Önce φ ve θ sabitken ρ, 0'dan küre üzerindeki $\cos\varphi$ değerine gider ve bir doğru parçası çizer. Sonra θ sabitken φ, 0'dan $\pi/4$'e gider ve bu parçalar bir yarı düzlem dilimini doldurur. En son θ, 0'dan 2π'ye gider ve dilim z ekseni etrafında dönerek cismin tamamını tarar.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

⚠ Sık yapılan hatalar

- $\rho^2 \sin\phi$ çarpanını unutmak: dV, $d\rho\, d\theta\, d\phi$ değildir.
- ϕ'yi 0'dan 2π'ye almak: ϕ yalnız 0 ile π arasında değişir; tam bir top için $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi$'dir.
- Sınırı başka bir değişkene bağlı olan ρ'yu dış integrale koymak.

8.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar koordinat dönüşümlerinden başlayıp cisimleri tarif etmeye ve küresel koordinatlarla integral hesabına doğru ilerler.

Alıştırma 8.1 (Küresel Koordinatlardan Dik Koordinatlara). Küresel koordinatları $(6, 0, 5\pi/6)$ olan noktanın dik koordinatlarını bulunuz ve noktanın uzaydaki yerini tarif ediniz.

Çözüm.
$\rho = 6$, $\theta = 0$, $\phi = 5\pi/6$'dır. $\sin(5\pi/6) = 1/2$ ve $\cos(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ olduğundan (1) ile

$$x = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 0 = 3, \qquad y = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 0 = 0,$$
$$z = 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$$

bulunur. Nokta $(3, 0, -3\sqrt{3})$'tür. $\theta = 0$ olduğundan nokta xz-düzleminin $x \ge 0$ yarısındadır. $\phi = 5\pi/6 > \pi/2$ olduğundan xy-düzleminin altındadır ve negatif z ekseniyle $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$ açı yapar. Kontrol: $9 + 0 + 27 = 36 = 6^2 = \rho^2$.
■

Alıştırma 8.2 (Dik Koordinatlardan Küresel Koordinatlara). Dik koordinatları $(1, -\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
(2)'den

$$\rho = \sqrt{1 + 3 + 12} = 4, \qquad \cos\phi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

olur ve $0 \le \phi \le \pi$ olduğundan $\phi = \pi/6$'dır. Buna göre $\rho \sin\phi = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$'dir ve (1)'den

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho \sin\phi} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\rho \sin\phi} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. Kosinüsü pozitif, sinüsü negatif olan açı dördüncü bölgededir: $\theta = 5\pi/3$. Noktanın küresel koordinatları $(4, 5\pi/3, \pi/6)$'dır. (θ yerine $-\pi/3$ de yazılabilir.)
■

Alıştırma 8.3 (İkinci Dereceden Bir Denklemin Yüzeyi). $\rho^2 - 3\rho + 2 = 0$ denklemiyle verilen yüzeyi sözle tarif ediniz.

Çözüm.
Denklem $(\rho - 1)(\rho - 2) = 0$ biçiminde çarpanlarına ayrılır. O hâlde bir nokta yüzeydedir ancak ve ancak $\rho = 1$ ya da $\rho = 2$ ise. Önerme 8.2 uyarınca yüzey, merkezleri orijinde ve yarıçapları 1 ile 2

 CC BY-NC-SA 4.0

olan iki eş merkezli küreden oluşur. Dik koordinatlarda bunlar $x^2+y^2+z^2=1$ ve $x^2+y^2+z^2=4$ küreleridir.
■

Alıştırma 8.4 (Paraboloidin Küresel Denklemi). $z=x^2+y^2$ paraboloidinin denklemini küresel koordinatlarda yazınız.

Çözüm.
$z=\rho\cos\phi$ ve $x^2+y^2=\rho^2\sin^2\phi$ yazılınca denklem

$$\rho\cos\phi=\rho^2\sin^2\phi$$

olur. $\rho=0$ yalnız orijini verir. $\rho\neq 0$ ise iki yanı ρ'ya bölerek

$$\rho\sin^2\phi=\cos\phi$$

buluruz. Orijin de bu denklemi $\phi=\pi/2$, $\rho=0$ ile sağladığından paraboloidin tamamı bu denklemle verilir. $\phi=0$ denklemi sağlamaz ($0=1$ olurdu); z ekseninin orijin dışındaki noktaları gerçekten paraboloidin üzerinde değildir. $0<\phi\leq\pi/2$ için denklem $\rho=\cos\phi/\sin^2\phi=\cot\phi\csc\phi$ biçiminde de yazılabilir. ($\phi>\pi/2$ için sağ yan negatif, sol yan ise negatif olmayan bir sayı olurdu; bu, paraboloidin xy-düzleminin altına inmediğini söyler.)
■

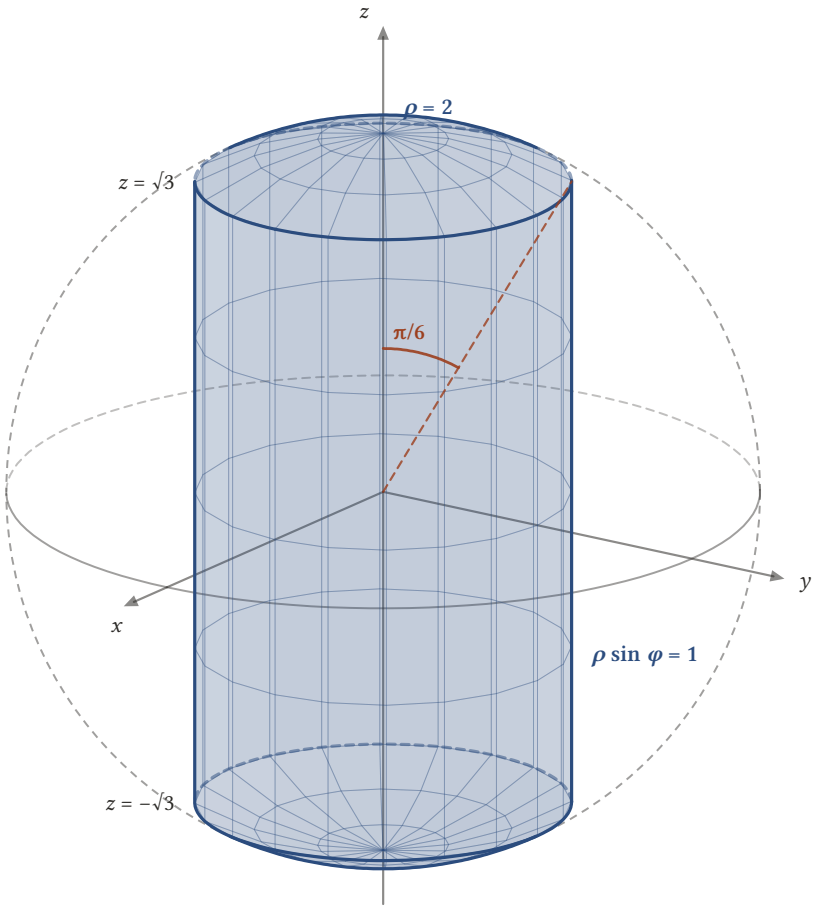
Alıştırma 8.5 (Eşitsizliklerle Verilen Bir Cisim). $\rho\leq 2$, $\rho\leq\csc\phi$ eşitsizlikleriyle verilen cismi tarif ediniz ve çiziniz.

Çözüm.
$\rho\leq 2$ koşulu, merkezi orijinde olan 2 yarıçaplı topu verir. $0<\phi<\pi$ için $\rho\leq\csc\phi$ koşulu $\rho\sin\phi\leq 1$, yani $r=\sqrt{x^2+y^2}\leq 1$ demektir; z ekseninin noktaları da ($r=0$) bu koşulu sağlar. Bu, z ekseni etrafındaki 1 yarıçaplı dolu silindirdir. Cisim, topun silindirin içinde kalan kısmıdır.
Silindir yüzeyi $r=1$ ile küre $\rho=2$, $z^2=4-1=3$ olan yerde, yani $z=\pm\sqrt{3}$ çemberlerinde kesişir. Bu çemberlerde $\sin\phi=1/2$ olduğundan $\phi=\pi/6$ ve $\phi=5\pi/6$'dır. Buna göre

- $0\leq\phi\leq\pi/6$ ya da $5\pi/6\leq\phi\leq\pi$ iken $\csc\phi\geq 2$ olduğundan sınır $\rho=2$ küresidir (üst ve alt kapaklar),
- $\pi/6\leq\phi\leq 5\pi/6$ iken $\csc\phi\leq 2$ olduğundan sınır $\rho=\csc\phi$ silindiridir (yan yüzey).

Cisim, $z=-\sqrt{3}$ ile $z=\sqrt{3}$ arasında 1 yarıçaplı bir silindir ve üstüne ve altına eklenmiş birer küre kapağıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.7: $\rho \le 2$, $\rho \le \csc\varphi$ cismi: 2 yarıçaplı topun (kesikli) $x^2 + y^2 \le 1$ silindiri içinde kalan kısmı. Yan yüzey $\rho \sin\varphi = 1$ silindiri, alt ve üst kapaklar $\rho = 2$ küresinin parçalarıdır; ikisi $z = \pm\sqrt{3}$ çemberlerinde, yani $\varphi = \pi/6$ ve $\varphi = 5\pi/6$'da birleşir.

■

Alıştırma 8.6 (Küre İçinde ve Koni Dışında Kalan Cisim). $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ küresinin içinde ve $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin dışında kalan cismi küresel koordinatlarda eşitsizliklerle tarif ediniz.

Çözüm.
Kürenin içi $x^2 + y^2 + z^2 \le 4z$, yani $\rho^2 \le 4\rho\cos\phi$ demektir. $\rho > 0$ için bu $\rho \le 4\cos\phi$ olur; orijin de bu koşulu sağlar. Küre $\rho = 4\cos\phi$'dir: merkezi $(0, 0, 2)$, yarıçapı 2 olan ve orijinden geçen küre. $\rho \ge 0$ olduğundan $\cos\phi \ge 0$, yani $\phi \le \pi/2$ olmalıdır.
Koni $\phi = \pi/4$ yarı konisidir. Koninin dışı $z \le \sqrt{x^2 + y^2}$, yani $\rho\cos\phi \le \rho\sin\phi$ demektir; $[0, \pi]$ aralığında bu $\phi \ge \pi/4$ koşuluna denktir. Cisim z ekseni etrafında tam dönüş yaptığından

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ \pi/4 \le \phi \le \pi/2,\ 0 \le \rho \le 4\cos\phi\}$$

bulunur.
■

Alıştırma 8.7 (İntegralden Cisme).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sec\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

integraliyle hacmi verilen cismi tarif ediniz ve integrali hesaplayınız.

Çözüm.
İntegrand $\rho^2 \sin\phi$ olduğundan integral bir cismin hacmidir. $\rho \le \sec\phi$ koşulu $\rho\cos\phi \le 1$, yani $z \le 1$ demektir. $0 \le \phi \le \pi/4$ koşulu ise noktanın $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisinin üstünde olduğunu söyler. θ tam dönüş yaptığından cisim, tepesi orijinde, ekseni z ekseni, yüksekliği 1 ve tabanı $z=1$ düzlemindeki 1 yarıçaplı daire olan dik dairesel konidir.
Hesap için önce

$$\int_0^{\sec\phi} \rho^2 \, d\rho = \frac{\sec^3\phi}{3}$$

buluruz. Buna göre integral

$$2\pi \cdot \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi$$

olur. $u = \cos\phi$, $du = -\sin\phi\, d\phi$ ile $\int \sin\phi\cos^{-3}\phi\, d\phi = \frac{1}{2\cos^2\phi} + C$ olduğundan

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi = \left[\frac{1}{2\cos^2\phi}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ve sonuç $2\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$'tür. Bu, koninin hacim formülü $\frac{1}{3}\pi r^2 h$'de $r = h = 1$ alınarak bulunan değerle aynıdır.
■

Alıştırma 8.8 (Koni ile Küre Arasında Bir İntegral). E, $\phi = \pi/3$ konisinin üstünde ve $\rho = 1$ küresinin altında kalan cisim olmak üzere $\iiint_E y^2 z^2 \, dV$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Cisim

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \phi \le \pi/3,\ 0 \le \rho \le 1\}$$

küresel kamasıdır. (1) ile

$$y^2 z^2 = \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta \cdot \rho^2\cos^2\phi = \rho^4 \sin^2\phi\cos^2\phi\sin^2\theta$$

olur. $\rho^2\sin\phi$ ile çarpınca integrand $\rho^6 \sin^3\phi\cos^2\phi\sin^2\theta$ olur ve sınırlar sabit olduğundan integral üç çarpana ayrılır:

$$\iiint_E y^2 z^2 \, dV = \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/3} \sin^3\phi\cos^2\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^1 \rho^6\, d\rho\right).$$

Birinci çarpan $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ ile π'dir. Üçüncü çarpan $\frac{1}{7}$'dir. İkinci çarpanda $u = \cos\phi$, $du = -\sin\phi\, d\phi$ alalım; $\sin^2\phi = 1-u^2$ olur ve ϕ, 0'dan $\pi/3$'e giderken u, 1'den $\frac{1}{2}$'ye gider:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \sin^3\phi\cos^2\phi\, d\phi &= \int_{1/2}^1 (1-u^2)\,u^2\, du = \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right]_{1/2}^1 \\ &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{24}-\frac{1}{160}\right) = \frac{64}{480} - \frac{17}{480} = \frac{47}{480}.\end{aligned}$$

Sonuç

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iiint_E y^2 z^2 \, dV = \pi \cdot \frac{47}{480} \cdot \frac{1}{7} = \frac{47\pi}{3360}$$

olarak bulunur.
■

Alıştırma 8.9 (Koni ile Küre Arasındaki Cismin Ağırlık Merkezi). Koni ile küre arasındaki cismin hacmini bulduğumuz örnekteki (Örnek 8.6) E cisminin yoğunluğu sabit olsun. Cismin kütle merkezini (ağırlık merkezini) bulunuz.

Çözüm.
Yoğunluk sabit olduğundan kütle merkezi ağırlık merkezidir ve koordinatları $\bar{x} = \frac{1}{V}\iiint_E x\,dV$, $\bar{y} = \frac{1}{V}\iiint_E y\,dV$, $\bar{z} = \frac{1}{V}\iiint_E z\,dV$ ile verilir (bkz. Üç Katlı İntegraller). Örnekte $V = \pi/8$ bulunmuştu.
$x = \rho\sin\phi\cos\theta$ ve $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$ olduğundan $\iiint_E x\,dV = 0$, yani $\bar{x} = 0$'dır. Aynı nedenle ($\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = 0$) $\bar{y} = 0$'dır. Bu, cismin z ekseni etrafında simetrik olmasının sonucudur.
$z = \rho\cos\phi$ ile

$$\begin{aligned}\iiint_E z\,dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\phi} \rho\cos\phi\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi/4}\cos\phi\sin\phi\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\cos\phi} d\phi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/4}\cos^5\phi\sin\phi\,d\phi \\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{\cos^6\phi}{6}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{7\pi}{96}\end{aligned}$$

bulunur; burada $\cos^6(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)^6 = 1/8$ kullanıldı. Buna göre

$$\bar{z} = \frac{7\pi/96}{\pi/8} = \frac{7\cdot 8}{96} = \frac{7}{12}$$

ve ağırlık merkezi $(0, 0, 7/12)$'dir. Cisim $0 \le z \le 1$ arasında uzandığından ve geniş kısmı üstte olduğundan $\bar{z}$'nin $1/2$'den büyük çıkması beklenen bir sonuçtur.
■

Alıştırma 8.10 (Küreden Kesilen Dilim). a yarıçaplı bir küreden, bir çap boyunca kesişen ve aralarındaki açı $\pi/6$ olan iki düzlemle kesilen küçük dilimin hacmini bulunuz. Silindirik ya da küresel koordinatlardan uygun olanı kullanınız.

Çözüm.
Kürenin merkezini orijine, ortak çapı da z eksenine yerleştirelim. z ekseninden geçen bir düzlem iki yarı düzlemden oluşur: $\theta = c$ ve $\theta = c + \pi$. Düzlemlerden birini $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ yarı düzlemleri, diğerini $\theta = \pi/6$ ve $\theta = 7\pi/6$ yarı düzlemleri olarak seçebiliriz. Bu iki düzlem topu dört dilime ayırır: ikisinin açısı $\pi/6$, ikisininki $5\pi/6$'dır. Küçük dilim

$$\{(\rho,\theta,\phi) \mid 0 \le \rho \le a,\, 0 \le \theta \le \pi/6,\, 0 \le \phi \le \pi\}$$

küresel kamasıdır. Sınırları küre ve yarı düzlemler olduğundan küresel koordinatlar en uygunudur:

$$V = \int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = \frac{\pi}{6}\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{9}.$$

Kontrol olarak bu, top hacminin $\frac{\pi/6}{2\pi} = \frac{1}{12}$'sidir: $\frac{1}{12}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi a^3}{9}$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 8.11 (Ardışık İntegrali Küresel Koordinatlara Çevirme). Küresel koordinatlara geçerek hesaplayınız:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy \, dz \, dy \, dx.$$

Çözüm.
Önce bölgeyi okuyalım. (x, y), $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$ çeyrek dairesinde değişir. z ise alttan $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisiyle, üstten $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ küresinin üst yarısıyla sınırlıdır. Koni ile küre $2z^2 = 2$, yani $z = 1$, $x^2 + y^2 = 1$ çemberinde kesişir; bu da çeyrek dairenin sınırıdır.
Küresel koordinatlarda koninin üstü $0 \leq \phi \leq \pi/4$, kürenin içi $\rho \leq \sqrt{2}$, birinci bölge de $0 \leq \theta \leq \pi/2$ demektir. Bu koşullar $r = \rho \sin\phi \leq \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ koşulunu da kendiliğinden sağlar. Bölge

$$E = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leq \rho \leq \sqrt{2},\, 0 \leq \theta \leq \pi/2,\, 0 \leq \phi \leq \pi/4 \right\}$$

küresel kamasıdır. $xy = \rho^2 \sin^2\phi \cos\theta \sin\theta$ olduğundan integrand $\rho^4 \sin^3\phi \cos\theta \sin\theta$ olur ve integral çarpanlarına ayrılır:

$$\left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/4} \sin^3\phi \, d\phi \right) \left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho^4 \, d\rho \right).$$

Birinci çarpan $\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$'dir. Üçüncü çarpan $\frac{(\sqrt{2})^5}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$'tir. İkinci çarpanda $\sin^3\phi = (1 - \cos^2\phi)\sin\phi$ yazarsak

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \sin^3\phi \, d\phi &= \left[-\cos\phi + \frac{\cos^3\phi}{3} \right]_0^{\pi/4} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12} = \frac{8 - 5\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

bulunur; burada $\cos^3(\pi/4) = (\sqrt{2}/2)^3 = \sqrt{2}/4$ kullanıldı. Sonuç

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{8 - 5\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{5} = \frac{(8 - 5\sqrt{2})\, 4\sqrt{2}}{120} = \frac{32\sqrt{2} - 40}{120} = \frac{4\sqrt{2} - 5}{15}$$

olarak bulunur ($\approx 0{,}0438$).
■

Alıştırma 8.12 (Bütün Uzay Üzerinde Bir İntegral). Bütün uzay üzerindeki genelleştirilmiş üç katlı integrali, merkezi orijinde ve yarıçapı R olan top üzerindeki integralin $R \to \infty$ iken limiti olarak tanımlayalım. Bu anlamda

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)} \, dV = 2\pi$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
B_R, R yarıçaplı top olsun. $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \rho$ ve $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ olduğundan

$$\iiint_{B_R} \rho\, e^{-\rho^2} \, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R} \rho\, e^{-\rho^2} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi = 2 \cdot 2\pi \int_0^R \rho^3 e^{-\rho^2} \, d\rho$$

olur. Son integralde $u = \rho^2$, $du = 2\rho \, d\rho$ alalım:

$$\int_0^R \rho^3 e^{-\rho^2} \, d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{R^2} u\, e^{-u} \, du.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Kısmi integrasyonla $\int u\,e^{-u}\,du = -(u+1)e^{-u} + C$ olduğundan

$$\int_0^R \rho^3 e^{-\rho^2}\,d\rho = \frac{1}{2}\Big[1 - (R^2+1)\,e^{-R^2}\Big]$$

bulunur. $R \to \infty$ iken üstel fonksiyon her polinomdan hızlı büyüdüğü için $(R^2+1)e^{-R^2} \to 0$'dır (genelleştirilmiş integraller için bkz. Analiz 3). Bu yüzden integral $\frac{1}{2}$'ye yakınsar ve

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dV = \lim_{R\to\infty} 4\pi \cdot \frac{1}{2}\Big[1-(R^2+1)e^{-R^2}\Big] = 2\pi$$

elde edilir.

■

Kutupsal, silindirik ve küresel koordinatlara geçerken her seferinde alan ya da hacim elemanına bir çarpan eklendi: r, r ve $\rho^2 \sin\phi$. Bir sonraki bölüm Çok Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme, bu çarpanların ortak kaynağını gösterir: hepsi, koordinat dönüşümünün Jacobi determinantının mutlak değeridir ve aynı formül çok daha genel dönüşümlerde de geçerlidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

9. Çok Katlı İntegrallerde Değişken Değiştirme

Tek değişkenli integralde değişken değiştirme, karmaşık görünen bir integrali daha kolay bir integrale çevirmenin en güçlü aracıdır. $x = g(u)$ yazıp $a = g(c)$, $b = g(d)$ alırsak (bkz. Analiz 2)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\,\big(\,g(u)\,\big)\,g'(u)\,du = \int_c^d f\,\big(\,x(u)\,\big)\,\frac{dx}{du}\,du \tag{1}$$

olur. Buradaki dx/du çarpanı, u ekseninde kısa bir aralığın x ekseninde kaç katına çıktığını ölçer.
İki katlı integrallerde bir değişken değiştirmeyi aslında kullandık: kutupsal koordinatlar. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ yazınca (Teorem 3.1)

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

olur; burada S, $r\theta$-düzleminde R'ye karşılık gelen bölgedir. Bu bölümde aynı fikri genel dönüşümlere taşıyacağız. Asıl soru şudur: kutupsal formüldeki fazladan r çarpanı nereden gelir ve başka bir dönüşümde onun yerini ne alır? Cevap, dx/du türevinin iki ve üç boyuttaki karşılığı olan Jacobi determinantıdır.

9.1 Düzlemde Dönüşümler

Değişken değiştirmenin dili dönüşümlerdir; önce bir dönüşümün noktaları ve bölgeleri nasıl taşıdığını görelim.

Tanım 9.1 (Dönüşüm ve Görüntü). uv-düzleminin bir bölgesinden xy-düzlemine giden ve

$$x = g(u,v), \qquad y = h(u,v)$$

denklemleriyle verilen $T(u,v) = (x,y)$ fonksiyonuna bir **dönüşüm** (transformation) denir. Bu denklemleri kısaca $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ diye de yazarız. g ile h'nin birinci mertebeden kısmi türevleri sürekliyse T'ye bir $\boldsymbol{C^1}$ **dönüşüm** denir.
$T(u_1,v_1) = (x_1,y_1)$ ise (x_1,y_1) noktasına (u_1,v_1) noktasının **görüntüsü** (image) denir. uv-düzlemindeki bir S kümesinin bütün noktalarının görüntülerinden oluşan

$$T(S) = \{\, T(u,v) \mid (u,v) \in S \,\}$$

kümesine S'nin **görüntüsü** denir.

Yani bir dönüşüm, uv-düzlemindeki her noktayı xy-düzleminde bir noktaya, bir bölgeyi de bütün olarak başka bir bölgeye taşır. Analiz 4'te incelediğimiz $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fonksiyonlarından bir farkı yoktur; burada onlara bölgeleri taşıyan haritalar gözüyle bakıyoruz.

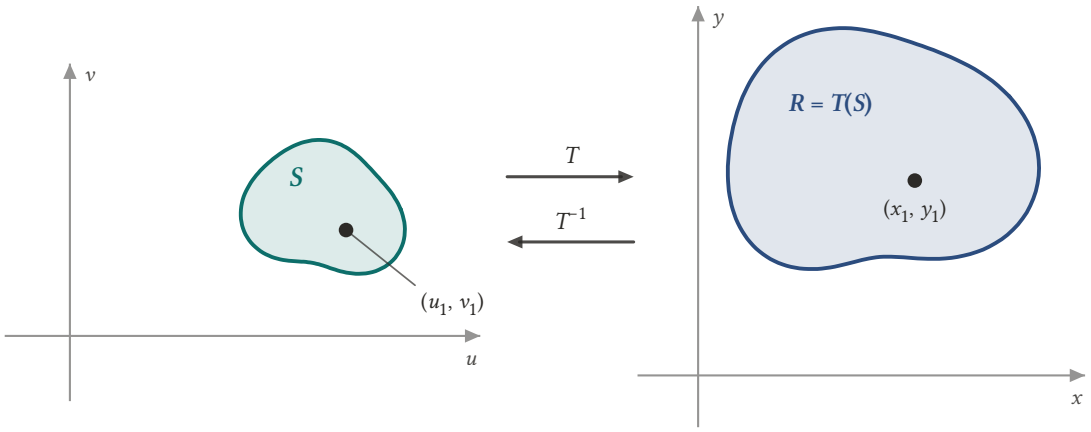
Tanım 9.2 (Bire Bir Dönüşüm ve Ters Dönüşüm). Farklı iki noktayı aynı noktaya götürmeyen bir T dönüşümüne **bire bir** (one-to-one) dönüşüm denir. T bire birse, her $(x,y) = T(u,v)$ noktasını yeniden (u,v) noktasına götüren bir **ters dönüşümü** (inverse transformation) vardır ve bu dönüşüm T^{-1} ile gösterilir. $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ denklemleri u ve v için çözülebiliyorsa ters dönüşüm

$$u = G(x,y), \qquad v = H(x,y)$$

biçiminde yazılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani T bire birse hiçbir bilgi kaybolmaz: $R = T(S)$ bölgesinin her noktası S'nin tek bir noktasından gelir ve T^{-1} bizi o noktaya geri götürür. Değişken değiştirmede iki yönü birlikte kullanacağız: bölgeyi T^{-1} ile uv-düzlemine taşıyacak, integrandı ise T ile u ve v cinsinden yazacağız.



Şekil 9.1: T dönüşümü uv-düzlemindeki S bölgesini xy-düzlemindeki $R = T(S)$ bölgesine, her (u_1, v_1) noktasını da görüntüsü (x_1, y_1) noktasına götürür. T bire bir ise T^{-1} geri dönüşü sağlar. Burada $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ alınmıştır.

Bir bölgenin görüntüsünü bulmak için bütün noktalarını tek tek taşımamız gerekmez. Bu bölümde kullanacağımız sürekli ve bire bir dönüşümler bölgenin sınırını görüntünün sınırına götürür; bu yüzden sınırı taşımak yeterlidir.

Bir bölgenin görüntüsü üç adımda

1. S'nin sınırını parçalara ayır. Kenarları eksenlere paralel bir dikdörtgende her kenar bir $u =$ sabit ya da $v =$ sabit doğru parçasıdır.
2. Her parçayı $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ denklemlerine koy. Kalan parametreyi yok ederek görüntü eğrisinin xy-denklemini ve aralığını bul.
3. Görüntü eğrilerinin sınırladığı bölge $R = T(S)$'dir. Eğrilerin hangi tarafının R olduğunu S'nin içinden bir noktanın görüntüsüyle kontrol et.

Örnek 9.1 (Birim Karenin Bir Kayma Altındaki Görüntüsü). $S = [0,1] \times [0,1]$ birim karesinin $x = u + v$, $y = v$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm.
Kenarlar. Karenin dört kenarını sırayla taşıyalım.

- $v = 0$, $0 \le u \le 1$ alt kenarı için $x = u$, $y = 0$ olur: görüntü, x ekseni üzerinde $(0,0)$ ile $(1,0)$ arasındaki doğru parçasıdır.
- $u = 1$, $0 \le v \le 1$ sağ kenarı için $x = 1 + v$, $y = v$, yani $x = 1 + y$ olur: görüntü $(1,0)$ ile $(2,1)$ arasındaki doğru parçasıdır.
- $v = 1$ üst kenarı için $x = u + 1, y = 1$ olur: görüntü $(1,1)$ ile $(2,1)$ arasındaki yatay doğru parçasıdır.
- $u = 0$ sol kenarı için $x = v$, $y = v$, yani $y = x$ olur: görüntü $(0,0)$ ile $(1,1)$ arasındaki doğru parçasıdır.

Bölge. Bu dört doğru parçası, köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,1)$ ve $(1,1)$ olan paralelkenarı sınırlar:

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le y + 1\}.$$

Karenin merkezi $(1/2, 1/2)$'nin görüntüsü $(1, 1/2)$'dir ve $1/2 \le 1 \le 3/2$ olduğundan gerçekten R'nin içindedir. Paralelkenarın tabanı 1, yüksekliği 1 olduğundan alanı 1'dir; dönüşüm karenin alanını değiştirmemiştir. Bunun nedenini bir sonraki başlıkta göreceğiz. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Kenarlar doğru parçası olarak kalmak zorunda değildir; doğrusal olmayan bir dönüşüm onları eğriltir.

Örnek 9.2 (Birim Karenin Parabollerle Sınırlı Görüntüsü). $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ dönüşümü altında $S = [0,1] \times [0,1]$ birim karesinin görüntüsünü bulunuz.

Çözüm.
Karenin kenarlarına S_1 (alt), S_2 (sağ), S_3 (üst) ve S_4 (sol) diyelim ve kareyi saat yönünün tersine dolaşalım.
S_1 kenarı. $v = 0$, $0 \le u \le 1$ için $x = u^2$, $y = 0$ olur. u, 0'dan 1'e giderken x de 0'dan 1'e gider: S_1'in görüntüsü x ekseni üzerinde $(0,0)$ ile $(1,0)$ arasındaki doğru parçasıdır.
S_2 kenarı. $u = 1$, $0 \le v \le 1$ için

$$x = 1 - v^2, \qquad y = 2v$$

olur. İkinci denklemden $v = y/2$ yazıp birincide yerine koyarak v'yi yok edelim:

$$x = 1 - \frac{y^2}{4}, \qquad 0 \le x \le 1.$$

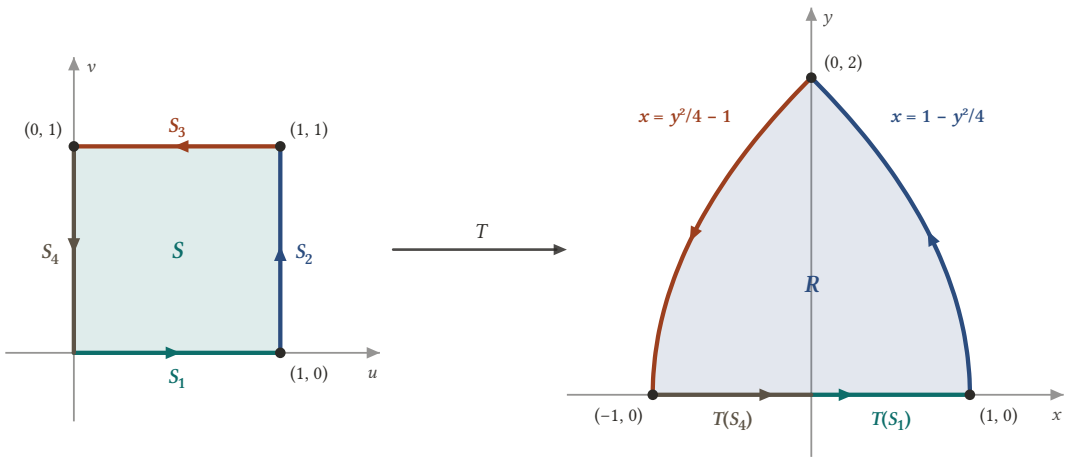
Bu, $(1,0)$'dan $(0,2)$'ye giden bir parabol yayıdır.
S_3 kenarı. $v = 1$ için $x = u^2 - 1$, $y = 2u$ olur; $u = y/2$ yazınca

$$x = \frac{y^2}{4} - 1, \qquad -1 \le x \le 0$$

parabol yayı bulunur. u, 1'den 0'a inerken bu yay $(0,2)$'den $(-1,0)$'a iner.
S_4 kenarı. $u = 0$ için $x = -v^2$, $y = 0$ olur: görüntü x ekseni üzerinde $(-1,0)$ ile $(0,0)$ arasındaki doğru parçasıdır.
Bölge. S'nin görüntüsü, x ekseni ile $x = 1 - y^2/4$ ve $x = y^2/4 - 1$ parabollerinin sınırladığı bölgedir:

$$R = \left\{ (x,y) \mid 0 \le y \le 2,\ \frac{y^2}{4} - 1 \le x \le 1 - \frac{y^2}{4} \right\}.$$

Kontrol için karenin merkezini alalım: $T(1/2, 1/2) = (0, 1/2)$ ve $y = 1/2$ için $-15/16 \le 0 \le 15/16$ olduğundan bu nokta R'nin içindedir. Kareyi saat yönünün tersine dolaşınca R'nin sınırı da saat yönünün tersine dolaşılır.



Şekil 9.2: $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ dönüşümü birim karenin S_1, S_2, S_3, S_4 kenarlarını aynı renkteki sınır parçalarına götürür. Kare saat yönünün tersine dolaşılınca R'nin sınırı da saat yönünün tersine dolaşılır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

9.2 Küçük Bir Dikdörtgenin Görüntüsü

Bir dönüşümün integrali nasıl etkilediğini anlamak için önce alanları nasıl değiştirdiğine bakalım. En basit durum, doğrusal dönüşümlerdir.

Önerme 9.1 (Doğrusal Dönüşümde Alanın Değişimi). *a, b, c, d, p, q sabitler olmak üzere*

$$T(u,v) = (au + bv + p,\, cu + dv + q)$$

olsun. T, kenarları Δu ve Δv olan $S = [u_0, u_0+\Delta u] \times [v_0, v_0+\Delta v]$ dikdörtgenini bir paralelkenara götürür ve bu paralelkenarın alanı

$$\mid ad - bc \mid \Delta u\, \Delta v$$

olur.

> ***İspat.***
> ***Görüntü bir paralelkenardır.*** *S'nin her noktası, $0 \le s \le 1$ ve $0 \le t \le 1$ olmak üzere $(u_0 + s\,\Delta u,\, v_0 + t\,\Delta v)$ biçimindedir. $P = T(u_0, v_0)$ köşesini ve $\mathbf{a} = \langle a, c\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b, d\rangle$ vektörlerini alalım. T'nin bileşenleri doğrusal olduğundan*
>
> $$x = (au_0 + bv_0 + p) + s\,\Delta u\, a + t\,\Delta v\, b,$$
> $$y = (cu_0 + dv_0 + q) + s\,\Delta u\, c + t\,\Delta v\, d$$
>
> *olur; vektör diliyle görüntü noktası $P + s\,\Delta u\,\mathbf{a} + t\,\Delta v\,\mathbf{b}$'dir. s ve t, $[0,1]$ aralığını taradıkça bu noktalar tam olarak P köşesinden çıkan $\Delta u\,\mathbf{a}$ ve $\Delta v\,\mathbf{b}$ vektörlerinin gerdiği paralelkenarı tarar.*
> ***Alan.*** *Düzlemdeki iki vektörü üçüncü bileşeni 0 olan uzay vektörleri sayarsak, gerdikleri paralelkenarın alanı vektörel çarpımlarının uzunluğudur:*
>
> $$\big(\, \Delta u\,\langle a, c, 0\rangle \,\big) \times \big(\, \Delta v\,\langle b, d, 0\rangle \,\big) = (ad - bc)\,\Delta u\,\Delta v \mathbf{k}.$$
>
> *Bu vektörün uzunluğu $\mid ad - bc \mid \Delta u\, \Delta v$'dir.* ■

Yani doğrusal bir dönüşüm bütün dikdörtgenlerin alanını aynı $\mid ad - bc \mid$ oranında büyütür ya da küçültür. Kayma örneğindeki (Örnek 9.1) $x = u + v$, $y = v$ dönüşümünde $a = b = d = 1$, $c = 0$ olduğundan $ad - bc = 1$'dir; alanın korunmasının nedeni budur.

Doğrusal olmayan bir dönüşüm dikdörtgeni eğri kenarlı bir bölgeye götürür. Yine de küçük bir dikdörtgende dönüşüm doğrusala çok yakındır. Sol alt köşesi (u_0, v_0), kenarları Δu ve Δv olan küçük bir S dikdörtgeni alalım ve görüntüsüne R diyelim. T'yi

$$\mathbf{r}(u,v) = g(u,v)\,\mathbf{i} + h(u,v)\,\mathbf{j}$$

konum vektörüyle yazalım. S'nin alt kenarı $v = v_0$ doğrusu üzerindedir; görüntüsü $\mathbf{r}(u, v_0)$ eğrisidir ve bu eğrinin $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$ noktasındaki teğet vektörü

$$\mathbf{r}_u = g_u(u_0,v_0)\,\mathbf{i} + h_u(u_0,v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j}$$

olur. Aynı biçimde sol kenarın ($u = u_0$) görüntüsü olan $\mathbf{r}(u_0, v)$ eğrisinin teğet vektörü

$$\mathbf{r}_v = g_v(u_0,v_0)\,\mathbf{i} + h_v(u_0,v_0)\,\mathbf{j} = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j}$$

olur. R'yi, (x_0, y_0) köşesinden çıkan

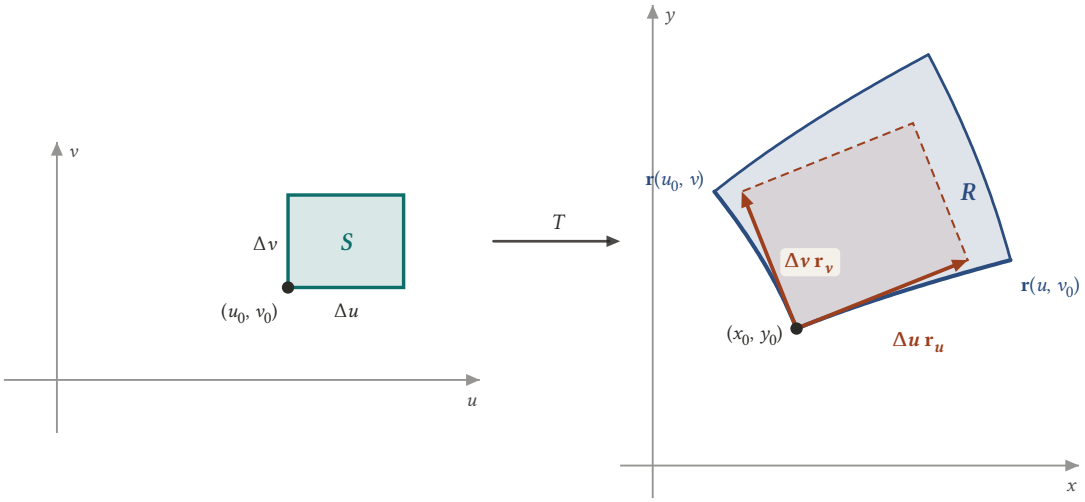
$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0), \qquad \mathbf{b} = \mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$$

kiriş vektörlerinin gerdiği paralelkenarla yaklaşık olarak değiştirebiliriz. Kısmi türevin tanımına göre

$$\mathbf{r}_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)}{\Delta u}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan $\mathbf{a} \approx \Delta u\,\mathbf{r}_u$ ve aynı nedenle $\mathbf{b} \approx \Delta v\,\mathbf{r}_v$'dir. Demek ki R, $\Delta u\,\mathbf{r}_u$ ve $\Delta v\,\mathbf{r}_v$ teğet vektörlerinin gerdiği paralelkenara yakındır.



Şekil 9.3: Kenarları Δu ve Δv olan küçük S dikdörtgeninin görüntüsü eğri kenarlı bir R bölgesidir. R, (x_0, y_0) köşesindeki $\Delta u\,\mathbf{r}_u$ ve $\Delta v\,\mathbf{r}_v$ teğet vektörlerinin gerdiği paralelkenara (kesikli) yakındır. Burada $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $S = [1; 1{,}5] \times [0{,}4; 0{,}8]$ alınmıştır.

Bu paralelkenarın alanını vektörel çarpımla bulalım. R'nin alanına ΔA dersek

$$\Delta A \approx \left| (\Delta u\,\mathbf{r}_u) \times (\Delta v\,\mathbf{r}_v) \right| = |\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|\,\Delta u\,\Delta v \tag{2}$$

olur. Vektörel çarpımı determinantla hesaplarsak

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right)\mathbf{k}$$

bulunur. Parantez içindeki ifade, T dönüşümünün **Jacobi determinantıdır** (Jacobian; bkz. Analiz 4):

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{3}$$

Bu determinant adını Carl Gustav Jacob Jacobi'den (1804–1851) alır. Kısmi türevlerden kurulan bu determinantları ilk kullanan Cauchy olmuştu; onları çok katlı integralleri hesaplamak için bir yönteme dönüştüren ise Jacobi'dir. Bu gösterimle (2) yaklaşımı

$$\Delta A \approx \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \Delta u\,\Delta v \tag{4}$$

biçimini alır; Jacobi determinantı (u_0, v_0) noktasında hesaplanır.
Yani Jacobi determinantının mutlak değeri, T'nin (u_0, v_0) çevresinde alanları kaç katına çıkardığını söyler. Bu, (1)'deki dx/du çarpanının iki boyutlu karşılığıdır. Doğrusal bir dönüşümde $\partial(x,y)/\partial(u,v) = ad - bc$ sabittir ve (4) yaklaşımı tam eşitliğe dönüşür (Önerme 9.1).

9.3 İki Katlı İntegralde Değişken Değiştirme

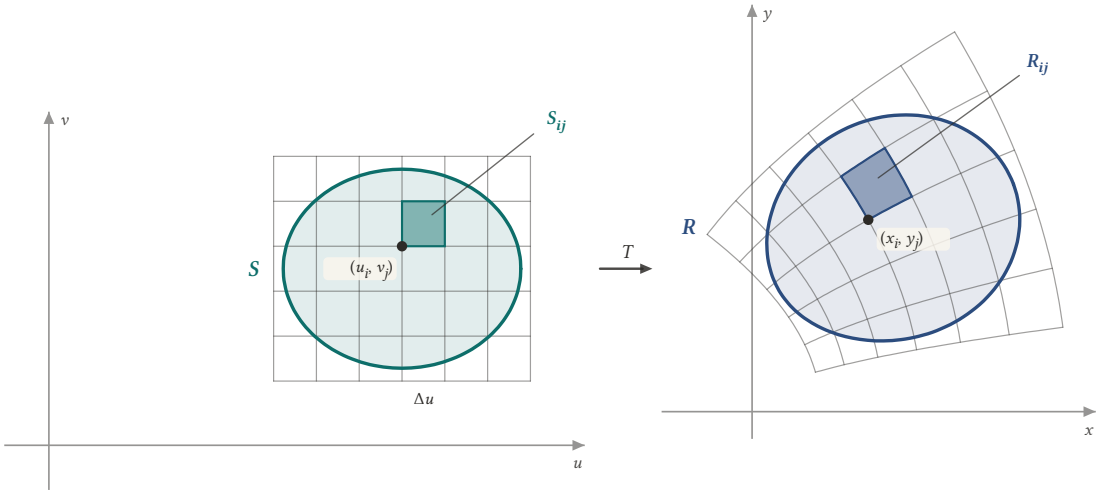
Şimdi (4) yaklaşımını bir Riemann toplamının her terimine uygulayarak değişken değiştirme formülüne ulaşıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 9.1 (İki Katlı İntegralde Değişken Değiştirme). *T, uv-düzlemindeki bir S bölgesini xy-düzlemindeki bir R bölgesine götüren bir C^1 dönüşüm olsun: $T(S) = R$. R ile S I. ya da II. tip bölgeler (Tanım 2.2, Tanım 2.3) ya da ortak noktaları yalnız sınırlarında olan sonlu sayıda böyle bölgenin birleşimi, f de R üzerinde sürekli olsun. S'nin sınırı dışındaki noktalarda T bire bir ve Jacobi determinantı sıfırdan farklıysa*

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_S f\,\big(\,x(u,v), y(u,v)\,\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

olur.



Şekil 9.4: S bölgesi $\Delta u \times \Delta v$ boyutlu S_{ij} dikdörtgenlerine bölünür; T bu ızgarayı R üzerinde eğri bir ızgaraya götürür. Her R_{ij} parçasının alanı yaklaşık $|\partial(x,y)/\partial(u,v)|\,\Delta u\,\Delta v$ olur (burada $T(u,v) = (u^2 - v^2, 2uv)$).

İspatın fikri.
Bölme. *S'yi, kenarları Δu ve Δv olan küçük S_{ij} dikdörtgenlerine bölelim ve yalnız tamamen S'nin içinde kalanları alalım. S_{ij}'nin sol alt köşesi (u_i, v_j), görüntüsü $R_{ij} = T(S_{ij})$ ve $(x_i, y_j) = T(u_i, v_j)$ olsun. T, S'nin iç noktalarında bire bir olduğundan R_{ij} parçalarının iç kısımları örtüşmez. Bu parçalar, sınıra yakın ince bir şerit dışında R'yi doldurur; hücreler küçüldükçe bu şeridin alanı sıfıra gider.*
Her parçanın alanı. *(4)'e göre R_{ij}'nin alanı*

$$\Delta A_{ij} \approx \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_i, v_j)\right| \Delta u\,\Delta v$$

olur.
Toplam. *İki katlı integrali Riemann toplamıyla yaklaşık yazarsak (Tanım 1.2)*

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dA &\approx \sum_i \sum_j f(x_i, y_j)\,\Delta A_{ij} \\ &\approx \sum_i \sum_j f\,\big(\,x(u_i,v_j), y(u_i,v_j)\,\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_i,v_j)\right| \Delta u\,\Delta v\end{aligned}$$

bulunur. Son toplam, $f\,\big(\,x(u,v), y(u,v)\,\big)\,|\,\partial(x,y)/\partial(u,v)\,|$ sürekli fonksiyonunun S üzerindeki bir Riemann toplamıdır. $\Delta u, \Delta v \to 0$ iken bu toplam teoremin sağ tarafındaki integrale, ilk toplam ise sol taraftaki integrale yaklaşır.
Eksik kalan adım. *Bütün R_{ij} parçalarında yapılan "eğri kenarlı bölge yerine paralelkenar" hatalarının toplamının da sıfıra gittiğini göstermek gerekir. Bunun için T'nin kısmi türevlerinin S üzerinde düzgün sürekli olduğu kullanılarak her parçadaki hatanın $\Delta u\,\Delta v$'ye göre küçük olduğu, aynı anda bütün parçalar için kanıtlanır; bu tam ispat ileri analizin konusudur.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani integrali x, y değişkenlerinden u, v değişkenlerine taşırken üç şey değişir: integrand $f\left(\, x(u,v), y(u,v) \,\right)$ olur, bölge R'den S'ye geçer ve alan elemanı

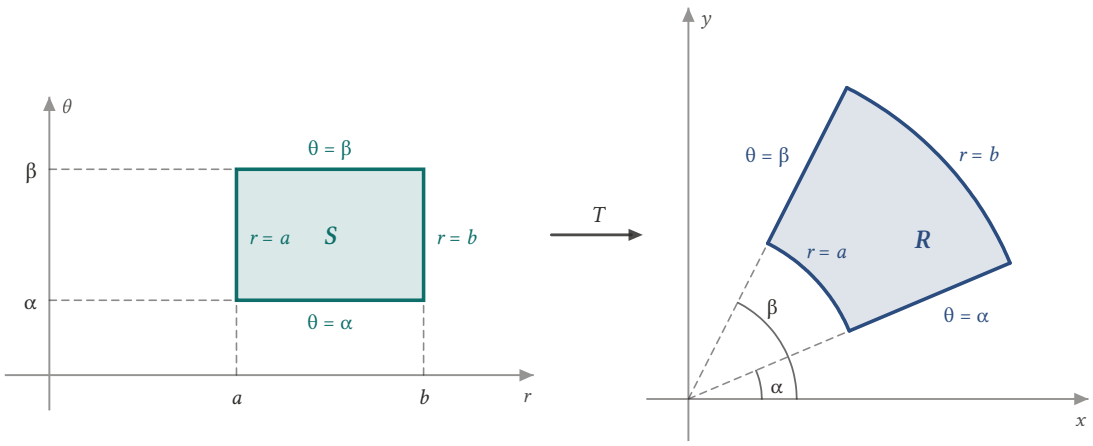
$$dA = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$$

olur. Bu, (1)'deki tek boyutlu formülün tam karşılığıdır: dx/du türevinin yerini Jacobi determinantının mutlak değeri alır. Tek boyutta mutlak değere gerek yoktu, çünkü g azalansa integralin sınırları da yer değiştirir ve işaret kendiliğinden düzelir. Çok katlı integralde bölgelerin böyle bir yönü yoktur ve alan her zaman pozitiftir.
İlk uygulama olarak kutupsal koordinat formülünün bu teoremin bir özel hâli olduğunu görelim.

Örnek 9.3 (Kutupsal Koordinatlar Bir Özel Hâldir). $0 \le a < b$ ve $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$ olsun. R, xy-düzleminde $a \le r \le b$ ve $\alpha \le \theta \le \beta$ ile verilen kutupsal dikdörtgen, f de R üzerinde sürekli olsun. Değişken değiştirme teoremini (Teorem 9.1) kullanarak

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

olduğunu gösteriniz.



Şekil 9.5: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ dönüşümü $r\theta$-düzlemindeki $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ dikdörtgenini xy-düzlemindeki kutupsal dikdörtgene götürür: r = sabit doğruları çember yaylarına, θ = sabit doğruları orijinden çıkan ışınlara gider.

Çözüm.
Dönüşüm. $r\theta$-düzleminden xy-düzlemine giden

$$x = g(r,\theta) = r\cos\theta, \qquad y = h(r,\theta) = r\sin\theta$$

dönüşümü $S = [a,b] \times [\alpha,\beta]$ dikdörtgenini R kutupsal dikdörtgenine götürür: $r =$ sabit doğruları çember yaylarına, $\theta =$ sabit doğruları orijinden çıkan ışınlara gider.
Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Koşullar. S bir dikdörtgendir. R'yi koordinat eksenleri boyunca keserek, her biri eksenlerin ayırdığı dört bölgeden yalnız birinde kalan en çok beş kutupsal dikdörtgene ayırabiliriz; parçaların ortak noktaları yalnız sınırlarındadır. Her parça I. tip bölgedir. Örneğin birinci bölgedeki bir parçada, $x = c$ düşey doğrusu üzerinde $a \le r \le b$ koşulu da θ'ya konan koşul da y için birer aralık verir ve iki aralığın kesişimi yine bir aralıktır; yani her düşey doğru parçayı tek bir doğru parçası boyunca keser. Öteki bölgelerdeki parçalar bunların eksenlere göre yansımalarıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

S'nin iç noktalarında $r > a \geq 0$ olduğundan Jacobi determinantı sıfırdan farklıdır. Aynı noktalarda r, noktanın orijine uzaklığı, θ ise uzunluğu en çok 2π olan açık bir aralıktaki açısı olduğundan (r, θ) çifti (x, y) noktasından tek türlü bulunur; yani T bire birdir. Sınırda bu koşullar bozulabilir ($a = 0$ ise $r = 0$ kenarının tamamı orijine gider), teorem buna izin verir.
Sonuç. $r \geq 0$ olduğundan $\mid \partial(x, y)/\partial(r, \theta) \mid = r$'dir. Teorem 9.1 ve S dikdörtgeni üzerinde Fubini Teoremi (Teorem 1.2)

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

verir. Bu, kutupsal koordinatlara geçiş formülüdür (Teorem 3.1); kutupsal formüldeki fazladan r çarpanı, kutupsal dönüşümün Jacobi determinantıdır. ■

Şimdi verilen bir dönüşümle, zor bir bölgeyi basit bir bölgeye çevirelim.

Örnek 9.4 (Parabollerle Sınırlı Bölgede Bir İntegral). $x = u^2 - v^2, y = 2uv$ değişken değiştirmesini kullanarak

$$\iint_R y\, dA$$

integralini hesaplayınız. Burada R, x ekseni ile $y^2 = 4 - 4x$ ve $y^2 = 4 + 4x$ parabollerinin sınırladığı, $y \geq 0$ olan bölgedir.

Çözüm.
Bölge. $y^2 = 4 - 4x$ denklemi $x = 1 - y^2/4$, $y^2 = 4 + 4x$ denklemi ise $x = y^2/4 - 1$ demektir. Demek ki R, birim karenin görüntüsü olarak bulduğumuz bölgedir (Örnek 9.2) ve $T(S) = R$, $S = [0, 1] \times [0, 1]$'dir. Değişken değiştirmenin amacı da budur: S, R'den çok daha basit bir bölgedir.
Bire birlik. $T(u, v) = (x, y)$ ise

$$(u^2 + v^2)^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = x^2 + y^2$$

olur, yani $u^2 + v^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$'dir. Buna $u^2 - v^2 = x$ eşitliğini ekleyip çıkarırsak

$$u^2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}, \qquad v^2 = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{2}$$

bulunur. $u, v \geq 0$ olduğundan u ile v, (x, y) noktasından tek türlü belirlenir; T, S üzerinde bire birdir.
Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 2v & 2u \end{vmatrix} = 4u^2 + 4v^2.$$

Bu sayı yalnız S'nin köşesi olan $(0, 0)$'da sıfırdır, başka her yerde pozitiftir.
İntegral. $y = 2uv$ ve $\mid \partial(x, y)/\partial(u, v) \mid = 4(u^2 + v^2)$ olduğundan Teorem 9.1

$$\begin{aligned} \iint_R y\, dA &= \int_0^1 \int_0^1 (2uv) \cdot 4(u^2 + v^2)\, du\, dv = 8 \int_0^1 \int_0^1 (u^3 v + uv^3)\, du\, dv \\ &= 8 \int_0^1 \left[\frac{u^4 v}{4} + \frac{u^2 v^3}{2} \right]_{u=0}^{u=1} dv = \int_0^1 (2v + 4v^3)\, dv \\ &= \Big[v^2 + v^4 \Big]_0^1 = 2 \end{aligned}$$

verir.
Kontrol. Aynı integrali doğrudan da hesaplayabiliriz. $0 \leq y \leq 2$ için $x, y^2/4 - 1$ ile $1 - y^2/4$ arasında değiştiğinden

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_R y\,dA = \int_0^2 y\left(2 - \frac{y^2}{2}\right) dy = \left[y^2 - \frac{y^4}{8}\right]_0^2 = 4 - 2 = 2.$$

■

9.4 Uygun Dönüşümü Seçmek

Önceki örnekte dönüşüm bize verilmişti. Verilmediğinde ilk iş uygun bir dönüşüm bulmaktır ve ipucu ya integrandda ya da bölgededir.
İntegrali zorlaştıran şey integrandsa, onun içinde tekrar eden ifadeler ($x+y, x-y, xy$ gibi) yeni değişken olmaya adaydır. Zorluk bölgedeyse, sınır eğrilerinin denklemleri $u =$ sabit ve $v =$ sabit biçimine girecek şekilde yeni değişkenler seçilir; böylece S basit bir dikdörtgen ya da yamuk olur.

Değişken değiştirme beş adımda

1. **Dönüşümü seç:** integrandın ya da sınır eğrilerinin biçimine bakarak $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ yeni değişkenlerini belirle.
2. **T'yi bul:** bu denklemleri x ve y için çöz.
3. **Jacobi determinantını hesapla:** $\partial(x,y)/\partial(u,v)$'yi bul ve mutlak değerini al.
4. **S'yi bul:** R'nin sınır eğrilerini u ve v cinsinden yaz.
5. **İntegrali hesapla:** integrandı u, v cinsinden yaz, Jacobi çarpanıyla çarp ve S üzerinde ardışık integral olarak hesapla.

Örnek 9.5 (Bir Yamukta Üstel İntegral). R, köşeleri $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ ve $(0,-1)$ olan yamuk olmak üzere

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\,dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
1. Dönüşümü seç. $e^{(x+y)/(x-y)}$ fonksiyonunun x'e ya da y'ye göre ilkelini bulmak kolay değildir. Üsteki $x+y$ ve $x-y$ ifadeleri yeni değişkenleri önerir:

$$u = x + y, \qquad v = x - y.$$

Bu denklemler xy-düzleminden uv-düzlemine giden T^{-1} dönüşümünü tanımlar.
2. T'yi bul. Denklemleri toplayıp çıkarırsak

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad y = \frac{u-v}{2}$$

bulunur.
3. Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}, \qquad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}.$$

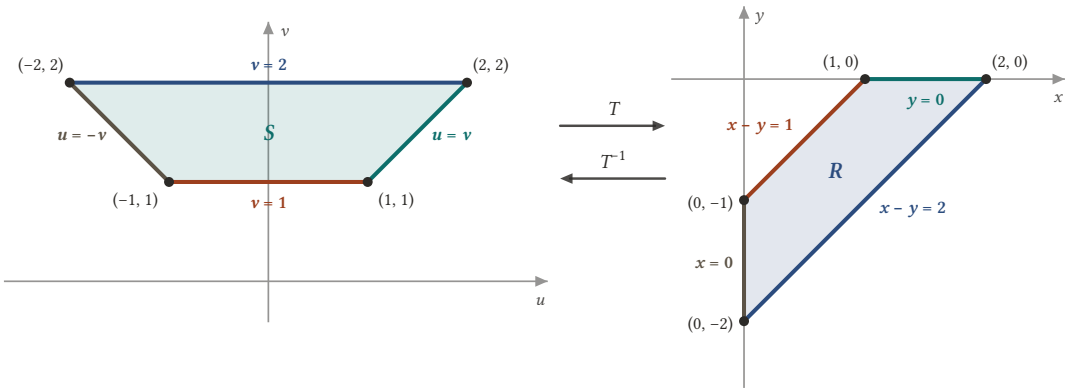
4. S'yi bul. R'nin kenarları $y = 0$, $x - y = 2$, $x = 0$ ve $x - y = 1$ doğruları üzerindedir. Bunları sırayla u, v cinsinden yazalım:

- $y = 0$ ise $u = x$ ve $v = x$'tir, yani $u = v$;
- $x - y = 2$ ise $v = 2$;
- $x = 0$ ise $u = y$ ve $v = -y$'dir, yani $u = -v$;
- $x - y = 1$ ise $v = 1$.

Böylece S, köşeleri $(1,1)$, $(2,2)$, $(-2,2)$ ve $(-1,1)$ olan yamuktur:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$S = \{(u, v) \mid 1 \le v \le 2,\ -v \le u \le v\}.$$



Şekil 9.6: $u = x + y$, $v = x - y$ ile R yamuğunun her kenarı S yamuğunun aynı renkteki kenarına gider. T ise $x = (u + v)/2$, $y = (u - v)/2$ ile S'yi R'ye geri götürür.

5. İntegrali hesapla. $(x + y)/(x - y) = u/v$ olduğundan Teorem 9.1

$$\iint_R e^{(x+y)/(x-y)}\, dA = \int_1^2 \int_{-v}^{v} e^{u/v} \cdot \frac{1}{2}\, du\, dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \Big[v\, e^{u/v} \Big]_{u=-v}^{u=v} dv$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(e - e^{-1} \right) v\, dv = \frac{1}{2} \left(e - e^{-1} \right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \left(e - e^{-1} \right)$$

verir. Sayısal olarak bu değer yaklaşık 1,763'tür. ■

⚠ Sık yapılan üç hata

- **Mutlak değeri unutmak.** Yamuk örneğinde (Örnek 9.5) Jacobi determinantı $-1/2$'dir ama integrale $1/2$ girer; alan elemanı negatif olamaz.
- **Sınırları dönüştürmemek.** Yeni integralin sınırları R'yi değil S'yi betimlemelidir.
- **Determinantı ters yönde kullanmak.** Formüle $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ girer. Elimizde $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ varsa formüle onun çarpmaya göre tersi girer (Önerme 9.2).

Reçetenin ikinci adımı her zaman kolay değildir: u ve v'yi x, y cinsinden yazmak kolay olduğu hâlde tersini çözmek zahmetli olabilir. Neyse ki Jacobi determinantını ters dönüşümden de hesaplayabiliriz.

Önerme 9.2 (Ters Dönüşümün Jacobi Determinantı). *U ile V düzlemde açık kümeler, $T : U \to V$ bire bir ve örten bir C^1 dönüşüm, $T^{-1} : V \to U$ de C^1 olsun. $(u, v) \in U$ ve $(x, y) = T(u, v)$ olan her noktada*

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1$$

olur. Özel olarak iki determinant da sıfırdan farklıdır ve

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\partial(u, v)/\partial(x, y)}$$

dir.

İspat.
Her $(u, v) \in U$ için $T^{-1}\left(T(u, v) \right) = (u, v)$ eşitliği vardır. Sağ taraf birim dönüşümdür ve Jacobi matrisi 2×2 birim matris I'dır. Zincir kuralına göre (bkz. Analiz 4) bileşkenin Jacobi matrisi, Jacobi matrislerinin çarpımıdır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$J_{T^{-1}}(x,y)\,J_T(u,v) = I, \qquad (x,y) = T(u,v).$$

İki matrisin çarpımının determinantı determinantların çarpımına eşit olduğundan

$$\det J_{T^{-1}}(x,y) \cdot \det J_T(u,v) = \det I = 1$$

olur. $\det J_T(u,v) = \partial(x,y)/\partial(u,v)$ *ve* $\det J_{T^{-1}}(x,y) = \partial(u,v)/\partial(x,y)$ *olduğundan istenen eşitlik çıkar. Çarpımları* 1 *olduğundan ikisi de sıfır olamaz.* ■

Yani ters dönüşümün Jacobi determinantı, dönüşümün Jacobi determinantının çarpmaya göre tersidir; tek değişkendeki $dx/du = 1/(du/dx)$ kuralının karşılığıdır. Örneğin yamuk örneğinde (Örnek 9.5) x ve y'yi çözmeye gerek yoktu:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}.$$

Bu kural, ters dönüşümü açıkça yazmanın zor olduğu yerde işi büyük ölçüde kolaylaştırır.

Örnek 9.6 (Hiperbollerle Sınırlı Bir Bölge). R, birinci bölgede $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$ ve $xy = 4$ hiperbollerinin sınırladığı bölge olmak üzere

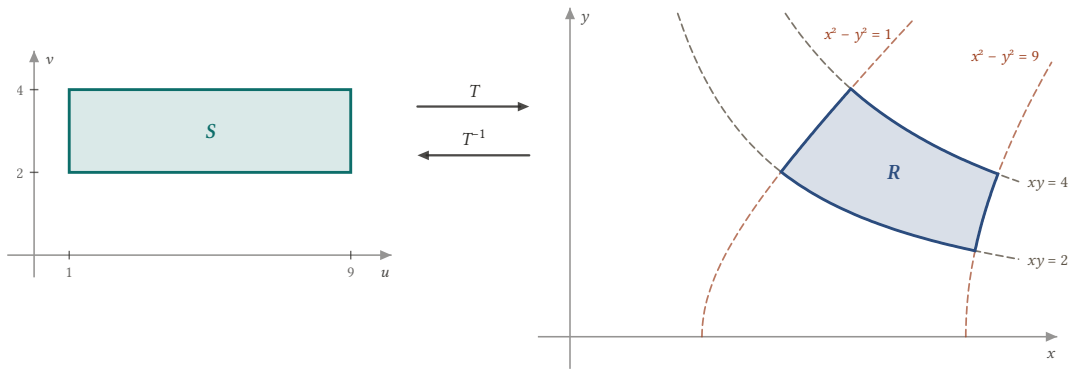
$$\iint_R (x^2 + y^2)\,dA$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Dönüşüm. Sınır eğrileri $x^2 - y^2 =$ sabit ve $xy =$ sabit biçiminde olduğundan

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = xy$$

alalım. Bu değişkenlerle R, $1 \le u \le 9$ ve $2 \le v \le 4$ eşitsizlikleriyle betimlenir; yani $S = [1,9] \times [2,4]$ dikdörtgenidir.



Şekil 9.7: $u = x^2 - y^2$, $v = xy$ değişkenleri birinci bölgedeki dört hiperbolün sınırladığı R bölgesini $[1, 9] \times [2, 4]$ dikdörtgenine çevirir.

Bire birlik. $x, y > 0$ olsun.

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = u^2 + 4v^2$$

olduğundan $x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + 4v^2}$'dir ve

$$x^2 = \frac{\sqrt{u^2 + 4v^2} + u}{2}, \qquad y^2 = \frac{\sqrt{u^2 + 4v^2} - u}{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. x ve y pozitif olduğundan (u, v)'den tek türlü belirlenir. Bu formüller $v > 0$ iken C^1 olan bir T dönüşümü verir; ama onu açıkça kullanmamıza gerek kalmayacak.
Jacobi determinantı. Ters yöndeki determinant kolayca bulunur:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x^2 + 2y^2.$$

Ters dönüşüm kuralına (Önerme 9.2) göre

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

olur. Burada $x^2 + y^2$, (u, v)'nin bir fonksiyonu olarak düşünülür; integranddaki $x^2 + y^2$ ile aynı noktada hesaplandığından birazdan sadeleşecek.
İntegral. Teorem 9.1

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2+y^2)\,dA &= \int_2^4 \int_1^9 (x^2+y^2) \cdot \frac{1}{2(x^2+y^2)}\,du\,dv \\ &= \int_2^4 \int_1^9 \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot 2 = 8 \end{aligned}$$

verir. İntegrand, Jacobi çarpanıyla tam olarak sadeleşti; uygun seçilen bir dönüşümün gücü budur. ■

9.5 Üç Katlı İntegralde Değişken Değiştirme

Aynı fikir uzayda da işler. Tek fark, küçük dikdörtgenlerin yerini küçük kutuların, paralelkenarların yerini de paralelyüzlülerin almasıdır.
T, uvw-uzayındaki bir S bölgesini xyz-uzayındaki bir R bölgesine

$$x = g(u,v,w), \qquad y = h(u,v,w), \qquad z = k(u,v,w)$$

denklemleriyle götüren bir dönüşüm olsun. T'nin Jacobi determinantı bu kez 3×3 bir determinanttır:

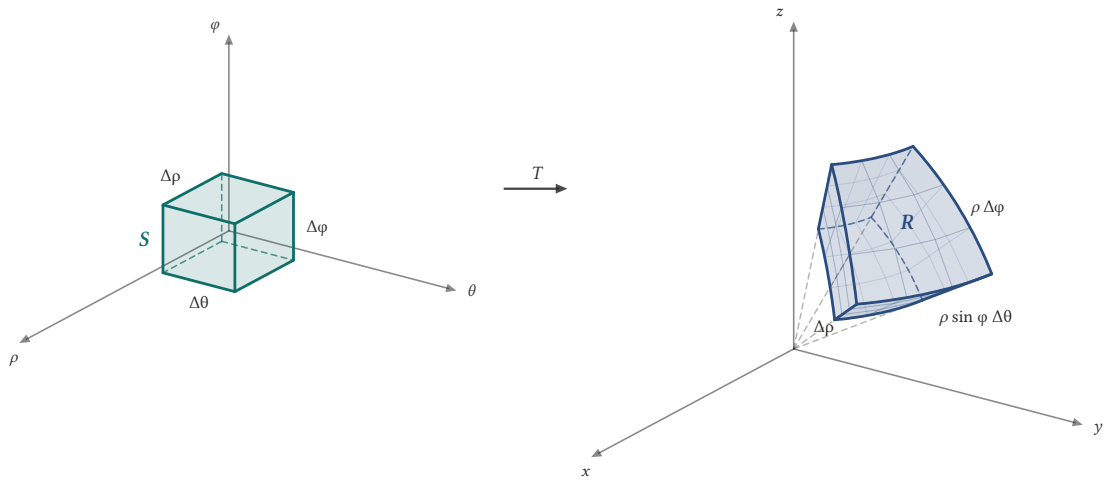
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Teorem 9.2 (Üç Katlı İntegralde Değişken Değiştirme). *T, uvw-uzayındaki bir S bölgesini xyz-uzayındaki bir R bölgesine götüren bir C^1 dönüşüm olsun: $T(S) = R$. R ile S kapalı, sınırlı ve sınırları sonlu sayıda düzgün yüzey parçasından oluşan bölgeler, f de R üzerinde sürekli olsun. S'nin sınırı dışındaki noktalarda T bire bir ve Jacobi determinantı sıfırdan farklıysa*

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iiint_S f\,\big(\,T(u,v,w)\,\big)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

olur. Burada $f\,\big(\,T(u,v,w)\,\big)$, f'de x, y, z yerine $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ yazılarak elde edilen fonksiyondur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.8: Küresel koordinat dönüşümü (ρ, θ, φ)-uzayındaki küçük S *kutusunu bir küresel kama* R*'ye götürür. Kamanın kenarları yaklaşık Δρ, ρ sin φ Δθ ve ρ Δφ olduğundan hacmi yaklaşık ρ² sin φ Δρ Δθ Δφ'dir; bu çarpan Jacobi determinantının mutlak değeridir.*

İspatın fikri.
Küçük bir kutunun görüntüsü. *T'yi $\mathbf{r}(u,v,w) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ konum vektörüyle yazalım. Bir köşesi (u_0, v_0, w_0), kenarları Δu, Δv, Δw olan küçük bir kutunun görüntüsü, iki boyuttaki akıl yürütmeyle, $\Delta u\,\mathbf{r}_u$, $\Delta v\,\mathbf{r}_v$ ve $\Delta w\,\mathbf{r}_w$ vektörlerinin gerdiği paralelyüzlüye yakındır.*
Hacim. *Bu paralelyüzlünün hacmi karma çarpımın mutlak değeridir:*

$$\Delta V \approx \left|\, \mathbf{r}_u \cdot (\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_w) \,\right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w.$$

Karma çarpım, satırları $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$, $\mathbf{r}_w$'nin bileşenleri olan determinanttır. Bu determinant, (5)'teki determinantın satırlarıyla sütunlarının yer değiştirmiş hâlidir ve devrik almak determinantı değiştirmez. Demek ki

$$\Delta V \approx \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w$$

olur.
Toplam. *S'yi küçük kutulara bölüp bu yaklaşımı her kutuya uygularsak, iki boyutta olduğu gibi, sağ taraftaki integralin bir Riemann toplamı soldaki integrale yaklaşır. Hataların toplamının sıfıra gittiğini göstermek iki boyuttaki gibi ileri analiz gerektirir.* ■

Yani üç boyutta hacim elemanı $dV = \left|\, \partial(x,y,z)/\partial(u,v,w) \,\right| du\, dv\, dw$ olur. Silindirik ve küresel koordinatlardaki formüller bu teoremin iki özel hâlidir.

Örnek 9.7 (Silindirik Koordinatların Jacobi Determinantı). $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ silindirik koordinat dönüşümünün Jacobi determinantını hesaplayınız ve üç katlı integralde değişken değiştirme teoreminin (Teorem 9.2) silindirik koordinatlarda verdiği formülü yazınız.

Çözüm.
Jacobi determinantı. Kısmi türevleri (5)'e yerleştirip determinantı son satıra göre açalım:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Koşullar. R, $r\theta z$-uzayında teoremdeki koşulları sağlayan bir S bölgesinin görüntüsü olsun; S'nin noktalarında $r \geq 0$ olsun ve θ, uzunluğu en çok 2π olan bir $[\alpha, \beta]$ aralığında kalsın. S'nin iç noktalarında $r > 0$ olduğundan Jacobi determinantı sıfırdan farklıdır. Aynı noktalarda θ açık (α, β) aralığındadır. r

 CC BY-NC-SA 4.0

noktanın z eksenine uzaklığı, θ da bu aralıkta noktanın kutupsal açısı olan tek sayı olduğundan (r, θ, z) üçlüsü (x, y, z) noktasından tek türlü bulunur; yani T bire birdir. Jacobi determinantı yalnız $r = 0$ olan sınır noktalarında sıfırdır ve teorem buna izin verir.
Formül. $r \geq 0$ olduğundan Jacobi determinantının mutlak değeri r'dir ve Teorem 9.2

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

verir. Bu, silindirik koordinatlardaki integral formülüdür (Teorem 7.1); kutupsal koordinatlardaki r çarpanı aynen korunur, çünkü z değişkeni değişmeden kalır. ■

Örnek 9.8 (Küresel Koordinatlarda İntegral Formülü). $0 \leq a < b, \alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi$ ve $0 \leq c < d \leq \pi$ olsun. R, $a \leq \rho \leq b$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $c \leq \phi \leq d$ ile verilen küresel kama, f de R üzerinde sürekli olsun. Üç katlı integralde değişken değiştirme teoremini (Teorem 9.2) kullanarak küresel koordinatlarda üç katlı integral formülünü elde ediniz.

Çözüm.
Dönüşüm. Küresel koordinatlar (Tanım 8.1)

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi$$

denklemleriyle verilir; $\rho \geq 0$ ve $0 \leq \phi \leq \pi$'dir. Bu dönüşüm $S = [a,b]\times[\alpha,\beta]\times[c,d]$ kutusunu R kamasına götürür.
Jacobi determinantı. Değişkenleri (ρ, θ, ϕ) sırasıyla alırsak

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix}$$

olur. Son satırın ortasında 0 bulunduğundan determinantı son satıra göre açmak en kolayıdır:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \cos\phi\,M_1 - \rho\sin\phi\,M_2.$$

Buradaki iki minör şöyledir:

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{vmatrix} -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta - \rho^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta = -\rho^2\sin\phi\cos\phi, \\ M_2 &= \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \rho\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho\sin^2\phi\sin^2\theta = \rho\sin^2\phi. \end{aligned}$$

Bunları yerine koyarsak

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = -\rho^2\sin\phi\cos^2\phi - \rho^2\sin\phi\sin^2\phi = -\rho^2\sin\phi$$

bulunur.
Koşullar. S bir kutu, R de küreler, yarı düzlemler ve yarı konilerle sınırlanan bir kamadır. S'nin iç noktalarında $\rho > a \geq 0$ ve $0 \leq c < \phi < d \leq \pi$ olduğundan $\rho^2\sin\phi \neq 0$, yani Jacobi determinantı sıfırdan farklıdır. Aynı noktalarda ρ noktanın orijine uzaklığı, ϕ da pozitif z ekseniyle yaptığı açıdır. $0 < \phi < \pi$ olduğundan nokta z ekseni üzerinde değildir ve θ, uzunluğu en çok 2π olan açık (α, β) aralığında tek türlü bulunur. Böylece (ρ, θ, ϕ) üçlüsü noktadan tek türlü belirlenir; yani T bire birdir. Jacobi determinantı yalnız $\rho = 0$, $\phi = 0$ ve $\phi = \pi$ olan noktalarda sıfırdır ve bu noktalar S'nin içinde değildir. Örneğin $a = 0$ ise $\rho = 0$ yüzünün tamamı orijine gider; teorem sınırdaki bu bozulmaya izin verir.
Formül. $0 \leq \phi \leq \pi$ olduğundan $\sin\phi \geq 0$'dır ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)}\right| = |\,-\rho^2\sin\phi\,| = \rho^2\sin\phi$$

olur. Teorem 9.2 ve S kutusu üzerinde Fubini Teoremi (Teorem 6.1)

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dV = \int_c^d\int_\alpha^\beta\int_a^b f(\rho\sin\phi\cos\theta,\,\rho\sin\phi\sin\theta,\,\rho\cos\phi) \cdot \rho^2\sin\phi d\rho\,d\theta\,d\phi$$

verir. Bu, küresel koordinatlardaki integral formülüdür (Teorem 8.1). Determinantın işareti negatif çıksa da integrale mutlak değeri girer. ■

9.6 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar, bir bölgenin görüntüsünü bulmaktan uygun dönüşümü kendimiz seçmeye kadar bölümün bütün yöntemlerini kolaydan zora doğru tarar.

Alıştırma 9.1 (Bir Dikdörtgenin Doğrusal Görüntüsü). $S=[0,3]\times[0,2]$ dikdörtgeninin $x=2u+3v$, $y=u-v$ dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz.

Çözüm.
Köşeler. Dönüşüm doğrusal olduğundan doğru parçalarını doğru parçalarına götürür; bu yüzden köşeleri taşımak yeterlidir:

$$(0,0)\mapsto(0,0),\quad (3,0)\mapsto(6,3),\quad (3,2)\mapsto(12,1),\quad (0,2)\mapsto(6,-2).$$

Kenarlar. $v=0$ kenarında $x=2u$, $y=u$, yani $y=x/2$ $(0\le x\le 6)$ olur. $u=3$ kenarında $x=6+3v$, $y=3-v$'dir; $v=3-y$ yazınca $y=5-x/3$ $(6\le x\le 12)$ bulunur. $v=2$ kenarında $x=2u+6$, $y=u-2$'dir; $u=y+2$ yazınca $y=x/2-5$ $(6\le x\le 12)$ bulunur. $u=0$ kenarında $x=3v$, $y=-v$, yani $y=-x/3$ $(0\le x\le 6)$ olur.
Bölge. Görüntü, köşeleri $(0,0)$, $(6,3)$, $(12,1)$ ve $(6,-2)$ olan paralelkenardır. Ters dönüşümü yazarak da betimleyebiliriz: $x=2u+3v$, $y=u-v$ denklemlerinden $u=(x+3y)/5$, $v=(x-2y)/5$ çıkar, dolayısıyla

$$R=\{(x,y)\mid 0\le x+3y\le 15,\,0\le x-2y\le 10\}$$

olur. Burada $|\,ad-bc\,|=|\,2\cdot(-1)-3\cdot 1\,|=5$ ve dikdörtgenin alanı $3\cdot 2=6$ olduğundan, doğrusal dönüşümde alan kuralına (Önerme 9.1) göre paralelkenarın alanı $5\cdot 6=30$'dur. ■

Alıştırma 9.2 (Kenarları Eğrilen Bir Kare). $S=[0,1]\times[0,1]$ birim karesinin $x=u-v$, $y=u+v^2$ dönüşümü altındaki görüntüsü olan R bölgesini bulunuz.

Çözüm.
Kenarlar. Kareyi saat yönünün tersine dolaşalım.

- $v=0$, $0\le u\le 1$: $x=u$, $y=u$; görüntü $y=x$ doğrusunun $(0,0)$ ile $(1,1)$ arasındaki parçasıdır.
- $u=1$, $0\le v\le 1$: $x=1-v$, $y=1+v^2$. $v=1-x$ yazınca $y=1+(1-x)^2=x^2-2x+2$ $(0\le x\le 1)$ bulunur; bu yay $(1,1)$'den $(0,2)$'ye gider.
- $v=1$, u 1'den 0'a: $x=u-1$, $y=u+1$, yani $y=x+2$ $(-1\le x\le 0)$; $(0,2)$'den $(-1,1)$'e giden doğru parçası.
- $u=0$, v 1'den 0'a: $x=-v$, $y=v^2$, yani $y=x^2$ $(-1\le x\le 0)$; $(-1,1)$'den $(0,0)$'a giden parabol yayı.

Bölge. Bu dört eğri R'yi sınırlar:

$$R=\{-1\le x\le 0,\,x^2\le y\le x+2\}\cup\{0\le x\le 1,\,x\le y\le x^2-2x+2\}.$$

Karenin merkezinin görüntüsü $T(1/2,1/2)=(0,3/4)$'tür ve $0\le 3/4\le 2$ olduğundan R'nin içindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kontrol. T bire birdir: $u-v=u'-v'$ ve $u+v^2=u'+v'^2$ ise $u-u'=v-v'$ ve $u-u'=v'^2-v^2$ olur; buradan $(v-v')(1+v+v')=0$ çıkar ve $v+v'\geq 0$ olduğundan $v=v'$, sonra $u=u'$ bulunur. Jacobi determinantı

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2v\end{vmatrix}=2v+1>0$$

olduğundan R'nin alanı $\int_0^1\int_0^1(2v+1)\,du\,dv=2$'dir. Doğrudan hesap da aynı sonucu verir:

$$\int_{-1}^{0}(x+2-x^2)\,dx+\int_0^1(x^2-3x+2)\,dx=\frac{7}{6}+\frac{5}{6}=2.$$

■

Alıştırma 9.3 (Bir Bölgeyi Kareye Açan Dönüşüm). R, birinci bölgede $y=1/x$ ve $y=4/x$ hiperbolleri ile $y=x$ ve $y=4x$ doğruları arasında kalan bölge olsun. uv-düzleminde kenarları eksenlere paralel bir S dikdörtgenini R'ye götüren bir T dönüşümü bulunuz.

Çözüm.
Yeni değişkenler. Sınır eğrileri $xy=1$, $xy=4$, $y/x=1$ ve $y/x=4$ biçiminde yazılabilir. Bu yüzden

$$u=xy,\qquad v=\frac{y}{x}$$

alalım. R'nin noktaları tam olarak $1\leq u\leq 4$ ve $1\leq v\leq 4$ eşitsizliklerini sağlar; yani $S=[1,4]\times[1,4]$ karesidir.
T'yi bul. $uv=y^2$ ve $u/v=x^2$'dir. $x,y>0$ olduğundan

$$T(u,v)=\left(\sqrt{u/v},\sqrt{uv}\right)$$

bulunur. Gerçekten $(u,v)\in S$ ise $x,y>0$, $xy=u\in[1,4]$ ve $y/x=v\in[1,4]$'tür; köşeler $(1,1)\mapsto(1,1)$, $(4,1)\mapsto(2,2)$, $(4,4)\mapsto(1,4)$ ve $(1,4)\mapsto(1/2,2)$ olur.
Jacobi determinantı. Önerme 9.2 ile

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}y & x\\ -y/x^2 & 1/x\end{vmatrix}=\frac{2y}{x}=2v,\qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2v}\neq 0$$

bulunur. Bu dönüşümle örneğin R'nin alanı da kolayca hesaplanır:

$$\iint_R dA=\int_1^4\int_1^4\frac{1}{2v}\,du\,dv=3\cdot\frac{\ln 4}{2}=3\ln 2.$$

■

Alıştırma 9.4 (İki Değişkenli Bir Jacobi Determinantı). $x=u^2+uv, y=uv^2$ dönüşümünün Jacobi determinantını bulunuz.

Çözüm.
Kısmi türevler

$$\frac{\partial x}{\partial u}=2u+v,\quad \frac{\partial x}{\partial v}=u,\quad \frac{\partial y}{\partial u}=v^2,\quad \frac{\partial y}{\partial v}=2uv$$

olduğundan

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}2u+v & u\\ v^2 & 2uv\end{vmatrix}=(2u+v)(2uv)-uv^2=4u^2v+uv^2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. ■

Alıştırma 9.5 (Üç Değişkenli Bir Jacobi Determinantı). $x = u + vw,\ y = v + wu,\ z = w + uv$ dönüşümünün Jacobi determinantını bulunuz.

Çözüm.
Kısmi türevleri (5)'e yerleştirip determinantı ilk satıra göre açalım:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} &= \begin{vmatrix} 1 & w & v \\ w & 1 & u \\ v & u & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot(1-u^2) - w\,(w-uv) + v\,(wu-v) \\ &= 1 - u^2 - w^2 + uvw + uvw - v^2 \\ &= 1 + 2uvw - u^2 - v^2 - w^2.\end{aligned}$$

■

Alıştırma 9.6 (Bir Üçgende Verilen Dönüşümle İntegral). R, köşeleri $(0,0)$, $(2,1)$ ve $(1,2)$ olan üçgen olmak üzere $\iint_R (x-3y)\,dA$ integralini $x = 2u + v$, $y = u + 2v$ dönüşümüyle hesaplayınız.

Çözüm.
***S*'yi bul.** Denklemleri u ve v için çözersek $u = (2x - y)/3$ ve $v = (2y - x)/3$ bulunur. Köşeler $(0,0) \mapsto (0,0)$, $(2,1) \mapsto (1,0)$ ve $(1,2) \mapsto (0,1)$ olur. Dönüşüm doğrusal olduğundan S, köşeleri bu üç nokta olan üçgendir:

$$S = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1 - u\}.$$

Jacobi determinantı ve integrand.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \qquad x - 3y = (2u + v) - 3(u + 2v) = -u - 5v.$$

İntegral.

$$\begin{aligned}\iint_R (x-3y)\,dA &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (-u - 5v)\cdot 3\,dv\,du \\ &= 3\int_0^1 \left[-uv - \frac{5v^2}{2}\right]_{v=0}^{v=1-u} du \\ &= 3\int_0^1 \left(-\frac{3u^2}{2} + 4u - \frac{5}{2}\right) du \\ &= 3\left(-\frac{1}{2} + 2 - \frac{5}{2}\right) = -3.\end{aligned}$$

Burada iç integralin değerini

$$-u(1-u) - \frac{5}{2}(1-u)^2 = -\frac{3}{2}u^2 + 4u - \frac{5}{2}$$

diye açtık. ■

Alıştırma 9.7 (Doğrular ve Hiperbollerle Sınırlı Bölgede İntegral). R, birinci bölgede $y = x$ ve $y = 3x$ doğruları ile $xy = 1$ ve $xy = 3$ hiperbollerinin sınırladığı bölge olmak üzere $\iint_R xy\,dA$ integralini $x = u/v$, $y = v$ dönüşümüyle hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
***S*'yi bul.** $u = xy$ ve $v = y$'dir. Sınırları sırayla yazalım: $xy = 1$ ise $u = 1$; $xy = 3$ ise $u = 3$; $y = x$ ise $v = u/v$, yani $v = \sqrt{u}$; $y = 3x$ ise $v = 3u/v$, yani $v = \sqrt{3u}$. Böylece

$$S = \left\{(u, v) \mid 1 \le u \le 3,\ \sqrt{u} \le v \le \sqrt{3u}\right\}$$

olur.
Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1/v & -u/v^2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v} > 0.$$

İntegral. $xy = u$ olduğundan

$$\begin{aligned} \iint_R xy\, dA &= \int_1^3 \int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{3u}} u \cdot \frac{1}{v}\, dv\, du = \int_1^3 u \left[\ln v\right]_{\sqrt{u}}^{\sqrt{3u}} du \\ &= \int_1^3 u \ln\sqrt{3}\, du = \frac{\ln 3}{2}\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^3 = \frac{\ln 3}{2} \cdot 4 = 2\ln 3. \end{aligned}$$

Burada $\ln\sqrt{3u} - \ln\sqrt{u} = \ln\sqrt{3} = \frac{1}{2}\ln 3$ eşitliğini kullandık. ■

Alıştırma 9.8 (Elipsoidin Hacmi). $a, b, c > 0$ olmak üzere

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$$

elipsoidinin E cisminin hacmini $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ dönüşümüyle bulunuz.

Çözüm.
***S*'yi bul.** $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ yazınca elipsoidin eşitsizliği $u^2 + v^2 + w^2 \le 1$ olur. Demek ki T, uvw-uzayındaki birim yuvar B'yi E'ye götürür.
Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc > 0.$$

Hacim. Teorem 9.2 ve birim yuvarın hacminin $\frac{4}{3}\pi$ olması kullanılırsa

$$V(E) = \iiint_E dV = \iiint_B abc\, du\, dv\, dw = abc \cdot \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi abc$$

bulunur. $a = b = c$ alınırsa yarıçapı a olan kürenin hacmi $\frac{4}{3}\pi a^3$ elde edilir. ■

Alıştırma 9.9 (Bir Carnot Çevriminin İşi). Termodinamikte ideal bir Carnot makinesinin bir çevrimde yaptığı iş, birinci bölgede $xy = a$ ve $xy = b$ eğrileri (izotermler) ile $xy^{1,4} = c$ ve $xy^{1,4} = d$ eğrilerinin (adyabatikler) sınırladığı R bölgesinin alanına eşittir; burada $0 < a < b$ ve $0 < c < d$'dir. Bu alanı hesaplayınız.

Çözüm.
Yeni değişkenler. $u = xy$ ve $v = xy^{1,4}$ alınca sınır eğrileri $u = a$, $u = b$, $v = c$ ve $v = d$ olur; yani $S = [a, b] \times [c, d]$ dikdörtgenidir.
Bire birlik. $x, y > 0$ için $v/u = y^{0,4}$'tür; buradan $y = (v/u)^{5/2}$ ve $x = u/y$ tek türlü bulunur. Yani dönüşüm bire birdir ve tersi $u, v > 0$ iken C^1'dir.
Jacobi determinantı. Ters yöndeki determinant

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ y^{1,4} & 1{,}4\,xy^{0,4} \end{vmatrix} = 1{,}4\,xy^{1,4} - xy^{1,4} = 0{,}4\,xy^{1,4} = 0{,}4\,v$$

olduğundan ters dönüşüm kuralına (Önerme 9.2) göre

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{0{,}4\,v} = \frac{5}{2v}$$

olur.
Alan.

$$\iint_R dA = \int_a^b \int_c^d \frac{5}{2v}\,dv\,du = \frac{5}{2}\,(b-a)\,\Big[\ln v\Big]_c^d = \frac{5}{2}\,(b-a)\ln\frac{d}{c}.$$

■

Alıştırma 9.10 (Bir Paralelkenarda Uygun Değişken Değiştirme). $R, x-2y=0, x-2y=4, 3x-y=1$ ve $3x-y=8$ doğrularının sınırladığı paralelkenar olmak üzere

$$\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dA$$

integralini uygun bir değişken değiştirmeyle hesaplayınız.

Çözüm.
Dönüşüm. Hem integrand hem sınırlar $u = x-2y$ ve $v = 3x-y$ seçimini önerir. Bu değişkenlerle R, $S = [0,4]\times[1,8]$ dikdörtgenine dönüşür ve integrand u/v olur. R üzerinde $3x-y \geq 1 > 0$ olduğundan integrand süreklidir.
Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1+6 = 5, \qquad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{5}.$$

İntegral.

$$\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\,dA = \int_1^8 \int_0^4 \frac{u}{v}\cdot\frac{1}{5}\,du\,dv = \frac{1}{5}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^4 \Big[\ln v\Big]_1^8 = \frac{1}{5}\cdot 8\ln 8 = \frac{8}{5}\ln 8.$$

$\ln 8 = 3\ln 2$ olduğundan sonuç $\frac{24}{5}\ln 2$ diye de yazılabilir. ■

Alıştırma 9.11 (Döndürülmüş Bir Karede Üstel İntegral). $R = \{(x,y) \mid |\,x\,|+|\,y\,| \leq 1\}$ olmak üzere $\iint_R e^{x+y}\,dA$ integralini uygun bir değişken değiştirmeyle hesaplayınız.

Çözüm.
Bölgeyi yeniden yazalım. R, köşeleri $(\pm 1, 0)$ ve $(0, \pm 1)$ olan bir karedir. Her x, y için

$$\big(\,|\,x\,|+|\,y\,|\,\big)^2 = x^2+y^2+2\,|\,xy\,| = \max\big\{\,(x+y)^2, (x-y)^2\,\big\}$$

olduğundan $|\,x\,|+|\,y\,| = \max\{|\,x+y\,|, |\,x-y\,|\}$'dir. Demek ki

$$R = \{(x,y) \mid -1 \leq x+y \leq 1, -1 \leq x-y \leq 1\}.$$

Dönüşüm. $u = x+y$, $v = x-y$ alırsak $S = [-1,1]\times[-1,1]$ olur ve integrand e^u'dur.
Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İntegral.

$$\iint_R e^{x+y}\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^u \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \left(\, e - e^{-1} \,\right) = e - e^{-1}.$$

■

Alıştırma 9.12 (Toplamın Fonksiyonunu Tek Katlı İntegrale İndirmek). f, $[0,1]$ aralığında sürekli ve R, köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(0,1)$ olan üçgen olsun.

$$\iint_R f(x+y)\,dA = \int_0^1 u\,f(u)\,du$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Dönüşüm. İntegrand yalnız $x+y$ toplamına bağlı olduğundan $u = x+y$, $v = y$ alalım. Bu denklemlerden $x = u - v$, $y = v$ çıkar; dönüşüm doğrusal ve bire birdir.
Jacobi determinantı.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

***S*'yi bul.** $R = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$ koşulları $u - v \geq 0$, $v \geq 0$, $u \leq 1$ olur:

$$S = \{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 1,\, 0 \leq v \leq u\}.$$

Sonuç. $f(x+y)$, sürekli fonksiyonların bileşkesi olarak R üzerinde süreklidir. Teorem 9.1

$$\iint_R f(x+y)\,dA = \int_0^1\int_0^u f(u)\cdot 1\,dv\,du = \int_0^1 f(u)\,\Big[\, v \,\Big]_0^u du = \int_0^1 u\,f(u)\,du$$

verir. ■

Böylece çok katlı integrallerin hesap araçlarını tamamladık: Fubini Teoremi integrali ardışık integrallere, değişken değiştirme ise zor bir bölgeyi ya da integrandı daha uygun bir biçime çevirir. Sonraki bölümde Vektör Alanları ile vektör analizine geçiyor ve integrali eğriler ile yüzeyler boyunca almaya hazırlanıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

10. Vektör Alanları

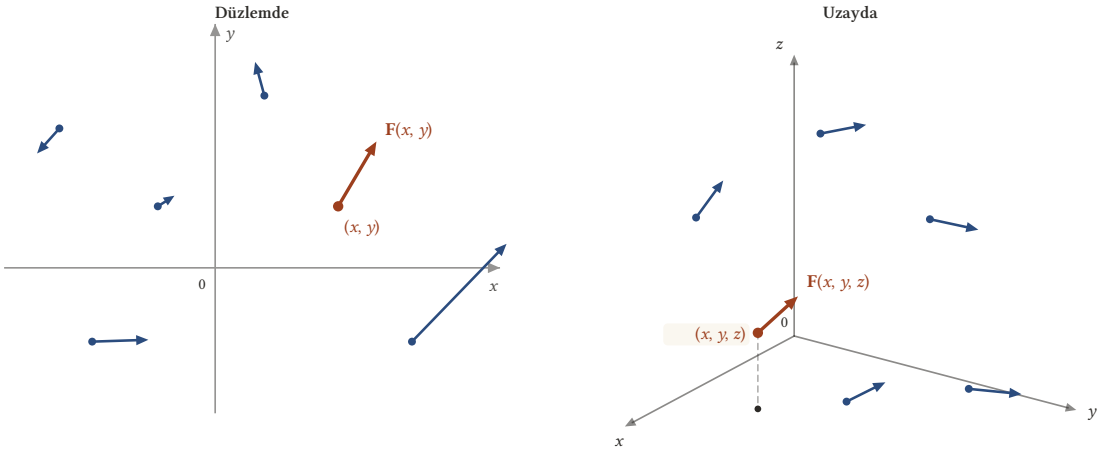
Şimdiye kadar integrallediğimiz fonksiyonlar her noktaya bir sayı atıyordu: bir levhanın yoğunluğu, bir cismin sıcaklığı, bir yüzeyin yüksekliği. Oysa doğadaki pek çok büyüklüğün yalnız bir değeri değil, bir yönü de vardır. Bir körfezin üzerinde esen rüzgârın hızı her noktada başka bir doğrultu ve şiddettedir; okyanus akıntıları ve bir uçak kanadının çevresinden akan hava da öyle. Böyle bir akışı tarif etmek için her noktaya, o noktadaki hız vektörünü atarız. Her noktaya bir vektör atayan bu tür fonksiyonlara **vektör alanı** denir.
Vektör alanlarının bir başka önemli türü **kuvvet alanlarıdır**: her noktaya, orada bulunan bir cisme etkiyen kuvveti atarlar. Dünya'nın çekim kuvveti ve bir elektrik yükünün başka bir yüke uyguladığı kuvvet bu türdendir.
Bu bölümle kitabın ikinci kısmına, vektör analizine geçiyoruz. Vektör alanlarını tanımlayıp çizmeyi öğrenecek, hız ve kuvvet alanlarını tanıyacak, son olarak bir fonksiyonun gradyanı olan alanlara, yani konservatif alanlara bakacağız. Sonraki bölümlerde vektör alanlarını eğriler ve yüzeyler boyunca integralleyecek (iş ve akı), bu integralleri Green, Stokes ve diverjans teoremleriyle birbirine bağlayacağız.

10.1 Düzlemde ve Uzayda Vektör Alanları

Vektör alanı, tanım kümesindeki her noktaya bir vektör atayan bir fonksiyondur. Önce bu fikri kesin biçimde yazalım.

Tanım 10.1 (Vektör Alanı). $D \subseteq \mathbb{R}^2$ bir düzlem bölgesi olsun. D'nin her (x, y) noktasına iki boyutlu bir $\mathbf{F}(x, y)$ vektörü atayan $\mathbf{F}$ fonksiyonuna D üzerinde bir **vektör alanı** (vector field) denir.
Benzer biçimde $E \subseteq \mathbb{R}^3$ olsun. E'nin her (x, y, z) noktasına üç boyutlu bir $\mathbf{F}(x, y, z)$ vektörü atayan $\mathbf{F}$ fonksiyonuna E üzerinde bir **vektör alanı** denir.

Yani vektör alanı, tanım kümesi düzlemin ya da uzayın bir parçası, değerleri de aynı boyutta vektörler olan bir fonksiyondur. Yeni olan, bu değerleri birer **ok** olarak düşünmemizdir: $\mathbf{F}(x, y)$ vektörünü başlangıç noktası (x, y) olan bir okla çizeriz. Bütün noktalarda ok çizemeyiz, ama birkaç temsilci noktadaki oklar alanın genel görünüşü hakkında iyi bir fikir verir.



