Analiz 3: Fonksiyon Dizileri ve Seriler

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com
Bu çalışma Creative Commons BY-NC-SA 4.0 lisansıyla paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 4 Kasım 2026

İçindekiler

Giriş 7

1 Fonksiyon Dizilerinde Noktasal Yakınsaklık 8
1.1 Fonksiyon Dizisi 8
1.2 Noktasal Yakınsaklık 9
1.3 Noktasal Limitin Cebirsel Özellikleri 13
1.4 Noktasal Limit Neleri Korumaz? 14
1.5 Alıştırmalar 15

2 Düzgün Yakınsaklık 18
2.1 Düzgün Yakınsaklığın Tanımı 18
2.2 Düzgün Yakınsamama 20
2.3 Düzgün Yakınsaklık Kümeye Bağlıdır 23
2.4 Düzgün Limitin Cebirsel Özellikleri 24
2.5 Alıştırmalar 25

3 Düzgün Yakınsaklık Ölçütleri 28
3.1 Sıfır Dizisiyle Sınırlama 28
3.2 Nokta Dizisiyle Düzgün Yakınsamama 28
3.3 Supremum Ölçütü 29
3.4 Düzgün Yakınsaklık için Cauchy Kriteri 31
3.5 Alıştırmalar 33

4 Düzgün Yakınsaklık, Sınırlılık ve Süreklilik 37
4.1 Noktasal ve Düzgün Sınırlılık 37
4.2 Düzgün Limit Sürekliliği Korur 39
4.3 Monoton Yakınsama ve Dini Teoremi 41
4.4 Alıştırmalar 44

5 Düzgün Yakınsaklık ve İntegral 47
5.1 Terim Terime İntegral Teoremi 47
5.2 Düzgün Yakınsaklık Olmadığında 49
5.3 Alıştırmalar 51

6 Düzgün Yakınsaklık ve Türev 54
6.1 Düzgün Yakınsaklık Türevi Korumaz 54
6.2 Terim Terime Türev Teoremi 56
6.3 Alıştırmalar 59

 CC BY-NC-SA 4.0

7 Fonksiyon Serileri . . . 61
7.1 Noktasal, Mutlak ve Düzgün Yakınsaklık . . . 61
7.2 Cauchy Kriteri ve Gerek Koşul . . . 62
7.3 Weierstrass M-Testi . . . 63
7.4 Dirichlet ve Abel Testleri . . . 65
7.5 Alıştırmalar . . . 68

8 Fonksiyon Serilerinin Özellikleri . . . 72
8.1 Toplamın Sürekliliği . . . 72
8.2 Terim Terime İntegral . . . 73
8.3 Terim Terime Türev . . . 75
8.4 Alıştırmalar . . . 77

9 Kuvvet Serilerinde Düzgün Yakınsaklık ve Analitik Fonksiyonlar . . . 80
9.1 Uç Noktaya Kadar Düzgün Yakınsaklık . . . 80
9.2 Bir Noktada Analitik Olmanın Ölçütü . . . 83
9.3 Alıştırmalar . . . 85

10 Trigonometrik Seriler ve Fourier Katsayıları . . . 87
10.1 Trigonometrik Seriler ve Periyodiklik . . . 87
10.2 Ortogonallik Bağıntıları . . . 89
10.3 Katsayı Formülleri . . . 89
10.4 Tek ve Çift Fonksiyonlar . . . 92
10.5 Periyodu $2L$ Olan Fonksiyonlar . . . 94
10.6 Alıştırmalar . . . 95

11 En İyi Yaklaşım ve Bessel Eşitsizliği . . . 100
11.1 Karesel Ortalama Hata . . . 100
11.2 En İyi Yaklaşım Teoremi . . . 101
11.3 Bessel Eşitsizliği . . . 102
11.4 Riemann–Lebesgue Lemması . . . 103
11.5 Alıştırmalar . . . 105

12 Fourier Serilerinin Noktasal Yakınsaklığı . . . 108
12.1 Dirichlet Çekirdeği . . . 108
12.2 Kısmi Toplamın İntegral Gösterimi . . . 110
12.3 Dini Koşulu ve Yakınsaklık . . . 111
12.4 Parçalı Sürekli ve Yarı-Türevlenebilir Fonksiyonlar . . . 112
12.5 Alıştırmalar . . . 117

13 Fourier Serilerinin Düzgün Yakınsaklığı ve Parseval Eşitliği . . . 121
13.1 Türevin Fourier Katsayıları . . . 121
13.2 Mutlak ve Düzgün Yakınsaklık . . . 123

 CC BY-NC-SA 4.0

13.3 Fejér Çekirdeği ve Fejér Teoremi . . . 125
13.4 Parseval Eşitliği . . . 127
13.5 Alıştırmalar . . . 130

14 Fourier Sinüs ve Kosinüs Serileri . . . 133
14.1 Çift ve Tek Genişleme . . . 133
14.2 Kosinüs ve Sinüs Serileri . . . 133
14.3 $[0, L]$ Aralığında Sinüs ve Kosinüs Serileri . . . 138
14.4 Alıştırmalar . . . 138

15 Genelleştirilmiş İntegraller: Sınırsız Aralıklar . . . 141
15.1 Sınırsız Aralıkta İntegral . . . 141
15.2 Lineerlik . . . 143
15.3 İki Temel Aile . . . 144
15.4 Bütün Doğru Üzerinde İntegral . . . 145
15.5 Alıştırmalar . . . 146

16 Birinci Tip İntegraller için Yakınsaklık Testleri . . . 148
16.1 Cauchy Kriteri . . . 148
16.2 Negatif Olmayan Fonksiyonlar . . . 149
16.3 Karşılaştırma Testi . . . 150
16.4 Limit Karşılaştırma Testi . . . 152
16.5 Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık . . . 154
16.6 Dirichlet ve Abel Testleri . . . 157
16.7 Sol Ucu Sonsuz Olan İntegraller . . . 161
16.8 Alıştırmalar . . . 161

17 İkinci Tip Genelleştirilmiş İntegraller . . . 166
17.1 Tekil Noktada İntegral . . . 166
17.2 İç Noktada ve Birden Çok Noktada Tekillik . . . 168
17.3 Kuvvet İntegrali . . . 169
17.4 Testlerin Çerçevesi ve Cauchy Kriteri . . . 171
17.5 Negatif Olmayan Fonksiyonlar ve Karşılaştırma Testi . . . 172
17.6 Limit Karşılaştırma ve Kuvvet Testi . . . 173
17.7 Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık . . . 176
17.8 Tekil Noktada Cauchy Temel Değeri . . . 178
17.9 Üçüncü Tip Genelleştirilmiş İntegraller . . . 179
17.10 Alıştırmalar . . . 181

18 Euler İntegralleri: Gamma ve Beta Fonksiyonları . . . 185
18.1 Gamma Fonksiyonu . . . 185
18.2 Gamma Fonksiyonunun Temel Özellikleri . . . 186
18.3 Beta Fonksiyonu . . . 188
18.4 Gamma ile Beta Arasındaki Bağıntı . . . 190

 CC BY-NC-SA 4.0

18.5 İntegralleri Euler İntegrallerine İndirgeme . . . 193
18.6 Alıştırmalar . . . 195

19 Parametreye Bağlı İntegraller . . . 199
19.1 İki Değişkenli Sürekli Fonksiyonlar . . . 199
19.2 Parametreye Bağlı İntegralin Tanımı . . . 202
19.3 Parametreye Göre Süreklilik . . . 203
19.4 İntegral İşareti Altında Türev . . . 205
19.5 İntegral Sırasının Değişmesi . . . 208
19.6 Leibniz Formülü . . . 210
19.7 Alıştırmalar . . . 213

20 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegraller . . . 218
20.1 Noktasal ve Düzgün Yakınsaklık . . . 218
20.2 Dizi Ölçütü ve Cauchy Kriteri . . . 221
20.3 Weierstrass M-Testi . . . 223
20.4 Dirichlet ve Abel Testleri . . . 225
20.5 Süreklilik ve Dini Teoremi . . . 229
20.6 Parametreye Göre İntegral ve Türev . . . 233
20.7 Dirichlet İntegrali . . . 235
20.8 Alıştırmalar . . . 238

21 Uygulamalı Özet . . . 244
21.1 Soru Tipine Göre Yöntem . . . 244
21.2 Noktasal Limit ve Düzgün Yakınsaklık . . . 245
21.3 Limit, İntegral ve Türev Yer Değiştirir mi? . . . 248
21.4 Fonksiyon Serilerinde Düzgün Yakınsaklık . . . 250
21.5 Kuvvet Serileri: Yakınsaklık Kümesi ve Abel Limiti . . . 251
21.6 Fourier Serisini Hesaplamak . . . 252
21.7 Fourier Serisinin Toplamı: Dirichlet Teoremi . . . 255
21.8 Sinüs ve Kosinüs Serileri . . . 256
21.9 Parseval ve Bessel ile Seri Toplamı . . . 258
21.10 Genelleştirilmiş İntegralin Yakınsaklığı . . . 260
21.11 Gamma ve Beta Fonksiyonlarıyla Hesap . . . 263
21.12 Leibniz Formülü . . . 266
21.13 İntegral İşareti Altında Türev ve Sıra Değiştirme . . . 267
21.14 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerde Düzgün Yakınsaklık . . . 269
21.15 Son Kontrol Listesi . . . 271

 CC BY-NC-SA 4.0

Giriş

Analiz 3, noktasal yakınsaklıktan düzgün yakınsaklığa geçiş yaparak fonksiyon dizilerinin ve serilerinin analitik yapılarını inceler; ardından Fourier serileriyle periyodik fonksiyonların doğasına iner ve genelleştirilmiş integrallerle sınırları sonsuza taşır.

> **i** Not
>
> Analiz 3'ün bütün başlıklarının notları hazırdır ve aşağıdaki bağlantılardan ulaşılabilir. Dersin dayandığı temel için Analiz 1 ve Analiz 2 notlarına bakılabilir. Dört Analiz dersinin listesi için Analiz sayfasına bakabilirsiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

1. Fonksiyon Dizilerinde Noktasal Yakınsaklık

Analiz 1'de terimleri reel sayı olan dizileri, Analiz 2'nin sonunda da terimleri sayı olan serileri inceledik. Şimdi bir adım yukarı çıkıyoruz: dizinin terimleri artık sayı değil, **fonksiyon** olacak. Örneğin $x, x^2, x^3, \ldots$ fonksiyonları bir dizi oluşturur ve doğal soru şudur: n büyüdükçe bu fonksiyonlar bir fonksiyona "yaklaşır" mı?
Bu sorunun en yalın yanıtı, her noktaya ayrı ayrı bakmaktır. x sabitlenince $x, x^2, x^3, \ldots$ sıradan bir sayı dizisi olur ve limitini Analiz 1'in araçlarıyla buluruz. Bu bakış **noktasal yakınsaklık** adını alır. Hesabı kolaydır, ama bir kusuru vardır: sürekli fonksiyonların noktasal limiti sürekli çıkmayabilir, integrallenebilir fonksiyonların noktasal limiti integrallenemeyebilir. Bu kusur, sonraki bölümün konusu olan düzgün yakınsaklığa duyulan ihtiyacı doğurur.
Bu bölümde fonksiyon dizisini ve noktasal yakınsaklığı tanımlıyor, noktasal limitin nasıl hesaplandığını örneklerle görüyor ve noktasal limitin hangi özellikleri koruyup hangilerini korumadığını inceliyoruz.

1.1 Fonksiyon Dizisi

Bir sayı dizisi, her doğal sayıya bir reel sayı karşılık getiren bir kuraldır. Fonksiyon dizisinde her doğal sayıya bir fonksiyon karşılık gelir.

Tanım 1.1 (Fonksiyon Dizisi). $E \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için bir $f_n : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmişse $n \mapsto f_n$ eşlemesine E üzerinde tanımlı bir **fonksiyon dizisi** denir ve $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ya da kısaca (f_n) ile gösterilir.

Yani bir fonksiyon dizisi, hepsi aynı E kümesinde tanımlı $f_1, f_2, f_3, \ldots$ fonksiyonlarının sıralı bir listesidir. Önemli gözlem şudur: bir $x \in E$ noktası sabitlenince

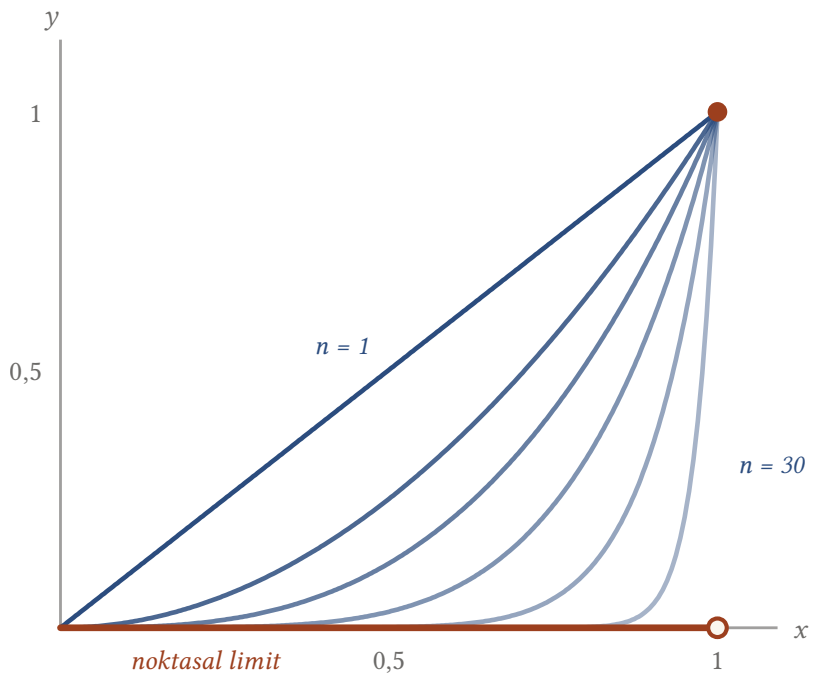
$$\big(\, f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\, f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots \,\big)$$

bir **reel sayı dizisi** olur. Böylece bir fonksiyon dizisi, E'nin her noktası için bir tane olmak üzere, sayı dizilerinden oluşan bir aile gibi düşünülebilir. Sayı dizileri için bildiğimiz her kavram (yakınsaklık, sınırlılık, monotonluk) bu dizilere uygulanabilir.
Bölüm boyunca bize eşlik edecek temel örnek şudur: $E = [0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) = x^n$. Dizinin ilk terimleri $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$ fonksiyonlarıdır. $x = \dfrac{1}{2}$ noktası sabitlenirse

$$\left(f_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\right)$$

sayı dizisi elde edilir; bu dizi 0'a yakınsar. $x = 1$ sabitlenirse $(1, 1, 1, \ldots)$ sabit dizisi çıkar; bu dizi 1'e yakınsar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.1: $f_n(x) = x^n$ dizisinin $n = 1, 2, 3, 5, 10, 30$ terimleri. $[0, 1)$ üzerinde eğriler yatay eksene çöker; $(1, 1)$ noktası ise yerinde kalır. Noktasal limit $x = 1$'de sıçrar.

Şekilde n büyüdükçe grafiklerin $[0, 1)$ üzerinde yatay eksene doğru çöktüğü, ama $(1, 1)$ noktasının hiç kıpırdamadığı görülür.

1.2 Noktasal Yakınsaklık

Her noktada ayrı ayrı limit alma fikrini tanıma dökelim.

Tanım 1.2 (Noktasal Yakınsaklık ve Noktasal Limit). (f_n), $E \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi ve $f : E \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in E$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ise (f_n) dizisi E üzerinde f fonksiyonuna **noktasal yakınsar** denir. f fonksiyonuna (f_n) dizisinin **noktasal limiti** denir ve

$$f_n \to f \quad (\text{noktasal}, E)$$

yazılır. Açık yazımıyla: her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in E$ için öyle bir $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq N$ olan her n için

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

olur.

Yani noktasal yakınsaklık, E'nin her noktasında ayrı bir sayı dizisi limiti almaktır; fazladan hiçbir şey istemez. Tanımdaki N sayısının hem ε'a hem de x'e bağlı olduğuna dikkat edelim: aynı ε için bir noktada $N = 5$ yeterken başka bir noktada $N = 5000$ gerekebilir. Bu bağımlılık, sonraki bölümde düzgün yakınsaklıkla noktasal yakınsaklığı ayıran tek şey olacaktır.
Bir sayı dizisinin limiti tek olduğundan (bkz. Analiz 1) noktasal limit de varsa tektir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 1.3 (Bir Noktada ve Bir Kümede Iraksaklık). (f_n), E üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi ve $a \in E$ olsun. $\big(\, f_n(a) \,\big)$ sayı dizisi yakınsaksa (f_n) dizisi $\boldsymbol{a}$ **noktasında yakınsaktır**, ıraksaksa $\boldsymbol{a}$ **noktasında ıraksaktır** denir. (f_n) dizisi E'nin her noktasında ıraksaksa $\boldsymbol{E}$ **üzerinde ıraksaktır** denir.

Yani bir fonksiyon dizisi bazı noktalarda yakınsayıp bazılarında ıraksayabilir. E üzerinde noktasal yakınsak olması için E'nin **her** noktasında yakınsaması gerekir; tek bir noktada ıraksaması noktasal yakınsaklığı bozar.

Üç adımda noktasal limit

1. **Noktayı sabitle.** $x \in E$ bir sabit gibi düşünülür; değişken yalnız n'dir.
2. **Özel noktaları ayır.** Formülün davranışının değiştiği noktalar ($x = 0$, $x = 1$, payda sıfırları gibi) ayrı ayrı incelenir.
3. **Sayı dizisi limitini al.** Her durumda $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ hesaplanır; sonuçlar parçalı bir f fonksiyonunda toplanır.

Örnek 1.1 (Kuvvet Dizisinin Noktasal Limiti). $E = [0,1]$ üzerinde $f_n(x) = x^n$ ile tanımlı (f_n) dizisinin noktasal limitini bulunuz ve $0 < x < 1$ için tanımdaki $N(\varepsilon, x)$ sayısını açıkça yazınız.

Çözüm.
Noktayı sabitleyip üç durumu ayıralım.

- $x = 0$ için her n'de $f_n(0) = 0$'dır; dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.
- $x = 1$ için her n'de $f_n(1) = 1^n = 1$'dir; dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$.
- $0 < x < 1$ için (x^n) ortak çarpanı 1'den küçük bir geometrik dizidir ve $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$'dır (bkz. Analiz 1).

Öyleyse dizi $[0,1]$ üzerinde noktasal yakınsaktır ve noktasal limiti

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur.
N sayısı. $0 < x < 1$ ve $0 < \varepsilon < 1$ olsun. $|\, x^n - 0 \,| = x^n < \varepsilon$ eşitsizliğinin iki yanının logaritmasını alalım: $n \ln x < \ln \varepsilon$. Burada $\ln x < 0$ olduğundan bölünce eşitsizlik yön değiştirir:

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}.$$

Dolayısıyla

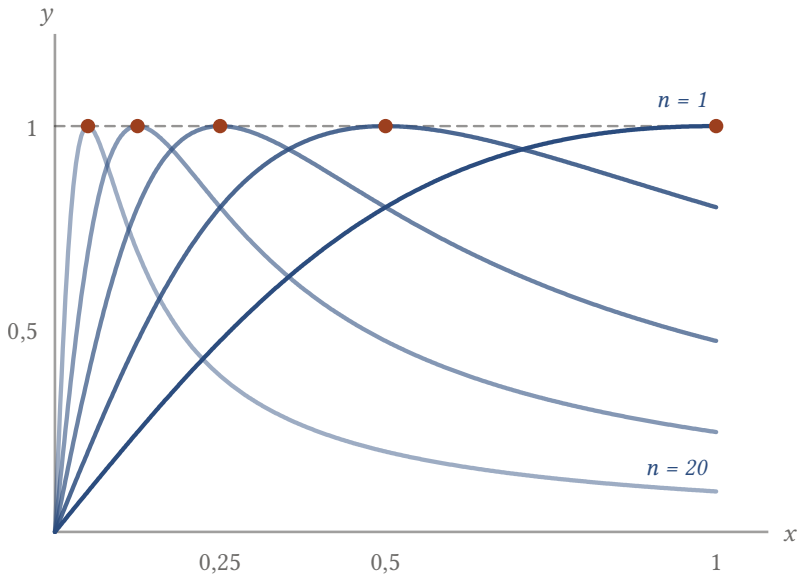
$$N(\varepsilon, x) = \left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \right\rfloor + 1$$

seçilebilir: $n \ge N$ ise $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$ ve buradan $x^n < \varepsilon$ olur. ($\varepsilon \ge 1$ ise her n için $x^n < 1 \le \varepsilon$ olduğundan $N = 1$ yeter.)
Bu N gerçekten x'e bağlıdır. Örneğin $\varepsilon = 0{,}01$ için $x = 0{,}5$ noktasında $N = 7$ yeterken $x = 0{,}99$ noktasında $N = 459$ gerekir. x sayısı 1'e yaklaştıkça $\ln x \to 0$ olur ve N sınırsız büyür. ■

Örnek 1.2 (Tepesi Sola Kayan Bir Dizi). $E = [0,1]$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1 + n^2x^2}$ ile tanımlı (f_n) dizisi noktasal yakınsak mıdır? Yakınsaksa limitini ε–N tanımıyla doğrulayınız.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.2: $f_n(x) = 2nx/(1 + n^2x^2)$ dizisinin $n = 1, 2, 4, 8, 20$ terimleri. Tepe noktası $(1/n, 1)$ sola kayar ama alçalmaz; her sabit x noktasında değerler yine de 0'a gider.

Dizinin ilk terimleri

$$f_1(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \qquad f_2(x) = \frac{4x}{1+4x^2}, \qquad f_3(x) = \frac{6x}{1+9x^2}$$

fonksiyonlarıdır.
Limit adayı. $x = 0$ için her n'de $f_n(0) = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$'dır. $0 < x \leq 1$ için pay ve paydayı n^2 ile bölelim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} = \frac{0}{0+x^2} = 0.$$

Öyleyse limit adayı $f(x) = 0$ sabit fonksiyonudur.
Tanımla doğrulama. $\varepsilon > 0$ ve $x \in (0, 1]$ verilsin. Paydayı küçülterek kesri büyütelim: $1 + n^2x^2 > n^2x^2$ olduğundan

$$\left| \frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \frac{2nx}{n^2x^2} = \frac{2}{nx}.$$

$\dfrac{2}{nx} < \varepsilon$ olması için $n > \dfrac{2}{\varepsilon x}$ yeter. Dolayısıyla

$$N(\varepsilon, x) = \left\lfloor \frac{2}{\varepsilon x} \right\rfloor + 1$$

seçilirse $n \geq N$ için $| f_n(x) - 0 | < \varepsilon$ olur. $x = 0$ noktasında her N işe yarar. Sonuç: $f_n \to 0$ (noktasal, $[0, 1]$).
Bir gözlem. $(1 - nx)^2 \geq 0$ eşitsizliği $2nx \leq 1 + n^2x^2$ demektir; yani her x için $f_n(x) \leq 1$'dir ve eşitlik $x = \dfrac{1}{n}$ noktasında sağlanır: $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Her f_n'nin grafiğinde yüksekliği 1 olan bir tepe vardır; n büyüdükçe tepe sola kayar ama alçalmaz. Her sabit x noktasında değerler 0'a gittiği hâlde grafikler bir bütün olarak 0 fonksiyonuna yaklaşmaz. Bu olguyu Düzgün Yakınsaklık bölümünde yeniden ele alacağız. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

1.2.1 Noktasal yakınsamama

Bir dizinin verilen bir fonksiyona noktasal yakınsamadığını göstermek için tanımın olumsuzunu yazmak gerekir.

Önerme 1.1 (Noktasal Yakınsamamanın Sembolik İfadesi). *(f_n), E üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi ve $f : E \to \mathbb{R}$ olsun. (f_n) dizisinin E üzerinde f'ye noktasal yakınsamaması için gerek ve yeter koşul şudur: öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ ve öyle bir $x_0 \in E$ vardır ki her $N \in \mathbb{N}$ için*

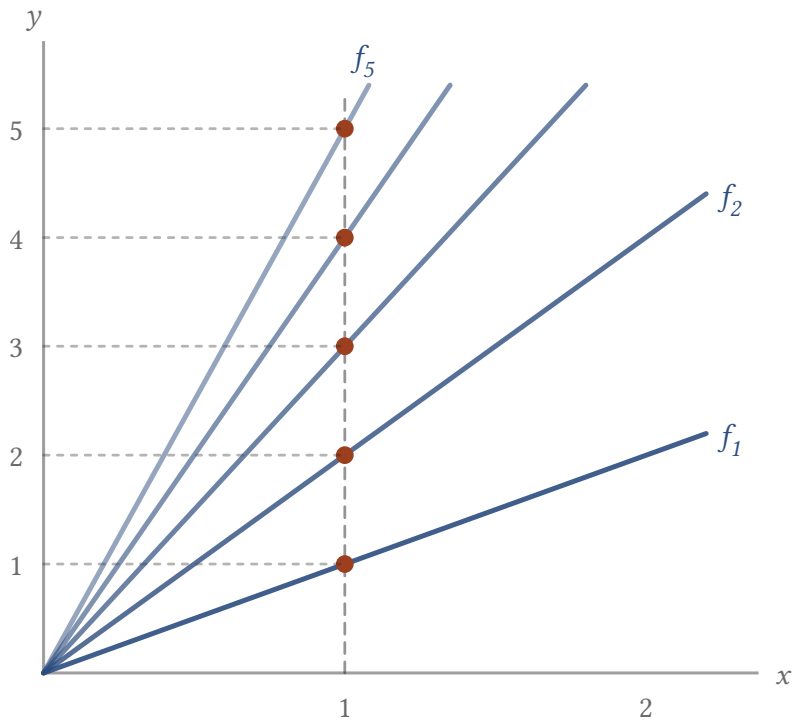
$$n_N \geq N \qquad \text{ve} \qquad |\, f_{n_N}(x_0) - f(x_0) \,| \geq \varepsilon_0$$

olacak biçimde bir $n_N \in \mathbb{N}$ bulunur.

> ***İspat.***
> *Noktasal yakınsaklık, "her $x \in E$ için $f_n(x) \to f(x)$" önermesidir. Olumsuzu, "en az bir $x_0 \in E$ için $\left(f_n(x_0) \right)$ dizisi $f(x_0)$'a yakınsamaz" önermesidir. Bir sayı dizisinin verilen bir sayıya yakınsamaması ise tam olarak şu demektir (bkz. Analiz 1): öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her N için $n_N \geq N$ ve $|\, f_{n_N}(x_0) - f(x_0) \,| \geq \varepsilon_0$ olacak biçimde bir n_N bulunur. İki adım birleşince iddia çıkar.* ■

Örnek 1.3 (Hiçbir Noktada Yakınsamayan Bir Dizi). $E = (0, +\infty)$ üzerinde $f_n(x) = nx$ ile tanımlı (f_n) dizisinin E üzerinde noktasal yakınsak olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**



Şekil 1.3: $f_n(x) = nx$ doğruları. $x = 1$ noktasındaki değerler 1, 2, 3, ... sayı dizisini oluşturur ve bu dizi ıraksaktır.

$x \in E$ sabit olsun. $x > 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} nx = +\infty$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; $\big(\ f_n(x)\ \big)$ dizisi sınırsızdır, dolayısıyla ıraksaktır (bkz. Analiz 1). Dizi E'nin her noktasında ıraksadığından E üzerinde ıraksaktır; hiçbir f fonksiyonuna noktasal yakınsamaz.
Aynı sonucu Önerme 1.1 ile de görelim. $f : E \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olsun. $x_0 = 1$ ve $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ alalım. $N \in \mathbb{N}$ verilsin. Arşimet özelliğine göre $n_N \geq N$ ve $n_N \geq |\ f(1)\ | + 1$ olan bir n_N doğal sayısı vardır. Bu sayı için

$$|\ f_{n_N}(1) - f(1)\ | \geq n_N - |\ f(1)\ | \geq 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

olur. Dikkat edilirse $\big(\ f_n(1)\ \big) = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ bir reel sayı dizisidir ve ıraksaklığı doğrudan görülür. ■

Örnek 1.4 (Yatıklaşan Doğrular). $E = [0, +\infty)$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ ile tanımlı (f_n) dizisi noktasal yakınsak mıdır?

Çözüm.
$x = 0$ için her n'de $f_n(0) = 0$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$'dır. $x > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = x \cdot 0 = 0$$

olur. Limit adayı $f(x) = 0$ fonksiyonudur. Tanımla doğrulayalım: $\varepsilon > 0$ ve $x > 0$ verilsin. $n \geq N$ için

$$|\ f_n(x) - 0\ | = \frac{x}{n} \leq \frac{x}{N}$$

olduğundan $\dfrac{x}{N} < \varepsilon$, yani $N > \dfrac{x}{\varepsilon}$ olması yeter. $N(\varepsilon, x) = \left\lfloor \dfrac{x}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ seçilir. Sonuç: $f_n \to 0$ (noktasal, $[0, +\infty)$).
Burada da N sayısı x'e bağlıdır ve x büyüdükçe sınırsız büyür. ■

1.3 Noktasal Limitin Cebirsel Özellikleri

Noktasal limit her noktada bir sayı dizisi limiti olduğundan, sayı dizilerindeki limit aritmetiği fonksiyon dizilerine aynen taşınır.

Teorem 1.1 (Noktasal Limitin Cebirsel Özellikleri). *$E \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme, (f_n) ve (g_n) dizileri E üzerinde tanımlı fonksiyon dizileri, $c \in \mathbb{R}$ olsun. E üzerinde $f_n \to f$ ve $g_n \to g$ noktasal yakınsıyorsa:*

(i) $f_n + g_n \to f + g$ *(noktasal, E),*

(ii) $c \cdot f_n \to c \cdot f$ *(noktasal, E),*

(iii) $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ *(noktasal, E),*

(iv) *her $x \in E$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $g_n(x) \neq 0$ ve $g(x) \neq 0$ ise* $\dfrac{f_n}{g_n} \to \dfrac{f}{g}$ *(noktasal, E).*

İspat.
(i) *$\varepsilon > 0$ ve $x \in E$ verilsin. $f_n(x) \to f(x)$ olduğundan öyle bir $N_1 = N_1(\varepsilon, x)$ vardır ki $n \geq N_1$ için $|\ f_n(x) - f(x)\ | < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olur. $g_n(x) \to g(x)$ olduğundan öyle bir $N_2 = N_2(\varepsilon, x)$ vardır ki $n \geq N_2$ için $|\ g_n(x) - g(x)\ | < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ alalım. $n \geq N$ için üçgen eşitsizliğiyle*

$$\begin{aligned} |\ (f_n + g_n)(x) - (f + g)(x)\ | &= |\ \big(\ f_n(x) - f(x)\ \big) + \big(\ g_n(x) - g(x)\ \big)\ | \\ &\leq |\ f_n(x) - f(x)\ | + |\ g_n(x) - g(x)\ | \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse $f_n + g_n \to f + g$ (noktasal).

 CC BY-NC-SA 4.0

(ii), (iii), (iv) *$x \in E$ sabit olsun. $\left(f_n(x) \right)$ ve $\left(g_n(x) \right)$ yakınsak sayı dizileridir; limitleri $f(x)$ ve $g(x)$'tir. Sayı dizileri için limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği*

$$cf_n(x) \to cf(x), \qquad f_n(x)\, g_n(x) \to f(x)\, g(x)$$

olur; ayrıca (iv)'ün koşulları altında $g_n(x) \neq 0$ ve $g(x) \neq 0$ olduğundan $\dfrac{f_n(x)}{g_n(x)} \to \dfrac{f(x)}{g(x)}$ olur. $x \in E$ keyfi olduğundan üç yakınsama da E üzerinde noktasaldır. ■

1.4 Noktasal Limit Neleri Korumaz?

Bir dizinin bütün terimleri iyi bir özelliğe sahipse limit fonksiyonunun da o özelliğe sahip olmasını bekleriz. Noktasal yakınsaklık bu beklentiyi karşılamaz. Üç temel özelliğe sırayla bakalım.

Örnek 1.5 (Sürekli Fonksiyonların Süreksiz Noktasal Limiti). Sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlardan oluşan, ama noktasal limiti sürekli olmayan bir fonksiyon dizisi veriniz.

Çözüm.
$[0,1]$ üzerinde $f_n(x) = x^n$ alalım. Her f_n bir polinomdur; $[0,1]$ üzerinde sürekli ve türevlenebilirdir. Örnek 1.1 gereği noktasal limit

$$f(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur. f, $x = 1$ noktasında sürekli değildir: $x \to 1^-$ iken $f(x) = 0 \to 0$ olur, ama $f(1) = 1$'dir. Bir noktada sürekli olmayan fonksiyon o noktada türevlenebilir de olamaz; dolayısıyla f, $x = 1$'de türevlenebilir değildir.
Öyleyse sürekli fonksiyonların noktasal limiti sürekli olmayabilir; türevlenebilir fonksiyonların noktasal limiti türevlenebilir olmayabilir. ■

Örnek 1.6 (İntegrallenebilir Fonksiyonların İntegrallenemeyen Noktasal Limiti). $[0,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilir fonksiyonlardan oluşan, ama noktasal limiti integrallenebilir olmayan bir fonksiyon dizisi veriniz.

Çözüm.
Her $n \in \mathbb{N}$ için $[0,1]$ aralığındaki, paydası en çok n olan kesirlerin kümesini

$$A_n = \left\{ \frac{p}{m} : m \in \{1, ..., n\}, p \in \{0, 1, ..., m\} \right\}$$

ile gösterelim ve

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, x \in A_n \\ 0, x \in [0,1] \setminus A_n \end{cases}$$

tanımlayalım.
Her f_n integrallenebilirdir. A_n sonlu bir kümedir. f_n fonksiyonu, sıfır fonksiyonundan yalnız bu sonlu sayıda noktada ayrılır. Sonlu sayıda noktada değer değiştirmek integrallenebilirliği ve integrali etkilemediğinden (bkz. Analiz 2) f_n integrallenebilirdir ve $\int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$'dır.
Noktasal limit. $x \in [0,1]$ rasyonel olsun; $x = \dfrac{p}{m}$ yazalım. $n \geq m$ olan her n için $x \in A_n$, yani $f_n(x) = 1$'dir; dolayısıyla $f_n(x) \to 1$. x irrasyonelse hiçbir A_n'ye ait değildir ve her n için $f_n(x) = 0$'dır; dolayısıyla $f_n(x) \to 0$. Noktasal limit

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dirichlet fonksiyonudur.
Limit integrallenemez. Dirichlet fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde Riemann integrallenebilir değildir (bkz. Analiz 2).