Şekil 10.1: Bir vektör alanı her noktaya bir vektör atar. $\mathbf{F}(x, y)$ vektörünü başlangıcı (x, y) noktası olan bir okla, uzayda $\mathbf{F}(x, y, z)$ vektörünü başlangıcı (x, y, z) olan bir okla çizeriz. Birkaç temsilci noktadaki oklar alanın genel görünüşünü verir.

$\mathbf{F}(x, y)$ iki boyutlu bir vektör olduğundan onu bileşenleriyle yazabiliriz:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j} = \langle P(x,y), Q(x,y)\rangle,$$

kısaca $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$. Buradaki P ve Q, iki değişkenli reel değerli fonksiyonlardır ve $\mathbf{F}$'nin **bileşen fonksiyonları** adını alır (bkz. Analiz 4). Reel değerli fonksiyonları vektör alanlarından ayırmak için onlara **skaler alan** da denir. Uzaydaki bir vektör alanının üç bileşen fonksiyonu vardır:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}.$$

Bir (x,y,z) noktasını çoğu zaman konum vektörü $\mathbf{x} = \langle x,y,z\rangle$ ile özdeşleştirir ve $\mathbf{F}(x,y,z)$ yerine $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ yazarız. Böylece $\mathbf{F}$, her $\mathbf{x}$ vektörüne bir $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ vektörü atayan bir fonksiyon olarak görülür. Düzlemde de aynı biçimde $\mathbf{x} = \langle x,y\rangle$ yazarız.
Vektör alanının sürekliliği, vektör değerli fonksiyonların sürekliliğidir: $\mathbf{F}$, $\mathbf{a}$ noktasında süreklidir ancak ve ancak $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$ iken $\mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) \mid \to 0$ ise (bkz. Analiz 4). Vektör değerli bir fonksiyon, ancak ve ancak bütün bileşenleri sürekli olduğunda süreklidir (bkz. Analiz 4). Dolayısıyla $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ vektör alanı, ancak ve ancak P, Q ve R sürekli ise süreklidir. Kısmi türevler gibi başka kavramlar da vektör alanına bileşenleri üzerinden taşınır; "$\mathbf{F}$'nin bileşenlerinin birinci mertebeden kısmi türevleri sürekli" koşuluyla sonraki bölümlerde sık sık karşılaşacağız.

10.2 Vektör Alanlarını Çizmek

Bir vektör alanını tanımanın ilk yolu, birkaç noktadaki oklarını çizip bu oklarda bir düzen aramaktır.

Bir vektör alanını üç adımda çizmek

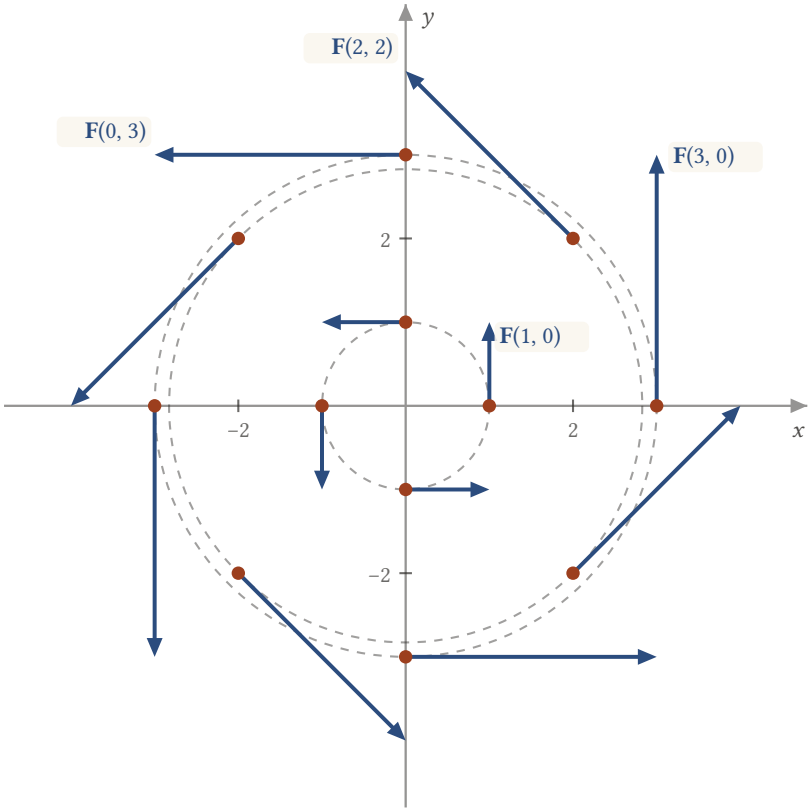
1. **Noktaları seç.** Hesabı kolay ve simetrik noktalar al: eksenler ve köşegenler üzerindeki noktalar, orijin merkezli çemberler üzerindeki noktalar.
2. **Vektörleri hesapla.** Her noktada $\mathbf{F}$'yi hesapla ve sonuçları bir tabloya yaz.
3. **Okları çiz, düzeni ara.** Her $\mathbf{F}(x,y)$ okunu (x,y) noktasından başlat. Alanın nerede sıfır olduğuna, okların nerede yatay ya da düşey olduğuna, uzunluklarının nasıl değiştiğine ve konum vektörüyle ilişkisine (paralel mi, dik mi) bak.

Örnek 10.1 (Dönme Alanı). $\mathbf{F}(x,y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ vektör alanını birkaç noktadaki vektörlerini çizerek tarif ediniz.

Çözüm.
Noktalar ve vektörler. $(1,0)$ noktasında $\mathbf{F}(1,0) = -0\,\mathbf{i} + 1\,\mathbf{j} = \mathbf{j}$ olur; yani $(1,0)$ noktasından başlayan $\langle 0,1\rangle$ okunu çizeriz. $(0,1)$ noktasında $\mathbf{F}(0,1) = -1\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} = -\mathbf{i}$ olur ve $(0,1)$'den başlayan $\langle -1,0\rangle$ okunu çizeriz. Aynı hesabı orijin merkezli üç çember üzerindeki noktalarda yapalım:

(x,y)	$\mathbf{F}(x,y)$	(x,y)	$\mathbf{F}(x,y)$
$(1,0)$	$\langle 0,1\rangle$	$(-1,0)$	$\langle 0,-1\rangle$
$(2,2)$	$\langle -2,2\rangle$	$(-2,-2)$	$\langle 2,-2\rangle$
$(3,0)$	$\langle 0,3\rangle$	$(-3,0)$	$\langle 0,-3\rangle$
$(0,1)$	$\langle -1,0\rangle$	$(0,-1)$	$\langle 1,0\rangle$
$(-2,2)$	$\langle -2,-2\rangle$	$(2,-2)$	$\langle 2,2\rangle$
$(0,3)$	$\langle -3,0\rangle$	$(0,-3)$	$\langle 3,0\rangle$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.2: Tablodaki on iki vektör, başlangıçları kendi noktalarında olacak biçimde çizildi. Her ok, orijin merkezli bir çembere (kesikli) teğettir ve uzunluğu o çemberin yarıçapına eşittir; oklar saat yönünün tersine döner.

Düzen. Şekilde her ok, orijin merkezli bir çembere teğet görünüyor. Bunu doğrulamak için $\mathbf{F}$'yi $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ konum vektörüyle iç çarpalım:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \cdot (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}) = -xy + yx = 0.$$

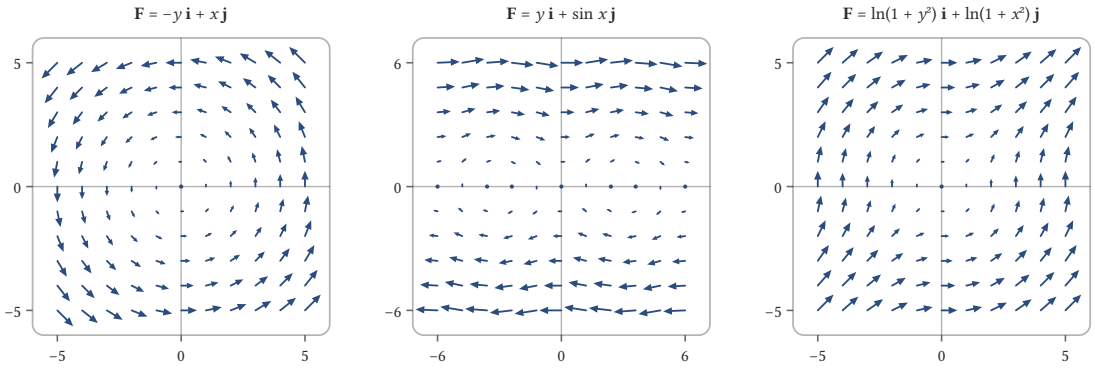
Demek ki $\mathbf{F}(x, y)$, $\langle x, y\rangle$ konum vektörüne diktir. Bir çemberin teğeti, değme noktasındaki yarıçapa dik olduğundan $\mathbf{F}(x, y)$, merkezi orijin ve yarıçapı $|\,\mathbf{x}\,| = \sqrt{x^2 + y^2}$ olan çembere teğettir. Ayrıca

$$|\,\mathbf{F}(x, y)\,| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |\,\mathbf{x}\,|$$

olduğundan okun uzunluğu çemberin yarıçapına eşittir: orijinden uzaklaştıkça oklar uzar. Son olarak x ekseninin pozitif kısmında oklar yukarı, y ekseninin pozitif kısmında sola baktığından oklar orijinin çevresinde saat yönünün tersine döner.
■

Elle ancak birkaç ok çizebiliriz. Bilgisayar programları çok sayıda noktada ok çizerek alanın görünüşünü çok daha iyi verir. Ancak oklar gerçek uzunluklarıyla çizilirse birbirinin üstüne biner; bu yüzden programlar bütün okları **aynı oranda** kısaltır. Böylece oklar birbirine çarpmaz, ama uzunlukları gerçek uzunluklarıyla orantılı kalır. Aşağıdaki ilk çizim, elle çizdiğimiz dönme alanının bilgisayarla çizilmiş hâlidir (bkz. Örnek 10.1).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.3: Bilgisayarla çizilmiş üç vektör alanı. Oklar aynı oranda kısaltıldı: birbirine çarpmazlar ama uzunlukları gerçek uzunluklarıyla orantılıdır. Soldaki alan dönme alanıdır.

İkinci alanda **i** bileşeni y olduğundan oklar x ekseninin üstünde sağa, altında sola doğrudur; x ekseninin üzerinde ise $\mathbf{F}(x,0) = \sin x\,\mathbf{j}$ düşeydir ve yönü $\sin x$'in işaretiyle değişir. Üçüncü alanda iki bileşen de hiçbir yerde negatif olmadığından oklar hep sağa ve yukarı doğrudur. x ekseni üzerinde $\mathbf{F}(x,0) = \ln(1+x^2)\,\mathbf{j}$ düşey, y ekseni üzerinde $\mathbf{F}(0,y) = \ln(1+y^2)\,\mathbf{i}$ yataydır; alan yalnız orijinde sıfırdır.
Uzaydaki bir alanı da aynı yolla, noktalardan başlayan oklarla çizeriz.

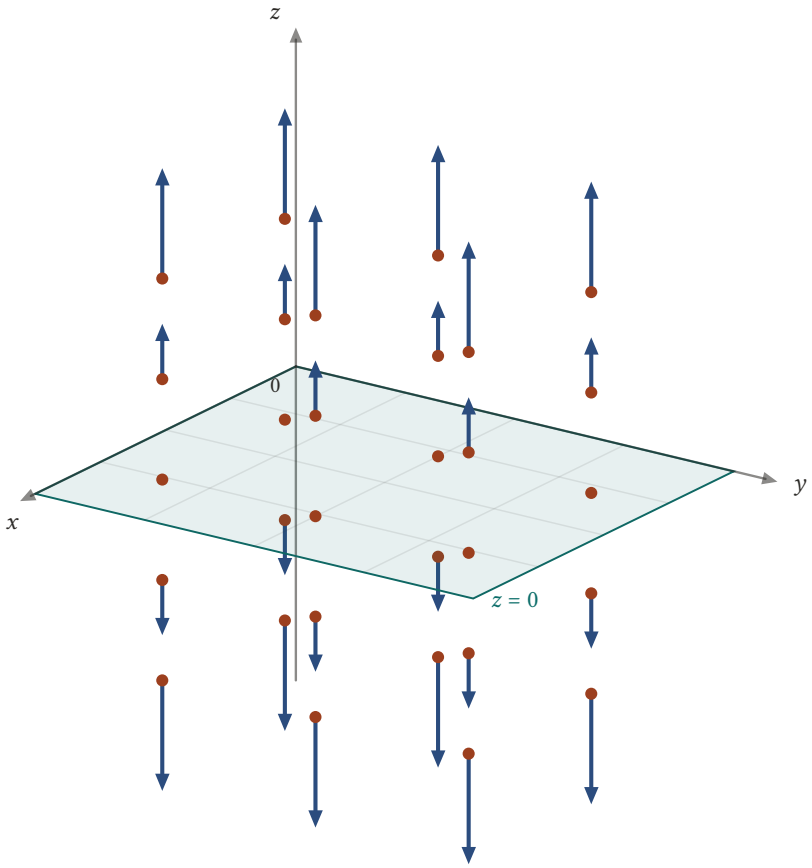
Örnek 10.2 (Düşey Bir Vektör Alanı). $\mathbb{R}^3$'te $\mathbf{F}(x,y,z) = z\,\mathbf{k}$ ile verilen vektör alanını çiziniz.

Çözüm.
$\mathbf{F}$'nin yalnız $\mathbf{k}$ bileşeni olduğundan her vektör z eksenine paraleldir, yani düşeydir. (x,y,z) noktasındaki vektör $z\,\mathbf{k}$'dır ve yalnız z'ye bağlıdır:

- $z > 0$ ise, yani nokta xy-düzleminin üstündeyse ok yukarı bakar;
- $z < 0$ ise, yani nokta düzlemin altındaysa ok aşağı bakar;
- $z = 0$ ise, yani nokta düzlemin üzerindeyse $\mathbf{F} = \mathbf{0}$'dır.

Okun uzunluğu $|\,\mathbf{F}(x,y,z)\,| = |\,z\,|$, noktanın xy-düzlemine uzaklığıdır; düzlemden uzaklaştıkça oklar uzar. Aynı yükseklikteki bütün noktalarda vektör aynıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.4: $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{k}$. Bütün oklar düşeydir: xy-düzleminin üstünde yukarı, altında aşağı bakar ve düzlemden uzaklaştıkça uzar. Düzlemin üzerindeki noktalarda vektör sıfırdır.

■

Bu alanı formülü çok basit olduğu için elle çizebildik. Uzaydaki alanların çoğunu elle çizmek ise neredeyse imkânsızdır ve bilgisayar kullanılır. Yine de bileşenlere bakarak alan hakkında çok şey söyleyebiliriz. Örneğin

$$\mathbf{F}_1 = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{F}_2 = y\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$

alanlarının formülleri birbirine benzer, ama görünüşleri çok farklıdır. $\mathbf{F}_2$'nin $\mathbf{j}$ bileşeni her noktada -2 olduğundan bütün oklar kabaca y ekseninin negatif yönüne doğru eğilir. $\mathbf{F}_1$'in $\mathbf{j}$ bileşeni ise z'dir ve xy-düzleminin iki yanında işaret değiştirir.

10.3 Hız Alanları ve Akış Çizgileri

Vektör alanlarının en sezgisel yorumu, bir akışkanın her noktadaki hızını vermeleridir.
Bir boruda kararlı biçimde akan bir sıvı düşünelim; kararlı akış, her noktadaki hızın zamanla değişmemesi demektir. Sıvının (x, y, z) noktasındaki hız vektörüne $\mathbf{V}(x, y, z)$ diyelim. $\mathbf{V}$, borunun içi olan E bölgesinin her noktasına bir vektör atadığından E üzerinde bir vektör alanıdır. Böyle alanlara **hız alanı** (velocity field) denir; okun uzunluğu o noktadaki sürati verir. Rüzgâr ve okyanus akıntıları da birer hız alanıdır. Dönme alanı da (bkz. Örnek 10.1) bir hız alanı olarak düşünülebilir: orijin çevresinde saat yönünün tersine, birim açısal hızla dönen bir tekerleğin (x, y) noktasının hızı tam olarak $-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$'dir.
Hız alanında bırakılan bir parçacık, her an bulunduğu noktadaki hızla hareket eder. Parçacığın izlediği yola bir ad verelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 10.2 (Akış Çizgisi). $\mathbf{F}$, bir D bölgesi üzerinde sürekli bir vektör alanı olsun. Bir I aralığında tanımlı, türevlenebilir bir $\mathbf{r}(t)$ eğrisi her $t \in I$ için $\mathbf{r}(t) \in D$ ve

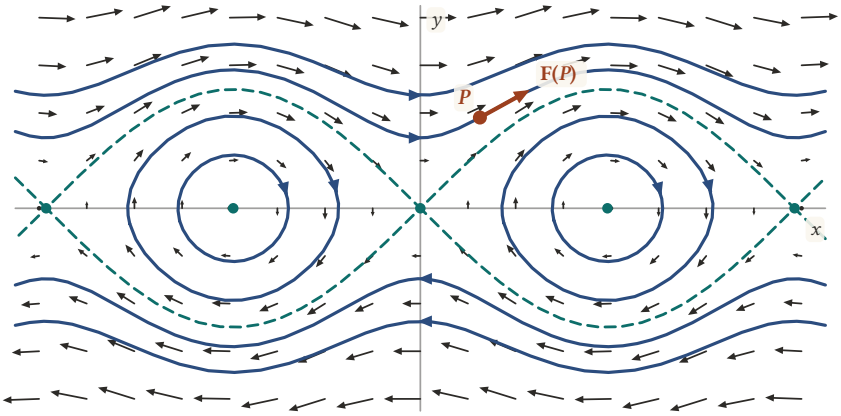
$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}\left(\,\mathbf{r}(t)\,\right)$$

koşulunu sağlıyorsa $\mathbf{r}$'ye $\mathbf{F}$'nin bir **akış çizgisi** (flow line, streamline) denir.

Yani akış çizgisi, hız alanı $\mathbf{F}$ olan bir akışkanda sürüklenen bir parçacığın yoludur: parçacık her an, bulunduğu noktadaki $\mathbf{F}$ vektörüyle hareket eder. Bu yüzden alanın vektörleri akış çizgilerine teğettir. Düzlemde $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ ve $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ yazarsak tanımdaki koşul

$$x'(t) = P\left(\,x(t), y(t)\,\right), \qquad y'(t) = Q\left(\,x(t), y(t)\,\right)$$

diferansiyel denklem sistemine dönüşür.



Şekil 10.5: $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i} + \sin x\,\mathbf{j}$ alanı (ince oklar, kısaltılmış) ve birkaç akış çizgisi (mavi). Akış çizgisi üzerindeki bir P noktasında alanın vektörü $\mathbf{F}(P)$ eğriye teğettir ve parçacığın o andaki hızını verir. Yeşil noktalarda $\mathbf{F} = \mathbf{0}$'dır; kesikli eğriler, kapalı akış çizgilerini dalgalı olanlardan ayıran akış çizgileridir.

Akış çizgisini tam olarak bulamasak bile, parçacığın kısa bir süre sonra nerede olacağını tahmin edebiliriz. Türevin tanımına göre küçük h değerleri için $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t) \approx h\,\mathbf{r}'(t)$ olduğundan

$$\mathbf{r}(t+h) \approx \mathbf{r}(t) + h\,\mathbf{F}\left(\,\mathbf{r}(t)\,\right) \tag{1}$$

olur. Yani parçacık kısa bir süre boyunca, bulunduğu noktadaki hız vektörünün doğrultusunda düz bir çizgide ilerliyormuş gibi davranır; h küçüldükçe tahmin iyileşir.
Bir eğrinin akış çizgisi olduğunu doğrulamak için tanımdaki eşitliği denetlemek yeter.

Örnek 10.3 (Dönme Alanının Akış Çizgileri). $a > 0$ olmak üzere $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j}$ çemberinin $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ dönme alanının bir akış çizgisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\mathbf{r}(t)$ noktasının koordinatları $x = a\cos t$ ve $y = a\sin t$'dir. Bu noktada alanın değeri

$$\mathbf{F}\left(\,\mathbf{r}(t)\,\right) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$$

olur. Öte yandan eğrinin türevi de

$$\mathbf{r}'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$$

olur. İki vektör her t için aynı olduğundan $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ sağlanır; çember bir akış çizgisidir. Parçacık çemberi saat yönünün tersine, $|\,\mathbf{r}'(t)\,| = a$ süratiyle dolaşır ve bir tam turu 2π sürede tamamlar. Bu, okların çemberlere teğet olduğu gözlemimizin (bkz. Örnek 10.1) hareket diliyle söylenişidir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Akış çizgilerini bulmanın yararlı bir yolu, akış boyunca değişmeyen bir büyüklük bulmaktır.

Örnek 10.4 (Akış Boyunca Korunan Bir Büyüklük). $\mathbf{F}(x,y) = y\,\mathbf{i} + \sin x\,\mathbf{j}$ alanının her akış çizgisi boyunca $y^2 + 2\cos x$ ifadesinin sabit kaldığını gösteriniz.

Çözüm.
$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$, bir I aralığında tanımlı bir akış çizgisi olsun. Tanım gereği

$$x'(t) = y(t), \qquad y'(t) = \sin x(t)$$

olur. $g(t) = y(t)^2 + 2\cos x(t)$ fonksiyonunun türevini zincir kuralıyla alalım ve bu iki eşitliği yerine koyalım:

$$\begin{aligned} g'(t) &= 2y(t)\,y'(t) - 2\sin x(t)\,x'(t) \\ &= 2y(t)\sin x(t) - 2\sin x(t)\,y(t) = 0. \end{aligned}$$

Türevi her yerde sıfır olan g, I aralığında sabittir. Demek ki her akış çizgisi, $y^2 + 2\cos x = c$ eğrilerinden birinin üzerinde kalır. Örneğin $c = 3{,}4$ için bu eğri, $y = \pm\sqrt{3{,}4 - 2\cos x}$ ile verilen iki dalgalı eğridir. $-2 < c < 2$ için ise $y^2 = c - 2\cos x \geq 0$ koşulu, yani $\cos x \leq c/2$, yalnız π'nin tek katları çevresindeki ayrık aralıklarda sağlanır; bu yüzden her $\big(\,(2k+1)\pi, 0\,\big)$, $k \in \mathbb{Z}$ noktasının çevresinde birer kapalı eğri elde edilir. Akış çizgisi tanımının altındaki şekilde çizilen eğriler bunlardır; şeklin penceresinde kapalı eğrilerden $(\pm\pi, 0)$ çevresindekiler görünür. ■

Aynı yöntem uzaydaki bir akışı anlamaya da yarar.

Örnek 10.5 (Uzayda Sarmal Bir Akış). $z > 0$ yarı uzayında tanımlı

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{y}{z}\,\mathbf{i} - \frac{x}{z}\,\mathbf{j} + \frac{z}{4}\,\mathbf{k}$$

alanının bir akış çizgisi boyunca ilerleyen parçacığın hareketini tarif ediniz.

Çözüm.
$\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ bir akış çizgisi olsun. Tanım gereği

$$x' = \frac{y}{z}, \qquad y' = -\frac{x}{z}, \qquad z' = \frac{z}{4}$$

olur.
Düşey hareket. $z > 0$ olduğundan $z' = z/4 > 0$'dır: parçacık sürekli yükselir. Yükseldikçe z' de büyür, yani parçacık giderek daha hızlı yükselir.
z eksenine uzaklık. $x^2 + y^2$ ifadesinin türevi

$$\frac{d}{dt}\,\big(\,x^2 + y^2\,\big) = 2x \cdot \frac{y}{z} + 2y \cdot \left(-\frac{x}{z}\right) = 0$$

olduğundan $x^2 + y^2$ sabittir. Parçacık z eksenine uzaklığını korur, yani ekseni z ekseni olan bir dik dairesel silindirin üzerinde kalır. Parçacık z ekseninin üzerindeyse $x = y = 0$ olarak kalır ve dümdüz yükselir.
Dönme yönü. Hızın yatay kısmı

$$\left\langle \frac{y}{z}, -\frac{x}{z} \right\rangle = -\frac{1}{z}\,\langle -y, x\rangle$$

olur; bu, dönme alanının (bkz. Örnek 10.1) $-1/z$ katıdır. Dönme alanı yukarıdan bakıldığında saat yönünün tersine döndüğünden parçacık yukarıdan bakıldığında z ekseni çevresinde **saat yönünde** döner.
Sonuç olarak parçacık bir silindirin üzerinde, saat yönünde dönerek yükselir. Yatay sürati $\sqrt{x^2 + y^2}\,/\,z$ yükseldikçe azalır, düşey sürati $z/4$ ise artar; bu yüzden sarmalın kıvrımları yukarı doğru gittikçe açılır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

10.4 Kuvvet Alanları

Fizikte en sık karşılaşılan ikinci tür vektör alanı, her noktaya o noktadaki bir cisme etkiyen kuvveti atayan **kuvvet alanıdır** (force field). İki temel örnek, kütle çekimi ve elektrik kuvvetidir.

Örnek 10.6 (Kütle Çekim Alanı). Newton'un kütle çekim yasasına göre kütleleri m ve M olan iki cisim arasındaki çekim kuvvetinin büyüklüğü

$$| \mathbf{F} | = \frac{mMG}{r^2}$$

olur; burada r cisimler arasındaki uzaklık, G ise evrensel çekim sabitidir. M kütleli cisim orijinde, m kütleli cisim $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ konumunda olsun. M'nin m'ye uyguladığı çekim kuvvetini $\mathbf{x}$'in bir fonksiyonu, yani bir vektör alanı olarak yazınız.

Çözüm.
Büyüklük. İki cisim arasındaki uzaklık $r = | \mathbf{x} |$ olduğundan $r^2 = | \mathbf{x} |^2$ ve kuvvetin büyüklüğü $mMG/ | \mathbf{x} |^2$ olur.
Yön. Çekim kuvveti m kütleli cismi orijine doğru çeker. $\mathbf{x}$ noktasından orijine doğru olan birim vektör

$$-\frac{\mathbf{x}}{| \mathbf{x} |}$$

vektörüdür.
Kuvvet. Bir vektör, büyüklüğü ile yönündeki birim vektörün çarpımıdır:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{mMG}{| \mathbf{x} |^2} \cdot \left(-\frac{\mathbf{x}}{| \mathbf{x} |} \right) = -\frac{mMG}{| \mathbf{x} |^3} \mathbf{x}.$$

Bileşenler. $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ ve $| \mathbf{x} | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ yazarsak

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}$$

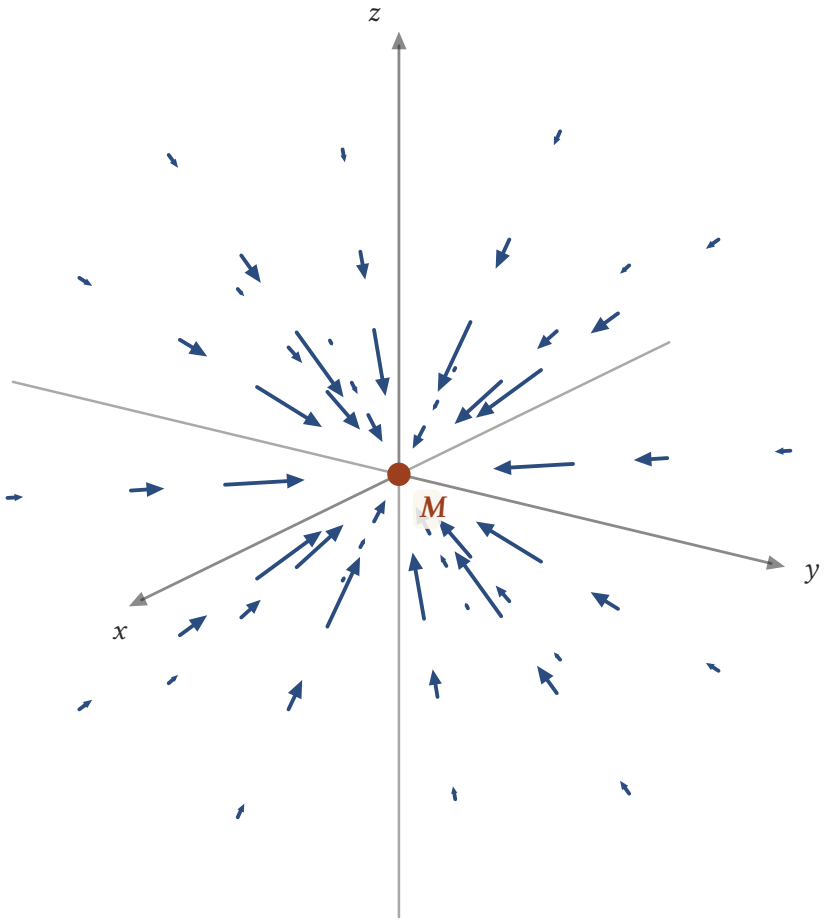
elde edilir. Bu alan orijin dışındaki her noktada tanımlıdır. ■

Bulduğumuz

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{| \mathbf{x} |^3} \mathbf{x} \tag{2}$$

alanına **kütle çekim alanı** (gravitational field) denir: uzaydaki her $\mathbf{x}$ noktasına, orada bulunan m kütleli cisme etkiyen $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ kuvvetini atar. Fizikte konum vektörü çoğu zaman $\mathbf{r}$ ile gösterilir ve aynı formül $\mathbf{F} = -(mMG/r^3)\,\mathbf{r}$ biçiminde yazılır. Kuvvetin büyüklüğü uzaklığın karesiyle ters orantılı olduğundan bu yasa bir ters kare yasasıdır. Newton bu yasayı 1687'de *Principia* adlı eserinde yayımladı.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.6: Orijindeki M kütlesinin kütle çekim alanı. Oklar orijine yönelir; büyüklükleri uzaklığın karesiyle ters orantılı olduğundan orijine yaklaştıkça hızla uzar. Oklar orijin merkezli üç küre üzerindeki noktalardan çizildi.

Elektrik yükleri arasındaki kuvvet de aynı biçimde bir vektör alanıdır.

Örnek 10.7 (Elektrik Kuvveti). Orijinde bir Q elektrik yükü bulunsun (yükler işaretlidir: pozitif ya da negatif olabilir). Coulomb yasasına göre bu yükün, konum vektörü $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$ olan noktadaki bir q yüküne uyguladığı elektrik kuvveti

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon\, qQ}{|\,\mathbf{x}\,|^3}\,\mathbf{x} \tag{3}$$

olur; burada ε, kullanılan birimlere bağlı pozitif bir sabittir. Bu kuvvetin büyüklüğünü ve yönünü inceleyiniz.

Çözüm.
Büyüklük. $|\,\mathbf{x}\,|$ uzunluğu sadeleşir:

$$|\,\mathbf{F}(\mathbf{x})\,| = \frac{\varepsilon\,|\,qQ\,|}{|\,\mathbf{x}\,|^3}\,|\,\mathbf{x}\,| = \frac{\varepsilon\,|\,qQ\,|}{|\,\mathbf{x}\,|^2}.$$

Elektrik kuvveti de uzaklığın karesiyle ters orantılıdır.
Yön. $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}$'in bir katıdır ve katsayının işareti qQ'nun işaretidir.

- Yükler aynı işaretliyse $qQ > 0$'dır ve $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}$ ile aynı yöndedir: kuvvet q yükünü orijinden uzaklaştırır, yani iticidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

- Yükler zıt işaretliyse $qQ < 0$'dır ve $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ orijine doğrudur: kuvvet çekicidir.

Karşılaştırma. (3) formülü, kütle çekim alanının (2) formülüyle aynı biçimdedir; yalnız $-mMG$ katsayısının yerini $\varepsilon\, qQ$ almıştır. Kütle çekimi her zaman çekicidir, elektrik kuvveti ise yüklerin işaretine göre çekici ya da itici olabilir. ■

Kütle çekim ve elektrik kuvvetinin alanları birer kuvvet alanıdır. Fizikçiler çoğu zaman elektrik kuvvetinin kendisi yerine birim yük başına düşen kuvvete bakar:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\,\mathbf{x}\,|^3}\,\mathbf{x}.$$

$\mathbf{E}$, orijin dışında tanımlı bir vektör alanıdır ve Q yükünün **elektrik alanı** (electric field) adını alır. $\mathbf{E}$, q'ya bağlı değildir; yalnız alanı oluşturan Q yükünü tarif eder. Coulomb bu yasayı 1785'te burulma terazisiyle yaptığı deneylerle ortaya koydu.

10.5 Gradyan Alanları

Bir skaler alandan bir vektör alanı elde etmenin en doğal yolu gradyan almaktır.
İki değişkenli bir f fonksiyonunun gradyanını biliyoruz (bkz. Analiz 4): $\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\mathbf{i} + f_y(x,y)\,\mathbf{j}$. Gradyan her noktaya bir vektör atadığından bir vektör alanıdır.

Tanım 10.3 (Gradyan Vektör Alanı). f, birinci mertebeden kısmi türevleri açık bir $D \subseteq \mathbb{R}^2$ kümesinin her noktasında var olan iki değişkenli bir fonksiyon olsun. D üzerinde

$$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)\,\mathbf{i} + f_y(x,y)\,\mathbf{j}$$

ile tanımlanan vektör alanına f'nin **gradyan vektör alanı** (kısaca gradyan alanı) denir. f üç değişkenli ise gradyan vektör alanı, $\mathbb{R}^3$'te

$$\nabla f(x,y,z) = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k}$$

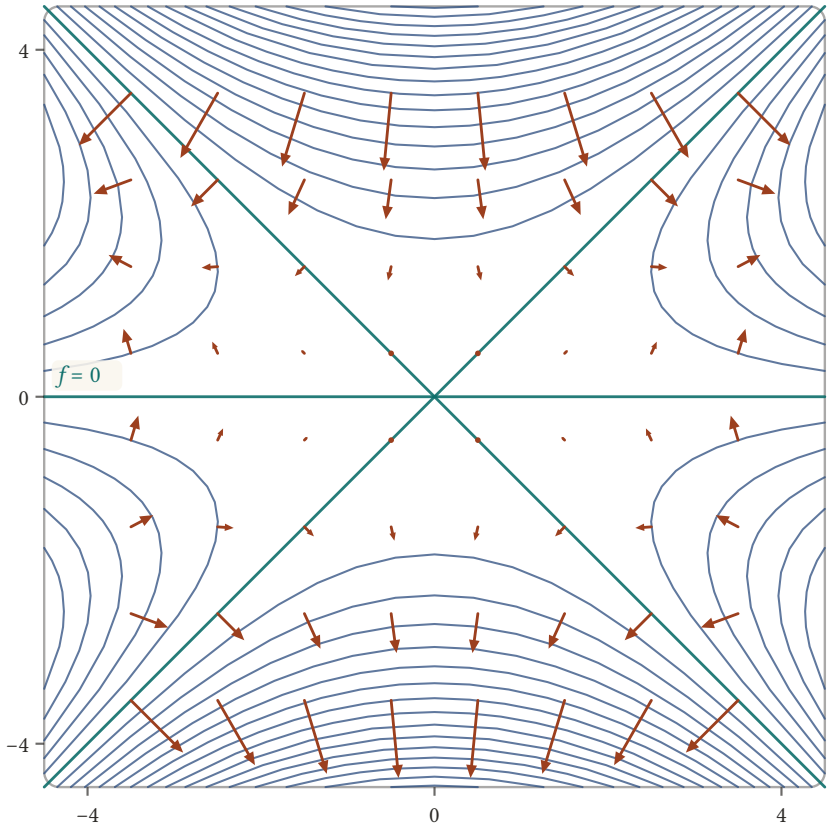
ile tanımlanan alandır.

Yani gradyan, bir skaler alanı bir vektör alanına çevirir. Gradyan alanının görünüşünü, gradyanın bildiğimiz özellikleri belirler (bkz. Analiz 4). f'nin türevlenebilir olduğu ve $\nabla f \neq \mathbf{0}$ olduğu bir noktada:

- ∇f, f'nin en hızlı arttığı yönü gösterir;
- $|\,\nabla f\,|$, bu en büyük artış hızına, yani en büyük yönlü türeve eşittir;
- ∇f, o noktadan geçen seviye eğrisine diktir.

Örnek 10.8 (Gradyan Alanı ve Seviye Eğrileri). $f(x,y) = x^2y - y^3$ fonksiyonunun gradyan vektör alanını bulunuz ve bu alanın f'nin seviye eğrileriyle ilişkisini açıklayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.7: $f(x, y) = x^2y - y^3$ fonksiyonunun seviye eğrileri (mavi; ardışık seviyeler arasındaki fark 6'dır, $f = 0$ seviyesi üç doğrudur) ve gradyan vektör alanı (turuncu, oklar aynı oranda kısaltılmış). Oklar seviye eğrilerine diktir; eğrilerin sık olduğu yerde uzun, seyrek olduğu yerde kısadır.

Çözüm.
Gradyan alanı. Kısmi türevler $f_x = 2xy$ ve $f_y = x^2 - 3y^2$ olduğundan

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

bulunur.
Sıfır seviyesi. f'yi çarpanlarına ayıralım:

$$f(x,y) = y(x^2 - y^2) = y(x-y)(x+y).$$

Buna göre $f = 0$ seviyesi $y = 0$, $y = x$ ve $y = -x$ doğrularından oluşur. Bu doğrular düzlemi altı bölgeye ayırır ve f'nin işareti komşu bölgelerde farklıdır. Orijinde $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$'dır.
Diklik. Şekildeki gradyan vektörleri seviye eğrilerine diktir. Bunu bir noktada doğrulayalım. $(2,1)$ noktasında $f(2,1) = 4 - 1 = 3$ ve $\nabla f(2,1) = \langle 4, 1\rangle$ olur. $x^2y - y^3 = 3$ seviye eğrisinin $(2,1)$ noktasındaki eğimi kapalı türevle

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(2,1)}{f_y(2,1)} = -\frac{4}{1} = -4$$

bulunur; yani $\langle 1, -4\rangle$ vektörü eğriye teğettir. $\langle 4,1\rangle \cdot \langle 1,-4\rangle = 4 - 4 = 0$ olduğundan gradyan, teğete diktir.
Uzunluk. Gradyan vektörleri seviye eğrilerinin sık olduğu yerlerde uzun, seyrek olduğu yerlerde kısadır. Nedeni şudur: $|\,\nabla f\,|$, f'nin en büyük yönlü türevi, yani en hızlı değişim hızıdır. Eşit aralıklı

 CC BY-NC-SA 4.0

seviyelere ait eğrilerin birbirine yakın olması, f'nin kısa bir mesafede çok değiştiğini, yani grafiğin orada dik olduğunu gösterir. Orijin çevresinde ise f yavaş değişir; eğriler seyrek, oklar kısadır. ■

10.6 Konservatif Vektör Alanları

Her vektör alanı bir fonksiyonun gradyanı değildir; gradyan olan alanlar özel bir ad alır.

Tanım 10.4 (Konservatif Vektör Alanı ve Potansiyel Fonksiyon). Bir $\mathbf{F}$ vektör alanı bir f skaler fonksiyonunun gradyanı ise, yani tanım kümesinin her noktasında $\mathbf{F} = \nabla f$ olacak biçimde bir f fonksiyonu varsa, $\mathbf{F}$'ye **konservatif vektör alanı** (conservative vector field) denir. Bu durumda f'ye $\mathbf{F}$'nin bir **potansiyel fonksiyonu** denir.

Yani konservatif alan, gradyan alanının başka bir adıdır; ama soru bu kez tersten sorulur: $\mathbf{F}$ verildiğinde onu gradyan olarak yazan bir f var mıdır? Bileşenlerle söylersek $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ alanının konservatif olması,

$$P = f_x, \qquad Q = f_y, \qquad R = f_z$$

olacak biçimde bir f bulunması demektir. Potansiyel fonksiyon tek değildir: f bir potansiyel fonksiyonsa her C sabiti için $\nabla(f + C) = \nabla f$ olduğundan $f + C$ de bir potansiyel fonksiyondur. Konservatif (korunumlu) adı fizikten gelir: bu tür kuvvet alanlarında enerjinin korunduğunu ileride göreceğiz.
Konservatif alanlar fizikte sık sık karşımıza çıkar. İlk örneğimiz kütle çekim alanıdır.

Örnek 10.9 (Kütle Çekim Alanı Konservatiftir). Kütle çekim alanının (bkz. Örnek 10.6) konservatif olduğunu,

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

fonksiyonunun bir potansiyel fonksiyonu olduğunu göstererek kanıtlayınız.

Çözüm.
$f = mMG\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ yazıp zincir kuralıyla x'e göre türev alalım:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= mMG \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x \\ &= \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

f'nin formülünde x, y ve z aynı rolü oynadığından aynı hesap

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

verir. Bunlar kütle çekim alanının bileşen fonksiyonlarıdır (bkz. Örnek 10.6):

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k} = \mathbf{F}(x, y, z).$$

Demek ki kütle çekim alanı, orijin dışındaki her noktada f'nin gradyanıdır ve konservatiftir. ■

Aynı hesap elektrik alanına da uygulanır. $mMG = 1$ alınırsa yukarıdaki hesap $\nabla\left(1/\,|\,\mathbf{x}\,|\right) = -\mathbf{x}/\,|\,\mathbf{x}\,|^3$ olduğunu gösterir; buradan

$$\nabla\left(-\frac{\varepsilon Q}{|\,\mathbf{x}\,|}\right) = \frac{\varepsilon Q}{|\,\mathbf{x}\,|^3}\,\mathbf{x} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$$

 CC BY-NC-SA 4.0

çıkar, yani elektrik alanı da konservatiftir. Fizikte işaret çoğu zaman ters seçilir: kuvvet $\mathbf{F} = -\nabla V$ biçiminde yazılır ve $V = -f$ fonksiyonuna potansiyel enerji denir. Biz matematikteki $\mathbf{F} = \nabla f$ uzlaşımını kullanıyoruz.
Her alanın konservatif olmadığını görmek için dönme alanına bakalım.

Örnek 10.10 (Konservatif Olmayan Bir Alan). Dönme alanı $\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$'nin $\mathbb{R}^2$'de konservatif olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Tersini varsayalım: $\mathbb{R}^2$'de $\nabla f = \mathbf{F}$ olacak biçimde bir f fonksiyonu olsun. Bileşenleri eşitlersek her (x, y) için

$$f_x(x, y) = -y, \qquad f_y(x, y) = x$$

olur. Bu iki fonksiyonun kısmi türevleri her yerde vardır:

$$f_{xx} = 0, \qquad f_{xy} = (f_x)_y = -1, \qquad f_{yx} = (f_y)_x = 1, \qquad f_{yy} = 0.$$

Demek ki f'nin bütün ikinci mertebeden kısmi türevleri var ve süreklidir. Clairaut Teoremi'ne göre (bkz. Analiz 4) bu durumda $f_{xy} = f_{yx}$ olmalıdır. Oysa $-1 \neq 1$'dir. Bu çelişki, böyle bir f'nin bulunamayacağını gösterir; dönme alanı konservatif değildir. ■

Bu örnekteki fikir, bir alanın konservatif olup olmadığını anlamak için genel bir ölçüte dönüşecek. Bu ölçütleri Eğrisel İntegraller için Temel Teorem ve Rotasyonel ve Diverjans bölümlerinde göreceğiz.

10.7 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar alanları çizmeyi ve tarif etmeyi, gradyan alanlarını ve akış çizgilerini kapsar.

Alıştırma 10.1 (Bir Düzlem Alanını Çizmek). $\mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i} + (y - x)\,\mathbf{j}$ vektör alanını çiziniz.

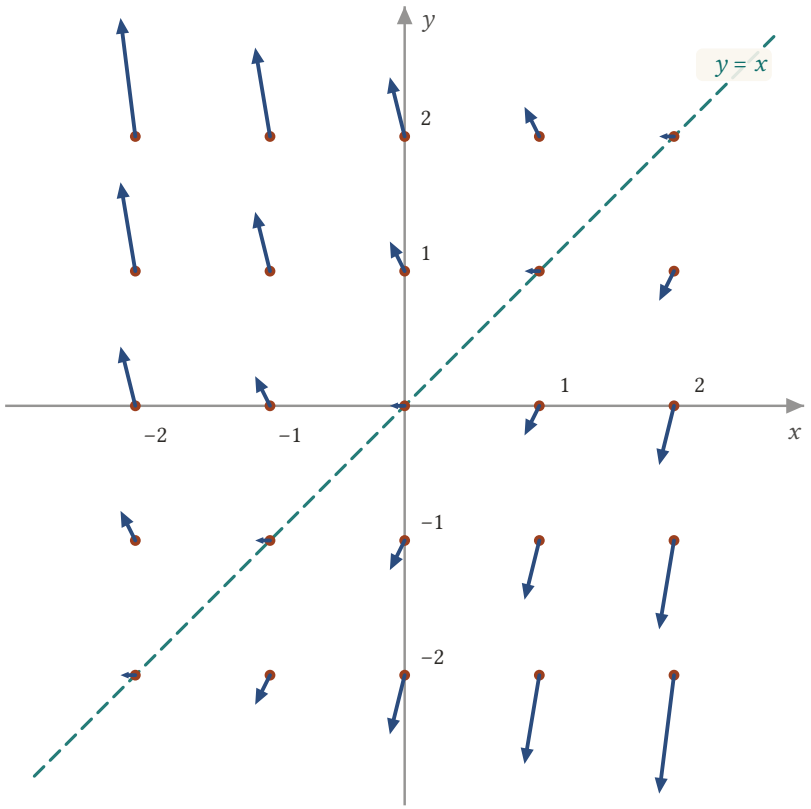
Çözüm.
Yatay bileşen. $P = -\frac{1}{2}$ sabittir: her okun yatay bileşeni aynıdır ve sola doğrudur.
Düşey bileşen. $Q = y - x$ yalnız $y - x$ farkına bağlıdır. Dolayısıyla her $y = x + c$ doğrusu üzerinde alan sabittir.

- $y = x$ doğrusu üzerinde $Q = 0$ ve $\mathbf{F} = -\frac{1}{2}\,\mathbf{i}$'dir: oklar kısa ve yataydır, sola bakar.
- Doğrunun üstünde ($y > x$) $Q > 0$'dır: oklar sola ve yukarı doğrudur.
- Doğrunun altında ($y < x$) $Q < 0$'dır: oklar sola ve aşağı doğrudur.

Doğrudan uzaklaştıkça $|\,Q\,| = |\,y - x\,|$ büyüdüğünden oklar dikleşir ve uzar. Birkaç değer:

(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$	(x, y)	$\mathbf{F}(x, y)$
$(0, 0)$	$\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle$	$(1, 1)$	$\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle$
$(0, 1)$	$\langle -\frac{1}{2}, 1\rangle$	$(1, 0)$	$\langle -\frac{1}{2}, -1\rangle$
$(0, 2)$	$\langle -\frac{1}{2}, 2\rangle$	$(2, 0)$	$\langle -\frac{1}{2}, -2\rangle$
$(-2, 2)$	$\langle -\frac{1}{2}, 4\rangle$	$(2, -2)$	$\langle -\frac{1}{2}, -4\rangle$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.8: $\mathbf{F}(x, y) = -\tfrac{1}{2}\,\mathbf{i} + (y - x)\,\mathbf{j}$ alanının tam sayı koordinatlı noktalardaki vektörleri (hepsi aynı oranda kısaltılmış). Oklar $y = x$ doğrusu üzerinde yatay ve sola doğrudur; doğrunun üstünde yukarı, altında aşağı eğilir ve doğrudan uzaklaştıkça uzar.

■

Alıştırma 10.2 (Okların Yatay ve Düşey Olduğu Doğrular). $\mathbf{F}(x, y) = \langle y, y + 2\rangle$ alanının görünüşünü, okların düşey ve yatay olduğu yerleri bularak tarif ediniz.

Çözüm.
x'ten bağımsızlık. İki bileşen de yalnız y'ye bağlıdır; her yatay doğru üzerinde bütün oklar aynıdır.
Düşey oklar. Ok, $P = y = 0$ olduğunda düşeydir. x ekseni üzerinde $\mathbf{F} = \langle 0, 2\rangle$ olur: oklar yukarı bakar ve uzunlukları 2'dir.
Yatay oklar. Ok, $Q = y + 2 = 0$ olduğunda yataydır. $y = -2$ doğrusu üzerinde $\mathbf{F} = \langle -2, 0\rangle$ olur: oklar sola bakar ve uzunlukları 2'dir.
Bölgeler. Bileşenlerin işaretine bakalım:

- $y > 0$ ise $P > 0$ ve $Q > 0$'dır: oklar sağa ve yukarı doğrudur.
- $-2 < y < 0$ ise $P < 0$ ve $Q > 0$'dır: oklar sola ve yukarı doğrudur.
- $y < -2$ ise $P < 0$ ve $Q < 0$'dır: oklar sola ve aşağı doğrudur.

Uzunluk. Okun uzunluğunun karesi

$$|\,\mathbf{F}\,|^2 = y^2 + (y+2)^2 = 2(y+1)^2 + 2$$

olduğundan en kısa oklar $y = -1$ doğrusundadır ve uzunlukları $\sqrt{2}$'dir. $|\,y\,|$ büyüdükçe oklar uzar ve $(y + 2)/y \to 1$ olduğundan $y = x$ doğrultusuna paralelleşir: üstte sağa ve yukarı, altta sola ve aşağı. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 10.3 (Yukarı Eğilen Bir Uzay Alanı). $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ alanının görünüşünü tarif ediniz.

Çözüm.
***z*'den bağımsızlık.** Bileşenler z'ye bağlı değildir; aynı düşey doğru üzerindeki bütün noktalarda vektör aynıdır.
Yatay kısım. $x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, noktanın xy-düzlemindeki izdüşümünün konum vektörüdür. Bu yüzden okların yatay kısmı z ekseninden dışarı doğrudur ve uzunluğu, noktanın z eksenine uzaklığı olan $r = \sqrt{x^2+y^2}$'dir.
Düşey kısım. $\mathbf{k}$ bileşeni her yerde 3'tür; bütün oklar yukarı eğilir. z ekseni üzerinde ($x = y = 0$) $\mathbf{F} = 3\,\mathbf{k}$ olur ve oklar düşeydir.
Eğim. Okun yatayla yaptığı α açısı için $\tan\alpha = 3/r$ ve okun uzunluğu $\sqrt{r^2+9}$ olur. z ekseninden uzaklaştıkça oklar hem uzar hem yataylaşır. Alan, z ekseninden her yöne, yukarı doğru açılan bir fıskiyeye benzer. ■

Alıştırma 10.4 (Alanın Sıfır Olduğu Bir Çember). $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$ ve $r = |\,\mathbf{x}\,|$ olmak üzere $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (r^2 - 2r)\,\mathbf{x}$ alanının sıfır olduğu noktaları bularak alanın görünüşünü açıklayınız.

Çözüm.
Sıfırlar. $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = r(r-2)\,\mathbf{x}$ yazalım. Bu vektörün sıfır olması için $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ya da $r(r-2) = 0$ olmalıdır; yani $r = 0$ ya da $r = 2$. Alan orijinde ve $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin her noktasında sıfırdır.
Yön. $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, konum vektörünün $r(r-2)$ katıdır; oklar yarıçap doğrultusundadır.

- $0 < r < 2$ ise $r(r-2) < 0$'dır: oklar orijine doğru, içeri bakar.
- $r > 2$ ise $r(r-2) > 0$'dır: oklar orijinden dışarı bakar.

Uzunluk. $|\,\mathbf{F}(\mathbf{x})\,| = r\,|\,r-2\,|\cdot r = r^2\,|\,r-2\,|$ olur. Çemberin içinde bu sayı $r^2(2-r)$'dir; türevi $4r - 3r^2$, $r = 4/3$'te sıfır olur ve en büyük değer $\frac{16}{9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{32}{27}$'dir. Yani içerideki oklar kısadır; örneğin $r = 1$'de uzunluk 1'dir. Çemberin dışında ise uzunluk hızla büyür; örneğin $r = 3$'te 9'dur.
Görünüş. Oklar $r = 2$ çemberinin içinde orijine, dışında orijinden uzağa doğrudur ve çemberin üzerinde sıfırdır. Bu alanı bir hız alanı olarak düşünürsek çemberin içindeki parçacıklar orijine doğru, dışındakiler orijinden uzağa sürüklenir; çemberin üzerindeki parçacıklar ise yerinde kalır. ■

Alıştırma 10.5 (İki Değişkenli Bir Gradyan Alanı). $f(x,y) = y\sin(xy)$ fonksiyonunun gradyan vektör alanını bulunuz.

Çözüm.
***x*'e göre türev.** y sabit tutulur; zincir kuralıyla $\dfrac{\partial}{\partial x}\sin(xy) = y\cos(xy)$ olduğundan

$$f_x = y\cdot y\cos(xy) = y^2\cos(xy)$$

olur.
***y*'ye göre türev.** f, y ile $\sin(xy)$'nin çarpımıdır; çarpım kuralı ve $\dfrac{\partial}{\partial y}\sin(xy) = x\cos(xy)$ ile

$$f_y = \sin(xy) + y\cdot x\cos(xy) = \sin(xy) + xy\cos(xy)$$

bulunur.
Gradyan alanı.

$$\nabla f(x,y) = y^2\cos(xy)\,\mathbf{i} + \big[\,\sin(xy) + xy\cos(xy)\,\big]\,\mathbf{j}.$$

■

Alıştırma 10.6 (Üç Değişkenli Bir Gradyan Alanı). $f(x,y,z) = x^2 y\,e^{y/z}$ fonksiyonunun gradyan vektör alanını bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
f, $z \neq 0$ olan noktalarda tanımlıdır. Üç kısmi türevi sırayla alalım.
***x*'e göre.** $y\,e^{y/z}$ çarpanı sabittir:

$$f_x = 2xy\,e^{y/z}.$$

***y*'ye göre.** x^2 sabittir; $y\,e^{y/z}$ çarpımına çarpım kuralını uygulayalım. $\dfrac{\partial}{\partial y}e^{y/z} = \dfrac{1}{z}\,e^{y/z}$ olduğundan

$$f_y = x^2\left(e^{y/z} + \frac{y}{z}\,e^{y/z}\right) = x^2\left(1 + \frac{y}{z}\right)e^{y/z}$$

olur.
***z*'ye göre.** $x^2 y$ sabittir ve $\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{y}{z} = -\dfrac{y}{z^2}$ olduğundan

$$f_z = x^2 y \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right)e^{y/z} = -\frac{x^2y^2}{z^2}\,e^{y/z}$$

bulunur.
Gradyan alanı.

$$\nabla f(x,y,z) = 2xy\,e^{y/z}\,\mathbf{i} + x^2\left(1+\frac{y}{z}\right)e^{y/z}\,\mathbf{j} - \frac{x^2y^2}{z^2}\,e^{y/z}\,\mathbf{k}.$$

■

Alıştırma 10.7 (Köşegene Dik Bir Gradyan Alanı). $f(x,y) = \frac{1}{2}(x-y)^2$ fonksiyonunun gradyan vektör alanını bularak bu alanı tarif ediniz.

Çözüm.
Gradyan alanı. Zincir kuralıyla $f_x = (x-y)\cdot 1$ ve $f_y = (x-y)\cdot(-1)$ olduğundan

$$\nabla f(x,y) = (x-y)\,\mathbf{i} + (y-x)\,\mathbf{j} = (x-y)(\mathbf{i}-\mathbf{j})$$

bulunur.
Doğrultu. Her ok $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ vektörünün bir katıdır; yani bütün oklar $y=x$ doğrusuna diktir. $y=x$ doğrusu üzerinde $\nabla f = \mathbf{0}$'dır.
Yön. Doğrunun altında $(x>y)$ oklar $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ yönünde, yani sağa ve aşağı; üstünde $(x<y)$ $-\mathbf{i}+\mathbf{j}$ yönünde, yani sola ve yukarı bakar. Her iki durumda da oklar $y=x$ doğrusundan uzağa doğrudur.
Uzunluk. $\mid \nabla f \mid = \sqrt{2}\mid x-y \mid$ olur. (x,y) noktasının $y=x$ doğrusuna uzaklığı $\mid x-y \mid/\sqrt{2}$ olduğundan okun uzunluğu bu uzaklığın iki katıdır.
Seviye eğrileri. $f=c$ eğrileri $x-y = \pm\sqrt{2c}$ doğrularıdır, yani $y=x$'e paralel doğrulardır. Gradyan bu doğrulara diktir ve f'nin arttığı yöne, $y=x$ doğrusundan uzağa bakar. ■

Alıştırma 10.8 (Elips Biçimli Seviye Eğrileri). $f(x,y) = \ln(1+x^2+2y^2)$ fonksiyonunun gradyan vektör alanını bularak bu alanın f'nin seviye eğrileriyle ilişkisini açıklayınız.

Çözüm.
Gradyan alanı. Zincir kuralıyla

$$\nabla f(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+2y^2}\,\mathbf{i} + \frac{4y}{1+x^2+2y^2}\,\mathbf{j}$$

bulunur.
Seviye eğrileri. $f(x,y)=c$ eşitliği $x^2+2y^2 = e^c - 1$ demektir. $c>0$ için bunlar merkezi orijin olan elipslerdir; $c=0$ seviyesi yalnız orijindir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Diklik. $x^2+2y^2=k$ elipsinde kapalı türev $2x+4y\,y'=0$ verir; bu yüzden $\langle 2y,-x\rangle$ vektörü elipse teğettir. ∇f, $\langle 2x,4y\rangle$ vektörünün pozitif bir katıdır ve

$$\langle 2x,4y\rangle\cdot\langle 2y,-x\rangle = 4xy-4xy=0$$

olduğundan gradyan elipslere diktir. Ayrıca f, x^2+2y^2 büyüdükçe arttığından oklar elipslerden dışarı doğrudur.
Uzunluk. x ekseni üzerinde $\mid\nabla f\mid = \dfrac{2\mid x\mid}{1+x^2}$'dir; bu değer en çok 1'dir ve $\mid x\mid=1$'de alınır. y ekseni üzerinde $\mid\nabla f\mid = \dfrac{4\mid y\mid}{1+2y^2}$'dir; en çok $\sqrt{2}$'dir ve $\mid y\mid = 1/\sqrt{2}$'de alınır. Oklar orijine yakın yerde ve çok uzakta kısa, aradaki halkada uzundur. Eşit aralıklı seviyelerin elipsleri de bu halkada en sık, orijin yakınında ve uzakta seyrektir. ■

Alıştırma 10.9 (Hız Alanında Konum Tahmini). Bir parçacık $\mathbf{V}(x,y)=\langle x^2,\,x+y^2\rangle$ hız alanında, yani bu alanın bir akış çizgisi boyunca hareket ediyor. $t=3$ anında $(2,1)$ noktasında olan parçacığın $t=3{,}01$ anındaki konumunu tahmin ediniz.

Çözüm.
(1) yaklaşımını $t=3$ ve $h=0{,}01$ ile kullanacağız.
Hız. Parçacığın $t=3$ anındaki hızı, bulunduğu noktadaki alanın değeridir:

$$\mathbf{V}(2,1)=\langle 2^2,\,2+1^2\rangle=\langle 4,3\rangle.$$

Tahmin.

$$\mathbf{r}(3{,}01)\approx\langle 2,1\rangle+0{,}01\,\langle 4,3\rangle=\langle 2{,}04;\,1{,}03\rangle.$$

Parçacık $t=3{,}01$ anında yaklaşık olarak $(2{,}04;\,1{,}03)$ noktasındadır. ■

Alıştırma 10.10 (Orijinden Başlayan Bir Akış Çizgisi). $t=0$ anında orijinde bulunan bir parçacık $\mathbf{F}(x,y)=\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}$ hız alanında hareket ediyor. Parçacığın izlediği yolu bulunuz.

Çözüm.
Denklemler. Parçacığın yolu $\mathbf{r}(t)=\langle x(t),y(t)\rangle$ bir akış çizgisidir:

$$x'(t)=1,\qquad y'(t)=x(t),\qquad x(0)=y(0)=0.$$

$\boldsymbol{x(t)}$**.** $x'=1$ ve $x(0)=0$ olduğundan $x(t)=t$ olur.
$\boldsymbol{y(t)}$**.** Bunu ikinci denklemde yerine koyarsak $y'(t)=t$ olur; $y(0)=0$ koşuluyla $y(t)=t^2/2$ bulunur.
Yol. $\mathbf{r}(t)=t\,\mathbf{i}+\tfrac12 t^2\,\mathbf{j}$ ve $t=x$ olduğundan parçacık

$$y=\frac{x^2}{2}$$

parabolü üzerinde hareket eder. Doğrulama: $\mathbf{r}'(t)=\langle 1,t\rangle$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))=\langle 1,t\rangle$ aynıdır.
Bütün akış çizgileri. Her akış çizgisinde $x'=1\neq 0$ olduğundan eğri x'in bir fonksiyonu olarak yazılabilir ve zincir kuralı

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=x$$

verir. Buradan $y=\tfrac12 x^2+C$ çıkar: alanın bütün akış çizgileri bu parabolün düşey ötelemeleridir. ■

Alıştırma 10.11 (Hiperbol Biçimli Akış Çizgileri). $\mathbf{F}(x,y)=x\,\mathbf{i}-y\,\mathbf{j}$ alanının $t=0$ anında $(1,1)$ noktasından geçen akış çizgisini bulunuz.

Çözüm.
Denklemler. Akış çizgisi $\mathbf{r}(t)=\langle x(t),y(t)\rangle$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x'(t) = x(t), \qquad y'(t) = -y(t), \qquad x(0) = y(0) = 1$$

olur.
Korunan büyüklük. Çarpım kuralıyla

$$\frac{d}{dt}(xy) = x'y + xy' = xy - xy = 0$$

olduğundan xy her akış çizgisi boyunca sabittir. Alanın akış çizgileri $xy = C$ hiperbolleri (ve $C = 0$ için eksenler) üzerinde kalır. $(1, 1)$ noktasında $xy = 1$'dir.
Çözüm. $\left(x\,e^{-t}\right)' = x'\,e^{-t} - x\,e^{-t} = 0$ olduğundan $x\,e^{-t}$ sabittir; $x(0) = 1$ ile $x(t) = e^{t}$ bulunur. Aynı biçimde $\left(y\,e^{t}\right)' = y'\,e^{t} + y\,e^{t} = 0$ olduğundan $y(t) = e^{-t}$ olur.
Yol. $x(t) = e^{t}$ bütün pozitif değerleri alır ve $x(t)\,y(t) = 1$'dir. Akış çizgisi, $xy = 1$ hiperbolünün sağ kolu, yani

$$y = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

eğrisidir. t arttıkça x büyür, y sıfıra yaklaşır: parçacık sağa doğru ilerleyerek x eksenine yaklaşır. ■

Vektör alanlarını tanıdığımıza göre onları integrallemeye hazırız. Sonraki bölümde Eğrisel İntegraller ile bir fonksiyonu ve bir vektör alanını bir eğri boyunca integralleyecek, bir kuvvet alanının bir parçacığı bir eğri boyunca hareket ettirirken yaptığı işi hesaplayacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

11. Eğrisel İntegraller

Tek değişkenli integralde bir fonksiyonu bir $[a, b]$ aralığı boyunca topluyorduk: aralığı küçük parçalara böler, her parçanın uzunluğunu fonksiyonun o parçadaki bir değeriyle çarpar, toplar ve limit alırdık. Bu bölümde aynı fikri bir eğri boyunca uygulayacağız. Aralık yerine bir C eğrisini küçük yaylara böleceğiz ve parçaların uzunlukları yerine bu yayların uzunluklarını kullanacağız. Böyle elde edilen integrallere **eğrisel integral** (line integral) denir. Eğrisel integraller 19. yüzyılın başlarında akışkanların akışı, kuvvetler, elektrik ve manyetizma problemleri için geliştirildi.
İki tür eğrisel integral göreceğiz. Birincisi bir skaler fonksiyonu eğri boyunca yay uzunluğuna göre toplar; ince bir telin kütlesi ya da bir eğrinin üzerine dikilmiş bir perdenin alanı bu türdendir. İkincisi bir vektör alanının eğriye teğet bileşenini toplar; bir kuvvet alanının bir parçacığı eğri boyunca hareket ettirirken yaptığı iş bu türdendir. Vektör Alanları bölümünde tanıdığımız vektör alanları (bkz. Tanım 10.1) böylece ilk kez bir integralin içine girecek.

11.1 Yay Uzunluğuna Göre Eğrisel İntegral

Önce eğriyi küçük yaylara bölelim ve tek değişkenli integraldeki Riemann toplamının eğri üzerindeki karşılığını kuralım.
Düzlemde bir C eğrisi

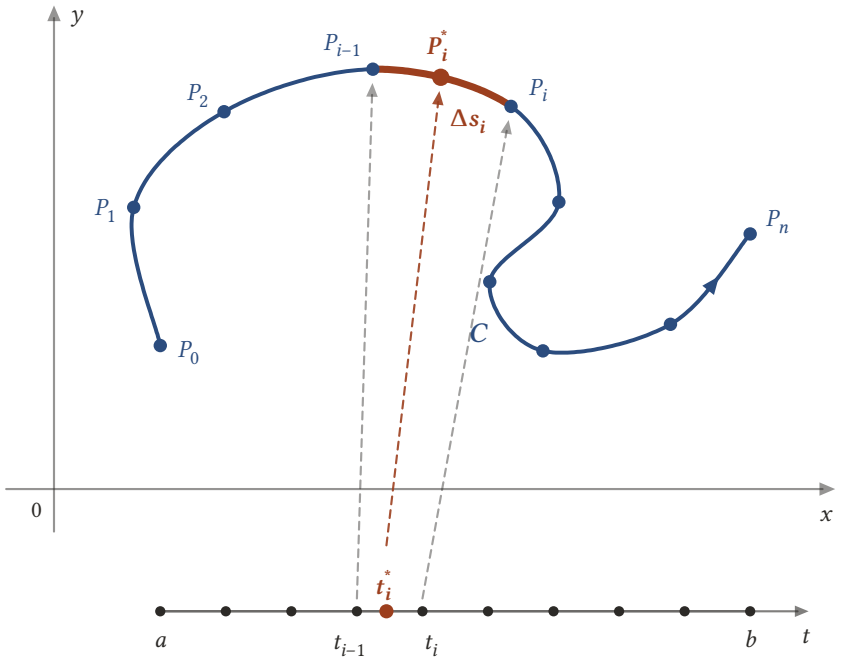
$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad a \le t \le b \tag{1}$$

parametrik denklemleriyle, yani $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ vektör denklemiyle verilsin. C'nin **düzgün** (smooth) olduğunu varsayacağız: $\mathbf{r}'$ sürekli ve her t için $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$. Yani eğrinin her noktasında sıfırdan farklı ve sürekli değişen bir hız vektörü vardır; eğride sivri uç ya da kırılma yoktur. Ayrıca $\mathbf{r}$'nin C'yi **bir kez** katettiğini, yani farklı t değerlerinde farklı noktalar verdiğini varsayacağız. Tek istisna kapalı eğrilerdir: onlarda başlangıç ve bitiş noktası çakışır, $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ olur.
$[a, b]$ aralığını n eşit parçaya bölelim: $\Delta t = (b - a)/n$ ve $t_i = a + i\,\Delta t$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ olsun. $x_i = x(t_i)$ ve $y_i = y(t_i)$ olmak üzere $P_i(x_i, y_i) = \mathbf{r}(t_i)$ noktaları C'yi n alt yaya böler. i-inci alt yay P_{i-1}'den P_i'ye gider; uzunluğunu Δs_i ile gösterelim. Her alt yaydan bir $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ noktası seçelim. Bu nokta $[t_{i-1}, t_i]$ aralığındaki bir t_i^* parametre değerine karşılık gelir: $P_i^* = \mathbf{r}(t_i^*)$.
Şimdi f, tanım kümesi C'yi içeren iki değişkenli bir fonksiyon olsun. f'nin P_i^* noktasındaki değerini i-inci alt yayın uzunluğuyla çarpıp toplayalım:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i.$$

Bu toplam bir Riemann toplamına benzer; aralık parçalarının uzunlukları yerine burada alt yayların uzunlukları Δs_i vardır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.1: $[a, b]$ parametre aralığı n eşit parçaya bölününce C eğrisi de $P_0, P_1, \ldots, P_n$ noktalarıyla n alt yaya bölünür; $P_i = \mathbf{r}(t_i)$ olur. i-inci alt yayın uzunluğu Δs_i, üzerinden seçilen nokta $P_i^* = \mathbf{r}(t_i^*)$ noktasıdır.

Tanım 11.1 (Yay Uzunluğuna Göre Eğrisel İntegral). f, (1) denklemleriyle verilen düzgün bir C eğrisi üzerinde tanımlı olsun. P_i^* noktaları nasıl seçilirse seçilsin

$$\int_C f(x,y)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$$

limiti var ve aynıysa bu sayıya f'nin C boyunca **yay uzunluğuna göre eğrisel integrali** denir.
C uzayda $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, $a \le t \le b$ ile verilen düzgün bir eğri ve f üç değişkenli bir fonksiyon ise tanım aynıdır:

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\,\Delta s_i.$$

Yani eğriyi kısa yaylara bölüyor, her yayda f'nin bir değerini o yayın uzunluğuyla tartıyor ve topluyoruz. Yaylar kısaldıkça f her yay üzerinde neredeyse sabit kalır ve toplam, "f'nin eğri boyunca toplamına" yaklaşır. $f = 1$ ise toplam $\sum \Delta s_i$, her n için C'nin uzunluğu L'ye eşittir; bu yüzden $\int_C ds = L$ olur. C üzerindeki noktaları yalnız bir yöntem olarak parametre aracılığıyla seçiyoruz; aşağıda değerin parametrizasyona bağlı olmadığını da göreceğiz.
Tanımı doğrudan kullanmak zordur. Neyse ki f sürekliyse limit her zaman vardır ve sıradan bir integrale dönüşür.

Teorem 11.1 (Eğrisel İntegralin Parametrik Hesabı). *C, $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ ile verilen düzgün bir eğri ve f, C üzerinde sürekli olsun; yani $t \mapsto f(\mathbf{r}(t))$ bileşkesi $[a,b]$ üzerinde sürekli olsun (f, C'yi içeren bir bölgede sürekliyse bu kendiliğinden sağlanır). Bu durumda $\int_C f\,ds$ vardır ve*

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt \tag{2}$$

olur. Bileşenlerle yazarsak düzlemde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f\,\big(\,x(t),y(t)\,\big)\,\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt, \tag{3}$$

uzayda

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f\,\big(\,\mathbf{r}(t)\,\big)\,\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt \tag{4}$$

elde edilir.

İspat.
Adım 1: Alt yayların uzunlukları. *Parametrik eğrinin yay uzunluğu formülüne göre (bkz. Analiz 2; uzay eğrisinde kökün içine $z'(t)^2$ de eklenir) i-inci alt yayın uzunluğu*

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$$

dir. $|\,\mathbf{r}'\,|$ sürekli olduğundan integraller için ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) bir $\tau_i \in [t_{i-1},t_i]$ verir:

$$\Delta s_i = |\,\mathbf{r}'(\tau_i)\,|\,\Delta t.$$

Adım 2: Bir Riemann toplamıyla karşılaştırma. *$g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ ve $v(t) = |\,\mathbf{r}'(t)\,|$ diyelim; ikisi de $[a,b]$ üzerinde süreklidir. Tanımdaki toplam*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\,v(\tau_i)\,\Delta t$$

olur. Öte yandan

$$R_n = \sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\,v(t_i^*)\,\Delta t$$

toplamı sürekli $g\,v$ fonksiyonunun $[a,b]$ üzerindeki bir Riemann toplamıdır (bkz. Analiz 2). Sürekli fonksiyonlar integrallenebilir olduğundan $n\to\infty$ iken $R_n \to \int_a^b g(t)\,v(t)\,dt$ olur.
Adım 3: Farkın sıfıra gitmesi. *g kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli olduğundan sınırlıdır: her t için $|\,g(t)\,| \le M$. v de $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğundan düzgün süreklidir (bkz. Analiz 1). $\varepsilon>0$ verilsin ve $\delta>0$ sayısı, $|\,t-u\,|<\delta$ iken $|\,v(t)-v(u)\,|<\varepsilon$ olacak biçimde seçilsin. $\Delta t<\delta$ olacak kadar büyük n için t_i^* ile τ_i aynı $[t_{i-1},t_i]$ aralığında olduğundan $|\,t_i^*-\tau_i\,| \le \Delta t<\delta$'dır. Buradan*

$$\begin{aligned} |\,S_n-R_n\,| &\le \sum_{i=1}^{n} |\,g(t_i^*)\,|\,\big|\,v(\tau_i)-v(t_i^*)\,\big|\,\Delta t \\ &\le \sum_{i=1}^{n} M\,\varepsilon\,\Delta t = M\,\varepsilon\,(b-a) \end{aligned}$$

bulunur. ε keyfi olduğundan $S_n-R_n\to 0$, dolayısıyla $S_n\to\int_a^b g(t)\,v(t)\,dt$ olur. Bu sonuç t_i^* değerlerinin seçimine bağlı değildir. Yani tanımdaki limit vardır ve (2)'deki integrale eşittir. (3) ve (4), $|\,\mathbf{r}'(t)\,|$ uzunluğunun bileşenlerle yazılışıdır.
■

Yani eğrisel integrali hesaplamak için her şeyi t parametresi cinsinden yazarız: x, y (ve z) yerine $x(t)$, $y(t)$ (ve $z(t)$), ds yerine de

$$ds = |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt = \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

koyarız. Bu yazılış bir ezber değildir: $s(t)$, $\mathbf{r}(a)$ ile $\mathbf{r}(t)$ arasındaki yayın uzunluğu ise $ds/dt = |\,\mathbf{r}'(t)\,|$'dir. Yani $|\,\mathbf{r}'(t)\,|$ eğri üzerindeki hızdır ve kısa bir dt süresinde alınan yol yaklaşık $|\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$'dir.
Formülden iki özel durum hemen çıkar.

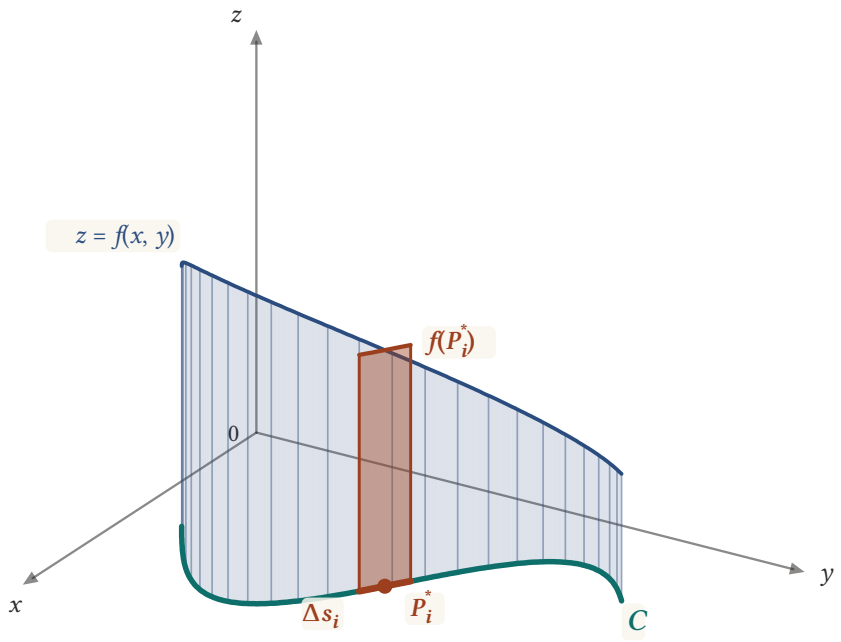
 CC BY-NC-SA 4.0

- $f = 1$ için $\int_C ds = \int_a^b |\ \mathbf{r}'(t)\ | dt = L$ olur. $\mathbf{r}$, C'yi bir kez katettiğinden bu sayı C'nin uzunluğudur.
- C, x ekseni üzerinde $(a, 0)$'dan $(b, 0)$'a giden doğru parçası olsun. x'i parametre alırsak $x = x$, $y = 0$, $a \le x \le b$ olur ve $|\ \mathbf{r}'\ | = 1$ olduğundan $\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, 0)\, dx$ elde edilir. Yani eğrisel integral, sıradan tek değişkenli integralin bir genellemesidir.

Eğrisel integralin değeri, eğri aynı yönde ve bir kez katedildiği sürece seçilen parametrizasyona bağlı değildir; bunu bölümün sonunda Önerme 11.2 ve Önerme 11.3 ile göstereceğiz. Bu yüzden her problemde işimize en çok yarayan parametrizasyonu seçmekte serbestiz.

11.2 Perde Alanı Olarak Eğrisel İntegral

Eğrisel integrali, tek değişkenli integrali eğri altındaki alan olarak yorumladığımız gibi, bir alan olarak da yorumlayabiliriz.
$f(x, y) \ge 0$ olsun. xy-düzlemindeki C eğrisinin her (x, y) noktasına $f(x, y)$ yüksekliğinde düşey bir doğru parçası dikelim. Bu doğru parçaları, tabanı C olan bir "perde" ya da "çit" oluşturur. Riemann toplamındaki her $f(x_i^*, y_i^*)\, \Delta s_i$ terimi, tabanı i-inci alt yay ve yüksekliği $f(x_i^*, y_i^*)$ olan ince bir şeridin alanıdır. Şeritler inceldikçe toplamları perdenin alanına yaklaşır. Bu yüzden $\int_C f(x, y)\, ds$, perdenin bir yüzünün alanıdır.



Şekil 11.2: $f \ge 0$ iken $\int_C f\, ds$, tabanı xy-düzlemindeki C eğrisi ve (x, y) noktasındaki yüksekliği $f(x, y)$ olan perdenin bir yüzünün alanıdır. Turuncu şeridin alanı $f(P_i^*)\, \Delta s_i$ çarpımıdır; bu şeritlerin toplamı Riemann toplamını verir.

11.3 Eğrisel İntegralin Hesabı

Teorem 11.1 bize bir hesap yöntemi verir; adımlarını sıralayıp düzlemde ve uzayda birer örnekle uygulayalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yay uzunluğuna göre eğrisel integral üç adımda

1. **Parametrize et.** C için t arttıkça eğriyi bir kez katederek dolaşan bir $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ parametrizasyonu yaz. Birim çember için $x = \cos t,\ y = \sin t$; $y = g(x)$ grafiği için $x = x,\ y = g(x)$ kullanılabilir.
2. **ds'yi hesapla.** $ds = |\ \mathbf{r}'(t)\ |\, dt$; düzlemde $\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$, uzayda $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$.
3. **Yerine koy ve integre et.** f'de x, y, z yerine $x(t), y(t), z(t)$ yazıp a'dan b'ye ($a < b$) integral al.

Örnek 11.1 (Yarım Çember Üzerinde). C, $x^2 + y^2 = 1$ birim çemberinin üst yarısı olmak üzere

$$\int_C (2 + x^2 y)\, ds$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Parametrize et. Birim çember $x = \cos t,\ y = \sin t$ denklemleriyle verilir. Üst yarıda $y = \sin t \ge 0$ olduğundan parametre aralığı $0 \le t \le \pi$'dir.
ds'yi hesapla. $x'(t) = -\sin t$ ve $y'(t) = \cos t$ olduğundan

$$ds = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = dt$$

bulunur. Birim çemberde parametre, yay uzunluğunun ta kendisidir.
Yerine koy ve integre et. (3) formülünden

$$\begin{aligned}\int_C (2 + x^2 y)\, ds &= \int_0^{\pi} (2 + \cos^2 t \sin t)\, dt \\ &= \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi}\end{aligned}$$

olur. Burada $\cos^2 t \sin t$'nin bir ilkeli $-\frac{1}{3}\cos^3 t$'dir (türevi alınarak denetlenebilir). Sınırları yerine koyarsak $\cos \pi = -1$ ve $\cos 0 = 1$ olduğundan

$$\left(2\pi + \frac{1}{3}\right) - \left(0 - \frac{1}{3}\right) = 2\pi + \frac{2}{3}$$

bulunur.
■

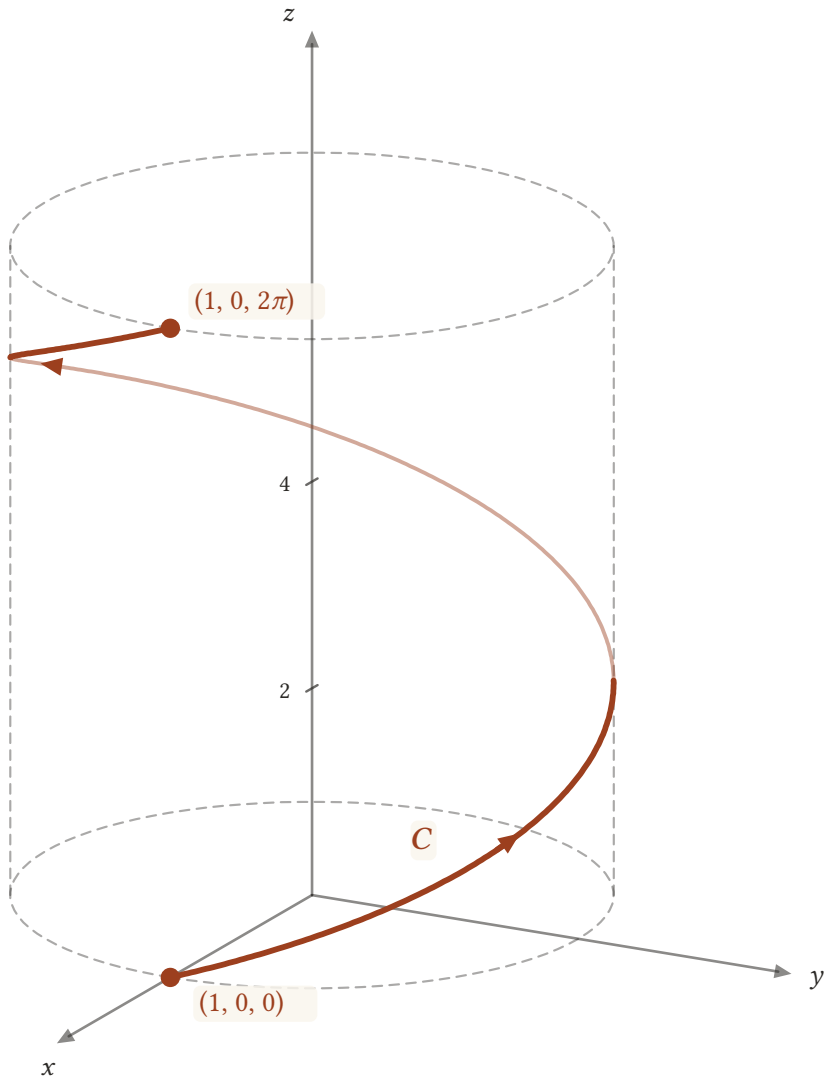
Tanım ve teorem uzay eğrileri için de aynen geçerli olduğundan aynı adımlar uzayda da işler.

Örnek 11.2 (Dairesel Helis Üzerinde). C, $x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \le t \le 2\pi$ dairesel helisi olmak üzere

$$\int_C y \sin z\, ds$$

integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.3: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ dairesel helisi $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin üzerinde bir tam tur atarak (1, 0, 0) noktasından (1, 0, 2π) noktasına çıkar. Silindirin arka yüzündeki kısmı soluk çizilmiştir; şekil fazla uzamasın diye z ekseni kısaltılmış ölçekle çizilmiştir.

Çözüm.
***ds*'yi hesapla.** $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ olduğundan

$$|\,\mathbf{r}'(t)\,| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

ve $ds = \sqrt{2}\,dt$ olur. Helis sabit hızla dolaşılır.
Yerine koy. $y = \sin t$ ve $z = t$ olduğundan $y \sin z = \sin t \cdot \sin t = \sin^2 t$ olur. (4) formülünden

$$\int_C y \sin z\, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin^2 t\, dt$$

bulunur.
İntegre et. $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$ özdeşliğiyle

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\Big[t-\frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\pi = \sqrt{2}\,\pi$$

elde edilir. Aynı hesapla, $f=1$ alınarak helisin uzunluğu da bulunur: $\int_C ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\,\pi$.
■

11.4 Parçalı Düzgün Eğriler

Bir üçgenin kenarları ya da bir yayın ardından gelen bir doğru parçası gibi köşeli eğriler düzgün değildir; ama düzgün parçalara ayrılabilirler.

Tanım 11.2 (Parçalı Düzgün Eğri). C, sonlu sayıda $C_1, C_2, \ldots, C_n$ düzgün eğrisinin birleşimi olsun ve her i için C_{i+1}'in başlangıç noktası C_i'nin bitiş noktası olsun. Böyle bir eğriye **parçalı düzgün eğri** denir ve f'nin C boyunca eğrisel integrali, parçalar üzerindeki integrallerin toplamı olarak tanımlanır:

$$\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds + \cdots + \int_{C_n} f\,ds.$$

Yani köşelerde eğriyi bölüyor, her düzgün parçayı kendi parametrizasyonuyla ayrı ayrı hesaplıyor ve sonuçları topluyoruz. Kırık çizgiler ve kapalı çokgenlerin sınırları parçalı düzgün eğrilerdir. Bölümde tanımlayacağımız öteki eğrisel integraller için de parçalı düzgün eğri üzerindeki integral aynı biçimde, parçalar üzerindeki integrallerin toplamı olarak tanımlanır.

Örnek 11.3 (Parabol Yayı ve Düşey Doğru Parçası). C, $y=x^2$ parabolünün $(0,0)$'dan $(1,1)$'e giden C_1 yayı ile $(1,1)$'den $(1,2)$'ye giden düşey C_2 doğru parçasından oluşsun.

$$\int_C 2x\,ds$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
C_1 üzerinde. C_1 bir x fonksiyonunun grafiği olduğundan x'i parametre alırız: $x=x$, $y=x^2$, $0\le x\le 1$. Buradan $dy/dx = 2x$ ve

$$ds = \sqrt{1+4x^2}\,dx$$

olur. Böylece

$$\int_{C_1} 2x\,ds = \int_0^1 2x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

bulunur. $u = 1+4x^2$ dersek $du = 8x\,dx$, yani $2x\,dx = \frac{1}{4}\,du$ olur; sınırlar $u=1$ ile $u=5$'tir:

$$\int_{C_1} 2x\,ds = \frac{1}{4}\int_1^5 u^{1/2}\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\big[u^{3/2}\big]_1^5 = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}.$$

C_2 üzerinde. Bu kez y'yi parametre alırız: $x=1$, $y=y$, $1\le y\le 2$. $dx/dy=0$ ve $dy/dy=1$ olduğundan $ds = dy$ olur ve

$$\int_{C_2} 2x\,ds = \int_1^2 2\cdot 1\,dy = 2$$

bulunur.
Toplam. Tanım 11.2 gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_C 2x\,ds = \frac{5\sqrt{5}-1}{6} + 2 = \frac{5\sqrt{5}+11}{6}$$

elde edilir.
■

11.5 İnce Bir Telin Kütlesi ve Kütle Merkezi

Bir eğrisel integralin fiziksel anlamı, f'nin neyi temsil ettiğine bağlıdır. Burada f'yi bir telin yoğunluğu olarak düşüneceğiz.
C biçimindeki ince bir telin (x, y) noktasındaki **doğrusal yoğunluğu** (birim uzunluk başına kütlesi) $\rho(x, y)$ olsun. Telin P_{i-1}'den P_i'ye uzanan parçasının kütlesi yaklaşık $\rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$'dir; bu yüzden telin kütlesi yaklaşık $\sum \rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i$ olur. Eğri üzerinde gittikçe daha çok nokta alırsak bu yaklaşımlar telin kütlesine yaklaşır. Böylece levhalar için yaptığımız tanımların (bkz. Tanım 4.4) tel için karşılığına geliriz.

Tanım 11.3 (İnce Bir Telin Kütlesi ve Kütle Merkezi). C biçimindeki ince bir telin doğrusal yoğunluğu sürekli bir $\rho(x, y)$ fonksiyonu olsun. Telin **kütlesi**

$$m = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta s_i = \int_C \rho(x, y)\,ds,$$

kütle merkezi de koordinatları

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_C x\,\rho(x, y)\,ds, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_C y\,\rho(x, y)\,ds \tag{5}$$

olan $(\bar{x}, \bar{y})$ noktasıdır.

Yani kütle, yoğunluğun tel boyunca toplamıdır; $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ de telin noktalarının koordinatlarının yoğunlukla ağırlıklandırılmış ortalamalarıdır. Kütle merkezi telin üzerinde olmak zorunda değildir. Uzaydaki bir tel için $\rho(x, y, z)$ ile aynı formüller yazılır ve üçüncü koordinat $\bar{z} = \frac{1}{m}\int_C z\,\rho\,ds$ olur. Örneğin $\rho(x, y) = 2 + x^2 y$, yarım çember biçimindeki bir telin yoğunluğuysa ilk örnekte hesapladığımız integral (bkz. Örnek 11.1) o telin kütlesidir.

Örnek 11.4 (Tabanı Ağır Yarım Çember Tel). Bir tel $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ yarım çemberi biçimindedir ve tabanına yakın yerlerde tepesine göre daha kalındır: herhangi bir noktadaki doğrusal yoğunluğu, o noktanın $y = 1$ doğrusuna uzaklığıyla orantılıdır. Telin kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.
Yoğunluk ve parametrizasyon. Tel üzerinde $y \leq 1$ olduğundan (x, y) noktasının $y = 1$ doğrusuna uzaklığı $1 - y$'dir. Buna göre bir $k > 0$ sabiti için $\rho(x, y) = k(1 - y)$ olur. İlk örnekteki gibi (bkz. Örnek 11.1) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$ alırsak $ds = dt$ olur.
Kütle.

$$m = \int_C k(1-y)\,ds = \int_0^{\pi} k(1 - \sin t)\,dt = k\,\big[t + \cos t\big]_0^{\pi} = k(\pi - 2).$$

$\bar{x}$. (5) formülünden

$$\int_C x\,\rho\,ds = k\int_0^{\pi} \cos t\,(1 - \sin t)\,dt = k\left[\sin t - \frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi} = 0$$

olduğundan $\bar{x} = 0$'dır. Bunu simetriden de bekliyorduk: tel ve yoğunluk y eksenine göre simetriktir.
$\bar{y}$. (5) formülünden

$$\bar{y} = \frac{1}{k(\pi-2)}\int_C y\,k(1-y)\,ds = \frac{1}{\pi - 2}\int_0^{\pi} (\sin t - \sin^2 t)\,dt$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $\int_0^{\pi} \sin t\,dt = 2$ ve $\sin^2 t = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2t)$ özdeşliğinden $\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \tfrac{\pi}{2}$ olduğundan

$$\bar{y} = \frac{1}{\pi - 2}\Big(2 - \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{4-\pi}{2(\pi-2)} \approx 0{,}38$$

bulunur. Kütle merkezi $\left(0,\, \frac{4-\pi}{2(\pi-2)}\right) \approx (0;\, 0{,}38)$ noktasıdır. Sabit yoğunluklu bir yarım çember telde $\bar{y} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$ olurdu; yoğunluk tabanda büyük olduğundan kütle merkezi aşağı kaymıştır. Bu nokta telin üzerinde değil, yarım çemberin içindedir.

■

11.6 Koordinatlara Göre Eğrisel İntegraller

Tanımdaki Δs_i yerine alt yayın yatay ya da düşey yer değiştirmesini koyarsak iki yeni eğrisel integral elde ederiz. Bunlar özellikle vektör alanlarıyla birlikte sık sık karşımıza çıkacak.

Tanım 11.4 (Koordinatlara Göre Eğrisel İntegraller). f, (1) ile verilen düzgün C eğrisi üzerinde tanımlı olsun ve $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ olsun. f'nin C boyunca **x'e göre** ve **y'ye göre eğrisel integralleri**

$$\int_C f(x,y)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta x_i,$$

$$\int_C f(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\,\Delta y_i$$

limitleridir (var olduklarında). Uzaydaki bir eğri için $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$ ile $\int_C f(x,y,z)\,dz$ aynı biçimde tanımlanır; dx ve dy integralleri de üç değişkenli f ile aynen yazılır.

Yani Δs_i her zaman pozitif bir uzunluktur, Δx_i ve Δy_i ise alt yayın yatay ve düşey yer değiştirmeleridir ve negatif olabilirler. Bu yüzden bu integraller eğrinin hangi uçtan hangi uca katedildiğine bağlıdır: parametrizasyon eğriyi başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru dolaşmalıdır. Bunu Önerme 11.4 ile kesinleştireceğiz. Ayırt etmek gerektiğinde ilk tanımladığımız $\int_C f\,ds$ integraline **yay uzunluğuna göre** eğrisel integral deriz.

Teorem 11.2 (Koordinatlara Göre Eğrisel İntegrallerin Hesabı). *C, $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, $a \le t \le b$ ile verilen düzgün bir eğri ve f, C üzerinde sürekli olsun. Bu durumda*

$$\int_C f\,dx = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,x'(t)\,dt,$$

$$\int_C f\,dy = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,y'(t)\,dt,$$

$$\int_C f\,dz = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,z'(t)\,dt$$

olur. Düzlemde ilk iki formül z bileşeni olmadan aynen geçerlidir.

İspat.
dx için yapalım; öteki ikisi harf değiştirerek aynı biçimde gösterilir. İspat, Teorem 11.1 için verdiğimiz ispatın aynısıdır; yalnız $v = |\,\mathbf{r}'\,|$ yerine x' gelir.
Adım 1. *x, $[t_{i-1}, t_i]$ üzerinde türevlenebilir olduğundan Lagrange ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) bir $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$ verir:*

$$\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\tau_i)\,\Delta t.$$

Adım 2. *$g(t) = f(\mathbf{r}(t))$ ile tanımdaki toplam $S_n = \sum g(t_i^*)\,x'(\tau_i)\,\Delta t$ olur. $R_n = \sum g(t_i^*)\,x'(t_i^*)\,\Delta t$ ise sürekli $g\,x'$ fonksiyonunun bir Riemann toplamıdır ve $\int_a^b g(t)\,x'(t)\,dt$'ye yakınsar.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3. *$|\, g \,| \le M$ olsun. x' sürekli olduğundan $[a,b]$ üzerinde düzgün süreklidir. Verilen $\varepsilon > 0$ için Δt yeterince küçükse her i için $|\, x'(\tau_i) - x'(t_i^*) \,| < \varepsilon$ olur ve*

$$|\, S_n - R_n \,| \le \sum_{i=1}^{n} M\,\varepsilon\,\Delta t = M\,\varepsilon\,(b-a)$$

bulunur. Buradan $S_n \to \int_a^b g(t)\,x'(t)\,dt$ çıkar.
■

Yani bu integralleri de her şeyi t cinsinden yazarak hesaplarız: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ve

$$dx = x'(t)\,dt, \qquad dy = y'(t)\,dt, \qquad dz = z'(t)\,dt.$$

Bu, tek değişkenli integraldeki değişken değiştirmenin aynısıdır.
x'e ve y'ye göre integraller çoğu zaman bir arada geçer. O zaman toplamı tek bir integral işaretiyle kısaltırız:

$$\int_C P(x,y)\,dx + \int_C Q(x,y)\,dy = \int_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Uzayda da $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, üç integralin toplamı demektir.
Eğri geometrik olarak verildiğinde en zor adım çoğu zaman bir parametrizasyon bulmaktır. En sık gereken, $\mathbf{r}_0$'da başlayıp $\mathbf{r}_1$'de biten doğru parçasıdır:

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\,\mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{r}_1, \qquad 0 \le t \le 1. \tag{6}$$

Gerçekten $t=0$'da $\mathbf{r}_0$, $t=1$'de $\mathbf{r}_1$ elde edilir ve $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ sabit bir vektördür.

Koordinatlara göre eğrisel integral üç adımda

1. **Yönüyle parametrize et.** C'yi başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru dolaşan bir parametrizasyon yaz; doğru parçası için (6) formülünü kullan.
2. **Yerine koy.** P ve Q'da (uzayda R'de de) x, y, z yerine $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$; dx, dy, dz yerine $x'(t)\,dt$, $y'(t)\,dt$, $z'(t)\,dt$ yaz.
3. **İntegre et.** Başlangıç noktasının parametresinden bitiş noktasınınkine kadar integral al. Eğri parçalıysa her parçayı ayrı hesapla ve topla.

Aynı integrali, uç noktaları aynı olan iki farklı yol boyunca hesaplayıp sonuçları karşılaştıralım.