 CC BY-NC-SA 4.0

Öyleyse integrallenebilir fonksiyonların noktasal limiti integrallenebilir olmayabilir. ■

Örnek 1.7 (Sınırlı Fonksiyonların Sınırsız Noktasal Limiti). $(0,1]$ üzerinde sınırlı fonksiyonlardan oluşan, ama noktasal limiti sınırlı olmayan bir fonksiyon dizisi veriniz.

Çözüm.
$(0,1]$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{n}{1+nx}$ alalım. $x > 0$ için $1 + nx > 1$ olduğundan

$$0 < f_n(x) = \frac{n}{1+nx} < n$$

olur; her f_n sınırlıdır (sınır n'ye bağlıdır). Noktasal limit için pay ve paydayı n ile bölelim:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}+x} = \frac{1}{x}.$$

Noktasal limit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonudur ve $(0,1]$ üzerinde sınırlı değildir: $x \to 0^+$ iken $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ olur. ■

Üç örneğin ortak dersi şudur: noktasal yakınsaklık, limit fonksiyonu hakkında çok az bilgi taşır. Sorunun kaynağı, yakınsama hızının noktadan noktaya sınırsızca yavaşlayabilmesidir.

1.5 Alıştırmalar

Alıştırma 1.1 (Üç Parçalı Bir Noktasal Limit). $E = [0,+\infty)$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$ ile tanımlı dizinin noktasal limitini bulunuz.

Çözüm.
$x \geq 0$ sabit olsun. (x^n) geometrik dizisinin davranışı x'in 1'e göre konumuna bağlıdır; üç durumu ayıralım.

- $0 \leq x < 1$ ise $x^n \to 0$ olur. Dolayısıyla $f_n(x) \to \dfrac{0}{1+0} = 0$.
- $x = 1$ ise her n için $f_n(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$'dir. Dolayısıyla $f_n(1) \to \dfrac{1}{2}$.
- $x > 1$ ise $x^n \to +\infty$ olur. Pay ve paydayı x^n ile bölelim:

$$f_n(x) = \frac{1}{\frac{1}{x^n}+1} \to \frac{1}{0+1} = 1.$$

Dizi $[0,+\infty)$ üzerinde noktasal yakınsaktır ve limiti

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Her f_n sürekli olduğu hâlde f, $x = 1$ noktasında süreksizdir. ■

Alıştırma 1.2 (Sıfırda Sıçrayan Bir Limit). $E = [0,1]$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ ile tanımlı dizinin noktasal limitini bulunuz ve $0 < x \leq 1$ için $N(\varepsilon, x)$ sayısını belirleyiniz.

Çözüm.
$x = 0$ için her n'de $f_n(0) = 0$'dır; $f_n(0) \to 0$. $0 < x \leq 1$ için pay ve paydayı n ile bölelim:

$$f_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{n}+x} \to \frac{x}{x} = 1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Noktasal limit

$$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur.
***N* sayısı.** $0 < x \leq 1$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$| \ f_n(x) - 1 \ | = \left| \frac{nx}{1+nx} - 1 \right| = \frac{1}{1+nx} < \frac{1}{nx}$$

olduğundan $\dfrac{1}{nx} < \varepsilon$, yani $n > \dfrac{1}{\varepsilon x}$ olması yeter. $N(\varepsilon, x) = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon x} \right\rfloor + 1$ seçilir. ■

Alıştırma 1.3 (Tek Noktada Yakınsayan Bir Dizi). $E = \mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = (-1)^n x$ ile tanımlı dizinin hangi noktalarda yakınsadığını bulunuz.

Çözüm.
$x = 0$ için her n'de $f_n(0) = 0$'dır; dizi bu noktada 0'a yakınsar.
$x \neq 0$ olsun. $\big(\ f_n(x) \ \big) = (-x, x, -x, x, \ldots)$ dizisinin çift indisli terimleri x, tek indisli terimleri $-x$ sabitidir. İki alt dizi farklı limitlere ($x \neq -x$) yakınsadığından dizi ıraksaktır.
Öyleyse (f_n) yalnız $x = 0$ noktasında yakınsar; $\mathbb{R}$ üzerinde noktasal yakınsak değildir. ■

Alıştırma 1.4 (Arktanjantla İşaret Fonksiyonu). $E = \mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \arctan(nx)$ ile tanımlı dizinin noktasal limitini bulunuz. Limit fonksiyonu sürekli midir?

Çözüm.
x sabit olsun.

- $x = 0$ için $f_n(0) = \arctan 0 = 0$; limit 0'dır.
- $x > 0$ için $n \to \infty$ iken $nx \to +\infty$ olur ve $\lim_{t \to +\infty} \arctan t = \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan $f_n(x) \to \dfrac{\pi}{2}$.
- $x < 0$ için $nx \to -\infty$ olur ve $\lim_{t \to -\infty} \arctan t = -\dfrac{\pi}{2}$ olduğundan $f_n(x) \to -\dfrac{\pi}{2}$.

Noktasal limit

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Sağdan limit $\dfrac{\pi}{2}$, soldan limit $-\dfrac{\pi}{2}$ olduğundan f, $x = 0$ noktasında sürekli değildir; oysa her f_n bütün $\mathbb{R}$'de süreklidir. ■

Alıştırma 1.5 (Parametreli Bir Rasyonel Dizi). $a > 0$ olmak üzere $E = [a, +\infty)$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{7n^3 x}{3 + n^3 x^2}$ ile tanımlı dizinin noktasal limitini bulunuz.

Çözüm.
$x \geq a > 0$ sabit olsun. Pay ve paydayı n^3 ile bölelim:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{7n^3 x}{3 + n^3 x^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{7x}{\frac{3}{n^3} + x^2} = \frac{7x}{x^2} = \frac{7}{x}.$$

Öyleyse $f_n \to f$ (noktasal, $[a, +\infty)$) ve $f(x) = \dfrac{7}{x}$'tir. Bu yakınsamanın düzgün olup olmadığı Alıştırma 2.1 alıştırmasında incelenir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 1.6 (Cebirsel Özelliklerle Limit). $E = [0,1)$ üzerinde $h_n(x) = \left(x^n + \dfrac{x}{n}\right)\left(3 + \dfrac{nx}{1+nx}\right)$ ile tanımlı dizinin noktasal limitini Teorem 1.1 yardımıyla bulunuz.

Çözüm.
$[0,1)$ üzerinde $x^n \to 0$ (Örnek 1.1) ve $\dfrac{x}{n} \to 0$ (Örnek 1.4) noktasal yakınsar. Teorem 1.1 (i) gereği birinci çarpan $x^n + \dfrac{x}{n} \to 0$ noktasal yakınsar.
İkinci çarpanda $\dfrac{nx}{1+nx}$ dizisi, Alıştırma 1.2 gereği $x = 0$'da 0'a, $0 < x < 1$ için 1'e yakınsar. Sabit 3 dizisiyle toplanınca ikinci çarpanın noktasal limiti

$$g(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ 4, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

olur. Teorem 1.1 (iii) gereği çarpımın noktasal limiti, limitlerin çarpımıdır: $h_n \to 0 \cdot g = 0$ (noktasal, $[0,1)$). ■

Noktasal yakınsaklığın sürekliliği, integrallenebilirliği ve sınırlılığı koruyamadığını gördük. Bu eksikliği gideren, N sayısının x'ten bağımsız seçilebilmesini isteyen daha güçlü kavramı Düzgün Yakınsaklık bölümünde tanımlıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Düzgün Yakınsaklık

Noktasal yakınsaklık tanımında N sayısı hem ε'a hem de x noktasına bağlıydı ve bu bağımlılık yüzünden limit fonksiyonu sürekliliği, integrallenebilirliği, sınırlılığı yitirebiliyordu. Çare, bağımlılığın bir yarısını kaldırmaktır: verilen ε için **tek bir** N sayısının kümenin bütün noktalarına birden yetmesini isteyeceğiz. Bu küçük değişiklik büyük bir fark yaratır. Noktasal yakınsaklıkta her nokta kendi hızında yakınsar; düzgün yakınsaklıkta ise bütün noktalar aynı anda, ortak bir hızla yakınsar. Geometrik olarak bu, f_n grafiğinin bir bütün olarak f grafiğinin üzerine oturması demektir.
Bu bölümde düzgün yakınsaklığı tanımlıyor, tanımın olumsuzunu yazıyor, ikisini de örnekler üzerinde çalıştırıyor ve düzgün limitin cebirsel işlemlerle nasıl davrandığını inceliyoruz.

2.1 Düzgün Yakınsaklığın Tanımı

Noktasal yakınsaklık tanımındaki niceleyicilerin sırasını değiştirerek başlıyoruz.

Tanım 2.1 (Düzgün Yakınsaklık). $E \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme, (f_n) dizisi E üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi ve $f : E \to \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa ki $n \geq N$ olan her n ve **her** $x \in E$ için

$$| f_n(x) - f(x) | < \varepsilon$$

olsun, o zaman (f_n) dizisi E üzerinde f fonksiyonuna **düzgün yakınsar** denir ve

$$f_n \rightrightarrows f \quad (E)$$

yazılır. f fonksiyonuna (f_n) dizisinin **düzgün limiti** denir.

Yani düzgün yakınsaklıkta N sayısı yalnız ε'a bağlıdır; x'e bağlı değildir. İki tanımı yan yana yazınca fark görülür:

Tablo 2.1: Noktasal ve düzgün yakınsaklıkta niceleyici sırası

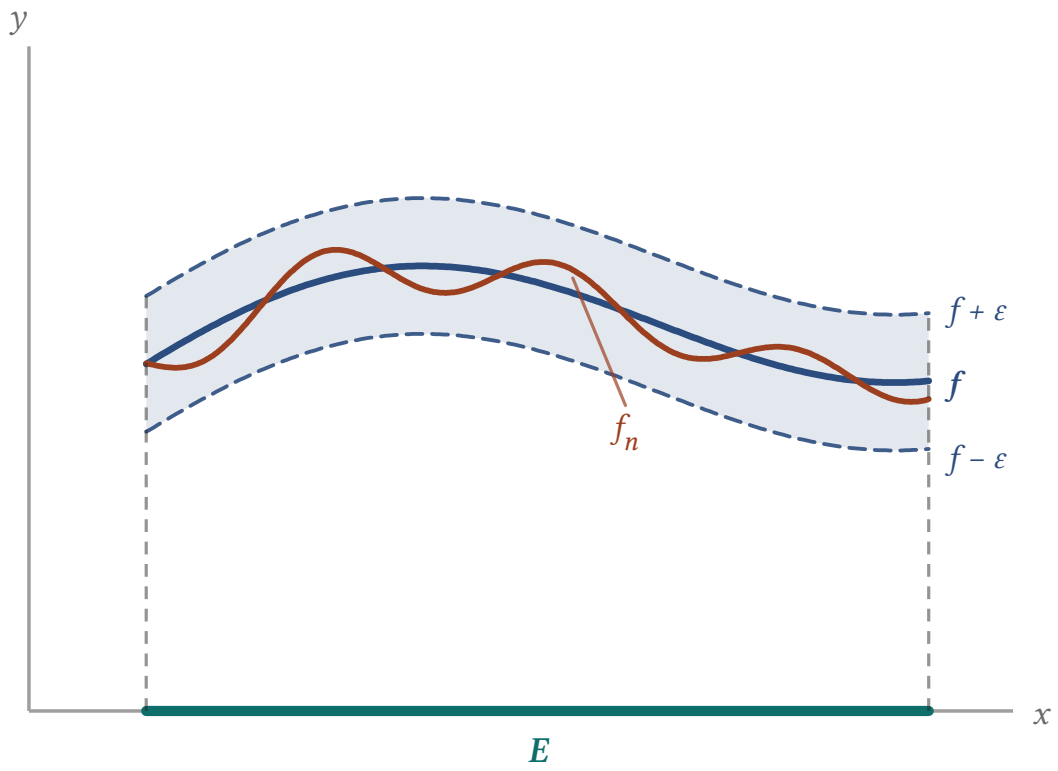
	Niceleyici sırası
Noktasal	her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in E$ için bir $N(\varepsilon, x)$ vardır
Düzgün	her $\varepsilon > 0$ için bir $N(\varepsilon)$ vardır; bu N her $x \in E$ için geçerlidir

Tanımdaki eşitsizlik, $n \geq N$ olan her n ve her $x \in E$ için

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

biçiminde de yazılabilir. Bunun geometrik anlamı şudur: $y = f(x) - \varepsilon$ ve $y = f(x) + \varepsilon$ eğrileri arasında kalan bölgeye f'nin çevresindeki **ε-şeridi** diyelim. Düzgün yakınsaklık, N'den sonraki bütün f_n grafiklerinin E üzerinde bu şeridin tamamen içinde kalması demektir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.1: Düzgün yakınsaklığın geometrik anlamı: $n \geq N$ olan her f_n grafiği, E kümesinin tamamı üzerinde f'nin çevresindeki ε-şeridinin içinde kalır.

Düzgün yakınsaklık noktasal yakınsaklıktan daha güçlü bir koşuldur.

Önerme 2.1 (Düzgün Yakınsak Dizi Noktasal Yakınsaktır). *(f_n) dizisi E üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa E üzerinde f'ye noktasal da yakınsar.*

> ***İspat.***
> *$\varepsilon > 0$ ve $x \in E$ verilsin. Düzgün yakınsaklık gereği yalnız ε'a bağlı bir $N = N(\varepsilon)$ vardır ve $n \geq N$ olan her n, her $y \in E$ için $| f_n(y) - f(y) | < \varepsilon$ sağlanır. Özel olarak $y = x$ için de sağlanır. Öyleyse noktasal yakınsaklık tanımındaki $N(\varepsilon, x)$ olarak bu N alınabilir; $f_n(x) \to f(x)$ olur. x keyfi olduğundan $f_n \to f$ (noktasal, E).* ■

Bu önermenin iki kullanışlı sonucu vardır. Birincisi: bir dizi düzgün yakınsıyorsa düzgün limiti, noktasal limitinden başka bir fonksiyon olamaz. İkincisi: bir dizi E üzerinde noktasal yakınsamıyorsa düzgün de yakınsamaz. Önermenin tersi doğru değildir; noktasal yakınsak bir dizi düzgün yakınsak olmayabilir (Örnek 2.2).

İki adımda düzgün yakınsaklık incelemesi

1. **Noktasal limiti bul.** Düzgün limit varsa noktasal limite eşittir; bu yüzden tek aday noktasal limit f'dir.
2. **Farkı x'ten bağımsız sınırla.** $| f_n(x) - f(x) |$ ifadesi, x içermeyen ve 0'a giden bir sayıyla üstten sınırlanabiliyorsa yakınsama düzgündür. Sınırlanamıyorsa tanımın olumsuzu (Önerme 2.2) denenir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.1 (Bütün Doğruda Düzgün Yakınsayan Bir Dizi). $E = \mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ ile tanımlı (f_n) dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm.
Noktasal limit. $x \in \mathbb{R}$ sabit olsun. Her n için $|\sin(nx)| \leq 1$ olduğundan

$$0 \leq \left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

olur. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ olduğundan sıkıştırma teoremi (bkz. Analiz 1) gereği $f_n(x) \to 0$'dır. Noktasal limit $f(x) = 0$ fonksiyonudur.
Düzgün yakınsaklık. $\varepsilon > 0$ verilsin. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $n \geq N$ için

$$|\, f_n(x) - 0 \,| = \frac{|\sin(nx)|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

olur. $\dfrac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$ olması için $N > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ yeter;

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$$

seçilir. Bu N yalnız ε'a bağlıdır ve $n \geq N$ olan her n, her $x \in \mathbb{R}$ için $|\, f_n(x) - 0 \,| < \varepsilon$ sağlanır. Öyleyse $f_n \rightrightarrows 0$ $(\mathbb{R})$. ■

2.2 Düzgün Yakınsamama

Bir dizinin düzgün yakınsamadığını göstermek için tanımın olumsuzu gerekir.

Önerme 2.2 (Düzgün Yakınsamamanın Sembolik İfadesi). *(f_n) dizisi E üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi ve $f : E \to \mathbb{R}$ olsun. (f_n) dizisinin E üzerinde f'ye düzgün yakınsamaması için gerek ve yeter koşul şudur: öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $N \in \mathbb{N}$ için*

$$n_N \geq N \qquad \text{ve} \qquad |\, f_{n_N}(x_N) - f(x_N) \,| \geq \varepsilon_0$$

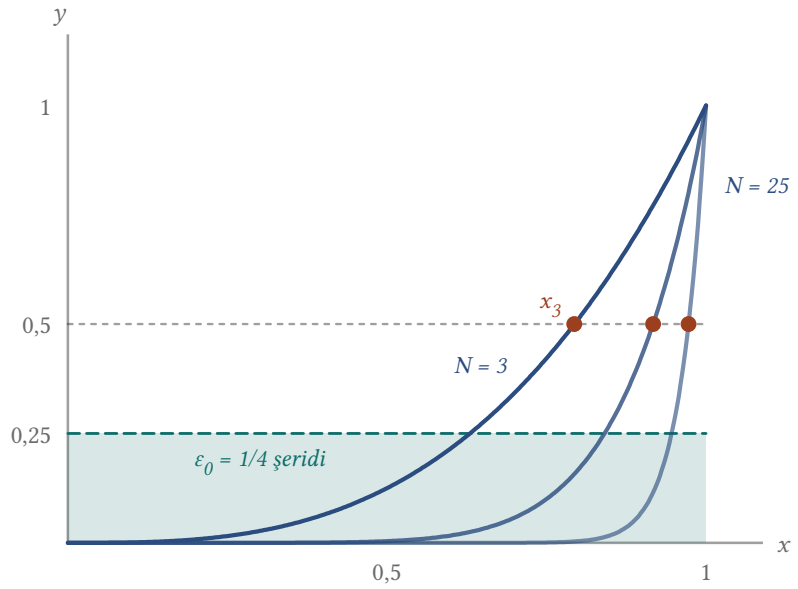
olacak biçimde bir $n_N \in \mathbb{N}$ ve bir $x_N \in E$ bulunur.

İspat.
Düzgün yakınsaklık tanımı şu önermedir: "her $\varepsilon > 0$ için öyle bir N vardır ki her $n \geq N$ ve her $x \in E$ için $|\, f_n(x) - f(x) \,| < \varepsilon$ olur." Bir önermenin olumsuzu alınırken "her" ile "vardır" yer değiştirir ve sondaki koşul olumsuzlanır: "öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her N için $|\, f_n(x) - f(x) \,| \geq \varepsilon_0$ olacak biçimde bir $n \geq N$ ve bir $x \in E$ bulunur." Bulunan n ve x, N'ye bağlı olduklarından n_N ve x_N ile gösterilir. ■

Noktasal yakınsamamada (Önerme 1.1) kötü davranan **tek bir** x_0 noktası bulmak gerekiyordu. Burada ise x_N noktası N ile birlikte değişebilir: her N için, o anda hâlâ "geride kalmış" bir nokta göstermek yeterlidir.

Örnek 2.2 (Kuvvet Dizisi Birim Aralıkta Düzgün Yakınsamaz). $E = [0, 1]$ üzerinde $f_n(x) = x^n$ ile tanımlı (f_n) dizisinin noktasal limitine düzgün yakınsamadığını gösteriniz.

Çözüm.



Şekil 2.2: $y = x^N$ eğrileri ($N = 3, 8, 25$) ve noktasal limitin çevresindeki $\varepsilon_0 = 1/4$ şeridi. Her eğri $x_N = 2^{-1/N}$ noktasında $1/2$ yüksekliğine ulaşır ve şeridin dışına çıkar.

Örnek 1.1 gereği noktasal limit, $0 \le x < 1$ için $f(x) = 0$ ve $f(1) = 1$ olan fonksiyondur.
$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4}$ alalım. $N \in \mathbb{N}$ verilsin. $n_N = N$ ve

$$x_N = \frac{1}{\sqrt[N]{2}} \in [0, 1)$$

seçelim. $x_N < 1$ olduğundan $f(x_N) = 0$'dır ve

$$\mid f_N(x_N) - f(x_N) \mid = \left(\frac{1}{\sqrt[N]{2}}\right)^N = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

olur. Önerme 2.2 gereği (f_n) dizisi $[0, 1]$ üzerinde f'ye düzgün yakınsamaz.
Şekil olup biteni gösterir: N ne kadar büyük olursa olsun $y = x^N$ eğrisi, 1'e yeterince yakın bir noktada $\dfrac{1}{2}$ yüksekliğine ulaşır ve ε_0-şeridinin dışına çıkar. ■

Örnek 2.3 (Aynı Sonucun Çelişkiyle Elde Edilmesi). $f_n(x) = x^n$ dizisinin $[0, 1]$ üzerinde düzgün yakınsamadığını, düzgün yakınsadığını varsayıp çelişkiye ulaşarak gösteriniz.

Çözüm.
(f_n) dizisinin $[0, 1]$ üzerinde noktasal limiti f'ye düzgün yakınsadığını varsayalım. Tanımı $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ için uygulayalım: öyle bir N_1 vardır ki $n \ge N_1$ olan her n ve her $x \in [0, 1]$ için $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \dfrac{1}{2}$ olur.
Özel olarak $n = N_1$ ve $x \in [0, 1)$ için $f(x) = 0$ olduğundan

$$x^{N_1} < \frac{1}{2} \qquad (0 \le x < 1) \tag{1}$$

elde edilir. Öte yandan $x \mapsto x^{N_1}$ fonksiyonu süreklidir ve

$$\lim_{x \to 1^-} x^{N_1} = 1^{N_1} = 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. (1) eşitsizliğinde $x \to 1^-$ limiti alınırsa limitlerde sıralama korunduğundan $1 \leq \frac{1}{2}$ çıkar. Bu bir çelişkidir. Öyleyse varsayım yanlıştır; dizi $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsamaz. ■

Örnek 2.4 (Sınırsız Kümede Düzgün Yakınsamayan Bir Dizi). $E = [0,+\infty)$ üzerinde $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ile tanımlı (f_n) dizisinin düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Örnek 1.4 gereği dizi $[0,+\infty)$ üzerinde $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsar; düzgün limit varsa o da 0 olmalıdır.
$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$ alalım. $N \in \mathbb{N}$ verilsin. $n_N = 2N \geq N$ ve $x_N = N \in [0,+\infty)$ seçelim:

$$| f_{n_N}(x_N) - f(x_N) | = \left| \frac{x_N}{n_N} - 0 \right| = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0.$$

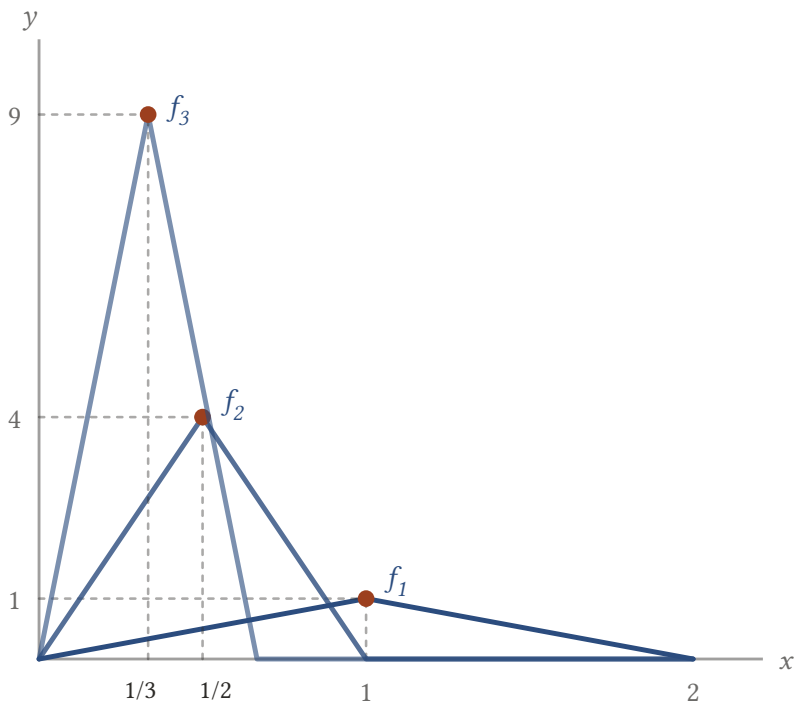
Önerme 2.2 gereği dizi $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsamaz. Geometrik olarak: $y = \frac{x}{n}$ doğrusu ne kadar yatık olursa olsun, yeterince sağa gidildiğinde yatay eksenden istenildiği kadar uzaklaşır. ■

Örnek 2.5 (Yükselen ve Daralan Çadırlar). $[0,2]$ üzerinde

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -n^3 x + 2n^2, & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ile tanımlı (f_n) dizisinin noktasal ve düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.



Şekil 2.3: Çadır fonksiyonları f_1, f_2, f_3: taban $[0,\, 2/n]$ aralığına daralırken tepe yüksekliği n^2 ile büyür. Her noktada değerler sonunda 0 olur, ama grafikler sıfır fonksiyonuna yaklaşmaz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Her f_n'nin grafiği, tabanı $\left[0, \frac{2}{n}\right]$ aralığı ve tepe noktası $\left(\frac{1}{n}, n^2\right)$ olan bir üçgendir; üçgenin dışında $f_n = 0$'dır.
Noktasal limit. $x = 0$ için her n'de $f_n(0) = 0$'dır. $0 < x \leq 2$ olsun. Arşimet özelliğine göre $N_x > \frac{2}{x}$ olan bir $N_x \in \mathbb{N}$ vardır. $n \geq N_x$ ise

$$\frac{2}{n} \leq \frac{2}{N_x} < x \leq 2$$

olur; yani x üçüncü parçadadır ve $f_n(x) = 0$'dır. Öyleyse $\left(f_n(x) \right)$ dizisi N_x'ten sonra sabit 0'dır ve $f_n(x) \to 0$. Sonuç: $f_n \to 0$ (noktasal, $[0, 2]$).
Düzgün yakınsaklık. $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ alalım. $N \in \mathbb{N}$ verilsin. $n_N = N$ ve

$$x_N = \frac{3}{2N} \in \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right] \subseteq [0, 2]$$

seçelim. x_N ikinci parçada olduğundan

$$\mid f_N(x_N) - 0 \mid = \left| -N^3 \cdot \frac{3}{2N} + 2N^2 \right| = 2N^2 - \frac{3}{2}N^2 = \frac{N^2}{2} \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

olur. Önerme 2.2 gereği dizi $[0, 2]$ üzerinde 0'a düzgün yakınsamaz.
Bu örnekte düzgün yakınsamama çok çarpıcıdır: her noktada değerler sonunda tam olarak 0 olduğu hâlde tepe yükseklikleri $n^2 \to +\infty$ olur. ■

2.3 Düzgün Yakınsaklık Kümeye Bağlıdır

Düzgün yakınsaklık yalnız diziye değil, üzerinde çalışılan kümeye de bağlıdır. Küme küçültülünce düzgün yakınsaklık bozulmaz.

Önerme 2.3 (Alt Kümeye Kısıtlama). *(f_n) dizisi E üzerinde f'ye düzgün yakınsıyorsa boş olmayan her $A \subseteq E$ alt kümesi üzerinde de f'ye düzgün yakınsar.*

İspat.
$\varepsilon > 0$ verilsin. E üzerindeki düzgün yakınsaklıktan gelen $N(\varepsilon)$ sayısı için $n \geq N$ olan her n ve her $x \in E$ için $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon$ olur. $A \subseteq E$ olduğundan aynı eşitsizlik her $x \in A$ için de sağlanır. Aynı N, A üzerinde de iş görür. ■

Ters yönde ise bir sürpriz vardır: bir dizi büyük kümede düzgün yakınsamadığı hâlde daha küçük bir kümede düzgün yakınsayabilir.

Örnek 2.6 (Kuvvet Dizisi Küçük Aralıkta Düzgün Yakınsar). $0 < b < 1$ olsun. $f_n(x) = x^n$ dizisinin $[0, b]$ aralığında $f(x) = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm.
$[0, b] \subseteq [0, 1)$ olduğundan noktasal limit bu aralıkta $f(x) = 0$'dır.
$0 < \varepsilon < 1$ verilsin. $x \mapsto x^n$ fonksiyonu $[0, b]$ üzerinde artan olduğundan her $x \in [0, b]$ için

$$\mid x^n - 0 \mid = x^n \leq b^n$$

olur. Sağdaki sayı x'ten bağımsızdır. $b^n < \varepsilon$ eşitsizliği, Örnek 1.1 çözümündeki hesapla, $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln b}$ olduğunda sağlanır. Dolayısıyla

$$N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln b} \right\rfloor + 1$$

seçilirse $n \geq N$ olan her n ve her $x \in [0, b]$ için $\mid x^n - 0 \mid \leq b^n < \varepsilon$ olur. ($\varepsilon \geq 1$ için $N = 1$ yeter.) Öyleyse $x^n \rightrightarrows 0$ ($[0, b]$).

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu sonuç Örnek 2.2 ile çelişmez. Orada şeritten çıkan $x_N = 2^{-1/N}$ noktaları 1'e yaklaşıyordu; $[0, b]$ aralığı 1'in bir komşuluğunu dışarıda bıraktığından bu noktalar bir süre sonra aralığın dışında kalır. ■

2.4 Düzgün Limitin Cebirsel Özellikleri

Toplam ve skaler kat düzgün yakınsaklığı her zaman korur. Çarpımda ise ek bir koşul gerekir.

Teorem 2.1 (Düzgün Limitin Cebirsel Özellikleri). *$E \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme, $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun ve E üzerinde $f_n \rightrightarrows f$, $g_n \rightrightarrows g$ olsun. O zaman:*

(i) $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$ *(E),*

(ii) $\alpha f_n \rightrightarrows \alpha f$ *(E),*

(iii) ayrıca f ve g fonksiyonları E üzerinde sınırlıysa $f_n g_n \rightrightarrows fg$ (E).

İspat.
(i) *$\varepsilon > 0$ verilsin. $f_n \rightrightarrows f$ olduğundan öyle bir $N_1 = N_1(\varepsilon)$ vardır ki $n \geq N_1$ ve her $x \in E$ için $| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $g_n \rightrightarrows g$ olduğundan öyle bir $N_2 = N_2(\varepsilon)$ vardır ki $n \geq N_2$ ve her $x \in E$ için $| g_n(x) - g(x) | < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ yalnız ε'a bağlıdır ve $n \geq N$, $x \in E$ için*

$$| (f_n + g_n)(x) - (f + g)(x) | \leq | f_n(x) - f(x) | + | g_n(x) - g(x) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur.
(ii) *$\alpha = 0$ ise iddia açıktır: her iki yan sıfır fonksiyonudur. $\alpha \neq 0$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $f_n \rightrightarrows f$ olduğundan öyle bir N vardır ki $n \geq N$ ve her $x \in E$ için $| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{| \alpha |}$ olur. Bu n ve x'ler için*

$$| \alpha f_n(x) - \alpha f(x) | = | \alpha | \, | f_n(x) - f(x) | < | \alpha | \cdot \frac{\varepsilon}{| \alpha |} = \varepsilon.$$

(iii) *f ve g sınırlı olduğundan öyle $M_f, M_g > 0$ sayıları vardır ki her $x \in E$ için $| f(x) | \leq M_f$ ve $| g(x) | \leq M_g$ olur.*
Adım 1: *(g_n)* bir yerden sonra ortak bir sayıyla sınırlıdır. *$g_n \rightrightarrows g$ tanımını $\varepsilon = 1$ için uygulayalım: öyle bir N_0 vardır ki $n \geq N_0$ ve her $x \in E$ için $| g_n(x) - g(x) | < 1$ olur. Bu n ve x'ler için*

$$| g_n(x) | \leq | g_n(x) - g(x) | + | g(x) | < 1 + M_g.$$

Adım 2: Farkı iki parçaya ayıralım. *Araya $f(x)\, g_n(x)$ terimini ekleyip çıkaralım:*

$$f_n g_n - fg = (f_n - f)\, g_n + f\, (g_n - g).$$

$n \geq N_0$ ve $x \in E$ için üçgen eşitsizliği ve Adım 1 ile

$$| f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x) | \leq (1 + M_g) | f_n(x) - f(x) | + M_f | g_n(x) - g(x) | \tag{2}$$

bulunur.
Adım 3: *N* seçimi. *$\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle N_1 ve N_2 vardır ki $n \geq N_1$ ve her $x \in E$ için $| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2(1 + M_g)}$, $n \geq N_2$ ve her $x \in E$ için $| g_n(x) - g(x) | < \frac{\varepsilon}{2M_f}$ olur. $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$ alalım.*
$n \geq N$ ve $x \in E$ için (2) eşitsizliği

$$| f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x) | < (1 + M_g) \cdot \frac{\varepsilon}{2(1 + M_g)} + M_f \cdot \frac{\varepsilon}{2M_f} = \varepsilon$$

verir. N yalnız ε'a bağlı olduğundan $f_n g_n \rightrightarrows fg$ (E). ■

(iii) şıkkındaki sınırlılık koşulu atılamaz.

Örnek 2.7 (Sınırlılık Olmadan Çarpım Düzgün Yakınsamayabilir). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = g_n(x) = x + \frac{1}{n}$ dizilerinin düzgün yakınsadığını, ama $f_n g_n$ çarpım dizisinin düzgün yakınsamadığını gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
f_n düzgün yakınsar. $f(x)=x$ alalım. Her $x\in\mathbb{R}$ için $|\ f_n(x)-f(x)\ |=\dfrac{1}{n}$'dir. $\varepsilon>0$ verilince $N=\left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$ için $n\geq N$ ve her x için $|\ f_n(x)-x\ |=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ olur: $f_n\rightrightarrows f$ $(\mathbb{R})$. Aynı şey g_n için de geçerlidir. Limit fonksiyonu $f(x)=x$, $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı değildir.
Çarpım düzgün yakınsamaz. Çarpım dizisi

$$f_n(x)\,g_n(x)=\left(x+\frac{1}{n}\right)^2=x^2+\frac{2x}{n}+\frac{1}{n^2}$$

olur ve noktasal limiti x^2'dir. Fark

$$\left|f_n(x)g_n(x)-x^2\right|=\left|\frac{2x}{n}+\frac{1}{n^2}\right|$$

olur. $\varepsilon_0=1$ alalım; $N\in\mathbb{N}$ verilince $n_N=N$ ve $x_N=N$ seçelim:

$$\left|\frac{2N}{N}+\frac{1}{N^2}\right|=2+\frac{1}{N^2}>1=\varepsilon_0.$$

Önerme 2.2 gereği f_ng_n dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde x^2'ye düzgün yakınsamaz. ■

2.5 Alıştırmalar

Alıştırma 2.1 (Tanımla Düzgün Yakınsaklık). $a>0$ olmak üzere $[a,+\infty)$ üzerinde $f_n(x)=\dfrac{7n^3x}{3+n^3x^2}$ dizisinin noktasal limitine düzgün yakınsadığını tanımı kullanarak gösteriniz.