Örnek 11.5 (Doğru Parçası Boyunca). C_1, $(-5,-3)$ noktasından $(0,2)$ noktasına giden doğru parçası olmak üzere

$$\int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Parametrize et. (6) formülünde $\mathbf{r}_0 = \langle -5,-3\rangle$ ve $\mathbf{r}_1 = \langle 0,2\rangle$ alırsak

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\,\langle -5,-3\rangle + t\,\langle 0,2\rangle = \langle 5t-5,\, 5t-3\rangle$$

olur. Yani $x = 5t-5$, $y = 5t-3$, $0 \le t \le 1$.
Yerine koy. $dx = 5\,dt$ ve $dy = 5\,dt$ olduğundan Teorem 11.2 ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y^2\,dx + x\,dy &= \int_0^1 \big[\,(5t-3)^2\cdot 5 + (5t-5)\cdot 5\,\big]\,dt \\ &= 5\int_0^1 (25t^2 - 30t + 9 + 5t - 5)\,dt \\ &= 5\int_0^1 (25t^2 - 25t + 4)\,dt\end{aligned}$$

bulunur.
İntegre et.

$$5\left[\frac{25t^3}{3} - \frac{25t^2}{2} + 4t\right]_0^1 = 5\left(\frac{50 - 75 + 24}{6}\right) = -\frac{5}{6}.$$

■

Örnek 11.6 (Parabol Yayı Boyunca). C_2, $x = 4 - y^2$ parabolünün $(-5,-3)$ noktasından $(0,2)$ noktasına giden yayı olmak üzere

$$\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Parametrize et. Parabol y'nin bir fonksiyonu olarak verildiğinden y'yi parametre alırız: $x = 4 - y^2$, $y = y$. Eğri $(-5,-3)$'ten başlayıp $(0,2)$'de bittiğinden y, -3'ten 2'ye gider.
Yerine koy. $dx = -2y\,dy$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy &= \int_{-3}^{2} \big[\,y^2(-2y) + (4 - y^2)\,\big]\,dy \\ &= \int_{-3}^{2} (-2y^3 - y^2 + 4)\,dy\end{aligned}$$

olur.
İntegre et. $G(y) = -\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y$ ilkelini kullanırsak

$$G(2) = -8 - \frac{8}{3} + 8 = -\frac{8}{3}, \qquad G(-3) = -\frac{81}{2} + 9 - 12 = -\frac{87}{2}$$

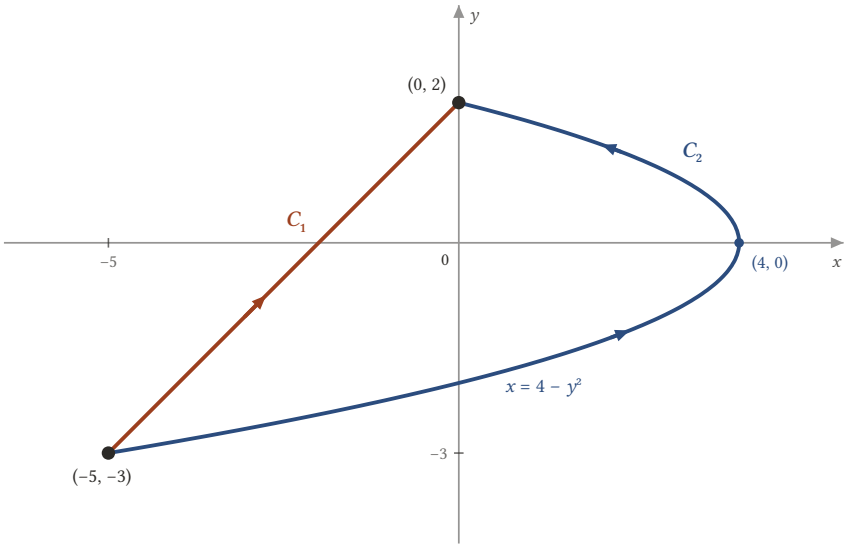
olur. Buradan

$$\int_{C_2} y^2\,dx + x\,dy = -\frac{8}{3} + \frac{87}{2} = \frac{-16 + 261}{6} = \frac{245}{6} = 40\frac{5}{6}$$

bulunur.
■

İki eğrinin uç noktaları aynı olduğu hâlde sonuçlar farklı çıktı: doğru parçası boyunca $-\frac{5}{6}$, parabol yayı boyunca $\frac{245}{6}$. Demek ki bir eğrisel integralin değeri genel olarak yalnız uç noktalara değil, izlenen yola da bağlıdır. Hangi durumlarda yalnız uç noktalara bağlı olduğunu bir sonraki bölümde, Eğrisel İntegraller için Temel Teorem başlığı altında göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.4: $(-5,-3)$ noktasından $(0,2)$ noktasına giden iki yol: C_1 doğru parçası ve C_2: $x = 4 - y^2$ parabol yayı. Uç noktalar aynı olduğu hâlde $\int y^2\,dx + x\,dy$ integrali C_1 boyunca $-5/6$, C_2 boyunca $245/6$ olur.

Uzayda da yöntem aynıdır: $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ biçimindeki integralleri, x, y, z, dx, dy, dz'nin hepsini parametre cinsinden yazarak hesaplarız.

Örnek 11.7 (Uzayda Kırık Çizgi Boyunca). C, $(2,0,0)$ noktasından $(3,4,5)$ noktasına giden C_1 doğru parçası ile $(3,4,5)$ noktasından $(3,4,0)$ noktasına giden düşey C_2 doğru parçasından oluşsun.

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
C_1 üzerinde. (6) formülünden

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\,\langle 2,0,0\rangle + t\,\langle 3,4,5\rangle = \langle 2+t, 4t, 5t\rangle$$

olur; yani $x = 2+t$, $y = 4t$, $z = 5t$, $0 \le t \le 1$ ve $dx = dt$, $dy = 4\,dt$, $dz = 5\,dt$. Buradan

$$\begin{aligned}\int_{C_1} y\,dx + z\,dy + x\,dz &= \int_0^1 \left[4t + (5t)\,4 + (2+t)\,5\right] dt \\ &= \int_0^1 (10 + 29t)\,dt = 10 + \frac{29}{2} = 24{,}5\end{aligned}$$

bulunur.
C_2 üzerinde. Yine (6) formülünden

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\,\langle 3,4,5\rangle + t\,\langle 3,4,0\rangle = \langle 3, 4, 5-5t\rangle$$

olur; yani $x = 3$, $y = 4$, $z = 5-5t$, $0 \le t \le 1$. Bu parçada $dx = 0 = dy$ ve $dz = -5\,dt$ olduğundan yalnız son terim kalır:

$$\int_{C_2} y\,dx + z\,dy + x\,dz = \int_0^1 3\,(-5)\,dt = -15.$$

Toplam.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = 24{,}5 - 15 = 9{,}5.$$

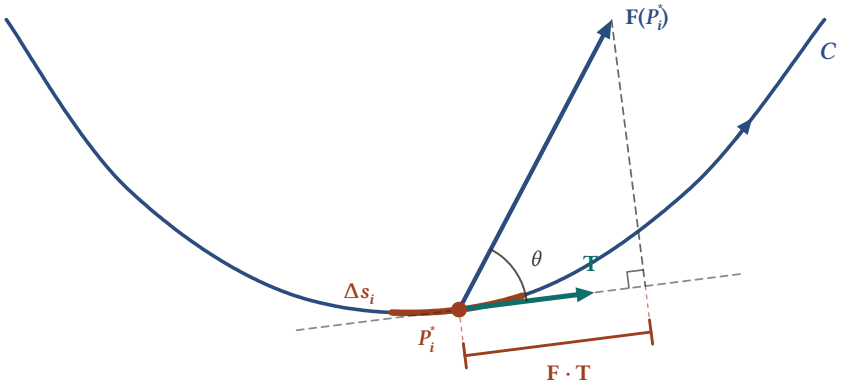
■

11.7 Vektör Alanlarının Eğrisel İntegralleri ve İş

Şimdi bir kuvvet alanının bir parçacığı eğri boyunca hareket ettirirken yaptığı işi hesaplayacağız. Bu fiziksel soru, bir vektör alanının eğrisel integralini tanımlamaya götürür.
İki tanıdık durumu hatırlayalım. Değişken bir $f(x)$ kuvveti bir parçacığı x ekseni boyunca a'dan b'ye götürürken $W = \int_a^b f(x)\,dx$ işini yapar. Sabit bir $\mathbf{F}$ kuvveti bir cismi P'den Q'ya götürürken ise $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$ işini yapar; burada $\mathbf{D}$, P'den Q'ya giden yer değiştirme vektörüdür.
Bir parçacık düzgün bir C eğrisi boyunca hareket etsin ve $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, C'yi içeren bir bölgede sürekli bir kuvvet alanı olsun; örneğin orijinden geçmeyen bir eğri boyunca Vektör Alanları bölümündeki kütle çekimi alanı. Düzlemdeki bir kuvvet alanı, $R = 0$ olan ve P, Q'nun yalnız x ile y'ye bağlı olduğu özel durumdur. C'yi yine $P_{i-1}P_i$ alt yaylarına bölelim ve her alt yaydan t_i^* parametresine karşılık gelen bir $P_i^*(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ noktası seçelim. Δs_i küçükse parçacık P_{i-1}'den P_i'ye giderken yaklaşık olarak P_i^*'daki $\mathbf{T}(t_i^*)$ birim teğet vektörü yönünde ilerler; yani yer değiştirmesi yaklaşık $\Delta s_i\,\mathbf{T}(t_i^*)$'dir. Bu kısa yolda $\mathbf{F}$ neredeyse sabit, yaklaşık $\mathbf{F}(P_i^*)$ olduğundan yapılan iş yaklaşık

$$\mathbf{F}(P_i^*)\cdot\left[\,\Delta s_i\,\mathbf{T}(t_i^*)\,\right] = \left[\,\mathbf{F}(P_i^*)\cdot\mathbf{T}(t_i^*)\,\right]\Delta s_i$$

olur. Toplam iş ise yaklaşık $\sum\left[\,\mathbf{F}(P_i^*)\cdot\mathbf{T}(t_i^*)\,\right]\Delta s_i$'dir. Bölünüş inceldikçe bu yaklaşımların iyileşmesini bekleriz.



Şekil 11.5: Parçacık turuncu alt yayı geçerken yaklaşık $\mathbf{T}$ birim teğet vektörü yönünde Δs_i kadar ilerler. $\mathbf{F}$'nin bu yöndeki bileşeni $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = |\mathbf{F}|\cos\theta$, yani $\mathbf{F}$'nin teğet doğrusu üzerindeki dik izdüşümünün uzunluğudur; bu parçada yapılan iş yaklaşık $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\,\Delta s_i$ olur.

Tanım 11.5 (İş). $\mathbf{F}$ sürekli bir kuvvet alanı ve C düzgün bir eğri olsun. $\mathbf{T}(x,y,z)$, C'nin (x,y,z) noktasındaki birim teğet vektörü olmak üzere $\mathbf{F}$'nin bir parçacığı C boyunca hareket ettirirken yaptığı **iş**

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\,\mathbf{F}(P_i^*)\cdot\mathbf{T}(P_i^*)\,\right]\Delta s_i = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$$

sayısıdır.

Yani iş, kuvvetin teğet bileşeni $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$'nin yay uzunluğuna göre eğrisel integralidir. $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = |\,\mathbf{F}\,|\cos\theta$ olduğundan kuvvetin harekete dik bileşeni iş yapmaz; kuvvet harekete yardım ettiği yerlerde ($\theta < 90^\circ$) işe pozitif, engellediği yerlerde ($\theta > 90^\circ$) negatif katkı verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

$C, \mathbf{r}(t), a \le t \le b$ ile verilmişse birim teğet vektör $\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/\mid \mathbf{r}'(t) \mid$'dir. Sürekli $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ fonksiyonuna Teorem 11.1 uygulanırsa $\mid \mathbf{r}'(t) \mid$ çarpanları sadeleşir:

$$W = \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\mid \mathbf{r}'(t) \mid}\right] \mid \mathbf{r}'(t) \mid dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Son integral, iş dışında fiziğin başka alanlarında da karşımıza çıkar ve kısaca $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ diye yazılır. Bu yüzden onu her sürekli vektör alanı için tanımlarız.

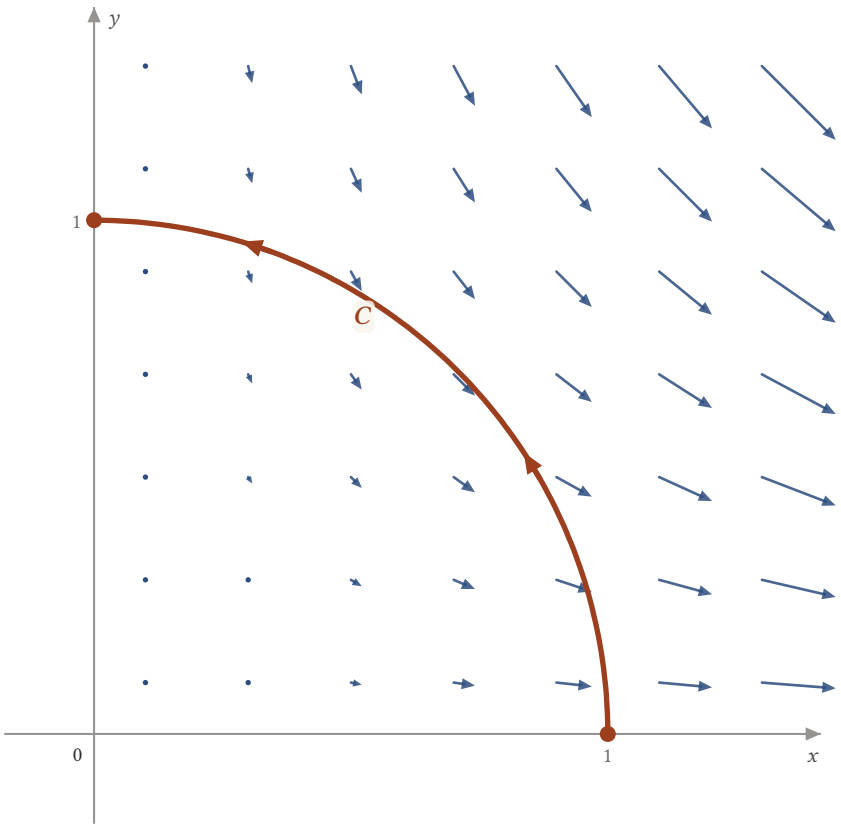
Tanım 11.6 (Vektör Alanının Eğrisel İntegrali). $\mathbf{F}$, $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ ile verilen düzgün bir C eğrisi üzerinde tanımlı sürekli bir vektör alanı olsun. $\mathbf{F}$'nin C boyunca **eğrisel integrali**

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

sayısıdır.

Yani $\mathbf{F}$'yi eğri boyunca dolaşırken her an hız vektörüyle iç çarpıyor ve bu çarpımları zamana göre topluyoruz. Burada $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$, $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$ için kısaltmadır: $\mathbf{F}(x, y, z)$ ifadesinde x, y, z yerine $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ yazılır. $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\, dt$ eşitliği de biçimsel olarak $dx = x'(t)\, dt$ yazılışına benzer. $\mathbf{F}$ bir kuvvet alanıysa bu integral, Tanım 11.5 anlamında yapılan iştir.

Örnek 11.8 (Çeyrek Çember Boyunca İş). $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ kuvvet alanının, bir parçacığı $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi/2$ çeyrek çemberi boyunca hareket ettirirken yaptığı işi bulunuz.



Şekil 11.6: $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} - xy\,\mathbf{j}$ kuvvet alanı ve $(1, 0)$ noktasından $(0, 1)$ noktasına giden çeyrek çember C. Oklar eğri boyunca hareketle geniş açı yapar, yani alan hareketi engeller; bu yüzden yapılan iş negatiftir.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ ve $\mathbf{r}'(t)$. $x = \cos t$ ve $y = \sin t$ olduğundan

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,\mathbf{i} - \cos t \sin t\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$$

olur.
İç çarpım.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = -\cos^2 t \sin t - \cos^2 t \sin t = -2\cos^2 t \sin t.$$

İntegral. $-2\cos^2 t \sin t$'nin bir ilkeli $\frac{2}{3}\cos^3 t$ olduğundan iş, yani $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$,

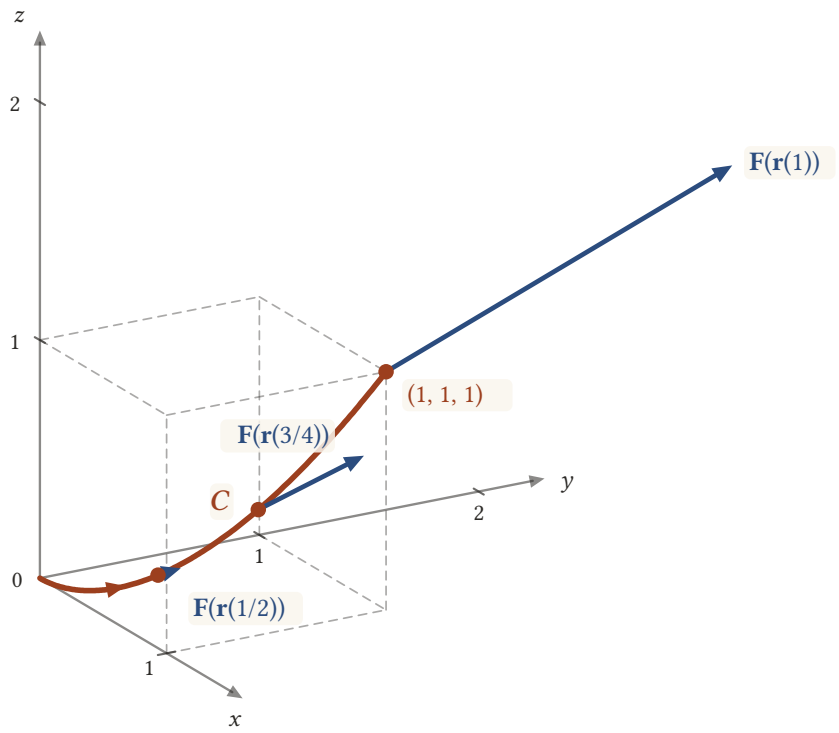
$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\pi/2} (-2\cos^2 t \sin t)\, dt \\ &= \left[\frac{2\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = 0 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

bulunur. İşin negatif çıkması şekille uyumludur: alanın okları eğri boyunca hareket yönüyle geniş açı yapar, yani kuvvet hareketi engeller.
■

Örnek 11.9 (Kübik Eğri Boyunca). $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ ve C, $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$ ile verilen kübik eğri olmak üzere

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

integralini hesaplayınız.



Şekil 11.7: $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $(0 \le t \le 1)$ kübik eğrisi ve $t = 1/2, 3/4, 1$ noktalarında $\mathbf{F} = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$ vektörleri (gerçek uzunluklarıyla). Kesikli çizgiler birim küpün kenarlarıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k},\\ \mathbf{r}'(t) &= \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k},\\ \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= t\cdot t^2\,\mathbf{i} + t^2\cdot t^3\,\mathbf{j} + t^3\cdot t\,\mathbf{k} = t^3\,\mathbf{i} + t^5\,\mathbf{j} + t^4\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

İç çarpım ve integral.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = t^3\cdot 1 + t^5\cdot 2t + t^4\cdot 3t^2 = t^3 + 5t^6$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 (t^3+5t^6)\,dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{27}{28}\end{aligned}$$

bulunur.
■

Son olarak vektör alanlarının eğrisel integralleri ile x, y, z'ye göre eğrisel integraller arasındaki bağı kuralım.

Önerme 11.1 (Vektör Alanının Eğrisel İntegrali Bileşenlerle). *$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, düzgün bir C eğrisi üzerinde sürekli bir vektör alanı ise*

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{7}$$

olur. Düzlemde $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ için $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C P\,dx + Q\,dy$'dir.

İspat.
C, $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, $a \le t \le b$ ile verilsin. Tanım 11.6 ile iç çarpımı bileşenlerle açarsak

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k})\cdot(x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k})\,dt\\ &= \int_a^b \big[\,P(\mathbf{r}(t))\,x'(t) + Q(\mathbf{r}(t))\,y'(t) + R(\mathbf{r}(t))\,z'(t)\,\big]\,dt\end{aligned}$$

bulunur. İntegralin lineerliğiyle bu, üç integralin toplamıdır ve Teorem 11.2 gereği bu üç integral sırasıyla $\int_C P\,dx$, $\int_C Q\,dy$ ve $\int_C R\,dz$'dir. Düzlemde z bileşeni yoktur ve aynı hesap iki terimle yapılır.
■

Yani $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ yazılışını $\langle P, Q, R\rangle\cdot\langle dx, dy, dz\rangle$ iç çarpımı gibi okuyabiliriz. Örneğin uzaydaki kırık çizgi örneğindeki integral (bkz. Örnek 11.7), $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ alanının eğrisel integralidir. Doğru parçası ve parabol yayı örneklerindeki integraller de (bkz. Örnek 11.5 ve Örnek 11.6) $\mathbf{F}(x,y) = y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ alanının iki farklı eğri boyunca integralleridir.

11.8 Parametrizasyon ve Yön

Bir parametrizasyon eğriye bir yön de verir. Bu son kısımda, parametrizasyon değişince ve yön tersine dönünce eğrisel integrallerin nasıl davrandığını inceleyeceğiz.

Tanım 11.7 (Eğrinin Yönü). C, $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ ile verilen düzgün bir eğri olsun. Bu parametrizasyon C üzerinde bir **yön** (yönlendirme, orientation) belirler: pozitif yön, t'nin arttığı yöndür. $A = \mathbf{r}(a)$ noktasına

 CC BY-NC-SA 4.0

C'nin **başlangıç noktası**, $B = \mathbf{r}(b)$ noktasına **bitiş noktası** denir. C ile aynı noktalardan oluşan ama ters yönde, B'den A'ya doğru katedilen eğri $-C$ ile gösterilir.

Yani $-C$ aynı yoldur, yalnız tersinden yürünür. $-C$ için hazır bir parametrizasyon $\tilde{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{r}(a+b-u)$, $a \le u \le b$'dir: u, a'dan b'ye artarken $a+b-u$, b'den a'ya azalır ve nokta B'den A'ya gider.
Önce, aynı yönü koruyan bir parametre değişikliğinin hiçbir integrali değiştirmediğini gösterelim.

Önerme 11.2 (Parametrizasyondan Bağımsızlık). *C, $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ ile verilen düzgün bir eğri olsun. $g : [c,d] \to [a,b]$ türevi sürekli ve her yerde pozitif, $g(c) = a$, $g(d) = b$ olan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{r}(g(u))$, $c \le u \le d$ olsun. f ve $\mathbf{F}$, C üzerinde sürekli ise $\int_C f\,ds$, $\int_C f\,dx$, $\int_C f\,dy$, $\int_C f\,dz$ ve $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integralleri $\mathbf{r}$ ile de $\tilde{\mathbf{r}}$ ile de hesaplansa aynı değeri verir.*

> ***İspat.***
> *g artan ve $[c,d]$'yi $[a,b]$'ye örten olduğundan $\tilde{\mathbf{r}}$, C'yi aynı yönde ve bir kez dolaşır. Zincir kuralından*
>
> $$\tilde{\mathbf{r}}'(u) = \mathbf{r}'(g(u))\,g'(u)$$
>
> *olur; bu vektör sürekli ve sıfırdan farklıdır, yani $\tilde{\mathbf{r}}$ de düzgün bir parametrizasyondur. Bileşenlerde $\tilde{x}'(u) = x'(g(u))\,g'(u)$ ve $g' > 0$ olduğundan $\mid \tilde{\mathbf{r}}'(u) \mid = \mid \mathbf{r}'(g(u)) \mid g'(u)$'dur.*
> ***Yay uzunluğuna göre integral.*** *$t = g(u)$ değişken değiştirmesiyle (bkz. Analiz 2)*
>
> $$\begin{aligned}\int_c^d f(\tilde{\mathbf{r}}(u)) \mid \tilde{\mathbf{r}}'(u) \mid du &= \int_c^d f(\mathbf{r}(g(u))) \mid \mathbf{r}'(g(u)) \mid g'(u)\,du \\ &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \mid \mathbf{r}'(t) \mid dt\end{aligned}$$
>
> *bulunur.*
> ***Koordinatlara göre integraller.*** *Aynı değişken değiştirmeyle*
>
> $$\begin{aligned}&\int_c^d f(\tilde{\mathbf{r}}(u))\,\tilde{x}'(u)\,du \\ &\quad= \int_c^d f(\mathbf{r}(g(u)))\,x'(g(u))\,g'(u)\,du = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,x'(t)\,dt\end{aligned}$$
>
> *olur; dy ve dz için hesap aynıdır.*
> ***Vektör alanının integrali.*** *Önerme 11.1 gereği $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, koordinatlara göre üç integralin toplamıdır; bunların her biri değişmediğinden toplam da değişmez.*
> ■

Bu önerme yalnız $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\circ g$ biçimindeki parametrizasyonlardan söz eder. Bunun bir kısıtlama olmadığını gösterelim: aynı eğriyi aynı yönde ve bir kez dolaşan iki düzgün parametrizasyon her zaman böyle bir g ile birbirine bağlıdır.

Önerme 11.3 (Aynı Yönde Dolaşan İki Parametrizasyon). *Uç noktaları farklı bir C eğrisi $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ ve $\tilde{\mathbf{r}}(u)$, $c \le u \le d$ düzgün parametrizasyonlarıyla verilsin. İkisi de C'yi bir kez katetsin ve aynı yönde dolaşsın: $\tilde{\mathbf{r}}(c) = \mathbf{r}(a)$ ve $\tilde{\mathbf{r}}(d) = \mathbf{r}(b)$. Bu durumda türevi sürekli ve her yerde pozitif, $g(c) = a$ ve $g(d) = b$ olan bir $g : [c,d] \to [a,b]$ fonksiyonu için $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\circ g$ olur. Dolayısıyla Önerme 11.2 gereği iki parametrizasyon bütün eğrisel integraller için aynı değeri verir.*

> ***İspat.***
> ***Adım 1: g'nin tanımı.*** *$\mathbf{r}$, C'yi bir kez katettiği ve uç noktalar farklı olduğu için $[a,b]$ üzerinde bire birdir; aynı nedenle $\tilde{\mathbf{r}}$ de $[c,d]$ üzerinde bire birdir. Her u için $\tilde{\mathbf{r}}(u)$ noktası C üzerindedir; bu yüzden $\mathbf{r}(t) = \tilde{\mathbf{r}}(u)$ eşitliğini sağlayan tek bir $t \in [a,b]$ vardır. Bu t'yi $g(u)$ ile gösterelim. Böylece her u için $\mathbf{r}(g(u)) = \tilde{\mathbf{r}}(u)$ olur. $g(u_1) = g(u_2)$ ise $\tilde{\mathbf{r}}(u_1) = \tilde{\mathbf{r}}(u_2)$ olur; $\tilde{\mathbf{r}}$ bire bir olduğundan $u_1 = u_2$, yani g de bire birdir; uç noktalar eşleştiğinden $g(c) = a$ ve $g(d) = b$'dir.*
> ***Adım 2: g sürekli ve artandır.*** *g bir u_0 noktasında sürekli olmasın. O zaman bir $\varepsilon > 0$ ve $u_k \to u_0$ olan, ama her k için $\mid g(u_k) - g(u_0) \mid \ge \varepsilon$ olan bir (u_k) dizisi vardır. $(g(u_k))$ dizisi $[a,b]$ içinde kaldığından*

 CC BY-NC-SA 4.0

sınırlıdır; Bolzano–Weierstrass teoremine göre (bkz. Analiz 1) bir $t^* \in [a,b]$ noktasına yakınsayan bir alt dizisi vardır. Limitte eşitsizlik korunduğundan $|\, t^* - g(u_0)\,| \geq \varepsilon$ olur. $\mathbf{r}$ ve $\tilde{\mathbf{r}}$ sürekli olduğundan bu alt dizi boyunca limit alırsak

$$\mathbf{r}(t^*) = \lim \mathbf{r}(g(u_k)) = \lim \tilde{\mathbf{r}}(u_k) = \tilde{\mathbf{r}}(u_0) = \mathbf{r}(g(u_0))$$

buluruz. $t^* \neq g(u_0)$ olduğundan bu, $\mathbf{r}$'nin bire birliğiyle çelişir. Demek ki g süreklidir. Sürekli ve bire bir olduğu için kesin monotondur (bkz. Analiz 2); $g(c) = a < b = g(d)$ olduğundan da kesin artandır.
Adım 3: g'nin türevi. *$u_0 \in [c,d]$ ve $t_0 = g(u_0)$ olsun. $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ olduğundan bileşenlerinden biri sıfırdan farklıdır; diyelim $x'(t_0) \neq 0$. x' sürekli olduğundan, t_0'ı içeren ve $[a,b]$ içinde kalan bir J aralığında x' işaret değiştirmez. Bu yüzden x, J üzerinde kesin monotondur ve x^{-1} ters fonksiyonu türevlenebilirdir: $(x^{-1})'(x(t)) = 1/x'(t)$ (bkz. Analiz 2). g sürekli olduğundan u_0'a yeterince yakın her u için $g(u) \in J$'dir. $\tilde{\mathbf{r}}$'nin ilk bileşenini $\tilde{x}$ ile gösterelim; $\mathbf{r}(g(u)) = \tilde{\mathbf{r}}(u)$ eşitliğinin ilk bileşeni $x(g(u)) = \tilde{x}(u)$'dur. Buradan bu u'lar için $g(u) = x^{-1}(\tilde{x}(u))$ olur ve zincir kuralı*

$$g'(u) = \frac{\tilde{x}'(u)}{x'(g(u))}$$

verir. Pay ve payda sürekli, payda sıfırdan farklı olduğundan g' süreklidir.
Adım 4: $g' > 0$. *Zincir kuralından $\tilde{\mathbf{r}}'(u) = \mathbf{r}'(g(u))\, g'(u)$ olur. $\tilde{\mathbf{r}}'(u) \neq \mathbf{0}$ olduğundan $g'(u) \neq 0$'dır. g artan olduğundan $g'(u) \geq 0$'dır; demek ki $g'(u) > 0$. Böylece g istenen bütün koşulları sağlar ve iki parametrizasyonun aynı değeri verdiği Önerme 11.2 ile elde edilir.*
■

Kapalı bir eğride $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ olduğundan önerme doğrudan uygulanamaz. Bu durumda eğriyi uç noktaları farklı iki yaya böleriz, önermeyi her yaya ayrı ayrı uygularız ve iki yaydaki integralleri toplarız. Böylece kapalı eğrilerde de aynı yönde dolaşan her parametrizasyon aynı değeri verir; başlangıç noktasının eğrinin neresinde seçildiği de sonucu değiştirmez.
Yön tersine dönünce ise integraller farklı davranır: yay uzunluğu hep pozitif olduğu için ilk tür değişmez, yer değiştirmeye dayanan öteki türler işaret değiştirir.

Önerme 11.4 (Yön Değişince İşaret). *C düzgün bir eğri, f ve $\mathbf{F}$, C üzerinde sürekli olsun. Bu durumda*

$$\int_{-C} f\, ds = \int_C f\, ds$$

ve

$$\int_{-C} f\, dx = -\int_C f\, dx, \qquad \int_{-C} f\, dy = -\int_C f\, dy, \qquad \int_{-C} f\, dz = -\int_C f\, dz,$$

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

olur.

İspat.
C, $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ ile verilsin. $-C$'yi $\tilde{\mathbf{r}}(u) = \mathbf{r}(a+b-u)$, $a \leq u \leq b$ ile parametrize edelim; $-C$'nin aynı yöndeki başka parametrizasyonları Önerme 11.3 gereği (kapalı eğride eğriyi iki yaya bölerek) aynı değerleri verir. Zincir kuralından $\tilde{\mathbf{r}}'(u) = -\mathbf{r}'(a+b-u)$ olur; bu vektör sürekli ve sıfırdan farklıdır. $t = a+b-u$ değişken değiştirmesinde $dt = -du$'dur; $u = a$ iken $t = b$, $u = b$ iken $t = a$ olur.
Yay uzunluğuna göre integral. *$|\, \tilde{\mathbf{r}}'(u)\,| = |\, \mathbf{r}'(a+b-u)\,|$ olduğundan*

$$\begin{aligned}\int_{-C} f\,ds &= \int_a^b f(\mathbf{r}(a+b-u))\,|\,\mathbf{r}'(a+b-u)\,|\,du \\ &= \int_b^a f(\mathbf{r}(t))\,|\,\mathbf{r}'(t)\,|\,(-dt) \\ &= \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt = \int_C f\,ds\end{aligned}$$

bulunur.
Koordinatlara göre integraller. *$\tilde{x}'(u) = -x'(a+b-u)$ olduğundan*

$$\begin{aligned}\int_{-C} f\,dx &= \int_a^b f(\mathbf{r}(a+b-u))\big(-x'(a+b-u)\big)\,du \\ &= \int_b^a f(\mathbf{r}(t))\big(-x'(t)\big)(-dt) \\ &= \int_b^a f(\mathbf{r}(t))\,x'(t)\,dt = -\int_C f\,dx\end{aligned}$$

olur. dy ve dz için hesap aynıdır.
Vektör alanının integrali. *Önerme 11.1 gereği $\mathbf{F}$'nin $-C$ boyunca integrali de $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ integralidir. Üç terimin her biri işaret değiştirdiğinden toplam da işaret değiştirir.*
■

Yani Riemann toplamlarında Δs_i hep pozitiftir ve yönden etkilenmez; Δx_i, Δy_i, Δz_i ise noktaların sırası tersine dönünce işaret değiştirir. Vektör alanının integralinde de C yerine $-C$ alınınca birim teğet vektör $\mathbf{T}$ yerine $-\mathbf{T}$ gelir. Bu yüzden $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds$ yazılışında bir yay uzunluğu integrali görünse de yön değişince işaret değişir. Fiziksel olarak: bir kuvvet alanında aynı yolu tersinden yürüyen parçacık üzerinde, alan ters işaretli iş yapar.

Örnek 11.10 (Ters Yönde Katedilen Doğru Parçası). $-C_1$, $(0,2)$ noktasından $(-5,-3)$ noktasına giden doğru parçası olmak üzere

$$\int_{-C_1} y^2\,dx + x\,dy$$

integralini hesaplayınız ve sonucu Örnek 11.5 ile karşılaştırınız.

Çözüm.
Parametrize et. (6) formülünde $\mathbf{r}_0 = \langle 0,2\rangle$ ve $\mathbf{r}_1 = \langle -5,-3\rangle$ alırsak

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\,\langle 0,2\rangle + t\,\langle -5,-3\rangle = \langle -5t,\,2-5t\rangle, \qquad 0\le t\le 1$$

olur. Bu, doğru parçası örneğindeki parametrizasyonda (bkz. Örnek 11.5) t yerine $1-t$ yazılarak da elde edilir.
Yerine koy. $dx = -5\,dt$ ve $dy = -5\,dt$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int_{-C_1} y^2\,dx + x\,dy &= \int_0^1 \big[\,(2-5t)^2(-5) + (-5t)(-5)\,\big]\,dt \\ &= \int_0^1 (-125t^2 + 125t - 20)\,dt\end{aligned}$$

bulunur.
İntegre et.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left[-\frac{125t^3}{3}+\frac{125t^2}{2}-20t\right]_0^1=\frac{-250+375-120}{6}=\frac{5}{6}.$$

Aynı doğru parçası öbür yönde katedilince $-\frac{5}{6}$ bulmuştuk (bkz. Örnek 11.5). Önerme 11.4 gereği beklendiği gibi, yön değişince yalnız işaret değişti.
■

⚠ Sınırları yön belirler

x, y, z'ye göre integrallerde ve $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$'de parametre, eğrinin **başlangıç** noktasındaki değerinden **bitiş** noktasındaki değerine doğru integre edilir; parametre olarak örneğin x seçilmişse ve eğri x'in azaldığı yönde katediliyorsa alt sınır üst sınırdan büyük olur. Yay uzunluğuna göre integralde ise $ds=|\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$ pozitiftir ve integral parametrenin küçük değerinden büyük değerine alınır; sınırları ters yazmak sonucun işaretini yanlışlıkla değiştirir.

11.9 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar kolaydan zora sıralanmıştır: önce düzlemde ve uzayda yay uzunluğuna ve koordinatlara göre integraller, sonra vektör alanlarının integralleri ve iş, en sonda tel ve çit uygulamaları ile kısa bir ispat.

Alıştırma 11.1 (Parametrik Parabol Üzerinde). C: $x=t^2$, $y=2t$, $0\le t\le 3$ olmak üzere $\int_C y\,ds$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
ds. $x'(t)=2t$ ve $y'(t)=2$ olduğundan

$$ds=\sqrt{4t^2+4}\,dt=2\sqrt{t^2+1}\,dt$$

olur.
İntegral. $y=2t$ olduğundan

$$\int_C y\,ds=\int_0^3 2t\cdot 2\sqrt{t^2+1}\,dt=4\int_0^3 t\sqrt{t^2+1}\,dt$$

bulunur. $u=t^2+1$ dersek $du=2t\,dt$ olur ve sınırlar $u=1$ ile $u=10$'dur:

$$4\int_0^3 t\sqrt{t^2+1}\,dt=2\int_1^{10}u^{1/2}\,du=2\cdot\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^{10}=\frac{4}{3}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Sonuç yaklaşık 40,83'tür.
■

Alıştırma 11.2 (Kübik Grafik Boyunca). C, $x=y^3$ eğrisinin $(-1,-1)$ noktasından $(1,1)$ noktasına giden yayı olmak üzere $\int_C e^x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Parametrize et. Eğri y'nin bir fonksiyonu olarak verildiğinden $y=t$ alırız: $x=t^3$, $y=t$. Eğri $(-1,-1)$'den $(1,1)$'e gittiğinden t, -1'den 1'e gider.
Yerine koy. $dx=3t^2\,dt$ olduğundan

$$\int_C e^x\,dx=\int_{-1}^{1}e^{t^3}\,3t^2\,dt$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur.
İntegre et. $u = t^3$ dersek $du = 3t^2\,dt$ olur ve sınırlar $u = -1$ ile $u = 1$'dir:

$$\int_{-1}^{1} e^u\,du = e - e^{-1} = e - \frac{1}{e} \approx 2{,}35.$$

Sonuç, e^x'in $x = -1$'den $x = 1$'e sıradan integraline eşit çıktı. Bu bir rastlantı değildir: integrand yalnız x'e bağlıysa değişken değiştirmeyle

$$\int_a^b g(x(t))\,x'(t)\,dt = \int_{x(a)}^{x(b)} g(x)\,dx$$

olduğundan $\int_C g(x)\,dx$ yalnız uç noktaların x koordinatlarına bağlıdır.
■

Alıştırma 11.3 (İki Doğru Parçasından Oluşan Yol). C, $(0,0)$ noktasından $(2,1)$ noktasına, oradan da $(3,0)$ noktasına giden iki doğru parçasından oluşsun. $\int_C (x+2y)\,dx + x^2\,dy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
C_1: $(0,0)$'dan $(2,1)$'e. (6) formülünden $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, t\rangle$, $0 \le t \le 1$; $dx = 2\,dt$, $dy = dt$. Buradan

$$\begin{aligned}
&\int_{C_1} (x+2y)\,dx + x^2\,dy \\
&\quad = \int_0^1 \left[\,(2t+2t)\cdot 2 + 4t^2\,\right] dt = \int_0^1 (8t + 4t^2)\,dt \\
&\quad = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.
C_2: $(2,1)$'den $(3,0)$'a. (6) formülünden

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\,\langle 2,1\rangle + t\,\langle 3,0\rangle = \langle 2+t, 1-t\rangle, \qquad 0 \le t \le 1$$

olur; $dx = dt$, $dy = -dt$. Bu parçada $x + 2y = 4 - t$ ve $x^2 = (2+t)^2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} (x+2y)\,dx + x^2\,dy &= \int_0^1 \left[\,(4-t) - (4 + 4t + t^2)\,\right] dt \\
&= \int_0^1 (-5t - t^2)\,dt = -\frac{5}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{17}{6}
\end{aligned}$$

bulunur.
Toplam.

$$\int_C (x+2y)\,dx + x^2\,dy = \frac{16}{3} - \frac{17}{6} = \frac{32 - 17}{6} = \frac{5}{2}.$$

■

Alıştırma 11.4 (Uzayda Bir Doğru Parçası). C, $(3,1,2)$ noktasından $(1,2,5)$ noktasına giden doğru parçası olmak üzere $\int_C y^2 z\,ds$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Parametrize et. (6) formülünden

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)\,\langle 3,1,2\rangle + t\,\langle 1,2,5\rangle = \langle 3-2t, 1+t, 2+3t\rangle, \qquad 0 \le t \le 1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ds. $\mathbf{r}'(t) = \langle -2, 1, 3\rangle$ olduğundan $\mid \mathbf{r}'(t) \mid = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$ ve $ds = \sqrt{14}\,dt$ olur.
İntegral. $y^2 z = (1+t)^2(2+3t)$ çarpımını açalım:

$$(1+2t+t^2)(2+3t) = 3t^3 + 8t^2 + 7t + 2.$$

Buradan

$$\begin{aligned}\int_C y^2 z\, ds &= \sqrt{14}\int_0^1 (3t^3 + 8t^2 + 7t + 2)\, dt \\ &= \sqrt{14}\left(\frac{3}{4} + \frac{8}{3} + \frac{7}{2} + 2\right) = \frac{107\sqrt{14}}{12}\end{aligned}$$

bulunur; bu sayı yaklaşık $33{,}36$'dır. Parantezin içi $\frac{9+32+42+24}{12} = \frac{107}{12}$'dir.
■

Alıştırma 11.5 (Uzayda İki Parçalı Yol). C, $(0,0,0)$ noktasından $(1,0,1)$ noktasına ve oradan $(0,1,2)$ noktasına giden iki doğru parçasından oluşsun.

$$\int_C (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
C_1: $(0,0,0)$'dan $(1,0,1)$'e. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 0, t\rangle$, $0 \le t \le 1$; $dx = dt$, $dy = 0$, $dz = dt$. Bu parçada $y + z = t$ ve $x + y = t$ olduğundan

$$\int_{C_1} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz = \int_0^1 (t+t)\,dt = 1$$

bulunur.
C_2: $(1,0,1)$'den $(0,1,2)$'ye. (6) formülünden $\mathbf{r}(t) = \langle 1-t, t, 1+t\rangle$, $0 \le t \le 1$; $dx = -dt$, $dy = dt$, $dz = dt$. Bu parçada

$$y + z = 1 + 2t, \qquad x + z = 2, \qquad x + y = 1$$

olduğundan

$$\begin{aligned}&\int_{C_2} (y+z)\,dx + (x+z)\,dy + (x+y)\,dz \\ &\quad = \int_0^1 \big[\,-(1+2t) + 2 + 1\,\big]\,dt = \int_0^1 (2-2t)\,dt = 1\end{aligned}$$

bulunur.
Toplam. İki parçanın integralleri toplanırsa sonuç $1 + 1 = 2$ olur.
Bu alan, $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ fonksiyonunun gradyan alanıdır (bkz. Tanım 10.3): $\nabla f = \langle y+z, x+z, x+y\rangle$. Sonucun $f(0,1,2) - f(0,0,0) = 2$ farkına eşit olması rastlantı değildir; bunun nedenini bir sonraki bölümde göreceğiz.
■

Alıştırma 11.6 (Uzay Eğrisi Boyunca Vektör Alanı).

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (y+z)\,\mathbf{k}$$

ve C, $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} - 2t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$ ile verilen eğri olmak üzere $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ ve $\mathbf{r}'(t)$. $x = t^2$, $y = t^3$, $z = -2t$ olduğundan

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (t^2 + t^6)\,\mathbf{i} - 2t^3\,\mathbf{j} + (t^3 - 2t)\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$$

olur.
İç çarpım.

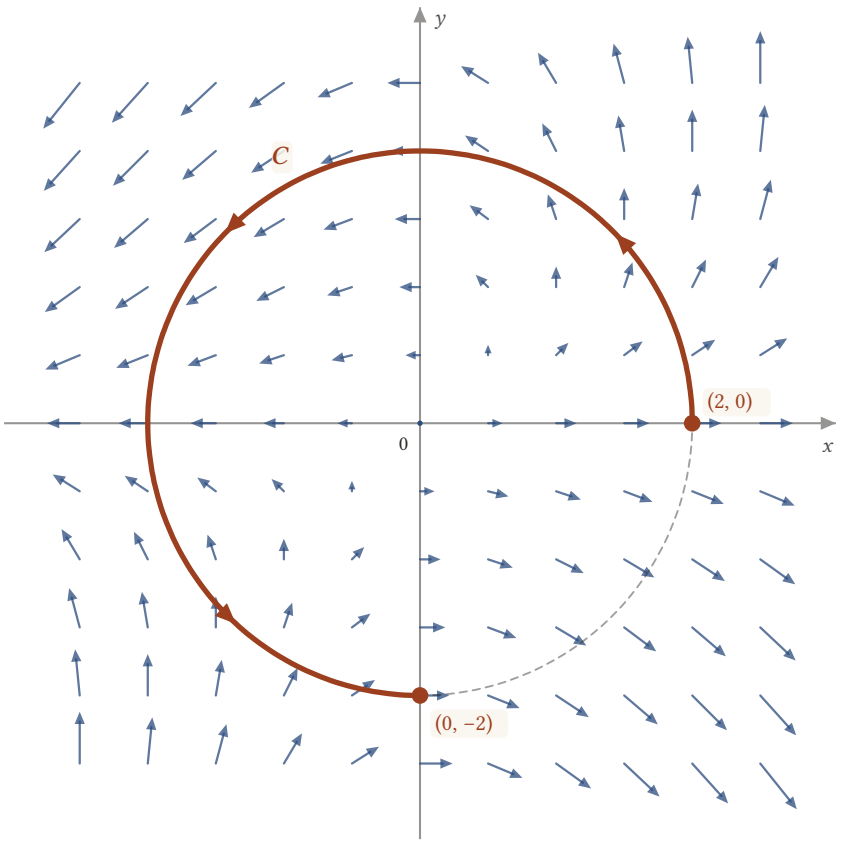
$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) &= 2t^3 + 2t^7 - 6t^5 - 2t^3 + 4t \\ &= 2t^7 - 6t^5 + 4t.\end{aligned}$$

İntegral.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (2t^7 - 6t^5 + 4t)\,dt = \left[\frac{t^8}{4} - t^6 + 2t^2\right]_0^2 = 64 - 64 + 8 = 8.$$

■

Alıştırma 11.7 (İşareti Şekilden Tahmin Etmek). $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ ve C, $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin $(2, 0)$ noktasından saat yönünün tersine $(0, -2)$ noktasına giden yayı olsun. Aşağıdaki şekle bakarak $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integralinin pozitif mi, negatif mi, sıfır mı olduğunu tahmin ediniz; sonra integrali hesaplayınız.



Şekil 11.8: $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$ alanı ve $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin $(2, 0)$ noktasından saat yönünün tersine $(0, -2)$ noktasına giden C yayı. Okların yönü $\mathbf{F}$'nin yönüdür; uzunlukları $|\mathbf{F}|$ ile artar ama okunaklı kalsın diye orantılı çizilmemiştir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Tahmin. $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$, okun hareket yönüyle yaptığı açı dar ise pozitif, geniş ise negatiftir. Birinci ve ikinci bölgede oklar hareket yönüyle dar açı yapıyor; ikinci bölgedeki oklar özellikle uzun. Üçüncü bölgede oklar yukarı, hareket ise aşağı doğrudur ve bu bölgenin büyük kısmında açı geniştir. Yalnız $(0,-2)$'ye yakın kısımda oklar neredeyse yatay ve sağa doğrudur; orada açı yeniden dardır. Pozitif katkının ağır basacağını, yani integralin pozitif çıkacağını tahmin ederiz.
Parametrize et. $\mathbf{r}(t)=2\cos t\,\mathbf{i}+2\sin t\,\mathbf{j}$; yay $(2,0)$'dan saat yönünün tersine $(0,-2)$'ye gittiğinden $0\le t\le 3\pi/2$ olur.
İç çarpım.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (2\cos t-2\sin t)\,\mathbf{i}+4\cos t\sin t\,\mathbf{j},\\ \mathbf{r}'(t) &= -2\sin t\,\mathbf{i}+2\cos t\,\mathbf{j}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = -4\sin t\cos t+4\sin^2 t+8\cos^2 t\sin t$$

bulunur.
Üç integral. $[0,3\pi/2]$ üzerinde terim terim:

$$\begin{aligned}\int_0^{3\pi/2} -4\sin t\cos t\,dt &= \big[-2\sin^2 t\big]_0^{3\pi/2} = -2,\\ \int_0^{3\pi/2} 4\sin^2 t\,dt &= \big[2t-\sin 2t\big]_0^{3\pi/2} = 3\pi,\\ \int_0^{3\pi/2} 8\cos^2 t\sin t\,dt &= \left[-\frac{8\cos^3 t}{3}\right]_0^{3\pi/2} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

İkinci satırda $4\sin^2 t = 2-2\cos 2t$ özdeşliğini kullandık.
Sonuç.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -2+3\pi+\frac{8}{3} = 3\pi+\frac{2}{3}\approx 10{,}09>0.$$

Tahminimiz doğru çıktı.
■

Alıştırma 11.8 (Sikloid Kemeri Boyunca İş). $\mathbf{F}(x,y)=x\,\mathbf{i}+(y+2)\,\mathbf{j}$ kuvvet alanının, bir cismi $\mathbf{r}(t)=(t-\sin t)\,\mathbf{i}+(1-\cos t)\,\mathbf{j}$, $0\le t\le 2\pi$ sikloid kemeri boyunca hareket ettirirken yaptığı işi bulunuz.

Çözüm.
$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ ve $\mathbf{r}'(t)$.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (t-\sin t)\,\mathbf{i}+(3-\cos t)\,\mathbf{j},\qquad \mathbf{r}'(t)=(1-\cos t)\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}.$$

İç çarpım.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) &= (t-\sin t)(1-\cos t)+(3-\cos t)\sin t\\ &= t-t\cos t-\sin t+\sin t\cos t+3\sin t-\sin t\cos t\\ &= t-t\cos t+2\sin t.\end{aligned}$$

İntegral. Terim terim: $\int_0^{2\pi} t\,dt = 2\pi^2$ ve $\int_0^{2\pi} 2\sin t\,dt = 0$'dır. $\int t\cos t\,dt$ için kısmi integrasyonla ($u=t$, $dv=\cos t\,dt$) bir ilkel $t\sin t+\cos t$ bulunur ve

$$\int_0^{2\pi} t\cos t\,dt = \big[t\sin t+\cos t\big]_0^{2\pi} = (0+1)-(0+1) = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Böylece

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi^2 - 0 + 0 = 2\pi^2$$

bulunur.
■

Alıştırma 11.9 (Çeyrek Çember Biçimli Tel). İnce bir tel, merkezi orijinde ve yarıçapı a olan çemberin birinci bölgedeki çeyreği biçimindedir. Yoğunluk fonksiyonu $\rho(x,y) = kxy$ $(k>0)$ ise telin kütlesini ve kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.
Parametrize et. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \pi/2$. $\mid \mathbf{r}'(t) \mid = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a$ olduğundan $ds = a\,dt$'dir.
Kütle.

$$m = \int_C kxy\,ds = \int_0^{\pi/2} ka^2 \cos t \sin t \cdot a\,dt = ka^3\left[\frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{ka^3}{2}.$$

$\bar{x}$**.** (5) formülündeki integral

$$\int_C x\,\rho\,ds = \int_0^{\pi/2} ka^4\cos^2 t \sin t\,dt = ka^4\left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{ka^4}{3}$$

olduğundan $\bar{x} = \dfrac{ka^4/3}{ka^3/2} = \dfrac{2a}{3}$ bulunur.
$\bar{y}$**.** Aynı biçimde

$$\int_C y\,\rho\,ds = ka^4\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos t\,dt = ka^4\left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{ka^4}{3}$$

ve $\bar{y} = \frac{2a}{3}$ olur. Bu, tel ile yoğunluğun $y = x$ doğrusuna göre simetrik olmasıyla uyumludur.
Kütle $\frac{ka^3}{2}$, kütle merkezi $\left(\frac{2a}{3}, \frac{2a}{3}\right)$ noktasıdır. Bu noktanın orijine uzaklığı $\frac{2\sqrt{2}}{3}\,a \approx 0{,}94\,a < a$ olduğundan kütle merkezi telin üzerinde değil, çeyrek dairenin içindedir.
■

Alıştırma 11.10 (Telin Eylemsizlik Momentleri). Doğrusal yoğunluğu $\rho(x,y)$ olan ve bir C eğrisi boyunca uzanan telin x ve y eksenlerine göre **eylemsizlik momentleri**, levhalardaki tanımın (bkz. Tanım 4.5) karşılığı olarak

$$I_x = \int_C y^2\rho(x,y)\,ds, \qquad I_y = \int_C x^2\rho(x,y)\,ds$$

ile tanımlanır. Tabanı ağır yarım çember telin (bkz. Örnek 11.4) eylemsizlik momentlerini bulunuz.

Çözüm.
Kurulum. Tel birim çemberin üst yarısıdır, yoğunluğu $\rho = k(1-y)$'dir; $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$ ve $ds = dt$'dir.
Gereken integraller. $[0,\pi]$ üzerinde $\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$'dir. Ayrıca

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{\pi} \sin^3 t\,dt = \int_0^{\pi} (1-\cos^2 t)\sin t\,dt = \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3},$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 t \sin t\,dt = \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

olur.
I_x.

$$I_x = k\int_0^{\pi} \sin^2 t\,(1-\sin t)\,dt = k\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\right) \approx 0{,}24\,k.$$

I_y.

$$I_y = k\int_0^{\pi} \cos^2 t\,(1-\sin t)\,dt = k\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) \approx 0{,}90\,k.$$

Denetim. Tel üzerinde $x^2+y^2=1$ olduğundan $I_x + I_y = \int_C \rho\,ds = m$ olmalıdır. Gerçekten $I_x + I_y = k(\pi-2) = m$'dir. I_x'in küçük çıkması da beklenen bir sonuçtur: telin ağır kısmı x eksenine yakın olan tabanıdır.
■

Alıştırma 11.11 (Dairesel Çitin Boyanması). Dairesel bir çitin tabanı, yarıçapı 10 m olan $x = 10\cos t$, $y = 10\sin t$ çemberidir. Çitin (x,y) noktasındaki yüksekliği $h(x,y) = 4 + 0{,}01(x^2 - y^2)$ metredir; yani yükseklik 3 m ile 5 m arasında değişir. 1 litre boya 100 m² alanı kaplıyorsa çitin iki yüzünü boyamak için kaç litre boya gerekir?

Çözüm.
Bir yüzün alanı bir eğrisel integraldir. Perde alanı yorumuna göre çitin bir yüzünün alanı $\int_C h\,ds$'dir.
***ds* ve *h*.** $\mathbf{r}'(t) = \langle -10\sin t, 10\cos t\rangle$ ve $\mid \mathbf{r}'(t) \mid = 10$ olduğundan $ds = 10\,dt$'dir. Çember üzerinde

$$h = 4 + 0{,}01\,(100\cos^2 t - 100\sin^2 t) = 4 + \cos^2 t - \sin^2 t = 4 + \cos 2t$$

olur. $\cos 2t$, -1 ile 1 arasında değiştiğinden yükseklik gerçekten 3 m ile 5 m arasındadır.
Alan.

$$\int_C h\,ds = \int_0^{2\pi} (4+\cos 2t)\cdot 10\,dt = 10\Big[4t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{2\pi} = 80\pi$$

metrekaredir.
Boya. İki yüzün alanı $160\pi \approx 502{,}65$ m²'dir. Gereken boya

$$\frac{160\pi}{100} = 1{,}6\,\pi \approx 5{,}03 \ \text{ litre}$$

olur.
■

Alıştırma 11.12 (Konum Vektörünün Eğrisel İntegrali). C, $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ ile verilen düzgün bir eğri ve $\mathbf{r}$ aynı zamanda $\mathbf{r}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ konum vektörü alanı olsun.

$$\int_C \mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\left[\mid \mathbf{r}(b)\mid^2 - \mid \mathbf{r}(a)\mid^2\right]$$

olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Tanımı uygulayalım. Konum vektörü alanının $\mathbf{r}(t)$ noktasındaki değeri $\mathbf{r}(t)$'nin kendisidir. Tanım 11.6 gereği

$$\int_C \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

olur.
İntegrandı bir türev olarak yazalım. İç çarpımın türev kuralından

$$\frac{d}{dt} \mid \mathbf{r}(t) \mid^2 = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) \right) = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 2\, \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

bulunur. Yani $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$, $\frac{1}{2} \mid \mathbf{r}(t) \mid^2$ fonksiyonunun türevidir; bu fonksiyonun türevi süreklidir.
Temel teorem. Analizin temel teoremine göre (bkz. Analiz 2)

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \left[\frac{1}{2} \mid \mathbf{r}(t) \mid^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} \left[\mid \mathbf{r}(b) \mid^2 - \mid \mathbf{r}(a) \mid^2 \right]$$

elde edilir. Sonuç yalnız uç noktalara bağlıdır; özellikle uç noktaları orijine eşit uzaklıkta olan her eğri boyunca, örneğin kapalı eğriler boyunca bu integral sıfırdır.
■

Bu bölümde eğrisel integralin değerinin genel olarak izlenen yola bağlı olduğunu gördük (Örnek 11.5 ve Örnek 11.6). Öte yandan son alıştırmalardaki gradyan alanı ve konum vektörü alanı boyunca integraller yalnız uç noktalara bağlı çıktı. Bunun hangi alanlarda ve neden olduğunu, analizin temel teoreminin eğrisel integraller için karşılığıyla birlikte bir sonraki bölümde inceleyeceğiz: Eğrisel İntegraller için Temel Teorem.

 CC BY-NC-SA 4.0

12. Eğrisel İntegraller için Temel Teorem

Tek değişkenli analizin temel teoremi, türevi sürekli olan bir F fonksiyonu için

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{1}$$

olduğunu söyler (bkz. Analiz 2). Türevin integralini bulmak için F'nin yalnız aralığın iki ucundaki değerlerini bilmek yeter; aradaki noktalarda ne olduğu önemli değildir.
İki ya da üç değişkenli bir f fonksiyonunun gradyanı ∇f, f'nin bir tür türevidir (bkz. Analiz 4). Bu bölümde (1) eşitliğinin eğrisel integrallerdeki karşılığını kuracağız: bir gradyan alanının bir eğri boyunca integrali, f'nin eğrinin iki ucundaki değerlerinin farkıdır. Bu basit sonuçtan birkaç önemli soru doğar: Hangi alanların eğrisel integrali izlenen yola bağlı değildir? Bir alanın konservatif olup olmadığını nasıl anlarız ve potansiyel fonksiyonunu nasıl buluruz? "Konservatif" adı nereden gelir?

12.1 Gradyan Alanlarının Eğrisel İntegrali

Önce teoremi ifade edip ispatlayalım, ardından onu iki örnekte kullanalım.
Bir C eğrisi $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ vektör fonksiyonuyla verilsin. $\mathbf{r}'$ sürekli ve hiçbir yerde sıfır değilse C'nin düzgün olduğunu hatırlayalım. $\mathbf{r}(a)$ eğrinin başlangıç noktası, $\mathbf{r}(b)$ bitiş noktasıdır. Sürekli bir $\mathbf{F}$ vektör alanının C boyunca eğrisel integrali

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

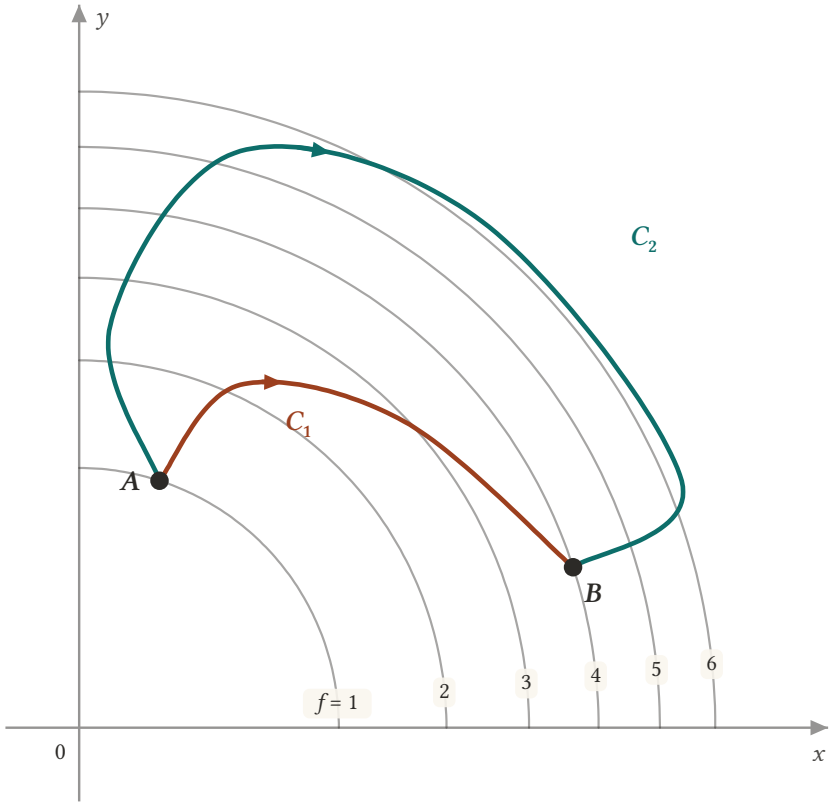
ile tanımlanır (Tanım 11.6). Bir f fonksiyonunun gradyanı olan ∇f alanına gradyan alanı (Tanım 10.3), $\mathbf{F} = \nabla f$ olan bir f varsa $\mathbf{F}$'ye konservatif alan, f'ye de $\mathbf{F}$'nin potansiyel fonksiyonu denir (Tanım 10.4).

Teorem 12.1 (Eğrisel İntegraller için Temel Teorem). *$C, \mathbf{r}(t), a \le t \le b$ vektör fonksiyonuyla verilen düzgün bir eğri olsun. f iki ya da üç değişkenli, türevlenebilir bir fonksiyon ve ∇f gradyanı C üzerinde sürekli olsun. Bu durumda*

$$\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.1: f(x, y) = x² + y² *fonksiyonunun* f = 1, 2, ..., 6 *seviye eğrileri ve* A*'dan* B*'ye giden iki yol.* A *noktası* f = 1, B *noktası* f = 4 *eğrisi üzerindedir.* C_2 *yolu* f = 6 *eğrisini aşıp geri dönse de iki yol boyunca* $\int \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ = f(B) − f(A) = 4 − 1 = 3 *olur: yükselirken toplanan değerler alçalırken geri verilir.*

İspat.
f üç değişkenli olsun; iki değişkenli durumda z terimlerini silmek yeter. $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ yazalım. Eğrisel integralin tanımından ve iç çarpımı bileşenlerle yazarak

$$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right) dt\end{aligned}$$

buluruz; kısmi türevler $\mathbf{r}(t)$ noktasında hesaplanır. Parantez içindeki toplam, zincir kuralına göre (bkz. Analiz 4) $t \mapsto f(\mathbf{r}(t))$ bileşke fonksiyonunun türevidir:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

∇f, C üzerinde ve $\mathbf{r}'$, $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğundan bu türev $[a, b]$ üzerinde süreklidir. Bu yüzden tek değişkenli temel teorem (1) uygulanabilir:

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t))\, dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani bir gradyan alanının eğrisel integrali, f'nin eğri boyunca **net değişimidir**. C düzlemde $A(x_1, y_1)$ noktasından $B(x_2, y_2)$ noktasına gidiyorsa

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1),$$

uzayda $A(x_1, y_1, z_1)$ noktasından $B(x_2, y_2, z_2)$ noktasına gidiyorsa

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

olur. Konservatif bir alanın eğrisel integralini hesaplamak için potansiyel fonksiyonun yalnız uç noktalardaki değerleri yeter; eğrinin biçimi, uzunluğu ya da parametrelemesi hesaba girmez.
Teorem, art arda gelen sonlu sayıda düzgün parçadan oluşan eğriler, yani Eğrisel İntegraller bölümündeki parçalı düzgün eğriler için de geçerlidir.

Sonuç 12.1 (Parçalı Düzgün Eğriler için Temel Teorem). *C, bir A noktasından bir B noktasına giden parçalı düzgün bir eğri ve ∇f, C üzerinde sürekli olsun. Bu durumda*

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$$

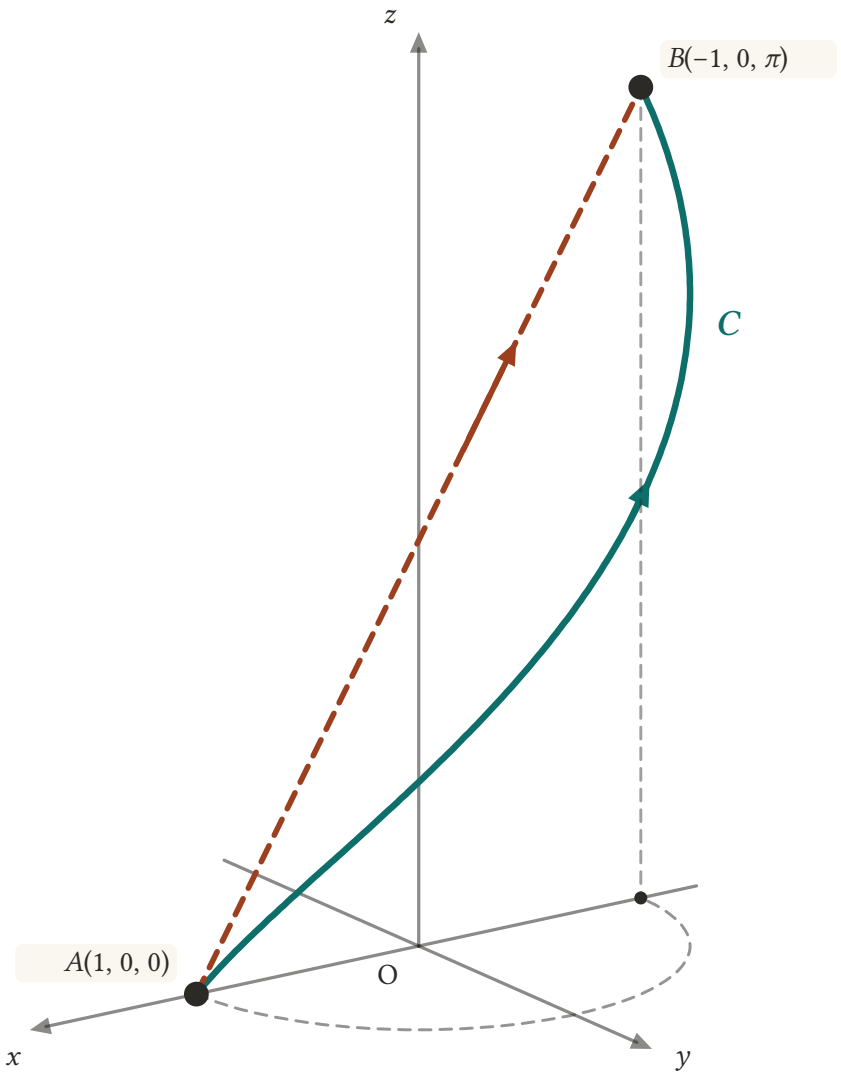
olur.

> ***İspat.***
> *C parçalı düzgün olduğundan, art arda gelen $C_1, C_2, \ldots, C_n$ düzgün eğrilerinden oluşur: her parçanın bitiş noktası bir sonrakinin başlangıç noktasıdır. C_k'nin başlangıç noktasına A_{k-1}, bitiş noktasına A_k diyelim; $A_0 = A$ ve $A_n = B$'dir. Parçalı düzgün bir eğri boyunca integral parçalar üzerindeki integrallerin toplamıdır. Her parçaya Teorem 12.1 uygulanırsa*
>
> $$\begin{aligned}\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} + \ldots + \int_{C_n} \nabla f \cdot d\mathbf{r} \\ &= \big(\, f(A_1) - f(A_0) \,\big) + \big(\, f(A_2) - f(A_1) \,\big) + \ldots \\ &\quad + \big(\, f(A_n) - f(A_{n-1}) \,\big)\end{aligned}$$
>
> *bulunur. Her ara nokta bir kez artı, bir kez eksi işaretle geçtiğinden $f(A_1), \ldots, f(A_{n-1})$ terimleri birbirini götürür ve geriye $f(A_n) - f(A_0) = f(B) - f(A)$ kalır.* ■

Teoremi önce her iki yoldan da hesaplanabilen bir örnekte deneyelim.

Örnek 12.1 (Bir Sarmal Boyunca Gradyanın İntegrali). $f(x, y, z) = xy + z^2$ olsun ve C, $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, $0 \le t \le \pi$ sarmalı olsun. $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ integralini önce tanımdan, sonra temel teoremle hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.2: C sarmalı $A(1,0,0)$ noktasından $B(-1,0,\pi)$ noktasına z ekseni çevresinde yarım tur atarak çıkar; zemindeki kesikli yay, sarmalın xy-düzlemindeki izdüşümüdür. Kesikli doğru parçası aynı iki noktayı birleştirir. Temel teoreme göre ∇f alanının bu iki yol boyunca integralleri eşittir.

Çözüm.
Tanımdan. $\nabla f = \langle y, x, 2z\rangle$ ve $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1\rangle$'dir. Eğri üzerinde $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ olduğundan, $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ özdeşliğiyle

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) &= \sin t\,(-\sin t) + \cos t \cos t + 2t \cdot 1 \\ &= \cos 2t + 2t\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} (\cos 2t + 2t)\, dt = \Big[\, \frac{1}{2}\sin 2t + t^2 \Big]_0^{\pi} = \pi^2$$

bulunur.
Temel teoremle. ∇f her yerde süreklidir ve $\mathbf{r}'(t)$ hiç sıfır olmadığından (üçüncü bileşeni 1'dir) C düzgündür. Başlangıç noktası $\mathbf{r}(0) = (1,0,0)$, bitiş noktası $\mathbf{r}(\pi) = (-1,0,\pi)$'dir. Teorem 12.1 gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(-1,0,\pi) - f(1,0,0)$$
$$= (0+\pi^2) - (0+0) = \pi^2$$

olur. İki yol aynı sonucu verir; ikincisinde ne $\mathbf{r}'(t)$'yi ne de bir integrali hesaplamak gerekti. ■

Temel teoremin asıl gücü, integrali tanımdan hesaplamanın zor ya da olanaksız olduğu durumlarda ortaya çıkar: eğri yalnız "parçalı düzgün" diye verilmiş olsa bile sonuç bulunabilir.

Örnek 12.2 (Kütle Çekim Alanının Yaptığı İş). Orijindeki M kütleli bir cismin, $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$ konumundaki m kütleli bir parçacığa uyguladığı kütle çekim kuvveti

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\,\mathbf{x}\,|^3}\,\mathbf{x}$$

alanıyla verilir. Parçacık $(3,4,12)$ noktasından $(2,2,0)$ noktasına parçalı düzgün bir C eğrisi boyunca hareket ederken bu alanın yaptığı işi bulunuz.

Çözüm.
Potansiyel fonksiyon. Kütle çekim alanının konservatif olduğunu, ayrıca

$$f(x,y,z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

için $\mathbf{F} = \nabla f$ olduğunu Vektör Alanları bölümünde görmüştük. ∇f, orijin dışında süreklidir.
İş. İş, kuvvet alanının eğrisel integralidir. C orijinden geçmediği sürece Sonuç 12.1 uygulanır:

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(2,2,0) - f(3,4,12)$$
$$= \frac{mMG}{\sqrt{2^2+2^2}} - \frac{mMG}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}$$
$$= mMG\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{13}\right).$$

Burada $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ve $\sqrt{169} = 13$'tür. Sonuç C'nin biçimine bağlı değildir. $1/(2\sqrt{2}) \approx 0{,}354$ sayısı $1/13 \approx 0{,}077$'den büyük olduğundan iş pozitiftir: parçacık, onu çeken kütleye yaklaşmıştır (orijine uzaklığı 13'ten $2\sqrt{2}$'ye inmiştir). ■

12.2 Yoldan Bağımsızlık

Temel teoremin en önemli sonucu, gradyan alanlarında integralin izlenen yola bağlı olmamasıdır. Bunun genel bir alanda kendiliğinden gerçekleşmediğini bir örnekle görelim.
$\mathbf{F}(x,y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ alanını $(1,0)$ noktasından $(-1,0)$ noktasına üç farklı yoldan götürelim.

- Birim çemberin üst yarısı $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t\rangle$, $0 \le t \le \pi$ boyunca $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \langle -\sin t, \cos t\rangle$ ve $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t\rangle$'dir. İç çarpım $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ olduğundan integral π'dir.
- Alt yarısı $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, -\sin t\rangle$, $0 \le t \le \pi$ boyunca $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \langle \sin t, \cos t\rangle$ ve $\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, -\cos t\rangle$'dir. İç çarpım $-\sin^2 t - \cos^2 t = -1$ olduğundan integral $-\pi$'dir.
- x ekseni üzerindeki doğru parçası boyunca $y = 0$'dır; $\mathbf{F} = x\,\mathbf{j}$ ile hareket yönü $-\mathbf{i}$ birbirine dik olduğundan integral 0'dır.

Uç noktalar aynı, sonuçlar farklı. Oysa bir gradyan alanında Sonuç 12.1 bütün yollarda aynı $f(B) - f(A)$ değerini verir. Bu ayrımı adlandıralım.

Tanım 12.1 (Yol ve Yoldan Bağımsızlık). Parçalı düzgün bir eğriye **yol** (path) denir. $\mathbf{F}$, bir D kümesinde tanımlı ve sürekli bir vektör alanı olsun. D içinde başlangıç noktaları aynı ve bitiş noktaları aynı olan her C_1 ve C_2 yolu için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

oluyorsa $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integraline D'de **yoldan bağımsızdır** (independent of path) denir.

Yani yoldan bağımsız bir integralin değeri yalnız yolun nereden başlayıp nerede bittiğine bağlıdır; aradaki güzergâh önemli değildir. Böyle bir integrali D içinde A'dan B'ye giden herhangi bir yol boyunca, örneğin D'den çıkmıyorsa hesabı en kolay olan doğru parçası boyunca hesaplayabiliriz. Yukarıdaki $-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ alanının integrali düzlemde yoldan bağımsız değildir.

Sonuç 12.2 (Konservatif Alanların İntegrali Yoldan Bağımsızdır). *$\mathbf{F} = \nabla f$ ve ∇f, D üzerinde sürekli olsun. Bu durumda $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integrali D'de yoldan bağımsızdır.*

> ***İspat.***
> *C_1 ve C_2, D içinde aynı A noktasından aynı B noktasına giden iki yol olsun. Sonuç 12.1 ikisine de uygulanırsa*
>
> $$\int_{C_1} \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A) = \int_{C_2} \nabla f \cdot d\mathbf{r}$$
>
> *bulunur.* ■

Yoldan bağımsızlığı kapalı eğrilerle de ifade edebiliriz.

Tanım 12.2 (Kapalı Eğri). Bitiş noktası başlangıç noktasıyla çakışan eğriye **kapalı eğri** (closed curve) denir. C, $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ ile verilmişse bu, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(a)$ demektir.

Yani kapalı bir eğri boyunca hareket eden nokta, yola çıktığı yere geri döner. Çember, elips ve bir üçgenin kenarları kapalı eğrilerdir; bir doğru parçası ya da bir parabol yayı kapalı değildir.
Aşağıdaki ispatta eğrisel integralin iki kuralını kullanacağız. C yolu, C_1 ile onun bitiş noktasından başlayan C_2'nin art arda izlenmesiyle oluşuyorsa integral toplanır:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

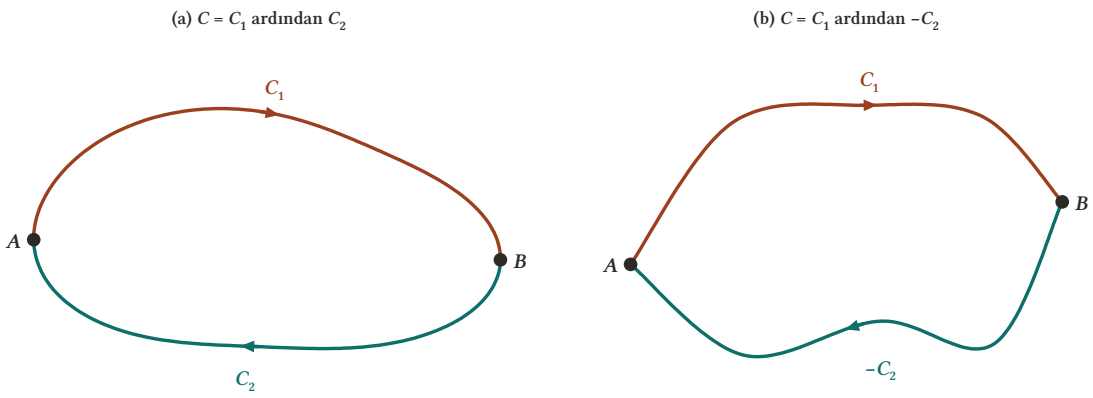
$-C$, aynı eğrinin ters yönde izlenmesidir ve $\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'dir (Önerme 11.4).

Teorem 12.2 (Yoldan Bağımsızlık ve Kapalı Yollar). *$\mathbf{F}$, D üzerinde sürekli bir vektör alanı olsun. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integralinin D'de yoldan bağımsız olması için gerek ve yeter koşul, D içindeki her kapalı C yolu için*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

olmasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.3: (a) Kapalı bir C yolu, üzerindeki iki A, B noktasında ikiye ayrılır: A'dan B'ye giden C_1 ve B'den A'ya dönen C_2. (b) A'dan B'ye giden iki yoldan C_1'i izleyip C_2'yi ters yönde ($-C_2$) geri dönmek kapalı bir yol verir.

İspat.
Yoldan bağımsızlıktan kapalı yollara. *İntegral D'de yoldan bağımsız ve C, D içinde $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ ile verilen kapalı bir yol olsun. Başlangıç noktası $A = \mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ olsun ve bir $a < c < b$ için $B = \mathbf{r}(c)$ diyelim. $\mathbf{r}$'nin $[a, c]$ üzerindeki kısıtlaması A'dan B'ye giden bir C_1 yolu, $[c, b]$ üzerindeki kısıtlaması da B'den A'ya dönen bir C_2 yoludur; C, C_1 ile ardından gelen C_2'dir (şeklin (a) paneli). $-C_2$ yolu A'dan B'ye gider; yani C_1 ile $-C_2$'nin uç noktaları aynıdır ve yoldan bağımsızlıktan integralleri eşittir. Buna göre*

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0\end{aligned}$$

olur.
Kapalı yollardan yoldan bağımsızlığa. *D içindeki her kapalı yolda integral sıfır olsun. C_1 ve C_2, D içinde A'dan B'ye giden iki yol olsun. C_1 ile ardından gelen $-C_2$'nin oluşturduğu C yolu A'dan çıkıp yine A'ya döner, yani kapalıdır (şeklin (b) paneli). Varsayımdan*

$$\begin{aligned}0 = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

ve buradan $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ bulunur. ■

Sonuç 12.2 ile bu teorem birlikte şunu söyler: konservatif bir alanın her kapalı yol boyunca integrali sıfırdır. Fiziksel yorumu şudur: kütle çekim alanı ya da bir elektrik alanı gibi konservatif bir kuvvet alanı, bir cismi kapalı bir yol boyunca dolaştırıp başladığı yere getirdiğinde toplamda hiç iş yapmaz.

12.3 Yoldan Bağımsız Alanlar Konservatiftir

Şimdi tersini soralım: integrali yoldan bağımsız olan her alan konservatif midir? Cevap evettir, ama tanım kümesinin iki özelliği olmalıdır.
Birinci özellik açıklıktır. D'nin her P noktası için merkezi P olan ve tamamen D'de kalan bir disk varsa D **açık** kümedir (bkz. Analiz 4). Açık bir küme sınır noktalarının hiçbirini içermez: $x^2 + y^2 < 1$ diski açıktır, $x^2 + y^2 \le 1$ diski açık değildir. İkinci özellik, kümenin tek parça olmasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 12.3 (Yol Bağlantılı Küme). D'nin herhangi iki noktası, tamamen D içinde kalan bir yolla birleştirilebiliyorsa D kümesine **yol bağlantılı** (path-connected) denir.

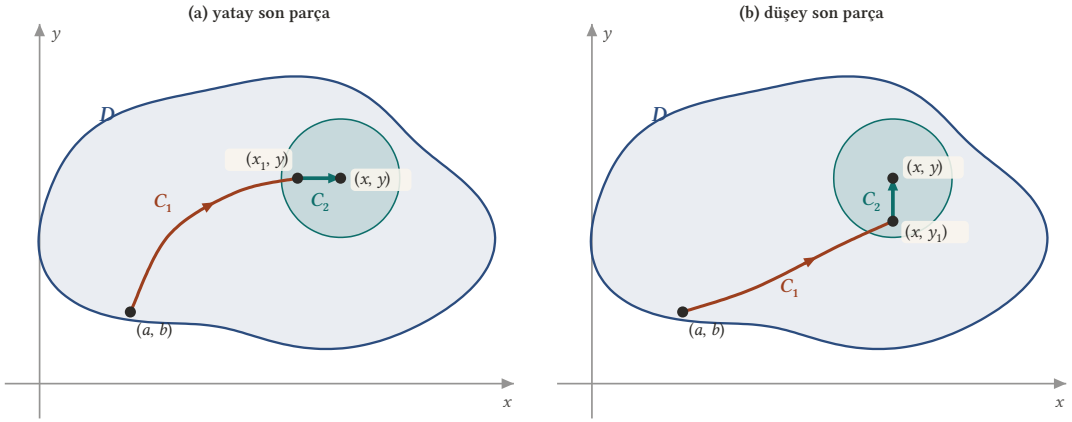
Yani yol bağlantılı bir kümenin iki noktası arasında kümeden çıkmadan gidilebilir. İki ayrık diskin birleşimi yol bağlantılı değildir: bir diskten ötekine giden her yol aradaki boşluktan geçer. Açık kümeler için bu tanım, Analiz 4'teki bağlantılılık tanımına denktir (bkz. Analiz 4). Bu yüzden bu ve sonraki bölümlerde "bağlantılı" sözcüğünü yol bağlantılı anlamında kullanacağız. Açık ve bağlantılı bir kümeye **bölge** dendiğini de hatırlayalım (bkz. Analiz 4).

Teorem 12.3 (Yoldan Bağımsız Alan Konservatiftir). *$\mathbf{F}$, açık ve bağlantılı bir D bölgesinde sürekli bir vektör alanı olsun. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integrali D'de yoldan bağımsızsa $\mathbf{F}$, D'de konservatiftir; yani D'de $\nabla f = \mathbf{F}$ olan bir f fonksiyonu vardır.*

İspat.
Düzlemdeki alanlar için ispatlayalım; uzaydaki ispat aynıdır, yalnız üçüncü bir doğru parçası eklenir. $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ yazalım ve D'de sabit bir (a,b) noktası seçelim. D'nin her (x,y) noktası için

$$f(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

tanımlayalım. Sağdaki integral, D içinde (a,b)'den (x,y)'ye giden herhangi bir yol boyunca alınır. D bağlantılı olduğundan böyle bir yol vardır; integral yoldan bağımsız olduğundan sonuç seçilen yola bağlı değildir. Demek ki f iyi tanımlıdır. $f_x = P$ ve $f_y = Q$ olduğunu göstereceğiz.



Şekil 12.4: $f(x,y)$ değerini veren yol, (x,y) merkezli ve D'de kalan diskin içinde bir doğru parçasıyla biter. (a) Yatay C_2 parçasında $dy = 0$ olduğundan yalnız P katkı verir ve $f_x = P$ bulunur. (b) Düşey parçada $dx = 0$'dır ve $f_y = Q$ bulunur.

x'e göre türev. *D açık olduğundan merkezi (x,y) olan ve D'de kalan bir disk vardır. Bu diskte $x_1 < x$ olan bir (x_1,y) noktası seçelim. (a,b)'den (x_1,y)'ye giden bir C_1 yolunu ve ardından (x_1,y)'den (x,y)'ye giden yatay C_2 doğru parçasını izleyelim (şeklin (a) paneli). Yoldan bağımsızlık gereği*

$$f(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x_1,y)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

olur. x değişirken (x_1,y) noktası sabit kalır, bu yüzden ilk integral x'e bağlı değildir. C_2'yi $\mathbf{r}(t) = \langle t, y\rangle$, $x_1 \le t \le x$ diye yazalım. Bu doğru parçasında $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i}$ ve $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = P(t,y)$ olduğundan

$$\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x} P(t,y)\,dt$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. $t \mapsto P(t,y)$ sürekli olduğundan, integralin üst sınırına göre türevi integrandın o noktadaki değeridir (bkz. Analiz 2):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 + \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_1}^{x} P(t,y)\,dt = P(x,y).$$

y'ye göre türev. *Aynı diskte $y_1 < y$ olan bir (x,y_1) noktası seçip yolu bu kez (x,y_1)'den (x,y)'ye giden düşey bir doğru parçasıyla bitirelim (şeklin (b) paneli). Bu doğru parçası $\mathbf{r}(t) = \langle x, t\rangle$, $y_1 \le t \le y$ diye yazılır; $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{j}$ olduğundan aynı akıl yürütme*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 + \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_1}^{y} Q(x,t)\,dt = Q(x,y)$$

verir. Böylece $\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} = \mathbf{F}$ bulunur, yani $\mathbf{F}$ konservatiftir. ■

Şimdiye kadarki sonuçları tek bir ifadede toplayabiliriz.

Sonuç 12.3 (Konservatiflik için Denk Koşullar). *$\mathbf{F}$, açık ve bağlantılı bir D bölgesinde sürekli bir vektör alanı olsun. Aşağıdaki üç koşul denktir:*
(i) $\mathbf{F}$, D'de konservatiftir.
(ii) $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integrali D'de yoldan bağımsızdır.
(iii) D içindeki her kapalı C yolu için $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$'dır.

İspat.

(i) koşulundan (ii) koşulu Sonuç 12.2 ile, (ii) koşulundan (i) koşulu Teorem 12.3 ile çıkar. (ii) ile (iii) koşullarının denkliğini Teorem 12.2 verir. ■

12.4 Konservatiflik Ölçütü

Denk koşulların hiçbiri pratikte kolay denetlenmez, çünkü bütün yolları ya da bütün kapalı yolları tek tek deneyemeyiz. Bu başlıkta P ile Q'nun kısmi türevlerine bakan kullanışlı bir ölçüt kuracağız. Önce konservatif bir alanın sağlaması gereken bir koşulu bulalım.

Teorem 12.4 (Konservatif Alan için Gerekli Koşul). *$\mathbf{F}(x,y) = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$, açık bir D kümesinde konservatif olsun ve P ile Q'nun birinci mertebeden kısmi türevleri D'de sürekli olsun. Bu durumda D'nin her noktasında*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

olur.

İspat.
$\mathbf{F}$ konservatif olduğundan D'de $\nabla f = \mathbf{F}$ olan bir f vardır, yani $P = f_x$ ve $Q = f_y$'dir. Buradan $P_y = (f_x)_y = f_{xy}$ ve $Q_x = (f_y)_x = f_{yx}$ olur ve varsayım gereği bu iki karışık türev D'de süreklidir. Clairaut teoremine göre (bkz. Analiz 4) sürekli karışık türevler eşittir:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

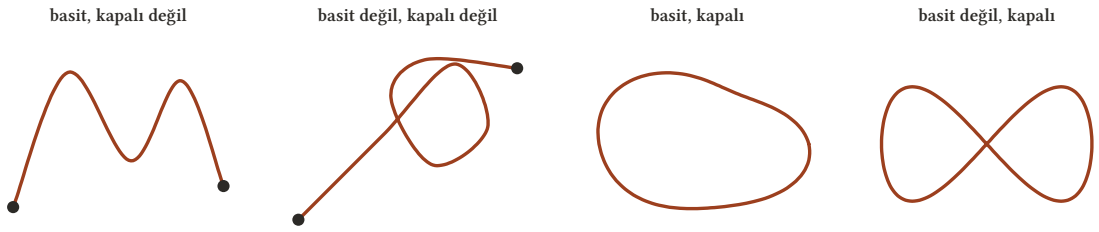
■

Yani $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ olan tek bir nokta bile alanın konservatif olmadığını gösterir. Tersi ise ancak özel bölgelerde doğrudur. Bu bölgeleri tanımlamak için önce basit eğrilere ihtiyacımız var.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 12.4 (Basit Eğri). Kendisini kesmeyen eğriye **basit eğri** (simple curve) denir. C, $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ ile verilmişse bu, $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ için ($t_1 = a, t_2 = b$ durumu dışında) $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$ demektir. Hem basit hem kapalı olan eğriye **basit kapalı eğri** denir.

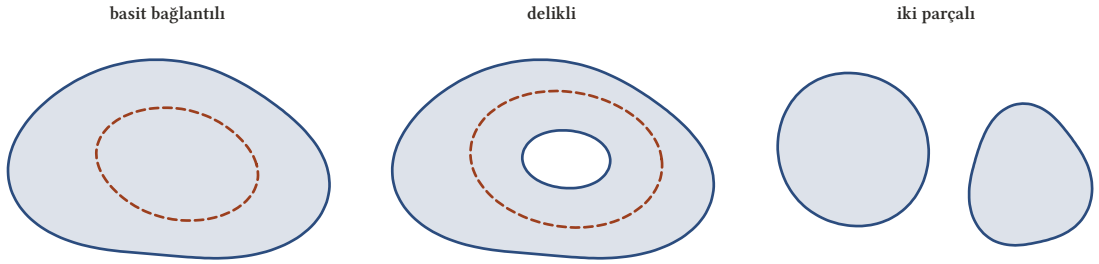
Yani basit bir eğri üzerinde ilerleyen nokta aynı yerden iki kez geçmez; yalnız kapalı bir eğride, en sonda başladığı yere döner. Çember ve elips basit kapalı eğrilerdir; 8 rakamı biçimindeki bir eğri kapalıdır ama basit değildir.



Şekil 12.5: Eğri türleri. Kapalı olmayan eğrilerde uç noktalar işaretlidir. İkinci eğri kendisini bir kez keser; dördüncü eğri (8 biçimi) başladığı yere döner ama ortadaki noktadan iki kez geçer.

Tanım 12.5 (Basit Bağlantılı Bölge). Düzlemde bağlantılı bir D kümesi verilsin. D içindeki her basit kapalı eğrinin çevrelediği bütün noktalar da D'ye aitse D'ye **basit bağlantılı** (simply-connected) denir.

Yani basit bağlantılı bir bölgede delik yoktur: bir delik olsaydı, deliğin çevresinde dolaşan basit kapalı bir eğri D'de olmayan noktaları çevrelerdi. Bölge bağlantılı olduğundan iki ayrı parçadan da oluşamaz. Disk, dikdörtgen, üst yarı düzlem ve bütün düzlem basit bağlantılıdır; halka ve bir noktası çıkarılmış düzlem basit bağlantılı değildir.



Şekil 12.6: Soldaki bölge basit bağlantılıdır: içindeki her basit kapalı eğri (kesikli) yalnız bölgenin noktalarını çevreler. Ortadaki bölgede deliği dolanan kesikli eğri, bölgede olmayan noktaları çevreler; sağdaki küme ise bağlantılı bile değildir. Bu iki küme basit bağlantılı değildir.

Artık gerekli koşulun (Teorem 12.4) kısmi tersini ifade edebiliriz. Bu ölçüt, düzlemde bir alanın konservatif olup olmadığını anlamanın en pratik yoludur.

Teorem 12.5 (Konservatiflik Ölçütü). *$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, açık ve basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlı bir vektör alanı olsun. P ile Q'nun birinci mertebeden kısmi türevleri D'de sürekli ve D'nin her noktasında*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

ise $\mathbf{F}$, D'de konservatiftir.

> ***Disk ve dikdörtgen için ispat.***
> *D, merkezi (a, b) olan açık bir disk ya da (a, b) noktasını içeren ve kenarları eksenlere paralel olan açık bir dikdörtgen olsun.*

 CC BY-NC-SA 4.0

L biçimli yol. *Bir $(x,y)\in D$ için (a,b)'den yatay olarak (x,b)'ye, oradan düşey olarak (x,y)'ye giden yol D'de kalır. Dikdörtgende bu açıktır, çünkü yolun her noktasının birinci koordinatı a ile x arasında, ikinci koordinatı b ile y arasındadır. Diskte de öyledir: yolun bir (u,s) noktası için $|\,u-a\,|\le|\,x-a\,|$ ve $|\,s-b\,|\le|\,y-b\,|$ olduğundan bu noktanın merkeze uzaklığı (x,y)'nin merkeze uzaklığını aşmaz. Bu yol boyunca $\mathbf{F}$'nin integralini alalım: yatay parçada $dy=0$, düşey parçada $dx=0$'dır ve*

$$f(x,y)=\int_a^x P(t,b)\,dt+\int_b^y Q(x,s)\,ds$$

olur.
y'ye göre türev. *İlk terim y'ye bağlı değildir. İkinci terim, üst sınırı y olan bir integraldir ve $s\mapsto Q(x,s)$ sürekli olduğundan türevi $Q(x,y)$'dir (bkz. Analiz 2). Demek ki $f_y=Q$.*
x'e göre türev. *İlk terimin x'e göre türevi aynı nedenle $P(x,b)$'dir. İkinci terimde x integralin içindedir. Türevi integral işaretinin altına geçirebilmek için düşey doğru parçasını içine alan ve D'de kalan kapalı bir dikdörtgen gerekir. Küçük bir $\delta>0$ için $[x-\delta,x+\delta]\times[b,y]$ dikdörtgeni ($y<b$ ise $[y,b]$) böyledir. $D=(\alpha_1,\alpha_2)\times(\beta_1,\beta_2)$ bir dikdörtgense b ile y, (β_1,β_2) aralığındadır; δ'yı $x-\alpha_1$ ve α_2-x sayılarından küçük seçmek yeter. D, yarıçapı ρ olan bir diskse dikdörtgenin her (u,s) noktası için $|\,u-a\,|\le|\,x-a\,|+\delta$ ve $|\,s-b\,|\le|\,y-b\,|$ olduğundan*

$$(u-a)^2+(s-b)^2\le\big(\,|\,x-a\,|+\delta\big)^2+(y-b)^2$$

olur. $\delta\to0$ iken sağ taraf $(x-a)^2+(y-b)^2<\rho^2$ sayısına yaklaştığından küçük δ için o da ρ^2'den küçüktür.
Bu dikdörtgende Q ve Q_x sürekli olduğundan türev integral işaretinin altına geçer (bkz. Analiz 3). Sonra $Q_x=P_y$ varsayımını ve s değişkenine göre (1) eşitliğini kullanırız:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\int_b^y Q(x,s)\,ds&=\int_b^y\frac{\partial Q}{\partial x}(x,s)\,ds=\int_b^y\frac{\partial P}{\partial y}(x,s)\,ds\\&=P(x,y)-P(x,b).\end{aligned}$$

İki terimi toplarsak

$$f_x=P(x,b)+P(x,y)-P(x,b)=P(x,y)$$

bulunur. Demek ki $\nabla f=\mathbf{F}$ ve $\mathbf{F}$ konservatiftir. ■

Genel bölge için ispatın fikri.
Genel bir basit bağlantılı bölgede L biçimli yollar D'den çıkabilir; bu yüzden başka bir yol izlenir. C, D içinde basit kapalı bir yol ve R, C'nin çevrelediği bölge olsun. D basit bağlantılı olduğundan R de D'nin içindedir, yani $P_y=Q_x$ eşitliği R'nin her noktasında geçerlidir. Bir sonraki bölümde göreceğimiz Green teoremi (Teorem 13.1), kapalı bir eğri boyunca eğrisel integrali eğrinin çevrelediği bölge üzerinde bir iki katlı integrale çevirir:

$$\int_C P\,dx+Q\,dy=\pm\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=0.$$

İşaret, C'nin dolaşılma yönüne bağlıdır. Demek ki her basit kapalı yolda integral sıfırdır. Kendisini kesen kapalı yollar basit kapalı parçalara ayrılarak aynı sonuca ulaşılır; ardından Teorem 12.2 integralin yoldan bağımsız olduğunu, Teorem 12.3 de $\mathbf{F}$'nin konservatif olduğunu verir. Green teoreminin rastgele bir basit kapalı eğri için ispatı ve kendisini sonsuz kez kesebilen yolların bu biçimde ele alınması ileri analiz gerektirir.

Ölçütü iki alanda deneyelim.

Örnek 12.3 (Konservatif Olmayan Bir Alan). $\mathbf{F}(x,y)=(x-y)\,\mathbf{i}+(x-2)\,\mathbf{j}$ alanının konservatif olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.
$P(x,y)=x-y$ ve $Q(x,y)=x-2$'dir. Buradan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

olur. Kısmi türevler her yerde sürekli ama hiçbir noktada eşit değildir. Teorem 12.4 gereği $\mathbf{F}$ konservatif değildir.
Aynı sonucu bir kapalı yolla da görebiliriz. Merkezi $(2,2)$, yarıçapı 2 olan C çemberini

$$\mathbf{r}(t) = \langle 2 + 2\cos t,\, 2 + 2\sin t \rangle, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

diye saat yönünün tersine dolaşalım. Bu çember üzerinde $x - y = 2\cos t - 2\sin t$ ve $x - 2 = 2\cos t$'dir; $\mathbf{r}'(t) = \langle -2\sin t,\, 2\cos t \rangle$ olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) &= -4\sin t\cos t + 4\sin^2 t + 4\cos^2 t \\ &= 4 - 2\sin 2t \end{aligned}$$

ve

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (4 - 2\sin 2t)\, dt = 8\pi$$

bulunur. Kapalı bir yolda integral sıfırdan farklı olduğundan, Sonuç 12.3 gereği $\mathbf{F}$ konservatif olamaz. ■

Örnek 12.4 (Konservatif Bir Alan).

$$\mathbf{F}(x,y) = (3 + 2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

alanının konservatif olup olmadığını belirleyiniz.

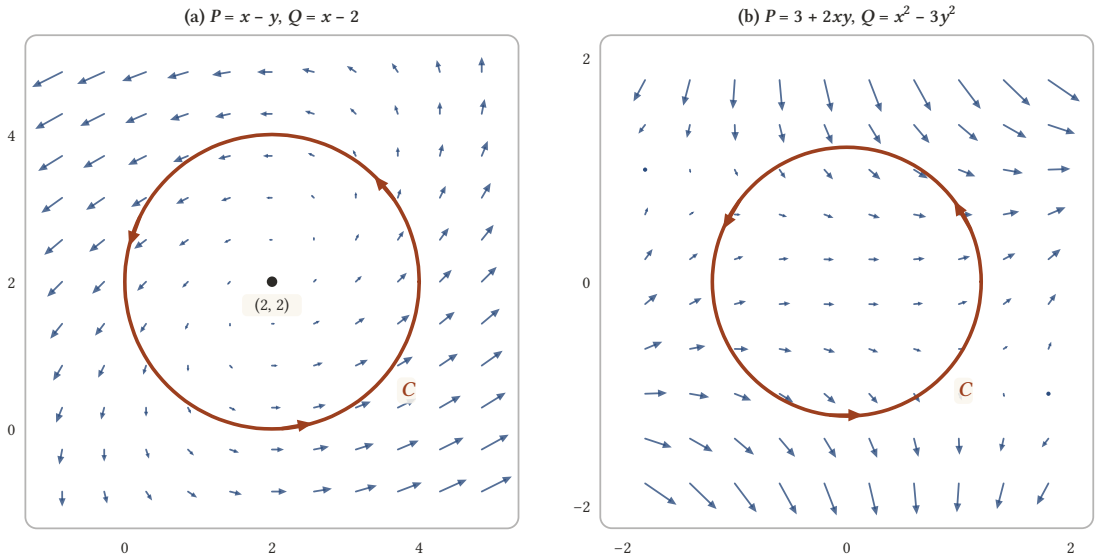
Çözüm.
$P(x,y) = 3 + 2xy$ ve $Q(x,y) = x^2 - 3y^2$'dir. Buradan

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

olur. $\mathbf{F}$'nin tanım kümesi bütün düzlemdir; düzlem açık ve basit bağlantılıdır, kısmi türevler de her yerde süreklidir. Teorem 12.5 gereği $\mathbf{F}$ konservatiftir. ■

Ölçütün ne söylediğini bu iki alanın resimlerinden de sezebiliriz. İlk alanda $(2,2)$ çevresindeki çember boyunca oklar hep çemberin dolaşılma yönünü gösterir: $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ her yerde pozitiftir, bu yüzden kapalı yol boyunca integral pozitif olmak zorundadır. İkinci alanda kapalı bir eğrinin bazı yerlerinde oklar eğrinin yönünü, bazı yerlerinde ters yönü gösterir; katkılar birbirini götürebilir ve gerçekten de her kapalı yolda toplam sıfırdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.7: Konservatiflik ölçütünün iki örneğindeki alanlar; okların hepsi aynı oranda kısaltılmıştır. (a) Merkezi (2, 2), yarıçapı 2 olan C çemberi boyunca oklar hep dolaşılma yönüne bakar ve integral 8π çıkar. (b) Konservatif alanda C çemberinin bazı yerlerinde oklar dolaşılma yönüne, bazı yerlerinde ters yöne bakar; katkılar birbirini götürür ve integral 0'dır.

⚠ Basit bağlantılılık koşulu atlanamaz

Teorem 12.4 her açık kümede geçerlidir, ama onun kısmi tersi olan Teorem 12.5 bölgenin basit bağlantılı olmasını ister. Delikli bir bölgede $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ eşitliği her noktada sağlandığı hâlde alan konservatif olmayabilir. Sıradaki örnek bunu gösterir.

Örnek 12.5 (Delikli Düzlemde Konservatif Olmayan Alan). Orijin dışında tanımlı

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

alanı için her noktada $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ olduğu hâlde $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integralinin yoldan bağımsız olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Kısmi türevler. $P = -y/(x^2+y^2)$ ve $Q = x/(x^2+y^2)$'dir. Bölüm kuralıyla

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

bulunur; iki türev orijin dışındaki her noktada eşit ve süreklidir.
İki yol. $(1,0)$'dan $(-1,0)$'a birim çemberin üst ve alt yarısı boyunca gidelim. Birim çember üzerinde $x^2+y^2 = 1$ olduğundan alan $-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$'ye eşittir. Bölümün başındaki hesap aynen geçerlidir: üst yarı boyunca integral π, alt yarı boyunca $-\pi$'dir. Uç noktaları aynı iki yolda integraller farklı olduğundan integral yoldan bağımsız değildir ve Sonuç 12.3 gereği $\mathbf{F}$ konservatif değildir.
Neden çelişki yok? $\mathbf{F}$'nin tanım kümesi $D = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$'dır. Birim çember D'nin içinde bir basit kapalı eğridir ama D'de olmayan orijini çevreler; yani D basit bağlantılı değildir. Konservatiflik ölçütünün (Teorem 12.5) varsayımı sağlanmadığından sonucu da beklenemez. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

12.5 Potansiyel Fonksiyonun Bulunması

Ölçüt alanın konservatif olduğunu söyler ama potansiyel fonksiyonu vermez. f'yi **kısmi integrasyon** denilen yöntemle buluruz: bir değişkene göre integral alırken integral sabitinin yerine öteki değişkenlerin bir fonksiyonunu koyarız.

Potansiyel fonksiyon dört adımda

1. Alanın konservatif olduğunu denetle: düzlemde Teorem 12.5 ölçütüyle, uzayda Teorem 14.2 ile.
2. $f_x = P$ eşitliğini x'e göre integre et; integral sabiti yerine $g(y)$ (uzayda $g(y,z)$) yaz.
3. Bulduğun f'nin y'ye göre türevini Q'ya eşitle ve g'nin türevini bul; bu türev x içermemelidir. İntegre et. Uzayda aynı işi z ve R için tekrarla.
4. Sonucun gradyanını alıp $\mathbf{F}$'yi verdiğini kontrol et.

Örnek 12.6 (Düzlemde Potansiyel Fonksiyon).

$$\mathbf{F}(x,y) = (3+2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

alanı için $\nabla f = \mathbf{F}$ olan bir f fonksiyonu bulunuz.

Çözüm.
Bu alanın konservatif olduğunu gördük (Örnek 12.4). Aradığımız f fonksiyonu

$$f_x(x,y) = 3 + 2xy \tag{2}$$

$$f_y(x,y) = x^2 - 3y^2 \tag{3}$$

eşitliklerini sağlar. (2) eşitliğini x'e göre integre edelim. Bu integralde y sabit sayıldığından integral sabiti y'nin bir fonksiyonu olabilir; ona $g(y)$ diyelim:

$$f(x,y) = 3x + x^2 y + g(y) \tag{4}$$

(4) eşitliğinin y'ye göre türevi $f_y(x,y) = x^2 + g'(y)$'dir. Bunu (3) ile karşılaştırırsak

$$x^2 + g'(y) = x^2 - 3y^2, \qquad g'(y) = -3y^2$$

bulunur. y'ye göre integral alarak $g(y) = -y^3 + K$ elde ederiz; K bir sabittir. Bunu (4)'te yerine koyarsak

$$f(x,y) = 3x + x^2 y - y^3 + K$$

potansiyel fonksiyonu bulunur. Kontrol: $f_x = 3 + 2xy$ ve $f_y = x^2 - 3y^2$.
Konservatiflik ölçütünün ispatındaki formül de aynı sonucu verir: $(a,b) = (0,0)$ için

$$\int_0^x 3\,dt + \int_0^y (x^2 - 3s^2)\,ds = 3x + x^2 y - y^3.$$

■

Potansiyel fonksiyon elimizdeyse eğrisel integral birkaç satırda biter.

Temel teoremle eğrisel integral üç adımda

1. Alanın C'yi içeren bir D bölgesinde konservatif olduğunu göster ve bir potansiyel fonksiyon f bul.
2. Eğrinin başlangıç noktası $A = \mathbf{r}(a)$ ile bitiş noktası $B = \mathbf{r}(b)$'yi hesapla.
3. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$ yaz. Ya da integral D'de yoldan bağımsız olduğundan C yerine A'dan B'ye giden ve D'den çıkmayan daha basit bir yol, örneğin D içinde kalıyorsa doğru parçası kullan.

Örnek 12.7 (Temel Teoremle Bir Eğrisel İntegral).

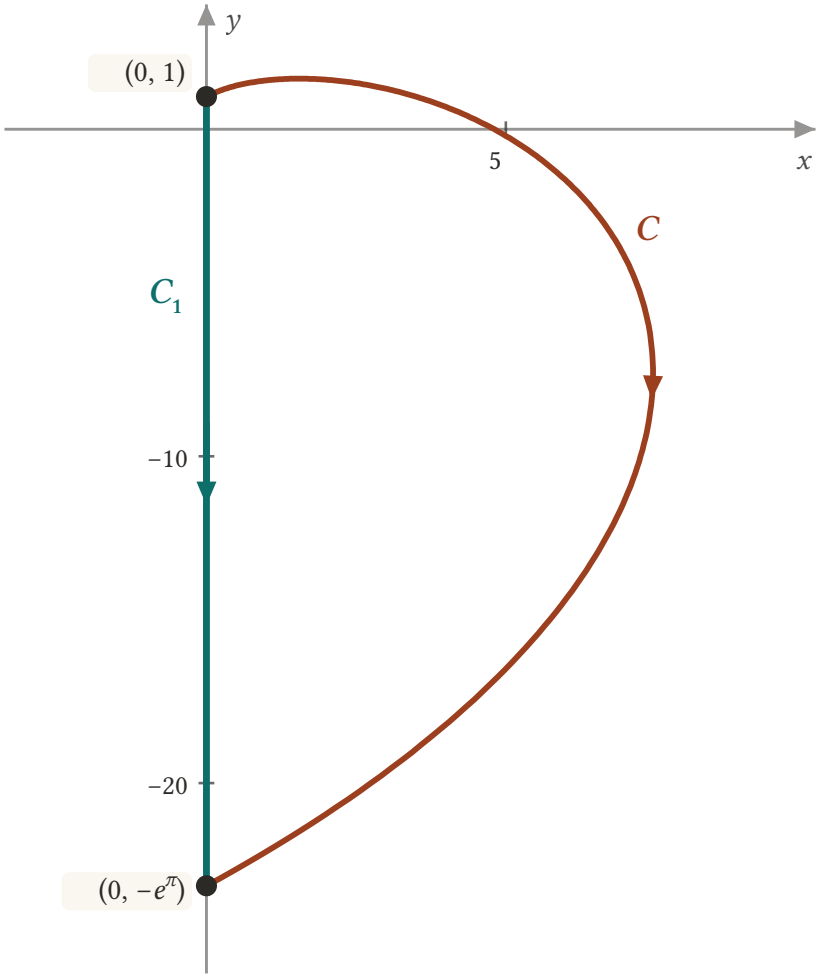
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{F}(x,y) = (3+2xy)\,\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\,\mathbf{j}$$

ve C,

$$\mathbf{r}(t) = e^t \sin t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}, \qquad 0 \le t \le \pi$$

eğrisi olsun. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayınız.



Şekil 12.8: C eğrisi $\mathbf{r}(t) = e^t \sin t\,\mathbf{i} + e^t \cos t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi$, $(0,1)$ noktasından sağa doğru açılıp $(0,-e^\pi) \approx (0;-23{,}1)$ noktasına iner. C_1, aynı iki noktayı birleştiren düşey doğru parçasıdır. Eksenlerdeki ölçekler farklıdır.

Çözüm.
Tanımdan hesap uzun olurdu: $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)$ ifadesinde e^{3t} ile sinüs ve kosinüs kuvvetlerinin çarpımları belirir. Alan konservatif olduğundan iki kısa yol vardır.
Birinci yol: temel teorem. Bir önceki örnekte (Örnek 12.6) bulduğumuz potansiyeli $K = 0$ alarak kullanalım: $f(x,y) = 3x + x^2y - y^3$. Uç noktalar

$$\mathbf{r}(0) = (0,1), \qquad \mathbf{r}(\pi) = (e^\pi \sin\pi, e^\pi\cos\pi) = (0, -e^\pi)$$

olur. $f(0,-e^\pi) = -(-e^\pi)^3 = e^{3\pi}$ ve $f(0,1) = -1$ olduğundan Teorem 12.1 gereği

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(0,-e^\pi) - f(0,1) = e^{3\pi} - (-1) = e^{3\pi} + 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur.
İkinci yol: daha basit bir yol. İntegral yoldan bağımsız olduğundan C yerine $(0,1)$'den $(0,-e^{\pi})$'ye giden C_1 doğru parçasını kullanabiliriz. C_1, y ekseni üzerinde aşağı doğru iner ve

$$\mathbf{r}(t) = -t\,\mathbf{j}, \qquad -1 \le t \le e^{\pi}$$

diye yazılır: $t=-1$'de $(0,1)$, $t=e^{\pi}$'de $(0,-e^{\pi})$ noktasındayız. Bu yol üzerinde $x=0$ ve $y=-t$ olduğundan $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = 3\,\mathbf{i} - 3t^2\,\mathbf{j}$ ve $\mathbf{r}'(t) = -\mathbf{j}$'dir. Buradan

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^{e^{\pi}} (3\,\mathbf{i} - 3t^2\,\mathbf{j})\cdot(-\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_{-1}^{e^{\pi}} 3t^2\,dt = \Big[\,t^3\Big]_{-1}^{e^{\pi}} = e^{3\pi} + 1\end{aligned}$$

bulunur. İki yol aynı sonucu verir. ■

Uzaydaki alanlar için konservatiflik ölçütünü Rotasyonel ve Diverjans bölümünde kuracağız (Teorem 14.2). Potansiyel fonksiyonu bulma yöntemi ise uzayda da aynen işler.

Örnek 12.8 (Uzayda Potansiyel Fonksiyon).

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y^2\,\mathbf{i} + (2xy + e^{3z})\,\mathbf{j} + 3ye^{3z}\,\mathbf{k}$$

alanı için $\nabla f = \mathbf{F}$ olan bir f fonksiyonu bulunuz.

Çözüm.
Böyle bir f varsa

$$f_x(x,y,z) = y^2 \tag{5}$$

$$f_y(x,y,z) = 2xy + e^{3z} \tag{6}$$

$$f_z(x,y,z) = 3ye^{3z} \tag{7}$$

olmalıdır. (5) eşitliğini x'e göre integre edelim. Bu kez integral sabiti x'e göre sabittir, yani y ile z'nin bir fonksiyonudur:

$$f(x,y,z) = xy^2 + g(y,z) \tag{8}$$

(8) eşitliğinin y'ye göre türevini (6) ile karşılaştıralım:

$$2xy + g_y(y,z) = 2xy + e^{3z}, \qquad g_y(y,z) = e^{3z}.$$

Bunu y'ye göre integre edersek $g(y,z) = ye^{3z} + h(z)$ bulunur ve (8) eşitliği

$$f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + h(z)$$

biçimini alır. Son olarak z'ye göre türevi (7) ile karşılaştıralım: $3ye^{3z} + h'(z) = 3ye^{3z}$, yani $h'(z)=0$ ve $h(z)=K$ sabittir. Aranan fonksiyon

$$f(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + K$$

olur. Kontrol: $\nabla f = \langle y^2,\, 2xy + e^{3z},\, 3ye^{3z}\rangle = \mathbf{F}$. ■

12.6 Enerjinin Korunumu

Bu bölümün fikirlerini fizikteki kuvvet alanlarına uygulayalım; "konservatif" adının nereden geldiği de böylece ortaya çıkacak.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sürekli bir $\mathbf{F}$ kuvvet alanı, m kütleli bir cismi $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ ile verilen bir C yolu boyunca hareket ettirsin. $\mathbf{r}$ iki kez türevlenebilir ve $\mathbf{r}''$ sürekli olsun; ayrıca cisim hiç durmasın, yani her t için $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ olsun. Böylece C düzgün bir eğridir. Başlangıç noktası $A = \mathbf{r}(a)$, bitiş noktası $B = \mathbf{r}(b)$'dir. Cismin hızı $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, ivmesi $\mathbf{r}''(t)$'dir ve Newton'un ikinci hareket yasası

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\,\mathbf{r}''(t)$$

der. Cismin durmaması koşulu yalnız C'nin düzgün olması, yani $\int_C$ gösteriminin Eğrisel İntegraller bölümündeki tanıma uyması içindir; ne temel teoremin ne de aşağıdaki ispatların hesapları onu kullanır. Bu yüzden iş $\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$ integraliyle tanımlandığında sonuçlar, düşey olarak yukarı atılıp tepede bir an durduktan sonra geri düşen bir top gibi cisimler için de geçerlidir.

Tanım 12.6 (Kinetik Enerji). m kütleli ve $\mathbf{v}(t)$ hızıyla hareket eden bir cismin t anındaki **kinetik enerjisi**

$$K = \frac{1}{2} m \mid \mathbf{v}(t) \mid^2$$

sayısıdır. Cisim bir A noktasındayken kinetik enerjisini $K(A)$ ile gösteririz.

Yani kinetik enerji, kütle ile süratin karesinin çarpımının yarısıdır; cisim hızlandıkça artar, yavaşladıkça azalır.

Teorem 12.6 (İş ve Kinetik Enerji). *Yukarıdaki koşullarda $\mathbf{F}$ kuvvet alanının C yolu boyunca yaptığı iş, cismin kinetik enerjisindeki değişime eşittir:*

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = K(B) - K(A).$$

İspat.
İç çarpımın türevi için çarpım kuralı

$$\frac{d}{dt}\left[\, \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \,\right] = \mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = 2\,\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

verir. Newton yasasını eğrisel integralin tanımına koyup bu eşitliği kullanalım:

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt = \int_a^b m\,\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt}\left[\, \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \,\right] dt = \frac{m}{2}\int_a^b \frac{d}{dt} \mid \mathbf{r}'(t) \mid^2 dt. \end{aligned}$$

Türevi sürekli olan $\mid \mathbf{r}'(t) \mid^2$ fonksiyonuna (1) eşitliğini uygularsak

$$\begin{aligned} W &= \frac{m}{2}\left(\mid \mathbf{r}'(b) \mid^2 - \mid \mathbf{r}'(a) \mid^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m \mid \mathbf{v}(b) \mid^2 - \frac{1}{2} m \mid \mathbf{v}(a) \mid^2 = K(B) - K(A) \end{aligned}$$

bulunur. ■

Yani kuvvetin yaptığı iş cismin hızlanmasına harcanır. Kuvvet alanı konservatifse işi bir de potansiyel fonksiyon cinsinden yazabiliriz.

Tanım 12.7 (Potansiyel Enerji). $\mathbf{F} = \nabla f$ konservatif bir kuvvet alanı olsun. Bir cismin (x, y, z) noktasındaki **potansiyel enerjisi**

$$V(x, y, z) = -f(x, y, z)$$

ile tanımlanır. Böylece $\mathbf{F} = -\nabla V$ olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani potansiyel enerji, potansiyel fonksiyonun ters işaretlisidir; kuvvet, potansiyel enerjinin en hızlı azaldığı yönü gösterir. Kütle çekim alanında cisim yere yaklaştıkça potansiyel enerjisi azalır.

Teorem 12.7 (Enerjinin Korunumu Yasası). *Yukarıdaki koşullarda bir cisim konservatif bir $\mathbf{F}$ kuvvet alanının etkisiyle A noktasından B noktasına hareket ederse potansiyel ve kinetik enerjilerinin toplamı değişmez:*

$$V(A) + K(A) = V(B) + K(B).$$

İspat.
$\mathbf{F} = -\nabla V$ *olduğundan Teorem 12.1, V fonksiyonuna uygulanınca*

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla V \cdot d\mathbf{r} = -\big(\, V(B) - V(A) \,\big) = V(A) - V(B)$$

verir. Teorem 12.6 gereği aynı iş $K(B) - K(A)$'ya eşittir. İki ifadeyi eşitlersek $V(A) - V(B) = K(B) - K(A)$, yani $V(A) + K(A) = V(B) + K(B)$ bulunur. ■

Yani konservatif bir kuvvet alanında hareket eden cisim potansiyel enerjiyi kinetik enerjiye ya da kinetik enerjiyi potansiyel enerjiye dönüştürür, ama toplam enerji korunur. Bu vektör alanlarına "konservatif" (korunumlu) denmesinin nedeni budur.

12.7 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar bölümün yöntemlerini kolaydan zora dolaşıyor.

Alıştırma 12.1 (Değer Tablosundan Eğrisel İntegral). Gradyanı sürekli olan bir f fonksiyonunun bazı değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. C, $x = t^2 + 1$, $y = t^3 + t$, $0 \le t \le 1$ parametrik denklemleriyle verilen eğri olduğuna göre $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ integralini bulunuz.

$f(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=0$	1	6	4
$x=1$	3	5	7
$x=2$	8	2	9

Çözüm.
Eğrinin düzgünlüğü. $\mathbf{r}'(t) = \langle 2t,\, 3t^2 + 1\rangle$ süreklidir ve ikinci bileşeni en az 1 olduğundan hiç sıfır olmaz; C düzgündür.
Uç noktalar. $t = 0$ için $(x,y) = (1,0)$, $t = 1$ için $(x,y) = (2,2)$'dir.
Sonuç. Teorem 12.1 gereği

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(2,2) - f(1,0) = 9 - 3 = 6$$

olur. Tablonun öteki değerlerine ve eğrinin biçimine hiç gerek kalmadı. ■

Alıştırma 12.2 (Üstel Çarpanlı Bir Alanın Potansiyeli). $\mathbf{F}(x,y) = y^2 e^{xy}\,\mathbf{i} + (1 + xy)e^{xy}\,\mathbf{j}$ alanının konservatif olup olmadığını belirleyiniz; konservatifse $\nabla f = \mathbf{F}$ olan bir f bulunuz.

Çözüm.
Ölçüt. Çarpım kuralıyla

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{xy} + xy^2 e^{xy} = y(2 + xy)e^{xy},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = ye^{xy} + (1 + xy)ye^{xy} = y(2 + xy)e^{xy}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. İki türev eşit ve her yerde süreklidir; tanım kümesi olan düzlem açık ve basit bağlantılıdır. Teorem 12.5 gereği $\mathbf{F}$ konservatiftir.
Potansiyel. $f_x = y^2 e^{xy}$ eşitliğini x'e göre integre edelim; y sabit sayıldığından $\int y^2 e^{xy}\,dx = ye^{xy}$ olur:

$$f(x,y) = ye^{xy} + g(y).$$

y'ye göre türev

$$f_y = e^{xy} + xye^{xy} + g'(y) = (1+xy)e^{xy} + g'(y)$$

olur. Bunu $Q = (1+xy)e^{xy}$'ye eşitlersek $g'(y) = 0$, yani $g(y) = K$ bulunur. Sonuç olarak

$$f(x,y) = ye^{xy} + K$$

olur. ■

Alıştırma 12.3 (Gradyanın Bir Uzay Eğrisi Boyunca İntegrali). $f(x,y,z) = xy^2z + x^2$ ve C,

$$x = t^2, \qquad y = e^{t^2-1}, \qquad z = t^2 + t, \qquad -1 \le t \le 1$$

eğrisi olduğuna göre $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Varsayımlar. $\nabla f = \langle y^2z + 2x,\, 2xyz,\, xy^2 \rangle$ her yerde süreklidir. $\mathbf{r}'(t) = \langle 2t,\, 2te^{t^2-1},\, 2t+1 \rangle$ süreklidir ve sıfır olamaz: ilk bileşen yalnız $t = 0$'da sıfırdır, orada üçüncü bileşen 1'dir. C düzgündür.
Uç noktalar. $t = -1$ için $(1, e^0, 1-1) = (1,1,0)$, $t = 1$ için $(1, e^0, 1+1) = (1,1,2)$ noktası bulunur.
Sonuç. $f(1,1,2) = 1\cdot 1\cdot 2 + 1 = 3$ ve $f(1,1,0) = 0 + 1 = 1$ olduğundan

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(1,1,2) - f(1,1,0) = 3 - 1 = 2$$

olur. ■

Alıştırma 12.4 (Hiperbol Yayı Boyunca İntegral). $\mathbf{F}(x,y) = (3 + 2xy^2)\,\mathbf{i} + 2x^2y\,\mathbf{j}$ ve C, $y = 1/x$ hiperbolünün $(1,1)$ noktasından $(4, \tfrac{1}{4})$ noktasına giden yayı olsun. Bir potansiyel fonksiyon bularak $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Ölçüt. $P_y = 4xy = Q_x$ ve kısmi türevler düzlemde süreklidir; Teorem 12.5 gereği $\mathbf{F}$ konservatiftir.
Potansiyel. $f_x = 3 + 2xy^2$ eşitliğini x'e göre integre edersek $f = 3x + x^2y^2 + g(y)$ bulunur. $f_y = 2x^2y + g'(y)$ ifadesini $Q = 2x^2y$'ye eşitlersek $g'(y) = 0$ olur; $K = 0$ alarak

$$f(x,y) = 3x + x^2y^2$$

seçebiliriz.
İntegral. Teorem 12.1 gereği

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= f\left(4, \frac{1}{4}\right) - f(1,1) = \left(12 + 16\cdot\frac{1}{16}\right) - (3+1)\\ &= 13 - 4 = 9\end{aligned}$$

olur. ■

Alıştırma 12.5 (Üç Boyutta Potansiyel ve Eğrisel İntegral).

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \sin y\,\mathbf{i} + (x\cos y + \cos z)\,\mathbf{j} - y\sin z\,\mathbf{k}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve C,

$$\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le \pi/2$$

eğrisi olsun. $\nabla f = \mathbf{F}$ olan bir f bularak $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Potansiyel. $f_x = \sin y$ eşitliğini x'e göre integre edersek

$$f(x,y,z) = x\sin y + g(y,z)$$

bulunur. $f_y = x\cos y + g_y$ ifadesini $x\cos y + \cos z$'ye eşitlersek $g_y = \cos z$ olur; y'ye göre integralle $g(y,z) = y\cos z + h(z)$ bulunur. Böylece $f = x\sin y + y\cos z + h(z)$'dir. $f_z = -y\sin z + h'(z)$ ifadesini $-y\sin z$'ye eşitlersek $h'(z) = 0$ çıkar. $h = 0$ alarak

$$f(x,y,z) = x\sin y + y\cos z$$

seçelim. Kontrol:

$$\nabla f = \langle \sin y,\, x\cos y + \cos z,\, -y\sin z\rangle = \mathbf{F}.$$

Uç noktalar. $\mathbf{r}(0) = (0,0,0)$ ve $\mathbf{r}(\pi/2) = (1,\pi/2,\pi)$'dir.
İntegral. $f(0,0,0) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= f\left(1,\frac{\pi}{2},\pi\right) - f(0,0,0)\\ &= 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\pi - 0 = 1 - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

bulunur. ■

Alıştırma 12.6 (Yoldan Bağımsızlığın Gösterilmesi).

$$\int_C 2xe^{-y}\,dx + (2y - x^2e^{-y})\,dy$$

integralinin yoldan bağımsız olduğunu gösteriniz ve C, $(1,0)$ noktasından $(2,1)$ noktasına giden herhangi bir yol olduğunda değerini bulunuz.

Çözüm.
Yoldan bağımsızlık. İntegral, $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ alanının eğrisel integralidir; burada $P = 2xe^{-y}$ ve $Q = 2y - x^2e^{-y}$'dir.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xe^{-y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

olur ve kısmi türevler bütün düzlemde süreklidir. Teorem 12.5 gereği $\mathbf{F}$ konservatiftir, Sonuç 12.2 gereği de integral yoldan bağımsızdır.
Potansiyel. $f_x = 2xe^{-y}$ eşitliğinden $f = x^2e^{-y} + g(y)$ bulunur. $f_y = -x^2e^{-y} + g'(y)$ ifadesini Q'ya eşitlersek $g'(y) = 2y$, yani $g(y) = y^2$ olur ($K = 0$). Böylece

$$f(x,y) = x^2e^{-y} + y^2.$$

Değer. Hangi yol seçilirse seçilsin

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(2,1) - f(1,0) = \left(4e^{-1} + 1\right) - (1+0) = \frac{4}{e}$$

olur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 12.7 (İki Farklı İş Ölçümü). Bir deneyde, bir $\mathbf{F}$ kuvvet alanının bir parçacığı $(1,2)$ noktasından $(5,-3)$ noktasına bir C_1 eğrisi boyunca götürürken 1,2 J, aynı iki nokta arasındaki başka bir C_2 eğrisi boyunca götürürken 1,4 J iş yaptığı ölçülüyor. $\mathbf{F}$ hakkında ne söylenebilir?

> **Çözüm.**
> $\mathbf{F}$ konservatif olsaydı Sonuç 12.2 gereği eğrisel integrali yoldan bağımsız olurdu; uç noktaları aynı olan C_1 ve C_2 boyunca yapılan işler eşit çıkardı. Ölçülen işler farklı olduğundan ($1{,}2 \neq 1{,}4$), $\mathbf{F}$ konservatif değildir.
> Aynı sonucu kapalı bir yolla da okuyabiliriz: C_1 ile ardından $-C_2$'nin oluşturduğu kapalı yolda yapılan iş
>
> $$\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 1{,}2 - 1{,}4 = -0{,}2 \text{ J}$$
>
> olur. Bu sıfırdan farklıdır; Teorem 12.2 gereği integral yoldan bağımsız olamaz. ■

Alıştırma 12.8 (Üç Boyutta Gerekli Koşul). $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ vektör alanı açık bir kümede konservatif ve P, Q, R'nin birinci mertebeden kısmi türevleri bu kümede sürekli olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $\mathbf{F}$ konservatif olduğundan $\nabla f = \mathbf{F}$ olan bir f vardır: $P = f_x$, $Q = f_y$, $R = f_z$. Buradan
>
> $$\begin{aligned} P_y = f_{xy}, Q_x = f_{yx},\\ P_z = f_{xz}, R_x = f_{zx},\\ Q_z = f_{yz}, R_y = f_{zy} \end{aligned}$$
>
> olur. Varsayım gereği bu altı karışık türev süreklidir. Clairaut teoreminin çok değişkenli biçimine göre (bkz. Analiz 4) sürekli karışık türevlerde türev alma sırası önemli değildir: $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$, $f_{yz} = f_{zy}$. Bu üç eşitlik istenen üç eşitliğin ta kendisidir. ■

Alıştırma 12.9 (Yoldan Bağımsız Olmayan Bir İntegral). Bir önceki alıştırmayı (Alıştırma 12.8) kullanarak

$$\int_C y\,dx + x\,dy + xyz\,dz$$

integralinin yoldan bağımsız olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Gerekli koşul bozuluyor.** İntegral, $\mathbf{F} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$ alanının eğrisel integralidir: $P = y$, $Q = x$, $R = xyz$. İlk koşul sağlanır ($P_y = 1 = Q_x$), ama
>
> $$\frac{\partial P}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = yz$$
>
> olduğundan $yz \neq 0$ olan noktalarda, örneğin $(0,1,1)$'de ikinci koşul bozulur. Kısmi türevler her yerde sürekli olduğundan Alıştırma 12.8 gereği $\mathbf{F}$, $\mathbb{R}^3$'te konservatif değildir.
> **Sonuç.** $\mathbb{R}^3$ açık ve bağlantılıdır. İntegral yoldan bağımsız olsaydı, yoldan bağımsız alanların konservatif olduğunu söyleyen teoremin (Teorem 12.3) uzaydaki biçimi $\mathbf{F}$'yi konservatif yapardı. Demek ki integral yoldan bağımsız değildir.
> **Somut kontrol.** $(0,0,0)$'dan $(1,1,1)$'e iki yol deneyelim. Doğru parçası $x = y = z = t$, $0 \le t \le 1$ boyunca

$$\int_0^1 (t + t + t^3)\,dt = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

bulunur. Önce z ekseni boyunca $(0,0,1)$'e çıkıp sonra $x = y = t$, $z = 1$ doğru parçasıyla $(1,1,1)$'e gidersek, ilk parçada $x = y = 0$ olduğundan integrand sıfırdır; ikinci parçada $dz = 0$'dır ve

$$0 + \int_0^1 (t + t)\,dt = 1$$

bulunur. $5/4 \neq 1$ olduğundan integral gerçekten yoldan bağımsız değildir. ■

Alıştırma 12.10 (Kapalı Yarım Halka).

$$D = \{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\, y \ge 0\}$$

kümesinin açık, bağlantılı ve basit bağlantılı olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.
Açık değil. $(1,0)$ noktası D'dedir. Merkezi $(1,0)$ olan her disk, $y < 0$ olan noktalar içerir (örneğin yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ için $(1, -\varepsilon)$); bu noktalar D'de değildir. Demek ki $(1,0)$ çevresinde D'de kalan bir disk yoktur.
Bağlantılı. Kutupsal koordinatlarla D, $1 \le r \le 2$ ve $0 \le \theta \le \pi$ koşullarıyla verilir. İki noktası (r_1, θ_1) ve (r_2, θ_2) olsun. Birinci noktadan $r = r_1$ yayı boyunca (r_1, θ_2)'ye, oradan $\theta = \theta_2$ ışını boyunca (r_2, θ_2)'ye giden yol D'den çıkmaz.
Basit bağlantılı. Basit kapalı bir eğri çevrelediği noktaları "hapseder": çevrelenen bir noktadan istediğimiz kadar uzağa giden her yol eğriyi keser. D'nin dışındaki her noktadan ise D'ye hiç değmeden istediğimiz kadar uzağa gidebiliriz:

- $y < 0$ olan bir noktadan düz aşağı ineriz.
- İç diskte ($x^2 + y^2 < 1$, $y \ge 0$) bulunan bir noktadan da düz aşağı ineriz: x eksenine kadar $\mid y \mid$ küçüldüğünden iç diskte kalırız, ekseni geçince $y < 0$ bölgesine gireriz.
- Dış bölgedeki ($x^2 + y^2 > 4$) bir noktadan orijinden uzaklaşan ışın boyunca gideriz.

Bu yollar D'ye, dolayısıyla D içindeki bir eğriye değmez. Demek ki D içindeki hiçbir basit kapalı eğri D'nin dışında bir nokta çevrelemez ve D basit bağlantılıdır. ■

Alıştırma 12.11 (Bir Noktası Çıkarılmış Düzlem). $D = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (2,3)\}$ kümesinin açık, bağlantılı ve basit bağlantılı olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.
Açık. $P \in D$ ise P ile $(2,3)$ arasındaki uzaklık $\delta > 0$'dır. Merkezi P, yarıçapı δ olan disk $(2,3)$ noktasını içermez, yani tamamen D'dedir.
Bağlantılı. D'nin iki noktasını birleştiren doğru parçası $(2,3)$'ten geçmiyorsa doğrudan onu kullanırız. Geçiyorsa bu doğrunun dışında bir Q noktası seçip iki noktayı Q üzerinden iki doğru parçasıyla birleştiririz; bu iki parça $(2,3)$'ten geçmez.
Basit bağlantılı değil. Merkezi $(2,3)$, yarıçapı 1 olan çember D'nin içinde bir basit kapalı eğridir ama D'ye ait olmayan $(2,3)$ noktasını çevreler. ■

Alıştırma 12.12 (Ters Kare Kuvvet Alanında İş). c bir sabit ve $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ olmak üzere

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\,\mathbf{r}}{\mid \mathbf{r} \mid^3}$$

alanına **ters kare kuvvet alanı** denir. Bir cismi orijinden geçmeyen bir yol boyunca bir P_1 noktasından bir P_2 noktasına götürürken $\mathbf{F}$'nin yaptığı işi, bu noktaların orijine uzaklıkları d_1 ve d_2 cinsinden bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Potansiyel. $f = -c/\,|\,\mathbf{r}\,|$, yani $f = -c\,(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ alalım. Zincir kuralıyla

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -c\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x = \frac{c\,x}{|\,\mathbf{r}\,|^3}$$

bulunur; y ve z için de aynı biçimde $c\,y/\,|\,\mathbf{r}\,|^3$ ve $c\,z/\,|\,\mathbf{r}\,|^3$ çıkar. Demek ki orijin dışında $\nabla f = \mathbf{F}$'dir ve ∇f orada süreklidir.
İş. Sonuç 12.1 gereği

$$W = f(P_2) - f(P_1) = -\frac{c}{d_2} + \frac{c}{d_1} = c\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right)$$

olur. Kütle çekim alanında $c = -mMG$'dir ve sonuç $W = mMG\left(\dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{d_1}\right)$ olur. $d_1 = 13$, $d_2 = 2\sqrt{2}$ için bu, kütle çekim örneğindeki (Örnek 12.2) sonuçtur. ■

Bu bölümde gradyan alanlarının eğrisel integralini uç noktalara indirdik ve düzlemde konservatifliği $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ ölçütüyle tanıdık. Ölçütün genel ispatı, kapalı bir eğri boyunca integrali eğrinin çevrelediği bölge üzerindeki bir iki katlı integrale bağlayan bir teoreme dayanıyordu. Bir sonraki bölüm bu teoremi kuruyor: Green Teoremi.

 CC BY-NC-SA 4.0

13. Green Teoremi

Tek değişkenli analizin temel teoremi, bir türevin bir aralık üzerindeki integralini fonksiyonun yalnız uç noktalardaki değerlerine bağlar:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

(bkz. Analiz 2). Sol tarafta türev bütün aralık boyunca toplanır; sağ tarafta ise yalnız aralığın sınırı, yani iki uç nokta görünür. Eğrisel integraller için temel teorem (Teorem 12.1) de aynı kalıptaydı: bir gradyanın eğri boyunca integrali, potansiyel fonksiyonun eğrinin uçlarındaki değerlerinin farkıdır.
Green Teoremi bu fikri düzleme taşır. Düzlemde kapalı bir eğriyle sınırlı bir D bölgesi üzerinde, P ve Q fonksiyonlarının kısmi türevlerinden oluşan bir ifadenin iki katlı integrali, yalnız P ve Q'nun sınır eğrisi üzerindeki değerlerini kullanan bir eğrisel integrale eşittir. Böylece zor bir eğrisel integrali kolay bir iki katlı integrale, ya da tersine, bir bölgenin alanını sınırı boyunca alınan bir integrale çevirebiliriz.
Teorem adını, kendi kendini yetiştirmiş İngiliz matematikçi George Green'den (1793–1841) alır. Green teoremin bir biçimini 1828'de kendi imkânlarıyla bastırdığı, elektrik ve manyetizma kuramına matematiksel analizi uygulayan bir denemede verdi; çalışma ancak 1846'da William Thomson (Lord Kelvin) onu yeniden bastırınca tanındı.

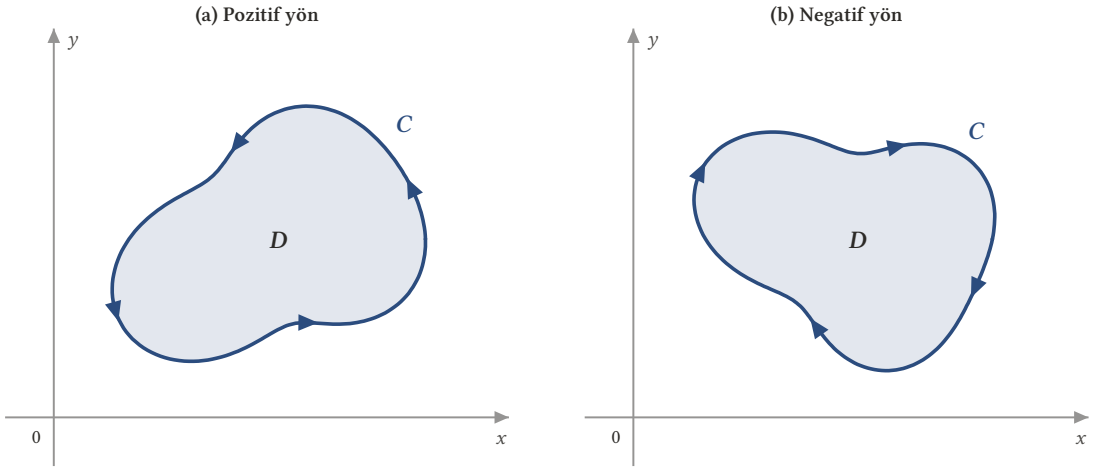
13.1 Pozitif Yönlü Sınır Eğrisi

Green Teoremi bir bölgeyi sınır eğrisine bağladığı için önce sınırın hangi yönde dolaşılacağını belirlememiz gerekir.
Bir eğri, başlangıç ve bitiş noktaları çakışıyorsa **kapalı**, uç noktaları dışında kendini kesmiyorsa **basittir** (bkz. Eğrisel İntegraller için Temel Teorem). Bu bölüm boyunca eğriler parçalı düzgündür, yani sonlu sayıda düzgün eğrinin uç uca eklenmesiyle elde edilir. C düzlemde basit kapalı bir eğri olduğunda C'nin **sınırladığı bölge** derken C'nin içindeki bütün noktalarla C'nin kendi noktalarından oluşan D kümesini kastederiz.

Tanım 13.1 (Pozitif Yön). C, düzlemde basit kapalı bir eğri ve D, C'nin sınırladığı bölge olsun. C'nin saat yönünün tersine bir kez dolaşılmasına C'nin **pozitif yönü** (positive orientation) denir. Saat yönünde bir kez dolaşılan eğri **negatif yönlüdür**.

Yani C, $\mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, parametrizasyonuyla pozitif yönde dolaşılıyorsa $\mathbf{r}(t)$ noktası ilerlerken D bölgesi hep solda kalır. "Bölge solda kalır" tarifi, delikli bölgelerin sınırını yönlendirirken de işimize yarayacak.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.1: (a) Pozitif yönlü C eğrisi saat yönünün tersine bir kez dolaşılır; eğri boyunca ilerleyen biri D bölgesini hep solunda görür. (b) Ters yönde dolaşılan eğri negatif yönlüdür: D bu kez hep sağda kalır.

Eğrisel integralin pozitif yönlü kapalı bir eğri boyunca alındığını vurgulamak için

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

yazılır. D'nin pozitif yönlü sınır eğrisi ∂D ile de gösterilir. Eğrinin yönü ters çevrilince eğrisel integralin işaret değiştirdiğini biliyoruz (Önerme 11.4); bu yüzden saat yönünde dolaşılan bir eğri boyunca integral, pozitif yöndeki integralin ters işaretlisidir.

13.2 Green Teoremi

Teoremi önce genel biçimiyle ifade edecek, sonra hem I. hem II. tip olan bölgeler için ispatlayacağız.

Tanım 13.2 (Basit Bölge). Hem I. tip (Tanım 2.2) hem de II. tip (Tanım 2.3) olan düzlem bölgesine **basit bölge** (simple region) denir.

Yani basit bir D bölgesi iki biçimde yazılabilir:

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \mid a \le x \le b,\, g_1(x) \le y \le g_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \mid c \le y \le d,\, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}. \end{aligned}$$

Disk, elips, dikdörtgen ve üçgen basit bölgelerdir. Bir halka ya da ortasında girinti olan bir böbrek biçimi ise basit değildir.

Teorem 13.1 (Green Teoremi). *C, düzlemde pozitif yönlü, parçalı düzgün, basit kapalı bir eğri ve D, C'nin sınırladığı bölge olsun. P ve Q, D'yi içeren açık bir bölgede sürekli birinci mertebe kısmi türevlere sahipse*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \tag{1}$$

olur.

> ***Basit bölgeler için ispat.***
> *D basit bir bölge olsun. (1)'in iki tarafı da biri yalnız P'ye, öteki yalnız Q'ya bağlı iki terimin toplamıdır. Bu yüzden*

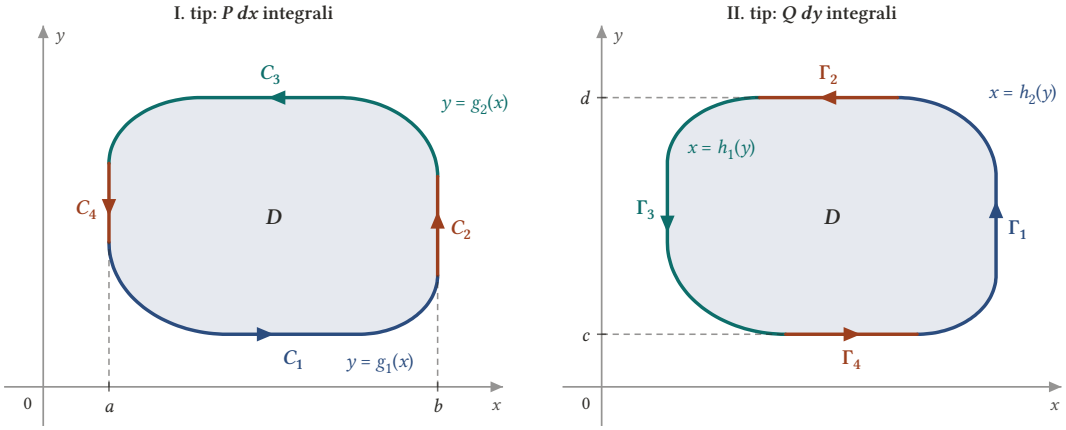
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\oint_C P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA \tag{2}$$

ve

$$\oint_C Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA \tag{3}$$

eşitliklerini ayrı ayrı göstermek yeter: ikisi toplanınca (1) çıkar. Aşağıdaki şeklin solu (2)'nin, sağı (3)'ün ispatındaki parçalanışı gösterir.



Şekil 13.2: Aynı basit bölge iki biçimde. Solda I. tip betim: alt eğri C_1 ($y = g_1(x)$)*, üst eğri* C_3 ($y = g_2(x)$) *ve üzerlerinde* $dx = 0$ *olan düşey parçalar* C_2, C_4*. Sağda II. tip betim: sağ eğri* Γ_1 ($x = h_2(y)$)*, sol eğri* Γ_3 ($x = h_1(y)$) *ve üzerlerinde* $dy = 0$ *olan yatay parçalar* Γ_2, Γ_4*.*

(2)'nin ispatı. *D'yi I. tip bölge olarak yazalım:*

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\, g_1(x) \le y \le g_2(x)\};$$

burada g_1 ve g_2 süreklidir.
Sağ taraf. *$\partial P/\partial y$ sürekli olduğundan iki katlı integral I. tip bölgede bir ardışık integral olarak hesaplanır (bkz. Genel Bölgelerde İki Katlı İntegraller). İç integralde x sabittir ve $y \mapsto P(x,y)$ fonksiyonunun türevi $\partial P/\partial y$'dir. Analizin temel teoremiyle*

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_a^b \big[\, P(x,g_2(x)) - P(x,g_1(x)) \,\big]\,dx\end{aligned} \tag{4}$$

olur.
Sol taraf. *C'yi şekildeki gibi dört parçaya ayıralım: alt eğri C_1 ($y = g_1(x)$, soldan sağa), sağdaki düşey parça C_2 ($x = b$, aşağıdan yukarı), üst eğri C_3 ($y = g_2(x)$, sağdan sola) ve soldaki düşey parça C_4 ($x = a$, yukarıdan aşağı). C_2 ya da C_4 tek bir noktaya da inebilir; o zaman katkısı sıfırdır.*

- *C_1 üzerinde x'i parametre alalım: $x = x$, $y = g_1(x)$, $a \le x \le b$. O zaman*

$$\int_{C_1} P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx.$$

- *C_3 sağdan sola gider; ters yönlü $-C_3$ ise $x = x$, $y = g_2(x)$, $a \le x \le b$ ile soldan sağa gider. Yön değişince işaret değiştiğinden (Önerme 11.4)*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{C_3} P\,dx = -\int_{-C_3} P\,dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))\,dx.$$

- *C_2 ve C_4 üzerinde x sabittir. Parametre olarak y alınırsa x'in türevi sıfırdır, yani $dx = 0$ olur:*

$$\int_{C_2} P\,dx = 0 = \int_{C_4} P\,dx.$$

Dört katkıyı toplarsak

$$\begin{aligned}\oint_C P\,dx &= \int_{C_1} P\,dx + \int_{C_2} P\,dx + \int_{C_3} P\,dx + \int_{C_4} P\,dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx - \int_a^b P(x, g_2(x))\,dx\end{aligned}$$

bulunur. Bu, (4)'teki sonucun tam ters işaretlisidir; (2) kanıtlandı.
(3)'ün ispatı. *Bu kez D'yi II. tip bölge olarak yazalım:*

$$D = \{(x, y) \mid c \le y \le d,\, h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$

Sağ taraf. *Bu kez iç integral x'e göredir ve analizin temel teoremi $x \mapsto Q(x, y)$ fonksiyonuna uygulanır:*

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\,dx\,dy \\ &= \int_c^d \big[\, Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y) \,\big]\,dy.\end{aligned}$$

Sol taraf. *C'yi yine dört parçaya ayıralım: sağ eğri Γ_1 ($x = h_2(y)$, aşağıdan yukarı), üstteki yatay parça Γ_2 (sağdan sola), sol eğri Γ_3 ($x = h_1(y)$, yukarıdan aşağı) ve alttaki yatay parça Γ_4 (soldan sağa).*

- *Γ_1 üzerinde y'yi parametre alırsak $x = h_2(y)$, $y = y$, $c \le y \le d$ olur ve $\displaystyle\int_{\Gamma_1} Q\,dy = \int_c^d Q(h_2(y), y)\,dy$ bulunur.*
- *$-\Gamma_3$, $x = h_1(y)$, $y = y$, $c \le y \le d$ ile aşağıdan yukarı gider. Bu yüzden $\displaystyle\int_{\Gamma_3} Q\,dy = -\int_c^d Q(h_1(y), y)\,dy$ olur.*
- *Γ_2 ve Γ_4 üzerinde y sabittir, yani $dy = 0$ ve bu iki parçanın katkısı sıfırdır.*

Toplarsak

$$\oint_C Q\,dy = \int_c^d Q(h_2(y), y)\,dy - \int_c^d Q(h_1(y), y)\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA$$

elde edilir; (3) de kanıtlandı. (2) ile (3) toplanınca (1) çıkar. ■

Teoremin sol tarafı, $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ vektör alanının eğrisel integralinin (Tanım 11.6) bir başka yazılışıdır: $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. ∂D gösterimiyle (1) şöyle de okunur:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy.$$

Bu biçimde Green Teoremi, iki katlı integraller için temel teoremin karşılığıdır. Sol tarafta türevler ($\partial Q/\partial x$ ve $\partial P/\partial y$) bütün bölge boyunca integrallenir; sağ tarafta ise yalnız P ile Q'nun bölgenin sınırındaki değerleri görünür. Tek boyutta bölge $[a, b]$ aralığı, sınırı da iki uç noktadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspatta P ve Q'nun yalnız $\partial P/\partial y$ ve $\partial Q/\partial x$ türevleri kullanıldı. Bu yüzden teorem, P, Q, $\partial P/\partial y$ ve $\partial Q/\partial x$ sürekli olduğu sürece geçerlidir; öteki iki kısmi türevin sürekli olması gerekmez.
Teoremi her parçalı düzgün basit kapalı eğri için ispatlamak daha zordur: eğrinin sınırladığı bölgeyi basit bölgelerle yaklaşıp bir limit almak gerekir ve bu ileri analizin konusudur. Uygulamada karşılaştığımız bölgeler ise sonlu sayıda basit bölgeye bölünebilir. Bu durumda teoremin tam bir ispatını aşağıda Teorem 13.2 ile vereceğiz.

13.3 Eğrisel İntegrali İki Katlı İntegralle Hesaplamak

Green Teoremi en çok, kapalı bir eğri boyunca alınan eğrisel integrali sınırladığı bölge üzerindeki daha kolay bir iki katlı integrale çevirmek için kullanılır.

Green Teoremi dört adımda

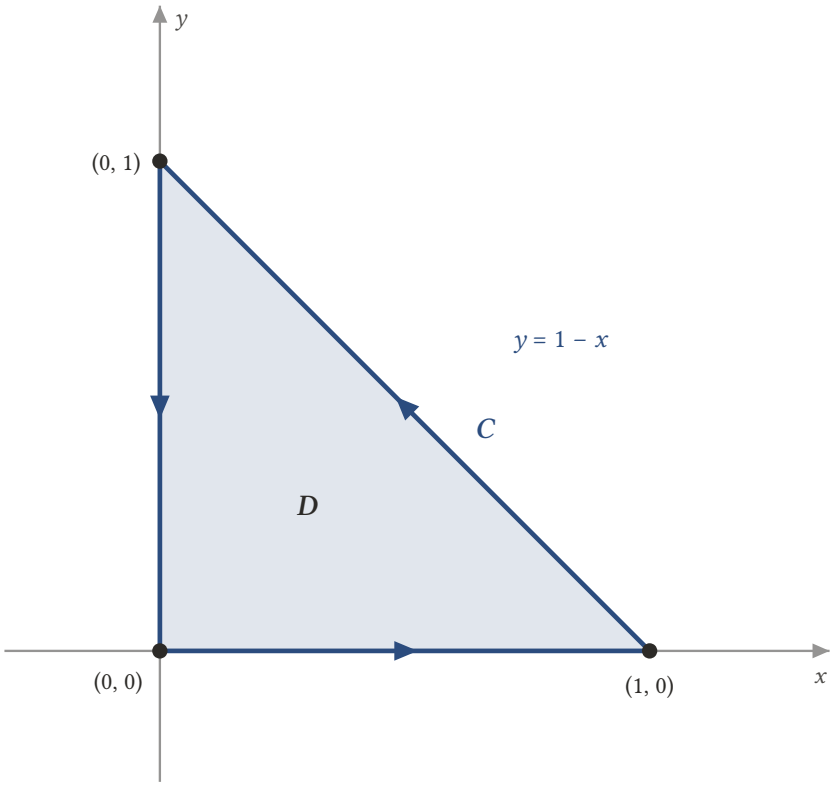
1. **Eğriyi denetle.** C kapalı, basit ve parçalı düzgün mü? Pozitif yönlü mü? Saat yönündeyse hesabın sonunda işareti değiştir.
2. ***P* ile *Q*'yu belirle.** İntegrali $\int_C P\,dx + Q\,dy$ biçiminde yaz ve P, Q ile kısmi türevlerinin D'yi içeren açık bir bölgede sürekli olduğunu kontrol et.
3. **Farkı hesapla.** $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ ifadesini bul.
4. **İki katlı integrali hesapla.** D'yi I. tip, II. tip ya da kutupsal koordinatlarla yazıp integrali hesapla.

Örnek 13.1 (Üçgen Boyunca Bir Eğrisel İntegral). C, $(0,0)$'dan $(1,0)$'a, $(1,0)$'dan $(0,1)$'e ve $(0,1)$'den $(0,0)$'a giden doğru parçalarından oluşan üçgen eğri olsun.

$$\oint_C x^4\,dx + xy\,dy$$

integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.3: Üçgen C eğrisi $(0,0) \to (1,0) \to (0,1) \to (0,0)$ sırasıyla, yani saat yönünün tersine dolaşılır; sınırladığı D bölgesi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1 - x$ ile verilir.

Çözüm.
1. Eğri. C basit, kapalı ve parçalı düzgündür. Köşeler $(0,0) \to (1,0) \to (0,1)$ sırasıyla, yani saat yönünün tersine dolaşıldığından C pozitif yönlüdür. Sınırladığı bölge

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1 - x\}$$

üçgensel bölgesidir.
2. P ve Q. $P(x,y) = x^4$ ve $Q(x,y) = xy$ polinomdur; kısmi türevleri her yerde süreklidir.
3. Fark.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - 0 = y.$$

4. İki katlı integral. Green Teoremiyle (Teorem 13.1)

$$\begin{aligned} \oint_C x^4\,dx + xy\,dy &= \iint_D y\,dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} y\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)^2\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}(1-x)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

bulunur. Doğrudan hesap, üç kenar için üç ayrı eğrisel integral gerektirirdi: kenarlardan gelen katkılar sırasıyla $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{30}$ ve 0'dır ve toplamları yine $\frac{1}{6}$'dır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 13.2 (Parametrizasyonla Hesabı Zor Bir İntegral). C, pozitif yönlü $x^2+y^2=9$ çemberi olmak üzere

$$\oint_C (3y - e^{\sin x})dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Çemberi $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$ ile parametrize etseydik $e^{\sin(3\cos t)}$ gibi ilkeli elemanter fonksiyonlarla yazılamayan ifadelerle karşılaşırdık. Green Teoremi bizi bu terimlerden kurtarır.
$P(x,y) = 3y - e^{\sin x}$ ve $Q(x,y) = 7x + \sqrt{y^4+1}$ her yerde sürekli kısmi türevlere sahiptir ve

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 7 - 3 = 4$$

olur: $e^{\sin x}$ yalnız x'e, $\sqrt{y^4+1}$ yalnız y'ye bağlı olduğundan farka katkı vermez. C'nin sınırladığı D bölgesi, yarıçapı 3 olan disktir; kutupsal koordinatlarda $0 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$ ile verilir. Kutupsal koordinatlara geçersek (Teorem 3.1)

$$\begin{aligned}\oint_C (3y - e^{\sin x})dx + \left(7x + \sqrt{y^4+1}\right)dy \\ = \int_0^{2\pi}\int_0^3 4\,r\,dr\,d\theta = 4\cdot 2\pi \cdot \frac{9}{2} = 36\pi\end{aligned}$$

bulunur. Kutupsal koordinatlara geçmeden de olurdu: integrand sabit olduğundan sonuç $4 \cdot A(D) = 4\cdot\pi\cdot 3^2 = 36\pi$'dir. ■

Bu iki örnekte iki katlı integral eğrisel integralden kolaydı. Bazen durum tersinedir ve Green Teoremi öteki yönde kullanılır. Örneğin P ile Q, C eğrisinin her noktasında sıfırsa, D'nin içinde hangi değerleri alırlarsa alsınlar

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA = \oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

olur.

13.4 Green Teoremiyle Alan Hesabı

Green Teoreminin öteki yönde kullanımının en önemli örneği alan hesabıdır: bir bölgenin alanını, sınır eğrisi boyunca alınan bir eğrisel integralle bulabiliriz.

Önerme 13.1 (Sınır Eğrisiyle Alan Hesabı). *C, pozitif yönlü, parçalı düzgün, basit kapalı bir eğri ve D, C'nin sınırladığı bölge olsun. D'nin alanı*

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \tag{5}$$

formüllerinden herhangi biriyle hesaplanabilir.

İspat.
D'nin alanı $A = \iint_D 1\,dA$'dır (Önerme 2.1). Green Teoremini (Teorem 13.1) kullanmak için

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

olacak biçimde P ve Q seçmeliyiz. Üç basit seçim şunlardır:

- *$P = 0$, $Q = x$: fark $1-0=1$'dir ve $A = \oint_C 0\,dx + x\,dy = \oint_C x\,dy$ olur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

- $P = -y$, $Q = 0$: *fark* $0 - (-1) = 1$*'dir ve* $A = \oint_C (-y)\,dx = -\oint_C y\,dx$ *olur.*
- $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$: *fark* $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$*'dir ve* $A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$ *olur.*

Üç seçimde de P ve Q polinomdur, kısmi türevleri her yerde süreklidir. ■

Yani bir bölgenin alanını bulmak için içini taramak gerekmez; sınırını bir kez dolaşmak yeter. **Planimetre** (planimeter) adlı ölçü aleti bu ilkeye dayanır. 19. yüzyılda geliştirilen bu düzenekte bir kolun ucundaki iz sürücü, bölgenin sınırı boyunca bir kez dolaştırılır. Kola bağlı bir tekerlek bu sırada kısmen kayar, kısmen kola dik doğrultuda yuvarlanır. Tekerleğin yuvarlandığı toplam uzaklık bölgenin alanıyla orantılıdır. Bunun nedeni yine Green Teoremidir: tekerlek, $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ farkı sabit olan bir vektör alanının sınır boyunca eğrisel integralini ölçer ve Green Teoremi bu integrali alanın sabit bir katına eşitler. Örneğin bir yaprağın ya da bir kuş kanadının alanı bu yolla ölçülebilir.

Örnek 13.3 (Elipsin Alanı). $a, b > 0$ olmak üzere $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm.
Elipsi $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$ ile parametrize edelim. t arttıkça nokta $(a, 0)$'dan başlayıp $(0, b)$'den geçerek saat yönünün tersine döner; parametrizasyon pozitif yönlüdür. Burada

$$dx = -a\sin t\,dt, \qquad dy = b\cos t\,dt$$

olduğundan

$$x\,dy - y\,dx = \left(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t\right)dt = ab\,dt$$

olur. (5)'teki üçüncü formülle (Önerme 13.1)

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \frac{ab}{2}\cdot 2\pi = \pi ab$$

bulunur. $a = b = r$ alınırsa r yarıçaplı dairenin alanı πr^2 elde edilir. ■

13.5 Green Teoreminin Genişletilmesi

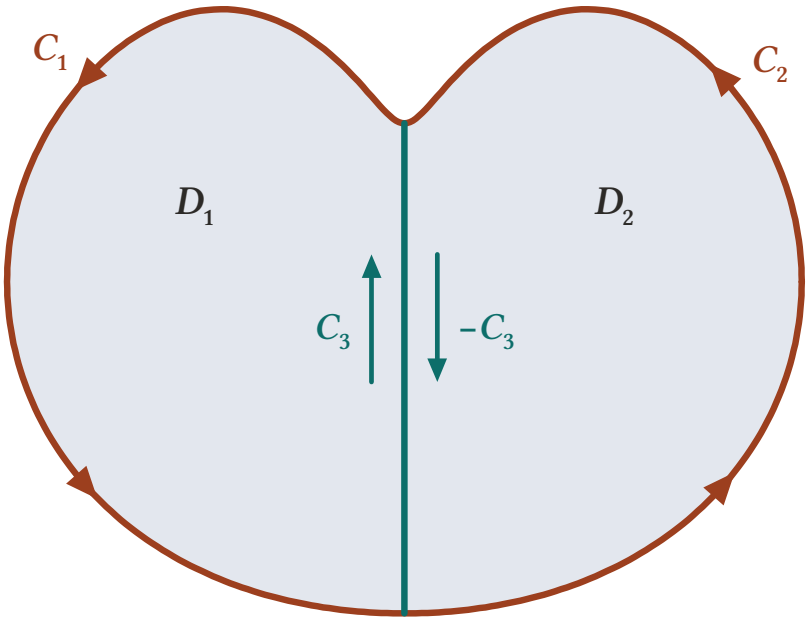
Green Teoremini şimdiye kadar yalnız basit bölgeler için ispatladık. Şimdi aynı sonucu basit bölgelere bölünebilen bölgelere, sonra da delikli bölgelere taşıyacağız.

Teorem 13.2 (Basit Bölgelerin Birleşimi için Green Teoremi). *D bölgesi, iç kısımları ayrık olan ve her birinin sınırı parçalı düzgün basit kapalı bir eğri olan sonlu sayıda $D_1, \ldots, D_n$ basit bölgesinin birleşimi ve ∂D, D'nin pozitif yönlü sınırı, yani D'yi hep solda bırakacak biçimde dolaşılan sınır eğrisi (ya da eğrileri) olsun. P ve Q, D'yi içeren açık bir bölgede sürekli birinci mertebe kısmi türevlere sahipse*

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.4: $D = D_1 \cup D_2$*: ortak kenar* C_3*,* D_1*'in sınırında yukarı,* D_2*'nin sınırında aşağı doğru (*$-C_3$*) dolaşılır. Bu iki katkı birbirini götürür ve geriye* D*'nin dış sınırı* $C_1 \cup C_2$ *kalır.*

İspat.
Önce şekildeki $n = 2$ durumuna bakalım: $D = D_1 \cup D_2$, D_1'in pozitif yönlü sınırı $C_1 \cup C_3$, D_2'ninki $C_2 \cup (-C_3)$'tür. Green Teoremini (Teorem 13.1) iki basit bölgeye ayrı ayrı uygularsak

$$\int_{C_1 \cup C_3} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA,$$

$$\int_{C_2 \cup (-C_3)} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

olur. İki eşitliği toplayalım. Sol tarafta C_3 ile $-C_3$ üzerindeki integraller birbirinin ters işaretlisidir (Önerme 11.4) ve sadeleşir; geriye C_1 ile C_2 üzerindeki integraller, yani $\partial D = C_1 \cup C_2$ boyunca integral kalır. Sağ tarafta D_1 ile D_2 yalnız C_3 doğru parçası boyunca kesiştiğinden bölgeye göre toplamsallıkla (Önerme 2.1) iki integralin toplamı D üzerindeki integraldir.
Genel durumda her D_k parçasının pozitif yönlü sınırı iki tür parçadan oluşur:

- *∂D'nin parçaları. Bunların her biri tek bir D_k'nın sınırındadır ve orada D_k'yı, dolayısıyla D'yi solda bırakan yönde, yani ∂D'nin yönünde dolaşılır.*
- *İki komşu parçayı ayıran iç kenarlar. Böyle bir kenar iki parçanın sınırındadır. İki parça da kendi bölgesini solda bırakacak biçimde dolaşıldığından kenar bir kez bir yönde, bir kez ters yönde dolaşılır.*

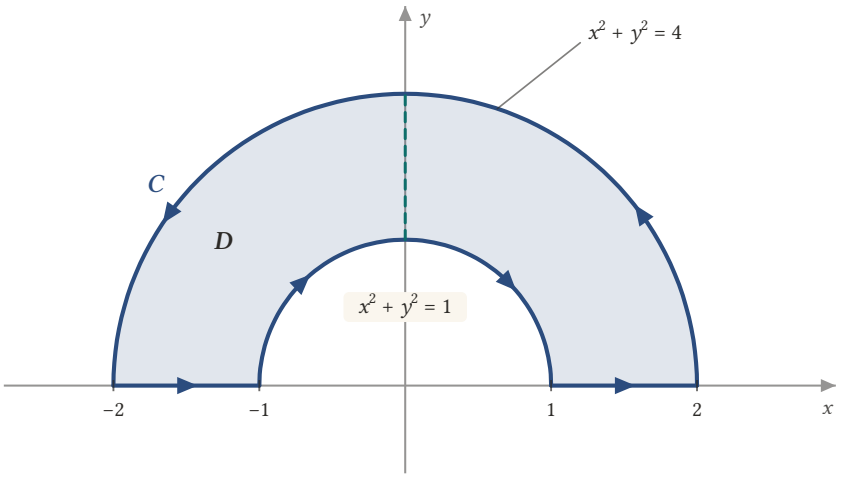
Green Teoremini her D_k'ya uygulayıp n eşitliği toplarsak iç kenarlar üzerindeki integraller ikişer ikişer sadeleşir; solda ∂D boyunca integral, sağda toplamsallıkla D üzerindeki iki katlı integral kalır. ■

Örnek 13.4 (Yarım Halka Üzerinde Green Teoremi). D, üst yarı düzlemde $x^2 + y^2 = 1$ ile $x^2 + y^2 = 4$ çemberleri arasında kalan bölge ve C, D'nin pozitif yönlü sınırı olsun.

$$\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy$$

integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.5: Üst yarı düzlemde $x^2 + y^2 = 1$ ile $x^2 + y^2 = 4$ çemberleri arasındaki D bölgesi ve pozitif yönlü sınırı C: dış yay saat yönünün tersine, iç yay saat yönünde dolaşılır. Kesikli y ekseni parçası D'yi iki basit bölgeye ayırır.

Çözüm.
Bölge. D basit değildir: $0 < y < 1$ için bir yatay doğru D'yi iki ayrı parçada keser, yani D II. tip değildir. Ama y ekseni D'yi iki basit bölgeye ayırır; bu yüzden Teorem 13.2 uygulanabilir. Kutupsal koordinatlarda

$$D = \{(r, \theta) \mid 1 \le r \le 2,\, 0 \le \theta \le \pi\}$$

bir kutupsal dikdörtgendir.
Fark. $P = y^2$ ve $Q = 3xy$ için

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3y - 2y = y.$$

İntegral. $y = r\sin\theta$ ve $dA = r\,dr\,d\theta$ olduğundan (Teorem 3.1)

$$\begin{aligned}\oint_C y^2\,dx + 3xy\,dy &= \iint_D y\,dA = \int_0^{\pi}\int_1^2 (r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_1^2 r^2\,dr = \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \\ &= 2\cdot\frac{7}{3} = \frac{14}{3}\end{aligned}$$

bulunur. ■

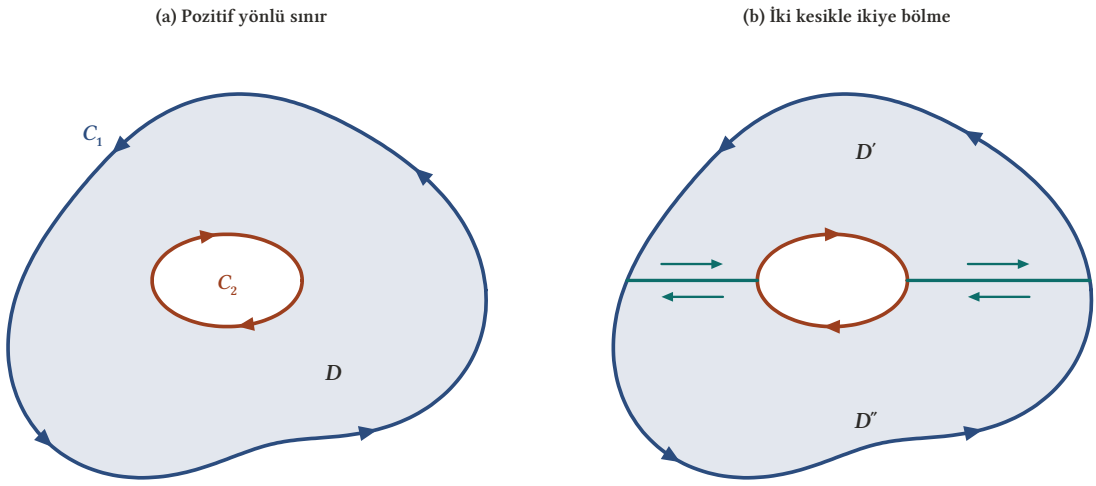
Green Teoremi delikli bölgelere, yani basit bağlantılı olmayan (Tanım 12.5) bölgelere de uygulanır. Böyle bir bölgenin sınırı birden çok kapalı eğriden oluşur ve sınırın pozitif yönü yine "bölge hep solda kalır" kuralıyla belirlenir: dış eğri saat yönünün tersine, iç eğriler saat yönünde dolaşılır.

Sonuç 13.1 (Delikli Bölgeler için Green Teoremi). *D bölgesi, dışta basit kapalı bir C_1 eğrisiyle, içte C_1'in içinde kalan, birbirini kesmeyen ve her biri ötekilerin dışında kalan $C_2, \ldots, C_m$ basit kapalı eğrileriyle sınırlı olsun. Bu eğriler D hep solda kalacak biçimde yönlendirilsin: C_1 saat yönünün tersine, $C_2, \ldots, C_m$ saat yönünde. D, sınırları parçalı düzgün olan sonlu sayıda basit bölgeye bölünebiliyorsa ve P, Q, D'yi içeren açık bir bölgede sürekli birinci mertebe kısmi türevlere sahipse*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} P\,dx + Q\,dy$$

olur.



Şekil 13.6: (a) Delikli D *bölgesinin pozitif yönlü sınırı: dış eğri* C_1 *saat yönünün tersine, iç eğri* C_2 *saat yönünde dolaşılır; iki durumda da* D *solda kalır. (b) İki kesik* D*'yi* D′ *ve* D″ *parçalarına ayırır. Her kesik iki parçanın sınırında zıt yönlerde dolaşıldığından kesikler üzerindeki integraller birbirini götürür.*

> ***İspat.***
> *Şeklin sağındaki gibi deliklerden dış eğriye uzanan kesiklerle D'yi parçalara ayıralım (örneğin D' ve D''). Her parçanın pozitif yönlü sınırı, $C_1, \ldots, C_m$ eğrilerinin parçalarıyla kesiklerden oluşur. C_k eğrilerinin parçaları, parçayı ve dolayısıyla D'yi solda bırakan yönde, yani varsayılan yönde dolaşılır. Her kesik iki parçanın sınırındadır ve bu iki parçanın sınırlarında zıt yönlerde dolaşılır.*
> *Basit bölgelerin birleşimi için verdiğimiz ispattaki gibi (Teorem 13.2) Green Teoremini her parçaya uygulayıp toplarsak kesikler üzerindeki integraller sadeleşir. Sağ tarafta toplamsallıkla D üzerindeki iki katlı integral, sol tarafta ise $C_1, \ldots, C_m$ boyunca alınan integrallerin toplamı kalır.* ■

Tek delikli bir bölgede, delik C_2 eğrisiyle sınırlıysa sonuç

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

biçimini alır; burada C_2 saat yönünde dolaşılır. Bu sonucun en güzel uygulaması, bir noktada tanımsız olan alanlarla ilgilidir.

Örnek 13.5 (Orijini Çevreleyen Eğriler).

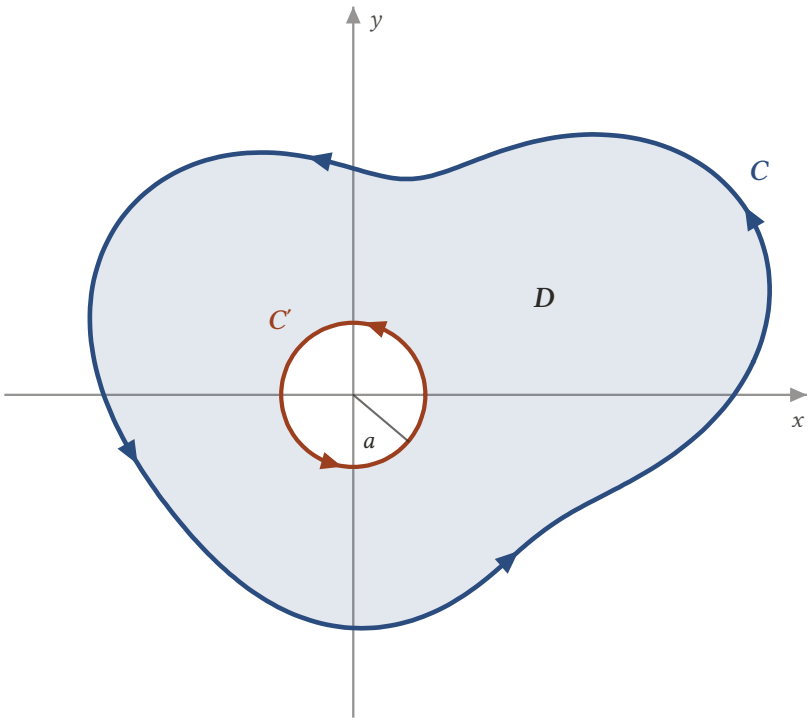
$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

olsun. Orijini çevreleyen her pozitif yönlü, parçalı düzgün, basit kapalı C eğrisi için $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> C rastgele bir eğri olduğundan integrali doğrudan hesaplayamayız. Green Teoremini de C'nin sınırladığı bölgenin tamamına uygulayamayız, çünkü P ve Q orijinde tanımsızdır. Bu yüzden orijini küçük bir çemberle dışarıda bırakacağız.
> **Yardımcı çember.** Orijin C'nin içinde olduğundan, orijin merkezli ve a yarıçaplı bir C' çemberi C'nin içinde kalacak kadar küçük seçilebilir. C' çemberini saat yönünün tersine yönlendirelim. D, C ile C'

 CC BY-NC-SA 4.0

arasındaki bölge olsun. D orijini içermez ve pozitif yönlü sınırı $C \cup (-C')$'dür. D'nin sonlu sayıda basit bölgeye bölünebildiğini kabul ediyoruz; Green Teoreminin genel hâlinde bu varsayım gereksizdir.



Şekil 13.7: Orijini çevreleyen C eğrisi ve C'nin içinde kalan, a yarıçaplı C' çemberi. Aradaki D bölgesi orijini içermez; pozitif yönlü sınırı C ile ters yönde dolaşılan C' çemberinden, yani $C \cup (-C')$ eğrisinden oluşur.

Fark. $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ ve $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, orijin dışında sürekli kısmi türevlere sahiptir. Bölüm kuralıyla

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

ve

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

bulunur. Demek ki D'nin her noktasında $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$'dır.

Green Teoremi. Sonuç 13.1 ile

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D 0 \, dA = 0$$

olur. $\int_{-C'} = -\oint_{C'}$ olduğundan (Önerme 11.4)

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

elde edilir. Yani C boyunca integral, C'nin biçiminden bağımsız olarak küçük çember boyunca integrale eşittir.

Çember boyunca hesap. C' çemberini $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ ile parametrize edelim. $x^2 + y^2 = a^2$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \frac{-a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}}{a^2}, \qquad \mathbf{r}'(t) = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$$

ve

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \frac{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}{a^2} = 1$$

olur. Böylece

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{C'} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi$$

bulunur. ■

Bu örnekteki alan için $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ eşitliği orijin dışındaki her noktada sağlanır; buna rağmen orijini çevreleyen eğriler boyunca integral $2\pi \neq 0$'dır. Bu bir çelişki değildir: orijin çıkarılmış düzlem basit bağlantılı olmadığından konservatiflik ölçütü (Teorem 12.5) bu alana uygulanamaz. Orijinden geçmeyen ve orijini çevrelemeyen bir basit kapalı eğri için ise eğrinin sınırladığı bölge orijini içermez ve Green Teoremi integralin 0 olduğunu doğrudan verir.

13.6 Konservatiflik Ölçütüne Dönüş

Green Teoremi, Eğrisel İntegraller için Temel Teorem bölümündeki konservatiflik ölçütünün (Teorem 12.5) neden doğru olduğunu da açıklar.
$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$, açık ve basit bağlantılı bir D bölgesinde tanımlı olsun; P ve Q'nun birinci mertebe kısmi türevleri D'de sürekli ve D'nin her noktasında

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

olsun. C, D içinde parçalı düzgün, basit kapalı bir eğri ve R, C'nin sınırladığı bölge olsun. D basit bağlantılı olduğundan C yalnız D'nin noktalarını çevreler, yani $R \subseteq D$'dir. C pozitif yönlüyse Green Teoremi R üzerinde

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_R 0\,dA = 0$$

verir. C negatif yönlüyse integral bunun ters işaretlisidir, yine 0'dır.
Kendini kesen bir kapalı eğri, kesişme noktalarında sonlu sayıda basit kapalı eğriye ayrılabiliyorsa, bu eğri boyunca integral basit parçalar boyunca alınan integrallerin toplamıdır ve o da 0'dır. Böylece D'deki her kapalı eğri boyunca $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ olur. Kapalı eğrilerle yoldan bağımsızlığı bağlayan teorem (Teorem 12.2) gereği $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, D'de yoldan bağımsızdır; yoldan bağımsız alanların konservatif olduğunu söyleyen teorem (Teorem 12.3) gereği de $\mathbf{F}$ konservatiftir.
Bu akıl yürütme ölçütün özünü gösterir. Tam bir ispat için iki ince noktanın da halledilmesi gerekir: Green Teoreminin rastgele parçalı düzgün basit kapalı eğriler için geçerliliği ve sonsuz kez kendini kesebilen kapalı eğriler. İkisi de ileri analizin konusudur.

13.7 Alıştırmalar

Alıştırmalar kolaydan zora sıralıdır. Her birinde önce eğrinin yönünü ve P ile Q'nun D üzerinde sürekli türevlere sahip olduğunu denetleyin.

Alıştırma 13.1 (Üçgende İki Yolla Hesap). C, köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(1,2)$ olan pozitif yönlü üçgen olsun.

$$\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$$

 CC BY-NC-SA 4.0

integralini önce doğrudan, sonra Green Teoremiyle hesaplayıp sonuçları karşılaştırınız.

Çözüm.
Doğrudan hesap. C üç kenardan oluşur.

- C_1: $(0,0)$'dan $(1,0)$'a. Burada $y=0$ ve $dy=0$ olduğundan integrand sıfırdır; katkı 0.
- C_2: $(1,0)$'dan $(1,2)$'ye. $x=1$, $y=y$, $0\le y\le 2$ ve $dx=0$ alınırsa katkı $\displaystyle\int_0^2 y^3\,dy = 4$ olur.
- C_3: $(1,2)$'den $(0,0)$'a, $y=2x$ doğrusu boyunca. x'i parametre alırsak x 1'den 0'a iner ve $dy = 2\,dx$ olur:

$$xy\,dx + x^2y^3\,dy = 2x^2\,dx + 16x^5\,dx.$$

Bu kenarın katkısı

$$\int_1^0 (2x^2+16x^5)dx = -\left(\frac{2}{3}+\frac{8}{3}\right) = -\frac{10}{3}$$

olur.

Toplam $0+4-\frac{10}{3} = \frac{2}{3}$'tür.
Green Teoremiyle. $P=xy$, $Q=x^2y^3$ için

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy^3 - x$$

olur. Üçgensel bölge

$$D = \{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 2x\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\iint_D (2xy^3 - x)dA &= \int_0^1 \left[\frac{xy^4}{2} - xy\right]_{y=0}^{y=2x} dx \\ &= \int_0^1 (8x^5 - 2x^2)dx = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

bulunur. İki yol aynı sonucu verir. ■

Alıştırma 13.2 (Ters Tanjantlı Bir İntegral). C, köşeleri $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(1,3)$ olan pozitif yönlü üçgen olmak üzere

$$\oint_C x^2y^2\,dx + y\arctan y\,dy$$

integralini Green Teoremiyle hesaplayınız.

Çözüm.
$P=x^2y^2$ ve $Q = y\arctan y$ her yerde sürekli kısmi türevlere sahiptir. Q yalnız y'ye bağlı olduğundan $\partial Q/\partial x = 0$'dır; bu sayede doğrudan hesapta karşımıza çıkacak $y\arctan y$ integralinden kurtuluruz:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 2x^2y = -2x^2y.$$

Üçgensel bölge

$$D = \{(x,y) \mid 0\le x\le 1,\, 0\le y\le 3x\}$$

olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\oint_C x^2y^2\,dx + y\arctan y\,dy = \int_0^1 \int_0^{3x} (-2x^2y)dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \Big[-x^2y^2\Big]_{y=0}^{y=3x} dx = \int_0^1 (-9x^4)dx = -\frac{9}{5}$$

bulunur. ■

Alıştırma 13.3 (Halka Biçimli Bölgenin Sınırı). C, $x^2+y^2=4$ ve $x^2+y^2=9$ çemberleri arasındaki bölgenin pozitif yönlü sınırı olsun.

$$\int_C (1-y^3)dx + \left(x^3 + e^{y^2}\right)dy$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Bölge tek delikli bir halkadır. Pozitif yönlü sınırı, saat yönünün tersine dolaşılan $x^2+y^2=9$ çemberiyle saat yönünde dolaşılan $x^2+y^2=4$ çemberinden oluşur. Halka iki koordinat ekseniyle dört basit bölgeye bölünebildiğinden Sonuç 13.1 uygulanır.
$P = 1-y^3$ ve $Q = x^3+e^{y^2}$ için

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - (-3y^2) = 3(x^2+y^2) = 3r^2$$

olur. Halka kutupsal koordinatlarda $2 \le r \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$ olduğundan (Teorem 3.1)

$$\int_C (1-y^3)dx + \left(x^3 + e^{y^2}\right)dy = \int_0^{2\pi} \int_2^3 3r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$$
$$= 2\pi \left[\frac{3r^4}{4}\right]_2^3 = 2\pi \cdot \frac{3(81-16)}{4} = \frac{195\pi}{2}$$

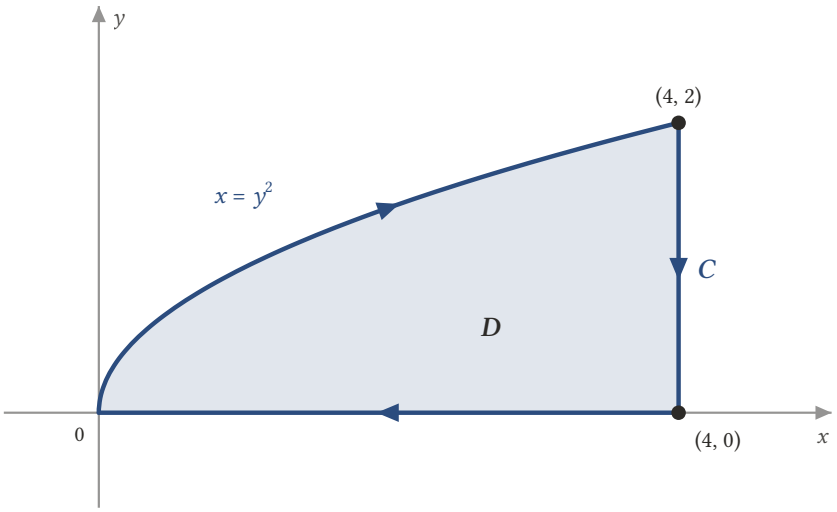
bulunur. ■

Alıştırma 13.4 (Saat Yönünde Dolaşılan Bir Eğri). C, $(0,0)$'dan $x=y^2$ parabolü boyunca $(4,2)$'ye, oradan doğru parçasıyla $(4,0)$'a, oradan da x ekseni boyunca $(0,0)$'a giden eğri olsun.

$$\int_C \left(x^{2/3} + y^2\right)dx + \left(y^{4/3} - x^2\right)dy$$

integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.8: C eğrisi önce $x = y^2$ parabolü boyunca (0, 0)'dan (4, 2)'ye, sonra düşey doğru parçasıyla (4, 0)'a, oradan da x ekseni boyunca orijine döner. Bu dolaşımda D bölgesi sağda kalır: C saat yönünde, yani negatif yönlüdür.

Çözüm.
Yön. C'nin sınırladığı bölge

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 2,\, y^2 \le x \le 4\}$$

olup bu dolaşımda sağda kalır: C saat yönünde, yani negatif yönlüdür. Green Teoremini ters yönlü $-C$ eğrisine uygulayıp sonucun işaretini değiştireceğiz.
Fark. $x^{2/3}$ yalnız x'e, $y^{4/3}$ yalnız y'ye bağlıdır. Bu yüzden

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$$

olur. P, Q ve bu iki türev her yerde süreklidir. $\partial P/\partial x = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ türevi $x = 0$'da tanımsızdır, ama Green Teoreminin ispatında bu türev kullanılmaz.
İntegral. Önerme 11.4 ve Green Teoremiyle

$$\begin{aligned}\int_C P\,dx + Q\,dy &= -\oint_{-C} P\,dx + Q\,dy \\ &= -\iint_D (-2x - 2y)\,dA = \iint_D (2x + 2y)\,dA\end{aligned}$$

olur. D'yi II. tip bölge olarak kullanırsak

$$\begin{aligned}\iint_D (2x + 2y)\,dA &= \int_0^2 \Big[\, x^2 + 2xy \Big]_{x=y^2}^{x=4} dy = \int_0^2 (16 + 8y - y^4 - 2y^3)\,dy \\ &= \left[16y + 4y^2 - \frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{2}\right]_0^2 = 32 + 16 - \frac{32}{5} - 8 = \frac{168}{5}\end{aligned}$$

bulunur. ■

Alıştırma 13.5 (Saat Yönündeki Çember). $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \cos y,\, x \sin y\rangle$ ve C, saat yönünde dolaşılan $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ çemberi olsun. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$P = y - \cos y$ ve $Q = x \sin y$ her yerde sürekli kısmi türevlere sahiptir ve

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \sin y - (1 + \sin y) = -1$$

olur. C'nin sınırladığı D bölgesi, yarıçapı 2 olan bir disktir; alanı 4π'dir. C negatif yönlü olduğundan ters yönlü $-C$ pozitif yönlüdür ve Green Teoremi

$$\oint_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (-1)\, dA = -4\pi$$

verir. Yön değişince işaret değiştiğinden (Önerme 11.4) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 4\pi$ bulunur. ■

Alıştırma 13.6 (Çeyrek Çember Boyunca Yapılan İş). Bir parçacık orijinden başlayıp x ekseni boyunca $(5, 0)$'a, sonra $x^2 + y^2 = 25$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ çeyrek çemberi boyunca $(0, 5)$'e, oradan da y ekseni boyunca orijine dönüyor.

$$\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \sin x,\, \sin y + xy^2 + \frac{1}{3}x^3 \right\rangle$$

kuvvet alanının bu hareket boyunca yaptığı işi bulunuz.

Çözüm.
İş $W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'dir. Yol, çeyrek daireyi saat yönünün tersine dolaşan pozitif yönlü kapalı bir eğridir. $P = \sin x$ ve $Q = \sin y + xy^2 + \frac{1}{3}x^3$ için

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + x^2 - 0 = x^2 + y^2$$

olur. Çeyrek daire kutupsal koordinatlarda $0 \leq r \leq 5$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$W = \int_0^{\pi/2} \int_0^5 r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{5^4}{4} = \frac{625\pi}{8}$$

bulunur. ■

Alıştırma 13.7 (Sikloid Kemerinin Altındaki Alan). $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ sikloid kemeri ile x ekseni arasındaki bölgenin alanını (5) formüllerinden biriyle bulunuz.

Çözüm.
Sınır ve yön. Kemer $(0, 0)$'dan başlar, $t = \pi$'de en yüksek noktası $(\pi, 2)$'ye çıkar ve $(2\pi, 0)$'da biter. Bölgenin pozitif yönlü sınırı iki parçadır: x ekseni boyunca $(0, 0)$'dan $(2\pi, 0)$'a giden C_1 doğru parçası ve kemer boyunca $(2\pi, 0)$'dan $(0, 0)$'a geri dönen C_2, yani t'nin 2π'den 0'a azaldığı kemer.
Formül seçimi. $A = -\oint_C y\, dx$ formülünü kullanalım (Önerme 13.1). C_1 üzerinde $y = 0$ olduğundan bu parçanın katkısı sıfırdır.
Kemer. C_2 üzerinde $y = 1 - \cos t$ ve $dx = (1 - \cos t)\, dt$ olduğundan

$$\int_{C_2} y\, dx = \int_{2\pi}^{0} (1 - \cos t)^2\, dt = -\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$$

olur. $\int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0$ ve $\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$ olduğundan bu integral $-(2\pi + \pi) = -3\pi$'dir.
Sonuç. $A = -(0 - 3\pi) = 3\pi$ bulunur. Kemerin altındaki alan, kemeri çizen birim çemberin alanının tam üç katıdır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 13.8 (Beşgenin Alanı). Köşeleri saat yönünün tersine sırayla $(0,0)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(0,3)$ ve $(-1,1)$ olan beşgenin alanını (5) formülleriyle bulunuz.

Çözüm.
Bir kenarın katkısı. (x_1,y_1) noktasından (x_2,y_2) noktasına giden doğru parçasını

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \qquad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \qquad 0 \le t \le 1$$

ile parametrize edelim. $dx = (x_2 - x_1)\,dt$ ve $dy = (y_2 - y_1)\,dt$ olur. $x\,dy - y\,dx$ ifadesinde t içeren terimler sadeleşir:

$$\begin{aligned} x\,dy - y\,dx &= \big[\,(x_1 + t\,\Delta x)\,\Delta y - (y_1 + t\,\Delta y)\,\Delta x\,\big]\,dt \\ &= (x_1\,\Delta y - y_1\,\Delta x)dt = (x_1y_2 - x_2y_1)dt; \end{aligned}$$

burada $\Delta x = x_2 - x_1$ ve $\Delta y = y_2 - y_1$'dir. Bu yüzden kenar boyunca $\int x\,dy - y\,dx = x_1y_2 - x_2y_1$ olur.
Çokgen formülü. Köşeleri saat yönünün tersine sırayla $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ olan bir çokgenin sınırı n kenardan oluşur. (5)'teki üçüncü formül her kenarın katkısını toplar:

$$A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{k+1} - x_{k+1}y_k), \qquad (x_{n+1},y_{n+1}) = (x_1,y_1).$$

Beşgen. Kenarların katkıları sırasıyla

$$\begin{aligned} &0\cdot 1 - 2\cdot 0 = 0, \qquad 2\cdot 3 - 1\cdot 1 = 5, \qquad 1\cdot 3 - 0\cdot 3 = 3, \\ &0\cdot 1 - (-1)\cdot 3 = 3, \qquad (-1)\cdot 0 - 0\cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

olur. Toplam 11 olduğundan beşgenin alanı $A = \frac{11}{2}$'dir. ■

Alıştırma 13.9 (Çeyrek Dairenin Ağırlık Merkezi). Yoğunluğu sabit olan bir levhanın kütle merkezine ağırlık merkezi denir. Ağırlık merkezinin koordinatlarını sınır eğrisi boyunca alınan integrallerle yazarak yarıçapı a olan çeyrek dairenin ($x \ge 0$, $y \ge 0$) ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm.
Sınır formülleri. D, pozitif yönlü C eğrisiyle sınırlı, alanı A olan bir bölge ve yoğunluk sabit olsun. Kütle merkezinin tanımında (Tanım 4.4) sabit yoğunluk sadeleşir:

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\,dA, \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\,dA.$$

$P = 0$, $Q = \frac{1}{2}x^2$ seçilirse $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x$ olur. $P = -\frac{1}{2}y^2$, $Q = 0$ seçilirse fark y'dir. Green Teoremiyle

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx$$

bulunur.
Çeyrek daire. Alan $A = \frac{1}{4}\pi a^2$'dir. Sınır üç parçadır: x ekseni üzerinde $(0,0)$'dan $(a,0)$'a, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ yayı ve y ekseni üzerinde $(0,a)$'dan $(0,0)$'a.

- $\oint_C x^2\,dy$: x ekseninde $dy = 0$, y ekseninde $x = 0$ olduğundan yalnız yay katkı verir:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\cdot a\cos t\,dt &= a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\cos t\,dt \\ &= a^3\left[\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2a^3}{3}. \end{aligned}$$

- $\oint_C y^2\,dx$: x ekseninde $y = 0$, y ekseninde $dx = 0$ olduğundan yine yalnız yay katkı verir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{\pi/2} a^2 \sin^2 t \cdot (-a \sin t)\, dt = -a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t) \sin t \, dt$$
$$= -a^3 \left[-\cos t + \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{2a^3}{3}.$$

Böylece

$$\bar{x} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}\pi a^2} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{4a}{3\pi}, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}\pi a^2} \cdot \left(-\frac{2a^3}{3} \right) = \frac{4a}{3\pi}$$

bulunur. Ağırlık merkezi $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4a}{3\pi}\right)$'dir; $\bar{x} = \bar{y}$ olması, çeyrek dairenin $y = x$ doğrusuna göre simetrisiyle uyumludur. ■

Alıştırma 13.10 (Orijinde Tanımsız Bir Alan).

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{2xy\,\mathbf{i} + (y^2 - x^2)\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$$

olsun. Orijini çevreleyen pozitif yönlü, parçalı düzgün, basit kapalı her C eğrisi için $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Orijini çevreleyen eğriler örneğindeki (Örnek 13.5) yolu izleyeceğiz.
Fark. $P = 2xy(x^2 + y^2)^{-2}$ ve $Q = (y^2 - x^2)(x^2 + y^2)^{-2}$ orijin dışında sürekli kısmi türevlere sahiptir. Çarpım ve zincir kuralıyla

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x(x^2 + y^2) - 8xy^2}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x(x^2 + y^2) - 4x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

bulunur. Fark orijin dışında sıfırdır.
Küçük çembere indirgeme. Orijin merkezli, C'nin içinde kalan, a yarıçaplı ve pozitif yönlü bir C' çemberi alalım. Aynı örnekteki gibi delikli bölgeler için Green Teoremi (Sonuç 13.1) $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ verir.
Çember boyunca hesap. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ için $x^2 + y^2 = a^2$, $dx = -a\sin t\, dt$ ve $dy = a\cos t\, dt$'dir:

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{2a^2 \cos t \sin t \cdot (-a\sin t) + a^2(\sin^2 t - \cos^2 t) \cdot a\cos t}{a^4}\, dt$$
$$= \frac{-\sin^2 t \cos t - \cos^3 t}{a}\, dt = -\frac{\cos t}{a}\, dt.$$

Böylece

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{a} \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0$$

bulunur. Sonuç şaşırtıcı değildir: $f(x, y) = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ için $\nabla f = \mathbf{F}$ olduğu türev alarak doğrulanabilir. $\mathbf{F}$, orijin çıkarılmış düzlemde bir gradyan alanıdır ve temel teoreme (Teorem 12.1) göre her kapalı eğri boyunca integrali 0'dır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 13.11 (Alanı Bilinen Bir Bölge). $\mathbf{F}(x,y) = \langle x^2 + y, 3x - y^2 \rangle$ ve C, alanı 6 olan bir D bölgesinin pozitif yönlü sınır eğrisi olsun. $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
$P = x^2 + y$ ve $Q = 3x - y^2$ polinomdur ve

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 - 1 = 2$$

sabittir. Green Teoremiyle

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D 2\, dA = 2 \cdot A(D) = 2 \cdot 6 = 12$$

bulunur. Sonuç D'nin biçimine değil, yalnız alanına bağlıdır. ■

Alıştırma 13.12 (Değişken Değiştirme Formülü ve Green Teoremi). $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ dönüşümü uv-düzlemindeki S bölgesini bire bir olarak xy-düzlemindeki R bölgesine ve S'nin sınırını R'nin sınırına götürsün. S ile R parçalı düzgün basit kapalı eğrilerle sınırlı olsun ve Green Teoremi ikisinde de geçerli olsun. g ile h'nin ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli ve Jacobi determinantı S'nin her noktasında sıfırdan farklı olsun. Green Teoremini kullanarak

$$\iint_R dx\, dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\, dv$$

olduğunu, yani değişken değiştirme formülünün (Teorem 9.1) $f = 1$ için hâlini gösteriniz.