Çözüm.
Alıştırma 1.5 gereği noktasal limit $f(x)=\dfrac{7}{x}$'tir. Farkı hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\left|\frac{7n^3x}{3+n^3x^2}-\frac{7}{x}\right|&=\left|\frac{7n^3x^2-7(3+n^3x^2)}{x\,(3+n^3x^2)}\right|\\&=\frac{21}{x\,(3+n^3x^2)}.\end{aligned}$$

$x\geq a>0$ olduğundan $\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{1}{a}$ ve $3+n^3x^2>n^3x^2\geq n^3a^2$ olur. Paydayı küçülterek

$$\frac{21}{x\,(3+n^3x^2)}<\frac{21}{a\cdot n^3a^2}=\frac{21}{n^3a^3}\leq\frac{21}{n\,a^3}$$

elde edilir. Sağdaki sayı x'ten bağımsızdır. $\varepsilon>0$ verilsin; $\dfrac{21}{na^3}<\varepsilon$ olması için $n>\dfrac{21}{a^3\varepsilon}$ yeter.

$$N(\varepsilon)=\left\lfloor\frac{21}{a^3\varepsilon}\right\rfloor+1$$

seçilirse $n\geq N$ ve her $x\in[a,+\infty)$ için $\left|f_n(x)-\dfrac{7}{x}\right|<\varepsilon$ olur. Öyleyse $f_n\rightrightarrows\dfrac{7}{x}$ $([a,+\infty))$. ■

Alıştırma 2.2 (Tepesi Alçalmayan Dizi Düzgün Yakınsamaz). $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ dizisinin $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsamadığını gösteriniz.

Çözüm.
Örnek 1.2 gereği noktasal limit $f(x)=0$'dır. $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}$ alalım. $N\in\mathbb{N}$ verilsin; $n_N=N$ ve $x_N=\dfrac{1}{N}\in[0,1]$ seçelim:

$$\mid f_N(x_N) - 0 \mid = \frac{2N \cdot \frac{1}{N}}{1 + N^2 \cdot \frac{1}{N^2}} = \frac{2}{2} = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

Önerme 2.2 gereği dizi $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsamaz. ■

Alıştırma 2.3 (Aynı Dizi Sıfırdan Uzakta Düzgün Yakınsar). $0 < a < 1$ olsun. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ dizisinin $[a,1]$ üzerinde 0'a düzgün yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm.
$x \in [a,1]$ için Örnek 1.2 çözümündeki eşitsizlik ve $x \geq a$ ile

$$\mid f_n(x) - 0 \mid < \frac{2}{nx} \leq \frac{2}{na}$$

olur. Sağdaki sayı x'ten bağımsızdır. $\varepsilon > 0$ verilsin; $N(\varepsilon) = \left\lfloor \dfrac{2}{a\varepsilon} \right\rfloor + 1$ seçilirse $n \geq N$ için $\dfrac{2}{na} < \varepsilon$ olur. Öyleyse her $x \in [a,1]$ ve $n \geq N$ için $\mid f_n(x) \mid < \varepsilon$'dur: $f_n \rightrightarrows 0$ ($[a,1]$).
Alıştırma 2.2 ile karşılaştıralım: düzgün yakınsaklığı bozan tepe noktaları $x = \dfrac{1}{n}$ sıfıra yaklaşır; $[a,1]$ aralığı sıfırın bir komşuluğunu dışarıda bıraktığından tepeler bir süre sonra aralığın dışında kalır. ■

Alıştırma 2.4 (Mutlak Değere Düzgün Yaklaşım). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ dizisinin $f(x) = \mid x \mid$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm.
$u, v \geq 0$ için $\sqrt{u+v} \leq \sqrt{u} + \sqrt{v}$ eşitsizliği geçerlidir; çünkü iki yanın karesi alınınca $u + v \leq u + v + 2\sqrt{uv}$ çıkar. $u = x^2$ ve $v = \dfrac{1}{n^2}$ için

$$\mid x \mid = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \leq \mid x \mid + \frac{1}{n}$$

olur. Buradan her $x \in \mathbb{R}$ için

$$0 \leq f_n(x) - \mid x \mid \leq \frac{1}{n}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ verilince $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ için $n \geq N$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\Big|\, f_n(x) - \mid x \mid \,\Big| \leq \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ olur. Öyleyse $f_n \rightrightarrows \mid x \mid$ ($\mathbb{R}$).
Her f_n bütün $\mathbb{R}$'de türevlenebilirdir, ama düzgün limit $\mid x \mid$, $x = 0$ noktasında türevlenebilir değildir. Düzgün yakınsaklık türevlenebilirliği tek başına korumaz; bu konuya Düzgün Yakınsaklık ve Türev bölümünde döneceğiz. ■

Alıştırma 2.5 (Sıfır Yakınında Bozulan Düzgünlük). $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ dizisinin $[0,1]$ üzerinde noktasal limitine düzgün yakınsamadığını gösteriniz.

Çözüm.
Alıştırma 1.2 gereği noktasal limit, $f(0) = 0$ ve $0 < x \leq 1$ için $f(x) = 1$ olan fonksiyondur. $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{4}$ alalım. $N \in \mathbb{N}$ verilsin; $n_N = N$ ve $x_N = \dfrac{1}{N} \in (0,1]$ seçelim. $f(x_N) = 1$ olduğundan

$$\mid f_N(x_N) - f(x_N) \mid = \left| \frac{N \cdot \frac{1}{N}}{1 + N \cdot \frac{1}{N}} - 1 \right| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

olur. Önerme 2.2 gereği dizi $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsamaz. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 2.6 (Sonlu Kümede İki Yakınsaklık Çakışır). $E = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ sonlu bir küme olsun. E üzerinde noktasal yakınsak her fonksiyon dizisinin düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $f_n \to f$ (noktasal, E) olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Her $i \in \{1, ..., k\}$ için noktasal yakınsaklık bir $N_i = N(\varepsilon, x_i)$ sayısı verir: $n \geq N_i$ için $\mid f_n(x_i) - f(x_i) \mid < \varepsilon$ olur.
>
> $$N = \max\{N_1, N_2, ..., N_k\}$$
>
> alalım. Sonlu sayıda doğal sayının maksimumu vardır; bu yüzden N iyi tanımlıdır ve yalnız ε'a bağlıdır. $n \geq N$ ise her i için $n \geq N_i$ olduğundan $\mid f_n(x_i) - f(x_i) \mid < \varepsilon$ sağlanır. Öyleyse $f_n \rightrightarrows f$ (E).
> Sonsuz kümede bu akıl yürütme çöker: sonsuz çoklukta $N(\varepsilon, x)$ sayısının bir üst sınırı olmayabilir. Düzgün yakınsaklık tam olarak bu üst sınırın var olmasını ister. ■

Tanımla çalışmak her seferinde uygun bir N ya da uygun x_N noktaları bulmayı gerektirir. Düzgün Yakınsaklık Ölçütleri bölümünde bu işi kolaylaştıran ölçütleri, özellikle supremum ölçütünü ve Cauchy kriterini kuruyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. Düzgün Yakınsaklık Ölçütleri

Düzgün Yakınsaklık bölümünde her örnekte tanıma geri dönüp uygun bir $N(\varepsilon)$ ya da uygun x_N noktaları aradık. Bu bölümde aynı işi daha az emekle yapan dört ölçüt kuruyoruz. İlk ikisi tek yönlüdür: biri düzgün yakınsaklığı, öbürü düzgün yakınsamamayı göstermeye yarar. Üçüncüsü olan supremum ölçütü bir gerek ve yeter koşuldur ve uygulamada en çok kullanılan araçtır. Dördüncüsü olan Cauchy kriteri ise limit fonksiyonu bilinmeden de çalışır.

3.1 Sıfır Dizisiyle Sınırlama

En sık kullanılan fikir, $\mid f_n(x) - f(x) \mid$ farkını x içermeyen bir sayıyla sınırlamaktır.

Teorem 3.1 (Sıfır Dizisiyle Sınırlama Ölçütü). *(f_n) dizisi ve f fonksiyonu E üzerinde tanımlı olsun. Öyle bir (α_n) reel sayı dizisi bulunsun ki her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in E$ için*

$$\mid f_n(x) - f(x) \mid \leq \alpha_n \qquad \text{ve} \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

olsun. O zaman $f_n \rightrightarrows f$ (E).

> ***İspat.***
> *$\varepsilon > 0$ verilsin. $\alpha_n \to 0$ olduğundan öyle bir $N = N(\varepsilon)$ vardır ki $n \geq N$ için $\mid \alpha_n \mid < \varepsilon$ olur. Koşul gereği $\alpha_n \geq \mid f_n(x) - f(x) \mid \geq 0$ olduğundan $\mid \alpha_n \mid = \alpha_n$'dir. Öyleyse $n \geq N$ olan her n ve her $x \in E$ için*
>
> $$\mid f_n(x) - f(x) \mid \leq \alpha_n < \varepsilon$$
>
> *olur. (α_n) dizisi x'e bağlı olmadığından N de x'e bağlı değildir. Bu, düzgün yakınsaklığın tanımıdır.* ■

Koşulun her n yerine bir n_0'dan sonraki n'ler için sağlanması da yeter; ispatta N yerine $\max\{N, n_0\}$ alınır.

Örnek 3.1 (Sınırlama Ölçütüyle Kuvvet Dizisi). $f_n(x) = x^n$ dizisinin $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ aralığında düzgün yakınsadığını Teorem 3.1 ile gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Noktasal limit bu aralıkta $f(x) = 0$'dır. $x \mapsto x^n$ artan olduğundan her $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ ve her n için
>
> $$\mid x^n - 0 \mid = x^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n = \alpha_n$$
>
> olur. $\alpha_n = \dfrac{1}{2^n} \to 0$ olduğundan Teorem 3.1 gereği $x^n \rightrightarrows 0$ $\left(\left[0, \tfrac{1}{2}\right]\right)$. ■

3.2 Nokta Dizisiyle Düzgün Yakınsamama

Düzgün yakınsamamayı göstermek için E'den uygun noktalar seçmek yeterlidir.

Teorem 3.2 (Nokta Dizisi Testi). *(f_n) dizisi ve f fonksiyonu E üzerinde tanımlı olsun. Terimleri E'de olan öyle bir (x_n) dizisi bulunsun ki*

$$\big(\, f_n(x_n) - f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

sayı dizisi 0'a yakınsamasın. O zaman (f_n) dizisi E üzerinde f'ye düzgün yakınsamaz.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Karşıt tersini ispatlayalım: $f_n \rightrightarrows f$ (E) ise terimleri E'de olan her (x_n) dizisi için $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$ olur.
$\varepsilon > 0$ verilsin. Düzgün yakınsaklık gereği öyle bir N vardır ki $n \geq N$ olan her n ve her $x \in E$ için $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon$ olur. $x_n \in E$ olduğundan bu eşitsizlik özel olarak $x = x_n$ için de sağlanır: $n \geq N$ için

$$\mid f_n(x_n) - f(x_n) \mid < \varepsilon.$$

Bu, $f_n(x_n) - f(x_n) \to 0$ demektir. ■

Uygulamada (x_n) dizisi, f_n'nin f'den en çok ayrıldığı yere yerleştirilir: bir tepe noktasına ya da sorunlu bir uç noktanın yakınına.

Örnek 3.2 (Nokta Dizisi Testiyle Kuvvet Dizisi). $f_n(x) = x^n$ dizisinin $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsamadığını Teorem 3.2 ile gösteriniz.

Çözüm.
Noktasal limit, $[0,1)$ üzerinde $f = 0$ ve $f(1) = 1$'dir. Sorunlu nokta $x = 1$ olduğundan ona yaklaşan $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ dizisini seçelim; $x_n \in [0,1)$ olduğundan $f(x_n) = 0$'dır.

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \neq 0$$

olur (bkz. Analiz 1). Dizi 0'a yakınsamadığından Teorem 3.2 gereği (f_n), $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsamaz. ■

3.3 Supremum Ölçütü

Düzgün yakınsaklık tanımı, "$\mid f_n(x) - f(x) \mid$ farkı bütün x'ler için aynı anda küçük" der. Bütün x'ler üzerinden en büyük farkı tek bir sayıda toplarsak düzgün yakınsaklık bir sayı dizisinin limitine indirgenir. (f_n) ve f, E üzerinde tanımlı olsun. Her n için

$$d_n = \sup_{x \in E} \mid f_n(x) - f(x) \mid$$

yazalım. $\mid f_n - f \mid$ fonksiyonu E üzerinde sınırlı değilse $d_n = +\infty$ kabul edilir; böylece $d_n \in [0, +\infty]$ olur.

Teorem 3.3 (Supremum Ölçütü). *(f_n) dizisi ve f fonksiyonu $E \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı olsun. $f_n \rightrightarrows f$ (E) olması için gerek ve yeter koşul*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in E} \mid f_n(x) - f(x) \mid = 0$$

olmasıdır.

İspat.
($\Rightarrow$) *$f_n \rightrightarrows f$ (E) olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Tanımı $\dfrac{\varepsilon}{2}$ için uygulayalım: öyle bir N vardır ki $n \geq N$ olan her n ve her $x \in E$ için $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olur. Öyleyse $n \geq N$ için $\dfrac{\varepsilon}{2}$ sayısı $\{\mid f_n(x) - f(x) \mid : x \in E\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. Supremum en küçük üst sınır olduğundan*

$$d_n = \sup_{x \in E} \mid f_n(x) - f(x) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \qquad (n \geq N)$$

olur. Bu, $d_n \to 0$ demektir.
($\Leftarrow$) *$d_n \to 0$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle bir N vardır ki $n \geq N$ için $d_n < \varepsilon$ olur. Supremum bir üst sınır olduğundan her $x \in E$ için $\mid f_n(x) - f(x) \mid \leq d_n$'dir. Dolayısıyla $n \geq N$ olan her n ve her $x \in E$ için*

$$\mid f_n(x) - f(x) \mid \leq d_n < \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. N yalnız ε'a bağlıdır; $f_n \rightrightarrows f$ (E). ■

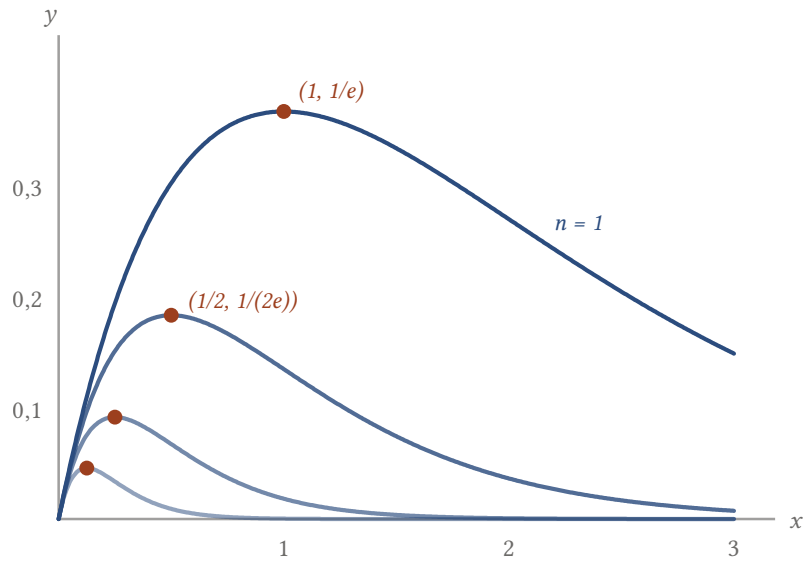
Ölçütün olumsuzu da aynı sıklıkta kullanılır: (d_n) dizisi 0'a yakınsamıyorsa (f_n) dizisi E üzerinde f'ye düzgün yakınsamaz. Supremumun E kümesi üzerinden alındığına ve sonucun yalnız n'ye bağlı bir sayı dizisi olduğuna dikkat edelim; küme değişirse d_n de değişir.

Dört adımda supremum ölçütü

1. **Noktasal limit.** $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ bulunur.
2. **Fark fonksiyonu.** $g_n(x) = \mid f_n(x) - f(x) \mid$ yazılır.
3. **Supremum.** $d_n = \sup_{x\in E} g_n(x)$ hesaplanır. g_n türevlenebilirse $g_n'(x) = 0$ denkleminin kökleri ve E'nin uç noktaları incelenir; g_n monotonsa supremum bir uçtadır (uç kümeye ait olmayabilir, o zaman supremum o uçtaki limittir).
4. **Limit.** $d_n \to 0$ ise yakınsama düzgündür; değilse düzgün değildir.

Örnek 3.3 (Türevle Supremum Hesabı). $E = [0, +\infty)$ üzerinde $f_n(x) = xe^{-nx}$ ile tanımlı (f_n) dizisi düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm.



Şekil 3.1: $f_n(x) = xe^{-nx}$ dizisinin n = 1, 2, 4, 8 terimleri. Tepe noktası $(1/n,\ 1/(en))$ hem sola kayar hem alçalır; en büyük fark 0'a gittiğinden yakınsama düzgündür.