Çözüm.
$J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = g_u h_v - g_v h_u$ yazalım.
Alanı sınır integraline çevirme. (5) formülüyle (Önerme 13.1) $A(R) = \oint_{\partial R} x\, dy$'dir.
İntegrali uv-düzlemine taşıma. ∂S'yi pozitif yönde $u = u(t)$, $v = v(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ ile parametrize edelim. Dönüşüm ∂S'yi bire bir olarak ∂R'ye götürdüğünden

$$x(t) = g(u(t), v(t)), \qquad y(t) = h(u(t), v(t))$$

eğrisi ∂R'yi bir kez, ya pozitif ya negatif yönde dolaşır. $\varepsilon = 1$ (pozitif yön) ya da $\varepsilon = -1$ (negatif yön) alırsak $\oint_{\partial R} x\, dy = \varepsilon \int_\alpha^\beta x(t)\, y'(t)\, dt$ olur. Zincir kuralına göre (bkz. Analiz 4) $y'(t) = h_u\, u'(t) + h_v\, v'(t)$'dir. Bu yüzden

$$\int_\alpha^\beta x(t)\, y'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \left[\, g h_u\, u'(t) + g h_v\, v'(t) \,\right] dt = \oint_{\partial S} g h_u\, du + g h_v\, dv$$

olur.
uv-düzleminde Green Teoremi. $\tilde{P} = g h_u$ ve $\tilde{Q} = g h_v$ sürekli birinci mertebe kısmi türevlere sahiptir, çünkü g ile h'nin ikinci mertebe türevleri süreklidir. Çarpım kuralıyla

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v} = (g_u h_v + g\, h_{vu}) - (g_v h_u + g\, h_{uv}) = g_u h_v - g_v h_u = J$$

olur; burada karışık kısmi türevlerin eşitliğini, $h_{uv} = h_{vu}$'yu kullandık (bkz. Analiz 4). Green Teoremi S üzerinde $\oint_{\partial S} \tilde{P}\, du + \tilde{Q}\, dv = \iint_S J\, du\, dv$ verir. Demek ki

$$A(R) = \varepsilon \iint_S J\, du\, dv.$$

İşaret. J sürekli ve S'de hiç sıfır olmadığından işaret değiştiremez: J bir noktada pozitif, başka bir noktada negatif olsaydı, bu iki noktayı S içinde birleştiren bir yol boyunca Ara Değer Teoremi J'nin bir sıfırını verirdi. Bu yüzden $\left| \iint_S J\, du\, dv \right| = \iint_S |\, J\, |\, du\, dv$'dir. $A(R) > 0$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$A(R) = \left| \iint_S J \, du \, dv \right| = \iint_S \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du \, dv$$

bulunur. ■

Green Teoremi, düzlemdeki bir bölgeyi sınır eğrisine bağlayan ilk köprümüz oldu. Teoremdeki $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}$ ifadesi, bir sonraki bölümde tanımlayacağımız rotasyonelin $\mathbf{k}$ bileşenidir. Rotasyonel ve Diverjans bölümünde bu iki işlemi tanıyacak ve Green Teoremini vektör biçimlerinde yeniden yazacağız. Bu biçimler, teoremin uzaydaki karşılıkları olan Stokes ve diverjans teoremlerine giden yolu açar.

 CC BY-NC-SA 4.0

14. Rotasyonel ve Diverjans

Tek değişkenli bir fonksiyonun türevi, fonksiyonun nasıl değiştiğini ölçer. Vektör alanları için de türeve benzeyen iki temel işlem vardır ve bu işlemler vektör analizinin akışkanlar mekaniği, elektrik ve manyetizma gibi uygulamalarında merkezî bir rol oynar. Birincisi olan **rotasyonel**, bir vektör alanından yeni bir vektör alanı üretir. İkincisi olan **diverjans** ise bir vektör alanından skaler bir fonksiyon üretir. Gradyanla birlikte bu iki işlem, birinci mertebe kısmi türevlerin vektör analizindeki üç temel biçimidir.
Bir akışkanın hız alanı düşünüldüğünde rotasyonel, bir noktanın çevresindeki akışkanın hangi eksen etrafında ve ne hızla döndüğünü ölçer. Diverjans ise o noktadan dışarı ne kadar akışkan aktığını ölçer. Bu bölümde iki işlemi tanımlayacak, aralarındaki iki temel özdeşliği ispatlayacak ve rotasyonelin bir alanın konservatif olup olmadığına nasıl karar verdiğini göreceğiz. Son olarak Green Teoremi'ni bu işlemlerle iki vektör biçiminde yazacağız; bu biçimler Stokes ve diverjans teoremlerinin düzlemdeki karşılıklarıdır.
Rotasyonel için kullanılan İngilizce *curl* adını 1871'de James Clerk Maxwell önermiştir. Aynı işlem Türkçede ve birçok Avrupa dilinde rot $\mathbf{F}$ diye de yazılır.

14.1 Rotasyonel

Önce rotasyoneli bileşenlerle tanımlayalım, sonra onu akılda tutmanın kolay bir yolunu görelim.

Tanım 14.1 (Rotasyonel). $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, $\mathbb{R}^3$'ün açık bir E kümesinde tanımlı bir vektör alanı olsun (bkz. Tanım 10.1) ve P, Q, R'nin bütün birinci mertebe kısmi türevleri E'de var olsun. E üzerinde

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{1}$$

ile tanımlanan vektör alanına $\mathbf{F}$'nin **rotasyoneli** (curl) denir. rot $\mathbf{F}$ diye de yazılır.

Yani rotasyonelin her bileşeni iki "çapraz" kısmi türevin farkıdır. $\mathbf{i}$ bileşeninde x'e göre türev hiç geçmez; yalnız R'nin y'ye ve Q'nun z'ye göre türevleri girer. $\mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$ bileşenleri, $x \to y \to z \to x$ ve $P \to Q \to R \to P$ döngüsel kaydırmasıyla elde edilir. Hiçbir bileşen kendi değişkenine göre türevlenmez: $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$ ve $\partial R/\partial z$ rotasyonelde yer almaz.
Formül (1)'i ezberlemenin kolay bir yolu vardır. **Nabla** (del) adı verilen vektör diferansiyel operatörünü

$$\nabla = \mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

diye yazalım. Bu operatör skaler bir f fonksiyonuna uygulandığında f'nin gradyanını verir (bkz. Analiz 4):

$$\nabla f = \mathbf{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\,\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}.$$

∇'yı bileşenleri $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ olan biçimsel bir vektör gibi düşünürsek $\mathbf{F}$ ile vektörel çarpımını da determinantla yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Determinantı birinci satıra göre açarken "çarpma" yerine türev alınır; örneğin $\partial/\partial y$ ile R'nin "çarpımı" $\partial R/\partial y$ demektir. Ortadaki eksi işareti parantezin içini $\partial P/\partial z - \partial R/\partial x$ yapar ve (1) formülü elde edilir. Böylece

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\operatorname{curl}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} \tag{2}$$

yazabiliriz. Rotasyoneli hesaplamanın en pratik yolu bu determinantı açmaktır.

Örnek 14.1 (Bir Rotasyonel Hesabı). $\mathbf{F}(x,y,z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ alanının rotasyonelini bulunuz.

Çözüm.
Bileşenler $P = xz$, $Q = xyz$ ve $R = -y^2$'dir. (2) formülündeki determinantı birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\,\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xyz & -y^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xz)\right]\mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Türevleri tek tek hesaplarsak

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\,\mathbf{F} &= (-2y - xy)\,\mathbf{i} - (0 - x)\,\mathbf{j} + (yz - 0)\,\mathbf{k} \\ &= -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

bulunur.
■

14.2 Rotasyonel ve Konservatif Alanlar

İkinci mertebe kısmi türevleri sürekli bir fonksiyonun gradyan alanının rotasyoneli sıfırdır. Bu basit gözlem, bir alanın konservatif olmadığını göstermenin en hızlı yoludur. Alan bütün $\mathbb{R}^3$'te tanımlı ve bileşenlerinin birinci mertebe kısmi türevleri sürekliyse tersi de doğrudur.

Teorem 14.1 (Gradyanın Rotasyoneli). *f, $\mathbb{R}^3$'ün açık bir E kümesinde tanımlı ve ikinci mertebe kısmi türevleri E'de sürekli olan üç değişkenli bir fonksiyon olsun. Bu durumda E üzerinde*

$$\operatorname{curl}\,(\nabla f) = \mathbf{0}$$

olur.

İspat.
$\nabla f = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} + f_z\,\mathbf{k}$ *olduğundan (2) formülüyle*

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\,(\nabla f) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

bulunur; burada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$ *anlamındadır. Üçüncü değişken sabit tutulduğunda f, kalan iki değişkenin ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli bir fonksiyonudur. Bu yüzden Clairaut Teoremi'ne göre (bkz. Analiz 4) her parantezdeki iki karışık türev birbirine eşittir. Sonuç olarak*

$$\operatorname{curl}\,(\nabla f) = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Bu sonuç, her $\mathbf{a}$ vektörü için $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ olmasını andırır: $\nabla \times (\nabla f)$ ifadesinde de "aynı vektör" kendisiyle çarpılmaktadır. Konservatif bir alan bir fonksiyonun gradyanı olduğundan teoremi şöyle de söyleyebiliriz.

Sonuç 14.1 (Konservatif Alanın Rotasyoneli). *$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, açık bir E kümesinde konservatif (bkz. Tanım 10.4) ve P, Q, R'nin birinci mertebe kısmi türevleri E'de sürekli olsun. Bu durumda E üzerinde* $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$*'dır.*

İspat.
$\mathbf{F}$ konservatif olduğundan E'de $\mathbf{F} = \nabla f$ olacak bir f potansiyel fonksiyonu vardır. Buna göre $f_x = P$, $f_y = Q$ ve $f_z = R$'dir. P, Q, R'nin birinci mertebe kısmi türevleri sürekli olduğundan f'nin bütün ikinci mertebe kısmi türevleri de süreklidir. Teorem 14.1 ile $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \operatorname{curl}(\nabla f) = \mathbf{0}$ *elde edilir.*
■

Yani rotasyoneli tek bir noktada bile sıfırdan farklı olan bir alan konservatif olamaz. Bu, bir alanın konservatif *olmadığını* göstermenin pratik bir yoludur.

Örnek 14.2 (Konservatif Olmayan Bir Alan). $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ alanının konservatif olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Bu alanın rotasyonelini Örnek 14.1 içinde hesapladık:

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = -y(2 + x)\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}.$$

Örneğin $(1, 0, 0)$ noktasında $\operatorname{curl}\mathbf{F} = 0\,\mathbf{i} + 1\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$'dır. Bileşenler polinom olduğundan kısmi türevleri her yerde süreklidir. $\mathbf{F}$ konservatif olsaydı Sonuç 14.1 gereği rotasyoneli her yerde $\mathbf{0}$ olurdu. Bu yüzden $\mathbf{F}$ konservatif değildir.
■

Sonuç 14.1 ifadesinin tersi genel olarak doğru değildir. Ancak alan bütün $\mathbb{R}^3$'te tanımlı ve bileşenlerinin birinci mertebe kısmi türevleri sürekliyse ters yön de doğrudur. Aşağıdaki teorem, düzlemdeki konservatiflik ölçütünün (Teorem 12.5) üç boyutlu karşılığıdır. Tanım kümesi basit bağlantılı olduğunda, yani kabaca içindeki her kapalı eğri kümeden çıkmadan bir noktaya büzülebildiğinde de sonuç doğrudur; bu genel hâlin ispatı Stokes Teoremi gerektirir.

Teorem 14.2 (Rotasyoneli Sıfır Olan Alan Konservatiftir). *$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ bütün $\mathbb{R}^3$'te tanımlı ve P, Q, R'nin birinci mertebe kısmi türevleri $\mathbb{R}^3$'te sürekli bir vektör alanı olsun.* $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ *ise $\mathbf{F}$ konservatiftir.*

İspat.
$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ *koşulu, (1) formülüne göre her noktada şu üç eşitlik demektir:*

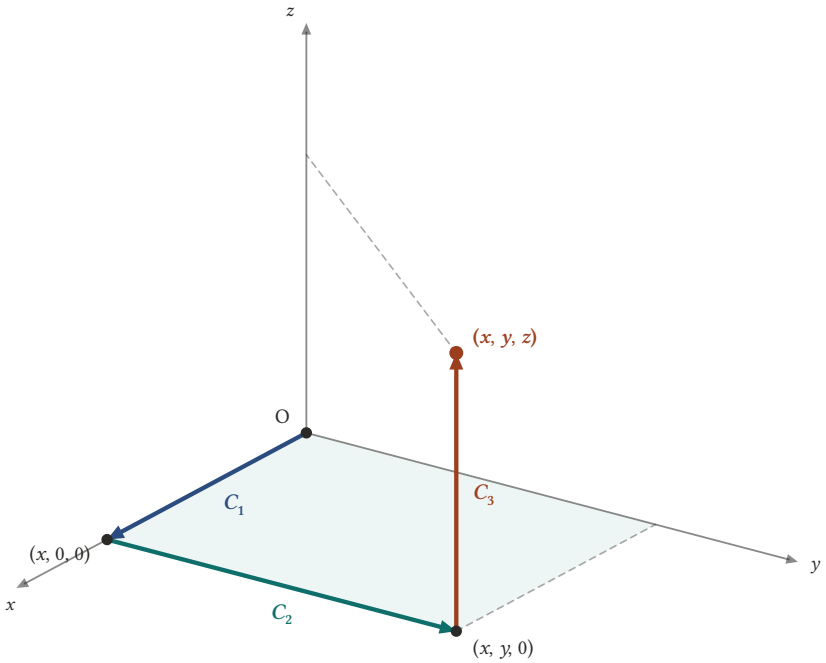
$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Potansiyel fonksiyonu açıkça kuracağız. Her (x, y, z) için

$$f(x, y, z) = \int_0^x P(t, 0, 0)\,dt + \int_0^y Q(x, t, 0)\,dt + \int_0^z R(x, y, t)\,dt$$

diyelim. Bir üst sınır negatifse $\int_0^y = -\int_y^0$ diye anlaşılır; aşağıdaki kurallar bu durumda da geçerlidir. Geometrik olarak $f(x, y, z)$, $\mathbf{F}$'nin orijinden (şekilde O) (x, y, z) noktasına eksenlere paralel üç doğru parçası boyunca alınan eğrisel integralidir:

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.1: Potansiyel, orijinden (O) (x, y, z) noktasına eksenlere paralel üç doğru parçası boyunca toplanır: C_1 üzerinde yalnız x, C_2 üzerinde yalnız y, C_3 üzerinde yalnız z değişir; bu yüzden sırasıyla yalnız P, Q ve R katkı verir.

İspatta iki araç kullanacağız. Birincisi, sürekli bir fonksiyonun integralinin değişken üst sınırına göre türevinin integrandın o noktadaki değeri olmasıdır (bkz. Analiz 2). İkincisi integral işareti altında türevdir: integrand ve parametreye göre kısmi türevi sürekliyse, parametreye göre türev integralin içine girer (bkz. Analiz 3). P, Q, R ve kısmi türevleri sürekli olduğundan iki araç da her terime uygulanabilir. Şimdi $\nabla f = \mathbf{F}$ olduğunu üç adımda gösterelim.

Adım 1: $f_z = R$. *İlk iki terim z'ye bağlı değildir. Üçüncü terime birinci aracı uygularsak*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = R(x,y,z)$$

olur.

Adım 2: $f_y = Q$. *İlk terim y'ye bağlı değildir. İkinci terimin y'ye göre türevi birinci araçla $Q(x,y,0)$'dır. Üçüncü terimde y bir parametredir; ikinci aracı ve $\partial R/\partial y = \partial Q/\partial z$ eşitliğini kullanırsak*

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^z R(x,y,t)\,dt = \int_0^z \frac{\partial R}{\partial y}(x,y,t)\,dt = \int_0^z \frac{\partial Q}{\partial z}(x,y,t)\,dt$$

olur. Son integral, Newton–Leibniz formülüyle (bkz. Analiz 2) $Q(x,y,z) - Q(x,y,0)$'a eşittir. Toplarsak

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = Q(x,y,0) + Q(x,y,z) - Q(x,y,0) = Q(x,y,z)$$

bulunur.

Adım 3: $f_x = P$. *İlk terimin x'e göre türevi birinci araçla $P(x,0,0)$'dır. Kalan iki terimde x bir parametredir. İkinci araç ile $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ ve $\partial R/\partial x = \partial P/\partial z$ eşitliklerini kullanırsak*

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y Q(x,t,0)\,dt = \int_0^y \frac{\partial P}{\partial y}(x,t,0)\,dt = P(x,y,0) - P(x,0,0),$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^z R(x,y,t)\,dt = \int_0^z \frac{\partial P}{\partial z}(x,y,t)\,dt = P(x,y,z) - P(x,y,0)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; son eşitlikler yine Newton–Leibniz formülünden gelir. Üç türevi toplarsak

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,0,0) + \big[\, P(x,y,0) - P(x,0,0) \,\big] + \big[\, P(x,y,z) - P(x,y,0) \,\big] = P(x,y,z)$$

bulunur.
Böylece $\nabla f = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k} = \mathbf{F}$ *olur, yani* $\mathbf{F}$ *konservatiftir ve* f *onun bir potansiyel fonksiyonudur.* ■

⚠ Tanım kümesi koşulu atlanamaz

z ekseni dışındaki noktalar kümesi $E = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \neq 0\}$ üzerinde

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

alanını düşünelim. $R = 0$ ve P, Q z'ye bağlı olmadığından rotasyonelin yalnız $\mathbf{k}$ bileşeni kalır ve

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

olduğundan E üzerinde $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$'dır. Öte yandan xy-düzlemindeki birim çember $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ boyunca $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ olduğundan

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0$$

bulunur. Konservatif bir alanın kapalı eğri üzerindeki integrali 0 olacağından (Teorem 12.1) $\mathbf{F}$, E üzerinde konservatif değildir. Sorun E'nin bir "deliği" olmasıdır: z ekseni kümeden çıkarılmıştır ve birim çember E'den çıkmadan bir noktaya büzülemez.

Rotasyonelin sıfır olduğunu gördükten sonra potansiyeli bulmak için kısmi integrallerle çalışırız. Yöntemi bir reçete olarak özetleyelim.

💡 Konservatiflik testi ve potansiyel üç adımda

1. **Rotasyoneli hesapla.** $\operatorname{curl}\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ olan bir nokta varsa $\mathbf{F}$ konservatif değildir (Sonuç 14.1).
2. **Tanım kümesine bak.** $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ise ve $\mathbf{F}$ bütün $\mathbb{R}^3$'te tanımlı, bileşenlerinin kısmi türevleri sürekliyse $\mathbf{F}$ konservatiftir (Teorem 14.2).
3. **Potansiyeli bul.** $f_x = P$ eşitliğini x'e göre integralleyip $f = \int P\,dx + g(y,z)$ yaz. Bunu y'ye göre türevleyip Q ile karşılaştırarak g'yi belirle, sonra z'ye göre türevleyip R ile karşılaştırarak kalan fonksiyonu bul. Sonuca rastgele bir sabit eklenebilir.

Örnek 14.3 (Konservatif Olduğunun Gösterilmesi). Aşağıdaki alanın konservatif olduğunu gösteriniz:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}.$$

Çözüm.
Bileşenler $P = y^2z^3$, $Q = 2xyz^3$ ve $R = 3xy^2z^2$'dir. Rotasyonelin bileşenlerini (1) formülüyle hesaplayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 6xyz^2 - 6xyz^2 = 0,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 3y^2z^2 - 3y^2z^2 = 0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2yz^3 - 2yz^3 = 0.$$

Demek ki curl $\mathbf{F} = \mathbf{0}$'dır. $\mathbf{F}$ bütün $\mathbb{R}^3$'te tanımlıdır ve bileşenleri polinom olduğundan kısmi türevleri süreklidir. Teorem 14.2 gereği $\mathbf{F}$ konservatiftir.
■

Örnek 14.4 (Potansiyel Fonksiyonun Bulunması). Örnek 14.3 içindeki

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$$

alanı için $\mathbf{F} = \nabla f$ olacak bir f fonksiyonu bulunuz.

Çözüm.
$\nabla f = \mathbf{F}$ eşitliği bileşenlerde şu üç denklemi verir:

$$f_x(x,y,z) = y^2z^3, \tag{3}$$

$$f_y(x,y,z) = 2xyz^3, \tag{4}$$

$$f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2. \tag{5}$$

Önce (3) eşitliğini x'e göre integralleyelim. y ve z sabit tutulduğundan integral sabiti y ile z'ye bağlı olabilir:

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + g(y,z).$$

Bunu y'ye göre türevlersek $f_y = 2xyz^3 + g_y(y,z)$ olur. (4) ile karşılaştırınca $g_y(y,z) = 0$ bulunur, yani g yalnız z'ye bağlıdır: $g(y,z) = h(z)$. Şimdi

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + h(z), \qquad f_z(x,y,z) = 3xy^2z^2 + h'(z)$$

olur. (5) ile karşılaştırınca $h'(z) = 0$, yani $h(z) = K$ sabittir. Sonuç olarak

$$f(x,y,z) = xy^2z^3 + K$$

bulunur. Gerçekten

$$\nabla(xy^2z^3) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k} = \mathbf{F}$$

olur. Aynı sonucu Teorem 14.2 ispatındaki formül de verir. $P(t,0,0) = 0$ ve $Q(x,t,0) = 0$ olduğundan

$$f(x,y,z) = 0 + 0 + \int_0^z 3xy^2t^2\,dt = xy^2z^3$$

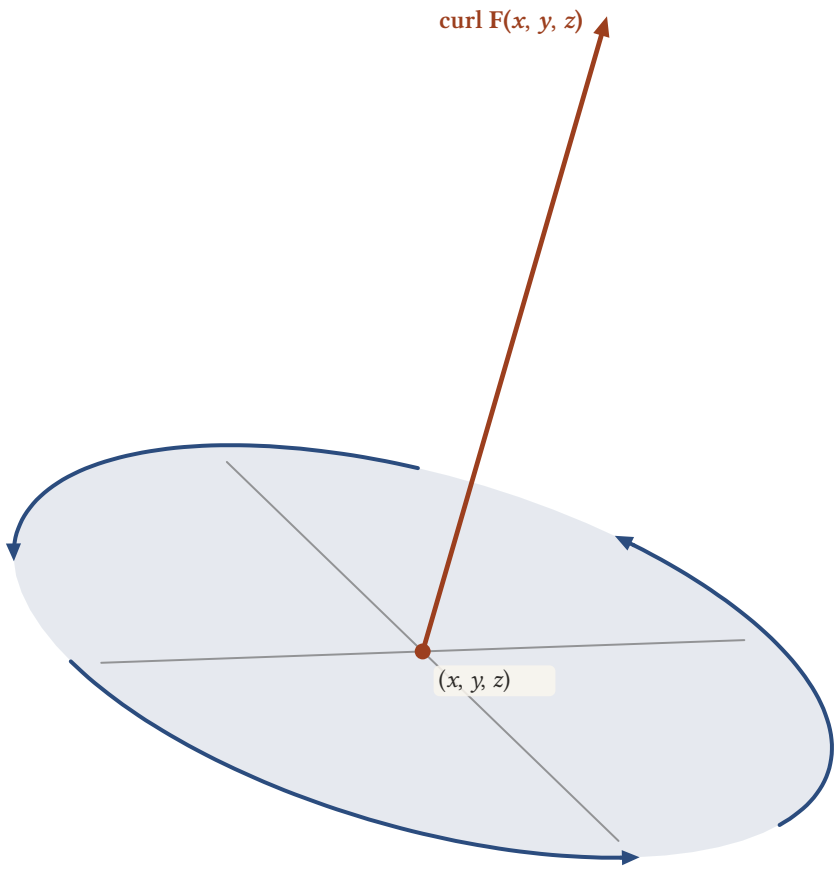
olur.
■

14.3 Rotasyonelin Fiziksel Anlamı

Rotasyonel ("dönmeyle ilgili") ve curl ("kıvrılma") adları, bu vektörün dönme hareketiyle ilişkisinden gelir. İlişkiyi bir akışkan üzerinden anlatalım.
$\mathbf{F}$ bir akışkanın hız alanı olsun; yani her noktada $\mathbf{F}$, o noktadaki akışkan parçacığının hız vektörü olsun. (x,y,z) noktasının yakınındaki parçacıklar, curl $\mathbf{F}(x,y,z)$ vektörü doğrultusundaki eksen etrafında dönme eğilimindedir. Dönme yönü sağ el kuralıyla belirlenir: sağ elin başparmağı curl $\mathbf{F}$ yönünü göste-

 CC BY-NC-SA 4.0

rirse öteki parmaklar dönme yönünde kıvrılır. Başka bir deyişle, vektörün ucundan bakıldığında dönme saatin tersi yönündedir. curl $\mathbf{F}$'nin uzunluğu ise dönmenin ne kadar hızlı olduğunu ölçer. Örneğin sabit ω açısal hızıyla dönen bir cismin hız alanının rotasyoneli, dönme ekseni doğrultusunda ve uzunluğu 2ω olan bir vektördür (bkz. Alıştırma 14.12).



Şekil 14.2: Hız alanı $\mathbf{F}$ olan bir akışkanda (x, y, z) noktasının yakınındaki parçacıklar, curl $\mathbf{F}(x, y, z)$ doğrultusundaki eksen etrafında döner. Vektörün ucundan bakıldığında dönme saatin tersi yönündedir (sağ el kuralı); vektörün uzunluğu dönmenin hızını ölçer.

Bu yorumun düzlem akışları için gerekçesini bölümün sonunda (Sonuç 14.2), genel hâlini ise Stokes Teoremi bölümünde göreceğiz. Rotasyoneli sıfır olan noktalara özel bir ad verilir.

Tanım 14.2 (Dönmesiz Alan). $\mathbf{F}$ bir A noktasında $\operatorname{curl}\mathbf{F}(A) = \mathbf{0}$ sağlıyorsa $\mathbf{F}$'ye A noktasında **dönmesiz** (irrotational) denir. $\mathbf{F}$ bir kümenin her noktasında dönmesizse o kümede **dönmesiz alan** adını alır.

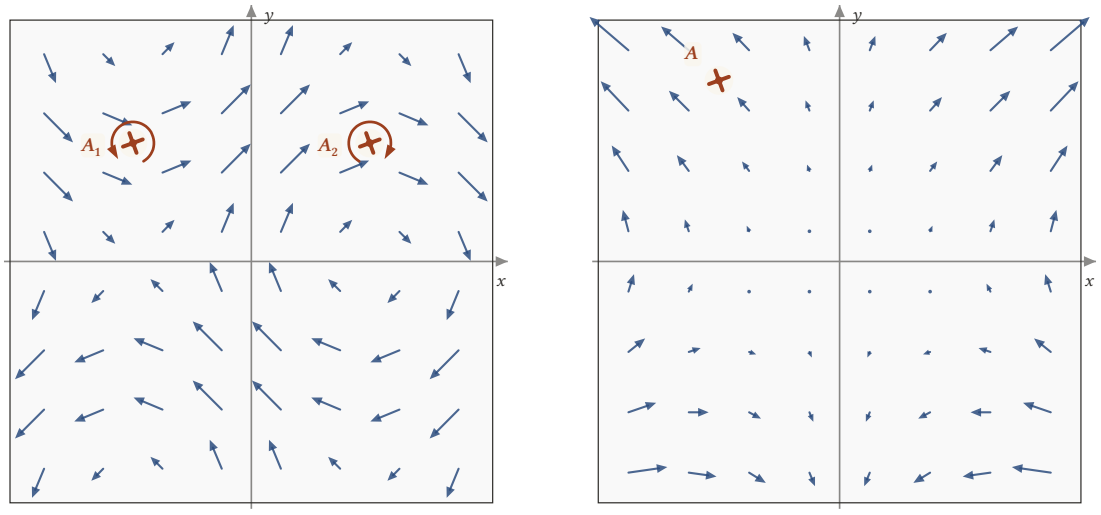
Yani dönmesiz bir akışta akışkan, noktaların çevresinde girdap yapmaz. Bunu akışkana bırakılan küçük bir kürekli çarkla düşünebiliriz. $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ olan yerde çark akışla birlikte sürüklenir ama kendi ekseni etrafında dönmez. $\operatorname{curl}\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ olan yerde ise ekseni etrafında döner. Teorem 14.1, ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan her fonksiyonun gradyan alanının dönmesiz olduğunu söyler.
Düzlemde akan bir akışkanı düşünelim: $\mathbf{F} = P(x,y)\,\mathbf{i} + Q(x,y)\,\mathbf{j}$ olsun, yani alan z'den bağımsız ve z-bileşeni 0 olsun. Bu durumda (1) formülünde $R = 0$ ve $\partial P/\partial z = \partial Q/\partial z = 0$ olduğundan

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

bulunur. Rotasyonel her yerde $\mathbf{k}$'ye paraleldir. $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y > 0$ olan yerde çark (yukarıdan bakınca) saatin tersi yönünde, negatif olan yerde saat yönünde döner.

 CC BY-NC-SA 4.0

Aşağıdaki şeklin (a) panelinde $\mathbf{F} = \sin y\,\mathbf{i} + \cos x\,\mathbf{j}$ için $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -(\sin x + \cos y)\,\mathbf{k}$'dir. $A_1 = (-\pi/2, \pi/2)$ noktasında $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -(-1+0)\,\mathbf{k} = \mathbf{k}$ olur. Oradaki akışkan sağa doğru akar, ama hızın düşey bileşeni $\cos x$, A_1'in solunda aşağı, sağında yukarı doğrudur; bu yüzden çark saatin tersi yönünde döner. $A_2 = (\pi/2, \pi/2)$ noktasında durum tersinedir: $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -\mathbf{k}$'dir ve çark saat yönünde döner. (b) panelindeki $\mathbf{F} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + y)\,\mathbf{j}$ alanı ise her yerde dönmesizdir, çünkü $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 2x - 2x = 0$'dır.



(a) $\mathbf{F} = \sin y\,\mathbf{i} + \cos x\,\mathbf{j}$, $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -(\sin x + \cos y)\,\mathbf{k}$ (b) $\mathbf{F} = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 + y)\,\mathbf{j}$, $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$

Şekil 14.3: İki düzlem akışı (alanlar z'den bağımsızdır, z-bileşenleri 0'dır). (a) $A_1 = (-\pi/2, \pi/2)$ noktasında $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{k}$ olduğundan buraya konan küçük çark saatin tersi yönünde, $A_2 = (\pi/2, \pi/2)$ noktasında $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -\mathbf{k}$ olduğundan saat yönünde döner. (b) Her yerde $\operatorname{curl}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ olduğundan A noktasındaki çark akışla birlikte sürüklenir ama kendi ekseni etrafında dönmez.

Akış çizgileri düz olsa bile alan dönmesiz olmayabilir. Aşağıdaki ısınma örneği bunu gösteriyor.

Örnek 14.5 (Kayma Akışı). Bir kanalda suyun hızı, bir kıyıdan uzaklaştıkça doğrusal olarak artsın: $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i}$, $y > 0$. Akışa bırakılan küçük bir çarkın hangi yönde döndüğünü bulunuz.

Çözüm.
Bileşenler $P = y$, $Q = 0$ ve $R = 0$'dır. (1) formülüyle

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = (0-0)\,\mathbf{i} + (0-0)\,\mathbf{j} + \left(0 - \frac{\partial y}{\partial y}\right)\mathbf{k} = -\mathbf{k}$$

bulunur. Rotasyonel sıfırdan farklı olduğundan çark döner. Rotasyonel $-\mathbf{k}$ yönünde olduğundan, sağ el kuralına göre çark yukarıdan bakınca saat yönünde döner. Bunun fiziksel nedeni açıktır: çarkın üst kanatlarına (daha büyük y) çarpan su, alt kanatlarına çarpandan daha hızlı sağa akar. Akış çizgileri düz doğrular olduğu hâlde alan hiçbir noktada dönmesiz değildir.
■

14.4 Diverjans

Rotasyonel bir vektör alanı üretiyordu. İkinci işlem ise bir vektör alanından skaler bir fonksiyon üretir.

Tanım 14.3 (Diverjans). $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, $\mathbb{R}^3$'ün açık bir E kümesinde tanımlı bir vektör alanı olsun ve $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ kısmi türevleri E'de var olsun.

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{6}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ile tanımlanan üç değişkenli fonksiyona $\mathbf{F}$'nin **diverjansı** denir. Düzlemdeki bir $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ alanının diverjansı da benzer biçimde, iki değişkenli $\operatorname{div}\,\mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ fonksiyonudur.

Yani diverjans, her bileşenin *kendi* değişkenine göre türevlerinin toplamıdır; bunlar tam da rotasyonelde yer almayan türevlerdir. Rotasyonel bir vektör alanı, diverjans ise skaler bir fonksiyondur. ∇ operatörüyle diverjans biçimsel bir iç çarpım olarak yazılır:

$$\operatorname{div}\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} \tag{7}$$

Gerçekten $\nabla \cdot \mathbf{F} = \dfrac{\partial}{\partial x}(P) + \dfrac{\partial}{\partial y}(Q) + \dfrac{\partial}{\partial z}(R)$ olur.

Örnek 14.6 (Bir Diverjans Hesabı). $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ alanının diverjansını bulunuz.

Çözüm.
Tanımdaki (6) formülüyle

$$\operatorname{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(-y^2) = z + xz$$

bulunur.
■

$\mathbf{F}$ bir vektör alanıysa $\operatorname{curl}\,\mathbf{F}$ de bir vektör alanıdır; bu yüzden onun diverjansını hesaplayabiliriz. Bileşenlerin ikinci mertebe kısmi türevleri sürekliyse sonuç her zaman sıfırdır.

Teorem 14.3 (Rotasyonelin Diverjansı). *$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, $\mathbb{R}^3$'ün açık bir E kümesinde tanımlı ve P, Q, R'nin ikinci mertebe kısmi türevleri E'de sürekli bir vektör alanı olsun. Bu durumda E üzerinde*

$$\operatorname{div}\,\operatorname{curl}\,\mathbf{F} = 0$$

olur.

İspat.
Diverjans ve rotasyonelin tanımlarından

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\,\operatorname{curl}\,\mathbf{F} &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y}\end{aligned}$$

bulunur. P, Q, R'nin ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli olduğundan Clairaut Teoremi'ne göre (bkz. Analiz 4) karışık türevler sıradan bağımsızdır:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 R}{\partial y\,\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial^2 Q}{\partial z\,\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial y}.$$

Böylece altı terim ikişer ikişer sadeleşir ve $\operatorname{div}\,\operatorname{curl}\,\mathbf{F} = 0$ *olur.*
■

Bu teorem, her $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ vektörü için geçerli olan $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ özdeşliğini andırır. Teorem 14.1 nasıl konservatif olmayan alanları ayırt etmeye yarıyorsa, bu teorem de bir alanın başka bir alanın rotasyoneli olamayacağını göstermeye yarar.

Örnek 14.7 (Rotasyonel Olamayan Bir Alan). $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + xyz\,\mathbf{j} - y^2\,\mathbf{k}$ alanının, bileşenlerinin ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan hiçbir $\mathbf{G}$ vektör alanının rotasyoneli olarak yazılamayacağını gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 14.6 içinde div $\mathbf{F} = z + xz$ bulduk. Örneğin $(0, 0, 1)$ noktasında div $\mathbf{F} = 1 \neq 0$'dır.
Bir $\mathbf{G}$ için $\mathbf{F} = \text{curl } \mathbf{G}$ olsaydı Teorem 14.3 gereği her noktada

$$\text{div } \mathbf{F} = \text{div curl } \mathbf{G} = 0$$

olurdu. Bu, div $\mathbf{F} \neq 0$ olmasıyla çelişir. Demek ki $\mathbf{F}$ başka bir vektör alanının rotasyoneli değildir.
■

14.5 Diverjansın Fiziksel Anlamı

Diverjans (divergence: ıraksama, dağılma) adı da akışkanlar üzerinden anlaşılır.
$\mathbf{F}(x, y, z)$ bir akışkanın (sıvı ya da gaz) hızı olsun. Bu durumda div $\mathbf{F}(x, y, z)$, (x, y, z) noktasının çevresinden birim zamanda, birim hacim başına dışarı çıkan net akışkan miktarıdır. Başka bir deyişle diverjans, akışkanın o noktadan dağılma eğilimini ölçer. Pozitifse noktanın çevresinden çıkan akışkan girenden fazladır, negatifse giren fazladır.
Bunu kabaca görmek için kenarları Δx, Δy, Δz olan küçük bir kutu düşünelim. Kutunun x eksenine dik bir yüzünden birim zamanda geçen akışkan hacmi yaklaşık olarak hızın o yüze dik bileşeni ile yüzün alanının çarpımıdır. Sağdaki yüzden $P(x + \Delta x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z$ kadar akışkan çıkar, soldaki yüzden $P(x, y, z)\,\Delta y\,\Delta z$ kadar girer. Bu iki yüzün net katkısı

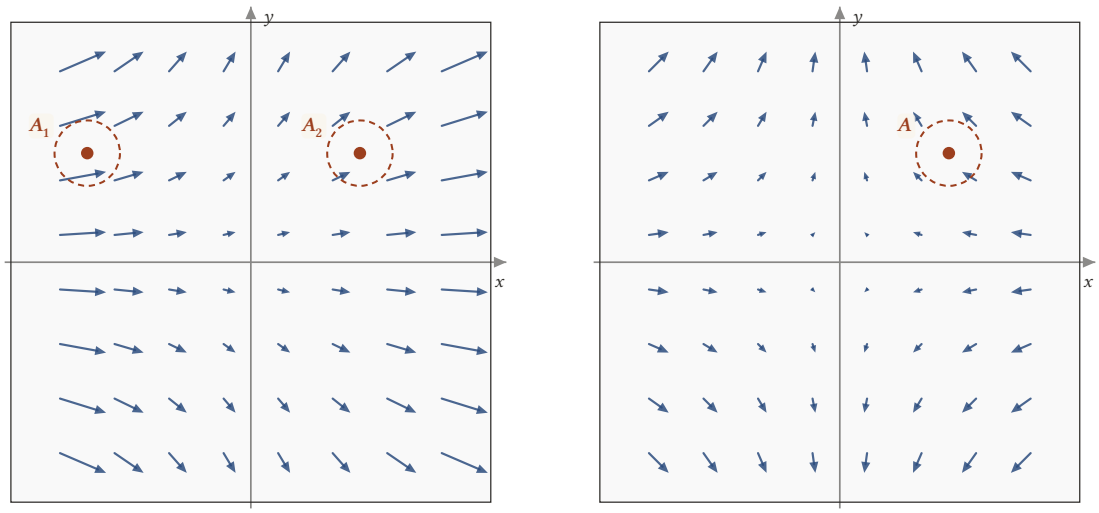
$$\big[\, P(x + \Delta x, y, z) - P(x, y, z) \,\big]\,\Delta y\,\Delta z \approx \frac{\partial P}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

olur. Öteki iki yüz çiftinin katkıları da $\dfrac{\partial Q}{\partial y}\,\Delta V$ ve $\dfrac{\partial R}{\partial z}\,\Delta V$ olduğundan, kutudan birim zamanda çıkan net akışkan yaklaşık div $\mathbf{F}\,\Delta V$'dir. Bu yorumun düzlemdeki kesin biçimini bu bölümün sonunda (Sonuç 14.2), uzaydaki biçimini Diverjans Teoremi bölümünde göreceğiz.

Tanım 14.4 (Sıkıştırılamaz Alan). Bir kümenin her noktasında div $\mathbf{F} = 0$ ise $\mathbf{F}$'ye o kümede **sıkıştırılamaz** (incompressible) alan denir.

Yani sıkıştırılamaz bir akışta hiçbir noktanın çevresinde akışkan birikmez ya da seyrelmez; her küçük bölgeye ne kadar akışkan giriyorsa o kadarı çıkar. Teorem 14.3, bileşenlerinin ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan her alanın rotasyonelinin sıkıştırılamaz olduğunu söyler.
Aşağıdaki şeklin (a) panelinde $\mathbf{F} = (1 + x^2)\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ için div $\mathbf{F} = 2x + 1$'dir. $A_1 = (-1{,}5;\, 1)$ noktasında div $\mathbf{F} = -2 < 0$'dır. Orada hızın yatay bileşeni $1 + x^2$, x sıfıra yaklaştıkça küçülür; çevreye soldan giren oklar sağdan çıkanlardan uzundur ve net akış içeri doğrudur. $A_2 = (1, 1)$ noktasında ise div $\mathbf{F} = 3 > 0$'dır; çıkan oklar daha uzundur ve net akış dışarı doğrudur. (b) panelindeki $\mathbf{F} = -x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ alanı için div $\mathbf{F} = -1 + 1 = 0$'dır. Alan sıkıştırılamazdır: yatay yönde içeri giren akış, düşey yönde dışarı çıkan akışla tam olarak dengelenir.

 CC BY-NC-SA 4.0



(a) $\mathbf{F} = (1 + x^2)\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$
$\operatorname{div}\mathbf{F} = 2x + 1$

(b) $\mathbf{F} = -x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$
$\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$

Şekil 14.4: (a) $A_1 = (-1{,}5;\ 1)$ noktasında $\operatorname{div}\mathbf{F} = -2 < 0$: kesikli çemberin içine giren oklar çıkanlardan uzundur, net akış içeri doğrudur. $A_2 = (1,\ 1)$ noktasında $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3 > 0$: çıkan oklar daha uzundur, net akış dışarı doğrudur. (b) $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ her yerde; $A = (1,\ 1)$ çevresine giren ve çıkan akış dengededir.

14.6 Laplace Operatörü

Gradyanı ve diverjansı art arda uygulayınca, kısmi türevlerden tanıdığımız bir operatör ortaya çıkar. f, ikinci mertebe kısmi türevleri olan üç değişkenli bir fonksiyon ise

$$\operatorname{div}\,(\nabla f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

olur. Bu ifade f'nin Laplasyenidir (bkz. Analiz 4). Orada Δf diye yazılan bu ifadeyi vektör analizinde çoğunlukla $\nabla^2 f$ diye yazarız. Laplace operatörü de $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ ile gösterilir. $\nabla^2 f = 0$ denklemi Laplace denklemidir; bu denklemi sağlayan fonksiyonlar harmonik fonksiyonlardır (bkz. Analiz 4).

Örnek 14.8 (Bir Harmonik Fonksiyon). $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ fonksiyonunun harmonik olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Gradyan $\nabla f = 2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} - 4z\,\mathbf{k}$'dir. Diverjansını alırsak

$$\nabla^2 f = \operatorname{div}\,(\nabla f) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(-4z) = 2 + 2 - 4 = 0$$

bulunur. Demek ki f Laplace denklemini sağlar, yani harmoniktir. Buna göre ∇f alanı hem dönmesizdir (Teorem 14.1) hem de sıkıştırılamazdır.
■

Laplace operatörü bir vektör alanına da bileşen bileşen uygulanabilir.

Tanım 14.5 (Vektör Alanının Laplasyeni). $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ ve P, Q, R'nin ikinci mertebe kısmi türevleri var olsun.

$$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^2 P\,\mathbf{i} + \nabla^2 Q\,\mathbf{j} + \nabla^2 R\,\mathbf{k}$$

vektör alanına $\mathbf{F}$'nin **Laplasyeni** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani bir vektör alanının Laplasyeni, her bileşenin ayrı ayrı Laplasyeni alınarak bulunur ve yine bir vektör alanıdır.

14.7 İşlemlerin Bileşkeleri

Gradyan, rotasyonel, diverjans ve Laplasyen art arda uygulanırken her işlemin neye uygulandığına dikkat etmek gerekir. Bunu bir tabloda toplayalım.

İşlem	Neye uygulanır	Sonuç
∇f (gradyan)	skaler fonksiyon	vektör alanı
$\nabla \times \mathbf{F}$ (rotasyonel)	vektör alanı	vektör alanı
$\nabla \cdot \mathbf{F}$ (diverjans)	vektör alanı	skaler fonksiyon
$\nabla^2 f$ (Laplasyen)	skaler fonksiyon	skaler fonksiyon

Bir bileşkenin anlamlı olup olmadığına bu tabloyla karar verilir. Örneğin $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F})$ anlamlıdır ve bir vektör alanıdır. Buna karşılık $\operatorname{curl} f$, $\operatorname{div} f$ ve $\operatorname{div}(\operatorname{div}\mathbf{F})$ anlamsızdır, çünkü rotasyonel ve diverjans yalnız vektör alanlarına uygulanır. Gerekli türevler sürekli olduğunda iki bileşke her zaman sıfırdır:

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}, \qquad \operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F}) = 0.$$

İlki Teorem 14.1, ikincisi Teorem 14.3 ile ispatlandı.

14.8 Green Teoreminin Vektör Biçimleri

Rotasyonel ve diverjans, Green Teoremi'ni (Teorem 13.1) vektör diliyle iki farklı biçimde yazmamıza izin verir. Bu biçimler ileride uzaya taşınacak ve Stokes ile diverjans teoremlerine dönüşecek.
Bu kısım boyunca D düzlemde bir bölge, C onun pozitif yönlü sınır eğrisi, P ve Q da Green Teoremi'nin varsayımlarını sağlayan fonksiyonlar olsun. $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ alanını, üçüncü bileşeni 0 olan bir uzay alanı olarak düşünürsek

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

olur, dolayısıyla

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

bulunur. Bu, Green Teoremi'ndeki iki katlı integralin integrandıdır.

Teorem 14.4 (Green Teoreminin Teğet Biçimi). *Yukarıdaki varsayımlar altında, $\mathbf{T}$ eğrinin birim teğet vektörü olmak üzere*

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_D (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA \tag{8}$$

olur.

> ***İspat.***
> *Birinci eşitlik, bir vektör alanının eğrisel integralinin teğet bileşen cinsinden yazılışıdır (bkz. Tanım 11.6). Ayrıca $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ için $\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t) = P\,x'(t) + Q\,y'(t)$ olduğundan*
>
> $$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$
>
> *yazılabilir. Green Teoremi'ne göre bu integral $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$'ya eşittir. Yukarıda integrandın $(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}$ olduğunu gördük; (8) elde edilir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Yani $\mathbf{F}$'nin teğet bileşeninin C boyunca integrali, curl $\mathbf{F}$'nin düşey bileşeninin C'nin çevrelediği D bölgesi üzerindeki iki katlı integraline eşittir. Teğet bileşenin kapalı eğri boyunca integrali, $\mathbf{F}$'nin C etrafındaki dolanımı diye de adlandırılır.
Şimdi teğet bileşen yerine normal bileşenle benzer bir formül türetelim. Bunun için önce eğrinin dışarıyı gösteren normalini tanımlayalım. C, $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$, $a \le t \le b$ ile verilsin ve $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ olsun. Birim teğet vektör

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\ \mathbf{r}'(t)\ |}\,\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\ \mathbf{r}'(t)\ |}\,\mathbf{j}$$

olur.

Tanım 14.6 (Dış Birim Normal). Yukarıdaki gösterimle

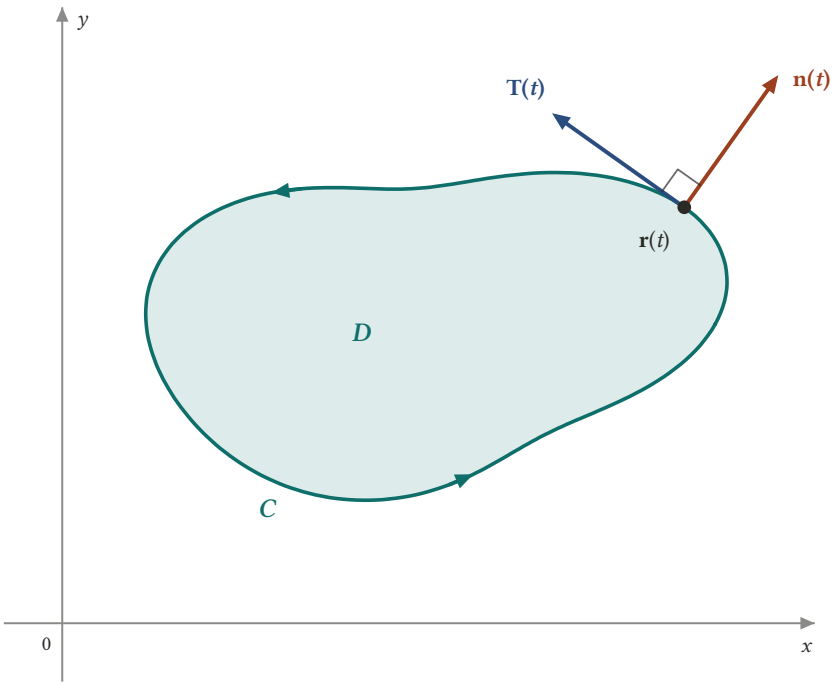
$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\ \mathbf{r}'(t)\ |}\,\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\ \mathbf{r}'(t)\ |}\,\mathbf{j}$$

vektörüne C'nin $\mathbf{r}(t)$ noktasındaki **dış birim normali** denir.

Yani $\mathbf{n}$, $\mathbf{T}$'yi saat yönünde 90° döndürerek elde edilir. Gerçekten $|\ \mathbf{n}\ | = |\ \mathbf{T}\ | = 1$ ve

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = \frac{y'\,x' - x'\,y'}{|\ \mathbf{r}'\ |^2} = 0$$

olur. C pozitif yönde dolaşılırken D hep solda kalır; $\mathbf{T}$'yi saat yönünde döndürmek sağa, yani D'nin dışına bakmak demektir. Örneğin birim çember $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$ için $\mathbf{n}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} = \mathbf{r}(t)$ bulunur ve bu vektör gerçekten merkezden dışarı bakar.



Şekil 14.5: C pozitif yönde (D solda kalacak biçimde) dolaşılır. $\mathbf{T}(t)$ birim teğet vektördür; $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{T}(t)$'nin saat yönünde 90° döndürülmesiyle elde edilir ve D'nin dışını gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 14.5 (Green Teoreminin Normal Biçimi). *Yukarıdaki varsayımlar altında,* $\mathbf{n}$ *dış birim normal olmak üzere*

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}(x,y)\,dA \tag{9}$$

olur.

İspat.
C parçalı düzgünse $\mathbf{n}$ her düzgün parçada tanımlıdır; tanımsız kaldığı köşeler sonlu sayıda noktadır ve integrali etkilemez. Eğrisel integraller parçalar üzerindeki integrallerin toplamı olduğundan aşağıdaki hesap her düzgün parçada ayrı ayrı yapılıp sonuçlar toplanır. Gösterimi sade tutmak için hesabı C tek bir düzgün parçaymış gibi yazıyoruz.
Yay uzunluğuna göre eğrisel integral $ds = |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt$ ile hesaplanır (bkz. Tanım 11.1). $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ çarpımını tanımdaki $\mathbf{n}$ ile açalım:

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \int_a^b \big(\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\big)(t)\,|\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{P(x(t),y(t))\,y'(t)}{|\,\mathbf{r}'(t)\,|} - \frac{Q(x(t),y(t))\,x'(t)}{|\,\mathbf{r}'(t)\,|}\right] |\,\mathbf{r}'(t)\,|\,dt \\
&= \int_a^b \Big[\,P(x(t),y(t))\,y'(t) - Q(x(t),y(t))\,x'(t)\,\Big]\,dt \\
&= \oint_C (-Q)\,dx + P\,dy.
\end{aligned}$$

$-Q$ ve P fonksiyonları da Green Teoremi'nin varsayımlarını sağlar. Teoremi bu çifte uygularsak

$$\oint_C (-Q)\,dx + P\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y}\right]dA = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dA$$

bulunur. Son integrand $\operatorname{div}\mathbf{F}$*'dir; (9) elde edilir.*
■

Yani $\mathbf{F}$'nin normal bileşeninin C boyunca integrali, diverjansın D üzerindeki iki katlı integraline eşittir. $\mathbf{F}$ bir akışkanın hız alanıysa sol taraf, akışkanın C'den birim zamanda dışarı çıkan net miktarıdır.

Örnek 14.9 (Normal Biçimin Doğrulanması). $\mathbf{F}(x,y) = x^3\,\mathbf{i} + y^3\,\mathbf{j}$ alanı, D birim daire bölgesi ve C pozitif yönlü birim çember için (9) formülünün iki tarafını ayrı ayrı hesaplayarak eşit olduklarını doğrulayınız.

Çözüm.
Sol taraf. C'yi $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ ile parametrelendirelim. $|\,\mathbf{r}'(t)\,| = 1$ olduğundan $ds = dt$ ve $\mathbf{n}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$'dir. Buna göre

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \cos^3 t\cdot\cos t + \sin^3 t\cdot\sin t = \cos^4 t + \sin^4 t$$

olur. Bu ifadeyi sadeleştirelim:

$$\begin{aligned}
\cos^4 t + \sin^4 t &= (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t \\
&= 1 - \frac{1-\cos 4t}{4} = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4}.
\end{aligned}$$

$\cos 4t$'nin $[0,2\pi]$ üzerindeki integrali 0 olduğundan

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4}\right)dt = \frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur.
Sağ taraf. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2$'dir. Kutupsal koordinatlara geçersek (Teorem 3.1) $3x^2 + 3y^2 = 3r^2$ ve $dA = r\,dr\,d\theta$ olur:

$$\iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

İki taraf eşittir. Bu alanın dolanımı ise sıfırdır: $(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = 0 - 0 = 0$ olduğundan (8) formülünün sağ tarafı 0'dır.
■

İki vektör biçimi, rotasyonel ve diverjans için verdiğimiz fiziksel yorumları düzlemde kesinleştirir. Bir noktanın çevresindeki çok küçük dairelerde birim alan başına dolanım rotasyonele, birim alan başına dışarı akış da diverjansa yaklaşır.

Sonuç 14.2 (Rotasyonel ve Diverjansın Yoğunluk Yorumu). *$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ olsun ve P, Q'nun birinci mertebe kısmi türevleri (x_0, y_0) noktasını içeren açık bir kümede sürekli olsun. D_ε merkezi (x_0, y_0), yarıçapı ε olan kapalı daire bölgesi, C_ε onun pozitif yönlü sınır çemberi ise*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = (\operatorname{curl}\mathbf{F})(x_0,y_0)\cdot\mathbf{k}$$

ve

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \operatorname{div}\mathbf{F}(x_0,y_0)$$

olur.

İspat.
$g = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ diyelim; g süreklidir ve $g = (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}$'dir. ε yeterince küçükken D_ε açık kümenin içinde kalır. D_ε'un alanı $A = \pi\varepsilon^2$ olmak üzere (8) formülünden

$$\frac{1}{A}\oint_{C_\varepsilon}\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \frac{1}{A}\iint_{D_\varepsilon} g\,dA$$

olur. Alan özelliğine göre $\iint_{D_\varepsilon} 1\,dA = A$ olduğundan (bkz. Önerme 2.1) $g(x_0,y_0) = \frac{1}{A}\iint_{D_\varepsilon} g(x_0,y_0)\,dA$ yazabiliriz. M_ε, $|\,g(x,y) - g(x_0,y_0)\,|$ değerinin D_ε üzerindeki en büyük değeri olsun; g kapalı ve sınırlı D_ε üzerinde sürekli olduğundan bu değer vardır. D_ε üzerinde $-M_\varepsilon \le g - g(x_0,y_0) \le M_\varepsilon$ olduğundan, sınırlama özelliğiyle (bkz. Önerme 2.1)

$$-M_\varepsilon A \le \iint_{D_\varepsilon} \big(\,g - g(x_0,y_0)\,\big)\,dA \le M_\varepsilon A$$

olur. Lineerlikle ortadaki integral $\iint_{D_\varepsilon} g\,dA - A\,g(x_0,y_0)$'dır. Eşitsizliği A'ya bölersek

$$\left|\frac{1}{A}\iint_{D_\varepsilon} g\,dA - g(x_0,y_0)\right| \le M_\varepsilon$$

bulunur. g, (x_0,y_0)'da sürekli olduğundan $\varepsilon\to 0^+$ iken $M_\varepsilon \to 0$'dır; birinci limit elde edilir. İkinci limit aynı biçimde, g yerine $\operatorname{div}\mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$ alınıp (9) formülü kullanılarak elde edilir.
■

Yani $(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}$ bir noktadaki "dolanım yoğunluğu", $\operatorname{div}\mathbf{F}$ de "dışarı akış yoğunluğu" gibi davranır. Örneğin sabit ω açısal hızıyla dönen bir akışkanda, dönme merkezi çevresindeki ε yarıçaplı çember üzerinde hız çembere teğettir ve büyüklüğü $\omega\varepsilon$'dur. Dolanım $\omega\varepsilon\cdot 2\pi\varepsilon$ olur ve bunu $\pi\varepsilon^2$ alanına bölünce 2ω bulunur. Bu, rotasyonelin açısal hızın iki katı olduğunu bir kez daha gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0

14.9 Alıştırmalar

Alıştırma 14.1 (Rotasyonelin Hesabı). Aşağıdaki alanın rotasyonelini bulunuz:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xye^z\,\mathbf{i} + yze^x\,\mathbf{k}.$$

Çözüm.
Bileşenler $P = xye^z$, $Q = 0$ ve $R = yze^x$'tir. (1) formülündeki farkları tek tek hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= ze^x - 0 = ze^x,\\
\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= xye^z - yze^x,\\
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 - xe^z = -xe^z.
\end{aligned}$$

Buna göre

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = ze^x\,\mathbf{i} + (xye^z - yze^x)\,\mathbf{j} - xe^z\,\mathbf{k}$$

bulunur.
■

Alıştırma 14.2 (Diverjansın Hesabı). Aşağıdaki alanın diverjansını bulunuz:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xye^z\,\mathbf{i} + yze^x\,\mathbf{k}.$$

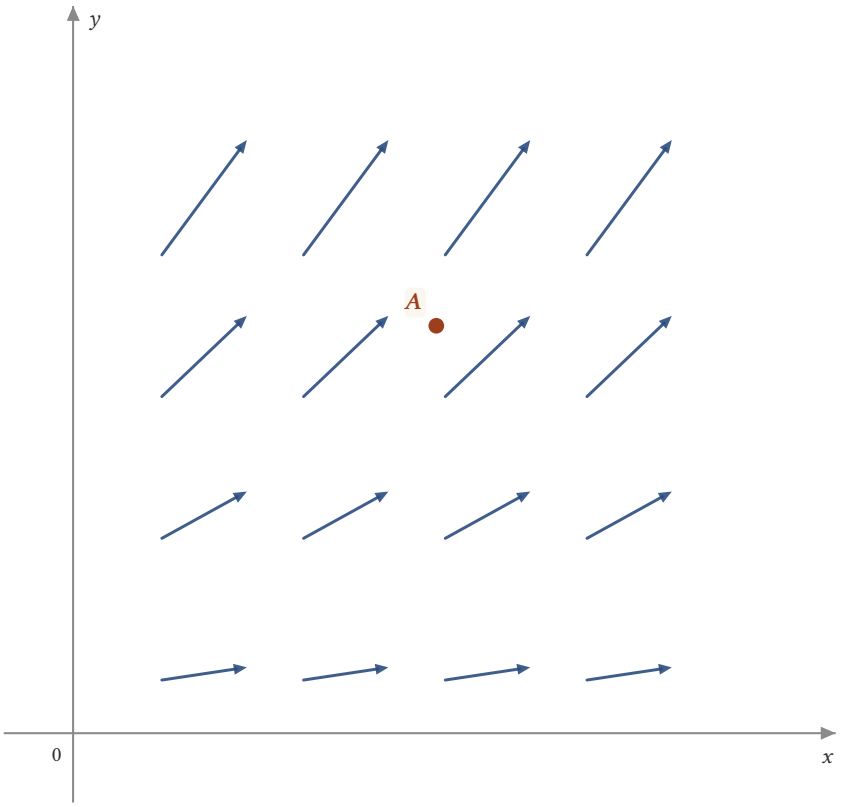
Çözüm.
Bileşenler $P = xye^z$, $Q = 0$ ve $R = yze^x$'tir. (6) formülüyle

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xye^z) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(yze^x) = ye^z + 0 + ye^x = y\left(e^z + e^x\right)$$

bulunur.
■

Alıştırma 14.3 (Şekilden Diverjansın İşareti). Aşağıda bir $\mathbf{F}$ vektör alanının xy-düzlemindeki kısmı çizilmiştir. Alan z'den bağımsızdır ve z-bileşeni 0'dır. A noktasında $\operatorname{div}\mathbf{F}$ pozitif mi, negatif mi, yoksa sıfır mıdır?

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.6: Alanın xy-düzlemindeki kısmı. Alan z'den bağımsızdır ve z-bileşeni 0'dır.

Çözüm.
$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ yazalım. z-bileşeni 0 olduğundan div $\mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y$'dir. İki türevin işaretini şekilden okuyalım.
Yatay yönde. Her satırdaki oklar birbirinin aynısıdır; yani x değişirken ne P ne de Q değişir. Bu yüzden $\partial P/\partial x = 0$'dır.
Düşey yönde. Bir sütunda yukarı çıktıkça okların yatay bileşenleri aynı kalır, düşey bileşenleri büyür. Yani Q, y arttıkça artar ve $\partial Q/\partial y > 0$'dır.
Buna göre A noktasında div $\mathbf{F} = 0 + \partial Q/\partial y > 0$, yani diverjans pozitiftir. Fiziksel olarak, A'nın çevresinden yukarı doğru çıkan oklar aşağıdan girenlerden uzundur ve net akış dışarı doğrudur. Gerçekten şekildeki alan $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}y\,\mathbf{j}$'dir ve div $\mathbf{F} = \frac{1}{2}$ olur.
■

Alıştırma 14.4 (Şekilden Rotasyonelin Yönü). Şekli Alıştırma 14.3 içinde verilen $\mathbf{F}$ alanı için A noktasında curl $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ mıdır? Değilse curl $\mathbf{F}$ hangi yönü gösterir?

Çözüm.
Alan z'den bağımsız ve z-bileşeni 0 olduğundan curl $\mathbf{F} = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\mathbf{k}$'dir. İki türevi şekilden okuyalım.
∂Q/∂x. Her satırdaki oklar aynıdır; sağa gidildikçe düşey bileşen değişmez. Bu yüzden $\partial Q/\partial x = 0$'dır.
∂P/∂y. Bütün okların yatay bileşeni aynıdır; yukarı çıkınca yatay bileşen değişmez. Bu yüzden $\partial P/\partial y = 0$'dır.
Sonuç olarak A noktasında curl $\mathbf{F} = (0-0)\,\mathbf{k} = \mathbf{0}$'dır. A'ya konan bir çarkın iki yanındaki akışkan aynı yatay hızla akar ve düşey hız da x ile değişmez; çark sürüklenir ama dönmez. Şekildeki $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}y\,\mathbf{j}$ alanı için gerçekten $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 0 - 0 = 0$'dır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 14.5 (Rotasyonelin Diverjansının Doğrulanması). Aşağıdaki alan için div curl $\mathbf{F} = 0$ olduğunu doğrudan hesaplayarak doğrulayınız:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^2\,\mathbf{i} + x^2yz^3\,\mathbf{j} + y^2z\,\mathbf{k}.$$

Çözüm.
Bileşenler $P = xyz^2$, $Q = x^2yz^3$ ve $R = y^2z$'dir. Gereken kısmi türevler

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 2yz,\ \frac{\partial Q}{\partial z} = 3x^2yz^2,\ \frac{\partial P}{\partial z} = 2xyz,$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xyz^3,\quad \frac{\partial P}{\partial y} = xz^2$$

olduğundan

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = (2yz - 3x^2yz^2)\,\mathbf{i} + 2xyz\,\mathbf{j} + (2xyz^3 - xz^2)\,\mathbf{k}$$

bulunur. Şimdi bu alanın diverjansını alalım:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(2yz - 3x^2yz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(2xyz^3 - xz^2)\\ &= -6xyz^2 + 2xz + 6xyz^2 - 2xz = 0.\end{aligned}$$

Teorem 14.3 ile uyumlu olarak sonuç sıfırdır.
■

Alıştırma 14.6 (Bir Potansiyel Fonksiyon). Aşağıdaki alan için $\mathbf{F} = \nabla f$ olacak bir f fonksiyonu var mıdır? Varsa bulunuz.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^z\cos x\,\mathbf{i} + e^y\cos z\,\mathbf{j} + (e^z\sin x - e^y\sin z)\,\mathbf{k}$$

Çözüm.
Adım 1: Rotasyonel. $P = e^z\cos x$, $Q = e^y\cos z$, $R = e^z\sin x - e^y\sin z$ için

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = -e^y\sin z - (-e^y\sin z) = 0,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = e^z\cos x - e^z\cos x = 0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

olduğundan curl $\mathbf{F} = \mathbf{0}$'dır. $\mathbf{F}$ bütün $\mathbb{R}^3$'te tanımlıdır ve bileşenlerinin kısmi türevleri süreklidir. Teorem 14.2 gereği $\mathbf{F}$ konservatiftir, yani böyle bir f vardır.
Adım 2: Potansiyel. $f_x = e^z\cos x$ eşitliğini x'e göre integrallersek $f = e^z\sin x + g(y, z)$ bulunur. y'ye göre türevlersek $f_y = g_y(y, z)$ olur ve bu $Q = e^y\cos z$'ye eşit olmalıdır. y'ye göre integrallersek

$$g(y, z) = e^y\cos z + h(z)$$

bulunur. Şimdi $f = e^z\sin x + e^y\cos z + h(z)$'dir ve

$$f_z = e^z\sin x - e^y\sin z + h'(z)$$

olur. Bunu R ile karşılaştırınca $h'(z) = 0$, yani $h(z) = K$ sabittir. Sonuç olarak

$$f(x, y, z) = e^z\sin x + e^y\cos z + K$$

bulunur. Kontrol edelim:

$$\nabla f = e^z\cos x\,\mathbf{i} + e^y\cos z\,\mathbf{j} + (e^z\sin x - e^y\sin z)\,\mathbf{k} = \mathbf{F}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 14.7 (Rotasyoneli Verilen Alan). $\mathbb{R}^3$'te bileşenlerinin ikinci mertebe kısmi türevleri sürekli olan ve

$$\operatorname{curl} \mathbf{G} = x \sin y\, \mathbf{i} + \cos y\, \mathbf{j} + (z - xy)\, \mathbf{k}$$

eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{G}$ vektör alanı var mıdır?

Çözüm.
Sağ taraftaki alana $\mathbf{H}$ diyelim. Böyle bir $\mathbf{G}$ varsa Teorem 14.3 gereği her noktada $\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{G} = 0$ olmalıdır. Oysa

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial x}(x \sin y) + \frac{\partial}{\partial y}(\cos y) + \frac{\partial}{\partial z}(z - xy) = \sin y - \sin y + 1 = 1$$

bulunur. $\operatorname{div} \mathbf{H} = 1 \neq 0$ olduğundan böyle bir $\mathbf{G}$ alanı yoktur.
■

Alıştırma 14.8 (Ayrık Değişkenli Alanlar). f, g, h türevlenebilir tek değişkenli fonksiyonlar olsun. Aşağıdaki biçimdeki her alanın dönmesiz olduğunu gösteriniz:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\, \mathbf{i} + g(y)\, \mathbf{j} + h(z)\, \mathbf{k}.$$

Çözüm.
Bileşenler $P = f(x)$, $Q = g(y)$ ve $R = h(z)$'dir. Her bileşen yalnız kendi değişkenine bağlıdır, dolayısıyla öteki iki değişkene göre kısmi türevleri sıfırdır:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0.$$

Rotasyonelde yalnız bu "çapraz" türevler geçtiğinden

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = (0 - 0)\, \mathbf{i} + (0 - 0)\, \mathbf{j} + (0 - 0)\, \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

bulunur. Demek ki $\mathbf{F}$ her noktada dönmesizdir (Tanım 14.2).
■

Alıştırma 14.9 (Çarpımın Diverjansı). f skaler bir fonksiyon, $\mathbf{F} = P\, \mathbf{i} + Q\, \mathbf{j} + R\, \mathbf{k}$ bir vektör alanı olsun ve gerekli kısmi türevler var olsun. $(f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\, \mathbf{F}(x, y, z)$ olmak üzere

$$\operatorname{div}\,(f\mathbf{F}) = f\, \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f\mathbf{F} = fP\, \mathbf{i} + fQ\, \mathbf{j} + fR\, \mathbf{k}$'dir. Her terime çarpımın türevi kuralını uygulayalım:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\,(f\mathbf{F}) &= \frac{\partial (fP)}{\partial x} + \frac{\partial (fQ)}{\partial y} + \frac{\partial (fR)}{\partial z} \\ &= \left(f \frac{\partial P}{\partial x} + P \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \left(f \frac{\partial Q}{\partial y} + Q \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \left(f \frac{\partial R}{\partial z} + R \frac{\partial f}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

f içeren terimleri ve kalanları ayrı ayrı toplarsak

$$\operatorname{div}\,(f\mathbf{F}) = f \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) + \left(P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Birinci parantez $\operatorname{div}\,\mathbf{F}$, ikinci parantez $\mathbf{F}\cdot\nabla f$'dir.
■

Alıştırma 14.10 (Konum Vektörünün Kuvvetleri). $\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ ve $r=|\,\mathbf{r}\,|$ olsun. Orijin dışında tanımlı $\mathbf{F}=\mathbf{r}/r^{p}$ alanının sıkıştırılamaz olmasını sağlayan p değerini bulunuz.

Çözüm.
Önce diverjansı genel p için hesaplayalım. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ olduğundan $\partial r/\partial x=x/r$'dir. $\mathbf{F}$'nin birinci bileşeni $x\,r^{-p}$'dir ve çarpım ile zincir kurallarıyla

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,r^{-p}\right)=r^{-p}+x\cdot(-p)\,r^{-p-1}\cdot\frac{x}{r}=r^{-p}-p\,x^{2}\,r^{-p-2}$$

olur. Öteki iki bileşen için aynı hesap $r^{-p}-p\,y^{2}\,r^{-p-2}$ ve $r^{-p}-p\,z^{2}\,r^{-p-2}$ verir. Toplarsak

$$\operatorname{div}\,\mathbf{F}=3\,r^{-p}-p\,(x^2+y^2+z^2)\,r^{-p-2}=3\,r^{-p}-p\,r^{-p}=\frac{3-p}{r^{p}}$$

bulunur. Bu ifade orijin dışındaki her noktada ancak $p=3$ için sıfırdır. Demek ki aranan değer $p=3$'tür. Bu durumda $\mathbf{F}=\mathbf{r}/r^{3}$, büyüklüğü uzaklığın karesiyle ters orantılı olan alandır; kütle çekim ve elektrik alanları bu biçimdedir ve orijin dışında sıkıştırılamazdır.
■

Alıştırma 14.11 (Green'in Birinci Özdeşliği). D ve C Green Teoremi'nin varsayımlarını sağlasın; f'nin birinci, g'nin ikinci mertebe kısmi türevleri D'yi içeren açık bir kümede sürekli olsun. Teorem 14.5 yardımıyla

$$\iint_{D} f\,\nabla^{2}g\,dA=\oint_{C} f\,(\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,ds-\iint_{D}\nabla f\cdot\nabla g\,dA$$

eşitliğini ispatlayınız.

Çözüm.
Normal biçimdeki (9) formülünü $f\,\nabla g=f g_x\,\mathbf{i}+f g_y\,\mathbf{j}$ alanına uygulayacağız. Bu alanın bileşenlerinin birinci mertebe kısmi türevleri süreklidir, dolayısıyla Green Teoremi'nin varsayımları sağlanır:

$$\oint_{C}(f\,\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,ds=\iint_{D}\operatorname{div}\,(f\,\nabla g)\,dA.$$

Sağdaki diverjansı Alıştırma 14.9 içindeki kuralın iki değişkenli hâliyle hesaplayalım ($\mathbf{F}=\nabla g$ alarak):

$$\operatorname{div}\,(f\,\nabla g)=f\,\operatorname{div}\,(\nabla g)+\nabla g\cdot\nabla f=f\,\nabla^{2}g+\nabla f\cdot\nabla g.$$

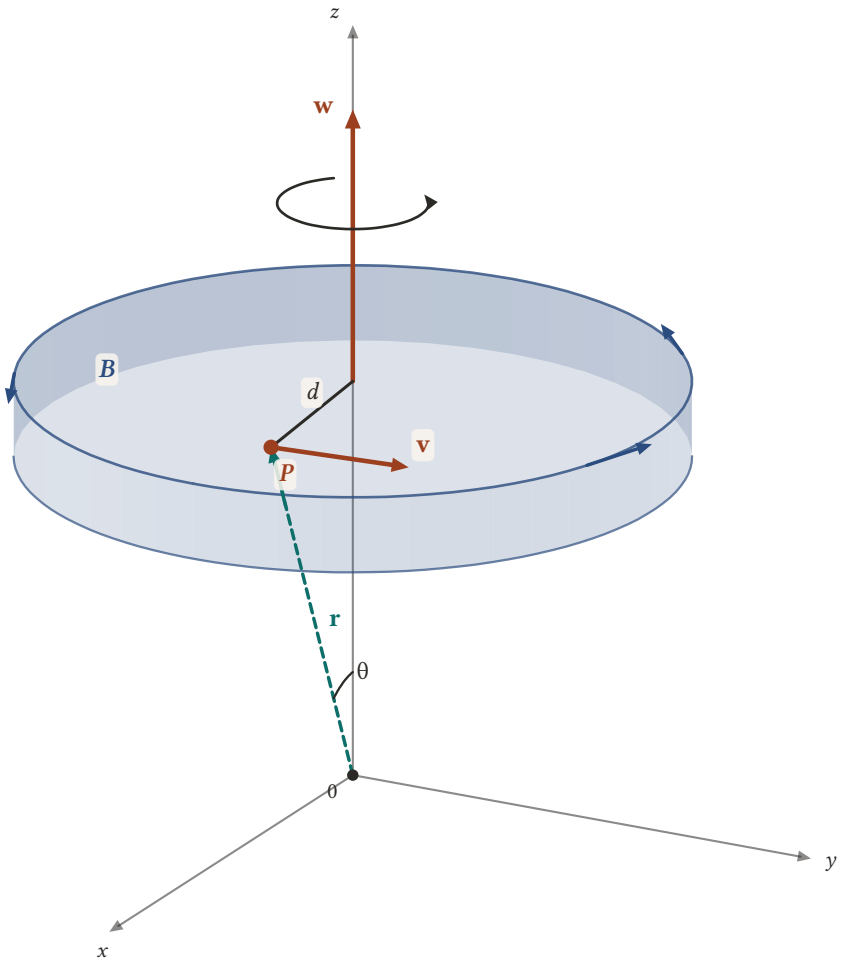
Bunu yerine yazarsak

$$\oint_{C} f\,(\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,ds=\iint_{D} f\,\nabla^{2}g\,dA+\iint_{D}\nabla f\cdot\nabla g\,dA$$

olur. Son integrali sol tarafa geçirince istenen eşitlik elde edilir. Buradaki $(\nabla g)\cdot\mathbf{n}$ çarpımı, g'nin $\mathbf{n}$ doğrultusundaki yönlü türevidir (bkz. Analiz 4); bu türeve g'nin normal türevi de denir.
■

Alıştırma 14.12 (Dönen Bir Cismin Hız Alanı). Rijit bir B cismi z ekseni etrafında sabit $\omega>0$ açısal hızıyla, yukarıdan bakınca saatin tersi yönünde dönüyor. Dönmeyi $\mathbf{w}=\omega\,\mathbf{k}$ vektörüyle gösterelim. B'nin bir P noktasının konum vektörü $\mathbf{r}=\langle x,y,z\rangle$, hızı $\mathbf{v}$ olsun. Hız alanının curl $\mathbf{v}=2\mathbf{w}$ sağladığını gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.7: B cismi z ekseni etrafında ω açısal hızıyla döner; $\mathbf{w} = \omega\mathbf{k}$. P noktasının eksene uzaklığı $d = |\mathbf{r}| \sin\theta$, hızı ise eksene ve $\mathbf{r}$'ye dik, büyüklüğü ωd olan $\mathbf{v}$ vektörüdür.

Çözüm.
Adım 1: $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$. P noktası, dönme ekseninden uzaklığı d olan bir çember üzerinde döner. θ, $\mathbf{r}$ ile z ekseni arasındaki açı ise $d = |\,\mathbf{r}\,| \sin\theta$'dır. Teğetsel hız, açısal hız ile eksene uzaklığın çarpımı olduğundan $|\,\mathbf{v}\,| = \omega d = \omega\,|\,\mathbf{r}\,|\sin\theta$ olur. Öte yandan $\mathbf{w} \times \mathbf{r}$ vektörünün uzunluğu $|\,\mathbf{w}\,||\,\mathbf{r}\,|\sin\theta = \omega\,|\,\mathbf{r}\,|\sin\theta$'dır. Bu vektör hem $\mathbf{k}$'ye hem de $\mathbf{r}$'ye diktir, yani P'nin çizdiği yatay çembere teğettir. Sağ el kuralına göre yönü, yukarıdan bakınca saatin tersi yönündeki dönmenin yönüdür. Uzunlukları ve yönleri aynı olduğundan $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}$'dir.
Adım 2: Bileşenler. Vektörel çarpımı determinantla hesaplayalım:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0 - \omega y)\,\mathbf{i} - (0 - \omega x)\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} = -\omega y\,\mathbf{i} + \omega x\,\mathbf{j}.$$

Adım 3: Rotasyonel. $\mathbf{v}$'nin bileşenleri $-\omega y$, ωx ve 0'dır. (1) formülünden

$$\operatorname{curl}\mathbf{v} = (0-0)\,\mathbf{i} + (0-0)\,\mathbf{j} + \big(\,\omega - (-\omega)\,\big)\mathbf{k} = 2\omega\,\mathbf{k} = 2\mathbf{w}$$

bulunur. Yani rijit bir dönmede hız alanının rotasyoneli dönme ekseni doğrultusundadır ve uzunluğu açısal hızın iki katıdır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu bölümde vektör alanları için iki türev işlemini, rotasyoneli ve diverjansı tanıdık. Rotasyonelin konservatifliği nasıl belirlediğini gördük ve Green Teoremi'ni bu işlemlerle iki vektör biçiminde yazdık. Bu biçimleri uzaya taşımak için önce eğrilerin yerini alacak yüzeyleri parametrik olarak tanımlamamız ve alanlarını hesaplamamız gerekiyor. Bu, sonraki bölümün konusudur: Parametrik Yüzeyler ve Alanları.

 CC BY-NC-SA 4.0

15. Parametrik Yüzeyler ve Alanları

Şimdiye kadar uzayda yalnız özel türden yüzeylerle çalıştık: düzlemler, silindirler, ikinci dereceden yüzeyler, $z = f(x, y)$ biçimindeki fonksiyon grafikleri ve $F(x, y, z) = k$ biçimindeki seviye yüzeyleri. Ama küre, simit biçimli torus ya da bir yay gibi kıvrılan bir tüp tek bir fonksiyonun grafiği olarak yazılamaz. Yüzey Alanı bölümündeki alan formülü de bu yüzden onlara doğrudan uygulanamaz.
Uzaydaki bir eğriyi tek parametreli bir $\mathbf{r}(t)$ vektör fonksiyonuyla anlatıyorduk: t değiştikçe $\mathbf{r}(t)$ vektörünün ucu eğriyi çizer. Bu bölümde aynı fikri iki parametreye taşıyacağız. İki parametreli bir $\mathbf{r}(u, v)$ vektör fonksiyonunun ucu bir yüzey tarar.
Önce yüzeyleri bu yolla tanımayı ve parametrelemeyi öğreneceğiz. Sonra parametrik bir yüzeyin teğet düzlemini ve alanını bulacağız. Alan formülünün, grafiklerin ve dönel yüzeylerin alanı için bildiğimiz formülleri özel hâl olarak içerdiğini de göreceğiz.

15.1 Parametrik Yüzeyler

Parametrik bir yüzeyi, düzlemdeki bir bölgenin bir vektör fonksiyonuyla uzaya taşınması olarak tanımlıyoruz.

Tanım 15.1 (Parametrik Yüzey). D, uv-düzleminde bir bölge ve

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}, \qquad (u, v) \in D$$

D üzerinde tanımlı bir vektör fonksiyonu olsun. (u, v) noktası D'yi tararken

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

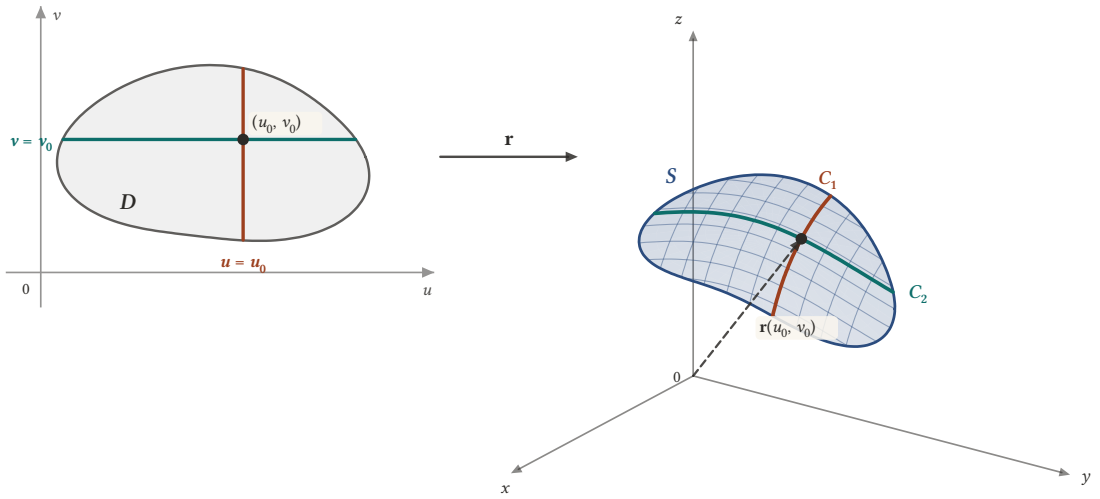
eşitlikleriyle elde edilen (x, y, z) noktalarının S kümesine $\mathbf{r}$ ile verilen **parametrik yüzey** (parametric surface) denir. Bu üç eşitliğe S'nin **parametrik denklemleri**, u ile v'ye **parametreler**, D'ye de **parametre bölgesi** denir.

Yani S, $\mathbf{r}(u, v)$ konum vektörünün ucunun çizdiği kümedir. Her $(u, v) \in D$ seçimi S üzerinde bir nokta verir; bütün seçimler birlikte S'nin tamamını verir. D'yi yüzeyin düz bir haritası gibi düşünebiliriz: $\mathbf{r}$, haritadaki her noktanın yüzeyde hangi noktaya karşılık geldiğini söyler.
Haritadaki düşey ve yatay doğruların yüzeydeki görüntüleri, bir yüzeyi tanımanın en kullanışlı aracıdır.

Tanım 15.2 (Koordinat Eğrileri). S, $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ ile verilen bir parametrik yüzey olsun. $u = u_0$ sabit tutulursa $v \mapsto \mathbf{r}(u_0, v)$ tek parametreli bir vektör fonksiyonudur ve S üzerinde bir C_1 eğrisi çizer. Aynı biçimde $v = v_0$ sabit tutulursa $u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0)$ fonksiyonu S üzerinde bir C_2 eğrisi çizer. Bu iki ailedeki eğrilere S'nin **koordinat eğrileri** (grid curves) denir.

Yani koordinat eğrileri, D'deki $u = u_0$ düşey doğrularının ve $v = v_0$ yatay doğrularının $\mathbf{r}$ altındaki görüntüleridir. Bilgisayarla çizilmiş bir yüzey resmindeki ağ çoğu zaman bu eğrilerden oluşur. Bir noktanın (u, v) parametrelerini vermek, coğrafyada bir yerin enlem ve boylamını vermeye benzer; bunu küre örneğinde açıkça göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.1: $\mathbf{r}$, uv-düzlemindeki D bölgesini uzaydaki S yüzeyine gönderir: (u_0, v_0) noktası, konum vektörü $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ olan noktaya gider. D'deki $u = u_0$ düşey doğrusunun görüntüsü C_1, $v = v_0$ yatay doğrusunun görüntüsü C_2 koordinat eğrisidir.

Önce parametrik denklemleri verilen bir yüzeyi tanıyalım.

Örnek 15.1 (Parametrik Denklemlerden Bir Silindir). Vektör denklemi

$$\mathbf{r}(u, v) = 2\cos u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + 2\sin u\,\mathbf{k}$$

olan yüzeyi belirleyiniz ve koordinat eğrilerini tanımlayınız.

Çözüm.
Yüzey. Parametrik denklemler

$$x = 2\cos u, \qquad y = v, \qquad z = 2\sin u$$

olduğundan her (u, v) için

$$x^2 + z^2 = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4$$

bulunur. Tersine, $x^2 + z^2 = 4$ eşitliğini sağlayan her (x, y, z) noktası yüzeydedir. Gerçekten (x, z), 2 yarıçaplı çemberin üzerinde olduğundan $x = 2\cos u$ ve $z = 2\sin u$ olan bir u açısı vardır; $v = y$ seçmek yeter. v üzerinde hiçbir kısıtlama olmadığından yüzey, ekseni y ekseni ve yarıçapı 2 olan dairesel silindirin tamamıdır.
Koordinat eğrileri. $u = u_0$ sabitken

$$\mathbf{r}(u_0, v) = \langle 2\cos u_0, v, 2\sin u_0 \rangle$$

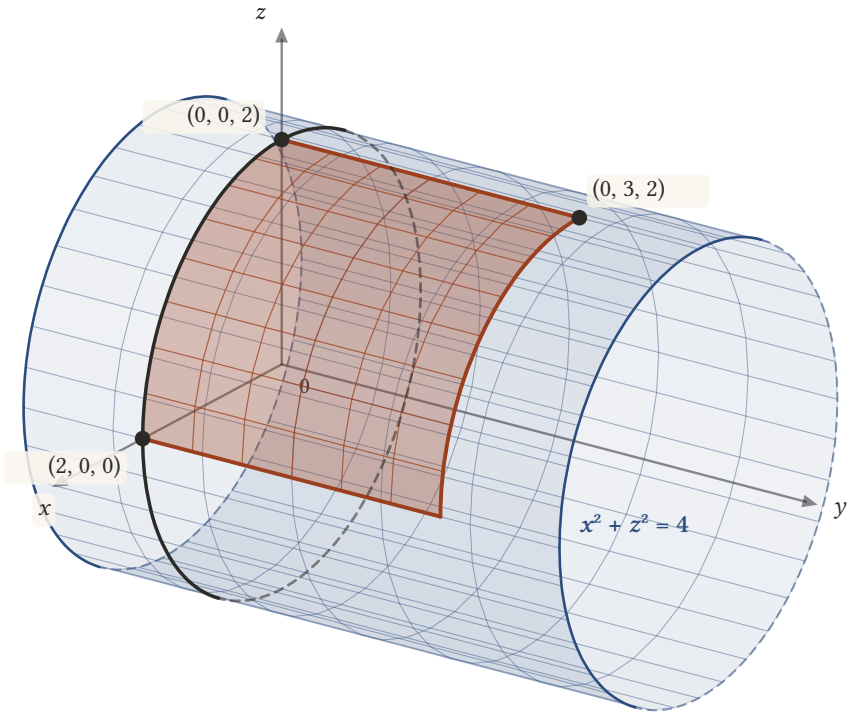
noktası, v değiştikçe y eksenine paralel bir doğru çizer. $v = v_0$ sabitken $\mathbf{r}(u, v_0)$ noktası $y = v_0$ düzleminde kalır ve merkezi $(0, v_0, 0)$ olan 2 yarıçaplı bir çember çizer. Örneğin $\mathbf{r}(0, 0) = (2, 0, 0)$ ve $\mathbf{r}(\pi/2, 0) = (0, 0, 2)$ noktaları $y = 0$ düzlemindeki çemberin üzerindedir.
■

Bu örnekte parametrelere hiçbir kısıtlama koymadığımız için silindirin tamamını elde ettik. Parametre bölgesini daraltarak yüzeyin yalnız bir parçasını alabiliriz. Örneğin

$$0 \le u \le \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \le v \le 3$$

alırsak $x = 2\cos u \ge 0$, $z = 2\sin u \ge 0$ ve $0 \le y \le 3$ olur. $\mathbf{r}$ bu dikdörtgeni, uzunluğu 3 olan bir çeyrek silindire gönderir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.2: $x^2 + z^2 = 4$ silindirinin bir parçası (açık) ve $0 \le u \le \pi/2$, $0 \le v \le 3$ parametre bölgesinin görüntüsü olan çeyrek silindir (koyu). Siyah çember, $v = 0$ koordinat eğrisidir; (2, 0, 0) ve (0, 0, 2) noktalarından geçer.

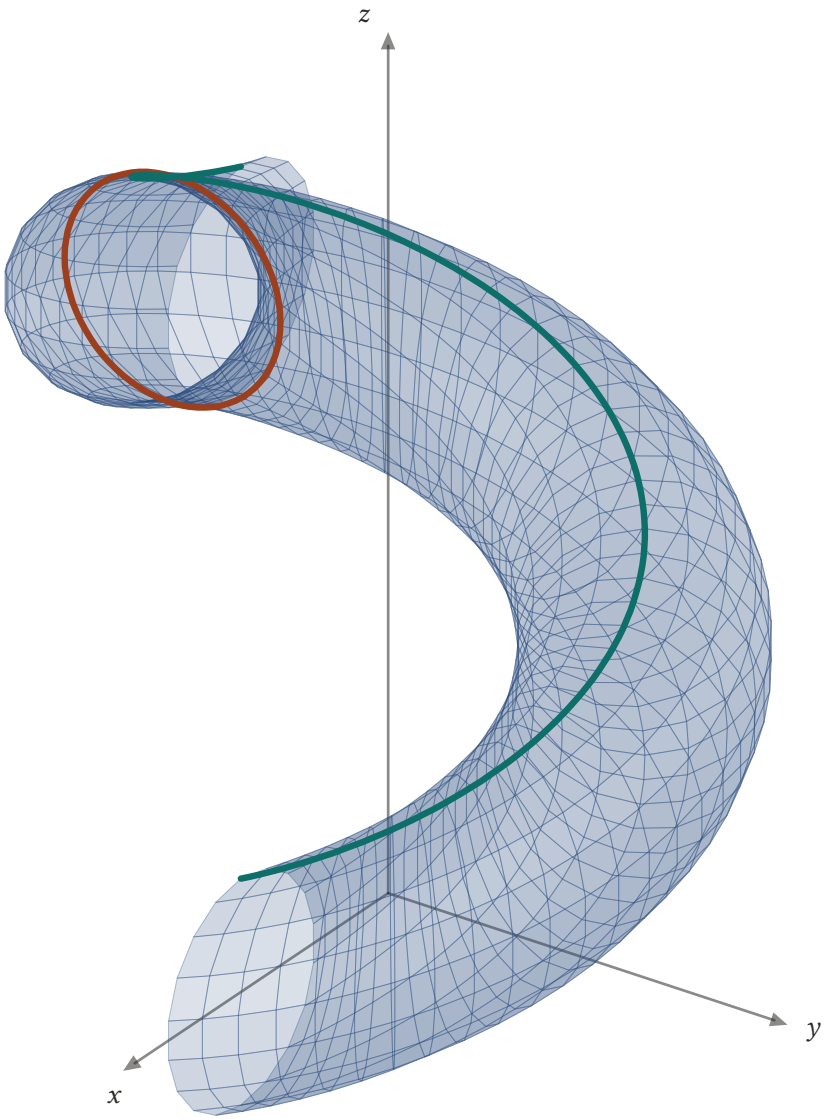
Koordinat eğrileri, karmaşık görünen bir yüzeyin yapısını da ortaya çıkarır.

Örnek 15.2 (Spiral Tüp). Aşağıda

$$\mathbf{r}(u, v) = \text{chevron.l}(2 + \sin v)\cos u,\ (2 + \sin v)\sin u,\ u + \cos v\text{chevron.r}$$

yüzeyinin $0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le 2\pi$ parametre bölgesine karşılık gelen parçası çizilmiştir. Hangi koordinat eğrilerinde u, hangilerinde v sabittir? Yüzeyin biçimini açıklayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.3: Yüzeyin $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$ parçası bir tam tur atan bir tüptür. Kalın çizilen iki koordinat eğrisinden biri küçük bir çember, öbürü bir sarmaldır.

Çözüm.
Parametrik denklemler şunlardır:

$$x = (2 + \sin v)\cos u, \qquad y = (2 + \sin v)\sin u, \qquad z = u + \cos v.$$

***v* sabit.** $v = v_0$ alalım ve $R = 2 + \sin v_0$, $c = \cos v_0$ diyelim; $1 \le R \le 3$ olur. Denklemler

$$x = R\cos u, \qquad y = R\sin u, \qquad z = u + c$$

biçimini alır. Bu bir sarmaldır (helis): nokta z ekseni çevresinde R yarıçaplı bir silindirin üzerinde döner ve u her 2π arttığında bir tur atıp 2π kadar yükselir. Demek ki şekildeki spiral biçimli eğriler, v'nin sabit olduğu koordinat eğrileridir.
***u* sabit.** $u = u_0$ alalım. $\mathbf{e} = \cos u_0\,\mathbf{i} + \sin u_0\,\mathbf{j}$ yatay birim vektörünü ve $\mathbf{c} = 2\,\mathbf{e} + u_0\,\mathbf{k}$ vektörünü kullanarak

$$\mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{c} + \sin v\,\mathbf{e} + \cos v\,\mathbf{k}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

yazabiliriz. $\mathbf{e}$ ile $\mathbf{k}$ birbirine dik birim vektörlerdir. Bu yüzden nokta, $(2\cos u_0, 2\sin u_0, u_0)$ merkezli ve 1 yarıçaplı bir çember çizer. Çember, $\mathbf{e}$ ile $\mathbf{k}$ vektörlerinin gerdiği, yani z eksenini içeren düşey düzlemdedir ve üzerinde $z = u_0 + \cos v$ değeri $u_0 - 1$ ile $u_0 + 1$ arasında değişir. Demek ki şekildeki küçük çemberler, u'nun sabit olduğu koordinat eğrileridir.
Yüzeyin biçimi. Küçük çemberlerin merkezleri, u değiştikçe $(2\cos u, 2\sin u, u)$ sarmalını çizer. Yüzey, bu sarmalın çevresine sarılmış ve kesiti 1 yarıçaplı çember olan bir tüptür.
■

15.2 Yüzeyleri Parametrelemek

Şimdiye kadar bir vektör denklemi verip yüzeyi tanıdık. Şimdi tersini yapacağız: verilen bir yüzeyi temsil eden bir vektör fonksiyonu bulacağız. Sonraki bölümlerde en çok bu işe ihtiyaç duyacağız.

Örnek 15.3 (Düzlemin Parametrelenmesi). Konum vektörü $\mathbf{r}_0$ olan P_0 noktasından geçen ve paralel olmayan $\mathbf{a}$ ile $\mathbf{b}$ vektörlerini içeren düzlemi temsil eden bir vektör fonksiyonu bulunuz.

Çözüm.
Düzlemin rastgele bir P noktasını alalım. $\mathbf{a}$ ile $\mathbf{b}$ paralel olmadığından düzleme paralel her vektör bunların bir lineer bileşimidir; yani

$$\overrightarrow{P_0P} = u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}$$

olacak biçimde u ve v sayıları vardır. Geometrik olarak, P_0'dan önce $\mathbf{a}$ doğrultusunda $u\,\mathbf{a}$ kadar, sonra $\mathbf{b}$ doğrultusunda $v\,\mathbf{b}$ kadar giderek P'ye ulaşırız (paralelkenar kuralı). P'nin konum vektörü $\mathbf{r}$ ise

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \mathbf{r}_0 + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}$$

olur. Tersine, her u, v için bu nokta düzlemdedir. Böylece düzlemin vektör denklemi

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}, \qquad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

olur. $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ve $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ yazılırsa parametrik denklemler şunlardır:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u\,a_1 + v\,b_1,\\ y &= y_0 + u\,a_2 + v\,b_2,\\ z &= z_0 + u\,a_3 + v\,b_3. \end{aligned}$$

■

Küre gibi bir eksen ya da nokta çevresinde simetrik yüzeylerde, uygun koordinat sisteminde sabit kalan koordinatı bırakıp öbür ikisini parametre seçeriz.

Örnek 15.4 (Kürenin Parametrelenmesi). $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin bir parametrik gösterimini bulunuz ve koordinat eğrilerini tanımlayınız.