Adım 1: Noktasal limit. $x = 0$ için her n'de $f_n(0) = 0$'dır. $x > 0$ için $e^x > 1$, yani $0 < \dfrac{1}{e^x} < 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} xe^{-nx} = x \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right)^n = x \cdot 0 = 0$$

olur. Noktasal limit $f(x) = 0$'dır.
Adım 2: Fark fonksiyonu. $x \geq 0$ için $g_n(x) = \mid xe^{-nx} - 0 \mid = xe^{-nx}$.
Adım 3: Supremum. g_n türevlenebilirdir ve

$$g_n'(x) = e^{-nx} - nxe^{-nx} = (1 - nx)\, e^{-nx}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $e^{-nx} > 0$ olduğundan $g_n'(x) = 0$ yalnız $x = \dfrac{1}{n}$ için sağlanır. $0 \le x < \dfrac{1}{n}$ için $g_n' > 0$, $x > \dfrac{1}{n}$ için $g_n' < 0$'dır:

Tablo 3.1: $g_n(x) = xe^{-nx}$ fonksiyonunun değişimi

x	0		$\dfrac{1}{n}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{en}$	$\searrow$	

g_n önce artıp sonra azaldığından en büyük değerini $x = \dfrac{1}{n}$ noktasında alır:

$$d_n = \sup_{x \ge 0} xe^{-nx} = \frac{1}{n}\, e^{-n\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{en}.$$

Adım 4: Limit. $d_n = \dfrac{1}{en} \to 0$ olduğundan Teorem 3.3 gereği $xe^{-nx} \rightrightarrows 0$ ($[0, +\infty)$).
Örnek 1.2 ile karşılaştıralım: orada tepeler sola kayıyor ama alçalmıyordu; burada hem sola kayıyor hem de $\dfrac{1}{en}$ yüksekliğiyle alçalıyor. ■

Örnek 3.4 (Supremum Ölçütüyle Kuvvet Dizisi). $f_n(x) = x^n$ dizisinin $[0, 1]$ üzerinde düzgün yakınsamadığını supremum ölçütüyle gösteriniz.

Çözüm.
Noktasal limit, $[0, 1)$ üzerinde $f = 0$ ve $f(1) = 1$'dir. Fark fonksiyonu

$$| f_n(x) - f(x) | = \begin{cases} x^n, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

olur. $x \mapsto x^n$ fonksiyonu $[0, 1)$ üzerinde artandır ve $x \to 1^-$ iken $x^n \to 1$ olur. Öyleyse farkın aldığı değerler $[0, 1)$ aralığını doldurur ve

$$d_n = \sup_{x \in [0,1]} | f_n(x) - f(x) | = \sup_{0 \le x < 1} x^n = 1$$

bulunur. Bu supremum hiçbir noktada alınmaz; yine de supremumdur. $d_n = 1$ sabit dizisi 0'a yakınsamadığından Teorem 3.3 gereği (f_n) dizisi $[0, 1]$ üzerinde düzgün yakınsamaz. ■

3.4 Düzgün Yakınsaklık için Cauchy Kriteri

Şimdiye kadarki bütün ölçütler limit fonksiyonu f'yi bilmeyi gerektiriyordu. Sayı dizilerinde Cauchy ölçütü, limiti bilmeden yakınsaklığı göstermeye yarar (bkz. Analiz 1). Aynı fikrin düzgün sürümünü kuralım.

Tanım 3.1 (Düzgün Cauchy Dizisi). (f_n) dizisi $E \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa ki $n, m \ge N$ olan her n, m ve her $x \in E$ için

$$| f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon$$

olsun, o zaman (f_n) dizisine E üzerinde **düzgün Cauchy dizisi** denir.

Yani yeterince ileri gidildiğinde dizinin terimleri, E'nin bütün noktalarında aynı anda birbirine yakındır. Tanımda limit fonksiyonu hiç geçmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 3.4 (Düzgün Yakınsaklık için Cauchy Kriteri). *$E \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir (f_n) fonksiyon dizisinin E üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul, E üzerinde düzgün Cauchy dizisi olmasıdır.*

İspat.
(⇒) *$f_n \rightrightarrows f$ (E) olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle bir N vardır ki $n \geq N$ olan her n ve her $x \in E$ için $| f_n(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Aynı eşitsizlik $m \geq N$ için de geçerlidir. Öyleyse $n, m \geq N$ ve $x \in E$ için araya $f(x)$ ekleyip çıkararak*

$$\begin{aligned} | f_n(x) - f_m(x) | &= \left| \left(f_n(x) - f(x) \right) + \left(f(x) - f_m(x) \right) \right| \\ &\leq | f_n(x) - f(x) | + | f_m(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. (f_n) düzgün Cauchy dizisidir.
(⇐) *(f_n), E üzerinde düzgün Cauchy dizisi olsun.*
Adım 1: Limit adayı. *$x \in E$ sabit olsun. Düzgün Cauchy koşulu özel olarak bu x için $\left(f_n(x) \right)$ sayı dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu söyler. $\mathbb{R}$'de her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan bu dizinin bir limiti vardır; ona $f(x)$ diyelim. Böylece bir $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlanır ve $f_n \to f$ (noktasal, E) olur.*
Adım 2: Yakınsama düzgündür. *$\varepsilon > 0$ verilsin. Düzgün Cauchy koşulu gereği öyle bir $N = N(\varepsilon)$ vardır ki $n, m \geq N$ ve her $x \in E$ için*

$$| f_n(x) - f_m(x) | < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

olur. $n \geq N$ ve $x \in E$ sabitlensin. (1) eşitsizliği $m \geq N$ olan her m için geçerlidir. $m \to \infty$ iken $f_m(x) \to f(x)$ olduğundan, mutlak değerin sürekliliği ile $| f_n(x) - f_m(x) | \to | f_n(x) - f(x) |$ olur. Limitte kesin olmayan eşitsizlik korunduğundan

$$| f_n(x) - f(x) | \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

bulunur. Bu, $n \geq N$ olan her n ve her $x \in E$ için geçerlidir ve N yalnız ε'a bağlıdır. Öyleyse $f_n \rightrightarrows f$ (E). ■

Kriterin olumsuzu, düzgün yakınsamamayı limit fonksiyonuna başvurmadan gösterir.

Sonuç 3.1 (Cauchy Kriterinin Olumsuzu). *(f_n) dizisinin E üzerinde düzgün yakınsak olmaması için gerek ve yeter koşul şudur: öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $N \in \mathbb{N}$ için*

$$n_N, m_N \geq N \qquad \text{ve} \qquad | f_{n_N}(x_N) - f_{m_N}(x_N) | \geq \varepsilon_0$$

olacak biçimde $n_N, m_N \in \mathbb{N}$ ve $x_N \in E$ bulunur.

İspat.
Teorem 3.4 gereği düzgün yakınsak olmamak, düzgün Cauchy dizisi olmamaya denktir. Tanım 3.1 tanımının olumsuzu, "her" ile "vardır" yer değiştirilip son eşitsizlik olumsuzlanarak yazılır ve tam olarak ifadedeki koşulu verir. ■

Örnek 3.5 (Cauchy Kriteriyle Düzgün Yakınsaklık). $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ dizisinin $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu Cauchy kriteriyle gösteriniz.

Çözüm.
$\varepsilon > 0$ verilsin. $n, m \geq N$ ve $x \in [0,1]$ olsun; genelliği bozmadan $n \leq m$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned} | f_n(x) - f_m(x) | &= \left| \frac{x}{n} - \frac{x}{m} \right| = x \cdot \frac{m-n}{nm} \\ &\leq 1 \cdot \frac{m}{nm} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $N(\varepsilon) = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ seçilirse $\frac{1}{N} < \varepsilon$ olur ve $n, m \geq N$, $x \in [0,1]$ için $| f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon$ sağlanır. (f_n) dizisi $[0,1]$ üzerinde düzgün Cauchy dizisidir; Teorem 3.4 gereği düzgün yakınsaktır. ■

Örnek 3.6 (Cauchy Kriteriyle Düzgün Yakınsamama). $f_n(x) = \frac{x}{n}$ dizisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olmadığını Cauchy kriteriyle gösteriniz.

Çözüm.
$\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ alalım. $N \in \mathbb{N}$ verilsin; $n_N = 2N$, $m_N = 4N$ ve $x_N = 2N \in \mathbb{R}$ seçelim. $n_N, m_N \geq N$'dir ve

$$| f_{n_N}(x_N) - f_{m_N}(x_N) | = \left| \frac{2N}{2N} - \frac{2N}{4N} \right| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

olur. Sonuç 3.1 gereği dizi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. ■

Örnek 3.7 (Logaritmalı Bir Dizi). $I = (0, +\infty)$ üzerinde $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}$ ile tanımlı dizinin I üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$\varepsilon_0 = \ln \sqrt{2} > 0$ alalım. $N \in \mathbb{N}$ verilsin; $n_N = N$, $m_N = 2N$ ve $x_N = N \in I$ seçelim.

$$f_{n_N}(x_N) = \frac{N}{N} \ln \frac{N}{N} = 1 \cdot \ln 1 = 0, \qquad f_{m_N}(x_N) = \frac{N}{2N} \ln \frac{N}{2N} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2$$

olduğundan

$$| f_{n_N}(x_N) - f_{m_N}(x_N) | = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2} = \varepsilon_0$$

olur. Sonuç 3.1 gereği dizi I üzerinde düzgün yakınsak değildir. Bu sonuca ulaşırken dizinin noktasal limitini hesaplamaya gerek kalmadı. ■

3.5 Alıştırmalar

Alıştırma 3.1 (Rasyonel Bir Dizide Supremum). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$ dizisinin düzgün yakınsaklığını supremum ölçütüyle inceleyiniz.

Çözüm.
Noktasal limit. $x = 0$ için $f_n(0) = 0$. $x \neq 0$ için $1 + nx^2 > nx^2$ olduğundan $| f_n(x) | \leq \frac{| x |}{nx^2} = \frac{1}{n \mid x \mid} \to 0$. Noktasal limit $f = 0$'dır.
Supremum. f_n tek fonksiyondur; $| f_n(x) | = f_n(| x |)$ olduğundan supremumu $x \geq 0$ üzerinde aramak yeter. $x \geq 0$ için

$$f_n'(x) = \frac{(1 + nx^2) - x \cdot 2nx}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$$

olur. $f_n'(x) = 0$ yalnız $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ için sağlanır; bu noktanın solunda $f_n' > 0$, sağında $f_n' < 0$'dır. En büyük değer

$$d_n = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Limit. $d_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$ olduğundan Teorem 3.3 gereği $f_n \rightrightarrows 0$ $(\mathbb{R})$. ■

Alıştırma 3.2 (Yükselen Tepeli Üstel Dizi). $[0,1]$ üzerinde $f_n(x) = nx\,e^{-nx^2}$ dizisinin düzgün yakınsaklığını inceleyiniz.

Çözüm.
Noktasal limit. $x = 0$ için $f_n(0) = 0$. $0 < x \le 1$ için $q = e^{-x^2} \in (0,1)$ yazılırsa $f_n(x) = x \cdot nq^n$ olur. $0 < q < 1$ için $nq^n \to 0$'dır: $a_n = nq^n$ dizisinde $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{n}\,q \to q < 1$ olduğundan oran testi gereği $\sum a_n$ yakınsaktır ve yakınsak serinin genel terimi 0'a gider. Dolayısıyla $f_n(x) \to 0$; noktasal limit $f = 0$'dır.
Supremum. $g_n(x) = nx\,e^{-nx^2}$ için

$$g_n'(x) = ne^{-nx^2} + nx \cdot (-2nx)\,e^{-nx^2} = n\,(1 - 2nx^2)\,e^{-nx^2}$$

olur. $g_n'(x) = 0$ denkleminin $[0,1]$'deki kökü $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$'dir; solunda türev pozitif, sağında negatiftir. Dolayısıyla

$$d_n = g_n\!\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot e^{-n\cdot\frac{1}{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-1/2} = \sqrt{\frac{n}{2e}}.$$

Limit. $d_n = \sqrt{\dfrac{n}{2e}} \to +\infty$ olur; $d_n \to 0$ değildir. Teorem 3.3 gereği dizi $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsamaz. ■

Alıştırma 3.3 (Uçta Sönen Kuvvet Dizisi). $[0,1]$ üzerinde $f_n(x) = x^n(1-x)$ dizisinin düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Noktasal limit. $0 \le x < 1$ için $x^n \to 0$ olduğundan $f_n(x) \to 0$. $x = 1$ için $f_n(1) = 1 \cdot 0 = 0$. Noktasal limit $f = 0$'dır.
Supremum. $g_n(x) = x^n - x^{n+1}$ için

$$g_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}\,\big(\,n - (n+1)x\,\big)$$

olur. $(0,1)$ içindeki tek kök $x = \dfrac{n}{n+1}$'dir; solunda türev pozitif, sağında negatiftir. Uçlarda $g_n(0) = g_n(1) = 0$ olduğundan

$$d_n = g_n\!\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$$

olur; çünkü $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \le 1$'dir.
Limit. $0 \le d_n \le \dfrac{1}{n+1} \to 0$ olduğundan sıkıştırma teoremiyle $d_n \to 0$ ve Teorem 3.3 gereği $f_n \rightrightarrows 0$ $([0,1])$.
x^n dizisinin düzgün yakınsaklığını $x = 1$ yakınındaki davranış bozuyordu; $(1-x)$ çarpanı tam o bölgede farkı söndürür. ■

Alıştırma 3.4 (Sınırlı Aralıkta Sınırlama). $f_n(x) = x + \dfrac{x^2}{n}$ dizisinin $[0,3]$ üzerinde $f(x) = x$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm.
Her $x \in [0,3]$ için

$$| f_n(x) - x | = \frac{x^2}{n} \leq \frac{9}{n} = \alpha_n$$

olur. $\alpha_n = \dfrac{9}{n} \to 0$ olduğundan Teorem 3.1 gereği $f_n \rightrightarrows f$ $([0,3])$. ■

Alıştırma 3.5 (Sınırsız Aralıkta Aynı Dizi). $f_n(x) = x + \dfrac{x^2}{n}$ dizisinin $[0,+\infty)$ üzerinde $f(x) = x$ fonksiyonuna düzgün yakınsamadığını gösteriniz.

Çözüm.
$x_n = \sqrt{n} \in [0,+\infty)$ dizisini seçelim:

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{(\sqrt{n})^2}{n} = 1.$$

$\big(f_n(x_n) - f(x_n) \big)$ dizisi sabit 1'dir ve 0'a yakınsamaz. Teorem 3.2 gereği dizi $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsamaz. ■

Alıştırma 3.6 (Sağa Kayan Tepe). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$ dizisinin noktasal limitini bulunuz ve yakınsamanın düzgün olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Noktasal limit. $x \in \mathbb{R}$ sabit olsun. $n \to \infty$ iken $(x-n)^2 \to +\infty$ olduğundan $f_n(x) \to 0$. Noktasal limit $f = 0$'dır.
Düzgün yakınsamama. $x_n = n$ dizisini seçelim:

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Bu dizi 0'a yakınsamadığından Teorem 3.2 gereği yakınsama $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün değildir. Her f_n'nin grafiği, tepesi $(n,1)$ noktasında olan aynı çan eğrisidir; n büyüdükçe eğri biçimini bozmadan sağa kayar. ■

Alıştırma 3.7 (Limiti Bilinmeyen Bir Dizi). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ dizisinin düzgün yakınsak olduğunu Cauchy kriteriyle gösteriniz.

Çözüm.
$n > m$ ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $|\sin(kx)| \leq 1$ olduğundan

$$| f_n(x) - f_m(x) | = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k^2} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

olur. $k \geq 2$ için $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ eşitsizliğini kullanalım. Toplam teleskopiktir:

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}.$$

$\varepsilon > 0$ verilsin ve $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ alalım. $n > m \geq N$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için

$$| f_n(x) - f_m(x) | < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; $n = m$ için fark 0'dır. (f_n) dizisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün Cauchy dizisidir ve Teorem 3.4 gereği düzgün yakınsaktır. Limit fonksiyonunun kapalı bir formülünü bilmeden düzgün yakınsaklığı elde ettik. ■

Elimizde artık düzgün yakınsaklığı sınamak için yeterli araç var. Düzgün Yakınsaklık, Sınırlılık ve Süreklilik bölümünde düzgün yakınsaklığın neden değerli olduğunu görüyoruz: düzgün limit, dizinin terimlerinin sınırlılığını ve sürekliliğini korur.

 CC BY-NC-SA 4.0

4. Düzgün Yakınsaklık, Sınırlılık ve Süreklilik

Noktasal yakınsaklık bölümünün sonunda üç kötü haber vermiştik: sınırlı fonksiyonların noktasal limiti sınırsız, sürekli fonksiyonların noktasal limiti süreksiz, integrallenebilir fonksiyonların noktasal limiti integrallenemez olabiliyordu. Düzgün yakınsaklık bu üç kusuru da giderir. Bu bölümde ilk ikisini ele alıyoruz: düzgün limit, terimlerin sınırlılığını ve sürekliliğini korur.
Bu sonuçların bir yan ürünü de vardır: terimleri sürekli olan bir dizinin noktasal limiti süreksizse yakınsama düzgün olamaz. Böylece süreklilik teoremi, düzgün yakınsamamayı göstermenin en kısa yolunu da verir. Bölümün sonunda ters yönde bir soruya yanıt arıyoruz: noktasal yakınsaklık hangi ek koşullar altında kendiliğinden düzgün olur? Dini teoremi bu soruya monoton diziler için yanıt verir.

4.1 Noktasal ve Düzgün Sınırlılık

Bir fonksiyon dizisi için "sınırlı" sözcüğü iki farklı anlamda kullanılır; farkı yine sınırın x'e bağlı olup olmaması belirler.

Tanım 4.1 (Düzgün Sınırlılık). (f_n) dizisi $E \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Her $x \in E$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$| f_n(x) | \leq M$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa (f_n) dizisine E üzerinde **düzgün sınırlıdır** denir.