Çözüm.
Parametreleme. Küre, küresel koordinatlarda (bkz. Tanım 8.1) yalnız $\rho = a$ denklemiyle verilir. Bu yüzden öbür iki küresel koordinatı, ϕ ile θ açılarını parametre seçeriz. Küresel koordinatlardan dik koordinatlara geçiş formüllerinde $\rho = a$ yazarsak

$$x = a\sin\phi\cos\theta, \qquad y = a\sin\phi\sin\theta, \qquad z = a\cos\phi$$

parametrik denklemlerini, yani

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + a\cos\phi\,\mathbf{k}$$

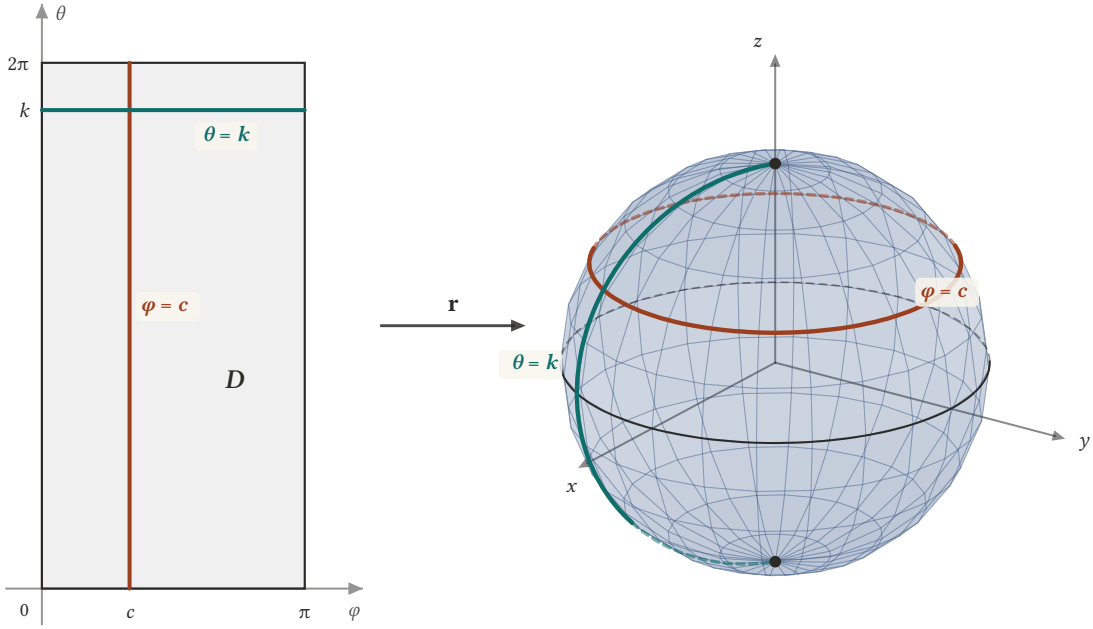
vektör denklemini buluruz. Gerçekten

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\sin^2\phi\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + a^2\cos^2\phi = a^2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $0 \le \phi \le \pi$ ve $0 \le \theta \le 2\pi$ olduğundan parametre bölgesi $D = [0,\pi] \times [0,2\pi]$ dikdörtgenidir.
Koordinat eğrileri. $\phi = c$ sabitken $z = a\cos c$ sabittir ve nokta bu yükseklikte $a \sin c$ yarıçaplı yatay bir çember çizer. Bunlar enlem çemberleridir; $c = \pi/2$ için ekvator elde edilir. $\theta = k$ sabitken nokta z eksenini içeren bir düzlemde kalır ve kuzey kutbu $(0,0,a)$'yı güney kutbu $(0,0,-a)$'ya bağlayan bir yarım çember çizer. Bunlar boylam çizgileri, yani meridyenlerdir.
■

Küre örneği, parametrelerin bir harita gibi çalıştığını açıkça gösterir. (ϕ, θ) çifti bir noktanın coğrafi konumunu verir: ϕ kuzey kutbundan ölçülen açıdır (enlemin tümleri: $\phi = \pi/2 -$ enlem), θ da boylamdır. Parametrik gösterim bilgisayar grafiklerinde de bu yüzden tercih edilir. Küreyi $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ yarıkürelerinin grafikleri olarak çizmeye çalışmak, yüzeyin ekvator yakınında dikleşmesi yüzünden boşluklu bir resim verir; $\mathbf{r}(\phi, \theta)$ ile çizilen ağ ise küreyi düzgünce kaplar.



Şekil 15.4: Küre parametrelemesi $\mathbf{r}(\varphi, \theta)$, $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ dikdörtgenini küreye gönderir. Düşey $\varphi = c$ doğrusu bir enlem çemberine, yatay $\theta = k$ doğrusu kutupları birleştiren bir meridyene gider.

Silindir için de aynı yolu silindirik koordinatlarla izleriz.

Örnek 15.5 (Sonlu Bir Silindirin Parametrelenmesi). $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 1$ silindirinin bir parametrik gösterimini bulunuz.

Çözüm.
Silindirik koordinatlarda (bkz. Tanım 7.1) bu silindirin denklemi $r = 2$'dir. Öbür iki silindirik koordinatı, θ ile z'yi parametre seçersek parametrik denklemler

$$x = 2\cos\theta, \qquad y = 2\sin\theta, \qquad z = z$$

olur. Vektör denklemi

$$\mathbf{r}(\theta, z) = 2\cos\theta\,\mathbf{i} + 2\sin\theta\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

ve parametre bölgesi

$$D = \{(\theta, z) : 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le z \le 1\}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dikdörtgenidir. $\theta = c$ koordinat eğrileri silindirin üzerindeki 1 uzunluğundaki düşey doğru parçaları, $z = k$ koordinat eğrileri de $z = k$ yüksekliğindeki 2 yarıçaplı yatay çemberlerdir.
■

Bir fonksiyon grafiğini parametrelemek ise çok kolaydır: bağımsız değişkenleri parametre alırız.

Örnek 15.6 (Bir Grafiğin Parametrelenmesi). $z = x^2 + 2y^2$ eliptik paraboloidini temsil eden bir vektör fonksiyonu bulunuz.

Çözüm.
x ile y'yi parametre alırsak parametrik denklemler

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = x^2 + 2y^2$$

olur. Vektör denklemi

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + 2y^2)\,\mathbf{k}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

biçimindedir.
■

Aynı fikir her fonksiyon grafiğine uygulanır. $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ grafiği, x ve y parametre alınarak

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x, y)\,\mathbf{k}, \qquad (x, y) \in D$$

biçiminde her zaman bir parametrik yüzey olarak yazılabilir. $y = g(x, z)$ ya da $x = g(y, z)$ biçimindeki yüzeylerde de kalan iki değişken parametre alınır.
Bir yüzeyin parametrik gösterimi (parametrelemesi) tek türlü değildir. Aynı koniyi iki farklı yolla parametreleyelim.

Örnek 15.7 (Koninin İki Parametrelemesi). $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ yüzeyinin, yani $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ konisinin üst yarısının bir parametrik gösterimini bulunuz.

Çözüm.
Birinci yol. Yüzey bir fonksiyon grafiği olduğundan x ile y'yi parametre seçebiliriz:

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathbf{k}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

İkinci yol. Kutupsal koordinatlar r ile θ'yı parametre seçelim. Koni üzerindeki bir (x, y, z) noktası için $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ve

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{r^2} = 2r \qquad (r \geq 0)$$

olur. Böylece koninin vektör denklemi

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + 2r\,\mathbf{k}, \qquad r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

olur.
■

İki gösterim de koninin tamamını verir, ama ikincisi çoğu zaman daha kullanışlıdır. Örneğin yalnız koninin $z = 1$ düzleminin altında kalan parçası isteniyorsa ikinci gösterimde $z = 2r \leq 1$, yani $r \leq \tfrac{1}{2}$ koşulu yeter. Parametre bölgesi

$$D = \left\{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \frac{1}{2},\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

dikdörtgeni olur ve $\mathbf{r}$ bu dikdörtgeni, tepesi orijinde ve yüksekliği 1 olan bir koni parçasına gönderir. Birinci gösterimde aynı parçanın parametre bölgesi $x^2 + y^2 \leq \tfrac{1}{4}$ dairesidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

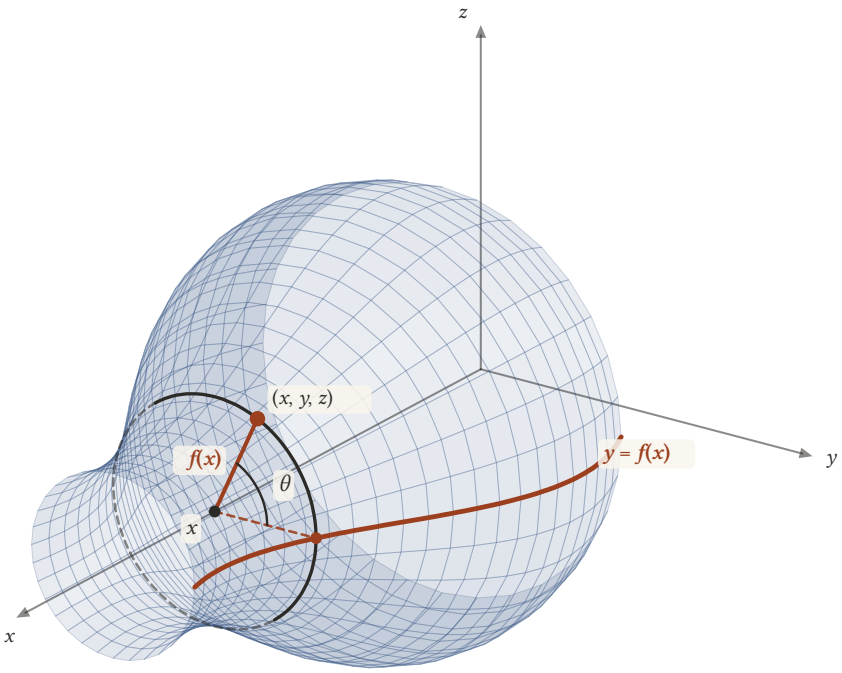
15.3 Dönel Yüzeyler

Bir eğriyi bir eksen çevresinde döndürerek elde edilen yüzeylerin de doğal bir parametrelemesi vardır: eğrinin parametresine dönme açısını eklemek yeter.

Önerme 15.1 (Dönel Yüzeyin Parametrelenmesi). *f, $[a,b]$ aralığında $f \geq 0$ olan bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ eğrisinin x ekseni çevresinde döndürülmesiyle elde edilen S yüzeyi*

$$x = x, \qquad y = f(x)\cos\theta, \qquad z = f(x)\sin\theta$$

parametrik denklemleriyle verilir. Parametreler x ile θ, parametre bölgesi $D = [a,b] \times [0, 2\pi]$'dir.



Şekil 15.5: y = f(x) *eğrisi* x *ekseni çevresinde dönerken eğrinin her noktası,* x *eksenine dik düzlemde* f(x) *yarıçaplı bir çember çizer.* y *ekseninin yönünden* θ *kadar dönmüş nokta* (x, f(x) cos θ, f(x) sin θ) *olur.*

İspat.
Eğrinin $(x, f(x), 0)$ noktası x ekseni çevresinde dönerken x koordinatı değişmez; nokta, x eksenine dik olan bu x değerindeki düzlemde kalır. Eksene uzaklığı da değişmediğinden nokta bu düzlemde, merkezi $(x, 0, 0)$ ve yarıçapı $f(x)$ olan çemberi çizer.
Dönme açısını θ ile gösterelim ve açıyı y ekseninin pozitif yönünden z ekseninin pozitif yönüne doğru ölçelim. Bu düzlemde y ve z koordinatları, $f(x)$ yarıçaplı çember için kutupsal koordinatlar gibi davranır. θ kadar dönmüş noktanın koordinatları bu yüzden

$$y = f(x)\cos\theta, \qquad z = f(x)\sin\theta$$

olur. θ, 0'dan 2π'ye kadar değişince nokta çemberin tamamını çizer. x de $[a,b]$ aralığını tarayınca bu çemberler S'nin tamamını oluşturur.
■

Eğri y ya da z ekseni çevresinde döndürüldüğünde de aynı fikir kullanılır; yalnız koordinatların rolleri değişir (bkz. Alıştırma 15.4).

Örnek 15.8 (Sinüs Eğrisinden Elde Edilen Dönel Yüzey). $y = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$ eğrisinin x ekseni çevresinde döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin parametrik denklemlerini bulunuz ve yüzeyi çiziniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

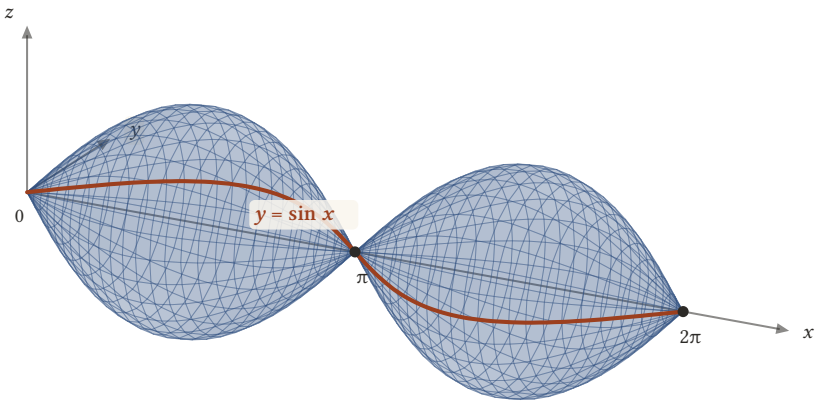
Çözüm.
Parametrik denklemler. Önerme 15.1 formüllerini $f(x) = \sin x$ ile yazarsak

$$x = x, \qquad y = \sin x \cos\theta, \qquad z = \sin x \sin\theta$$

buluruz. Parametre bölgesi $0 \le x \le 2\pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$ dikdörtgenidir.
$\sin x < 0$ olan kısım. $\pi < x < 2\pi$ aralığında $\sin x < 0$'dır, yani önermedeki $f \ge 0$ koşulu sağlanmaz. Yine de denklemler doğru yüzeyi verir. Bu aralıkta $s = |\sin x| = -\sin x$ dersek

$$(\sin x \cos\theta, \sin x \sin\theta) = \big(\, s\cos(\theta+\pi), s\sin(\theta+\pi)\,\big)$$

olur. θ tam bir tur attığında $\theta + \pi$ de tam bir tur atar. Bu yüzden nokta yine $s = |\sin x|$ yarıçaplı çemberin tamamını çizer ve yüzey, $y = |\sin x|$ eğrisinin döndürülmesiyle elde edilen yüzeydir.
Yüzeyin biçimi. Yarıçap $x = 0$, $x = \pi$ ve $x = 2\pi$ noktalarında sıfırdır, $x = \pi/2$ ve $x = 3\pi/2$ noktalarında en büyük değeri olan 1'e ulaşır. Yüzey, x ekseni üzerinde uç uca eklenmiş iki iğ biçimindedir.



Şekil 15.6: $y = \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$ eğrisinin x ekseni çevresinde döndürülmesiyle oluşan yüzey: $x = 0$, π ve 2π noktalarında eksene değen iki iğ.

■

Şimdiye kadar gördüğümüz parametrelemeleri toparlayalım:

- **Düzlem:** $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}$.
- **Fonksiyon grafiği** $z = f(x,y)$: parametreler x ve y.
- **Küre** $\rho = a$: parametreler küresel koordinatlardan ϕ ve θ.
- **Silindir** $r = a$: parametreler silindirik koordinatlardan θ ve z.
- **z ekseni çevresinde simetrik yüzeyler** (koni, paraboloit gibi): parametreler kutupsal koordinatlar r ve θ.
- **Dönel yüzeyler:** parametreler eğrinin parametresi ve dönme açısı.

15.4 Teğet Düzlemler

Parametrik bir yüzeyin bir noktadaki teğet düzlemini, o noktadan geçen iki koordinat eğrisinin teğet vektörleriyle kuracağız.
S, $\mathbf{r}(u,v)$ ile verilen bir parametrik yüzey olsun. x, y, z bileşenlerinin kısmi türevleri (bkz. Analiz 4) var olsun ve P_0, konum vektörü $\mathbf{r}(u_0,v_0)$ olan nokta olsun. P_0'dan iki koordinat eğrisi geçer.

- $u = u_0$ sabit tutularak elde edilen C_1 eğrisi, $v \mapsto \mathbf{r}(u_0,v)$ fonksiyonunun çizdiği eğridir. Bir vektör fonksiyonunun türevi, çizdiği eğrinin teğet vektörüdür. Bu yüzden C_1'in P_0'daki teğet vektörü, $\mathbf{r}$'nin v'ye göre kısmi türevidir:

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\,\mathbf{k}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

- $v = v_0$ sabit tutularak elde edilen C_2 eğrisi, $u \mapsto \mathbf{r}(u, v_0)$ fonksiyonunun çizdiği eğridir. Onun P_0'daki teğet vektörü de $\mathbf{r}$'nin u'ya göre kısmi türevidir:

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\,\mathbf{k}.$$

C_1 ve C_2 yüzeyin üzerinde yattığından bu iki vektör yüzeye teğettir. İkisi de sıfırdan farklı ve birbirine paralel değilse P_0'dan geçen bir düzlem gererler. Teğet düzlemi bu düzlem olarak tanımlayacağız. İki vektörün paralel olmaması, vektörel çarpımlarının sıfırdan farklı olması demektir.

Tanım 15.3 (Düzgün Parametrik Yüzey). $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ ile verilen bir S yüzeyinde $\mathbf{r}_u$ ile $\mathbf{r}_v$ sürekli ve D'nin her noktasında $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ ise S'ye **düzgün** (smooth) yüzey denir.

Yani düzgün bir yüzeyin her noktasında iki teğet vektör sıfırdan farklıdır ve paralel değildir; yüzeyde köşe, sivri uç ya da kırışık yoktur. Örneğin koninin $\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + 2r\,\mathbf{k}$ parametrelemesinde

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = -2r\cos\theta\,\mathbf{i} - 2r\sin\theta\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k}$$

olur ve bu vektör yalnız $r = 0$ için, yani koninin sivri tepesinde sıfırdır.

Tanım 15.4 (Teğet Düzlem). S, $\mathbf{r}(u, v)$ ile verilen düzgün bir parametrik yüzey ve $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, konum vektörü $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ olan nokta olsun. S'nin P_0'daki **teğet düzlemi**, P_0'dan geçen ve $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ ile $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ vektörlerini içeren düzlemdir. Normal vektörü

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0)$$

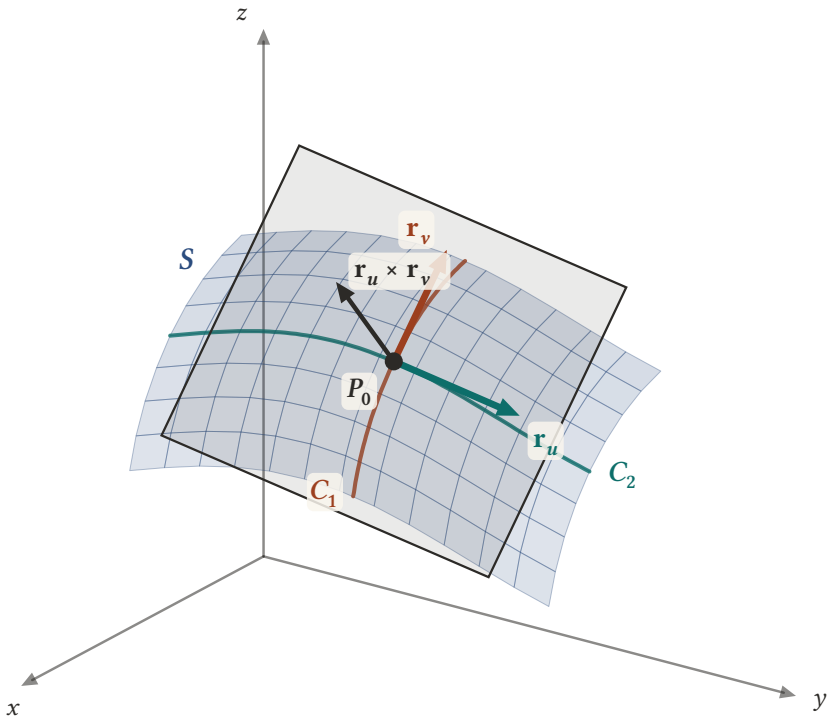
olduğundan denklemi

$$\mathbf{n} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

biçimindedir.

Yani teğet düzlem, P_0'dan geçen iki koordinat eğrisinin teğet doğrularını içeren düzlemdir. Normal vektörü, iki teğet vektöre birden dik olan vektörel çarpımdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.7: P_0'dan geçen C_1 ($u = u_0$) ve C_2 ($v = v_0$) koordinat eğrilerinin teğet vektörleri $\mathbf{r}_v$ ve $\mathbf{r}_u$'dur. Bu iki vektörü içeren düzlem teğet düzlemdir (gri); $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ ona diktir.

Teğet düzlemi bulurken her seferinde aynı yolu izleriz.

Teğet düzlem dört adımda

1. **Parametreleri bul.** $\mathbf{r}(u_0, v_0) = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ denklemlerini çöz. Üç bileşen denkleminin hepsini sağlayan (u_0, v_0) değerini seç.
2. **Teğet vektörleri hesapla.** $\mathbf{r}_u$ ile $\mathbf{r}_v$ vektörlerini bul ve (u_0, v_0)'da değerlendir.
3. **Normal vektörü bul.** $\mathbf{n} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektörünü hesapla ve $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ olduğunu denetle.
4. **Denklemi yaz.** $\mathbf{n} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$ eşitliğini aç ve sadeleştir.

Örnek 15.9 (Parametrik Bir Yüzeyin Teğet Düzlemi). $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u + 2v$ parametrik denklemleriyle verilen yüzeyin $(1, 1, 3)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Parametreler. $u^2 = 1$ ve $v^2 = 1$ denklemlerinden $u = \pm 1$, $v = \pm 1$ bulunur. Dört seçenekten yalnız $u = 1$, $v = 1$ üçüncü denklemi sağlar: $z = 1 + 2 \cdot 1 = 3$. Öbür seçenekler z için -1, 1 ve -3 verir.
Teğet vektörler. Kısmi türevler

$$\mathbf{r}_u = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_v = 2v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$$

olur.
Normal vektör. Determinantı birinci satıra göre açarsak

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 0 & 2v & 2 \end{vmatrix} = -2v\,\mathbf{i} - 4u\,\mathbf{j} + 4uv\,\mathbf{k}$$

bulunur. $u = v = 1$ için normal vektör $\mathbf{n} = -2\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$ olur.
Denklem. Teğet düzlem

 CC BY-NC-SA 4.0

$$-2(x-1)-4(y-1)+4(z-3)=0$$

olur. Her terimi -2'ye bölüp sadeleştirirsek

$$x+2y-2z+3=0$$

elde edilir. Denetim: $1+2-6+3=0$.
Bu yüzeyin kendini kestiğini de belirtelim. $\mathbf{r}(-u,-v)=\mathbf{r}(u,v)$ eşitliği yalnız $u+2v=0$ iken sağlanır. O zaman $z=0$ ve $x=u^2=4v^2=4y$ olur; yani $v\neq 0$ iken iki farklı parametre çifti, $z=0$ düzlemindeki $x=4y$, $y>0$ yarı doğrusunun aynı noktasını verir. $(1,1,3)$ noktası ise yalnız $(u,v)=(1,1)$ değerinden geldiği için teğet düzlemi tek türlü belirlidir.
■

15.5 Parametrik Yüzeyin Alanı

Yüzey alanını Yüzey Alanı bölümündeki gibi tanımlayacağız: yüzeyi küçük parçalara böleceğiz ve her parçayı teğet düzlemdeki bir paralelkenarla değiştireceğiz. Bu kez parçaları D parametre bölgesini bölerek elde ediyoruz.
Basit olsun diye önce D'nin bir dikdörtgen olduğunu varsayalım ve onu kenarları Δu ile Δv olan R_{ij} alt dikdörtgenlerine bölelim. (u_i^*, v_j^*), R_{ij}'nin sol alt köşesi olsun. S'nin R_{ij}'ye karşılık gelen S_{ij} parçasına bir **yama** (patch) diyelim. Yamanın bir köşesi, konum vektörü $\mathbf{r}(u_i^*, v_j^*)$ olan P_{ij} noktasıdır. Bu noktadaki teğet vektörleri kısaca

$$\mathbf{r}_u^* = \mathbf{r}_u(u_i^*, v_j^*), \qquad \mathbf{r}_v^* = \mathbf{r}_v(u_i^*, v_j^*)$$

ile gösterelim.
Yamanın P_{ij}'de buluşan iki kenarı, R_{ij}'nin alt ve sol kenarlarının görüntüleridir. Alt kenarın görüntüsü P_{ij}'yi, konum vektörü $\mathbf{r}(u_i^*+\Delta u, v_j^*)$ olan noktaya bağlar. Fark oranı kısmi türeve yaklaştığından

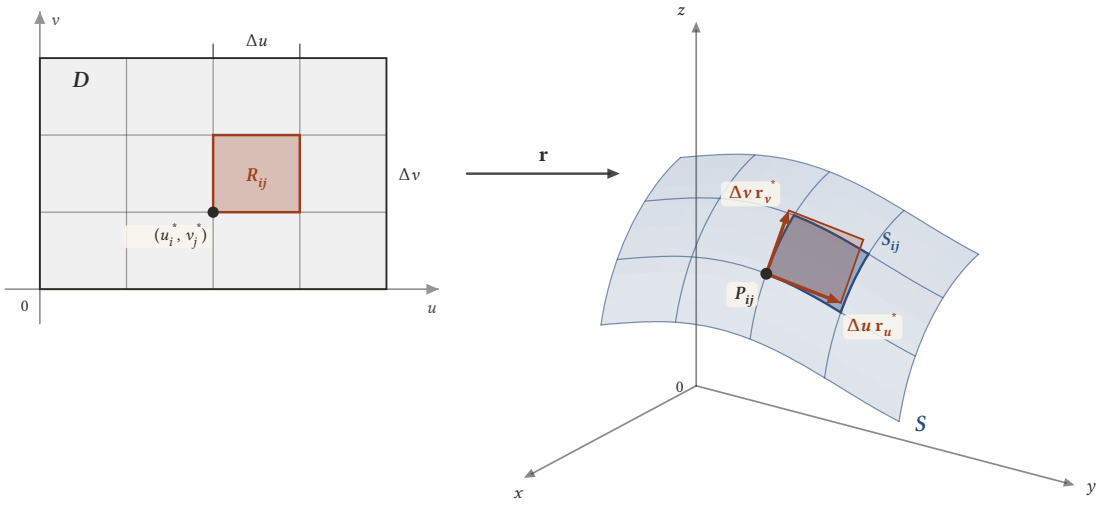
$$\mathbf{r}(u_i^*+\Delta u, v_j^*) - \mathbf{r}(u_i^*, v_j^*) \approx \Delta u\, \mathbf{r}_u^*$$

olur. Aynı biçimde sol kenar yaklaşık olarak $\Delta v\, \mathbf{r}_v^*$ vektörüdür. Bu yüzden S_{ij} yamasını, $\Delta u\, \mathbf{r}_u^*$ ve $\Delta v\, \mathbf{r}_v^*$ vektörlerinin gerdiği paralelkenarla değiştirebiliriz. Bu paralelkenar S'nin P_{ij}'deki teğet düzleminde yatar ve alanı

$$\left| \, (\Delta u\, \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v\, \mathbf{r}_v^*) \, \right| = \left| \, \mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^* \, \right| \Delta u\, \Delta v$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.8: D dikdörtgeni $\Delta u \times \Delta v$ boyutlu alt dikdörtgenlere bölünür. R_{ij}'nin görüntüsü S_{ij} yamasıdır (koyu). Yama, P_{ij} köşesinden çıkan $\Delta u\,\mathbf{r}_u^*$ ve $\Delta v\,\mathbf{r}_v^*$ vektörlerinin gerdiği paralelkenarla (turuncu) yaklaşık olarak aynı alana sahiptir.

Bütün yamalardaki paralelkenarların alanlarını toplayınca S'nin alanı için

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mid \mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^* \mid \Delta u\,\Delta v$$

yaklaşımını buluruz. Bölüntü inceldikçe yaklaşımın iyileşmesini bekleriz. Öte yandan bu çift toplam, $\mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid$ fonksiyonunun D üzerindeki bir Riemann toplamıdır ve limiti bir iki katlı integraldir (bkz. Tanım 1.2). Yüzey alanını bu yüzden şöyle tanımlarız.

Tanım 15.5 (Parametrik Yüzeyin Alanı). S,

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\,\mathbf{i} + y(u,v)\,\mathbf{j} + z(u,v)\,\mathbf{k}, \qquad (u,v) \in D$$

denklemiyle verilen bir parametrik yüzey olsun ve $\mathbf{r}_u$ ile $\mathbf{r}_v$, D üzerinde sürekli olsun. D'nin sınırı gibi sıfır alanlı bir küme dışındaki her (u,v) noktasında $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ olsun ve bu noktalar S'nin farklı noktalarına gitsin. Kısacası parametreleme bu küme dışında düzgündür ve (u,v) noktası D'yi tararken S yalnız bir kez örtülür. S'nin **yüzey alanı**

$$A(S) = \iint_D \mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid dA$$

sayısıdır. Burada

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k}$$

vektörleridir.

Yani $\mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid$, alanın parametre bölgesinden yüzeye geçerken kaç katına çıktığını söyleyen yerel büyütme çarpanıdır. D'deki $\Delta u\,\Delta v$ alanlı küçük bir dikdörtgen, yüzeyde yaklaşık $\mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid \Delta u\,\Delta v$ alanlı bir yamaya dönüşür. Eğrilerdeki $L = \int_a^b \mid \mathbf{r}'(t) \mid dt$ yay uzunluğu formülü de aynı kalıptadır; orada $\mid \mathbf{r}'(t) \mid$ uzunluğun büyütme çarpanıydı.
Bir özel durum, bu çarpanın ne olduğunu iyi gösterir. S, xy-düzleminde bir bölgeyse $z(u,v) = 0$ olur ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\mathbf{k} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{k}$$

bulunur. Tanım bu durumda bölgenin alanını

$$A(S) = \iint_D \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA$$

olarak verir. Bu, Teorem 9.1 değişken değiştirme formülünün integrand 1 alınarak yazılmış hâlidir. Tanım bir parametrelemeye dayanıyor. Aynı yüzeyin iki farklı parametrelemesi farklı alanlar verseydi tanım anlamsız olurdu; neyse ki öyle olmaz.

Önerme 15.2 (Alan Parametrelemeden Bağımsızdır). *$\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$, S yüzeyinin düzgün ve S'yi bir kez örten bir parametrelemesi olsun. $T(s,t) = (u(s,t), v(s,t))$ dönüşümü bir E bölgesini D'nin üzerine bire bir götürsün, kısmi türevleri sürekli ve Jacobi determinantı sıfırdan farklı olsun. O zaman*

$$\mathbf{R}(s,t) = \mathbf{r}\,\big(\,u(s,t), v(s,t)\,\big), \qquad (s,t) \in E$$

de S'nin düzgün ve S'yi bir kez örten bir parametrelemesidir ve iki parametreleme aynı alanı verir:

$$\iint_E |\,\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t\,|\,dA = \iint_D |\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|\,dA.$$

İspat.
Teğet vektörler. *$u_s = \partial u/\partial s$ gibi kısaltmalar kullanalım. Zincir kuralına göre (bkz. Analiz 4)*

$$\mathbf{R}_s = u_s\,\mathbf{r}_u + v_s\,\mathbf{r}_v, \qquad \mathbf{R}_t = u_t\,\mathbf{r}_u + v_t\,\mathbf{r}_v$$

olur. Burada $\mathbf{r}_u$ ile $\mathbf{r}_v$, $\big(\,u(s,t), v(s,t)\,\big)$ noktasında değerlendirilir.
Vektörel çarpım. *Vektörel çarpım toplama üzerine dağılır, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_v = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u = -\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$'dir. Bu yüzden*

$$\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t = (u_s v_t - u_t v_s)\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$$

bulunur. Jacobi determinantı ve $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ sıfırdan farklı olduğundan $\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t \neq \mathbf{0}$'dır; $\mathbf{R}_s$ ile $\mathbf{R}_t$ de sürekli olduğundan yeni parametreleme düzgündür. T, E'yi D'nin üzerine bire bir götürdüğünden $\mathbf{R}$ de S'yi bir kez örter.
İntegraller. *Uzunluk alırsak*

$$|\,\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t\,| = |\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right|$$

olur. $g = |\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|$ fonksiyonuna değişken değiştirme formülünü (Teorem 9.1) uygularsak

$$\iint_D g\,dA = \iint_E g\,\big(\,u(s,t), v(s,t)\,\big)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right| dA = \iint_E |\,\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_t\,|\,dA$$

elde edilir.
■

Tanımdaki iki koşulu uygularken nelere dikkat edeceğimizi kısaca belirtelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Bir kez örtme ve sıfır alanlı bozulmalar

- **Bir kez örtme.** Yüzeyin bir parçası iki kez örtülürse integral o parçayı iki kez sayar. Örneğin küre parametrelemesinde θ'yı $[0, 4\pi]$ aralığında alırsak küre iki kez dolaşılır ve integral $4\pi a^2$ yerine $8\pi a^2$ verir.
- **Sıfır alanlı bozulmalar.** Tanım 15.5, düzgünlük ve bir kez örtme koşullarının D'nin sınırı gibi sıfır alanlı bir küme boyunca bozulmasına izin verir. Sıfır alanlı bir küme iki katlı integrali değiştirmediğinden bu bozulmalar alanı etkilemez. Örneğin küre parametrelemesinde $\theta = 0$ ve $\theta = 2\pi$ aynı meridyeni verir; kutuplarda, yani $\phi = 0$ ve $\phi = \pi$ için de $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \mathbf{0}$ olur.

Alan hesabını da hep aynı adımlarla yaparız.

💡 Parametrik yüzeyin alanı dört adımda

1. **Parametrele.** Yüzeyi $\mathbf{r}(u, v)$ ile yaz ve D parametre bölgesini, yüzeyi bir kez örtecek biçimde belirle.
2. **Teğet vektörleri bul.** $\mathbf{r}_u$ ile $\mathbf{r}_v$ vektörlerini hesapla.
3. **Büyütme çarpanını bul.** $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektörünü ve uzunluğunu hesapla. Kökün içi çoğu zaman $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ile ya da bir tam kareye dönüşerek sadeleşir.
4. **İntegrali hesapla.** $\iint_D |\, \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \,|\, dA$ integralini ardışık integral olarak yaz ve hesapla.

Örnek 15.10 (Kürenin Alanı). a yarıçaplı bir kürenin alanını bulunuz.

Çözüm.
Parametreleme. Örnek 15.4 parametrelemesini kullanalım:

$$x = a\sin\phi\cos\theta, \qquad y = a\sin\phi\sin\theta, \qquad z = a\cos\phi,$$

$D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Bu parametreleme küreyi, sınırdaki meridyen ve kutuplar dışında bir kez örter.
Teğet vektörler.

$$\mathbf{r}_\phi = a\cos\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + a\cos\phi\sin\theta\,\mathbf{j} - a\sin\phi\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}_\theta = -a\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{i} + a\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{j}.$$

Vektörel çarpım. Bileşenleri tek tek hesaplayalım:

$$\mathbf{i}\ \text{bileşeni} = (a\cos\phi\sin\theta)(0) - (-a\sin\phi)(a\sin\phi\cos\theta) = a^2\sin^2\phi\cos\theta,$$
$$\mathbf{j}\ \text{bileşeni} = (-a\sin\phi)(-a\sin\phi\sin\theta) - (a\cos\phi\cos\theta)(0) = a^2\sin^2\phi\sin\theta,$$
$$\mathbf{k}\ \text{bileşeni} = a^2\sin\phi\cos\phi\cos^2\theta + a^2\sin\phi\cos\phi\sin^2\theta = a^2\sin\phi\cos\phi.$$

Böylece

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a^2\sin^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + a^2\sin^2\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + a^2\sin\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

olur. Uzunluğunu hesaplarken önce $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, sonra $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ kullanırız:

$$\begin{aligned} |\, \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta \,| &= \sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta + a^4\sin^4\phi\sin^2\theta + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} \\ &= \sqrt{a^4\sin^4\phi + a^4\sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{a^4\sin^2\phi} = a^2\sin\phi. \end{aligned}$$

Son adımda $0 \le \phi \le \pi$ için $\sin\phi \ge 0$ olmasını kullandık.
İntegral.

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi\, d\phi\, d\theta = a^2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi}\sin\phi\, d\phi = a^2\cdot 2\pi\cdot 2 = 4\pi a^2.$$

Ayrıca $\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = a\sin\phi\,\mathbf{r}(\phi, \theta)$ olduğuna dikkat edelim: normal vektör yarıçap doğrultusundadır ve küreden dışarı bakar.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

15.6 Fonksiyon Grafiğinin Alanı

Genel tanımın, Yüzey Alanı bölümünde fonksiyon grafikleri için bulduğumuz formülle uyumlu olduğunu gösterelim.

Önerme 15.3 (Grafiğin Alanı ve Parametrik Tanım). *f'nin kısmi türevleri D üzerinde sürekli olsun ve $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ grafiğini*

$$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}$$

ile parametreleyelim. Bu parametreleme düzgündür, grafiği bir kez örter ve

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

olur. Bu yüzden Tanım 15.5 tanımı

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dA$$

değerini verir; bu, Teorem 5.1 formülüdür.

> ***İspat.***
> ***Teğet vektörler.*** *Parametrik denklemler $x = x$, $y = y$, $z = f(x,y)$ olduğundan*
>
> $$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f_x\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + f_y\,\mathbf{k}$$
>
> *olur.*
> ***Vektörel çarpım.*** *Determinantı birinci satıra göre açarsak*
>
> $$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
>
> *bulunur.*
> ***Koşullar.*** *Bu vektörün $\mathbf{k}$ bileşeni 1 olduğundan hiçbir zaman sıfır olmaz. f_x ile f_y sürekli olduğundan $\mathbf{r}_x$ ile $\mathbf{r}_y$ de süreklidir; yani parametreleme düzgündür. $\mathbf{r}(x,y)$ noktasının ilk iki koordinatı (x,y)'nin kendisidir. Bu yüzden farklı (x,y) noktaları farklı noktalar verir ve grafik bir kez örtülür.*
> ***Alan.*** *Son olarak*
>
> $$|\,\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\,| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$$
>
> *olduğundan tanımdaki integral, $f_x = \partial z/\partial x$ ve $f_y = \partial z/\partial y$ yazılınca istenen formüle dönüşür.*
> ■

Böylece $\mathbf{n} = -f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, grafiğin yukarı bakan bir normal vektörüdür. Tanım 15.4 tanımı da (x_0, y_0, z_0) noktasında $\mathbf{n} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$, yani

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)\,(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)\,(y - y_0)$$

denklemini verir. Bu, grafiğin bilinen teğet düzlemidir (bkz. Analiz 4).
Grafikler için bile parametrik bakış bazen işi kolaylaştırır: kutupsal koordinatları sonradan değişken değiştirme olarak değil, baştan parametre olarak kullanabiliriz.

Örnek 15.11 (Paraboloit Parçasının Parametrik Alanı). $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin $z = 9$ düzleminin altında kalan parçasının alanını, kutupsal koordinatları parametre alarak bulunuz.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

Parametreleme. Düzlem paraboloidi $x^2 + y^2 = 9$, $z = 9$ çemberi boyunca keser. Aradığımız parça, 3 yarıçaplı $x^2 + y^2 \leq 9$ dairesinin üstündedir. Kutupsal koordinatları parametre alırsak $z = x^2 + y^2 = r^2$ olur ve parça

$$\mathbf{r}(r, \theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + r^2\,\mathbf{k}$$

ile parametrelenir. Parametre bölgesi $D = [0, 3] \times [0, 2\pi]$'dir.
Teğet vektörler.

$$\mathbf{r}_r = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} + 2r\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_\theta = -r\sin\theta\,\mathbf{i} + r\cos\theta\,\mathbf{j}.$$

Büyütme çarpanı. Bileşenleri tek tek hesaplarsak

$$\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = -2r^2\cos\theta\,\mathbf{i} - 2r^2\sin\theta\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k}$$

bulunur. $\mathbf{k}$ bileşeni $r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$'dir. Buradan, $r \geq 0$ olduğundan

$$|\,\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta\,| = \sqrt{4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta + r^2} = \sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}$$

olur.
İntegral.

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\,dr.$$

$w = 1 + 4r^2$ dersek $dw = 8r\,dr$ olur; $r = 0$ iken $w = 1$, $r = 3$ iken $w = 37$'dir. Buradan

$$\int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\,dr = \frac{1}{8}\int_1^{37} w^{1/2}\,dw = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[\,w^{3/2}\right]_1^{37} = \frac{1}{12}\left(\,37\sqrt{37} - 1\,\right)$$

ve

$$A = 2\pi\cdot\frac{1}{12}\left(\,37\sqrt{37} - 1\,\right) = \frac{\pi}{6}\left(\,37\sqrt{37} - 1\,\right) \approx 117{,}32$$

elde edilir.
Aynı sonucu Yüzey Alanı bölümünde grafik formülüyle ve kutupsal koordinatlara sonradan geçerek bulmuştuk. Burada kutupsal koordinatlar baştan parametre olarak girdi ve $dA = r\,dr\,d\theta$'daki r çarpanı vektörel çarpımın uzunluğundan kendiliğinden çıktı. İki yolun aynı sonucu vermesi Önerme 15.2 ile uyumludur.
■

15.7 Dönel Yüzeyin Alanı

Son olarak genel tanımın, tek değişkenli analizde dönel yüzeylerin alanı için kullandığımız formülü de verdiğini görelim.

Önerme 15.4 (Dönel Yüzeyin Alanı). *f, $[a, b]$ aralığında $f \geq 0$ olan ve türevi sürekli olan bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ eğrisinin x ekseni çevresinde döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin alanı*

$$A(S) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

olur. Bu, tek değişkenli analizdeki dönel yüzey alanı formülüdür (bkz. Analiz 2).

İspat.
Parametreleme. *Önerme 15.1 önermesine göre yüzey*

$$\mathbf{r}(x, \theta) = x\,\mathbf{i} + f(x)\cos\theta\,\mathbf{j} + f(x)\sin\theta\,\mathbf{k}, \qquad (x, \theta) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$$

ile parametrelenir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teğet vektörler.

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + f'(x)\cos\theta\,\mathbf{j} + f'(x)\sin\theta\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}_\theta = -f(x)\sin\theta\,\mathbf{j} + f(x)\cos\theta\,\mathbf{k}.$$

Vektörel çarpım. *Determinantı birinci satıra göre açarsak*

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & f'(x)\cos\theta & f'(x)\sin\theta \\ 0 & -f(x)\sin\theta & f(x)\cos\theta \end{vmatrix}$$

olur. $\mathbf{i}$ *bileşeni* $ff'\cos^2\theta + ff'\sin^2\theta = ff'$ *olduğundan*

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta = f(x)f'(x)\,\mathbf{i} - f(x)\cos\theta\,\mathbf{j} - f(x)\sin\theta\,\mathbf{k}$$

bulunur. $f \geq 0$ *olduğundan uzunluğu*

$$\begin{aligned} |\,\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta\,| &= \sqrt{f^2(f')^2 + f^2\cos^2\theta + f^2\sin^2\theta} \\ &= \sqrt{f^2\,\left(\,1 + (f')^2\,\right)} = f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \end{aligned}$$

olur.
Koşullar. *f ile f' sürekli olduğundan $\mathbf{r}_x$ ile $\mathbf{r}_\theta$ süreklidir. $f(x) > 0$ olan her yerde vektörel çarpım sıfırdan farklıdır ve (x, θ), noktanın x koordinatından ve dönme açısından tek türlü bulunur. Geriye iki tür bozulma kalır. $\theta = 0$ ile $\theta = 2\pi$ kenarları aynı eğriyi verir; bu tekrar D'nin sınırında, yani sıfır alanlı bir küme boyuncadır. $f(x) = 0$ olan x değerlerinde ise $\{x\} \times [0, 2\pi]$ doğru parçası x eksenindeki tek bir noktaya gider ve orada vektörel çarpım sıfırdır. Ama bu noktalarda integrand $f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ de sıfır olduğundan integrale katkıları yoktur; yüzeyin onlara karşılık gelen kısmı da x ekseni üzerinde kalır ve alanı sıfırdır. Bu yüzden integral, yüzeyin alanını verir.*
Alan. *Tanımdan*

$$A(S) = \int_0^{2\pi}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx\,d\theta = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

elde edilir.
■

Örneğin $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$ yarım çemberi x ekseni çevresinde dönünce a yarıçaplı küre oluşur. $f'(x) = -x/\sqrt{a^2 - x^2}$ olduğundan $-a < x < a$ için

$$f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{a^2 - x^2}\,\sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}} = a$$

olur ve formül $2\pi\int_{-a}^{a} a\,dx = 4\pi a^2$ değerini verir. Bu, Örnek 15.10 sonucuyla aynıdır. f' uç noktalarda tanımsızdır; ama integrand sabit olduğundan hesabı $[-a + \varepsilon, a - \varepsilon]$ üzerinde yapıp $\varepsilon \to 0$ almak aynı sonucu verir.

15.8 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar kolaydan zora sıralanmıştır: önce yüzeyleri tanıma ve parametreleme, sonra teğet düzlem, en sonda yüzey alanı soruları gelir.

Alıştırma 15.1 (Noktalar Yüzeyin Üzerinde mi).

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v,\, u - 2v,\, 3 + u - v\rangle$$

ile verilen yüzeyin üzerinde $P(4, -5, 1)$ ve $Q(0, 4, 6)$ noktalarından hangileri bulunur?

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bir nokta yüzeydeyse, üç koordinatı birden veren bir (u, v) çifti bulunmalıdır. İlk iki denklemden (u, v)'yi bulup üçüncü denklemi denetleyelim.
$P(4, -5, 1)$. $u + v = 4$ ve $u - 2v = -5$ denklemlerini taraf tarafa çıkarırsak $3v = 9$, yani $v = 3$ ve $u = 1$ bulunur. Üçüncü koordinat $3 + 1 - 3 = 1$ olur ve P'ninkine eşittir. Demek ki P yüzeydedir ve $P = \mathbf{r}(1, 3)$'tür.
$Q(0, 4, 6)$. $u + v = 0$ ve $u - 2v = 4$ denklemlerinden $3v = -4$, yani $v = -\frac{4}{3}$ ve $u = \frac{4}{3}$ bulunur. Üçüncü koordinat

$$3 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{17}{3} \neq 6$$

olur. İlk iki denklem (u, v)'yi tek türlü belirlediğinden başka bir aday da yoktur. Demek ki Q yüzeyde değildir.
Aslında yüzey bir düzlemdir. İlk iki denklem $u = \frac{2x+y}{3}$ ve $v = \frac{x-y}{3}$ verir; bunları üçüncüde yerine koyarsak $z = 3 + \frac{x+2y}{3}$ bulunur. P bu denklemi sağlar $(3 - 2 = 1)$, Q sağlamaz.
■

Alıştırma 15.2 (Vektör Denkleminden Yüzeyi Tanımak). $\mathbf{r}(u, v) = u^2\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j} + u\sin v\,\mathbf{k}$ vektör denklemiyle verilen yüzeyi belirleyiniz.

Çözüm.
Denklem. Parametrik denklemler $x = u^2$, $y = u\cos v$, $z = u\sin v$'dir. Buradan

$$y^2 + z^2 = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2 = x$$

bulunur; yani her nokta $x = y^2 + z^2$ denklemini sağlar.
Tersi. $x = y^2 + z^2$ eşitliğini sağlayan bir (x, y, z) noktası alalım. (y, z) noktasını kutupsal biçimde $y = s\cos v$, $z = s\sin v$ olarak yazalım; burada $s = \sqrt{y^2 + z^2} \geq 0$'dır. $u = s$ seçersek $u^2 = y^2 + z^2 = x$ olur ve nokta $\mathbf{r}(u, v)$'ye eşittir.
Sonuç. Yüzey, $x = y^2 + z^2$ dairesel paraboloidinin tamamıdır. Ekseni x eksenidir, tepesi orijindedir ve x ekseninin pozitif yönüne doğru açılır. $u = u_0$ koordinat eğrileri $x = u_0^2$ düzlemindeki $|\ u_0\ |$ yarıçaplı çemberler, $v = v_0$ koordinat eğrileri de x eksenini içeren düzlemlerdeki parabollerdir.
■

Alıştırma 15.3 (Koninin Üstündeki Küre Parçası). $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisinin üstünde kalan parçası için bir parametrik gösterim bulunuz.

Çözüm.
Koşulu açılarla yazmak. Küre üzerinde $\rho = 2$'dir. Küresel koordinatlarda $z = \rho\cos\phi$ ve $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho\sin\phi$ olduğundan (çünkü $\sin\phi \geq 0$), koninin üstünde olma koşulu

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \cos\phi \geq \sin\phi$$

olur. $0 \leq \phi \leq \pi$ aralığında $\sin\phi \geq 0$ olduğundan bu eşitsizlik $\cos\phi > 0$ gerektirir ve $\tan\phi \leq 1$, yani $0 \leq \phi \leq \pi/4$ demektir.
Parametreleme. Böylece aranan parça

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = 2\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + 2\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + 2\cos\phi\,\mathbf{k}$$

ile verilir ve parametre bölgesi $0 \leq \phi \leq \pi/4$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ dikdörtgenidir. Parçanın sınırı $\phi = \pi/4$ çemberidir: $z = \sqrt{2}$ yüksekliğinde ve $\sqrt{2}$ yarıçaplıdır.
Başka bir yol. Parça, $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ üst yarıküresinin bir parçasıdır. $r^2 = x^2 + y^2$ dersek koşul $\sqrt{4 - r^2} \geq r$, yani $r^2 \leq 2$ olur. Bu yüzden x ile y'yi parametre alıp

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,\mathbf{k}, \qquad x^2 + y^2 \leq 2$$

de yazabiliriz.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 15.4 (Bir Hiperbol Kolunun Döndürülmesi). $x = 1/y, y \geq 1$ eğrisinin y ekseni çevresinde döndürülmesiyle elde edilen yüzeyin parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Dönen nokta. Eğri xy-düzlemindedir ve noktaları $(1/y, y, 0)$ biçimindedir. Bu nokta y ekseni çevresinde dönerken y koordinatı değişmez ve y eksenine uzaklığı $1/y$ kalır. Yani nokta, bu y değerinde y eksenine dik olan ve xz-düzlemine paralel düzlemde, merkezi $(0, y, 0)$ ve yarıçapı $1/y$ olan çemberi çizer.
Parametreler. Dönme açısını θ ile gösterelim ve x ekseninin pozitif yönünden z ekseninin pozitif yönüne doğru ölçelim. Önerme 15.1 önermesindeki gibi düşünürsek, bu düzlemde x ile z kutupsal koordinatlar gibi davranır:

$$x = \frac{\cos\theta}{y}, \qquad y = y, \qquad z = \frac{\sin\theta}{y}.$$

Parametreler y ile θ, parametre bölgesi $y \geq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$'dir.
Denetim. $x^2 + z^2 = \dfrac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{y^2} = \dfrac{1}{y^2}$ olur; her nokta y ekseninden $1/y$ uzaklıktadır. Yüzey, y büyüdükçe daralarak y eksenine yaklaşan bir boru biçimindedir.
■

Alıştırma 15.5 (Teğet Düzlem ve Parametrelerin Seçimi). $x = u^2 + 1, y = v^3 + 1, z = u + v$ parametrik denklemleriyle verilen yüzeyin $(5, 2, 3)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Parametreler. $u^2 + 1 = 5$ denkleminden $u = \pm 2$ bulunur. $v^3 + 1 = 2$ denkleminin tek gerçel çözümü $v = 1$'dir. Üçüncü denklem $u + v = 3$, yani $u = 2$ ister. Nokta $(u, v) = (2, 1)$ değerine karşılık gelir.
Teğet vektörler.

$$\mathbf{r}_u = 2u\,\mathbf{i} + \mathbf{k}, \qquad \mathbf{r}_v = 3v^2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

olduğundan $(2, 1)$ noktasında $\mathbf{r}_u = 4\,\mathbf{i} + \mathbf{k}$ ve $\mathbf{r}_v = 3\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ olur.
Normal vektör.

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (0-3)\,\mathbf{i} - (4-0)\,\mathbf{j} + (12-0)\,\mathbf{k} = -3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 12\,\mathbf{k}.$$

Denklem. Teğet düzlem

$$-3(x-5) - 4(y-2) + 12(z-3) = 0$$

olur. Açıp -1 ile çarparsak

$$3x + 4y - 12z + 13 = 0$$

bulunur. Denetim: $15 + 8 - 36 + 13 = 0$.
■

Alıştırma 15.6 (Parametrik Bir Düzlem Parçasının Alanı).

$$\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v,\, 2 - 3u,\, 1 + u - v \rangle, \qquad 0 \leq u \leq 2,\ -1 \leq v \leq 1$$

ile verilen düzlem parçasının alanını bulunuz.

Çözüm.
Teğet vektörler. Bileşenler u ve v'nin birinci dereceden ifadeleri olduğundan teğet vektörler sabittir:

$$\mathbf{r}_u = \langle 1, -3, 1 \rangle, \qquad \mathbf{r}_v = \langle 1, 0, -1 \rangle.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Büyütme çarpanı.

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (3-0)\,\mathbf{i} - (-1-1)\,\mathbf{j} + (0+3)\,\mathbf{k} = \langle 3, 2, 3 \rangle$$

ve $|\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\ | = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$ olur. Vektörel çarpım sıfırdan farklı ve sabit olduğundan $\mathbf{r}$ bire birdir; yüzey bir kez örtülür.
İntegral. İntegrand sabit olduğundan alan, $\sqrt{22}$ ile D'nin alanının çarpımıdır. D, kenarları 2 olan bir karedir:

$$A = \iint_D \sqrt{22}\, dA = \sqrt{22} \cdot 2 \cdot 2 = 4\sqrt{22} \approx 18{,}76.$$

Denetim. D kenarları 2 olan bir kare olduğundan yüzey, $2\,\mathbf{r}_u$ ile $2\,\mathbf{r}_v$ vektörlerinin gerdiği bir paralelkenardır ve alanı $|\ 2\,\mathbf{r}_u \times 2\,\mathbf{r}_v\ | = 4\sqrt{22}$'dir.
■

Alıştırma 15.7 (Kökü Tam Kareye Dönüşen Bir Yüzey). $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$ parametrik denklemleriyle verilen yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm.
Teğet vektörler.

$$\mathbf{r}_u = \langle 2u, v, 0 \rangle, \qquad \mathbf{r}_v = \langle 0, u, v \rangle.$$

Büyütme çarpanı. Bileşenleri tek tek hesaplarsak

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \langle v \cdot v - 0 \cdot u,\ 0 \cdot 0 - 2u \cdot v,\ 2u \cdot u - v \cdot 0 \rangle = \langle v^2, -2uv, 2u^2 \rangle$$

bulunur. Uzunluğun karesi bir tam karedir:

$$|\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\ |^2 = v^4 + 4u^2v^2 + 4u^4 = (v^2 + 2u^2)^2.$$

Bu yüzden $|\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\ | = v^2 + 2u^2$ olur. Vektörel çarpım yalnız D'nin köşesi olan $(0,0)$ noktasında sıfırdır. $u, v \ge 0$ olduğundan $u = \sqrt{x}$ ve $v = \sqrt{2z}$ noktadan tek türlü bulunur; yüzey bir kez örtülür.
İntegral.

$$A = \int_0^1 \int_0^2 (v^2 + 2u^2)\, dv\, du = \int_0^1 \left(\frac{8}{3} + 4u^2 \right) du = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4.$$

■

Alıştırma 15.8 (Helikoidin Alanı). $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u \sin v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$ ile verilen helikoidin (sarmal rampanın) alanını bulunuz.

Çözüm.
Teğet vektörler.

$$\mathbf{r}_u = \cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}_v = -u \sin v\,\mathbf{i} + u \cos v\,\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Büyütme çarpanı. Bileşenleri tek tek hesaplarsak

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \sin v\,\mathbf{i} - \cos v\,\mathbf{j} + (u\cos^2 v + u \sin^2 v)\,\mathbf{k} = \sin v\,\mathbf{i} - \cos v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$$

ve

$$|\ \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\ | = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1 + u^2}$$

bulunur. $z = v$ koordinatı v'yi, $\sqrt{x^2 + y^2} = u$ da u'yu verdiğinden yüzey bir kez örtülür.

 CC BY-NC-SA 4.0

İntegral. İntegrand v'ye bağlı olmadığından

$$A = \int_0^{\pi} \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du\,dv = \pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du$$

olur. $I = \int \sqrt{1+u^2}\,du$ diyelim. Kısmi integrasyonla

$$\begin{aligned} I &= u\sqrt{1+u^2} - \int \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\,du \\ &= u\sqrt{1+u^2} - I + \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \end{aligned}$$

bulunur; ikinci adımda $u^2 = (1+u^2) - 1$ yazdık. $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2} \right)$ olduğundan, I'yı yalnız bırakırsak

$$\int \sqrt{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2} \right) \right] + C$$

elde edilir. 0 ile 1 arasında değerlendirirsek

$$A = \pi \cdot \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2} \right) \right] \approx 3{,}606$$

bulunur.
■

Alıştırma 15.9 (Eğimleri Sınırlı Bir Yüzeyin Alanı). S yüzeyinin denklemi $z = f(x,y)$, $x^2+y^2 \le R^2$'dir. f_x ile f_y sürekli ve her noktada $|\,f_x\,| \le 1$, $|\,f_y\,| \le 1$ olduğu biliniyor. $A(S)$ hakkında ne söylenebilir?

Çözüm.
İntegrandı sınırlamak. $0 \le f_x^2 \le 1$ ve $0 \le f_y^2 \le 1$ olduğundan

$$1 \le 1 + f_x^2 + f_y^2 \le 3, \qquad \text{yani} \qquad 1 \le \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} \le \sqrt{3}$$

olur.
İntegrali sınırlamak. D, alanı πR^2 olan dairedir. Önerme 15.3 formülünü ve iki katlı integralin sınırlama özelliğini (bkz. Önerme 2.1) kullanırsak

$$\pi R^2 \le A(S) = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dA \le \sqrt{3}\,\pi R^2$$

bulunur.
Sınırlar iyileştirilemez. f sabitse yüzey düz bir dairedir ve $A(S) = \pi R^2$ olur. $f(x,y) = x + y$ için her noktada $f_x = f_y = 1$'dir ve $A(S) = \sqrt{3}\,\pi R^2$ olur.
■

Alıştırma 15.10 (Paraboloidin İçindeki Küre Parçası). $x^2+y^2+z^2 = 4z$ küresinin $z = x^2+y^2$ paraboloidinin içinde kalan parçasının alanını bulunuz.

Çözüm.
Parçayı belirlemek. Küre denklemi $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$ biçiminde yazılabilir; merkezi $(0,0,2)$, yarıçapı 2'dir ve üzerinde $0 \le z \le 4$'tür. Paraboloidin içi, çanağın içi olan $z \ge x^2+y^2$ bölgesidir. Küre üzerinde $x^2+y^2 = 4z - z^2$ olduğundan koşul

$$z \ge 4z - z^2 \Leftrightarrow z^2 - 3z \ge 0 \Leftrightarrow z \le 0 \;\text{ ya da }\; z \ge 3$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Küre üzerinde $z = 0$ yalnız orijinde sağlanır; bu tek nokta alana katkı vermez. Aranan parça, kürenin $z \geq 3$ olan kapağıdır.
Parametreleme. Küresel açıları merkeze göre alalım:

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = 2\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + 2\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + (2 + 2\cos\phi)\,\mathbf{k}.$$

$z \geq 3$ koşulu $2 + 2\cos\phi \geq 3$, yani $\cos\phi \geq \frac{1}{2}$ demektir. Bu da $0 \leq \phi \leq \pi/3$ verir. Parametre bölgesi $[0, \pi/3] \times [0, 2\pi]$'dir.
Büyütme çarpanı. $\mathbf{r}$, 2 yarıçaplı ve orijin merkezli kürenin Örnek 15.4 parametrelemesinin $2\,\mathbf{k}$ kadar ötelenmişidir. Öteleme kısmi türevleri değiştirmediğinden Örnek 15.10 hesabı $a = 2$ ile $|\,\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\,| = 4\sin\phi$ verir.
İntegral.

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3} 4\sin\phi d\phi\, d\theta = 2\pi \cdot 4\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/3} = 8\pi\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4\pi.$$

Sonuç, küre kapağının alanı için Arşimet'in bulduğu $2\pi Rh$ formülüyle uyumludur: burada $R = 2$ ve kapağın yüksekliği $h = 4 - 3 = 1$'dir.
■

Alıştırma 15.11 (Torusun Parametrelenmesi). $0 < a < b$ olsun. xz-düzleminde merkezi $(b, 0, 0)$ ve yarıçapı a olan çember z ekseni çevresinde döndürülerek bir torus elde ediliyor. Çember üzerindeki açıyı α, dönme açısını θ ile göstererek torusun parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Çember. α açısını çemberin merkezinden, x ekseninin pozitif yönünden z ekseninin pozitif yönüne doğru ölçelim. Çemberin noktaları

$$(b + a\cos\alpha,\, 0,\, a\sin\alpha), \qquad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

olur.
Döndürme. Bu nokta z ekseni çevresinde dönerken yüksekliği $a\sin\alpha$ ve z eksenine uzaklığı $b + a\cos\alpha$ değişmez; $a < b$ olduğundan bu uzaklık pozitiftir. Nokta bu yükseklikte, $b + a\cos\alpha$ yarıçaplı yatay bir çember çizer. Dönme açısı θ ise xy-düzlemindeki kutupsal açı gibi davranır:

$$x = (b + a\cos\alpha)\cos\theta, \qquad y = (b + a\cos\alpha)\sin\theta, \qquad z = a\sin\alpha.$$

Parametre bölgesi $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ karesidir.
Denetim. $\sqrt{x^2 + y^2} = b + a\cos\alpha$ olduğundan

$$\big(\sqrt{x^2 + y^2} - b\big)^2 + z^2 = a^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha = a^2$$

olur. Bu, z eksenine uzaklığı b olan çember çevresindeki a yarıçaplı tüpün, yani torusun denklemidir. θ sabit koordinat eğrileri döndürülen çemberin kopyaları, α sabit olanlar da yatay çemberlerdir.
■

Alıştırma 15.12 (Torusun Alanı). $0 < a < b$ olsun.

$$\mathbf{r}(\theta, \alpha) = (b + a\cos\alpha)\cos\theta\,\mathbf{i} + (b + a\cos\alpha)\sin\theta\,\mathbf{j} + a\sin\alpha\,\mathbf{k}$$

ile verilen torusun (bkz. Alıştırma 15.11) alanını bulunuz; parametre bölgesi $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$'dir.

Çözüm.
Teğet vektörler. Kısalık için $w = b + a\cos\alpha$ diyelim; $a < b$ olduğundan $w > 0$'dır.

$$\mathbf{r}_\theta = -w\sin\theta\,\mathbf{i} + w\cos\theta\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{r}_\alpha = -a\sin\alpha\cos\theta\,\mathbf{i} - a\sin\alpha\sin\theta\,\mathbf{j} + a\cos\alpha\,\mathbf{k}.$$

Büyütme çarpanı. Bileşenleri tek tek hesaplayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\mathbf{i}\ &\text{bileşeni} = (w\cos\theta)(a\cos\alpha) - 0 = aw\cos\alpha\cos\theta,\\ \mathbf{j}\ &\text{bileşeni} = 0 - (-w\sin\theta)(a\cos\alpha) = aw\cos\alpha\sin\theta,\\ \mathbf{k}\ &\text{bileşeni} = aw\sin\alpha\sin^2\theta + aw\sin\alpha\cos^2\theta = aw\sin\alpha.\end{aligned}$$

Buradan

$$\mid \mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\alpha \mid = aw\sqrt{\cos^2\alpha\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sin^2\alpha} = aw = a(b + a\cos\alpha)$$

bulunur.
İntegral.

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} a(b + a\cos\alpha)d\alpha\,d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\Big[\,ab\,\alpha + a^2\sin\alpha\Big]_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} 2\pi ab d\theta = 4\pi^2 ab.\end{aligned}$$

Sonuç, döndürülen çemberin uzunluğu $2\pi a$ ile merkezinin çizdiği çemberin uzunluğu $2\pi b$'nin çarpımıdır.
■

Parametrik yüzeyler ve $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektörü, bundan sonraki bölümlerin temel aracı olacak. $\mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid$ alan ölçmeyi, $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektörünün kendisi de yüzeyin bir yüzünü seçmeyi sağlar. Bir sonraki bölümde, alanını ölçmeyi öğrendiğimiz yüzeyler üzerinde fonksiyonları ve vektör alanlarını integralleyeceğiz: Yüzey İntegralleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

16. Yüzey İntegralleri

Eğrisel integralde bir fonksiyonu bir eğri boyunca, küçük yayların uzunluklarıyla ağırlıklandırarak topladık; fonksiyon 1 alındığında integral eğrinin uzunluğunu verdi. Bu bölümde aynı düşünceyi bir boyut yukarı taşıyacağız: bir $f(x, y, z)$ fonksiyonunu bir S yüzeyi üzerinde, küçük yüzey parçalarının alanlarıyla ağırlıklandırarak toplayacağız. Ortaya çıkan **yüzey integrali**, $f = 1$ alındığında S'nin alanını verecek. Yüzey integralinin iki türü vardır. Birincisi skaler bir fonksiyonun integralidir; ince, eğri bir levhanın kütlesi ya da kütle merkezi bu türdendir. İkincisi bir vektör alanının yüzeyden geçen **akısıdır**: bir akışkanın bir zardan birim zamanda ne kadarının geçtiğini ya da bir elektrik alanının kapalı bir yüzeyden net olarak ne kadar "çıktığını" ölçer. Akıdan söz edebilmek için önce yüzeyin iki yüzünden hangisinin "pozitif" olduğunu, yani bir yönlendirme seçmemiz gerekecek. Son iki bölümün konusu olan Stokes ve diverjans teoremleri bu kavramların üzerine kurulur.

16.1 Parametrik Yüzeyler Üzerinde Yüzey İntegrali

Önce yüzeyi parametrik olarak verelim ve integrali bir Riemann toplamının limiti olarak tanımlayalım. S yüzeyi (bkz. Tanım 15.1)

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\,\mathbf{i} + y(u, v)\,\mathbf{j} + z(u, v)\,\mathbf{k}, \qquad (u, v) \in D$$

vektör denklemiyle verilsin ve f, S'yi içeren bir bölgede tanımlı bir fonksiyon olsun. Önce D'nin bir dikdörtgen olduğunu varsayalım. D'yi kenarları Δu ve Δv olan R_{ij} alt dikdörtgenlerine bölelim ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$). $\mathbf{r}$, her R_{ij}'yi yüzey üzerindeki bir S_{ij} yamasına götürür; bu yamanın alanına ΔS_{ij} diyelim. Her yamadan bir P_{ij}^* noktası seçip

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

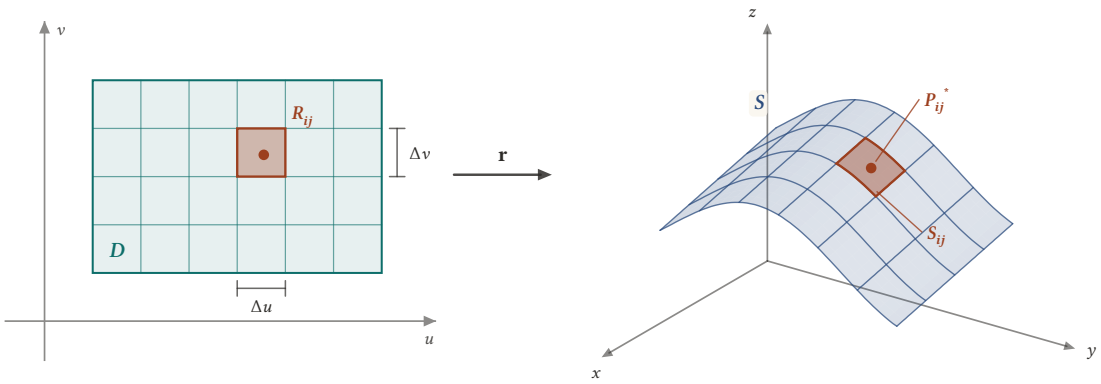
Riemann toplamını kuralım: her yamada f'nin bir değerini yamanın alanıyla çarpıp bu çarpımları topluyoruz.

Tanım 16.1 (Yüzey İntegrali). f'nin S yüzeyi üzerindeki **yüzey integrali** (surface integral)

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(P_{ij}^*)\,\Delta S_{ij}$$

limitidir. Limitin var olması ve P_{ij}^* noktalarının yamalardan nasıl seçildiğine bağlı olmaması istenir. D bir dikdörtgen değilse D'yi içine alan bir dikdörtgen bölünür ve toplama yalnız D'nin içinde kalan R_{ij}'ler katılır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.1: $\mathbf{r}$, uv-düzlemindeki D dikdörtgenini S yüzeyine götürür. D'nin $\Delta u \times \Delta v$ boyutlu her R_{ij} alt dikdörtgeni, yüzeyde bir S_{ij} yamasına karşılık gelir. Riemann toplamında f, yamadan seçilen bir P_{ij}^* noktasında hesaplanır ve yamanın alanıyla çarpılır.

Yani yüzeyi küçük yamalara bölüyor, her yamada f'yi sabit sayıyor ve "değer çarpı alan" çarpımlarını topluyoruz. Tanım, iki katlı integralin (Tanım 1.2) ve yay uzunluğuna göre eğrisel integralin (Tanım 11.1) tanımlarıyla aynı kalıptadır: orada küçük dikdörtgenlerin alanları ya da küçük yayların uzunlukları vardı, burada küçük yüzey parçalarının alanları var. S ince bir levha ve f de levhanın birim alan başına kütlesi olsaydı, Riemann toplamı levhanın kütlesine yaklaşırdı.

16.2 Yüzey İntegralinin Hesaplanması

Tanımla doğrudan hesap yapmak zordur; integrali parametre bölgesi D üzerinde bir iki katlı integrale çevirmek isteriz. Bunun anahtarı yamaların alanıdır.
Parametrik yüzeylerin alanını incelerken gördüğümüz gibi, S_{ij} yaması köşesindeki teğet düzlemde $\Delta u\,\mathbf{r}_u$ ve $\Delta v\,\mathbf{r}_v$ vektörlerinin gerdiği paralelkenara çok yakındır; burada

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k}$$

yüzeyin teğet vektörleridir. Paralelkenarın alanı, kenar vektörlerinin vektörel çarpımının uzunluğu olduğundan

$$\Delta S_{ij} \approx |\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|\,\Delta u\,\Delta v$$

olur. Bunu Riemann toplamına yazınca toplam, $f(\mathbf{r}(u,v))\,|\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|$ fonksiyonunun D üzerindeki bir Riemann toplamına dönüşür. Aşağıdaki teorem bu sezgiyi kesinleştirir.

Teorem 16.1 (Yüzey İntegralinin Hesabı). *S yüzeyi $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ ile verilsin; D bir dikdörtgen ya da I. ve II. tip bölgelerin (bkz. Tanım 2.2 ve Tanım 2.3) sonlu bir birleşimi olsun. $\mathbf{r}$'nin bileşenlerinin kısmi türevleri D üzerinde sürekli, $\mathbf{r}_u$ ve $\mathbf{r}_v$ de D'nin iç noktalarında sıfırdan farklı ve birbirine paralel olmayan vektörler olsun. (u,v), D'yi tararken S yalnız bir kez örtülsün. f, S üzerinde sürekli ise*

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))\,|\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|\,dA \tag{1}$$

olur.

> ***İspat.***
> *Kısalık için*
>
> $$g(u,v) = |\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|, \qquad h(u,v) = f(\mathbf{r}(u,v))\,g(u,v)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

diyelim. Sürekli fonksiyonların bileşkeleri ve çarpımları sürekli olduğundan g ve h, D üzerinde süreklidir. $f \circ \mathbf{r}$ de kapalı ve sınırlı D üzerinde sürekli olduğundan, her $(u,v) \in D$ için $\mid f(\mathbf{r}(u,v)) \mid \leq M$ olacak bir M sayısı vardır. R, D'yi içine alan ve bölünen dikdörtgen olsun; $\Delta A = \Delta u\, \Delta v$ yazalım.
Adım 1: Yamanın alanı. *S_{ij} yaması, $\mathbf{r}$'nin R_{ij} üzerindeki kısıtlanışıyla verilen ve bir kez örtülen bir parametrik yüzeydir. Parametrik yüzeyin alanının tanımına (Tanım 15.5) göre*

$$\Delta S_{ij} = \iint_{R_{ij}} g(u,v)dA$$

olur.
Adım 2: Yamada g'yi sabit saymanın hatası. *P_{ij}^* yamanın bir noktası olduğundan $P_{ij}^* = \mathbf{r}(u_{ij}^*, v_{ij}^*)$ olacak bir $(u_{ij}^*, v_{ij}^*) \in R_{ij}$ vardır. Bir $\varepsilon > 0$ verilsin. g, kapalı ve sınırlı D üzerinde sürekli olduğundan düzgün süreklidir (bkz. Analiz 4). Dolayısıyla alt dikdörtgenlerin köşegenleri yeterince küçükken, aynı R_{ij}'deki her (u,v) için $\mid g(u,v) - g(u_{ij}^*, v_{ij}^*) \mid < \varepsilon$ olur. Bu durumda Adım 1'den*

$$\begin{aligned} \mid \Delta S_{ij} - g(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\, \Delta A \mid &= \left| \iint_{R_{ij}} \left(g(u,v) - g(u_{ij}^*, v_{ij}^*) \right) dA \right| \\ &\leq \varepsilon\, \Delta A \end{aligned}$$

bulunur.
Adım 3: Toplamı ikiye ayırmak. *D'nin içinde kalan R_{ij}'ler üzerinden alınan Riemann toplamını*

$$\begin{aligned} \sum f(P_{ij}^*)\, \Delta S_{ij} = &\sum h(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\, \Delta A \\ &+ \sum f(P_{ij}^*) \left(\Delta S_{ij} - g(u_{ij}^*, v_{ij}^*)\, \Delta A \right) \end{aligned}$$

biçiminde yazalım. $\mid f(P_{ij}^*) \mid \leq M$ olduğundan Adım 2'ye göre ikinci toplamın mutlak değeri en çok

$$\sum M\, \varepsilon\, \Delta A \leq M\, \varepsilon\, A(R)$$

olur. ε keyfi olduğundan ikinci toplam, bölünüş inceldikçe sıfıra gider.
Adım 4: Limit. *İlk toplam, sürekli h fonksiyonunun örnek noktaları (u_{ij}^*, v_{ij}^*) olan bir Riemann toplamıdır. D bir dikdörtgense bu toplam, iki katlı integralin tanımı gereği (Tanım 1.2) $\iint_D h\, dA$'ya yakınsar. D, I. ve II. tip bölgelerin sonlu bir birleşimiyse, yüzey alanı formülünün ispatının son adımında gösterildiği gibi (bkz. Teorem 5.1) D'nin sınırına değen alt dikdörtgenlerin toplam alanı sıfıra gider. Bu yüzden yalnız D'nin içindeki alt dikdörtgenler üzerinden alınan toplam da $\iint_D h\, dA$'ya yakınsar.*
Böylece Riemann toplamlarının limiti vardır, P_{ij}^* noktalarının seçimine bağlı değildir ve

$$\iint_S f\, dS = \iint_D h\, dA = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v)) \mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid dA$$

olur.
■

Yani (1) formülü yüzey integralini parametre bölgesi D üzerinde bir iki katlı integrale çevirir: dS yerine $\mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid dA$ yazılır, $f(x,y,z)$'de de x, y, z yerine $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ konur. Bunu yay uzunluğuna göre eğrisel integralin hesap formülüyle karşılaştırın:

$$\int_C f(x,y,z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \mid \mathbf{r}'(t) \mid dt.$$

Orada uzunluk çarpanı $\mid \mathbf{r}'(t) \mid$ idi, burada alan çarpanı $\mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid$'dir. Özel olarak $f = 1$ alınırsa

$$\iint_S 1\, dS = \iint_D \mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid dA = A(S)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; yüzey integrali yüzeyin alanını verir (bkz. Tanım 15.5). Parametreleme bir değişken değiştirmesiyle başka bir parametrelemeye çevrildiğinde yüzey integralinin değeri değişmez; bunu akı integraliyle birlikte ileride göreceğiz (bkz. Önerme 16.1).
Formülü uygularken her seferinde aynı dört adımı izleriz.

Yüzey integrali dört adımda

1. **Parametrele.** S'yi $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$ biçiminde yaz ve D'yi açıkça belirle.
2. **Alan çarpanını bul.** $\mathbf{r}_u$, $\mathbf{r}_v$ ve $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$'yi hesapla, $|\,\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\,|$'yi sadeleştir.
3. **İntegrandı yaz.** $f(x,y,z)$'de x, y, z yerine $\mathbf{r}(u,v)$'nin bileşenlerini koy ve sonucu $|\,\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\,|$ ile çarp.
4. **İki katlı integrali hesapla.** D üzerinde ardışık integral kur ve hesapla.

Önce alan çarpanının sabit olduğu bir ısınma örneğiyle başlayalım.

Örnek 16.1 (Bir Paralelkenar Üzerinde Yüzey İntegrali). S, $x=u+v$, $y=u-v$, $z=1+2u+v$, $0\le u\le 2$, $0\le v\le 1$ parametrik denklemleriyle verilen paralelkenar olsun. $\iint_S (x+y+z)\,dS$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Parametreleme. Yüzeyin vektör denklemi

$$\mathbf{r}(u,v)=(u+v)\,\mathbf{i}+(u-v)\,\mathbf{j}+(1+2u+v)\,\mathbf{k}$$

ve parametre bölgesi $D=[0,2]\times[0,1]$'dir.
Alan çarpanı. $\mathbf{r}_u=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$ ve $\mathbf{r}_v=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ olduğundan

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&1&2\\1&-1&1\end{vmatrix}=3\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\,\mathbf{k}$$

ve $|\,\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\,|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$ bulunur. S bir düzlem parçası olduğundan alan çarpanı sabittir.
İntegrand. Yüzey üzerinde

$$x+y+z=(u+v)+(u-v)+(1+2u+v)=4u+v+1$$

olur.
İntegral. (1) formülünden

$$\begin{aligned}\iint_S (x+y+z)\,dS&=\sqrt{14}\int_0^1\int_0^2 (4u+v+1)\,du\,dv\\&=\sqrt{14}\int_0^1\Big[\,2u^2+(v+1)\,u\Big]_{u=0}^{u=2}\,dv\\&=\sqrt{14}\int_0^1 (10+2v)\,dv=11\sqrt{14}\approx 41{,}16\end{aligned}$$

bulunur.
■

Kürenin parametrelemesinde alan çarpanı artık sabit değildir.

Örnek 16.2 (Birim Küre Üzerinde Bir İntegral). S, $x^2+y^2+z^2=1$ birim küresi olmak üzere $\iint_S x^2\,dS$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Parametreleme. Küresel koordinatlarda (bkz. Tanım 8.1) $\rho=1$ alarak

$$\mathbf{r}(\phi,\theta)=\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j}+\cos\phi\,\mathbf{k},\qquad 0\le\phi\le\pi,\,0\le\theta\le 2\pi$$

 CC BY-NC-SA 4.0

parametrelemesini kullanırız; $D = [0,\pi]\times[0,2\pi]$'dir.
Alan çarpanı. Kürenin alanını hesaplarken bulduğumuz gibi (Parametrik Yüzeyler ve Alanları), $a = 1$ için

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin^2\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \sin\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

ve $0 \le \phi \le \pi$ için $\sin\phi \ge 0$ olduğundan

$$|\,\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\,| = \sqrt{\sin^4\phi + \sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{\sin^2\phi} = \sin\phi$$

olur.
İntegrand. Küre üzerinde $x^2 = \sin^2\phi\cos^2\theta$ olur.
İntegral. İntegrand bir θ fonksiyonu ile bir ϕ fonksiyonunun çarpımı olduğundan ardışık integral iki tek katlı integralin çarpımına ayrılır:

$$\begin{aligned}\iint_S x^2\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\phi\cos^2\theta\cdot\sin\phi\,d\phi\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta \int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi.\end{aligned}$$

$\cos^2\theta = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ ve $\sin^3\phi = \sin\phi - \sin\phi\cos^2\phi$ özdeşlikleriyle

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\,\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{2\pi} = \pi,$$
$$\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi = \Big[-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

bulunur. Böylece $\iint_S x^2\,dS = \pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{4\pi}{3}$ olur.
Denetim. Küre üç eksene göre de aynı biçimde durduğundan x^2, y^2 ve z^2'nin küre üzerindeki integralleri eşittir. Küre üzerinde $x^2+y^2+z^2 = 1$ olduğundan bu üç integralin toplamı

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS = \iint_S 1\,dS = 4\pi,$$

yani kürenin alanıdır. Her biri bunun üçte biri, yani $\frac{4\pi}{3}$'tür.
■

Yüzey integralleri, şimdiye kadar gördüğümüz integrallerle aynı türden uygulamalara sahiptir. İnce bir alüminyum folyo gibi, kalınlığı ihmal edilebilen ve bir yüzey biçiminde olan levhaları düşünelim.

Tanım 16.2 (İnce Levhanın Kütlesi ve Kütle Merkezi). İnce bir levha bir S yüzeyi biçiminde olsun ve (x,y,z) noktasındaki yoğunluğu (birim alan başına kütlesi) $\rho(x,y,z)$ olsun. Levhanın **kütlesi**

$$m = \iint_S \rho(x,y,z)\,dS,$$

kütle merkezi ise koordinatları

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_S x\,\rho\,dS, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_S y\,\rho\,dS, \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iint_S z\,\rho\,dS$$

olan $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ noktasıdır.

Yani levhanın kütlesi yoğunluğun yüzey integralidir; kütle merkezi de koordinatların yoğunlukla ağırlıklandırılmış ortalamasıdır. Bunlar düzlemsel levhalar için verdiğimiz tanımların (Tanım 4.4) eğri yüzeylere taşınmış hâlidir. Eylemsizlik momentleri de aynı biçimde tanımlanır (bkz. Tanım 4.5); örneğin levhanın z eksenine göre eylemsizlik momenti $I_z = \iint_S (x^2+y^2)\,\rho\,dS$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

16.3 Fonksiyon Grafikleri Üzerinde Yüzey İntegrali

Pek çok yüzey bir fonksiyonun grafiğidir; bu durumda parametreleme kendiliğinden gelir ve (1) formülü daha kullanışlı bir biçim alır.
$z = g(x, y)$ denklemli bir S yüzeyi, x ile y parametre seçilerek

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + g(x, y)\,\mathbf{k}, \qquad (x, y) \in D$$

biçiminde parametrelenir; D, S'nin xy-düzlemine izdüşümüdür. Bu durumda $\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + g_x\,\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_y = \mathbf{j} + g_y\,\mathbf{k}$ ve

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & g_x \\ 0 & 1 & g_y \end{vmatrix} = -g_x\,\mathbf{i} - g_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \tag{2}$$

olur; burada $g_x = \partial g/\partial x$ ve $g_y = \partial g/\partial y$'dir.

Sonuç 16.1 (Grafik Üzerinde Yüzey İntegrali). *S, $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$ grafiği olsun; D bir dikdörtgen ya da I. ve II. tip bölgelerin sonlu bir birleşimi, g_x ile g_y de D üzerinde sürekli olsun. f, S üzerinde sürekli ise*

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\,\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}\,dA \tag{3}$$

olur.

> ***İspat.***
> *(2)'deki vektörün $\mathbf{k}$ bileşeni 1 olduğundan $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$ hiçbir yerde sıfır olmaz; yani $\mathbf{r}_x$ ile $\mathbf{r}_y$ sıfırdan farklıdır ve paralel değildir. Bileşenleri 1, 0, g_x, g_y olduğundan süreklidirler. Farklı (x, y) noktaları grafiğin farklı noktalarına gittiğinden S bir kez örtülür. Ayrıca*
>
> $$|\,\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\,| = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}$$
>
> *ve yüzey üzerinde $f(\mathbf{r}(x, y)) = f(x, y, g(x, y))$'dir. Bunları yüzey integralinin hesap formülünde (Teorem 16.1) yerine yazınca (3) çıkar.*
> ■

Yani grafik üzerinde dS yerine $\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}\,dA$ yazılır, z yerine de $g(x, y)$ konur. Bu alan çarpanı, yüzey alanı formülündekiyle (Teorem 5.1) aynıdır.
Yüzeyi başka bir koordinat düzlemine izdüşürmek daha uygunsa değişkenlerin rollerini değiştiririz. Örneğin S, $y = h(x, z)$ denklemiyle verilmişse ve D onun xz-düzlemine izdüşümüyse

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(x, h(x, z), z)\,\sqrt{h_x^2 + h_z^2 + 1}\,dA$$

olur. $x = k(y, z)$ biçimindeki bir yüzeyde de integral, yüzeyin yz-düzlemine izdüşümü üzerinde $\sqrt{k_y^2 + k_z^2 + 1}$ çarpanıyla alınır.

Örnek 16.3 (Bir Grafik Üzerinde Yüzey İntegrali). S, $z = x + y^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$ yüzeyi olmak üzere $\iint_S y\,dS$ integralini hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> **Alan çarpanı.** $g(x, y) = x + y^2$ için $g_x = 1$ ve $g_y = 2y$ olduğundan
>
> $$\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} = \sqrt{1 + 4y^2 + 1} = \sqrt{2}\,\sqrt{1 + 2y^2}$$
>
> bulunur.
> **İntegral.** $D = [0, 1] \times [0, 2]$ üzerinde (3) formülünden

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_S y\,dS = \int_0^1 \int_0^2 y\,\sqrt{2}\,\sqrt{1+2y^2}\,dy\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 dx \int_0^2 y\sqrt{1+2y^2}\,dy$$

olur. İkinci integralde $w = 1+2y^2$ dersek $dw = 4y\,dy$ olur; $y=0$ iken $w=1$, $y=2$ iken $w=9$'dur:

$$\int_0^2 y\sqrt{1+2y^2}\,dy = \frac{1}{4}\int_1^9 w^{1/2}\,dw = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left[\,w^{3/2}\right]_1^9 = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{13}{3}.$$

İlk integral 1 olduğundan

$$\iint_S y\,dS = \frac{13\sqrt{2}}{3} \approx 6{,}13$$

bulunur.
■

Bir küpün yüzeyi altı kareden, bir konserve kutusunun yüzeyi de bir silindir parçasıyla iki daireden oluşur. Bu parçaların her biri düzgündür, ama birleştikleri kenarlarda yüzey kırılır. Böyle yüzeylerde integrali parça parça alırız.

Tanım 16.3 (Parçalı Düzgün Yüzey). Yalnız sınır eğrileri boyunca kesişen sonlu sayıda $S_1, S_2, \ldots, S_n$ düzgün yüzeyinin birleşimi olan bir S yüzeyine **parçalı düzgün** (piecewise-smooth) yüzey denir. Böyle bir yüzey üzerinde yüzey integrali

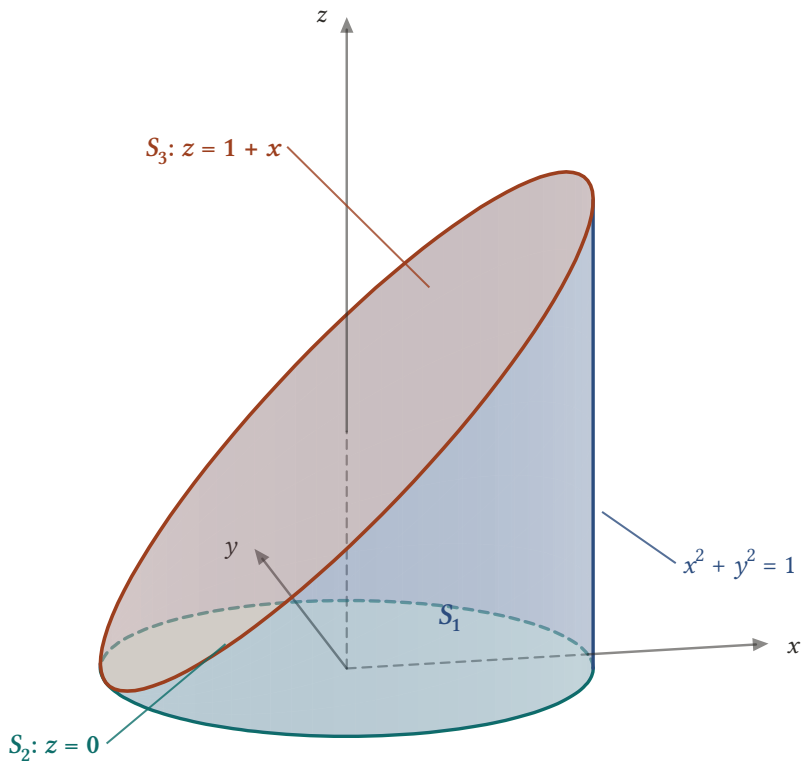
$$\iint_S f\,dS = \iint_{S_1} f\,dS + \iint_{S_2} f\,dS + \cdots + \iint_{S_n} f\,dS$$

olarak tanımlanır.

Yani parçalı düzgün bir yüzeyde integrali her düzgün parçada ayrı ayrı hesaplayıp sonuçları toplarız. Burada düzgün yüzey, $\mathbf{r}_u$ ile $\mathbf{r}_v$'nin sürekli ve $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$'nin hiç sıfır olmadığı bir parametrelemesi bulunan yüzeydir (Parametrik Yüzeyler ve Alanları). Parçalar yalnız eğriler boyunca kesiştiğinden ve bir eğrinin alanı sıfır olduğundan, ortak kenarlar toplama iki kez girse de sonucu değiştirmez.

Örnek 16.4 (Üç Parçalı Bir Yüzey). S bir cismin yüzeyi olsun: yan yüzü $x^2+y^2=1$ silindirinin bir parçası olan S_1, tabanı $z=0$ düzlemindeki $x^2+y^2\le 1$ dairesi S_2, tavanı da $z = 1+x$ düzleminin S_2'nin üstündeki parçası S_3'tür. $\iint_S z\,dS$ integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.2: S yüzeyi üç parçadan oluşur: $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin yan yüzü S_1, $z = 0$ düzlemindeki birim daire S_2 ve $z = 1 + x$ düzleminin bu dairenin üstündeki parçası S_3. Tavan, $x = 1$'de 2 yüksekliğine çıkar ve $(-1, 0, 0)$ noktasında tabana değer.

Çözüm.
İntegrali üç parçada ayrı ayrı hesaplayıp toplayacağız.
Yan yüz S_1. Silindiri θ ve z parametreleriyle

$$\mathbf{r}(\theta, z) = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

biçiminde yazarız. S_1 tabandan tavana kadar uzandığından parametre bölgesi

$$D_1 = \{(\theta, z) : 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 1 + \cos\theta\}$$

olur; tavanın yüksekliği $1 + x = 1 + \cos\theta$'dır. Buradan

$$\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$$

ve $|\,\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z\,| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} z\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} z\,dz\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big[\, 1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \,\Big] d\theta \\ &= \frac{1}{2}\Big[\, \frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \Big]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Taban S_2. S_2 üzerinde $z = 0$ olduğundan

$$\iint_{S_2} z\,dS = \iint_{S_2} 0\,dS = 0$$

olur.
Tavan S_3. S_3, birim daire D'nin üstünde, $z = g(x,y) = 1 + x$ grafiğidir. $g_x = 1$ ve $g_y = 0$ olduğundan alan çarpanı $\sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$'dir. (3) formülünü uygulayıp kutupsal koordinatlara geçersek (bkz. Teorem 3.1)

$$\begin{aligned}\iint_{S_3} z\,dS &= \iint_D (1+x)\,\sqrt{2}\,dA = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\theta\Big)\,d\theta = \sqrt{2}\Big[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{3}\Big]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\,\pi\end{aligned}$$

bulunur.
Toplam. Parçalı düzgün yüzeyin tanımına (Tanım 16.3) göre

$$\iint_S z\,dS = \frac{3\pi}{2} + 0 + \sqrt{2}\,\pi = \Big(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\Big)\,\pi \approx 9{,}16$$

olur.
■

16.4 Yönlendirilmiş Yüzeyler

Vektör alanlarının yüzey integralini tanımlamadan önce, akışı yüzeyin hangi yüzünden hangi yüzüne doğru ölçtüğümüzü belirlememiz gerekir. Bunun için yüzeyin iki yüzü olmalı ve bunlardan birini seçebilmeliyiz.
Her yüzeyin iki yüzü yoktur. Uzun, dikdörtgen biçimli bir kâğıt şerit alıp yarım tur bükelim ve kısa kenarlarını birbirine yapıştıralım. Elde edilen yüzeye **Möbius şeridi** denir; adını Alman matematikçi August Möbius'tan (1790–1868) alır. Şeridin bir P noktasından yola çıkan bir karınca, hiçbir kenarı aşmadan şeridi bir kez dolaşınca P'nin "arka yüzüne" varır; yürümeye devam ederse yine hiçbir kenarı aşmadan P'ye geri döner. Möbius şeridinin tek bir yüzü vardır.
Bunu formülle de görebiliriz. Möbius şeridi, $0 \le u \le 2\pi$ ve $-1 \le w \le 1$ için

$$\begin{aligned}x &= \Big(1 + \frac{w}{2}\cos\frac{u}{2}\Big)\cos u,\\ y &= \Big(1 + \frac{w}{2}\cos\frac{u}{2}\Big)\sin u,\\ z &= \frac{w}{2}\sin\frac{u}{2}\end{aligned}$$

parametrik denklemleriyle verilir. $w = 0$ alınınca xy-düzlemindeki birim çember, yani şeridin orta çizgisi elde edilir; u, 0'dan 2π'ye giderken şeridin kesiti yarım tur döner. Orta çember üzerinde ($w = 0$) teğet vektörler

$$\mathbf{r}_u = -\sin u\,\mathbf{i} + \cos u\,\mathbf{j}, \qquad \mathbf{r}_w = \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\cos u\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\sin u\,\mathbf{j} + \frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\,\mathbf{k}$$

olur ve vektörel çarpımları

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_w = \frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\cos u\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}\sin u\,\mathbf{j} - \frac{1}{2}\cos\frac{u}{2}\,\mathbf{k}$$

bulunur. Bu vektörün uzunluğu her u için $\frac{1}{2}$'dir; $2(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_w)$ birim vektörüne $\mathbf{N}(u)$ diyelim. $u = 0$ ve $u = 2\pi$ aynı $P = (1,0,0)$ noktasını verir, ama

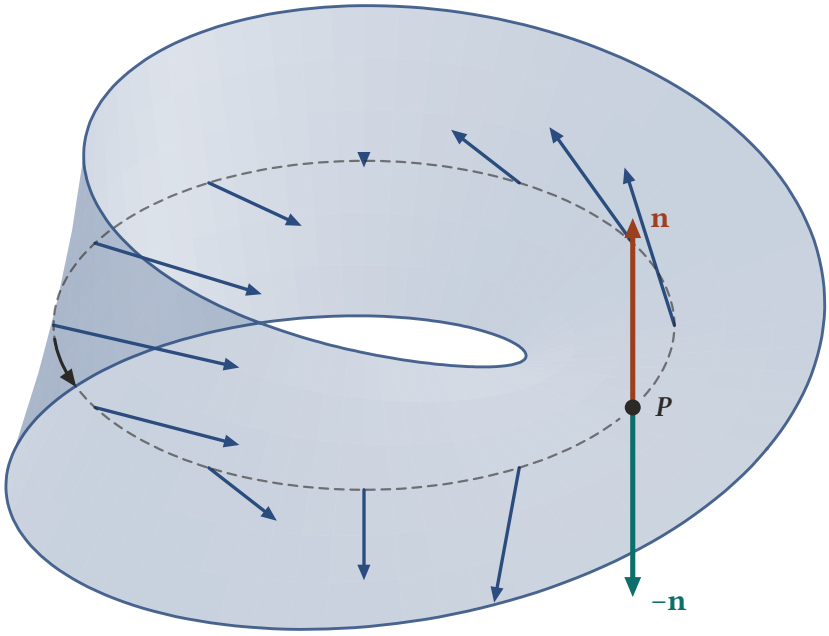
$$\mathbf{N}(0) = -\mathbf{k}, \qquad \mathbf{N}(2\pi) = \mathbf{k}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.
Şimdi şeridin her noktasında, şerit boyunca sürekli değişen bir $\mathbf{n}$ birim normali seçilebildiğini varsayalım. Orta çemberin her noktasında yalnız iki birim normal vardır: $\mathbf{N}(u)$ ve $-\mathbf{N}(u)$. Bu yüzden $\varepsilon(u) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{N}(u)$ sayısı yalnız 1 ya da -1 olabilir. ε sürekli bir fonksiyon olduğundan ve $[0, 2\pi]$ aralığında yalnız bu iki değeri alabildiğinden, Ara Değer Teoremi'ne (bkz. Analiz 1) göre sabittir. Oysa $u = 0$ ve $u = 2\pi$ aynı P noktasına karşılık gelir; orada $\mathbf{n}$ tek bir vektördür ve

$$\varepsilon(2\pi) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = -\,\mathbf{n} \cdot (-\mathbf{k}) = -\varepsilon(0)$$

olur. Bu çelişki, Möbius şeridinde sürekli bir birim normal seçilemeyeceğini gösterir.

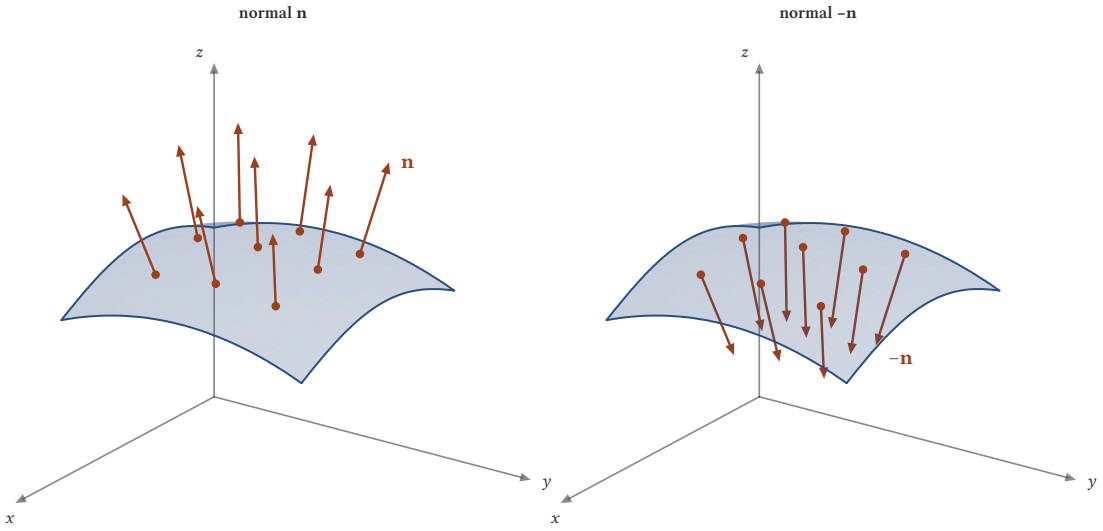


Şekil 16.3: Möbius şeridi. P noktasında seçilen $\mathbf{n}$ normali orta çember (kesikli) boyunca sürekli olarak taşınırsa, bir tur sonra aynı P noktasına $-\mathbf{n}$ olarak döner. Bu yüzden şeridin her noktasında sürekli değişen bir birim normal seçilemez.

Bundan sonra yalnız iki yüzlü yüzeylerle çalışacağız. S'nin (sınır noktaları dışında) her (x, y, z) noktasında bir teğet düzlemi olsun. Bu noktada iki birim normal vektör vardır: $\mathbf{n}_1$ ve $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$.

Tanım 16.4 (Yönlendirilmiş Yüzey). S'nin her noktasında, S üzerinde sürekli değişecek biçimde bir $\mathbf{n}$ birim normal vektörü seçilebiliyorsa S'ye **yönlendirilebilir** (orientable) yüzey denir. Böyle sürekli bir $\mathbf{n}$ seçimine S'nin bir **yönlendirmesi** (orientation), yönlendirmesi seçilmiş bir yüzeye de **yönlendirilmiş yüzey** (oriented surface) denir.
Uzayda sınırlı bir E cisminin sınırı olan yüzeye **kapalı yüzey** denir. Kapalı bir yüzeyde normallerin E'nin dışına baktığı yönlendirmeye **pozitif yönlendirme**, içine baktığı yönlendirmeye **negatif yönlendirme** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.4: Yönlendirilebilir bir yüzeyin iki yönlendirmesi. Solda her noktada $\mathbf{n}$, sağda $-\mathbf{n}$ seçilmiştir; iki seçimde de normal yüzey boyunca sürekli değişir. Bu yüzey bir fonksiyon grafiği olduğundan soldaki yukarı, sağdaki aşağı yönlendirmedir.

Yani bir yönlendirme, yüzeyin iki yüzünden birini "pozitif yüz" ilan etmektir: $\mathbf{n}$ her noktada o yüzden dışarı bakar. Tek parçalı, yönlendirilebilir bir yüzeyin tam iki yönlendirmesi vardır: $\mathbf{n}$ ve $-\mathbf{n}$. Bunu Möbius şeridindeki akıl yürütme gösterir: iki sürekli birim normal alanı yüzeyin bir noktasında aynıysa her yerde aynıdır. Kapalı yüzeylerde, aksi söylenmedikçe, pozitif (dışa doğru) yönlendirmeyi kullanacağız.
Bir fonksiyonun grafiği olan yüzeyin doğal bir yönlendirmesi vardır. $z = g(x, y)$ grafiğinde (2) eşitliğindeki vektörü birim vektör yapınca

$$\mathbf{n} = \frac{-g_x\,\mathbf{i} - g_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}} \tag{4}$$

bulunur. Bu normalin $\mathbf{k}$ bileşeni pozitif olduğundan normal her noktada yukarı bakar; bu yönlendirmeye **yukarı yönlendirme**, $-\mathbf{n}$'ye de **aşağı yönlendirme** denir.
Parametrik bir yüzeyde de parametreleme bir yönlendirme verir. Düzgün ve yönlendirilebilir bir S yüzeyi $\mathbf{r}(u, v)$ ile verilmişse

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|} \tag{5}$$

birim normali sürekli değişir ve S'yi yönlendirir. Karşı yönlendirme $-\mathbf{n}$'dir ve örneğin parametrelerin sırası değiştirilerek elde edilir, çünkü $\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u = -\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$'dir.

Örnek 16.5 (Kürenin Parametrelemesinin Verdiği Yönlendirme). $a > 0$ olmak üzere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ küresinin

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = a\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + a\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + a\cos\phi\,\mathbf{k}, \qquad 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$$

parametrelemesinin verdiği yönlendirmeyi bulunuz.

Çözüm.
Kürenin alanını hesaplarken (Parametrik Yüzeyler ve Alanları)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta &= a^2\sin^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + a^2\sin^2\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + a^2\sin\phi\cos\phi\,\mathbf{k} \\ &= a\sin\phi\,\mathbf{r}(\phi, \theta)\end{aligned}$$

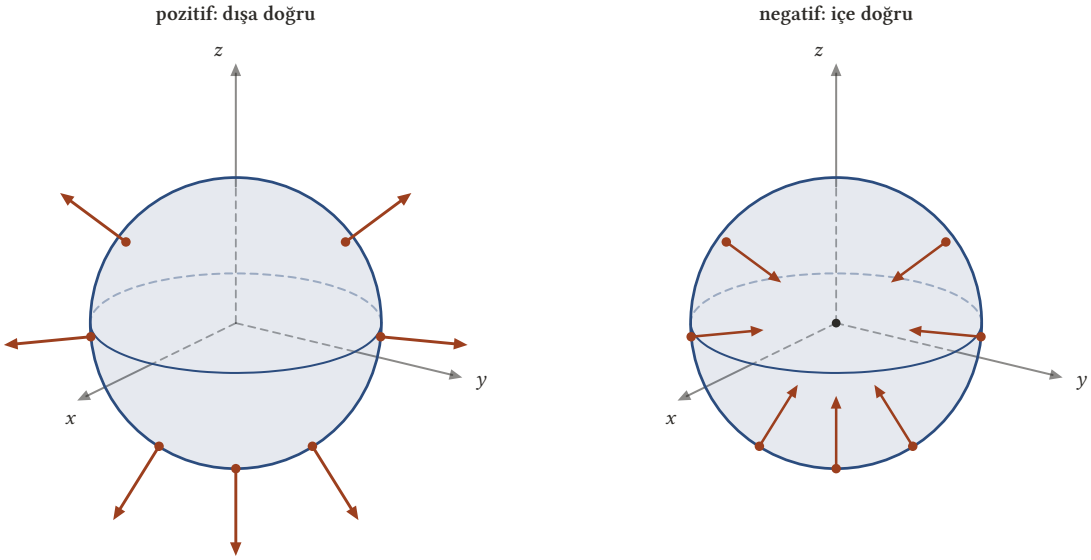
ve $|\,\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta\,| = a^2\sin\phi$ bulmuştuk. Kutuplar dışında $(0 < \phi < \pi)$ $\sin\phi > 0$ olduğundan (5)'ten

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{n} = \frac{a \sin\phi \mathbf{r}(\phi,\theta)}{a^2 \sin\phi} = \frac{1}{a}\mathbf{r}(\phi,\theta) = \sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k}$$

elde edilir. $\mathbf{n}$, noktanın konum vektörüyle aynı yöndedir, yani küreden dışarı bakar. Kutuplarda da $\mathbf{r}/a$ ile tanımlanınca normal küre üzerinde sürekli olur. Dolayısıyla bu parametreleme küreye pozitif (dışa doğru) yönlendirmeyi verir. Parametrelerin sırasını değiştirseydik, $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_\phi = -\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta$ olduğundan negatif (içe doğru) yönlendirmeyi elde ederdik.
■

Kürenin bu iki yönlendirmesi aşağıda görülüyor.



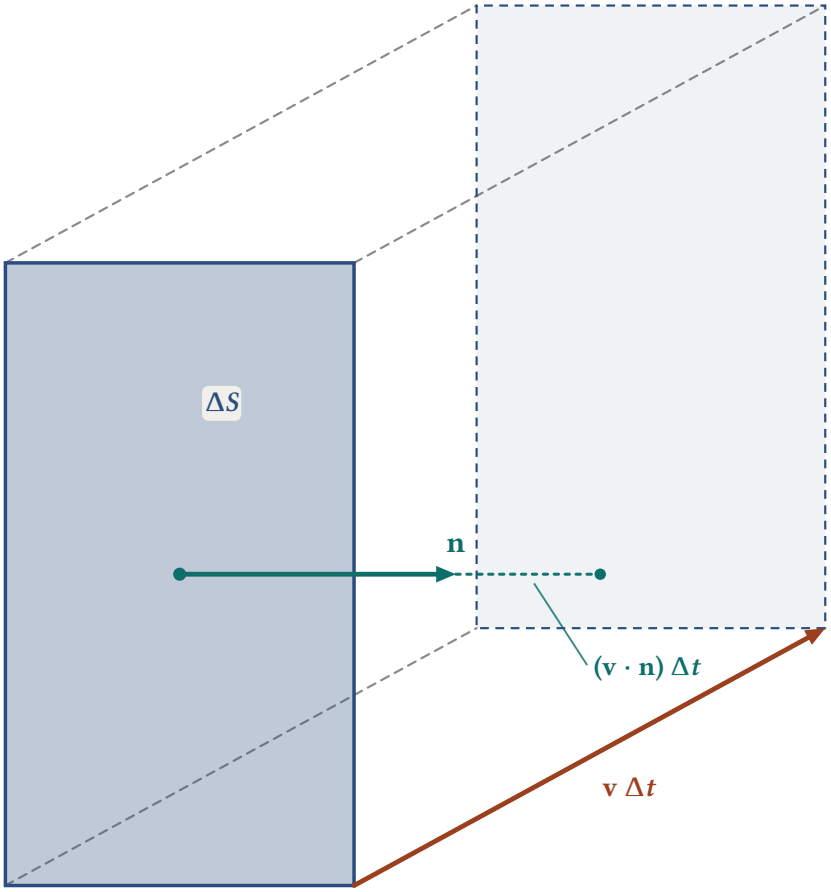
Şekil 16.5: Kapalı bir yüzey olan kürenin iki yönlendirmesi. Solda normaller kürenin içindeki bölgeden dışa doğru bakar (pozitif yönlendirme), sağda içe doğru bakar (negatif yönlendirme).

16.5 Vektör Alanlarının Yüzey İntegrali: Akı

Şimdi yönlendirilmiş bir yüzeyden geçen akışı ölçelim. Örnek olarak yüzeyden geçen bir akışkanı düşüneceğiz.
S, birim normali $\mathbf{n}$ olan yönlendirilmiş bir yüzey olsun; yoğunluğu $\rho(x,y,z)$ ve hız alanı $\mathbf{v}(x,y,z)$ olan bir akışkan S'nin içinden geçsin. S'yi akışı hiç engellemeyen hayali bir yüzey olarak, örneğin bir dereye gerilmiş bir balık ağı gibi düşünelim. S'den $\mathbf{n}$ yönünde birim zamanda geçen akışkan kütlesini bulmak istiyoruz.
Önce küçük ve düz bir yamaya bakalım. Alanı ΔS olan düz bir yamadan kısa bir Δt süresinde geçen akışkan parçacıklarının her biri bu sürede $\mathbf{v}\,\Delta t$ kadar yer değiştirir. Dolayısıyla bu sürede yamadan geçen akışkan, tabanı yama ve yan kenarları $\mathbf{v}\,\Delta t$ olan eğik bir prizmayı doldurur. Prizmanın yüksekliği, $\mathbf{v}\,\Delta t$ vektörünün $\mathbf{n}$ doğrultusundaki bileşeni olan $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\Delta t$'dir. Hacmi taban alanı çarpı yükseklik, yani $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\Delta S\,\Delta t$, kütlesi de $\rho\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\Delta S\,\Delta t$ olur. Bunu Δt'ye bölünce yamadan birim zamanda geçen kütle bulunur:

$$(\rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\Delta S.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.6: Alanı ΔS olan küçük, düz bir yamadan Δt sürede geçen akışkan, tabanı bu yama ve yan kenarları $\mathbf{v}\,\Delta t$ olan eğik bir prizmayı doldurur. Prizmanın yüksekliği $\mathbf{v}\,\Delta t$'nin $\mathbf{n}$ doğrultusundaki bileşeni $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\Delta t$, hacmi $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\Delta S\,\Delta t$'dir.

$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} < 0$ ise akışkan yamadan $-\mathbf{n}$ yönünde geçer ve bu sayı negatif çıkar.
Eğri bir S yüzeyini S_{ij} yamalarına bölersek her yama neredeyse düzdür; ρ, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{n}$ de yama üzerinde neredeyse sabittir. Bu yüzden S_{ij}'den $\mathbf{n}$ yönünde birim zamanda geçen kütle yaklaşık olarak $(\rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\Delta S_{ij}$'dir; burada ρ, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{n}$ yamanın bir noktasında hesaplanır. Bunları toplayıp limit alınca, yüzey integralinin tanımına (Tanım 16.1) göre $\rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ fonksiyonunun S üzerindeki yüzey integrali elde edilir:

$$\iint_S \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_S \rho(x,y,z)\,\mathbf{v}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\,dS.$$

Bu integral akışkanın S'den geçiş hızıdır (birim zamanda geçen kütle). $\mathbf{F} = \rho\,\mathbf{v}$ yazarsak integral $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ biçimini alır. Bu biçimdeki integraller fizikte, $\mathbf{F}$ bir $\rho\,\mathbf{v}$ çarpımı olmadığında da sık sık karşımıza çıkar.

Tanım 16.5 (Akı İntegrali). $\mathbf{F}$, birim normali $\mathbf{n}$ olan yönlendirilmiş bir S yüzeyi üzerinde tanımlı sürekli bir vektör alanı olsun (bkz. Tanım 10.1). $\mathbf{F}$'nin S üzerindeki **yüzey integrali**

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

olarak tanımlanır. Bu integrale $\mathbf{F}$'nin S'den geçen **akısı** (flux) da denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani bir vektör alanının yüzey integrali, alanın normal bileşeni olan $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ skaler fonksiyonunun yüzey integralidir. Yüzeye teğet olan bileşen akıya katkı vermez; yalnız yüzeyi "delip geçen" bileşen sayılır. Akının işareti yönlendirmeye bağlıdır: $\mathbf{n}$ yerine $-\mathbf{n}$ seçilirse akının işareti değişir.
Yüzey parametrik olarak verildiğinde birim normal ile alan çarpanı birbirini götürür ve hesap kolaylaşır.

Teorem 16.2 (Akının Parametrik Hesabı). *S, yüzey integralinin hesap formülündeki (Teorem 16.1) koşulları sağlayan bir $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$ parametrelemesiyle verilsin ve $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$'nin verdiği (5) yönlendirmesiyle yönlendirilmiş olsun. Sürekli bir $\mathbf{F}$ vektör alanı için*

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dA \tag{6}$$

olur. S karşı yönde yönlendirilmişse sağ taraf -1 ile çarpılır.

İspat.
Akının tanımına göre $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, $f=\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ fonksiyonunun yüzey integralidir; bunu (1) formülüyle (Teorem 16.1) hesaplayacağız. Yalnız $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$, D'nin bazı sınır noktalarında sıfır olabilir; kürenin kutuplarında ve koninin tepesinde böyledir. Orada (5) tanımsızdır ve f, S üzerinde sürekli olmayabilir: koninin tepesine farklı doğrultulardan yaklaşınca (5)'teki normal farklı vektörlere gider. Ama (1) formülünün ispatında f'nin yalnız iki özelliği kullanıldı: f'nin S üzerinde sınırlı olması ve $h=(f\circ\mathbf{r})\mid \mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\mid$ fonksiyonunun D üzerinde sürekli olması. İkisinin de sağlandığını gösterelim.
Sınırlılık. *$\mathbf{F}\circ\mathbf{r}$, kapalı ve sınırlı D üzerinde sürekli olduğundan her $(u,v)\in D$ için $\mid\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\mid\le M$ olacak bir M sayısı vardır. $\mathbf{n}$ birim vektör olduğundan S üzerinde $\mid f\mid\le\mid\mathbf{F}\mid\le M$ olur.*
Süreklilik. *$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\neq\mathbf{0}$ olan noktalarda $\mathbf{n}$, (5) ile verilir; dolayısıyla*

$$\begin{aligned} h(u,v)&=\left[\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{\mid\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\mid}\right]\mid\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\mid\\ &=\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\end{aligned}$$

olur. $\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=\mathbf{0}$ olan noktalarda ise $\mid\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\mid=0$ olduğundan iki taraf da sıfırdır; $\mathbf{n}$'nin oradaki değeri sonucu etkilemez. Demek ki D'nin her noktasında $h(u,v)=\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)$'dir. Sağ taraf sürekli fonksiyonların bileşkeleri, çarpımları ve toplamlarından oluştuğu için h, D üzerinde süreklidir.
Sonuç. *Böylece (1) formülü $f=\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ için de geçerlidir ve*

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}&=\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_D h\,dA\\ &=\iint_D \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dA\end{aligned}$$

bulunur. Karşı yönlendirmede $\mathbf{n}$ yerine $-\mathbf{n}$ geldiğinden integrandın, dolayısıyla integralin işareti değişir. ■

Yani (6) formülünde $\mathbf{n}\,dS$ yerine doğrudan $(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dA$ yazılır. Bunu vektör alanlarının eğrisel integralini hesapladığımız

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt$$

formülüyle karşılaştırın (bkz. Tanım 11.6): orada $d\mathbf{r}=\mathbf{r}'(t)\,dt$ idi, burada $d\mathbf{S}=(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,dA$'dır.
Hem (1) hem de (6) formülü bir parametreleme kullanıyor. Aynı yüzeyi başka bir parametrelemeyle yazsaydık sonuç değişir miydi? Aşağıdaki önerme, parametreleme bir değişken değiştirmesiyle değiştirildiğinde yüzey integralinin aynı kaldığını, akının ise yalnız yönlendirmeye bağlı olduğunu söyler.

Önerme 16.1 (Parametrelemeden Bağımsızlık). *$\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in D$, S'nin, yüzey integralinin hesap formülündeki (Teorem 16.1) koşulları sağlayan bir parametrelemesi olsun. $T(s,t)=(u(s,t),v(s,t))$ dönüşümü bir $\tilde{D}$ bölgesini D'nin üzerine birebir götürsün, kısmi türevleri sürekli ve Jacobi determinantı $J=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}$ hiç sıfır olmasın. $\tilde{\mathbf{r}}(s,t)=\mathbf{r}(u(s,t),v(s,t))$, $(s,t)\in\tilde{D}$ olsun. Bu durumda:*
(i) Sürekli her f için (1) formülü $\mathbf{r}$ ile ve $\tilde{\mathbf{r}}$ ile aynı değeri verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

(ii) $\tilde{D}$ üzerinde $J > 0$ ise $\tilde{\mathbf{r}}$ ile $\mathbf{r}$ aynı yönlendirmeyi verir ve (6) formülü iki parametrelemede aynı akıyı verir. $J < 0$ ise yönlendirmeler zıttır ve akılar birbirinin ters işaretlisidir.

İspat.
Normal vektörler. *Zincir kuralına göre (bkz. Analiz 4) $\tilde{\mathbf{r}}_s = u_s\,\mathbf{r}_u + v_s\,\mathbf{r}_v$ ve $\tilde{\mathbf{r}}_t = u_t\,\mathbf{r}_u + v_t\,\mathbf{r}_v$'dir; $\mathbf{r}_u$ ve $\mathbf{r}_v$, $T(s,t)$ noktasında hesaplanır. Vektörel çarpım her iki çarpanına göre doğrusaldır; $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_u = \mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_v = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u = -\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ olduğundan*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}_s \times \tilde{\mathbf{r}}_t &= u_s v_t\,(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) + v_s u_t\,(\mathbf{r}_v \times \mathbf{r}_u)\\ &= (u_s v_t - u_t v_s)\,(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = J\,(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\end{aligned}$$

bulunur. $J > 0$ ise iki normal aynı yöne, $J < 0$ ise zıt yönlere bakar; bu, (ii)'deki yönlendirme iddiasıdır.
(i). *$|\,\tilde{\mathbf{r}}_s \times \tilde{\mathbf{r}}_t\,| = |\,J\,|\,|\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|$ olduğundan, iki katlı integralde değişken değiştirme formülüyle (Teorem 9.1)*

$$\begin{aligned}\iint_{\tilde{D}} f(\tilde{\mathbf{r}})\,|\,\tilde{\mathbf{r}}_s \times \tilde{\mathbf{r}}_t\,|\,dA &= \iint_{\tilde{D}} \Big[\,f(\mathbf{r})\,|\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|\,\Big]_{T(s,t)}\,|\,J\,|\,ds\,dt\\ &= \iint_{D} f(\mathbf{r}(u,v))\,|\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|\,du\,dv\end{aligned}$$

olur.
(ii). *Aynı biçimde*

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}) \cdot (\tilde{\mathbf{r}}_s \times \tilde{\mathbf{r}}_t) = J\Big[\,\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\Big]_{T(s,t)}$$

olur. $J > 0$ ise $J = |\,J\,|$ olur ve değişken değiştirme formülü, (i)'deki gibi, iki akının eşit olduğunu verir. $J < 0$ ise $J = -\,|\,J\,|$ olur ve aynı hesap akıların ters işaretli olduğunu verir.
■

Yani $\mathbf{r}$'den, Jacobi determinantı sıfır olmayan birebir bir T ile $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \circ T$ biçiminde elde edilen her parametreleme aynı yüzey integralini verir; aynı yönlendirmeyi veriyorsa aynı akıyı da verir. Aslında yüzeyi bir kez örten iki düzgün parametreleme, dikiş yerleri ve kutuplar gibi sıfır alanlı kümeler dışarıda bırakılınca hep böyle bir $T = \mathbf{r}^{-1} \circ \tilde{\mathbf{r}}$ ile birbirine bağlanır. Bu T'nin sürekli türevlenebilir olduğu ters fonksiyon teoreminden çıkar (bkz. Analiz 4); dışarıda bırakılan sıfır alanlı kümelerin integrali değiştirmediğini tam olarak göstermek ise ileri analiz gerektirir. Bu yüzden hesaplarda yüzeyi bir kez örten herhangi bir düzgün parametrelemeyi kullanırız. Akıda ise yalnız bir şeye dikkat etmeliyiz: parametrelemenin verdiği $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ normali istenen yönlendirmeyle aynı yöne bakmalıdır; bakmıyorsa sonucu -1 ile çarparız.

Akı integrali dört adımda

1. **Parametrele.** S'yi $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ biçiminde yaz.
2. **Normali bul ve yönünü denetle.** $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$'yi hesapla. Bir noktada istenen yönlendirmeyle (yukarı, dışa doğru, …) aynı yöne bakıp bakmadığını kontrol et; bakmıyorsa sonucu -1 ile çarpmayı not et.
3. **İç çarpımı hesapla.** $\mathbf{F}$'de x, y, z yerine $\mathbf{r}(u,v)$'nin bileşenlerini koy ve $\mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)$'yi bul.
4. **İntegrali hesapla.** Bu fonksiyonun D üzerindeki iki katlı integralini al.

Örnek 16.6 (Birim Küreden Geçen Akı). $\mathbf{F}(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ vektör alanının $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küresinden geçen akısını (dışa doğru yönlendirmeyle) bulunuz.

Çözüm.
Parametreleme ve normal. Birim küre üzerindeki integralde (Örnek 16.2) kullandığımız

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k}, \qquad 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

parametrelemesini kullanalım. Kürenin yönlendirmesini incelerken (Örnek 16.5) gördüğümüz gibi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin^2\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \sin\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

vektörü dışa doğru bakar; yani istenen yönlendirme budur.
İç çarpım. Küre üzerinde $x = \sin\phi\cos\theta$, $y = \sin\phi\sin\theta$, $z = \cos\phi$ olduğundan

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(\phi,\theta)) = \cos\phi\,\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \sin\phi\cos\theta\,\mathbf{k}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta) &= \cos\phi\sin^2\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos\phi\cos\theta \\ &= 2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta\end{aligned}$$

bulunur.
İntegral. (6) formülünden

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\big(\,2\sin^2\phi\cos\phi\cos\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta\,\big)d\phi\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi}\sin^2\phi\cos\phi d\phi\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta + \int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\end{aligned}$$

olur. $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$ olduğundan ilk terim sıfırdır. İkinci terimde $\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi = \frac{4}{3}$ (Örnek 16.2) ve $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta = \pi$ olduğundan

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0 + \frac{4}{3}\cdot\pi = \frac{4\pi}{3}$$

bulunur.
Yorum. $\mathbf{F}$, yoğunluğu 1 olan bir akışkanın hız alanıysa, birim zamanda kürenin içinden dışına net olarak $\frac{4\pi}{3}$ birim kütle akar.
■

Yüzey bir fonksiyonun grafiği olduğunda (6) formülü, (2) eşitliği sayesinde yalnız $\mathbf{F}$'nin bileşenleriyle yazılabilir.

Sonuç 16.2 (Bir Grafikten Geçen Akı). *S, $z = g(x,y)$, $(x,y)\in D$ grafiği olsun; D ve g, grafik üzerindeki yüzey integralinde (Sonuç 16.1) istenen koşulları sağlasın ve S yukarı yönlendirilmiş olsun. $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ sürekli bir vektör alanı ise*

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\,\frac{\partial g}{\partial x} - Q\,\frac{\partial g}{\partial y} + R\right)dA \tag{7}$$

olur; burada P, Q, R $(x, y, g(x,y))$ noktasında hesaplanır. S aşağı yönlendirilmişse sağ taraf -1 ile çarpılır.

İspat.
$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + g(x,y)\,\mathbf{k}$ parametrelemesi için (2)'ye göre $\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y = -g_x\,\mathbf{i} - g_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$'dir. Bu vektörün $\mathbf{k}$ bileşeni pozitif olduğundan parametrelemenin verdiği yönlendirme yukarı yönlendirmedir. Ayrıca

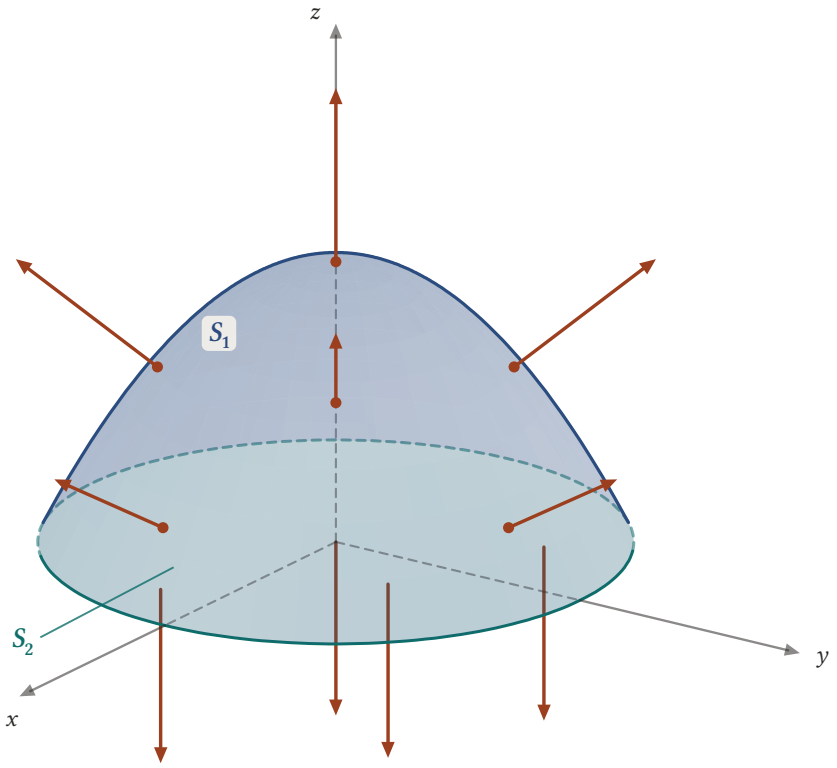
$$\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y) = (P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k})\cdot(-g_x\,\mathbf{i} - g_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -P\,g_x - Q\,g_y + R$$

olur. Bunu (6) formülünde (Teorem 16.2) yerine yazınca (7) çıkar; aşağı yönlendirme için aynı teoremin son cümlesi uygulanır.
■

$y = h(x,z)$ ya da $x = k(y,z)$ biçimindeki yüzeyler için de benzer formüller kurulur (bkz. Alıştırma 16.10).

Örnek 16.7 (Kapalı Bir Yüzeyden Geçen Akı). $\mathbf{F}(x,y,z) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ olsun. S, $z = 1 - x^2 - y^2$ paraboloidi ile $z = 0$ düzleminin sınırladığı E cisminin sınırı olmak üzere $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ integralini hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.7: E cisminin sınırı iki parçadır: $z = 1 - x^2 - y^2$ paraboloidinin $z \geq 0$ kısmı S_1 ve $z = 0$ düzlemindeki birim daire S_2. Dışa doğru yönlendirmede S_1'in normalleri yukarı, S_2'ninkiler aşağı bakar.

Çözüm.
S kapalı bir yüzey olduğundan pozitif (dışa doğru) yönlendirmeyi kullanırız. S iki parçadan oluşur: üstteki paraboloit parçası S_1 ve alttaki daire S_2.
Üst parça S_1. S_1'de dışa doğru normal yukarı bakar; bu yüzden (7) formülünü kullanabiliriz. Paraboloit $z = 0$ düzlemini $x^2 + y^2 = 1$ çemberinde keser; S_1'in xy-düzlemine izdüşümü $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ dairesidir. $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ için $g_x = -2x$, $g_y = -2y$ ve S_1 üzerinde

$$P = y, \qquad Q = x, \qquad R = z = 1 - x^2 - y^2$$

olduğundan

$$-P\,g_x - Q\,g_y + R = -y(-2x) - x(-2y) + 1 - x^2 - y^2 = 1 + 4xy - x^2 - y^2$$

bulunur. Kutupsal koordinatlara geçersek $xy = r^2 \cos\theta \sin\theta$ ve $x^2 + y^2 = r^2$ olur:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 + 4r^2 \cos\theta \sin\theta - r^2 \right) r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r - r^3 + 4r^3 \cos\theta \sin\theta \right) dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \cos\theta \sin\theta \right) d\theta = \frac{1}{4} \cdot 2\pi + 0 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Burada $\cos\theta \sin\theta$'nın bir ilkeli $\frac{1}{2}\sin^2\theta$ olduğundan integrali 0'dır.
Alt parça S_2. S_2'de dışa doğru birim normal aşağı bakar: $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$. S_2 üzerinde $z = 0$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot(-\mathbf{k})\,dS = \iint_{S_2} (-z)\,dS = \iint_{S_2} 0\,dS = 0$$

olur.
Toplam. Akı, iki parçadaki akıların toplamıdır:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

■

⚠ Sık yapılan hatalar

- Akıda yönlendirme işareti belirler. (6) ya da (7) formülünü kullanmadan önce $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$'nin istenen yöne bakıp bakmadığını mutlaka kontrol edin.
- Kapalı bir yüzeyde her parçanın normali dışa bakmalıdır: bir cismin tavanında yukarı, tabanında aşağı.
- Skaler yüzey integralinde $|\,\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,|$, akıda ise $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vektörünün kendisi kullanılır; akıda uzunluk alınmaz.

16.6 Akının Fizikteki Yorumları

Akı kavramını akışkanlar üzerinden kurduk, ama aynı integral fiziğin başka alanlarında da ortaya çıkar. İki önemli örnek verelim.

Tanım 16.6 (Elektrik Akısı ve Gauss Yasası). $\mathbf{E}$ bir elektrik alanı ve S yönlendirilmiş bir yüzey ise

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

integraline $\mathbf{E}$'nin S'den geçen **elektrik akısı** denir. Elektrostatiğin temel yasalarından **Gauss yasası**na göre, pozitif yönlendirilmiş kapalı bir S yüzeyinin içinde kalan net elektrik yükü

$$Q = \varepsilon_0 \iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

olur. Burada ε_0, boşluğun elektriksel geçirgenliği denen ve kullanılan birimlere bağlı olan bir sabittir.

Yani kapalı bir yüzeyin içindeki yükü bulmak için yüklerin nerede durduğunu bilmemiz gerekmez; elektrik alanının yüzeyden net olarak ne kadar dışarı aktığını ölçmek yeter. SI birim sisteminde $\varepsilon_0 \approx 8{,}8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$'dir. Örneğin birim küreden geçen akı örneğindeki (Örnek 16.6) $\mathbf{F}$ bir elektrik alanı olsaydı, birim kürenin içindeki yük $Q = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_0$ olurdu.

Tanım 16.7 (Isı Akışı). Bir cismin (x, y, z) noktasındaki sıcaklığı $u(x, y, z)$ olsun. **Isı akışı**

$$\mathbf{F} = -K\,\nabla u$$

vektör alanıdır; burada K, maddenin **ısı iletkenliği** denen ve deneyle belirlenen pozitif bir sabittir. Cismin içindeki bir S yüzeyinden ısının akış hızı

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

integraliyle verilir.

Yani ısı sıcaktan soğuğa akar. ∇u, sıcaklığın en hızlı arttığı yönü gösterdiğinden (bkz. Analiz 4) ısı akışı ona zıt yöndedir; K ne kadar büyükse ısı o kadar hızlı iletilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 16.8 (Metal Bir Toptaki Isı Akışı). Metal bir topun her noktasındaki sıcaklık, o noktanın topun merkezine uzaklığının karesiyle orantılıdır. Merkezi topun merkezinde olan a yarıçaplı S küresinden ısının (dışa doğru) akış hızını bulunuz.

Çözüm.
Sıcaklık ve ısı akışı. Topun merkezini orijine yerleştirelim. Orantı sabitine C dersek sıcaklık

$$u(x,y,z) = C\,(x^2+y^2+z^2)$$

olur. Metalin ısı iletkenliği K ise ısı akışı

$$\mathbf{F} = -K\,\nabla u = -KC\,(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k})$$

olur.
Normal bileşen. Bu kez küreyi parametrelemeye gerek yok. $x^2+y^2+z^2=a^2$ küresinin (x,y,z) noktasındaki dışa doğru birim normali, konum vektörü kendi uzunluğu olan a'ya bölünerek elde edilir:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}\,(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}).$$

Buradan

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}\,(x^2+y^2+z^2)$$

bulunur. S üzerinde $x^2+y^2+z^2=a^2$ olduğundan $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = -2aKC$, yani sabittir.
Akış hızı. Sabit bir fonksiyonun yüzey integrali, o sabit çarpı yüzeyin alanıdır. Kürenin alanı $4\pi a^2$ olduğundan

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = -2aKC\iint_S dS \\ &= -2aKC\cdot 4\pi a^2 = -8\pi KCa^3\end{aligned}$$

bulunur. $C>0$ ise sıcaklık merkezden uzaklaştıkça artar ve sonuç negatiftir: ısı küreden içeri, merkezdeki daha soğuk bölgeye doğru akar.
■

16.7 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar kolaydan zora sıralanmıştır. İlk altısı skaler fonksiyonların yüzey integralleri, sonraki dördü akı, son ikisi uygulamalardır.

Alıştırma 16.1 (Riemann Toplamıyla Tahmin). H, $x^2+y^2+z^2=50$ küresinin $z\ge 0$ olan yarısı olsun. f, H üzerinde sürekli bir fonksiyondur ve

$$f(3,4,5)=7,\quad f(3,-4,5)=8,\quad f(-3,4,5)=9,\quad f(-3,-4,5)=12$$

olduğu biliniyor. H'yi dört parçaya bölerek $\iint_H f(x,y,z)\,dS$ için bir Riemann toplamı tahmini bulunuz.

Çözüm.
Parçalar. H'yi $x=0$ ve $y=0$ düzlemleriyle dört eş parçaya bölelim: $x\ge 0, y\ge 0$; $x\ge 0, y\le 0$; $x\le 0, y\ge 0$ ve $x\le 0, y\le 0$ olan çeyrekler. Verilen dört noktanın her biri H üzerindedir, çünkü $3^2+4^2+5^2=50$ ve $z=5>0$'dır; ayrıca her biri farklı bir çeyrektedir. Bu noktaları örnek noktalar olarak seçeriz.
Alanlar. H, yarıçapı $\sqrt{50}$ olan kürenin yarısıdır; alanı

$$\frac{1}{2}\cdot 4\pi\cdot 50 = 100\pi$$

olur. Dört çeyrek simetri nedeniyle eş olduğundan her birinin alanı 25π'dir.
Riemann toplamı.

$$\iint_H f\,dS \approx 25\pi\,(7+8+9+12) = 25\pi\cdot 36 = 900\pi \approx 2827{,}4.$$

■

Alıştırma 16.2 (Helikoit Üzerinde Bir İntegral). S, $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$ vektör denklemiyle verilen helikoit olmak üzere $\iint_S y\,dS$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Alan çarpanı. $\mathbf{r}_u = \cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j}$ ve $\mathbf{r}_v = -u\sin v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ olduğundan

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} = \sin v\,\mathbf{i} - \cos v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$$

ve $\sin^2 v + \cos^2 v = 1$ olduğundan $\mid \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \mid = \sqrt{1+u^2}$ bulunur.
İntegral. Yüzey üzerinde $y = u\sin v$ olduğundan, (1) formülüyle

$$\iint_S y\,dS = \int_0^{\pi}\int_0^{1} u\sin v\,\sqrt{1+u^2}\,du\,dv = \int_0^{\pi}\sin v\,dv \int_0^{1} u\sqrt{1+u^2}\,du$$

olur. $\int_0^{\pi}\sin v\,dv = 2$'dir. İkinci integralde $w = 1+u^2$, $dw = 2u\,du$ ile

$$\int_0^{1} u\sqrt{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\int_1^{2} w^{1/2}\,dw = \frac{1}{3}\left(\,2\sqrt{2}-1\,\right)$$

bulunur. Böylece

$$\iint_S y\,dS = \frac{2}{3}\left(\,2\sqrt{2}-1\,\right) \approx 1{,}219$$

olur.
■

Alıştırma 16.3 (Birinci Bölgedeki Bir Düzlem Parçası). S, $2x+2y+z=4$ düzleminin birinci bölgede $(x,y,z \ge 0)$ kalan parçası olmak üzere $\iint_S xz\,dS$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Yüzey ve D. Düzlem $z = g(x,y) = 4-2x-2y$ grafiğidir. $x \ge 0$, $y \ge 0$ ve $z \ge 0$, yani $x+y \le 2$ koşulları, S'nin izdüşümü olarak köşeleri $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ olan üçgeni verir:

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\; 0 \le y \le 2-x\}.$$

Alan çarpanı. $g_x = g_y = -2$ olduğundan $\sqrt{g_x^2+g_y^2+1} = \sqrt{4+4+1} = 3$'tür.
İntegral. (3) formülünden

$$\iint_S xz\,dS = 3\int_0^{2}\int_0^{2-x} x\,(4-2x-2y)\,dy\,dx$$

olur. İç integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{2-x}(4x-2x^2-2xy)\,dy &= \Big[\,(4x-2x^2)\,y - xy^2\Big]_0^{2-x} \\ &= (2-x)\,\big(\,4x-2x^2-x(2-x)\,\big) = x(2-x)^2.\end{aligned}$$

Dış integral:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$3\int_0^2 x(2-x)^2dx = 3\int_0^2 (4x-4x^2+x^3)dx$$
$$= 3\left[\,2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 3\cdot\frac{4}{3} = 4.$$

■

Alıştırma 16.4 (Yatay Eksenli Bir Paraboloit). $S, x = y^2+z^2$ paraboloidinin $0 \le x \le 1$ olan parçası olmak üzere $\iint_S z^2\,dS$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Yüzey ve D. S, $x = k(y,z) = y^2+z^2$ grafiğidir; bu yüzden yüzeyi yz-düzlemine izdüşürürüz. $0 \le x \le 1$ koşulu $y^2+z^2 \le 1$ demektir; D, yz-düzlemindeki birim dairedir.
Alan çarpanı. $k_y = 2y$ ve $k_z = 2z$ olduğundan alan çarpanı

$$\sqrt{k_y^2+k_z^2+1} = \sqrt{1+4(y^2+z^2)}$$

olur.
İntegral. yz-düzleminde kutupsal koordinatlar kullanalım: $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$ ve $dA = r\,dr\,d\theta$. Buradan

$$\iint_S z^2\,dS = \iint_D z^2\sqrt{1+4(y^2+z^2)}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\theta\,\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta \int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}dr$$

olur. İlk integral π'dir. İkincide $w = 1+4r^2$ dersek $dw = 8r\,dr$ ve $r^2 = \frac{w-1}{4}$ olur; $r=0$ iken $w=1$, $r=1$ iken $w=5$'tir:

$$\int_0^1 r^3\sqrt{1+4r^2}dr = \frac{1}{32}\int_1^5 (w-1)\,w^{1/2}dw = \frac{1}{32}\left[\,\frac{2}{5}w^{5/2} - \frac{2}{3}w^{3/2}\right]_1^5$$
$$= \frac{1}{32}\left(\,\frac{20\sqrt{5}}{3} + \frac{4}{15}\,\right) = \frac{25\sqrt{5}+1}{120}.$$

Burada $5^{5/2} = 25\sqrt{5}$ ve $5^{3/2} = 5\sqrt{5}$ eşitliklerini kullandık. Böylece

$$\iint_S z^2\,dS = \frac{\pi}{120}\,\left(\,25\sqrt{5}+1\,\right) \approx 1{,}490$$

bulunur.
■

Alıştırma 16.5 (Koninin Üstündeki Küre Parçası). S, $x^2+y^2+z^2 = 1$ küresinin $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisinin üstünde kalan parçası olmak üzere $\iint_S y^2\,dS$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Parametreleme. Küresel koordinatlarda koni $\phi = \frac{\pi}{4}$ denklemine sahiptir, çünkü koni üzerinde $\rho\cos\phi = \rho\sin\phi$, yani $\tan\phi = 1$'dir. Koninin üstü $0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$ demektir. Birim küre üzerindeki integralde (Örnek 16.2) kullandığımız parametrelemeyi

$$D = \left\{\,(\phi,\theta) : 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4},\, 0 \le \theta \le 2\pi\,\right\}$$

üzerinde kullanırız; alan çarpanı $\sin\phi$'dir.
İntegral. Küre üzerinde $y^2 = \sin^2\phi\sin^2\theta$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_S y^2\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \sin^2\phi \sin^2\theta \sin\phi d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^{\pi/4} \sin^3\phi d\phi$$

olur. İlk integral π'dir. İkincisi:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sin^3\phi d\phi &= \Big[-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\Big]_0^{\pi/4} \\ &= \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12}\Big) - \Big(-1 + \frac{1}{3}\Big) = \frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}.\end{aligned}$$

Burada $\cos^3\frac{\pi}{4} = \big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ kullandık. Böylece

$$\iint_S y^2\,dS = \pi\Big(\frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12}\Big) = \frac{\pi}{12}\big(8 - 5\sqrt{2}\big) \approx 0{,}2432$$

bulunur.

■

Alıştırma 16.6 (Kapaklı Bir Silindir). S, $x^2+y^2=9$ silindirinin $z=0$ ile $z=2$ düzlemleri arasında kalan parçası ile alt ve üst kapak dairelerinden oluşsun. $\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
S parçalı düzgün bir yüzeydir (Tanım 16.3); üç parçadaki integralleri ayrı ayrı hesaplayıp toplarız.
Yan yüz. $\mathbf{r}(\theta,z) = 3\cos\theta\,\mathbf{i} + 3\sin\theta\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le z\le 2$ parametrelemesi için $\mathbf{r}_\theta \times \mathbf{r}_z = 3\cos\theta\,\mathbf{i} + 3\sin\theta\,\mathbf{j}$ ve alan çarpanı 3'tür. Yan yüzde $x^2+y^2=9$ olduğundan integrand $9+z^2$ olur:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (9+z^2)\cdot 3\,dz\,d\theta = 3\cdot 2\pi\Big[9z + \frac{z^3}{3}\Big]_0^2 = 6\pi\cdot\frac{62}{3} = 124\pi.$$

Alt kapak. $z=0$ düzlemindeki $x^2+y^2\le 9$ dairesinde alan çarpanı 1, integrand $x^2+y^2 = r^2$'dir:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^2\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{81}{4} = \frac{81\pi}{2}.$$

Üst kapak. $z=2$ düzleminde integrand r^2+4 olur:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 (r^2+4)\,r\,dr\,d\theta = \frac{81\pi}{2} + 4\cdot\pi\cdot 3^2 = \frac{81\pi}{2} + 36\pi = \frac{153\pi}{2}.$$

Toplam.

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dS = 124\pi + \frac{81\pi}{2} + \frac{153\pi}{2} = 124\pi + 117\pi = 241\pi.$$

■

Alıştırma 16.7 (Aşağı Yönlendirilmiş Bir Koni). $\mathbf{F}(x,y,z) = -x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$ vektör alanının, $z = \sqrt{x^2+y^2}$ konisinin $z=1$ ile $z=3$ düzlemleri arasında kalan ve aşağı yönlendirilmiş S parçasından geçen akısını bulunuz.

Çözüm.
Yüzey ve D. S, $z = g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ grafiğidir. $1\le z\le 3$ koşulu $1\le\sqrt{x^2+y^2}\le 3$ demektir; D, $1\le r\le 3$ halkasıdır.
Önce yukarı yönlendirme. $g_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ve S üzerinde $R = z^3 = (x^2+y^2)^{3/2}$ olduğundan, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ yazarak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$-P\,g_x - Q\,g_y + R = \frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + r^3 = r + r^3$$

bulunur. (7) formülü ve kutupsal koordinatlarla yukarı yönlendirmede akı

$$\int_0^{2\pi}\int_1^3 (r + r^3)\, r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{r^3}{3} + \frac{r^5}{5}\right]_1^3 = 2\pi\left(\frac{26}{3} + \frac{242}{5}\right)$$
$$= 2\pi \cdot \frac{856}{15} = \frac{1712\pi}{15}$$

olur.
Aşağı yönlendirme. S aşağı yönlendirildiğinden sonucu -1 ile çarparız:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{1712\pi}{15} \approx -358{,}56.$$

İşaret beklenendir: aşağı bakan normal $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{r}\,\mathbf{i} + \frac{y}{r}\,\mathbf{j} - \mathbf{k}\right)$ ile $\mathbf{F}$'nin iç çarpımı $-\frac{1}{\sqrt{2}}(r + r^3) < 0$'dır.
■

Alıştırma 16.8 (Birim Küreden Geçen Bir Akı Daha). $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$ vektör alanının, merkezi orijin olan 1 yarıçaplı küreden (dışa doğru) geçen akısını bulunuz.

Çözüm.
Normal. Birim küreden geçen akı örneğindeki (Örnek 16.6) gibi küresel parametrelemeyi kullanırız. Bu parametrelemenin verdiği

$$\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin^2\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin^2\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \sin\phi\cos\phi\,\mathbf{k}$$

normali dışa doğru bakar.
İç çarpım. Küre üzerinde

$$\mathbf{F} = \sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \cos^2\phi\,\mathbf{k}$$

olduğundan

$$\mathbf{F}\cdot(\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta) = \sin^3\phi\cos^2\theta + \sin^3\phi\sin^2\theta + \sin\phi\cos^3\phi$$
$$= \sin^3\phi + \sin\phi\cos^3\phi$$

bulunur.
İntegral. İntegrand θ'ya bağlı olmadığından

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 2\pi\int_0^\pi \left(\sin^3\phi + \sin\phi\cos^3\phi\right)d\phi$$

olur. $\int_0^\pi \sin^3\phi\,d\phi = \frac{4}{3}$ ve

$$\int_0^\pi \sin\phi\cos^3\phi\,d\phi = \left[-\frac{\cos^4\phi}{4}\right]_0^\pi = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

olduğundan

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

bulunur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 16.9 (Gauss Yasasıyla Yük Hesabı). Elektrik alanı $\mathbf{E}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$ olduğuna göre, Gauss yasasını kullanarak $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $z \ge 0$ yarım topunun içindeki yükü bulunuz.

Çözüm.
Yüzey. Yarım topun sınırı kapalı bir yüzeydir ve iki parçadan oluşur: a yarıçaplı yarım küre S_1 ve $z = 0$ düzlemindeki $x^2 + y^2 \le a^2$ dairesi S_2. Gauss yasası (Tanım 16.6) için pozitif (dışa doğru) yönlendirmeyi kullanırız.
Yarım küre S_1. Dışa doğru birim normal $\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$'dir. S_1 üzerinde $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ olduğundan

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{a} = \frac{a^2 + z^2}{a} = a + \frac{z^2}{a}$$

bulunur. S_1'in alanı $2\pi a^2$'dir. $\iint_{S_1} z^2\,dS$'yi küresel parametrelemeyle ($z = a\cos\phi$, alan çarpanı $a^2\sin\phi$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$) hesaplayalım:

$$\iint_{S_1} z^2\,dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} a^2\cos^2\phi\cdot a^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 2\pi a^4\left[-\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi a^4}{3}.$$

Böylece

$$\iint_{S_1}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = a\cdot 2\pi a^2 + \frac{1}{a}\cdot\frac{2\pi a^4}{3} = 2\pi a^3 + \frac{2\pi a^3}{3} = \frac{8\pi a^3}{3}$$

olur.
Taban S_2. Dışa doğru normal $-\mathbf{k}$'dir ve S_2 üzerinde $\mathbf{E}\cdot(-\mathbf{k}) = -2z = 0$ olduğundan akı 0'dır.
Yük. Toplam akı $\frac{8\pi a^3}{3}$ olduğundan Gauss yasasına göre

$$Q = \varepsilon_0\cdot\frac{8\pi a^3}{3} = \frac{8}{3}\pi a^3\varepsilon_0$$

bulunur.
■

Alıştırma 16.10 (Sola Bakan Normalle Akı Formülü). S, $y = h(x,z)$ denklemiyle verilen bir yüzey, D de onun xz-düzlemine izdüşümü olsun. S, sola bakan birim normalle, yani $\mathbf{j}$ bileşeni negatif olan normalle yönlendirilmiş olsun. $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ için $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$'yi D üzerinde bir iki katlı integral olarak veren, (7)'ye benzer bir formül bulunuz.

Çözüm.
Parametreleme. x ile z'yi parametre seçeriz:

$$\mathbf{r}(x,z) = x\,\mathbf{i} + h(x,z)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}, \qquad (x,z)\in D.$$

Normal ve yönü. $\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + h_x\,\mathbf{j}$ ve $\mathbf{r}_z = h_z\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ olduğundan

$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_z = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & h_x & 0\\ 0 & h_z & 1\end{vmatrix} = h_x\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + h_z\,\mathbf{k}$$

bulunur. Bu vektörün $\mathbf{j}$ bileşeni $-1 < 0$ olduğundan normal sola bakar; yani bu parametreleme istenen yönlendirmeyi verir. (Parametreleri (z,x) sırasıyla alsaydık $\mathbf{r}_z\times\mathbf{r}_x$ sağa bakardı.)
Formül. (6) formülünden (Teorem 16.2)

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D\left(P\,\frac{\partial h}{\partial x} - Q + R\,\frac{\partial h}{\partial z}\right)dA$$

elde edilir; burada P, Q, R $(x, h(x,z), z)$ noktasında hesaplanır. Sağa bakan normal için sağ taraf -1 ile çarpılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 16.11 (Yarım Kürenin Kütle Merkezi). Sabit yoğunluklu, ince bir levha $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geq 0$ yarım küresi biçimindedir. Levhanın kütle merkezini bulunuz.

Çözüm.
Kütle. Yoğunluk $\rho=k$ sabiti olsun. Yarım kürenin alanı $2\pi a^2$ olduğundan $m=k\cdot 2\pi a^2$'dir (Tanım 16.2).
$\bar{x}$ ve $\bar{y}$. Küresel parametrelemede ($0\leq\phi\leq\frac{\pi}{2}$, alan çarpanı $a^2\sin\phi$) $x=a\sin\phi\cos\theta$ olduğundan

$$\iint_S x\,dS=\int_0^{\pi/2}a^3\sin^2\phi d\phi\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=0$$

olur, çünkü $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=0$'dır. Aynı biçimde $\iint_S y\,dS=0$'dır. Dolayısıyla $\bar{x}=\bar{y}=0$ olur. Bu, yarım kürenin z ekseni çevresindeki simetrisinden de beklenen bir sonuçtur.
$\bar{z}$. $z=a\cos\phi$ olduğundan

$$\iint_S z\,dS=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}a\cos\phi\cdot a^2\sin\phi d\phi\,d\theta=2\pi a^3\left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\pi/2}=\pi a^3$$

ve

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\iint_S z\,kdS=\frac{k\,\pi a^3}{2\pi k a^2}=\frac{a}{2}$$

bulunur. Kütle merkezi $\left(\,0,0,\frac{a}{2}\,\right)$ noktasıdır; yoğunluğa bağlı değildir.
■

Alıştırma 16.12 (Ters Kare Alanının Akısı). $\mathbf{r}=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ ve c bir sabit olmak üzere $\mathbf{F}(\mathbf{r})=\dfrac{c\,\mathbf{r}}{|\,\mathbf{r}\,|^3}$ ters kare alanını alalım. $\mathbf{F}$'nin, merkezi orijin olan bir S küresinden (dışa doğru) geçen akısının kürenin yarıçapına bağlı olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Normal bileşen. Kürenin yarıçapı a olsun. Küre üzerinde $|\,\mathbf{r}\,|=a$'dır ve dışa doğru birim normal $\mathbf{n}=\dfrac{\mathbf{r}}{a}$'dır. Buradan

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\frac{c\,\mathbf{r}}{a^3}\cdot\frac{\mathbf{r}}{a}=\frac{c\,|\,\mathbf{r}\,|^2}{a^4}=\frac{c\,a^2}{a^4}=\frac{c}{a^2}$$

bulunur; $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ küre üzerinde sabittir.
Akı. Kürenin alanı $4\pi a^2$ olduğundan

$$\iint_S\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\frac{c}{a^2}\iint_S dS=\frac{c}{a^2}\cdot 4\pi a^2=4\pi c$$

olur. Sonuç a'ya bağlı değildir: küre büyüdükçe alan a^2 ile büyür, alanın şiddeti ise $1/a^2$ ile küçülür ve bu iki etki birbirini tam olarak götürür.
Orijindeki bir Q noktasal yükünün elektrik alanı tam bu biçimdedir: $c=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}$. Bu durumda Gauss yasası (Tanım 16.6) her yarıçap için $\varepsilon_0\cdot 4\pi c=Q$ verir; yani küre ne kadar büyük olursa olsun içindeki yük Q'dur.
■

Bu bölümde fonksiyonları ve vektör alanlarını yüzeyler üzerinde integralledik ve akının yüzeyin yönlendirmesine nasıl bağlı olduğunu gördük. Bir sonraki bölümde, yönlendirilmiş bir yüzeyden geçen

 CC BY-NC-SA 4.0

rotasyonel akısını yüzeyin sınır eğrisi boyunca alınan bir eğrisel integrale eşitleyen teoremi göreceğiz: Stokes Teoremi.

 CC BY-NC-SA 4.0

17. Stokes Teoremi

Green Teoremi, düzlemdeki bir D bölgesi üzerindeki iki katlı integrali, D'nin sınır eğrisi boyunca alınan eğrisel integrale bağlar. Bu bölümde aynı fikri uzaya taşıyoruz: uzaydaki bir S yüzeyi üzerindeki bir yüzey integrali, S'nin sınırı olan uzay eğrisi boyunca alınan bir eğrisel integrale eşit olacak. Bu sonuca Stokes Teoremi denir; Green Teoremi'nin bir boyut yukarıdaki karşılığıdır.
Teoremin iki tarafında da tanıdık nesneler durur. Bir tarafta bir $\mathbf{F}$ vektör alanının kapalı bir eğri boyunca eğrisel integrali (Tanım 11.6), öbür tarafta $\mathbf{F}$'nin rotasyonelinin (Tanım 14.1) yüzeyden geçen akısı (Tanım 16.5) vardır. Teorem adını İrlandalı matematiksel fizikçi George Stokes'tan (1819–1903) alır, ama sonucu ilk bulan İskoç fizikçi William Thomson'dır (Lord Kelvin, 1824–1907). Stokes teoremi 1850'de Thomson'ın kendisine yazdığı bir mektuptan öğrenmiştir.
Bölümün sonunda teoremin rotasyonele fiziksel bir anlam kazandırdığını da göreceğiz: bir akışkanın hız alanının rotasyoneli, akışkanın bir nokta çevresinde hangi eksen etrafında ve ne kadar döndüğünü ölçer.

17.1 Sınır Eğrisinin Pozitif Yönü

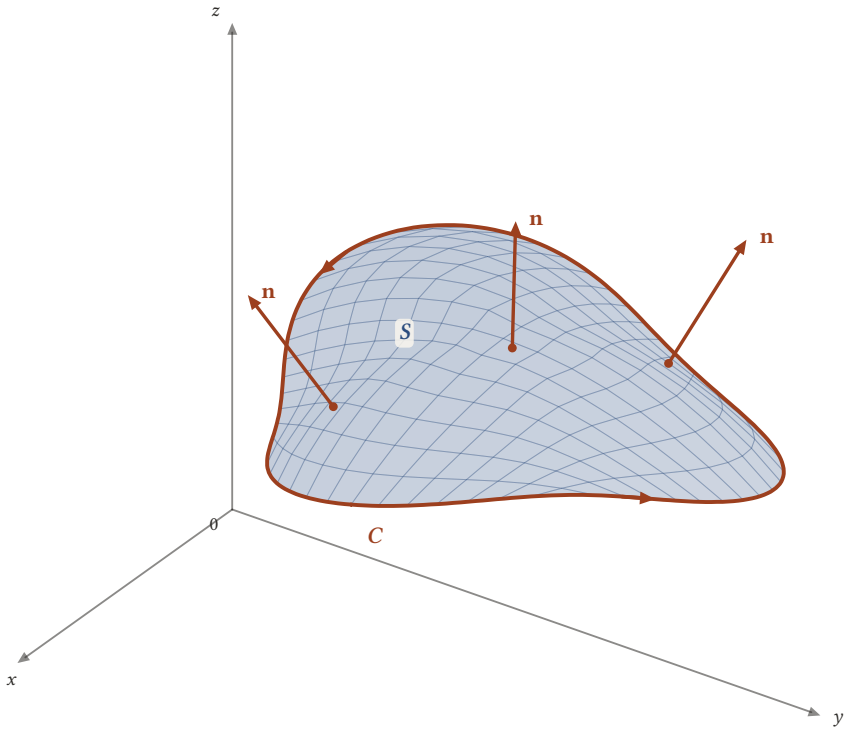
Teoremi yazabilmek için önce bir yüzeyin yönlendirmesinin, sınır eğrisine nasıl bir yön verdiğini belirlememiz gerekiyor.
S, birim normali $\mathbf{n}$ olan yönlendirilmiş bir yüzey olsun (Tanım 16.4) ve S'nin sınırı basit kapalı bir C eğrisi olsun. C üzerinde iki yönde dolaşılabilir; bunlardan birini $\mathbf{n}$ seçer.

Tanım 17.1 (Sınır Eğrisinin Pozitif Yönü). S, birim normali $\mathbf{n}$ olan yönlendirilmiş bir yüzey ve C, S'nin sınır eğrisi olsun. Başı $\mathbf{n}$ yönünü gösteren biri C üzerinde yürürken S hep solunda kalıyorsa, bu yürüyüş yönüne C'nin **pozitif yönü** denir. Pozitif yönlü sınır eğrisi ∂S ile gösterilir.

Yani $\mathbf{n}$'nin ucundan yüzeye bakan biri, pozitif yönlü C'yi saat yönünün tersine dolanırken görür. Aynı şeyi sağ el kuralıyla da söyleyebiliriz: sağ elin dört parmağı C'nin yönünde kıvrıldığında başparmak $\mathbf{n}$'yi gösterir. Sık karşılaşılan üç durum şunlardır:

- S, $z = g(x, y)$ biçiminde bir grafik ve yukarı yönlendirilmişse ($\mathbf{n}$'nin $\mathbf{k}$ bileşeni pozitifse), C'nin pozitif yönü yukarıdan bakınca saat yönünün tersidir.
- S, xy-düzleminde bir D bölgesi ve $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ ise pozitif yön, Green Teoremi'ndeki pozitif yönün ta kendisidir.
- S'nin yönlendirmesi ters çevrilirse ($\mathbf{n}$ yerine $-\mathbf{n}$ alınırsa), C'nin pozitif yönü de ters döner.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.1: Birim normali **n** olan yönlendirilmiş S yüzeyi ve sınır eğrisi C'nin pozitif yönü. Başı **n** yönünde olan biri C üzerinde oklar yönünde yürürse yüzey hep solunda kalır. Burada **n** yukarı baktığından bu yön, yukarıdan bakınca saat yönünün tersidir.

17.2 Stokes Teoremi

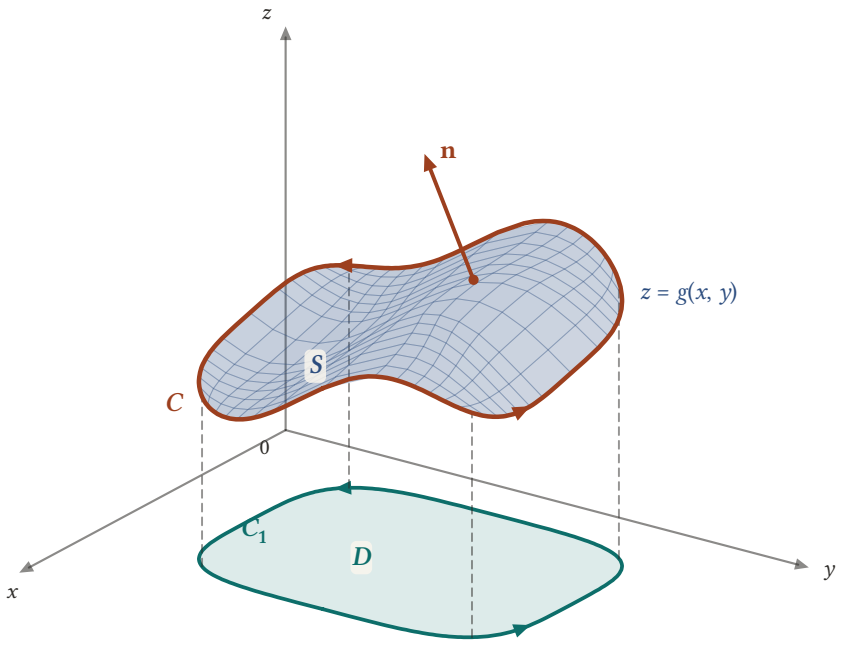
Artık teoremi ifade edebiliriz. Hipotezlerdeki parçalı düzgün yüzey kavramı Yüzey İntegralleri, parçalı düzgün eğri kavramı ise Eğrisel İntegraller bölümünden gelir.

Teorem 17.1 (Stokes Teoremi). *S yönlendirilmiş ve parçalı düzgün bir yüzey olsun; sınırı parçalı düzgün, basit kapalı ve pozitif yönlü bir C eğrisi olsun. Bileşenlerinin kısmi türevleri S'yi içeren açık bir bölgede sürekli olan her $\mathbf{F}$ vektör alanı için*

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.2: S *yüzeyi* z = g(x, y) *grafiği olduğunda gölgesi* D *bölgesidir ve* S*'nin sınırı* C, D*'nin sınırı* C_1*'in tam üstünde durur.* S *yukarı yönlendirilmişse* C*'nin pozitif yönü,* C_1*'in pozitif yönünün (saat yönünün tersinin) üstündeki yöndür.*

İspat (S bir fonksiyon grafiği olduğunda).
Teoremi, yüzeyin bir fonksiyonun grafiği olduğu durumda ispatlıyoruz. Uygulamalarda karşılaşılan yüzeylerin çoğu bu türdendir.
Kurulum. *S, $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$ grafiği olsun. g, D'yi içeren açık bir kümede tanımlı ve ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olsun. D, Green Teoremi'nin uygulanabildiği (örneğin hem I. hem II. tip) bir bölge ve sınırı C_1 olsun. S'nin sınırı C, C_1'in tam üstündeki eğridir. S'yi yukarı yönlendirelim; o zaman C'nin pozitif yönü, C_1'in pozitif yönünün (yukarıdan bakınca saat yönünün tersinin) üstündeki yöndür. S aşağı yönlendirilirse C'nin yönü de, akının işareti de değişir ve iki taraf birlikte -1 ile çarpılır; bu yüzden yukarı yönü incelemek yeter. $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ yazalım ve kısalık için kısmi türevleri alt indisle gösterelim: $P_y = \partial P/\partial y$, $g_x = \partial g/\partial x$ gibi.*
Adım 1: Yüzey integrali. *Yukarı yönlendirilmiş bir $z = g(x,y)$ grafiğinden geçen akı, bir $\mathbf{G} = G_1\,\mathbf{i} + G_2\,\mathbf{j} + G_3\,\mathbf{k}$ alanı için*

$$\iint_S \mathbf{G}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \big(-G_1\,g_x - G_2\,g_y + G_3\big)\,dA$$

formülüyle hesaplanır; G_1, G_2, G_3 burada $(x, y, g(x,y))$ noktasında alınır (Sonuç 16.2). Bu formülü

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = (R_y - Q_z)\,\mathbf{i} + (P_z - R_x)\,\mathbf{j} + (Q_x - P_y)\,\mathbf{k}$$

alanına uygularsak

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \big[-(R_y - Q_z)\,g_x - (P_z - R_x)\,g_y + (Q_x - P_y)\big]\,dA \tag{1}$$

buluruz. P, Q, R'nin kısmi türevleri burada $(x, y, g(x,y))$ noktasında hesaplanır.
Adım 2: Eğrisel integrali düzleme indirmek. *C_1'in pozitif yönlü bir parametrizasyonu $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$ olsun. O zaman*

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = g\big(x(t), y(t)\big), \qquad a \le t \le b$$

 CC BY-NC-SA 4.0

denklemleri C'nin pozitif yönlü bir parametrizasyonudur. Zincir kuralına göre (bkz. Analiz 4)

$$\frac{dz}{dt} = g_x \frac{dx}{dt} + g_y \frac{dy}{dt}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \Big(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\Big)dt \\ &= \int_a^b \Big[(P + R\,g_x)\frac{dx}{dt} + (Q + R\,g_y)\frac{dy}{dt}\Big]dt\end{aligned}$$

olur; P, Q, R burada $\big(\, x(t), y(t), g(x(t), y(t))\,\big)$ noktasında alınır. Düzlemde

$$M(x,y) = P + R\,g_x, \qquad N(x,y) = Q + R\,g_y$$

fonksiyonlarını tanımlayalım (P, Q, R yine $(x, y, g(x, y))$ noktasında). Son integral, C_1 boyunca bir düzlem eğrisel integralidir:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} M\,dx + N\,dy.$$

Adım 3: Green Teoremi. *$\mathbf{F}$'nin kısmi türevlerinin sürekli olduğu açık bölgeye Ω diyelim. $(x, y) \mapsto (x, y, g(x, y))$ sürekli ve Ω açık olduğundan, $(x, y, g(x, y)) \in \Omega$ koşulunu sağlayan (x, y) noktaları D'yi içeren açık bir küme oluşturur. M ile N bu kümede tanımlıdır. P, Q, R'nin birinci, g'nin ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olduğundan M ile N'nin birinci mertebeden kısmi türevleri de orada süreklidir. Green Teoremi (Teorem 13.1)*

$$\int_{C_1} M\,dx + N\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big)dA$$

verir.
Adım 4: Türevleri hesaplamak. *N'nin tanımında Q ile R, $(x, y, g(x, y))$ noktasında alınır; yani x'e hem doğrudan hem de $z = g(x, y)$ üzerinden bağlıdır. Zincir kuralı ve çarpımın türevi*

$$\frac{\partial N}{\partial x} = Q_x + Q_z\,g_x + (R_x + R_z\,g_x)\,g_y + R\,g_{yx}$$

verir. Aynı biçimde

$$\frac{\partial M}{\partial y} = P_y + P_z\,g_y + (R_y + R_z\,g_y)\,g_x + R\,g_{xy}$$

bulunur. g'nin ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olduğundan $g_{xy} = g_{yx}$'tir (bkz. Analiz 4). Farkta $R\,g_{yx}$ ile $R\,g_{xy}$ ve iki $R_z\,g_x\,g_y$ terimi birbirini götürür. Kalan altı terim düzenlenince

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} &= Q_x - P_y + Q_z\,g_x - R_y\,g_x + R_x\,g_y - P_z\,g_y \\ &= -(R_y - Q_z)\,g_x - (P_z - R_x)\,g_y + (Q_x - P_y)\end{aligned}$$

olur. Bu, (1) eşitliğindeki integrandın aynısıdır.
Sonuç. *Adım 2, 3 ve 4'ü birleştirip (1) eşitliğini kullanırsak*

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big)dA = \iint_S \operatorname{curl}\,\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

elde ederiz. ■

Genel durum için ispatın fikri.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yüzey tek bir grafik olarak yazılamıyorsa onu, her biri bir koordinat düzlemi üzerinde grafik olan sonlu sayıda $S_1, \dots, S_m$ parçasına böleriz. Her parça $z = g(x,y)$, $y = h(x,z)$ ya da $x = k(y,z)$ biçimindedir; son iki biçim için yukarıdaki ispat, değişkenlerin adları değiştirilerek aynen tekrarlanır. Her parçaya teoremi uygulayıp eşitlikleri toplarız:

- *Sağ tarafta parçaların yüzey integralleri toplanır ve $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$'yi verir.*
- *Sol tarafta, komşu iki parçanın ortak kenarı bu parçaların pozitif yönleri tarafından zıt yönlerde dolaşılır. Yön değişince eğrisel integralin işareti değiştiğinden (Önerme 11.4) iç kenarlar üzerindeki integraller birbirini götürür ve geriye yalnız S'nin sınırı C üzerindeki integral kalır.*

Bu, Green Teoremi'ni birkaç basit bölgenin birleşimine genişletirken yapılan sadeleştirmenin aynısıdır. Ders düzeyini aşan adım, her parçalı düzgün yönlendirilmiş yüzeyin böyle uygun parçalara bölünebildiğini göstermektir; bu, ileri analizde yapılır. ■

Yani Stokes Teoremi, $\mathbf{F}$'nin sınır eğrisi boyunca teğet bileşeninin eğrisel integralini, $\operatorname{curl}\mathbf{F}$'nin yüzeye dik bileşeninin yüzey integraline eşitler. Gerçekten $d\mathbf{r} = \mathbf{T}\,ds$ ve $d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$ olduğundan teorem

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

biçiminde de yazılır. Pozitif yönlü sınır için ∂S gösterimiyle

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

olur.
Bu eşitlik, Analizin Temel Teoremi (bkz. Analiz 2) ve Green Teoremi ile aynı kalıptadır:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a), \qquad \iint_D \Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dA = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy.$$

Hepsinde bir tarafta bir türevin bir bölge üzerindeki integrali, öbür tarafta ise türevi alınan nesnenin yalnız bölgenin sınırındaki değerleri bulunur. Stokes Teoremi'nde türevin rolünü $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ oynar, sınır ise artık bir uzay eğrisidir.
Green Teoremi gerçekten Stokes Teoremi'nin özel bir hâlidir. S, xy-düzleminde bir D bölgesi olsun ve yukarı yönlendirilsin. O zaman $\mathbf{n} = \mathbf{k}$, $dS = dA$ olur ve teorem

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\,dA$$

biçimini alır. Düzlemsel bir $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ alanı için

$$(\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$$

olduğundan bu, Green Teoremi'nin vektör biçimidir.
Teoremi ilk kez kullanırken iki tarafı da hesaplayıp karşılaştırmak öğreticidir.

Örnek 17.1 (Teoremi Bir Paraboloitte Doğrulama). S, $z = 1 - x^2 - y^2$ paraboloidinin xy-düzleminin üstünde kalan, yukarı yönlendirilmiş parçası olsun ve

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$$

alalım. Eğrisel integrali ve yüzey integralini ayrı ayrı hesaplayarak Stokes Teoremi'ni doğrulayınız.

Çözüm.
Sınır eğrisi. S'nin sınırında $z = 0$'dır; buradan $x^2 + y^2 = 1$ bulunur. Yani C, xy-düzlemindeki birim çemberdir. S yukarı yönlendirildiğinden C'nin pozitif yönü, yukarıdan bakınca saat yönünün tersidir:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Eğrisel integral. C üzerinde $z = 0$ olduğundan $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$'dir. $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$ olduğundan

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

bulunur.
Rotasyonel. $P = -y$, $Q = x$, $R = xz$ için

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 - 0 = 0,\\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= 0 - z = -z,\\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 1 - (-1) = 2\end{aligned}$$

olduğundan curl $\mathbf{F} = -z\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$'dir.
Yüzey integrali. S, $g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ fonksiyonunun birim daire D üzerindeki grafiğidir; $g_x = -2x$ ve $g_y = -2y$'dir. Yukarı yönlendirilmiş grafik için akı formülünde $G_1 = 0$, $G_2 = -z$, $G_3 = 2$ alınırsa integrand

$$-G_1\,g_x - G_2\,g_y + G_3 = -(-z)(-2y) + 2 = 2 - 2yz$$

olur. S üzerinde $z = 1 - x^2 - y^2$ olduğundan

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D 2\,dA - \iint_D 2y\,(1 - x^2 - y^2)\,dA$$

bulunur. Birinci integral $2\cdot\pi = 2\pi$'dir. İkinci integralde kutupsal koordinatlara geçersek integrand $2r\sin\theta\,(1 - r^2)$ olur ve

$$\iint_D 2y\,(1 - x^2 - y^2)\,dA = \int_0^{2\pi} \sin\theta\,d\theta \cdot \int_0^1 2r^2(1 - r^2)\,dr = 0$$

çıkar, çünkü $\int_0^{2\pi}\sin\theta\,d\theta = 0$'dır. Yüzey integrali de 2π'dir.
İki taraf da 2π çıktı. $\mathbf{F}$'nin $xz\,\mathbf{k}$ bileşeni rotasyonele $-z\,\mathbf{j}$ katkısı yapar, ama bu katkının yüzey integrali sıfırdır. Sınırda ise $z = 0$ olduğundan bu bileşen eğrisel integrale hiç girmez. ■

17.3 Stokes Teoremiyle Eğrisel İntegral Hesabı

Stokes Teoremi'nin en sık kullanıldığı yer, doğrudan hesabı zahmetli bir eğrisel integrali, sınırı o eğri olan bir yüzey üzerindeki daha kolay bir integrale çevirmektir.

Stokes Teoremi ile eğrisel integral dört adımda

1. **Rotasyoneli hesapla.** curl $\mathbf{F}$ çoğu zaman $\mathbf{F}$'den daha basittir.
2. **Yüzeyi seç.** Sınırı C olan her yüzey işe yarar; en basitini seç. Çoğu zaman bu, C'nin içinde kaldığı düzlem parçasıdır.
3. **Yönü uydur.** $\mathbf{n}$'yi, C'nin verilen yönü pozitif yön olacak biçimde seç. C yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolanıyorsa yüzeyi yukarı yönlendir.
4. **Akıyı hesapla.** Yüzey $z = g(x,y)$, $(x,y)\in D$ grafiği ve yukarı yönlendirilmişse curl $\mathbf{F} = G_1\,\mathbf{i} + G_2\,\mathbf{j} + G_3\,\mathbf{k}$ için (Sonuç 16.2)

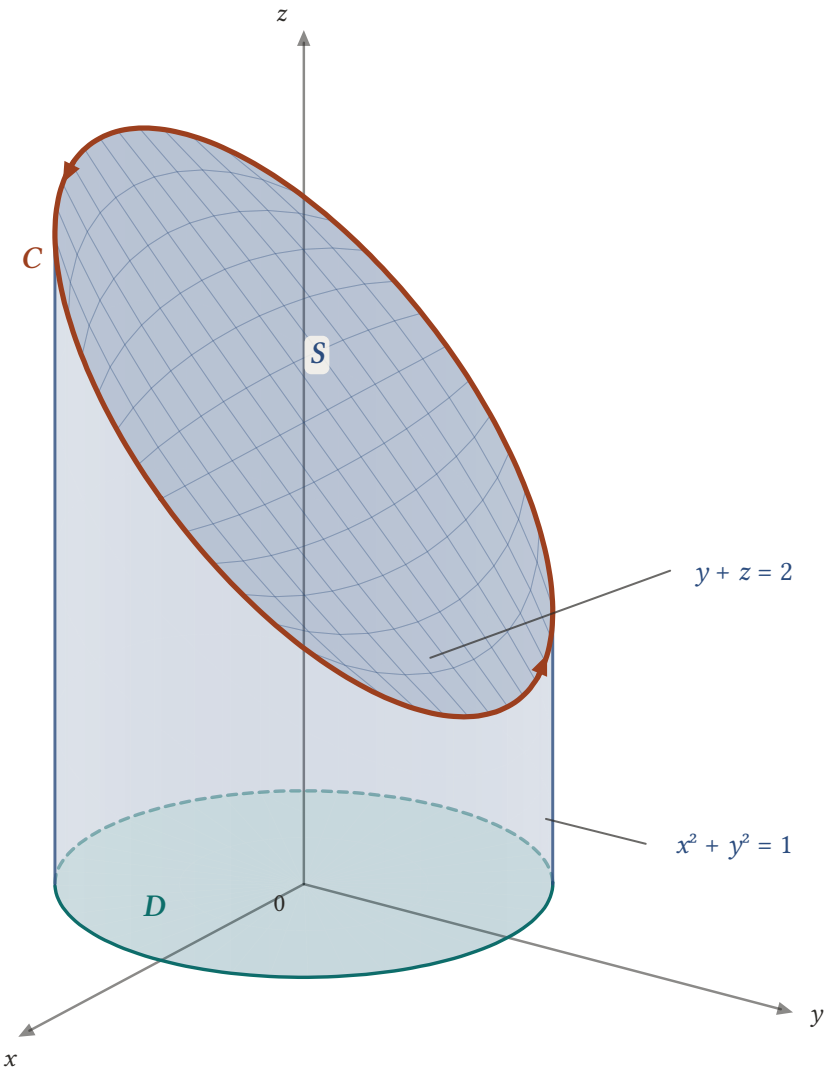
$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D \big(\,-G_1\,g_x - G_2\,g_y + G_3\,\big)\,dA.$$

Örnek 17.2 (Bir Düzlemle Bir Silindirin Kesişimi).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -y^2\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

olsun ve C, $y+z=2$ düzlemi ile $x^2+y^2=1$ silindirinin kesişim eğrisi olsun. C, yukarıdan bakınca saat yönünün tersine yönlendirilmiştir. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integralini hesaplayınız.



Şekil 17.3: $y+z=2$ düzlemi $x^2+y^2=1$ silindirini C elipsinde keser. S, düzlemin C içinde kalan parçasıdır; gölgesi birim daire D'dir. C yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolanır, bu yüzden S yukarı yönlendirilir.

Çözüm.
C bir elipstir. İntegral C parametrize edilerek doğrudan da hesaplanabilir, ama Stokes Teoremi işi kısaltır.
Rotasyonel.

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1+2y)\,\mathbf{k}$$

Determinantı açmak, $P=-y^2$, $Q=x$, $R=z^2$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 - 0 = 0,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 0 = 0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-2y) = 1 + 2y$$

bileşenlerini hesaplamak demektir.

Yüzey ve yön. Sınırı C olan pek çok yüzey vardır; en kolayı, $y + z = 2$ düzleminin C içinde kalan eliptik S parçasıdır. C yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolandığından S'yi yukarı yönlendiririz. S, $g(x, y) = 2 - y$ fonksiyonunun grafiğidir ve xy-düzlemine izdüşümü $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$ birim dairesidir.

Akı. curl $\mathbf{F}$'nin yalnız $\mathbf{k}$ bileşeni vardır: $G_1 = G_2 = 0$, $G_3 = 1 + 2y$. Bu yüzden akı formülündeki integrand yalnız $1 + 2y$'dir. Kutupsal koordinatlara geçersek (Teorem 3.1)

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D (1+2y)\,dA \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{1} (1 + 2r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\Big[\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3}\sin\theta\Big]_{r=0}^{r=1} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sin\theta\Big)d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\pi + 0 = \pi\end{aligned}$$

bulunur. C'yi $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2 - \sin t$ ile parametrize edip doğrudan hesaplamak da π verir, ama $\sin^3 t$ ve $(2 - \sin t)^2 \cos t$ gibi terimlerin integrallerini gerektirir. ■

17.4 Aynı Sınırı Paylaşan Yüzeyler

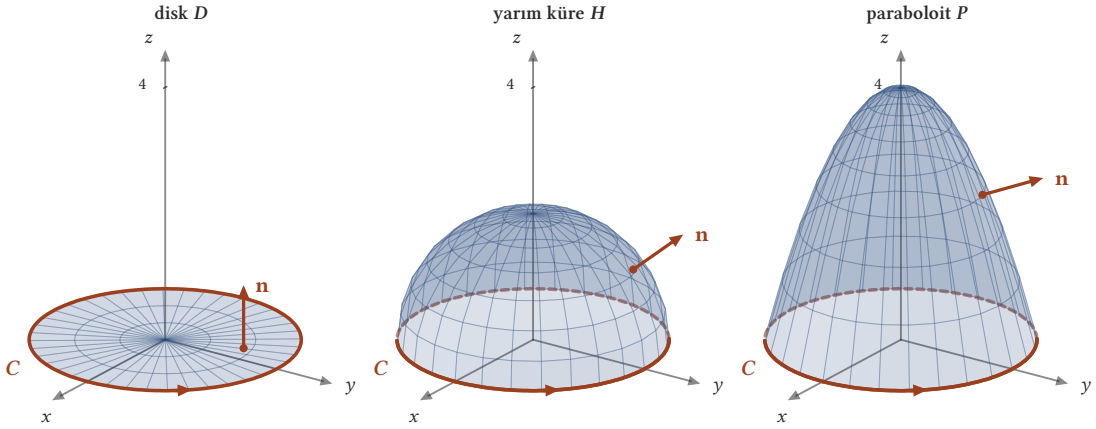
Stokes Teoremi'nin bir tarafı yüzeye, öbür tarafı ise yalnız sınır eğrisine bağlıdır. Bundan kullanışlı bir sonuç çıkar.

Sonuç 17.1 (Aynı Sınırlı Yüzeyler). *S_1 ve S_2, Stokes Teoremi'nin koşullarını sağlayan ve pozitif yönlü sınır eğrisi aynı C eğrisi olan iki yönlendirilmiş yüzey olsun. Bileşenlerinin kısmi türevleri $S_1 \cup S_2$'yi içeren açık bir bölgede sürekli olan her $\mathbf{F}$ vektör alanı için*

$$\iint_{S_1} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.4: Sınırı aynı C *çemberi* ($x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$) *olan üç yüzey:* $x^2 + y^2 \le 4$ *diski,* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *küresinin üst yarısı ve* $z = 4 - x^2 - y^2$ *paraboloitinin* xy*-düzleminin üstündeki parçası. Üçü de yukarı yönlendirildiğinde* C *'ye aynı pozitif yönü verir.*

İspat.
F*'nin kısmi türevlerinin sürekli olduğu açık bölge iki yüzeyi de içerir. Bu yüzden Stokes Teoremi'ni (Teorem 17.1) iki yüzeye ayrı ayrı uygulayabiliriz ve*

$$\iint_{S_1} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

buluruz. ■

Yani bir rotasyonelin akısı, yüzeyin kendisine değil, yalnız sınırına ve sınırın yönüne bağlıdır. Bu, bir yüzey üzerinde integral almak zor, aynı sınırlı başka bir yüzey üzerinde kolay olduğunda çok işe yarar. Yön uyumunu kontrol etmenin kolay bir yolu var: yüzeylerden biri öbürünün üstünde bir kubbe gibi duruyorsa, ikisi de yukarı yönlendirildiğinde sınıra aynı yönü verir (yukarıdaki şekilde disk, yarım küre ve paraboloit gibi).

Bir rotasyonelin akısı iki yoldan

$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ integralini Stokes Teoremi'yle iki yoldan hesaplayabiliriz:

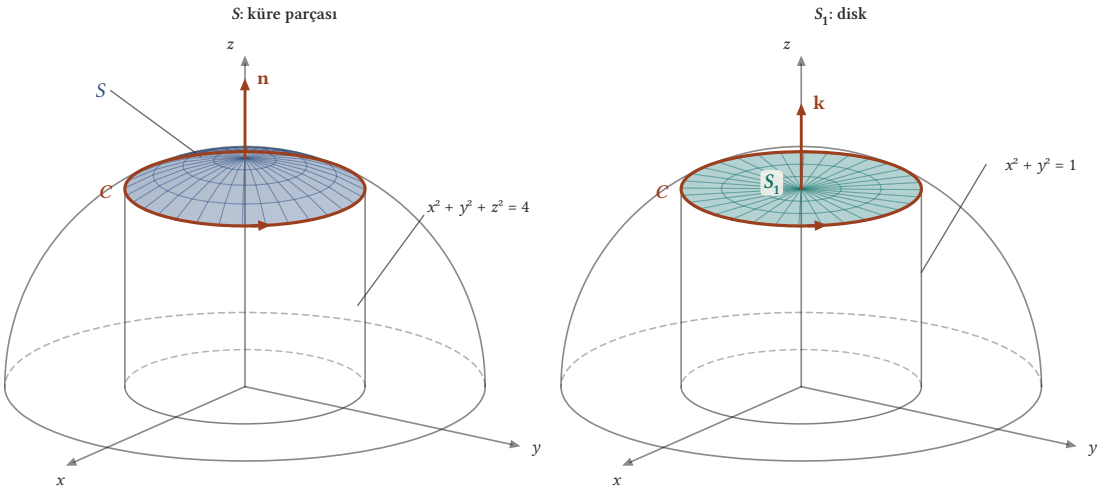
1. **Sınır üzerinden.** S'nin sınırı C'yi bul, pozitif yönde parametrize et ve $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'yi hesapla.
2. **Yüzey değiştirerek.** Sınırı aynı C olan daha basit bir S_1 seç (çoğu zaman düz bir disk), C'ye aynı yönü verecek biçimde yönlendir ve $\iint_{S_1} \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$'yi hesapla.

Örnek 17.3 (Bir Küre Parçasında Rotasyonelin Akısı).

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$$

olsun ve S, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin $x^2 + y^2 = 1$ silindirinin içinde ve xy-düzleminin üstünde kalan, yukarı yönlendirilmiş parçası olsun. $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ integralini Stokes Teoremi'yle hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.5: Solda $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin $x^2 + y^2 = 1$ silindiri içinde kalan üst parçası S, sağda $z = \sqrt{3}$ düzlemindeki birim disk S_1. İkisinin sınırı aynı C çemberidir ($x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$) ve yukarı yönlendirildiklerinde C'ye aynı yönü verirler.

Çözüm.
Birinci yol: sınır üzerinden. S'nin sınırında hem $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ hem $x^2 + y^2 = 1$ sağlanır. Taraf tarafa çıkarırsak $z^2 = 3$ buluruz; $z > 0$ olduğundan $z = \sqrt{3}$'tür. Yani C, $z = \sqrt{3}$ düzleminde, merkezi z ekseni üzerinde olan birim çemberdir. S yukarı yönlendirildiğinden C'yi yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolaşırız:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\,\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Buradan $\mathbf{r}'(t) = -\sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$ ve

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \sqrt{3}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\sin t\,\mathbf{j} + \cos t \sin t\,\mathbf{k}$$

olur. Stokes Teoremi'ne göre

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3}\cos t\sin t + \sqrt{3}\sin t\cos t\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0.\end{aligned}$$

İkinci yol: yüzey değiştirerek. S_1, $z = \sqrt{3}$ düzlemindeki $x^2 + y^2 \le 1$ diski olsun ve yukarı yönlendirilsin. S, S_1'in üstünde bir kubbe gibi durduğundan iki yüzey C'ye aynı pozitif yönü verir. Bu yüzden (Sonuç 17.1)

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

olur. $P = xz$, $Q = yz$, $R = xy$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = x - y,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = x - y,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

olduğundan curl $\mathbf{F} = (x-y)\,\mathbf{i} + (x-y)\,\mathbf{j}$'dir. S_1 yatay olduğundan yukarı birim normali $\mathbf{k}$'dir ve curl $\mathbf{F} \cdot \mathbf{k} = 0$'dır. Dolayısıyla

$$\iint_{S_1} \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{k}\, dS = \iint_{S_1} 0\, dS = 0$$

bulunur. İki yol da aynı sonucu verir. ■

17.5 Rotasyonelin Anlamı: Dolanım

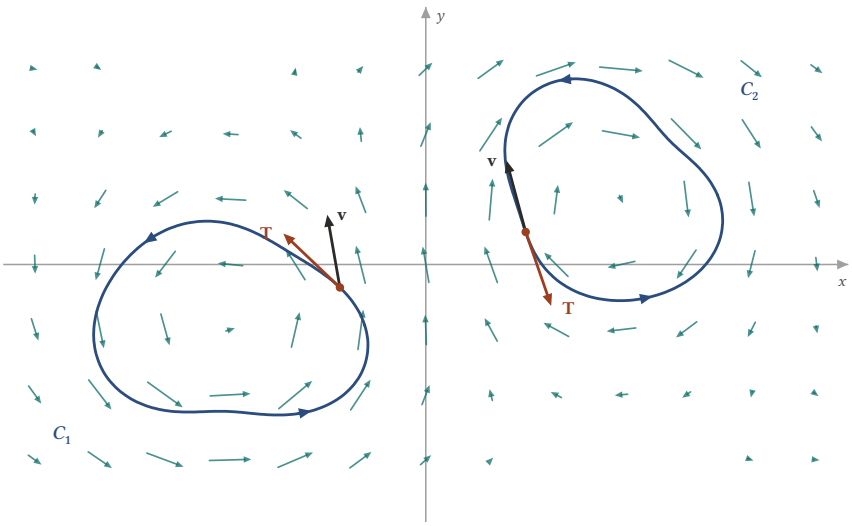
Stokes Teoremi, rotasyonel vektörünün fiziksel anlamını da açıklar. Bunun için önce bir akışkanın kapalı bir eğri etrafındaki dolanımını tanımlayalım.

Tanım 17.2 (Dolanım). $\mathbf{v}$, bir akışkanın hız alanı ve C, yönlendirilmiş kapalı bir eğri olsun. $\mathbf{T}$, C'nin birim teğet vektörü olmak üzere

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

eğrisel integraline $\mathbf{v}$'nin C etrafındaki **dolanımı** (circulation) denir.

Yani dolanım, hızın eğri boyunca teğet bileşeninin toplamıdır. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$, $\mathbf{v}$'nin $\mathbf{T}$ doğrultusundaki bileşenidir: $\mathbf{v}$'nin yönü $\mathbf{T}$'ninkine ne kadar yakınsa bu sayı o kadar büyüktür, iki vektör kabaca zıt yönlerdeyse negatiftir. Bu yüzden dolanım, akışkanın C boyunca C'nin yönünde akma eğiliminin bir ölçüsüdür. Pozitif dolanım akışın eğrinin yönünde, negatif dolanım ise ters yönde döndüğünü söyler.



Şekil 17.6: Bir akışkanın hız alanı $\mathbf{v}$ (oklar) ve iki kapalı eğri. C_1 boyunca $\mathbf{v}$ çoğunlukla eğrinin $\mathbf{T}$ teğetiyle aynı yöne akar, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} > 0$ olur ve dolanım pozitiftir. C_2 boyunca akış eğrinin yönüne karşıdır, dolanım negatiftir.

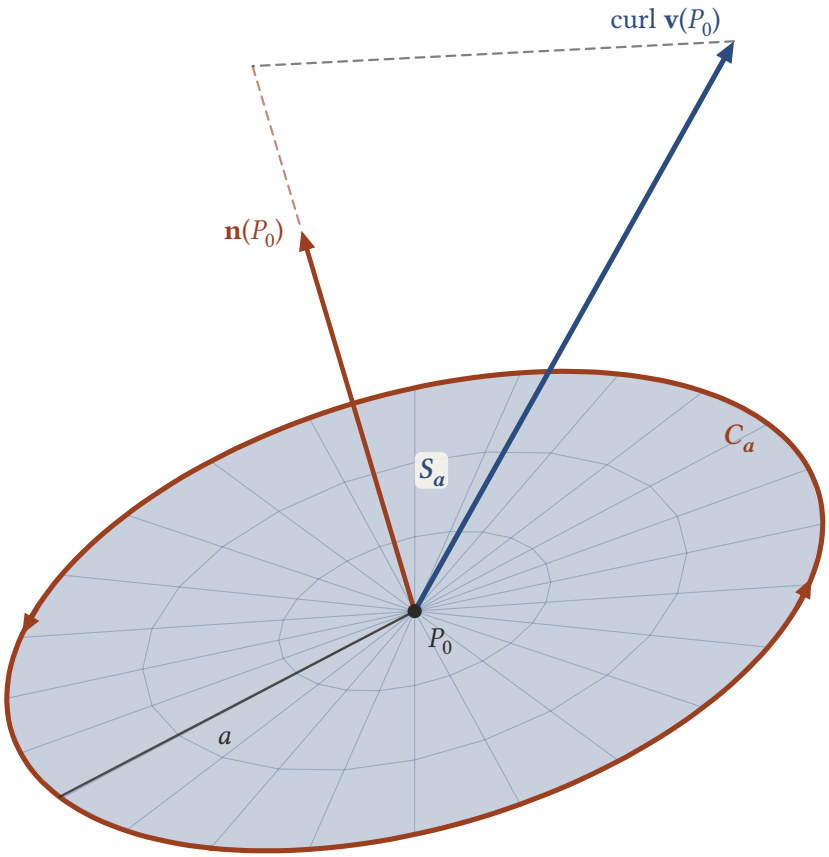
 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi küçük bir disk etrafındaki dolanıma bakalım. Disk küçüldükçe dolanım da sıfıra gider; ama dolanımı diskin alanına bölersek bir limit kalır ve bu limit rotasyonelden başka bir şey değildir.

Önerme 17.1 (Rotasyonel ve Dolanım). *P_0 bir nokta, $\mathbf{n}$ bir birim vektör olsun ve $\mathbf{v}$'nin bileşenlerinin kısmi türevleri P_0'ı içeren açık bir bölgede sürekli olsun. Yeterince küçük her $a > 0$ için S_a, merkezi P_0, yarıçapı a olan, $\mathbf{n}$'ye dik ve $\mathbf{n}$ ile yönlendirilmiş disk; C_a da onun pozitif yönlü sınır çemberi olsun. Bu durumda*

$$\operatorname{curl} \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \tag{2}$$

olur.