Yani tek bir M sayısı, dizinin bütün terimlerini E'nin bütün noktalarında birden sınırlar; bütün grafikler $y = -M$ ile $y = M$ doğruları arasındaki yatay şeritte kalır. Örneğin $[0,1]$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ dizisi düzgün sınırlıdır: her $x \in [0,1]$ ve her $n \geq 1$ için

$$| f_n(x) | = \frac{| x |}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

olduğundan $M = 1$ alınabilir.

Tanım 4.2 (Noktasal Sınırlılık). (f_n) dizisi $E \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Her $x \in E$ için $\big(f_n(x) \big)_{n \in \mathbb{N}}$ sayı dizisi sınırlıysa, yani her $x \in E$ için

$$| f_n(x) | \leq K_x \qquad (\text{her } \ n \in \mathbb{N})$$

olacak biçimde bir $K_x > 0$ sayısı varsa (f_n) dizisine E üzerinde **noktasal sınırlıdır** denir.

Yani her noktanın kendi sınırı vardır, ama bu sınırlar noktadan noktaya büyüyebilir. Düzgün sınırlı her dizi noktasal sınırlıdır: her x için $K_x = M$ alınır. Tersi doğru değildir.

Örnek 4.1 (Noktasal Sınırlı Ama Düzgün Sınırlı Olmayan Dizi). $(0,1]$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{1}{nx}$ dizisinin noktasal sınırlı olduğunu, ama düzgün sınırlı olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Noktasal sınırlılık.** $x \in (0,1]$ sabit olsun. Her $n \geq 1$ için
>
> $$| f_n(x) | = \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{x} = K_x$$
>
> olur. Sınır $K_x = \dfrac{1}{x}$, x'e bağlıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Düzgün sınırlı değildir. Herhangi bir $M > 0$ verilsin. $n = 1$ ve $x_M = \dfrac{1}{M+1} \in (0,1]$ için

$$\mid f_1(x_M) \mid = \frac{1}{x_M} = M + 1 > M$$

olur. Hiçbir M sayısı bütün terimleri bütün noktalarda sınırlayamaz; dizi düzgün sınırlı değildir. ■

Üçüncü bir durum da vardır ve öbür ikisiyle karıştırılmamalıdır: dizinin **her terimi sınırlı bir fonksiyon** olabilir. Bu, her n için

$$\mid f_n(x) \mid \leq M_n \qquad (\text{her } \; x \in E)$$

olacak biçimde bir $M_n > 0$ bulunması demektir; burada sınır n'ye bağlıdır. Üç kavramı yan yana koyalım:

Tablo 4.1: Fonksiyon dizilerinde üç sınırlılık kavramı

Kavram	Sınır neye bağlı olabilir?
Her terim sınırlı	n'ye (M_n)
Noktasal sınırlı	x'e (K_x)
Düzgün sınırlı	hiçbirine (M)

Düzgün yakınsaklık, terimlerin sınırlılığını hem limite hem de dizinin bütününe taşır.

Teorem 4.1 (Düzgün Limit Sınırlılığı Korur). *$E \subseteq \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : E \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. $f_n \rightrightarrows f$ (E) ise:*

(i) f, E üzerinde sınırlıdır;

(ii) (f_n) dizisi E üzerinde düzgün sınırlıdır.

İspat.
Her n için f_n sınırlı olduğundan öyle $M_n > 0$ sayıları vardır ki her $x \in E$ için $\mid f_n(x) \mid \leq M_n$ olur.
(i) *Düzgün yakınsaklık tanımını $\varepsilon = 1$ için uygulayalım: öyle bir $N_1 \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq N_1$ olan her n ve her $x \in E$ için*

$$\mid f_n(x) - f(x) \mid < 1 \tag{1}$$

olur. Özel olarak $n = N_1$ için de geçerlidir. Her $x \in E$ için araya $f_{N_1}(x)$ ekleyip çıkararak

$$\mid f(x) \mid \leq \mid f(x) - f_{N_1}(x) \mid + \mid f_{N_1}(x) \mid < 1 + M_{N_1}$$

bulunur. $M = 1 + M_{N_1}$ sayısı x'e bağlı değildir; f sınırlıdır.
(ii) *$n \geq N_1$ ve $x \in E$ için (1) eşitsizliği ve (i) ile*

$$\mid f_n(x) \mid \leq \mid f_n(x) - f(x) \mid + \mid f(x) \mid < 1 + M$$

olur. Geriye sonlu sayıda terim kalır: $n < N_1$ için $\mid f_n(x) \mid \leq M_n$. Öyleyse

$$M^* = \max\Big\{M_1, M_2, \ldots, M_{N_1 - 1}, 1 + M\Big\}$$

sayısı için her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in E$ için $\mid f_n(x) \mid \leq M^*$ olur. (f_n) düzgün sınırlıdır. ■

Sonuç 4.1 (Sınırsız Limit Düzgün Yakınsaklığı Engeller). *Sınırlı fonksiyonlardan oluşan bir dizinin E üzerindeki noktasal limiti sınırlı değilse yakınsama E üzerinde düzgün olamaz.*

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yakınsama düzgün olsaydı düzgün limit noktasal limite eşit olurdu (Önerme 2.1) ve Teorem 4.1 (i) gereği sınırlı olurdu. Bu, limitin sınırsız olmasıyla çelişir. ■

Örnek 4.2 (Sınırsız Limitle Düzgün Yakınsamama). $(0,1]$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{n}{1+nx}$ dizisinin noktasal yakınsadığını ε–N tanımıyla doğrulayınız ve yakınsamanın düzgün olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Örnek 1.7 çözümünde her f_n'nin sınırlı olduğunu $(0 < f_n(x) < n)$ ve noktasal limitin $f(x) = \dfrac{1}{x}$ olduğunu gördük.
Tanımla doğrulama. $\varepsilon > 0$ ve $x \in (0,1]$ verilsin.

$$\begin{aligned} \mid f_n(x) - f(x) \mid &= \left| \frac{n}{1+nx} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{nx - (1+nx)}{x\,(1+nx)} \right| \\ &= \frac{1}{x\,(1+nx)} < \frac{1}{x \cdot nx} = \frac{1}{nx^2} \end{aligned}$$

olur. $\dfrac{1}{nx^2} < \varepsilon$ için $n > \dfrac{1}{\varepsilon x^2}$ yeter; $N(\varepsilon, x) = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon x^2} \right\rfloor + 1$ seçilir.
Düzgün yakınsamama. Her f_n sınırlıdır, ama noktasal limit $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $(0,1]$ üzerinde sınırlı değildir. Sonuç 4.1 gereği yakınsama $(0,1]$ üzerinde düzgün değildir. ■

4.2 Düzgün Limit Sürekliliği Korur

Bölümün ana teoremine geliyoruz. İspatı, analizde sık sık karşılaşılan "$\varepsilon/3$ yöntemi"nin ilk örneğidir.

Teorem 4.2 (Düzgün Limit Sürekliliği Korur). *$E \subseteq \mathbb{R}$, $a \in E$ ve $f_n \rightrightarrows f$ (E) olsun. Her f_n fonksiyonu a noktasında sürekliyse f de a noktasında süreklidir. Özel olarak her f_n, E üzerinde sürekliyse f de E üzerinde süreklidir.*

İspat.
$\varepsilon > 0$ verilsin. Amacımız, $x \in E$ ve $\mid x - a \mid < \delta$ olduğunda $\mid f(x) - f(a) \mid < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ bulmaktır.
Adım 1: Dizinin bir terimini sabitle. *$f_n \rightrightarrows f$ olduğundan öyle bir $N = N(\varepsilon)$ vardır ki $n \geq N$ olan her n ve her $x \in E$ için $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \dfrac{\varepsilon}{3}$ olur. Özel olarak $n = N$ için*

$$\mid f_N(x) - f(x) \mid < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\text{her} \quad x \in E) \tag{2}$$

sağlanır. Bu eşitsizlik $x = a$ için de geçerlidir.
Adım 2: O terimin sürekliliğini kullan. *f_N, a noktasında sürekli olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in E$ ve $\mid x - a \mid < \delta$ olduğunda*

$$\mid f_N(x) - f_N(a) \mid < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

olur.
Adım 3: Üç parçayı birleştir. *$x \in E$ ve $\mid x - a \mid < \delta$ olsun. Araya $f_N(x)$ ve $f_N(a)$ ekleyip çıkaralım:*

$$\begin{aligned} \mid f(x) - f(a) \mid &\leq \mid f(x) - f_N(x) \mid + \mid f_N(x) - f_N(a) \mid + \mid f_N(a) - f(a) \mid \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Birinci ve üçüncü terim (2) ile, ortadaki terim (3) ile sınırlandı. Öyleyse f, a noktasında süreklidir. Her f_n, E'nin her noktasında sürekliyse aynı ispat her $a \in E$ için geçerlidir ve f, E üzerinde süreklidir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

İspatta düzgün yakınsaklığın nerede kullanıldığına dikkat edelim: (2) eşitsizliğinin **aynı** N ile hem a noktasında hem de a'ya yakın bütün x noktalarında geçerli olması gerekiyordu. Noktasal yakınsaklıkta her x için ayrı bir N gerekir ve ortadaki terim için sabitlenecek tek bir f_N bulunamaz.
Teoremin bir başka okunuşu, iki limitin sırasının değiştirilebilmesidir. $a \in E$, E'nin bir yığılma noktası ve her f_n, a'da sürekli olsun. f_n'nin sürekliliği $\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$, f'nin sürekliliği $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ demektir. Dolayısıyla teoremin koşulları altında

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big) &= \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)\\ &= \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)\end{aligned}$$

olur: $n\to\infty$ limiti ile $x\to a$ limiti yer değiştirir.

Sonuç 4.2 (Süreksiz Limit Düzgün Yakınsaklığı Engeller). *E üzerinde sürekli fonksiyonlardan oluşan bir dizi, E üzerinde sürekli olmayan bir fonksiyona noktasal yakınsıyorsa bu yakınsama düzgün olamaz.*

> ***İspat.***
> *Yakınsama düzgün olsaydı limit fonksiyonu Teorem 4.2 gereği E üzerinde sürekli olurdu.* ■

Bu sonuç, düzgün yakınsamamayı hiç hesap yapmadan göstermeye yarar.

Örnek 4.3 (Süreksiz Limitle Kuvvet Dizisi). $f_n(x) = x^n$ dizisinin $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsamadığını Sonuç 4.2 ile gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Her f_n, $[0,1]$ üzerinde süreklidir. Noktasal limit, $[0,1)$ üzerinde 0 ve $x=1$'de 1 değerini alan f fonksiyonudur ve $x=1$ noktasında sürekli değildir (Örnek 1.5). Sonuç 4.2 gereği yakınsama $[0,1]$ üzerinde düzgün değildir.
> Aynı sonucu daha önce tanımın olumsuzuyla (Örnek 2.2), nokta dizisi testiyle (Örnek 3.2) ve supremum ölçütüyle (Örnek 3.4) elde etmiştik; bu yol hepsinden kısadır. ■

Örnek 4.4 (Uçta Kopan Bir Dizi). $[0,1]$ üzerinde $f_n(x) = x - x^n$ dizisinin düzgün yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

> **Çözüm.**
> Her f_n bir polinomdur ve $[0,1]$ üzerinde süreklidir. $0 \le x < 1$ için $x^n \to 0$ olduğundan $f_n(x) \to x$; $x=1$ için $f_n(1) = 1-1 = 0$. Noktasal limit
>
> $$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$
>
> fonksiyonudur. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq 0 = f(1)$ olduğundan f, $x=1$ noktasında sürekli değildir. Sonuç 4.2 gereği dizi $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsamaz. ■

Sonuç 4.2 tek yönlüdür. Limit fonksiyonunun sürekli çıkması yakınsamanın düzgün olduğunu göstermez: Örnek 1.2 dizisinin terimleri ve noktasal limiti ($f=0$) süreklidir, ama yakınsama düzgün değildir (Alıştırma 2.2).
Süreklilik yerine düzgün süreklilik alındığında da aynı koruma geçerlidir.

Sonuç 4.3 (Düzgün Limit Düzgün Sürekliliği Korur). *$f_n \rightrightarrows f$ (E) olsun. Her f_n, E üzerinde düzgün sürekliyse f de E üzerinde düzgün süreklidir.*

> ***İspat.***
> *$\varepsilon > 0$ verilsin. Teorem 4.2 ispatındaki gibi öyle bir N seçelim ki her $x \in E$ için $|\, f_N(x) - f(x)\,| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ olsun. f_N düzgün sürekli olduğundan (bkz. Analiz 1) öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x, y \in E$ ve $|\, x - y\,| < \delta$ olduğunda $|\, f_N(x) - f_N(y)\,| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ olur. Bu δ yalnız ε'a bağlıdır. $x, y \in E$ ve $|\, x - y\,| < \delta$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} \mid f(x)-f(y) \mid &\leq \mid f(x)-f_N(x) \mid + \mid f_N(x)-f_N(y) \mid + \mid f_N(y)-f(y) \mid \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \end{aligned}$$

olur. Öyleyse f, E üzerinde düzgün süreklidir. ■

4.3 Monoton Yakınsama ve Dini Teoremi

Şimdiye kadar hep düzgün yakınsaklıktan sonuç çıkardık. Şimdi ters yönde soralım: noktasal yakınsaklıktan düzgün yakınsaklığa geçmenin bir yolu var mı? Genel olarak yoktur; ama kapalı ve sınırlı bir aralıkta, sürekli fonksiyonların sürekli bir limite **monoton** yakınsaması durumunda vardır.

Tanım 4.3 (Artarak ve Azalarak Yakınsama). (f_n) dizisi E üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsasın.

- Her $x \in E$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ise (f_n) dizisi f'ye **artarak yakınsar** denir ve $f_n \uparrow f$ yazılır.
- Her $x \in E$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ ise (f_n) dizisi f'ye **azalarak yakınsar** denir ve $f_n \downarrow f$ yazılır.

İki durumdan biri gerçekleşiyorsa (f_n) dizisi f'ye **monoton yakınsar** denir.

Yani monotonluk burada x değişkenine göre değil, n indisine göredir: her sabit x noktasında $\big(\, f_n(x) \,\big)$ sayı dizisi monotondur. Grafiklerle söylersek, $f_n \uparrow f$ durumunda her grafik bir öncekinin üstünde (ya da üzerinde) durur.

Teorem 4.3 (Dini Teoremi). *$[a,b]$ kapalı ve sınırlı bir aralık, (f_n) dizisi $[a,b]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi ve $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:*

(i) her f_n, $[a,b]$ üzerinde süreklidir;

(ii) her $x \in [a,b]$ için $\big(\, f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sayı dizisi monotondur;

(iii) f, $[a,b]$ üzerinde süreklidir;

(iv) $f_n \to f$ (noktasal, $[a,b]$).

O zaman $f_n \rightrightarrows f$ ($[a,b]$).

İspat.
Her n için $g_n(x) = \mid f(x) - f_n(x) \mid$ tanımlayalım.
Adım 1: g_n dizisinin özellikleri. *(i) ve (iii) gereği $f - f_n$ süreklidir; mutlak değer sürekli olduğundan g_n de $[a,b]$ üzerinde süreklidir. (iv) gereği her x için $g_n(x) \to 0$ olur. Ayrıca her x için*

$$g_{n+1}(x) \leq g_n(x) \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{4}$$

sağlanır. Gerçekten, $\big(\, f_n(x) \,\big)$ artan ise limiti hiçbir teriminden küçük değildir (bkz. Analiz 1); yani $f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x)$ olur. Bu durumda $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$ ve $g_{n+1}(x) = f(x) - f_{n+1}(x)$'tir; $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ olduğundan $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ çıkar. Azalan durumda $f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \geq f(x)$ olur ve aynı eşitsizlik $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ için elde edilir.
Adım 2: Her noktanın çevresinde bir indis yeter. *$\varepsilon > 0$ verilsin ve $x \in [a,b]$ sabit olsun. $g_n(x) \to 0$ olduğundan $g_{N_x}(x) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $N_x \in \mathbb{N}$ vardır. g_{N_x} fonksiyonu x noktasında sürekli olduğundan öyle bir $\delta_x > 0$ vardır ki*

$$y \in [a,b],\ \mid y - x \mid < \delta_x \quad \Rightarrow \quad g_{N_x}(y) < \varepsilon \tag{5}$$

olur. (Süreklilik tanımı $\varepsilon - g_{N_x}(x) > 0$ sayısı için uygulanır.) $I_x = (x - \delta_x,\, x + \delta_x)$ yazalım.
Adım 3: Kompaktlık. *$\{I_x : x \in [a,b]\}$ ailesi $[a,b]$'nin bir açık örtüsüdür, çünkü her x kendi I_x aralığına aittir. $[a,b]$ kapalı ve sınırlı olduğundan Heine–Borel teoremi (bkz. Analiz 1) gereği kompakttır; bu örtünün sonlu bir alt örtüsü vardır. Yani öyle $x_1, x_2, \ldots, x_k \in [a,b]$ noktaları vardır ki*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$[a,b] \subseteq I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \ldots \cup I_{x_k}$$

olur.
Adım 4: Ortak indis. *$N = \max\left\{N_{x_1}, N_{x_2}, \ldots, N_{x_k}\right\}$ alalım; bu sayı yalnız ε'a bağlıdır. $n \geq N$ ve $y \in [a,b]$ olsun. y, örtünün aralıklarından en az birine aittir: $y \in I_{x_i}$. $n \geq N \geq N_{x_i}$ olduğundan (4) eşitsizliğinin art arda uygulanması ve (5) ile*

$$\mid f_n(y) - f(y) \mid = g_n(y) \leq g_{N_{x_i}}(y) < \varepsilon$$

bulunur. Bu, $n \geq N$ olan her n ve her $y \in [a,b]$ için geçerlidir; $f_n \rightrightarrows f$ $([a,b])$. ■

İspatın iki kilit adımı, koşulların nerede kullanıldığını da gösterir. Monotonluk, bir noktada N_x indisiyle yakalanan küçüklüğün sonraki bütün indislere taşınmasını sağlar ((4) eşitsizliği). Kompaktlık ise sonsuz çoklukta N_x sayısını sonlu sayıya indirip maksimum almayı olanaklı kılar.