Şekil 17.7: P_0 *merkezli,* a *yarıçaplı ve birim normali* $\mathbf{n}$ *olan küçük* S_a *diski ile sınırı* C_a. C_a *etrafındaki dolanım yaklaşık olarak (curl* $\mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}$*)* πa^2*'dir; çarpandaki iç çarpım, curl* $\mathbf{v}$*'nin* $\mathbf{n}$ *doğrultusundaki bileşenidir (kesikli izdüşüm).*

İspat.
Stokes Teoremi. *a, S_a diski bu açık bölgenin içinde kalacak kadar küçük olsun. S_a düz bir disk olduğundan birim normali her noktada $\mathbf{n}$'dir. Stokes Teoremi'ne göre*

$$\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_a} \operatorname{curl} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Sabit değerle karşılaştırma. *S_a'nın alanı πa^2 olduğundan sabit $\operatorname{curl} \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}$ sayısını da bir yüzey integrali olarak yazabiliriz:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\text{curl } \mathbf{v}(P_0)\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\pi a^2}\iint_{S_a} \text{curl } \mathbf{v}(P_0)\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

$M(a)$, $|\ \text{curl } \mathbf{v}(P) - \text{curl } \mathbf{v}(P_0)\ |$ sayısının $P \in S_a$ üzerindeki en büyük değeri olsun. Kısmi türevler sürekli olduğundan curl $\mathbf{v}$ *süreklidir; kapalı ve sınırlı S_a üzerinde bu en büyük değer vardır. Son iki eşitliği taraf tarafa çıkarıp her* $\mathbf{w}$ *vektörü için geçerli olan* $|\ \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\ | \le |\ \mathbf{w}\ ||\ \mathbf{n}\ | = |\ \mathbf{w}\ |$ *eşitsizliğini kullanırsak*

$$\begin{aligned}
&\left|\ \frac{1}{\pi a^2}\int_{C_a}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} - \text{curl } \mathbf{v}(P_0)\cdot\mathbf{n}\ \right| \\
&= \frac{1}{\pi a^2}\left|\ \iint_{S_a}\big(\ \text{curl } \mathbf{v}(P) - \text{curl } \mathbf{v}(P_0)\ \big)\cdot\mathbf{n}\,dS\ \right| \\
&\le \frac{1}{\pi a^2}\iint_{S_a}|\ \text{curl } \mathbf{v}(P) - \text{curl } \mathbf{v}(P_0)\ |\,dS \\
&\le \frac{1}{\pi a^2}\cdot M(a)\cdot\pi a^2 = M(a)
\end{aligned}$$

buluruz.
Limit. *$\varepsilon > 0$ verilsin.* curl $\mathbf{v}$*, P_0'da sürekli olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki P_0'a uzaklığı δ'dan küçük her P noktasında*

$$|\ \text{curl } \mathbf{v}(P) - \text{curl } \mathbf{v}(P_0)\ | < \varepsilon$$

olur. $a < \delta$ ise S_a'nın her noktası P_0'a en çok a uzaklıkta olduğundan $M(a) < \varepsilon$'dur. Demek ki $a \to 0$ iken $M(a) \to 0$ olur ve yukarıdaki fark sıfıra gider. Bu, (2) eşitliğidir. ■

Yani curl $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ ekseni etrafındaki birim alan başına dolanımdır. Küçük bir a için

$$\int_{C_a}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} \approx \big(\ \text{curl } \mathbf{v}(P_0)\cdot\mathbf{n}\ \big)\pi a^2$$

yaklaşımı geçerlidir. Bu sayı, akışkanın P_0 çevresinde $\mathbf{n}$ ekseni etrafında dönme etkisini ölçer. α, curl $\mathbf{v}(P_0)$ ile $\mathbf{n}$ arasındaki açı ise

$$\text{curl } \mathbf{v}(P_0)\cdot\mathbf{n} = |\ \text{curl } \mathbf{v}(P_0)\ |\cos\alpha$$

olur. Bu değer en büyük, $\mathbf{n}$ tam curl $\mathbf{v}(P_0)$ yönündeyken olur. Akışkanın içine, ekseni $\mathbf{n}$ olan küçük bir kürekli çark koyduğumuzu düşünelim. Çark en hızlı, ekseni curl $\mathbf{v}$'ye paralelken döner ve dönme yönü sağ el kuralıyla curl $\mathbf{v}$'nin yönünden okunur. curl $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ olan bir noktada ise çark hangi eksenle konursa konsun dönme eğilimi göstermez.

17.6 Rotasyoneli Sıfır Olan Alanlar

Son olarak Stokes Teoremi'nin, rotasyonel ile konservatiflik arasındaki bağı nasıl açıkladığını görelim. Teorem 14.2 şunu söyler: $\mathbf{F}$, $\mathbb{R}^3$'ün tamamında tanımlı, bileşenlerinin kısmi türevleri sürekli ve curl $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ise $\mathbf{F}$ konservatiftir. Stokes Teoremi bu sonucun neden doğru olduğuna dair bir sezgi verir:

1. Teorem 12.2 ve Teorem 12.3 gereğince, her kapalı C eğrisi için $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ olduğunu göstermek yeter.
2. C parçalı düzgün, basit kapalı bir eğri olsun. Sınırı C olan, yönlendirilebilir ve parçalı düzgün bir S yüzeyi vardır; böyle bir yüzeyin her zaman bulunduğunu göstermek ileri teknikler gerektirir. S'yi C pozitif yönlü olacak biçimde yönlendirip Stokes Teoremi'ni uygularsak

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

buluruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. Sonlu sayıda noktada kendini kesen bir kapalı eğri, bu noktalardan ayrılarak sonlu sayıda basit kapalı eğriye bölünebilir. Her birinin üzerindeki integral 0 olduğundan toplamları da 0'dır.

Kendini sonsuz kez kesen ya da bir yayı üst üste geçen kapalı eğriler bu basit parçalamaya uymaz ve ayrı bir inceleme ister. Bu yüzden yukarıdaki akış bir ispat değil, bir sezgidir; sonucun tam ispatı Teorem 14.2 içinde potansiyel fonksiyonu açıkça kurarak verilir.
Tersi zaten biliniyordu: konservatif bir alan bir gradyandır ve bir gradyanın rotasyoneli sıfırdır (Teorem 14.1). Böylece $\mathbb{R}^3$'ün tamamında tanımlı ve kısmi türevleri sürekli bir alan için "konservatif olmak" ile "rotasyoneli sıfır olmak" aynı şeydir.

17.7 Alıştırmalar

Alıştırmalar kolaydan zora sıralanmıştır. İlki teoremin anlamını, sonrakiler teoremin iki yöndeki kullanımını çalıştırır: bir eğrisel integrali yüzey integraline, bir yüzey integralini de eğrisel integrale ya da başka bir yüzey üzerindeki integrale çevirmek.

Alıştırma 17.1 (Aynı Sınırlı Üç Yüzey). $\mathbf{F}$, bileşenlerinin kısmi türevleri $\mathbb{R}^3$'te sürekli olan bir vektör alanı olsun. Şu üç yüzeyi alalım:

- D: xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 \leq 4$ diski,
- H: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ küresinin $z \geq 0$ olan yarısı,
- P: $z = 4 - x^2 - y^2$ paraboloidinin $z \geq 0$ olan parçası.

Üçü de yukarı yönlendirilmiş olsun; yüzeyler Sonuç 17.1 içindeki şekilde çizilidir. Neden

$$\iint_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_H \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

olduğunu açıklayınız.

Çözüm.
Ortak sınır. D'nin sınırı, $z = 0$ düzlemindeki $x^2 + y^2 = 4$ çemberidir. H'nin ve P'nin sınırında $z = 0$'dır; bunu yüzeylerin denklemlerine yazınca ikisinde de $x^2 + y^2 = 4$ buluruz. Yani üç yüzeyin sınırı aynı C çemberidir.
Ortak yön. H ile P, D'nin üstünde birer kubbe gibi durur ve üçü de yukarı (kubbeler için dışa) yönlendirilmiştir. Bunu $(2, 0, 0)$ noktasında kontrol edelim: C üzerinde $\mathbf{j}$ yönünde, yani yukarıdan bakınca saat yönünün tersine yürüyen biri için

- D'de baş $\mathbf{k}$ yönündedir ve disk solda (orijine doğru) kalır,
- H'de baş $\mathbf{i}$ yönündedir (normal küreye dik ve dışa doğrudur) ve yarım küre solda (yukarıda) kalır,
- P'de baş dışa ve yukarı eğiktir ve paraboloit yine solda (yukarıda ve içeride) kalır.

Demek ki üç yüzey C'ye aynı pozitif yönü verir: yukarıdan bakınca saat yönünün tersi.
Sonuç. Üç yüzey de düzgündür, sınırları basit kapalı ve düzgündür, $\mathbf{F}$'nin kısmi türevleri her yerde süreklidir. Stokes Teoremi'ni üç yüzeye ayrı ayrı uygularsak üç integralin de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$'ye eşit olduğunu, dolayısıyla birbirine eşit olduğunu buluruz. Bu, Sonuç 17.1 sonucunun bir örneğidir. ■

Alıştırma 17.2 (Bir Üçgen Boyunca Eğrisel İntegral).

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + (y + z^2)\,\mathbf{j} + (z + x^2)\,\mathbf{k}$$

ve C, köşeleri $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ olan ve yukarıdan bakınca saat yönünün tersine yönlendirilmiş üçgen olsun. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integralini Stokes Teoremi'yle hesaplayınız.

Çözüm.
Rotasyonel. $P = x + y^2$, $Q = y + z^2$, $R = z + x^2$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 - 2z = -2z,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 2x = -2x,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 - 2y = -2y$$

olduğundan curl $\mathbf{F} = -2z\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} - 2y\,\mathbf{k}$'dir.
Yüzey. Üç köşe de $x + y + z = 1$ düzlemindedir. S, bu düzlemin üçgenin içinde kalan parçası olsun: $z = g(x, y) = 1 - x - y$ grafiği, D ise xy-düzlemindeki $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$ üçgenidir. C yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolandığından S'yi yukarı yönlendiririz.
Akı. $g_x = g_y = -1$ olduğundan integrand

$$-G_1\, g_x - G_2\, g_y + G_3 = G_1 + G_2 + G_3 = -2(x + y + z)$$

olur. S üzerinde $x + y + z = 1$ olduğundan integrand sabit -2'dir. D'nin alanı $\frac{1}{2}$ olduğundan

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (-2)\, dA = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

bulunur. ■

Alıştırma 17.3 (Bir Paraboloitle Bir Düzlemin Kesişimi).

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 - z)\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + (y + z^2)\,\mathbf{k}$$

ve C, $z = x^2 + y^2$ paraboloidi ile $z = x$ düzleminin kesişim eğrisi olsun. C, yukarıdan bakınca saat yönünün tersine yönlendirilmiştir. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ integralini Stokes Teoremi'yle hesaplayınız.

Çözüm.
Rotasyonel. $P = x^3 - z$, $Q = xy$, $R = y + z^2$ için

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 1 - 0 = 1,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -1 - 0 = -1,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y - 0 = y$$

olduğundan curl $\mathbf{F} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$'dir.
Yüzey. Kesişimde $x = x^2 + y^2$, yani

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

sağlanır. Demek ki C'nin xy-düzlemine izdüşümü, merkezi $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ve yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan çemberdir. Paraboloidi kullanmak yerine düzlemin C içinde kalan parçasını alalım: S, $g(x, y) = x$ fonksiyonunun bu çemberin içindeki D dairesi üzerindeki grafiği olsun. C'nin yönü nedeniyle S'yi yukarı yönlendiririz.
Akı. $g_x = 1$, $g_y = 0$ ve $G_1 = 1$, $G_2 = -1$, $G_3 = y$ olduğundan integrand

$$-G_1\, g_x - G_2\, g_y + G_3 = -1 + y$$

olur. D dairesi x eksenine göre simetrik, y ise bu simetride işaret değiştiren bir fonksiyon olduğundan $\iint_D y\, dA = 0$'dır. D'nin alanı $\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$ olduğundan

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (y - 1)\, dA = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. ■

Alıştırma 17.4 (Orijinden Bakınca Saat Yönünde Dolanan Çember).

$$\mathbf{F}(x,y,z) = ze^x\,\mathbf{i} + (z-y^3)\,\mathbf{j} + (x-z^3)\,\mathbf{k}$$

ve C, $x=3$ düzlemindeki $y^2+z^2=4$ çemberi olsun. C, orijinden bakınca saat yönünde yönlendirilmiştir. $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integralini Stokes Teoremi'yle hesaplayınız.

Çözüm.
Rotasyonel. $P=ze^x$, $Q=z-y^3$, $R=x-z^3$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0-1=-1,\\
\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= e^x-1,\\
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 0-0=0
\end{aligned}$$

olduğundan $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -\mathbf{i} + (e^x-1)\,\mathbf{j}$'dir.
Yüzey ve yön. S, $x=3$ düzlemindeki $y^2+z^2\le 4$ diski olsun; normali $\mathbf{i}$ ya da $-\mathbf{i}$'dir. Orijin, düzlemin $x<3$ tarafındadır. Bir taraftan saat yönünde görünen bir dolanım öbür taraftan saat yönünün tersine görünür; demek ki C, $x>3$ tarafından bakınca saat yönünün tersine dolanır. Pozitif yönlü sınır, normalin ucundan bakınca saat yönünün tersine dolanan sınır olduğundan diski $\mathbf{n}=\mathbf{i}$ ile yönlendiririz.
Akı. Disk üzerinde $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{i} = -1$'dir. Diskin alanı $\pi\cdot 2^2 = 4\pi$ olduğundan

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{i}\,dS = \iint_S (-1)\,dS = -4\pi$$

bulunur. ■

Alıştırma 17.5 (Bir Yarım Kürede Rotasyonelin Akısı).

$$\mathbf{F}(x,y,z) = ze^y\,\mathbf{i} + x\cos y\,\mathbf{j} + xz\sin y\,\mathbf{k}$$

ve S, $x^2+y^2+z^2=16$ küresinin $y\ge 0$ olan yarısı olsun; S, pozitif y ekseni yönünde yönlendirilmiştir. $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Sınır ve yeni yüzey. S'nin sınırında $y=0$'dır; buradan $x^2+z^2=16$ bulunur. Yani sınır, xz-düzlemindeki 4 yarıçaplı C çemberidir. S_1, $y=0$ düzlemindeki $x^2+z^2\le 16$ diski olsun ve $\mathbf{j}$ ile yönlendirilsin. S, S_1'in pozitif y tarafında bir kubbe gibi durur ve iki yüzeyin normali de y'nin pozitif yönüne bakar. Tıpkı yukarı yönlü bir kubbe ile altındaki yukarı yönlü disk gibi, ikisi C'ye aynı pozitif yönü verir. Sonuç 17.1 gereğince

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{j}\,dS$$

olur.
Rotasyonel. $P=ze^y$, $Q=x\cos y$, $R=xz\sin y$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= xz\cos y - 0 = xz\cos y,\\
\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= e^y - z\sin y,\\
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \cos y - ze^y
\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Bize yalnız $\mathbf{j}$ bileşeni gerekir: S_1 üzerinde $y = 0$ olduğundan

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{j} = e^0 - z \sin 0 = 1$$

olur.
Akı. S_1'in alanı $\pi \cdot 4^2 = 16\pi$ olduğundan

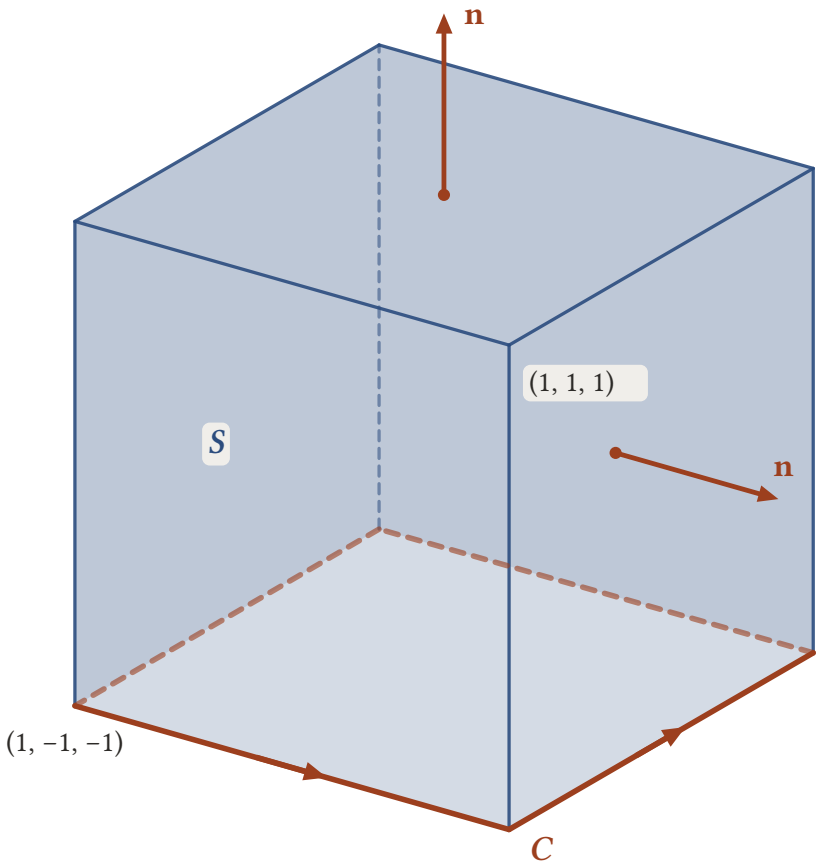
$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} 1 \, dS = 16\pi$$

bulunur. ■

Alıştırma 17.6 (Tabanı Açık Bir Küp).

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + x^2yz\,\mathbf{k}$$

ve S, köşeleri $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ olan küpün üst yüzü ile dört yan yüzünden oluşan (tabanı olmayan), dışa yönlendirilmiş yüzey olsun. $\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ integralini hesaplayınız.



Şekil 17.8: Köşeleri (±1, ±1, ±1) olan küpün tabanı çıkarılmış yüzeyi S: üst yüz ve dört yan yüz, normaller dışa doğru. Sınırı, $z = -1$ düzlemindeki kare C'dir ve yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolanır.

Çözüm.
Sınır ve yeni yüzey. S'nin sınırı, $z = -1$ düzlemindeki C karesidir. S, taban karesinin üstünde kutu biçiminde bir kubbedir ve normalleri dışa (üst yüzde yukarı) bakar; bu yüzden C'nin pozitif yönü yukarıdan bakınca saat yönünün tersidir. S_1, taban yüzü $z = -1$, $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ olsun ve

 CC BY-NC-SA 4.0

yukarı ($\mathbf{k}$ ile, yani küpün içine doğru) yönlendirilsin. Bu yönlendirme C'ye aynı pozitif yönü verir, dolayısıyla (Sonuç 17.1)

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k}\,dS$$

olur.
Rotasyonel. $P=xyz$, $Q=xy$, $R=x^2yz$ için $\mathbf{k}$ bileşeni

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} = y - xz$$

olur. S_1 üzerinde $z=-1$ olduğundan $\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{k} = x+y$'dir.
Akı. S_1 karesi üzerinde

$$\begin{aligned}\iint_{S_1}(x+y)\,dS &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x+y)\,dy\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}2x\,dx + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} y\,dy\,dx = 0+0=0\end{aligned}$$

bulunur. Demek ki $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=0$'dır. Beş yüzün integrallerini tek tek hesaplamak da aynı sonucu verir, ama çok daha uzundur. ■

Alıştırma 17.7 (Bir Paraboloit Parçasında Doğrulama).

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -2yz\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$$

ve S, $z=5-x^2-y^2$ paraboloidinin $z=1$ düzleminin üstünde kalan, yukarı yönlendirilmiş parçası olsun. İki tarafı ayrı ayrı hesaplayarak Stokes Teoremi'ni doğrulayınız.

Çözüm.
Sınır eğrisi. S'nin sınırında $z=1$'dir; buradan $x^2+y^2=4$ bulunur. S yukarı yönlendirildiğinden sınırı yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolaşırız:

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

Eğrisel integral. $\mathbf{r}'(t) = -2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$ ve

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -4\sin t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + 6\cos t\,\mathbf{k}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi}\left(\,8\sin^2 t + 4\sin t\cos t\,\right)dt \\ &= 8\pi + \left[\,2\sin^2 t\right]_0^{2\pi} = 8\pi + 0 = 8\pi\end{aligned}$$

bulunur; burada $\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt = \pi$ eşitliğini kullandık.
Rotasyonel. $P=-2yz$, $Q=y$, $R=3x$ için

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z} &= 0-0=0,\\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x} &= -2y-3,\\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} &= 0-(-2z)=2z\end{aligned}$$

olduğundan $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -(2y+3)\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k}$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yüzey integrali. $g(x,y) = 5 - x^2 - y^2$ için $g_x = -2x$, $g_y = -2y$ ve D, $x^2 + y^2 \le 4$ dairesidir. İntegrand

$$\begin{aligned} -G_1\, g_x - G_2\, g_y + G_3 &= 0 - (2y+3)(2y) + 2(5 - x^2 - y^2) \\ &= 10 - 2x^2 - 6y^2 - 6y \end{aligned}$$

olur. Kutupsal koordinatlarda terim terim integral alalım ($0 \le r \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$):

$$\begin{aligned} \iint_D 10\, dA &= 10 \cdot 4\pi = 40\pi, \\ \iint_D 2x^2\, dA &= 2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^2 r^3\, dr = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi, \\ \iint_D 6y^2\, dA &= 6 \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta \int_0^2 r^3\, dr = 6 \cdot \pi \cdot 4 = 24\pi, \\ \iint_D 6y\, dA &= 6 \int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^2 r^2\, dr = 0. \end{aligned}$$

Buradan

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 40\pi - 8\pi - 24\pi - 0 = 8\pi$$

bulunur. İki taraf da 8π'dir; Stokes Teoremi doğrulanmış olur. ■

Alıştırma 17.8 (Bir Kuvvet Alanının Yaptığı İş). Bir parçacık

$$\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + 4y^2\,\mathbf{k}$$

kuvvet alanının etkisinde, orijinden başlayıp doğru parçaları boyunca sırasıyla $(1,0,0)$, $(1,2,1)$, $(0,2,1)$ noktalarına ve oradan yine orijine gidiyor. Kuvvetin yaptığı işi Stokes Teoremi'yle bulunuz.

Çözüm.
Yol bir düzlemde. $\mathbf{a} = \mathbf{i}$ ve $\mathbf{b} = 2\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ dersek dört nokta $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$'dir. Yani yol, $\mathbf{a}$ ile $\mathbf{b}$'nin gerdiği bir paralelkenarın kenarlarıdır. Düzlemin normali $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$ olduğundan düzlemin denklemi $-y + 2z = 0$, yani $z = \tfrac{y}{2}$'dir. S, bu paralelkenar bölge olsun: $g(x,y) = \tfrac{y}{2}$ fonksiyonunun $D = [0,1] \times [0,2]$ dikdörtgeni üzerindeki grafiği. Yolun xy-düzlemine izdüşümü sırasıyla $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,2)$ noktalarından geçip $(0,0)$'a döner. Bu, dikdörtgenin kenarlarını yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolaşmaktır; S'yi yukarı yönlendiririz.
Rotasyonel. $P = z^2$, $Q = 2xy$, $R = 4y^2$ için

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= 8y - 0 = 8y, \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= 2z - 0 = 2z, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 2y - 0 = 2y \end{aligned}$$

olduğundan $\operatorname{curl}\mathbf{F} = 8y\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + 2y\,\mathbf{k}$'dir.
İş. $g_x = 0$, $g_y = \tfrac{1}{2}$ olduğundan integrand

$$-8y \cdot 0 - 2z \cdot \frac{1}{2} + 2y = 2y - z = 2y - \frac{y}{2} = \frac{3y}{2}$$

olur (S üzerinde $z = \tfrac{y}{2}$). Buradan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \int_0^2 \frac{3y}{2}\,dy\,dx = \int_0^1 \Big[\,\frac{3y^2}{4}\Big]_0^2\,dx = \int_0^1 3\,dx = 3$$

bulunur. Dört doğru parçası üzerindeki integralleri tek tek hesaplamak da sırasıyla 0, $\frac{28}{3}$, -1, $-\frac{16}{3}$ ve toplamda yine 3 verir. ■

Alıştırma 17.9 (Bir Eyer Yüzeyi Üzerindeki Eğri). C, $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sin 2t\,\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2\pi$ eğrisi olsun.

$$\int_C (y + \sin x)\,dx + (z^2 + \cos y)\,dy + x^3\,dz$$

integralini hesaplayınız. (C'nin $z = 2xy$ yüzeyi üzerinde olduğunu gözlemleyiniz.)

Çözüm.
Yüzey. C üzerinde $2xy = 2\sin t\cos t = \sin 2t = z$ olduğundan C, $z = 2xy$ eyer yüzeyinin üzerindedir. C'nin xy-düzlemine izdüşümü $(\sin t, \cos t)$ birim çemberidir. S, $g(x,y) = 2xy$ fonksiyonunun birim daire D üzerindeki grafiği olsun; sınırı C'dir.
Yön. $t = 0$'da izdüşüm $(0,1)$, $t = \frac{\pi}{2}$'de $(1,0)$ noktasındadır; yani C yukarıdan bakınca saat yönünde dolanır. Bu, yukarı yönlendirilmiş S'nin pozitif yönünün tersidir. Yön değişince eğrisel integralin işareti değiştiğinden (Önerme 11.4)

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \qquad (S \ \text{ yukarı yönlü})$$

olur. Burada

$$\mathbf{F} = (y + \sin x)\,\mathbf{i} + (z^2 + \cos y)\,\mathbf{j} + x^3\,\mathbf{k}$$

alanını kullanıyoruz.
Rotasyonel. $P = y + \sin x$, $Q = z^2 + \cos y$, $R = x^3$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= 0 - 2z = -2z,\\
\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= 0 - 3x^2 = -3x^2,\\
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= 0 - 1 = -1
\end{aligned}$$

olduğundan $\operatorname{curl}\mathbf{F} = -2z\,\mathbf{i} - 3x^2\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$'dir.
Akı. $g_x = 2y$, $g_y = 2x$ olduğundan integrand

$$-(-2z)(2y) - (-3x^2)(2x) + (-1) = 4yz + 6x^3 - 1 = 8xy^2 + 6x^3 - 1$$

olur (S üzerinde $z = 2xy$). D birim dairesi y eksenine göre simetriktir; $8xy^2$ ve $6x^3$ ise x yerine $-x$ yazılınca işaret değiştirir, bu yüzden integralleri sıfırdır. Böylece

$$\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_D (-1)\,dA = -\pi$$

ve

$$\int_C (y + \sin x)\,dx + (z^2 + \cos y)\,dy + x^3\,dz = -(-\pi) = \pi$$

bulunur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 17.10 (Yalnız Alana Bağlı Bir İntegral). C, $x+y+z=1$ düzleminde kalan basit kapalı düzgün bir eğri olsun.

$$\int_C z\,dx - 2x\,dy + 3y\,dz$$

integralinin C'nin sınırladığı bölgenin yalnız alanına bağlı olduğunu, C'nin biçimine ya da düzlemdeki yerine bağlı olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Alan ve rotasyonel. İntegral, $\mathbf{F} = z\,\mathbf{i} - 2x\,\mathbf{j} + 3y\,\mathbf{k}$ alanının $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ integralidir. $P=z$, $Q=-2x$, $R=3y$ için

$$\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} &= 3-0=3,\\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= 1-0=1,\\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -2-0=-2\end{aligned}$$

olduğundan $\operatorname{curl}\mathbf{F} = 3\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\,\mathbf{k}$ sabit bir vektördür.
Yüzey. S, düzlemin C ile sınırlanan parçası olsun ve C pozitif yönlü olacak biçimde yönlendirilsin. Düzlemin birim normali

$$\mathbf{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

ve S üzerinde sabittir; C yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolanıyorsa $+$, saat yönünde dolanıyorsa $-$ işareti alınır. Buradan

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \pm\frac{3+1-2}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

bulunur.
Sonuç. Stokes Teoremi'ne göre

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S dS = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\,A(S)$$

olur; $A(S)$, C'nin sınırladığı bölgenin alanıdır. Demek ki integral yalnız bu alana (ve C'nin dolanma yönüne) bağlıdır. Örneğin C, köşeleri $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ olan ve yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolanan üçgense $A(S)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve integral $\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$'dir. ■

Alıştırma 17.11 (Kapalı Bir Küre Üzerinde Rotasyonelin Akısı). S bir küre ve $\mathbf{F}$, bileşenlerinin kısmi türevleri S'yi içeren açık bir bölgede sürekli olan bir vektör alanı olsun. $\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Küreyi ikiye bölmek. Kürenin merkezi (a,b,c) olsun ve S dışa yönlendirilmiş olsun. $z=c$ düzlemi küreyi üst yarı S_1 ve alt yarı S_2 olarak ikiye böler; ikisinin sınırı aynı ekvator çemberi C'dir. Kürenin bir sınır eğrisi olmadığından teoremi doğrudan uygulayamayız, ama iki yarıya ayrı ayrı uygulayabiliriz.
Yönler. S_1'in dış normali yukarı doğrudur; pozitif yönü C'yi yukarıdan bakınca saat yönünün tersine dolaşan yöndür. S_2'nin dış normali aşağı doğrudur; normalin ucundan, yani aşağıdan bakınca saat yönünün tersine dolaşan yön, yukarıdan bakınca saat yönündedir. Demek ki S_2'nin pozitif yönlü sınırı $-C$'dir.
Toplam. Stokes Teoremi ve yön değişince işaretin değişmesi (Önerme 11.4)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_{S_1}\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2}\operatorname{curl}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\\ &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{-C}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0\end{aligned}$$

verir. Küre içe yönlendirilmişse her iki yarının da yönü ters döner ve sonuç yine 0 olur. ■

Alıştırma 17.12 (Gradyanların Vektörel Çarpımı). S ile C, Stokes Teoremi'nin koşullarını sağlasın; f ve g'nin ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olsun.

$$\int_C (f\,\nabla g)\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g)\cdot d\mathbf{S}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Teoremi uygulamak. $\mathbf{F} = f\,\nabla g = f g_x\,\mathbf{i} + f g_y\,\mathbf{j} + f g_z\,\mathbf{k}$ alanının bileşenlerinin kısmi türevleri süreklidir, çünkü f'nin birinci ve g'nin ikinci mertebeden kısmi türevleri süreklidir. Stokes Teoremi'ne göre

$$\int_C (f\,\nabla g)\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl}\,(f\,\nabla g)\cdot d\mathbf{S}$$

olur. Demek ki $\operatorname{curl}\,(f\,\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$ olduğunu göstermek yeter.
Rotasyoneli hesaplamak. $P = f g_x$, $Q = f g_y$, $R = f g_z$ diyelim. Çarpımın türevinden $\mathbf{i}$ bileşeni

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = f_y\,g_z + f\,g_{zy} - f_z\,g_y - f\,g_{yz} = f_y\,g_z - f_z\,g_y$$

olur, çünkü g'nin karışık kısmi türevleri eşittir: $g_{zy} = g_{yz}$ (bkz. Analiz 4). Aynı biçimde

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} &= f_z\,g_x + f\,g_{xz} - f_x\,g_z - f\,g_{zx} = f_z\,g_x - f_x\,g_z,\\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= f_x\,g_y + f\,g_{yx} - f_y\,g_x - f\,g_{xy} = f_x\,g_y - f_y\,g_x\end{aligned}$$

bulunur.
Vektörel çarpımla karşılaştırmak. Öte yandan

$$\nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ f_x & f_y & f_z\\ g_x & g_y & g_z\end{vmatrix} = (f_y g_z - f_z g_y)\,\mathbf{i} + (f_z g_x - f_x g_z)\,\mathbf{j} + (f_x g_y - f_y g_x)\,\mathbf{k}$$

olur. Bileşenler tek tek aynı olduğundan $\operatorname{curl}\,(f\,\nabla g) = \nabla f \times \nabla g$'dir ve istenen eşitlik elde edilir. Özel olarak $g = f$ alınırsa $\nabla f \times \nabla f = \mathbf{0}$ olduğundan $\int_C (f\,\nabla f)\cdot d\mathbf{r} = 0$ çıkar. ■

Stokes Teoremi bir yüzeyi sınır eğrisine bağladı. Bir sonraki ve son bölümde aynı fikri bir boyut daha yukarı taşıyacağız: bir cismin içindeki üç katlı integrali, cismi çevreleyen kapalı yüzey üzerindeki akıya bağlayan Diverjans Teoremi.

 CC BY-NC-SA 4.0

18. Diverjans Teoremi

Green Teoremi'nin vektör biçimini Rotasyonel ve Diverjans bölümünde görmüştük. D düzlemde bir bölge, C onun pozitif yönlü sınır eğrisi ve $\mathbf{n}$, C üzerinde D'nin dışına bakan birim normal ise

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x,y)\, dA$$

olur. Soldaki integral $\mathbf{F}$'nin C eğrisinden dışarı doğru net akışını ölçer, sağdaki ise diverjansı bölge boyunca toplar.
Uzaya geçince eğrinin yerini kapalı bir yüzey, düzlem bölgenin yerini de bu yüzeyin çevrelediği cisim alır. S, bir E cisminin sınır yüzeyi olmak üzere aynı eşitliğin

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}(x,y,z)\, dV$$

biçimini alacağını tahmin edebiliriz. Uygun koşullar altında bu tahmin doğrudur ve **Diverjans Teoremi** (Divergence Theorem) adını taşır. Green ve Stokes teoremleri gibi bu teorem de bir türevin (burada div $\mathbf{F}$'nin) bir bölge üzerindeki integralini, asıl alanın yalnız bölgenin sınırındaki değerlerine bağlar.
Teorem, onu elektrostatik üzerine çalışırken bulan Carl Friedrich Gauss'un (1777–1855) adıyla **Gauss Teoremi** diye de anılır. Doğu Avrupa'da ise sonucu 1826'da ortaya koyan Mihail Ostrogradski'nin (1801–1862) adıyla bilinir. Bu bölümde teoremi ispatlayacak, akı hesaplarını nasıl kısalttığını görecek ve diverjansın fiziksel anlamını teoremden çıkaracağız.

18.1 Basit Katı Bölgeler

Teoremi ispatlayacağımız cisimler, üç katlı integralleri hesaplarken kullandığımız tip 1, tip 2 ve tip 3 bölgelerin (Üç Katlı İntegraller) üçü birden olan cisimlerdir.

Tanım 18.1 (Basit Katı Bölge). Bir E cismi aynı anda tip 1, tip 2 ve tip 3 bölge ise, yani hem

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D_1,\, u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

hem

$$E = \{(x,y,z) \mid (y,z) \in D_2,\, v_1(y,z) \le x \le v_2(y,z)\}$$

hem de

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,z) \in D_3,\, w_1(x,z) \le y \le w_2(x,z)\}$$

biçiminde yazılabiliyorsa E'ye bir **basit katı bölge** (simple solid region) denir. Burada sınır fonksiyonları sürekli olmalı ve D_1, D_2, D_3'ün iç noktalarında, en çok sonlu sayıda eğri dışında, sürekli kısmi türevlere sahip olmalıdır.

Yani basit katı bölgede koordinat eksenlerinden birine paralel her doğru, cismi ya hiç kesmez ya da tek bir doğru parçası (ya da tek nokta) boyunca keser. Türev koşulu, sınır yüzeyinin parça parça düzgün olmasını sağlar. Türevlerin D_i'nin sınırında sınırsız olmasına ve içeride sonlu sayıda eğri boyunca kırılmasına izin verilir. Örneğin a yarıçaplı topun üst yüzü $u_2(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ grafiğidir; bu fonksiyonun kısmi türevleri dairenin içinde süreklidir, sınır çemberine yaklaşırken ise sınırsız büyür. Bu sayede toplar, elipsoitlerle sınırlı cisimler, dikdörtgenler prizmaları (kutular), dörtyüzlüler ve silindirler basit katı bölgelerdir. Buna karşılık iki eş merkezli küre arasındaki kabuk basit değildir: merkezden geçen bir eksen doğrusu onu iki ayrı parça boyunca keser. Bu tür cisimlere bölümün ilerisinde döneceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Basit katı bölgenin sınırı kapalı bir yüzeydir. Kapalı yüzeylerde pozitif yön, birim normal $\mathbf{n}$'nin her noktada E'nin dışına baktığı yöndür (bkz. Tanım 16.4). Aksi söylenmedikçe kapalı yüzeyleri bu dışa doğru yönle alacağız.

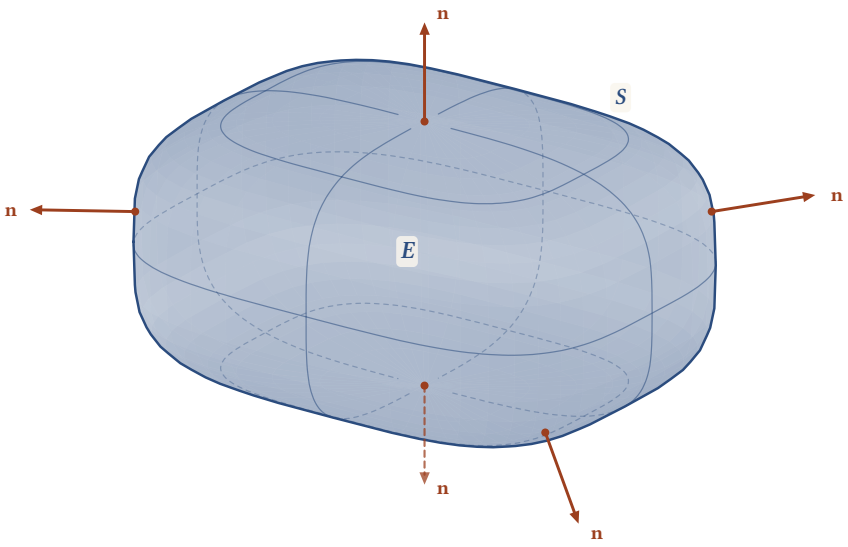
18.2 Diverjans Teoremi

Artık teoremi tam olarak ifade edip ispatlayabiliriz. İspat, Green Teoremi'nin (Teorem 13.1) ispatına çok benzer: alanı bileşenlerine ayırır ve her bileşen için analizin temel teoremini bir kez kullanırız.

Teorem 18.1 (Diverjans Teoremi). *E bir basit katı bölge ve S, E'nin dışa doğru (pozitif) yönlendirilmiş sınır yüzeyi olsun. $\mathbf{F}$, bileşen fonksiyonları E'yi içeren bir açık bölgede sürekli kısmi türevlere sahip bir vektör alanı olsun. Bu durumda*

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \tag{1}$$

olur.



Şekil 18.1: Basit katı bölge E *ve onu çevreleyen kapalı* S *yüzeyi. Pozitif yönde birim normal* $\mathbf{n}$ *her noktada* E*'nin dışına bakar (kesikli ok, görünmeyen alt yüzdeki normaldir). Diverjans Teoremi,* $\mathbf{F}$*'nin* S*'den dışarı akısını div* $\mathbf{F}$*'nin* E *üzerindeki integraline eşitler.*

İspat.
$\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ yazalım. Diverjansın tanımından (Tanım 14.3) ve üç katlı integralin lineerliğinden

$$\begin{aligned}\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV &= \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV \\ &\quad + \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\, dV\end{aligned}$$

olur. $\mathbf{n}$, S'nin dışa bakan birim normali olsun. Akı integralinin tanımından (Tanım 16.5) ve yüzey integralinin lineerliğinden de

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \iint_S P\,\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S Q\,\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_S R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

elde edilir. İki açılımı terim terim karşılaştırırsak teoremi ispatlamak için şu üç eşitliği göstermenin yettiğini görürüz:

$$\iint_S P\,\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV \tag{2}$$

$$\iint_S Q\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV \tag{3}$$

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV \tag{4}$$

(4) eşitliği. *E bir tip 1 bölgedir:*

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,y)\in D,\, u_1(x,y)\le z\le u_2(x,y)\}.$$

Burada D, E'nin xy-düzlemine izdüşümüdür. Tip 1 bölgede üç katlı integral formülüne göre

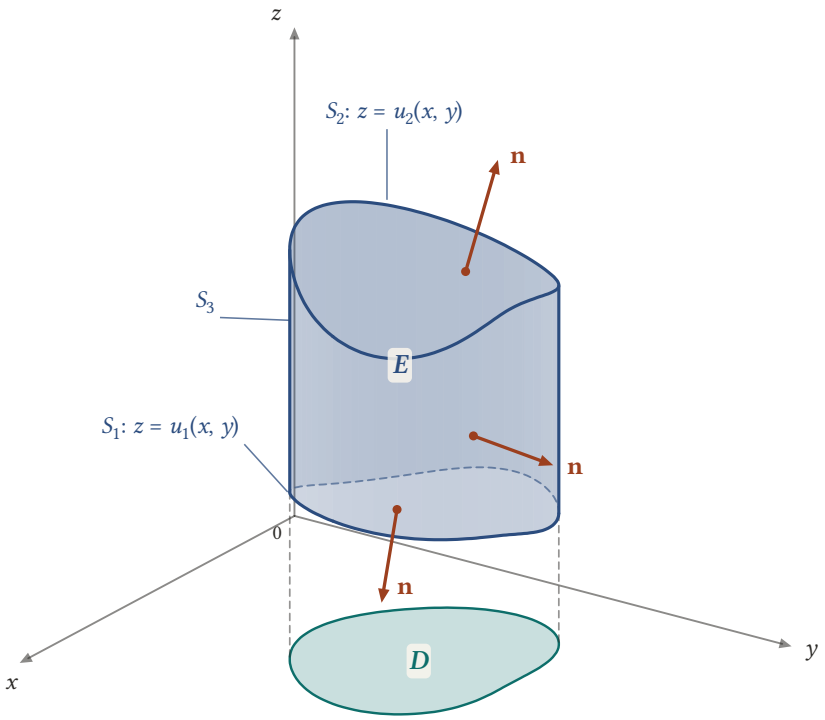
$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz\right] dA$$

olur. İç integralde x ve y sabittir ve $z\mapsto R(x,y,z)$ fonksiyonu $z\mapsto \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$ fonksiyonunun bir ilkelidir. Analizin temel teoremine (bkz. Analiz 2) göre iç integral $R(x,y,u_2(x,y)) - R(x,y,u_1(x,y))$'ye eşittir. Böylece

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_D \left[\, R(x,y,u_2(x,y)) - R(x,y,u_1(x,y)) \,\right] dA \tag{5}$$

bulunur.
Şimdi sol tarafa bakalım. S sınır yüzeyi üç parçadan oluşur: alttaki S_1 yüzeyi ($z=u_1(x,y)$), üstteki S_2 yüzeyi ($z=u_2(x,y)$) ve D'nin sınır eğrisinin üstünde yükselen düşey S_3 yüzeyi. (S_3 hiç olmayabilir; örneğin bir kürede alt ve üst yarı küreler doğrudan birleşir.)

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.2: E*'ye tip 1 bölge olarak bakmak. Sınır üç parçadır: alttaki* S_1*, üstteki* S_2 *ve* D*'nin sınırı üzerinde yükselen düşey* S_3*. Dış normal* S_2*'de yukarı,* S_1*'de aşağı bakar;* S_3*'te yataydır, bu yüzden orada* $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ *olur.*

S_3 *düşey olduğundan normali yataydır;* $\mathbf{k}$ *ise düşeydir. Bu yüzden* S_3 *üzerinde* $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$ *ve*

$$\iint_{S_3} R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_3} 0\, dS = 0$$

olur. Demek ki S_3 *olsa da olmasa da*

$$\iint_{S} R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{S_2} R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{6}$$

yazabiliriz.
S_2 *yüzeyini* $\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + u_2(x, y)\,\mathbf{k}$, $(x, y) \in D$ *ile parametrize edelim. Bu parametrizasyonda*

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = -\frac{\partial u_2}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

olur. Bu vektörün $\mathbf{k}$ *bileşeni pozitiftir, yani yukarı bakar;* S_2 *cismin üst yüzü olduğundan dışa doğru yön de yukarıdır. Öyleyse akı, parametrizasyon üzerinden doğrudan hesaplanır:*

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} R\,\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_D R(x, y, u_2(x, y))\,\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y)\, dA \\ &= \iint_D R(x, y, u_2(x, y))\, dA.\end{aligned}$$

Bu hesap, u_2*'nin kısmi türevleri* D*'nin sınırında sınırsız olsa ya da içeride sonlu sayıda eğri boyunca kırılsa da geçerlidir. Böyle bir durumda akı,* D*'nin bu eğrilerden uzak duran iç parçaları üzerinden hesaplanır ve parçalar* D*'yi dolduracak biçimde büyütülerek limit alınır.* $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = 1$ *olduğundan her parçadaki integrand* $R(x, y, u_2(x, y))$*'dir. Bu fonksiyon* D *üzerinde sürekli ve sınırlıdır; bu yüzden limit yine* $\iint_D R(x, y, u_2(x, y))\, dA$ *olur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

S_1 yüzeyi için aynı hesabı u_1 ile yaparız; ancak S_1 cismin alt yüzü olduğundan dışa bakan normal aşağı, yani $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$'nin tersi yöndedir. Bu yüzden işaret değişir:

$$\iint_{S_1} R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iint_D R(x,y,u_1(x,y))\,dA.$$

Bu iki sonucu (6)'da yerine yazarsak

$$\iint_S R\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_D \big[\,R(x,y,u_2(x,y)) - R(x,y,u_1(x,y))\,\big]\,dA$$

bulunur. Sağ taraf (5)'in sağ tarafıyla aynıdır; bu da (4)'ü verir.
(2) eşitliği. *Bu kez E'ye tip 2 bölge olarak bakarız: $(y,z)\in D_2$ ve $v_1(y,z)\le x\le v_2(y,z)$. Analizin temel teoremi bu kez x değişkeninde uygulanır ve*

$$\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x}\,dV = \iint_{D_2} \big[\,P(v_2(y,z),y,z) - P(v_1(y,z),y,z)\,\big]\,dA$$

verir. Sınırın x eksenine paralel yan yüzeylerinde $\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}=0$'dır. Ön yüz $x=v_2(y,z)$, $\mathbf{r}(y,z)=v_2(y,z)\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ ile parametrize edilir ve

$$\mathbf{r}_y\times\mathbf{r}_z = \mathbf{i} - \frac{\partial v_2}{\partial y}\,\mathbf{j} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

vektörünün $\mathbf{i}$ bileşeni pozitif olduğundan bu vektör dışa bakar. $\mathbf{i}\cdot(\mathbf{r}_y\times\mathbf{r}_z)=1$ olduğundan (4)'teki gerekçe aynen geçerlidir ve ön yüzdeki akı $\iint_{D_2} P(v_2(y,z),y,z)\,dA$ olur. Arka yüz $x=v_1(y,z)$'de dışa bakan normal ters yönde olduğundan akı $-\iint_{D_2} P(v_1(y,z),y,z)\,dA$'dır. Toplam, yukarıdaki üç katlı integrale eşittir; bu (2)'dir.
(3) eşitliği. *E'ye tip 3 bölge olarak bakarız: $(x,z)\in D_3$ ve $w_1(x,z)\le y\le w_2(x,z)$. Analizin temel teoremi y değişkeninde uygulanır. Sağ yüz $\mathbf{r}(x,z)=x\,\mathbf{i}+w_2(x,z)\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ ile parametrize edilir ve*

$$\mathbf{r}_z\times\mathbf{r}_x = -\frac{\partial w_2}{\partial x}\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \frac{\partial w_2}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

vektörü dışa bakar; sol yüzde işaret değişir, y eksenine paralel yan yüzlerde $\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}=0$'dır. (2)'deki adımlar aynen tekrarlanarak

$$\begin{aligned}\iint_S Q\,\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\,dS &= \iint_{D_3}\big[\,Q(x,w_2(x,z),z) - Q(x,w_1(x,z),z)\,\big]\,dA\\ &= \iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV\end{aligned}$$

bulunur. Üç eşitliği toplayınca (1) elde edilir.
■

Yani teoremin koşulları altında, $\mathbf{F}$'nin bir cismin sınır yüzeyinden dışarı doğru akısı, $\mathbf{F}$'nin diverjansının o cisim üzerindeki üç katlı integraline eşittir. Pratikteki değeri şuradadır: kapalı bir yüzeyin akısı genellikle birkaç parçanın ayrı ayrı parametrize edilmesini gerektirir; diverjans ise çoğu zaman $\mathbf{F}$'nin kendisinden çok daha basit bir fonksiyondur ve tek bir üç katlı integral yeterli olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Diverjans Teoremiyle akıyı dört adımda hesaplamak

1. S'nin kapalı bir yüzey olduğunu ve dışa doğru yönlendirildiğini, $\mathbf{F}$'nin de S'nin çevrelediği E cisminin her noktasında sürekli kısmi türevlere sahip olduğunu denetleyin.
2. $\operatorname{div}\mathbf{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ diverjansını hesaplayın.
3. E'yi integrali en kolay kılan koordinatlarla (dik, silindirik ya da küresel) ve uygun tiple betimleyin.
4. $\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV$ integralini hesaplayın; sonuç $\mathbf{F}$'nin S'den dışarı akısıdır.

İlk örnekte teoremin iki tarafını ayrı ayrı hesaplayıp gerçekten eşit çıktıklarını görelim.

Örnek 18.1 (Teoremi Bir Topta Doğrulamak). $\mathbf{F}(x,y,z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ alanı ve $a > 0$ yarıçaplı $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ topu için Diverjans Teoremi'nin iki tarafını ayrı ayrı hesaplayınız.

Çözüm.
Sağ taraf. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$ sabittir. B topun hacmi $\frac{4}{3}\pi a^3$ olduğundan

$$\iiint_B \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi a^3$$

olur.
Sol taraf. S küresinin bir noktasında $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ konum vektörü, kürenin o noktadaki dışa doğru normalidir ve uzunluğu a'dır. Bu yüzden dış birim normal $\mathbf{n} = \mathbf{r}/a$ olur. Buna göre

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{a} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a$$

bulunur. $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ küre üzerinde sabit olduğundan integral, bu sabit ile kürenin alanı $4\pi a^2$'nin çarpımıdır:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3.$$

İki taraf da $4\pi a^3$'tür.
■

Bu örnekte iki taraf da kolaydı. Çoğu zaman ise yüzey integrali zahmetlidir ve teoremi tam da onu üç katlı integrale çevirmek için kullanırız.

Örnek 18.2 (Birim Küreden Geçen Akı). $\mathbf{F}(x,y,z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$ vektör alanının $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ birim küresinden (dışa doğru) akısını bulunuz.

Çözüm.
Önce diverjansı hesaplayalım:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(z) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(x) = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Birim küre S, $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ birim topu B'nin sınırıdır ve $\mathbf{F}$'nin bileşenleri her yerde sürekli kısmi türevlere sahiptir. Diverjans Teoremi'ne göre akı

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_B 1\, dV = V(B) = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4\pi}{3}$$

olur. Aynı akıyı küreyi parametrize ederek doğrudan da hesaplayabiliriz (Yüzey İntegralleri); bu yol trigonometrik integrallerle dolu uzun bir hesap gerektirir ve aynı sonucu verir.
■

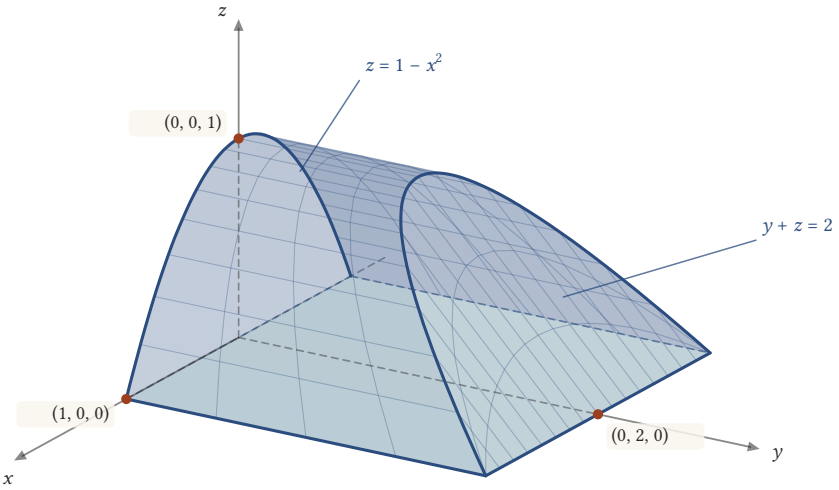
Sıradaki örnekte yüzey dört parçadan oluşuyor ve alanın kendisi karmaşık; diverjans ise basit.

Örnek 18.3 (Parabolik Silindirle Sınırlı Cisim). Vektör alanı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xy\,\mathbf{i} + \left(y^2 + e^{xz^2}\right)\mathbf{j} + \sin(xy)\,\mathbf{k}$$

olsun. S, $z = 1 - x^2$ parabolik silindiri ile $z = 0$, $y = 0$ ve $y + z = 2$ düzlemlerinin sınırladığı E cisminin dışa yönlü yüzeyi olmak üzere $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ integralini hesaplayınız.



Şekil 18.3: E cismi: üstten $z = 1 - x^2$ parabolik silindiri, alttan $z = 0$, arkadan $y = 0$ ve sağdan $y + z = 2$ düzlemiyle sınırlıdır. Yüzeyi dört parçadan oluşur.

Çözüm.
Yüzey integralini doğrudan hesaplamak için S'nin dört parçası üzerinde dört ayrı yüzey integrali kurmamız gerekirdi; üstelik e^{xz^2} ve $\sin(xy)$ gibi terimler bu integralleri zorlaştırır. Diverjans ise çok daha basittir:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 + e^{xz^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sin(xy)\right) = y + 2y + 0 = 3y.$$

Cismi betimlemek. Parabolik silindir $z = 0$ düzlemini $x = \pm 1$ doğrularında keser. E'nin xz-düzlemine izdüşümü, $z = 1 - x^2$ parabolünün altında ve $z = 0$'ın üstünde kalan bölgedir: $-1 \le x \le 1, 0 \le z \le 1 - x^2$. Böyle bir (x, z) için y, $y = 0$ düzleminden $y = 2 - z$ düzlemine kadar değişir. Demek ki E'ye tip 3 bölge olarak bakmak en kolayıdır:

$$E = \{(x,y,z) \mid -1 \le x \le 1,\, 0 \le z \le 1 - x^2,\, 0 \le y \le 2 - z\}.$$

İntegral. Diverjans Teoremi'ne göre

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iiint_E 3y\,dV = 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{0}^{2-z} y\,dy\,dz\,dx \\ &= 3\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} \frac{(2-z)^2}{2}\,dz\,dx\end{aligned}$$

olur. Ortadaki integralde $(2-z)^2/2$'nin z'ye göre bir ilkeli $-(2-z)^3/6$'dır. $z = 1 - x^2$ iken $2 - z = 1 + x^2$, $z = 0$ iken $2 - z = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned}3\int_{-1}^{1}\left[-\frac{(2-z)^3}{6}\right]_0^{1-x^2} dx &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[(x^2+1)^3 - 8\right]dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^6 + 3x^4 + 3x^2 - 7)dx\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. İntegrand çift fonksiyon olduğundan $[-1,1]$ üzerindeki integral, $[0,1]$ üzerindekinin iki katıdır:

$$-\int_0^1 (x^6+3x^4+3x^2-7)dx = -\left(\frac{1}{7}+\frac{3}{5}+1-7\right) = \frac{184}{35}.$$

Buna göre $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \frac{184}{35}$'tir.

■

> ⚠ Teoremin iki koşulunu unutmayın
>
> Teorem yalnız **kapalı** bir yüzeyin akısını verir. Akısı istenen yüzey kapalı değilse (örneğin bir yarım küre ya da bir paraboloit parçası) önce onu basit bir parçayla kapatırız, teoremi kapalı yüzeye uygular ve eklediğimiz parçanın akısını çıkarırız (bkz. Alıştırma 18.6). Ayrıca $\mathbf{F}$'nin cismin **her noktasında** sürekli kısmi türevleri olmalıdır. Alan cismin içindeki bir noktada tanımsızsa teorem o cisme doğrudan uygulanamaz; bu durumu aşağıdaki Gauss yasası örneğinde göreceğiz.

18.3 Delikli Bölgeler ve Gauss Yasası

Teoremi yalnız basit katı bölgeler için ispatladık. Green Teoremi'nde olduğu gibi sonuç, bu tür bölgelerin sonlu birleşimlerine de taşınır.

Önerme 18.1 (Sonlu Birleşimlerde Diverjans Teoremi). *E cismi, iç noktaları ortak olmayan $E_1, E_2, \ldots, E_m$ basit katı bölgelerinin birleşimi olsun. S, E'nin dışa doğru yönlendirilmiş sınır yüzeyi, $\mathbf{F}$ de bileşenleri E'yi içeren bir açık bölgede sürekli kısmi türevlere sahip bir vektör alanı olsun. Bu durumda E için de (1) eşitliği geçerlidir.*

İspat.
Her E_i parçasına Diverjans Teoremi'ni uygulayıp eşitlikleri taraf tarafa toplarız.
Sağ taraflar. *Parçaların iç noktaları ortak olmadığından üç katlı integral parçalara göre toplanır:*

$$\sum_{i=1}^{m} \iiint_{E_i} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_{E} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV.$$

Sol taraflar. *Her E_i'nin sınırı iki tür parçadan oluşur: E'nin sınırı S'ye ait parçalar ve E_i'yi komşu bir E_j'den ayıran kesme yüzeyleri. Bir kesme yüzeyi hem E_i'nin hem E_j'nin sınırındadır. Orada E_i'nin dış normali E_j'ye, E_j'nin dış normali E_i'ye bakar; yani iki normal birbirinin tersidir. Bu yüzden $\mathbf{F}$'nin bir kesme yüzeyinden akısı toplamda bir kez artı, bir kez eksi işaretle girer ve sadeleşir. Geriye yalnız S'nin parçaları kalır; bu parçalarda E_i'nin dış normali E'nin dış normaliyle aynıdır. Böylece sol tarafların toplamı $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ olur ve (1) elde edilir.*

■

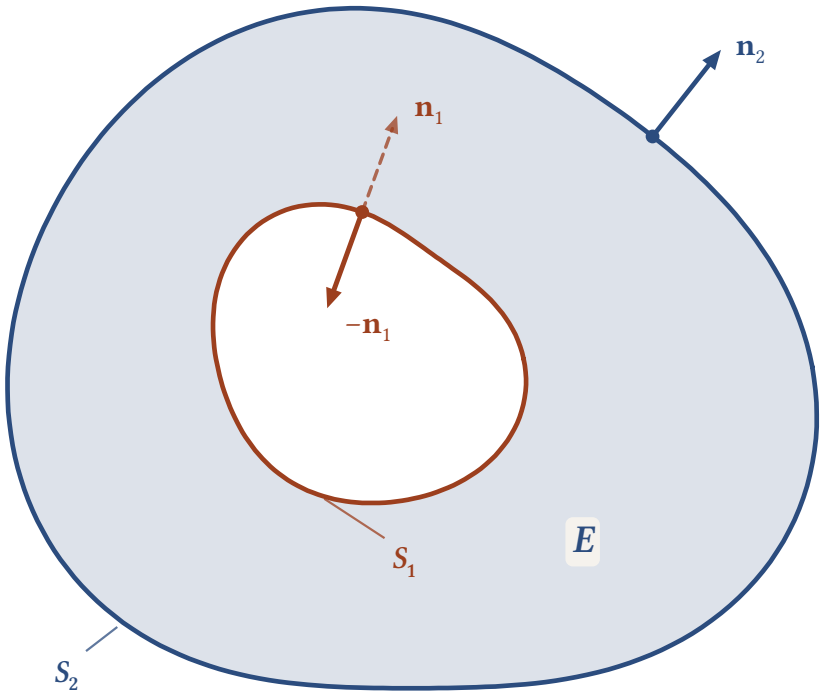
Yani teorem, basit parçalara kesilebilen her cisimde geçerlidir. Örneğin iki eş merkezli küre arasındaki kabuk, üç koordinat düzlemiyle sekiz parçaya kesilir ve her parça basit katı bölgedir. Birinci oktanttaki parçaya tip 1 bölge olarak bakınca alt sınırı, iç kürenin xy-düzlemine izdüşümünün içinde iç küre, dışında ise $z=0$ düzlemidir. Alt sınır fonksiyonu bu iki parçanın birleştiği çeyrek çember boyunca kırılır; tanım buna izin verir. Böyle "delikli" bir bölgede sınır iki yüzeyden oluşur ve iç yüzeyin hesaba nasıl girdiğine dikkat etmek gerekir.

Sonuç 18.1 (İki Kapalı Yüzey Arasındaki Bölge). *S_1 ve S_2 iki kapalı yüzey olsun ve S_1, S_2'nin içinde kalsın. E, bu iki yüzey arasında kalan ve basit katı bölgelerin sonlu birleşimi olan bölge; $\mathbf{F}$ de bileşenleri E'yi içeren bir açık bölgede sürekli kısmi türevlere sahip bir alan olsun. S_1 ve S_2'yi kendi dışlarına doğru yönlendirirsek*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \tag{7}$$

olur.



Şekil 18.4: Kesit görünüşü: E, *içteki* S_1 *ile dıştaki* S_2 *kapalı yüzeyleri arasında kalır.* E*'nin dış normali* S_2 *üzerinde* $\boldsymbol{n}_2$*'dir;* S_1 *üzerinde ise deliğin içine, yani* $-\boldsymbol{n}_1$ *yönüne bakar (kesikli ok,* S_1*'in kendi dış normali* $\boldsymbol{n}_1$*'dir).*

İspat.
$\mathbf{n}_1$ *ve* $\mathbf{n}_2$, S_1 *ile* S_2*'nin kendi dışlarına bakan birim normalleri olsun.* E*'nin sınırı* S_1 *ile* S_2*'nin birleşimidir.* E*'nin dış normali* S_2 *üzerinde* $\mathbf{n}_2$*'dir.* S_1 *üzerinde ise* E*'nin dışı,* S_1*'in içindeki deliktir; bu yüzden oradaki dış normal* $-\mathbf{n}_1$*'dir. Önerme 18.1 gereği*

$$\begin{aligned}\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV &= \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n}_1)\, dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2\, dS \\ &= -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

bulunur.
■

Yani delikli bölgede deliğin yüzeyi ters yönde sayılır. Bu sonucun en önemli kullanımı $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ olduğu durumdur: o zaman sol taraf sıfırdır ve $\mathbf{F}$'nin iki yüzeyden akısı eşit çıkar. Karmaşık bir yüzeyin akısını, içine yerleştirdiğimiz basit bir yüzeyin, örneğin bir kürenin akısıyla hesaplayabiliriz.

Örnek 18.4 (Gauss Yasası). Orijindeki bir Q yükünün oluşturduğu elektrik alanı, $\mathbf{x} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ konum vektörü ve ε bir fiziksel sabit olmak üzere

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon Q}{|\,\mathbf{x}\,|^3}\,\mathbf{x}$$

ile verilir. $\mathbf{E}$'nin orijini içine alan **her** kapalı S yüzeyinden akısının $4\pi\varepsilon Q$ olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Zorluk. S herhangi bir kapalı yüzey olduğundan onun için açık bir denklemimiz yok; yüzey integralini doğrudan kuramayız. Diverjans Teoremi'ni de S'nin çevrelediği bölgeye doğrudan uygulayamayız, çünkü $\mathbf{E}$ bu bölgenin içindeki orijinde tanımsızdır.
Diverjans sıfırdır. $r = |\,\mathbf{x}\,| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$ olsun. $\mathbf{E}$'nin birinci bileşenini türetelim:

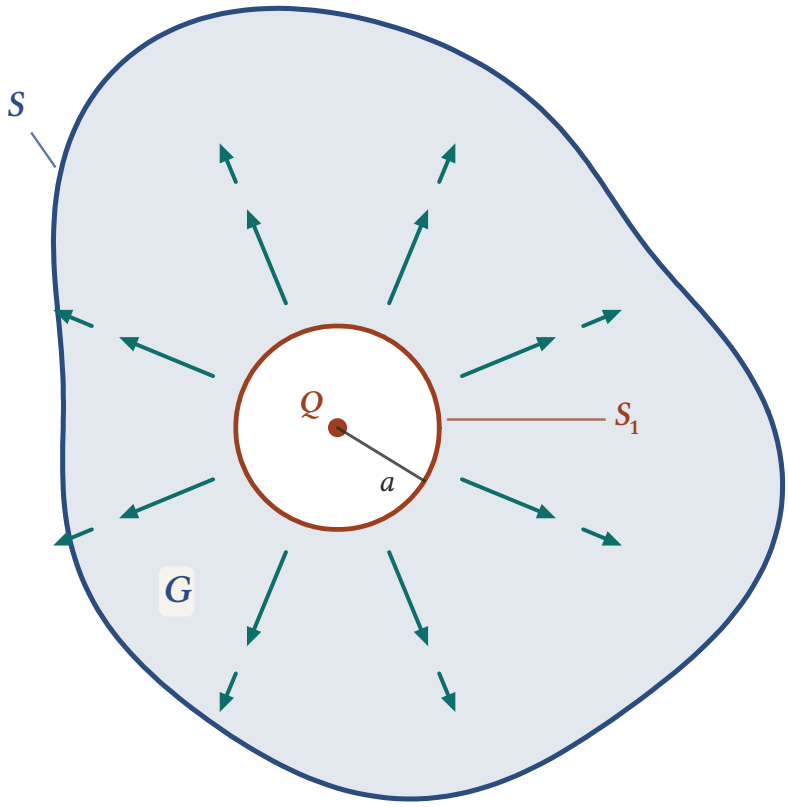
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right)$$
$$= (x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} = \frac{r^2-3x^2}{r^5}.$$

Aynı hesap y ve z için $\dfrac{r^2-3y^2}{r^5}$ ve $\dfrac{r^2-3z^2}{r^5}$ verir. Toplarsak

$$\operatorname{div}\,\mathbf{E} = \varepsilon Q \cdot \frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = \varepsilon Q \cdot \frac{3r^2-3r^2}{r^5} = 0$$

bulunur. Bu, orijin dışındaki her noktada geçerlidir.
Deliği bir küreyle açmak. Orijin merkezli, S'nin içinde kalacak kadar küçük a yarıçaplı bir S_1 küresi alalım. G, S_1 ile S arasında kalan bölge olsun (S'nin, G basit katı bölgelerin sonlu birleşimi olacak kadar düzgün olduğunu varsayıyoruz). G orijini içermediğinden $\mathbf{E}$ orada sürekli kısmi türevlere sahiptir ve (7) uygulanabilir:

$$\iiint_G \operatorname{div}\,\mathbf{E}\,dV = \iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}.$$



Şekil 18.5: Kesit görünüşü: Q yükü orijinde, S onu içine alan herhangi bir kapalı yüzey, S_1 ise orijin merkezli küçük a yarıçaplı küredir. $\mathbf{E}$ alanı (oklar) orijinde tanımsızdır ama aradaki G bölgesinde div $\mathbf{E}$ = 0 olduğundan iki yüzeyin akısı eşittir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sol taraf sıfır olduğundan

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

olur. Böylece bilinmeyen yüzeyin akısını kürenin akısına indirdik.
Kürenin akısı. S_1 üzerinde dış birim normal $\mathbf{n} = \mathbf{x}/\mid \mathbf{x} \mid$'tir ve $\mid \mathbf{x} \mid = a$'dır. Buna göre

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{\mid \mathbf{x}\mid^3}\,\mathbf{x}\cdot\frac{\mathbf{x}}{\mid \mathbf{x}\mid} = \frac{\varepsilon Q}{\mid \mathbf{x}\mid^4}\mid \mathbf{x}\mid^2 = \frac{\varepsilon Q}{\mid \mathbf{x}\mid^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

sabittir. Kürenin alanı $4\pi a^2$ olduğundan

$$\iint_{S_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\cdot 4\pi a^2 = 4\pi\varepsilon Q$$

bulunur. Demek ki orijini içine alan her kapalı S yüzeyinden akı $4\pi\varepsilon Q$'dur.
Bu, tek bir nokta yük için Gauss yasasıdır. ε ile boşluğun elektriksel geçirgenliği ε_0 arasında $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ bağıntısı olduğundan akı Q/ε_0'a eşittir.
■

18.4 Diverjansın Fiziksel Anlamı

Rotasyonel ve Diverjans bölümünde diverjansı, akışkanın bir noktadan dışarı yayılma eğilimi olarak sezgisel biçimde yorumlamıştık. Diverjans Teoremi bu yorumu kesin bir eşitliğe dönüştürür.
$\mathbf{v}(x,y,z)$, yoğunluğu sabit ρ olan bir akışkanın hız alanı olsun. $\mathbf{F} = \rho\,\mathbf{v}$ alanı, birim alandan birim zamanda geçen akışkan miktarını verir; bu yüzden $\mathbf{F}$'nin kapalı bir yüzeyden dışarı akısı, birim zamanda yüzeyin içinden dışarı çıkan net kütledir.
$P_0(x_0,y_0,z_0)$ akışkanın içinde bir nokta, B_a da merkezi P_0 ve yarıçapı çok küçük bir a olan top olsun. $\operatorname{div}\mathbf{F}$ sürekli olduğundan B_a'nın her P noktasında $\operatorname{div}\mathbf{F}(P) \approx \operatorname{div}\mathbf{F}(P_0)$'dır. B_a'nın sınır küresi S_a ise

$$\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a}\operatorname{div}\mathbf{F}\,dV \approx \iiint_{B_a}\operatorname{div}\mathbf{F}(P_0)\,dV = \operatorname{div}\mathbf{F}(P_0)\,V(B_a)$$

yaklaşımını yapabiliriz. a küçüldükçe yaklaşım iyileşir; bu, aşağıdaki limiti düşündürür.

Önerme 18.2 (Diverjans Birim Hacim Başına Akıdır). *$\mathbf{F}$, bileşenleri P_0 noktasını içeren bir açık bölgede sürekli kısmi türevlere sahip bir vektör alanı olsun. B_a merkezi P_0, yarıçapı a olan top ve S_a onun dışa yönlü sınır küresi ise*

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(P_0) = \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{V(B_a)}\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \tag{8}$$

olur.

İspat.
$\epsilon > 0$ verilsin. $\operatorname{div}\mathbf{F}$, P_0'da sürekli olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $\mid P - P_0 \mid < \delta$ olan her P için $\mid \operatorname{div}\mathbf{F}(P) - \operatorname{div}\mathbf{F}(P_0)\mid < \epsilon$ olur. δ'yı, bu P'lerin hepsi $\mathbf{F}$'nin türevli olduğu açık bölgede kalacak kadar küçük seçebiliriz.
$0 < a < \delta$ olsun. B_a bir basit katı bölgedir; Diverjans Teoremi'ni uygular ve $\operatorname{div}\mathbf{F}(P_0)$ sabitini $\frac{1}{V(B_a)}\iiint_{B_a}\operatorname{div}\mathbf{F}(P_0)\,dV$ biçiminde yazarsak

$$\frac{1}{V(B_a)}\iint_{S_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} - \operatorname{div}\mathbf{F}(P_0) = \frac{1}{V(B_a)}\iiint_{B_a}\left[\,\operatorname{div}\mathbf{F}(P) - \operatorname{div}\mathbf{F}(P_0)\,\right]dV$$

bulunur. B_a'nın her noktası için $\mid P - P_0 \mid \le a < \delta$ olduğundan köşeli paranteze giren ifadenin mutlak değeri ϵ'dan küçüktür. Üç katlı integralin karşılaştırma özelliğiyle

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left| \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) \right| \leq \frac{1}{V(B_a)} \cdot \epsilon \, V(B_a) = \epsilon$$

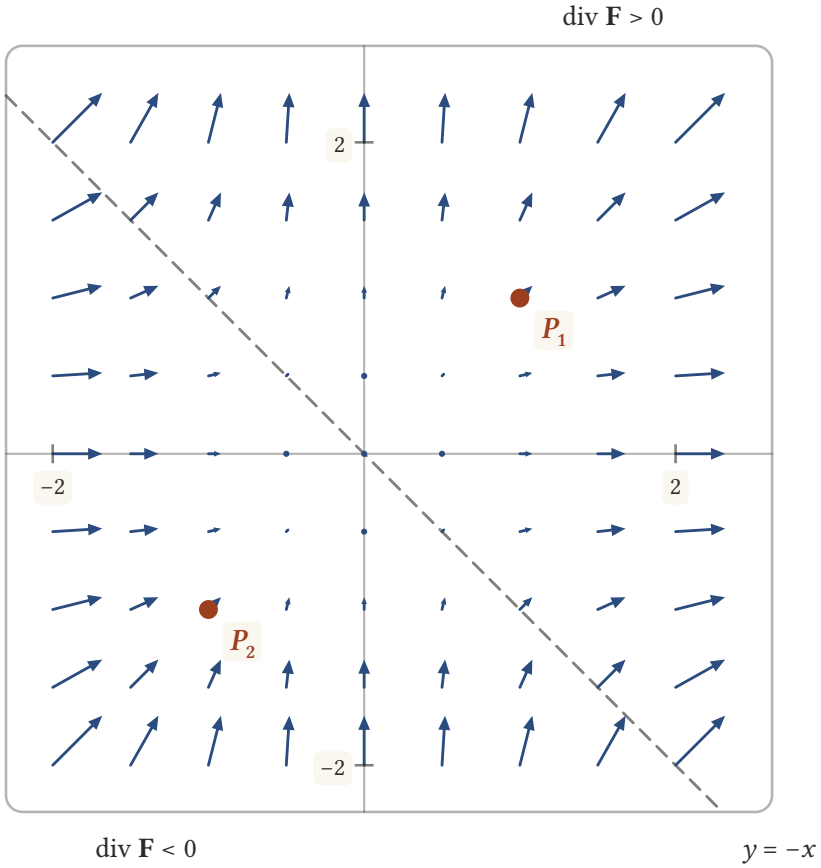
elde edilir. Bu her $0 < a < \delta$ *için doğru olduğundan (8)'deki limit vardır ve* $\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)$*'a eşittir.*
■

Yani $\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)$, P_0 noktasında **birim hacim başına dışarı doğru net akış hızıdır**. "Diverjans" (ıraksama) adı buradan gelir: pozitif diverjans, akışkanın noktanın çevresinden dışarı yayıldığını söyler. (8), diverjansı koordinat seçmeden tanımlamanın da bir yoludur.

Tanım 18.2 (Kaynak ve Kuyu). $\mathbf{F}$ bir vektör alanı ve P bir nokta olsun. $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) > 0$ ise P'ye $\mathbf{F}$'nin bir **kaynağı** (source), $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) < 0$ ise bir **kuyusu** (sink) denir.

Yani bir kaynağın yakınında net akış dışarı, bir kuyunun yakınında içeri doğrudur. Düzlemdeki alanlar için aynı yorum Green Teoremi'nin vektör biçiminden gelir: topun yerini küçük bir daire, hacmin yerini alan alır. Bir resimden karar vermek için noktaya yakın yerde noktaya doğru gelen okları noktadan uzaklaşan oklarla karşılaştırırız. Uzaklaşan oklar daha uzunsa net akış dışarıdır ve nokta kaynaktır; gelen oklar daha uzunsa nokta kuyudur.

Örnek 18.5 (Bir Resimden Kaynak ve Kuyu Bulmak). Aşağıda $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$ vektör alanı çizilmiştir. $P_1(1, 1)$ ve $P_2(-1, -1)$ noktalarının kaynak mı kuyu mu olduğunu önce resimden tahmin ediniz, sonra diverjansı hesaplayarak doğrulayınız.



Şekil 18.6: $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$ alanı (oklar aynı oranda kısaltıldı). $P_1(1, 1)$'in çevresinden çıkan oklar girenlerden uzun, $P_2(-1, -1)$'in çevresinde ise kısadır. Kesikli $y = -x$ doğrusunun üstünde $\operatorname{div} \mathbf{F} > 0$, altında $\operatorname{div} \mathbf{F} < 0$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Resimden. Alandaki bütün oklar sağa ve yukarı doğru bakar ve orijinden uzaklaştıkça uzar. P_1'in yakınında sol alttan gelen oklar kısa, sağ üste giden oklar uzundur: noktanın çevresinden çıkan akış giren akıştan fazladır, yani P_1 bir kaynak gibi görünür. P_2'nin yakınında durum tersinedir: sol alttan gelen oklar uzun, sağ üste giden oklar kısadır; giren akış fazladır ve P_2 bir kuyu gibi görünür.
Formülden. Düzlemdeki alanın diverjansı

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2x + 2y$$

olur. $\operatorname{div} \mathbf{F}(1,1) = 4 > 0$ olduğundan P_1 bir kaynak, $\operatorname{div} \mathbf{F}(-1,-1) = -4 < 0$ olduğundan P_2 bir kuyudur. Daha genel olarak $2x + 2y > 0$ eşitsizliği $y > -x$ demektir: $y = -x$ doğrusunun üstündeki her nokta bir kaynak, altındaki her nokta bir kuyudur.
■

18.5 Temel Teoremlerin Ortak Yapısı

Bu bölümle vektör analizinin ana sonuçlarının hepsini görmüş olduk. Hepsi analizin temel teoreminin yüksek boyutlu biçimleridir: her birinde sol tarafta bir "türevin" bir bölge üzerindeki integrali, sağ tarafta ise asıl fonksiyonun yalnız o bölgenin **sınırındaki** değerleri yer alır. Hipotezleri bir yana bırakıp yan yana yazalım.
Eğriler ve uç noktaları. Analizin temel teoremi (bkz. Analiz 2) ve eğrisel integraller için temel teorem (Teorem 12.1):

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a))$$

Yüzeyler ve sınır eğrileri. Green Teoremi (Teorem 13.1) ve Stokes Teoremi (Teorem 17.1):

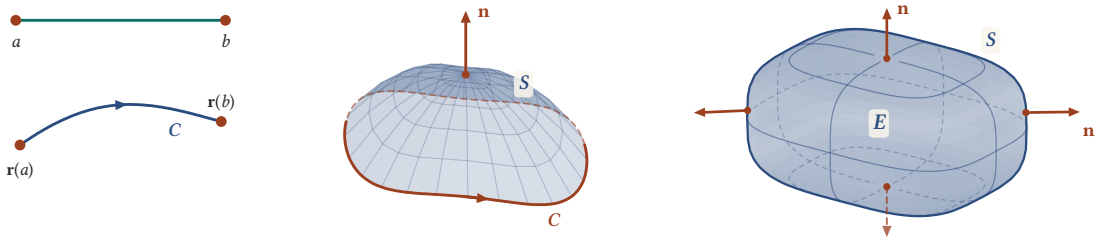
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_C P\,dx + Q\,dy$$

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Cisimler ve sınır yüzeyleri. Diverjans Teoremi (Teorem 18.1):

$$\iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Eğri ve uç noktaları | Yüzey ve sınır eğrisi | Cisim ve sınır yüzeyi

Şekil 18.7: Temel teoremlerin ortak yapısı. Solda bir aralık ve bir eğri ile uç noktaları (analizin temel teoremi, eğrisel integraller için temel teorem), ortada bir yüzey ve sınır eğrisi (Green ve Stokes teoremleri), sağda bir cisim ve sınır yüzeyi (Diverjans Teoremi). Her teorem, bölge üzerindeki bir türevin integralini yalnız sınırdaki değerlere bağlar.

Bu benzerlik tesadüf değildir. İleri derslerde diferansiyel formlar diliyle beşinin de tek bir genel Stokes teoreminin özel hâlleri olduğu görülür. Aynı dil, "bir sınırın sınırı yoktur" gözleminin de div curl $\mathbf{F} = 0$ (Teorem 14.3) ve curl $\nabla f = \mathbf{0}$ (Teorem 14.1) özdeşliklerinin arkasındaki ortak neden olduğunu gösterir.

18.6 Alıştırmalar

Alıştırma 18.1 (Bir Kutudan Geçen Akı). S, koordinat düzlemleri ile $x = 3$, $y = 2$ ve $z = 1$ düzlemlerinin sınırladığı kutunun dışa yönlü yüzeyi olsun.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z\,\mathbf{i} + xy^2z^3\,\mathbf{j} - ye^z\,\mathbf{k}$$

alanının S'den akısını Diverjans Teoremi'yle bulunuz.

Çözüm.
Diverjans

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = ye^z + 2xyz^3 - ye^z = 2xyz^3$$

olur; ye^z terimleri birbirini götürür. Kutu $E = [0,3] \times [0,2] \times [0,1]$ olduğundan Fubini Teoremi'yle (Teorem 6.1) integral üç tek katlı integralin çarpımına ayrılır:

$$\iiint_E 2xyz^3\,dV = 2\left(\int_0^3 x\,dx\right)\left(\int_0^2 y\,dy\right)\left(\int_0^1 z^3\,dz\right) = 2\cdot\frac{9}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{2}.$$

Akı $\dfrac{9}{2}$'dir.
■

Alıştırma 18.2 (Teoremi Bir Silindirde Doğrulamak). $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ alanı ve $y^2 + z^2 \le 9$, $0 \le x \le 2$ katı silindiri E için Diverjans Teoremi'nin iki tarafını ayrı ayrı hesaplayarak teoremi doğrulayınız.

Çözüm.
Sağ taraf. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 2x - 1 + 1 = 2x$'tir. Silindirin ekseni x eksenidir; her $x \in [0,2]$ için kesit, yz-düzlemine paralel ve alanı 9π olan bir dairedir. E'ye tip 2 bölge olarak bakarsak

$$\iiint_E 2x\,dV = \int_0^2 2x\cdot 9\pi\,dx = 9\pi\left[x^2\right]_0^2 = 36\pi$$

bulunur.
Sol taraf. S üç parçadan oluşur.

 CC BY-NC-SA 4.0

- Sağ taban $x = 2$: dış normal $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ ve $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 = 4$'tür. Akı $4 \cdot 9\pi = 36\pi$ olur.
- Sol taban $x = 0$: dış normal $\mathbf{n} = -\mathbf{i}$ ve $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -x^2 = 0$'dır. Akı 0 olur.
- Yan yüzey $y^2 + z^2 = 9$: dış birim normal $\mathbf{n} = (y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})/3$ olduğundan $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (-y^2 + z^2)/3$'tür.

Yan yüzeyi $y = 3\cos t$, $z = 3\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le x \le 2)$ ile parametrize edelim. $\mathbf{r}(x,t) = x\,\mathbf{i} + 3\cos t\,\mathbf{j} + 3\sin t\,\mathbf{k}$ için $|\,\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_t\,| = 3$, yani $dS = 3\,dt\,dx$ olur. Buna göre

$$\iint_{\text{yan}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \frac{-9\cos^2 t + 9\sin^2 t}{3}\cdot 3\,dt\,dx$$
$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-9\cos 2t)\,dt\,dx = 0$$

bulunur; çünkü $\cos 2t$'nin tam bir periyot üzerindeki integrali sıfırdır. Sol taraf $36\pi + 0 + 0 = 36\pi$ olur ve sağ tarafa eşittir.
■

Alıştırma 18.3 (Yatay Bir Silindirden Geçen Akı). $\mathbf{F}(x,y,z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$ olsun. S, $y^2 + z^2 = 1$ silindiri ile $x = -1$ ve $x = 2$ düzlemlerinin sınırladığı cismin dışa yönlü yüzeyi ise $\mathbf{F}$'nin S'den akısını bulunuz.

Çözüm.
Diverjans

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 3y^2 + 0 + 3z^2 = 3(y^2 + z^2)$$

olur. Cismin ekseni x ekseni olduğundan yz-düzleminde kutupsal koordinatlar kullanırız: $y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$. Bunlar, ekseni x ekseni olan silindirik koordinatlardır (Teorem 7.1) ve $dV = r\,dr\,d\theta\,dx$, $y^2 + z^2 = r^2$ olur:

$$\iiint_E 3(y^2+z^2)\,dV = \int_{-1}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 3r^2\cdot r\,dr\,d\theta\,dx = 3\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{9\pi}{2}.$$

Burada $\int_0^1 3r^3\,dr = 3/4$, θ integrali 2π ve x integrali $2-(-1) = 3$ çarpanını verir. Akı $\dfrac{9\pi}{2}$'dir.
■

Alıştırma 18.4 (Bir Küreden Geçen Akı).

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3+y^3)\,\mathbf{i} + (y^3+z^3)\,\mathbf{j} + (z^3+x^3)\,\mathbf{k}$$

alanının, merkezi orijin ve yarıçapı 2 olan küreden dışa doğru akısını bulunuz.

Çözüm.
Her bileşende yalnız bir terim türevde kalır:

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 3\rho^2.$$

Küresel koordinatlarda (Teorem 8.1) $dV = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$ ve top $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi$ olduğundan

$$\iiint_B 3\rho^2\,dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2 3\rho^4\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$
$$= \left(\int_0^2 3\rho^4\,d\rho\right)\cdot 2\pi\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi\right) = \frac{96}{5}\cdot 2\pi\cdot 2 = \frac{384\pi}{5}$$

bulunur. Akı $\dfrac{384\pi}{5}$'tir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 18.5 (Yarım Küre ve Tabanından Geçen Akı). $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ ve $\mathbf{F} = \mid \mathbf{r} \mid \mathbf{r}$ olsun. S, $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ yarım küresi ile xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 \le 1$ dairesinden oluşan dışa yönlü kapalı yüzey ise $\mathbf{F}$'nin S'den akısını bulunuz.

Çözüm.
Diverjans. $\rho = \mid \mathbf{r} \mid = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ yazalım. $\partial\rho/\partial x = x/\rho$ olduğundan çarpım kuralıyla

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\, x) = \rho + x \cdot \frac{x}{\rho} = \rho + \frac{x^2}{\rho}$$

olur. y ve z bileşenleri için de aynısı geçerlidir. Toplarsak

$$\operatorname{div}\,\mathbf{F} = 3\rho + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\rho} = 3\rho + \rho = 4\rho$$

bulunur. $\mathbf{F}$'nin bütün kısmi türevleri (örneğin $\partial(\rho\, x)/\partial y = xy/\rho$) orijine yaklaşırken 0'a gider ve orijinde de 0'dır; yani kısmi türevler her yerde süreklidir ve teorem uygulanabilir.
İntegral. S'nin çevrelediği cisim üst yarı toptur: $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi/2$. Küresel koordinatlarda

$$\iiint_E 4\rho\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 4\rho \cdot \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi = 1 \cdot 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

olur; çünkü $\int_0^1 4\rho^3\, d\rho = 1$ ve $\int_0^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi = 1$'dir.
Kontrol. Yarım kürede dış birim normal $\mathbf{n} = \mathbf{r}$ ve $\mid \mathbf{r} \mid = 1$ olduğundan $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \mid \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1$'dir; akı yarım kürenin alanı 2π'dir. Tabanda $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ ve $z = 0$ olduğundan $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = - \mid \mathbf{r} \mid z = 0$'dır. Toplam yine 2π'dir.
■

Alıştırma 18.6 (Kapalı Olmayan Bir Yüzeyden Geçen Akı). Vektör alanı

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z \arctan(y^2)\,\mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

olsun. S, $x^2 + y^2 + z = 2$ paraboloidinin $z = 1$ düzleminin üstünde kalan ve yukarı doğru yönlendirilmiş parçası ise $\mathbf{F}$'nin S'den akısını bulunuz.

Çözüm.
Yüzeyi kapatmak. S kapalı değildir. Paraboloit $z = 1$ düzlemini $x^2 + y^2 = 1$ çemberinde keser. Bu çemberin çevrelediği S_1 dairesini ($z = 1$, $x^2 + y^2 \le 1$) ekleyelim. S ile S_1 birlikte, paraboloit ile $z = 1$ düzlemi arasındaki E cisminin sınırıdır. E'nin dış normali S üzerinde yukarı bakar (istenen yön), S_1 üzerinde ise aşağı bakar: $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$.
Diverjans. Birinci bileşen x'i, ikinci bileşen y'yi içermediğinden ilk iki terim sıfırdır:

$$\operatorname{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\, z \arctan(y^2) \,\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\, z^3 \ln(x^2 + 1) \,\right) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Hacim. Teoreme göre iki akının toplamı E'nin hacmidir. Silindirik koordinatlarda E: $0 \le r \le 1$, $1 \le z \le 2 - r^2$ olduğundan

$$V(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - r^2 - 1)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

bulunur.
Tabanın akısı. S_1 üzerinde $z = 1$ olduğundan $\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) = -z = -1$'dir. S_1'in alanı π olduğundan $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\pi$ olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç. $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\pi}{2} - (-\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

bulunur.
■

Alıştırma 18.7 (Bir Skaler Yüzey İntegralini Akıya Çevirmek). S, $x^2+y^2+z^2=1$ birim küresi olmak üzere

$$\iint_S (2x + 2y + z^2)\, dS$$

integralini Diverjans Teoremi yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.
Fikir. İntegrandı bir alanın normal bileşeni olarak yazmak istiyoruz. Birim kürede dış birim normal $\mathbf{n} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$'dir. $\mathbf{F} = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ alırsak

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 2x + 2y + z\cdot z = 2x + 2y + z^2$$

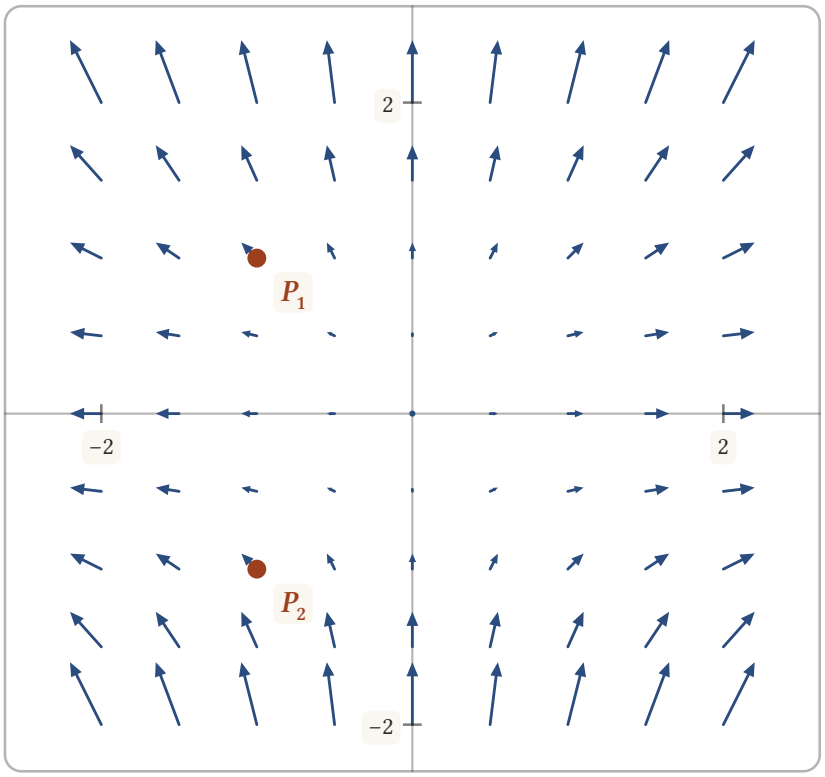
olur. Demek ki istenen integral $\mathbf{F}$'nin küreden akısıdır.
Teorem. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0+0+1 = 1$ olduğundan, B birim top olmak üzere

$$\iint_S (2x+2y+z^2)\,dS = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_B 1\,dV = \frac{4\pi}{3}$$

bulunur.
Kontrol. Simetriden $\iint_S x\,dS = \iint_S y\,dS = 0$'dır. Yine simetriden x^2, y^2 ve z^2'nin küre üzerindeki integralleri eşittir ve toplamları $\iint_S 1\,dS = 4\pi$'dir; bu yüzden $\iint_S z^2\,dS = 4\pi/3$ olur.
■

Alıştırma 18.8 (Kaynak mı, Kuyu mu). Aşağıda $\mathbf{F}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$ vektör alanı çizilmiştir. $P_1(-1,1)$ ve $P_2(-1,-1)$ noktalarının kaynak mı kuyu mu olduğuna önce yalnız resme bakarak karar veriniz, sonra diverjansı hesaplayarak doğrulayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.8: $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$ alanı (oklar aynı oranda kısaltıldı) ve $P_1(-1, 1)$, $P_2(-1, -1)$ noktaları.

Çözüm.
Resimden. Okların düşey bileşeni y^2'dir; bu yüzden hepsi yukarı bakar ve x ekseninden uzaklaştıkça hızla uzar. P_1'in altından gelen oklar kısa, üstünden çıkan oklar uzundur: düşey yönde çıkan akış girenden fazladır. Yatay bileşen x ise P_1 ile P_2'nin bulunduğu solda sola bakar ve sola gidildikçe uzar; yatay yönde de çıkan akış biraz fazladır. P_1 bir kaynaktır. P_2'de ise alttan gelen oklar uzun, üste çıkan oklar kısadır; düşey yönde giren akış belirgin biçimde fazladır ve bu fark yataydaki küçük fazlalığı bastırır. P_2 bir kuyudur.
Formülden. Diverjans

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 1 + 2y$$

olur. $\operatorname{div} \mathbf{F}(-1, 1) = 3 > 0$ olduğundan P_1 bir kaynak, $\operatorname{div} \mathbf{F}(-1, -1) = -1 < 0$ olduğundan P_2 bir kuyudur. Genel olarak $y > -1/2$ olan noktalar kaynak, $y < -1/2$ olan noktalar kuyudur.
■

Alıştırma 18.9 (Hacmi Bir Yüzey İntegraliyle Bulmak). S ve E, Diverjans Teoremi'nin koşullarını sağlasın. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ olmak üzere

$$V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 1 + 1 = 3$'tür. Diverjans Teoremi'ne göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_E 3\,dV = 3\,V(E)$$

olur; iki tarafı 3'e bölmek istenen eşitliği verir. Örneğin birim kürede $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = 1$ ve akı 4π olduğundan formül, birim topun hacmini $4\pi/3$ olarak verir.
■

Alıştırma 18.10 (Green'in Birinci Özdeşliği). S ve E, Diverjans Teoremi'nin koşullarını sağlasın; f ve g, ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip skaler fonksiyonlar olsun. $\nabla^2 g = g_{xx}+g_{yy}+g_{zz}$ Laplace operatörü olmak üzere

$$\iint_S (f\,\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\,\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)dV$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\mathbf{F} = f\,\nabla g = f g_x\,\mathbf{i} + f g_y\,\mathbf{j} + f g_z\,\mathbf{k}$ alanına Diverjans Teoremi'ni uygulayacağız. f ve g'nin ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli olduğundan $\mathbf{F}$'nin bileşenlerinin kısmi türevleri de süreklidir. Her bileşende çarpım kuralını kullanırsak

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{F} &= (f_x g_x + f g_{xx}) + (f_y g_y + f g_{yy}) + (f_z g_z + f g_{zz}) \\ &= (f_x g_x + f_y g_y + f_z g_z) + f\,(g_{xx}+g_{yy}+g_{zz}) = \nabla f\cdot\nabla g + f\,\nabla^2 g\end{aligned}$$

bulunur. Diverjans Teoremi'nde yerine yazınca istenen eşitlik elde edilir.
■

Alıştırma 18.11 (Gradyanın Hacim İntegrali). S ve E, Diverjans Teoremi'nin koşullarını sağlasın ve f, sürekli kısmi türevlere sahip bir skaler fonksiyon olsun.

$$\iint_S f\,\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \nabla f\,dV$$

olduğunu gösteriniz. Buradaki integraller vektördür ve her bileşen ayrı ayrı integrallenerek tanımlanır.

Çözüm.
$\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ rastgele bir sabit vektör olsun ve $\mathbf{F} = f\,\mathbf{c}$ alanına Diverjans Teoremi'ni uygulayalım. $\mathbf{c}$ sabit olduğundan

$$\operatorname{div}(f\,\mathbf{c}) = c_1 f_x + c_2 f_y + c_3 f_z = \mathbf{c}\cdot\nabla f$$

olur. Teorem

$$\iint_S f\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \mathbf{c}\cdot\nabla f\,dV$$

verir. İntegraller bileşen bileşen tanımlandığından ve integral lineer olduğundan sabit $\mathbf{c}$'yi dışarı alabiliriz:

$$\mathbf{c}\cdot\left(\iint_S f\,\mathbf{n}\,dS - \iiint_E \nabla f\,dV\right) = 0.$$

Bu her $\mathbf{c}$ için doğrudur. Sırasıyla $\mathbf{c} = \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ alırsak parantezdeki vektörün üç bileşeni de sıfır çıkar; yani parantezdeki vektör sıfırdır ve istenen eşitlik elde edilir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 18.12 (Arşimet İlkesi). Yüzeyi S olan bir E cismi, yoğunluğu sabit ρ olan bir sıvıya tamamen batırılmış olsun. Koordinatları, xy-düzlemi sıvının yüzeyinde kalacak ve z sıvının içine doğru, yani aşağı doğru artacak biçimde seçelim. g yer çekimi ivmesi olmak üzere z derinliğindeki basınç $p = \rho g z$'dir. Basıncın cisme uyguladığı toplam kaldırma kuvveti, $\mathbf{n}$ dış birim normal olmak üzere

$$\mathbf{F} = -\iint_S p\,\mathbf{n}\,dS$$

yüzey integraliyle verilir. Alıştırma 18.11 sonucunu kullanarak $\mathbf{F} = -W\,\mathbf{k}$ olduğunu gösteriniz; burada W, cismin yerinden ettiği sıvının ağırlığıdır.

Çözüm.
Alıştırma 18.11 eşitliğini $f = p = \rho g z$ fonksiyonuna uygulayalım. ρ ve g sabit olduğundan

$$\nabla p = \frac{\partial(\rho g z)}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial(\rho g z)}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial(\rho g z)}{\partial z}\,\mathbf{k} = \rho g\,\mathbf{k}$$

olur. Buna göre

$$\mathbf{F} = -\iint_S p\,\mathbf{n}\,dS = -\iiint_E \rho g\,\mathbf{k}\,dV = -\rho g\,V(E)\,\mathbf{k}$$

bulunur. Cismin yerinden ettiği sıvının hacmi $V(E)$, kütlesi $\rho\,V(E)$ ve ağırlığı $W = \rho g\,V(E)$'dir. Demek ki $\mathbf{F} = -W\,\mathbf{k}$'dir. z ekseni aşağı baktığından $-\mathbf{k}$ yukarı bakar: kaldırma kuvveti yukarı doğrudur ve büyüklüğü, yerinden edilen sıvının ağırlığına eşittir. Bu, **Arşimet ilkesidir**.
■

Bu bölümle kitap tamamlanıyor. Çok katlı integralleri dikdörtgenler üzerindeki Riemann toplamlarıyla tanımlayarak başladık; Fubini Teoremi, kutupsal, silindirik ve küresel koordinatlar ve genel değişken değiştirme formülüyle onları hesaplamayı öğrendik. İkinci kısımda vektör alanlarını eğriler ve yüzeyler boyunca integralledik ve her biri bir bölgedeki türevi sınırdaki değerlere bağlayan dört büyük teoreme ulaştık: eğrisel integraller için temel teorem, Green, Stokes ve Diverjans teoremleri. Bu teoremler elektromanyetizmanın Maxwell denklemlerinden akışkanlar mekaniğine ve ısı iletimine kadar fiziğin süreklilik ve korunum yasalarının matematiksel dilidir. Konuların tamamına Müfredat ve Giriş sayfasından ulaşabilirsiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0