Örnek 4.5 (Dini Teoremiyle Üstel Fonksiyona Yaklaşım). $[0,1]$ üzerinde $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ dizisinin $f(x) = e^x$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm.
$[0,1]$ kapalı ve sınırlı bir aralıktır. Dini teoreminin dört koşulunu sırayla denetleyelim.
(i) Süreklilik. Her f_n bir polinomdur; $[0,1]$ üzerinde süreklidir.
(iv) Noktasal limit. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$'tir (bkz. Analiz 1). Özel olarak $f_n(0) = 1 \to 1 = e^0$ ve $f_n(1) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e$.
(iii) Limitin sürekliliği. $f(x) = e^x$ her yerde, dolayısıyla $[0,1]$ üzerinde süreklidir.
(ii) Monotonluk. $x \in [0,1]$ sabit olsun; $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ olduğunu gösterelim. $x = 0$ için iki yan da 1'dir. $x > 0$ için oranı yazalım:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}}\right)^n.$$

Parantez içindeki kesir

$$\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{1 + \frac{x}{n}} = \frac{n\,(n+1+x)}{(n+1)(n+x)} = 1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}$$

olur. $t = \dfrac{x}{(n+1)(n+x)} \in (0,1)$ için Bernoulli eşitsizliği (bkz. Analiz 1) $(1-t)^n \geq 1 - nt$ verir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} &\geq \frac{n+1+x}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{nx}{(n+1)(n+x)}\right) \\ &= \frac{(n+1+x)(n^2+n+x)}{(n+1)^2(n+x)}.\end{aligned}$$

Pay ile paydanın farkını hesaplayalım:

$$(n+1+x)(n^2+n+x) - (n+1)^2(n+x) = x^2 \geq 0.$$

Öyleyse oran en az 1'dir: $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Dizi her noktada artandır; $f_n \uparrow e^x$.
Dört koşul da sağlandığından Teorem 4.3 gereği $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \rightrightarrows e^x$ $([0,1])$. ■

Dini teoreminin koşullarından hiçbiri atılamaz. Aralığın sınırlılığı için $[0,+\infty)$ üzerindeki $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ dizisi yeterlidir: terimler süreklidir, $f_n \downarrow 0$ olur ve limit süreklidir, ama yakınsama düzgün değildir (Örnek 2.4). Terimlerin sürekliliği için $[0,1]$ üzerinde, $0 < x < \dfrac{1}{n}$ iken 1, öbür noktalarda 0 değerini alan

f_n fonksiyonlarına bakalım: $f_n \downarrow 0$ olur ve limit süreklidir, ama $\sup| f_n | = 1$ olduğundan yakınsama düzgün değildir. Kalan üç koşul için birer örnek çözelim; her birinde tam olarak bir koşul bozulur ve sonuç çöker.

Örnek 4.6 (Aralık Kapalı Değilse Dini Teoremi Geçersizdir). $(0,1)$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{1}{nx+1}$ dizisinin sürekli fonksiyonlardan oluştuğunu, sürekli bir limite azalarak yakınsadığını, ama yakınsamanın düzgün olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Süreklilik ve noktasal limit. $x \in (0,1)$ için $nx+1 > 0$ olduğundan her f_n süreklidir. $x > 0$ sabitken $nx+1 \to +\infty$ olduğundan $f_n(x) \to 0$; limit $f = 0$ süreklidir.
Monotonluk. $x \in (0,1)$ için $nx+1 < (n+1)x+1$ olduğundan

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1} > \frac{1}{(n+1)x+1} = f_{n+1}(x)$$

olur; $f_n \downarrow 0$.
Düzgün yakınsamama. $x \mapsto \dfrac{1}{nx+1}$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde azalandır; çünkü türevi $\dfrac{-n}{(nx+1)^2} < 0$'dır. Dolayısıyla değerleri sol uca yaklaştıkça büyür ve

$$d_n = \sup_{x\in(0,1)} \left| \frac{1}{nx+1} - 0 \right| = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{nx+1} = 1$$

olur. ($x = 0$ noktası kümede olmadığından bu supremum alınmaz.) $d_n = 1 \not\to 0$ olduğundan Teorem 3.3 gereği yakınsama $(0,1)$ üzerinde düzgün değildir.
Dini teoreminin (i)–(iv) koşulları sağlanmaktadır; bozulan tek şey aralığın kapalı olmamasıdır. ■

Örnek 4.7 (Limit Sürekli Değilse Dini Teoremi Geçersizdir). $[-1,1]$ üzerinde $f_n(x) = x^{1/(2n-1)} = \sqrt[2n-1]{x}$ dizisinin düzgün yakınsak olup olmadığını inceleyiniz.

Çözüm.
$2n-1$ tek sayı olduğundan kök negatif x'ler için de tanımlıdır ve her f_n, $[-1,1]$ üzerinde süreklidir.
Noktasal limit. Dört durumu ayıralım.

- $x = 0$ için $f_n(0) = 0 \to 0$.
- $x = 1$ için $f_n(1) = 1 \to 1$; $x = -1$ için $f_n(-1) = -1 \to -1$.
- $0 < x < 1$ için $\left(\sqrt[2n-1]{x} \right)$ dizisi, $\sqrt[k]{x} \to 1$ limitinin ($k \to \infty$) tek indisli alt dizisidir; dolayısıyla $f_n(x) \to 1$. Bu dizi n'ye göre artandır ve üstten 1 ile sınırlıdır.
- $-1 < x < 0$ için $f_n(x) = -\sqrt[2n-1]{| x |} \to -1$. Bu dizi n'ye göre azalandır ve alttan -1 ile sınırlıdır.

Noktasal limit

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur.
Düzgün yakınsamama. Her f_n sürekli olduğu hâlde f, $x = 0$ noktasında sürekli değildir. Sonuç 4.2 gereği yakınsama $[-1,1]$ üzerinde düzgün değildir.
Dini teoremi açısından: aralık kapalı ve sınırlıdır, terimler süreklidir, her noktada dizi monotondur; bozulan tek koşul limitin sürekliliğidir. ■

Örnek 4.8 (Monotonluk Yoksa Dini Teoremi Geçersizdir). Kapalı ve sınırlı bir aralıkta, sürekli fonksiyonlardan oluşan ve sürekli bir limite noktasal yakınsayan, ama düzgün yakınsamayan bir dizi veriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$[0,1]$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ alalım. Her f_n süreklidir, noktasal limit $f = 0$ süreklidir (Örnek 1.2) ve yakınsama düzgün değildir (Alıştırma 2.2).
Bozulan koşul monotonluktur. Örneğin $x = \dfrac{1}{2}$ noktasında

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}, \qquad f_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+1} = 1, \qquad f_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{1+\frac{9}{4}} = \frac{12}{13}$$

olur: dizi önce artar, sonra azalır. ■

4.4 Alıştırmalar

Alıştırma 4.1 (Düzgün Sınırlı Dizinin Noktasal Limiti). (f_n) dizisi E üzerinde düzgün sınırlı olsun ve $f_n \to f$ (noktasal, E) olsun. f'nin E üzerinde sınırlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Düzgün sınırlılık gereği öyle bir $M > 0$ vardır ki her $x \in E$ ve her n için $\mid f_n(x) \mid \leq M$, yani $-M \leq f_n(x) \leq M$ olur. $x \in E$ sabitlensin. $\big(\, f_n(x) \,\big)$ dizisinin bütün terimleri $[-M, M]$ aralığındadır ve dizi $f(x)$'e yakınsar. Limitlerde sıralama korunduğundan (bkz. Analiz 1) $-M \leq f(x) \leq M$ olur. x keyfi olduğundan her $x \in E$ için $\mid f(x) \mid \leq M$'dir; f sınırlıdır.
Burada yakınsamanın düzgün olması gerekmedi; düzgünlük koşulu dizinin sınırlılığına yüklendi. ■

Alıştırma 4.2 (Kesilmiş Fonksiyonlar). $(0,1]$ üzerinde $f_n(x) = \min\left\{n, \dfrac{1}{x}\right\}$ dizisinin noktasal sınırlı olduğunu, düzgün sınırlı olmadığını ve düzgün yakınsamadığını gösteriniz.

Çözüm.
Noktasal sınırlılık. Her $x \in (0,1]$ ve her n için $0 < f_n(x) \leq \dfrac{1}{x}$ olur; $K_x = \dfrac{1}{x}$ alınır.
Düzgün sınırlı değildir. $x_n = \dfrac{1}{n}$ için $f_n(x_n) = \min\{n, n\} = n$ olur. Herhangi bir $M > 0$ için $n > M$ seçilirse $f_n(x_n) > M$ olur; ortak bir sınır yoktur.
Düzgün yakınsamama. $x \in (0,1]$ sabitken $n \geq \dfrac{1}{x}$ olan her n için $f_n(x) = \dfrac{1}{x}$'tir; dolayısıyla noktasal limit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ olur ve sınırlı değildir. Her f_n ise n ile sınırlıdır. Sonuç 4.1 gereği yakınsama $(0,1]$ üzerinde düzgün değildir. ■

Alıştırma 4.3 (Üç Bölgeli Süreksiz Limit). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$ dizisinin noktasal limitini bulunuz ve yakınsamanın $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$x^{2n} = (x^2)^n$ bir geometrik dizidir; davranışı x^2'nin 1'e göre konumuna bağlıdır.

- $\mid x \mid < 1$ ise $x^{2n} \to 0$ ve $f_n(x) \to 1$.
- $\mid x \mid = 1$ ise $x^{2n} = 1$ ve $f_n(x) = \dfrac{1}{2}$.
- $\mid x \mid > 1$ ise $x^{2n} \to +\infty$ ve $f_n(x) \to 0$.

Noktasal limit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \mid x \mid < 1 \\ \frac{1}{2}, & \mid x \mid = 1 \\ 0, & \mid x \mid > 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Her f_n bütün $\mathbb{R}$'de süreklidir (payda hiç sıfır olmaz), ama f, $x = 1$ ve $x = -1$ noktalarında sürekli değildir. Sonuç 4.2 gereği yakınsama $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün değildir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 4.4 (Kosinüsün Kuvvetleri: Bütün Aralık). $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ üzerinde $f_n(x) = \cos^n x$ dizisinin düzgün yakınsamadığını gösteriniz.

Çözüm.
$x = 0$ için $f_n(0) = 1 \to 1$. $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ için $0 \leq \cos x < 1$ olduğundan $\cos^n x \to 0$. Noktasal limit

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

fonksiyonudur ve $x = 0$'da sürekli değildir: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$. Her f_n sürekli olduğundan Sonuç 4.2 gereği yakınsama düzgün değildir. ■

Alıştırma 4.5 (Kosinüsün Kuvvetleri: Sıfırdan Uzakta). $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ olsun. $f_n(x) = \cos^n x$ dizisinin $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ üzerinde düzgün yakınsadığını Dini teoremiyle gösteriniz ve sonucu supremum ölçütüyle doğrulayınız.

Çözüm.
Dini teoremi. Aralık kapalı ve sınırlıdır. Her f_n süreklidir. Bu aralıkta $0 \leq \cos x < 1$ olduğundan noktasal limit $f = 0$'dır ve süreklidir. Ayrıca $0 \leq \cos x \leq 1$ için

$$f_{n+1}(x) = \cos x \cdot \cos^n x \leq \cos^n x = f_n(x)$$

olur; $f_n \downarrow 0$. Teorem 4.3 gereği $\cos^n x \rightrightarrows 0$ $\left([\delta, \tfrac{\pi}{2}]\right)$.
Supremum ölçütü. Kosinüs $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ üzerinde azalan ve negatif olmayan bir fonksiyondur; dolayısıyla $\cos^n x$ de azalandır ve en büyük değerini sol uçta alır:

$$d_n = \sup_{x \in [\delta, \pi/2]} \cos^n x = \cos^n \delta.$$

$0 < \cos \delta < 1$ olduğundan $d_n \to 0$ ve Teorem 3.3 aynı sonucu verir. ■

Alıştırma 4.6 (Yer Değiştirmeyen İki Limit). $[0, 1]$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + nx}$ için $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x) \right)$ ve $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \right)$ limitlerini hesaplayınız.

Çözüm.
Önce x, sonra n. Her f_n, $x = 0$'da süreklidir: $\lim_{x \to 0^+} f_n(x) = f_n(0) = 0$. Dolayısıyla

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to 0^+} f_n(x) \right) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0.$$

Önce n, sonra x. Alıştırma 1.2 gereği $x > 0$ için $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 1$'dir. Dolayısıyla

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1.$$

İki limit farklıdır: $0 \neq 1$. Limitler yer değiştirmez; bunun nedeni yakınsamanın $[0, 1]$ üzerinde düzgün olmamasıdır (Alıştırma 2.5). Düzgün yakınsaklık olsaydı Teorem 4.2 iki limitin eşit olmasını zorunlu kılardı. ■

Alıştırma 4.7 (Dini Teoremiyle Mutlak Değere Yaklaşım). $[-1, 1]$ üzerinde $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$ dizisinin $f(x) = |\, x \,|$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını Dini teoremiyle gösteriniz.

Çözüm.
Dört koşulu denetleyelim; aralık kapalı ve sınırlıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

- **Süreklilik.** $x^2 + \dfrac{1}{n} > 0$ olduğundan her f_n süreklidir.
- **Noktasal limit.** x sabitken $x^2 + \dfrac{1}{n} \to x^2$ ve karekök sürekli olduğundan $f_n(x) \to \sqrt{x^2} = |\,x\,|$.
- **Limitin sürekliliği.** $f(x) = |\,x\,|$ süreklidir.
- **Monotonluk.** $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ ve karekök artan olduğundan $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ olur; $f_n \downarrow |\,x\,|$.

Teorem 4.3 gereği $f_n \rightrightarrows |\,x\,|$ $([-1,1])$. $\blacksquare$

Düzgün yakınsaklığın sınırlılığı ve sürekliliği koruduğunu gördük. Üç kötü haberden geriye integrallenebilirlik kaldı; Düzgün Yakınsaklık ve İntegral bölümünde düzgün limitin integrallenebilirliği de koruduğunu ve limit ile integralin yer değiştirdiğini gösteriyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

5. Düzgün Yakınsaklık ve İntegral

Bir (f_n) dizisi f'ye yakınsıyorsa $\int_a^b f_n(x)\,dx$ sayılarının $\int_a^b f(x)\,dx$ sayısına yakınsamasını bekleriz; yani

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)dx$$

eşitliğinin, limit ile integralin yer değiştirmesinin geçerli olmasını isteriz. Noktasal yakınsaklık bunu sağlamaz: sağdaki integral var olmayabilir (Örnek 1.6), var olsa bile iki yan farklı çıkabilir. Bu bölümde düzgün yakınsaklığın her iki sorunu da çözdüğünü gösteriyoruz.
Bu sonuç yalnız kuramsal bir güvence değildir; hesap aracı olarak da işe yarar. Doğrudan hesaplanması zor olan $\lim \int f_n$ limitleri, limit integralin içine alınarak tek bir integrale indirgenir.

5.1 Terim Terime İntegral Teoremi

Teoremi ifade etmeden önce gösterimi hatırlayalım: $\mathcal{R}[a,b]$, $[a,b]$ üzerinde Riemann integrallenebilir fonksiyonların kümesidir; $[a,b]$ üzerinde sürekli fonksiyonların kümesi $C[a,b]$ bu kümenin bir alt kümesidir (bkz. Analiz 2). Bir P bölünüşü için alt ve üst Darboux toplamlarını $L(P,f)$ ve $U(P,f)$ ile gösteriyoruz.

Teorem 5.1 (Terim Terime İntegral Teoremi). *$a<b$ olsun ve her $n\in\mathbb{N}$ için $f_n\in\mathcal{R}[a,b]$ olsun. $f_n \rightrightarrows f$ ($[a,b]$) ise:*

(i) $f\in\mathcal{R}[a,b]$;

(ii) limit ile integral yer değiştirir:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx;$$

(iii) $F_n(x)=\int_a^x f_n(t)\,dt$ *ve* $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ *olmak üzere* $F_n \rightrightarrows F$ ($[a,b]$).

İspat.
(i) *Her f_n integrallenebilir olduğundan sınırlıdır. Teorem 4.1 gereği f de $[a,b]$ üzerinde sınırlıdır; dolayısıyla Darboux toplamları tanımlıdır. Riemann ölçütünü (bkz. Analiz 2) uygulayacağız.*
$\varepsilon>0$ verilsin ve $\eta=\dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$ yazalım. Düzgün yakınsaklık gereği öyle bir N vardır ki her $x\in[a,b]$ için

$$|\,f_N(x)-f(x)\,|<\eta, \qquad \text{yani} \qquad f_N(x)-\eta<f(x)<f_N(x)+\eta \tag{1}$$

olur. f_N integrallenebilir olduğundan Riemann ölçütü gereği $[a,b]$'nin öyle bir $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_p\}$ bölünüşü vardır ki

$$U(P,f_N)-L(P,f_N)<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

olur. k'inci alt aralık $[x_{k-1},x_k]$ üzerinde f ve f_N'nin supremumlarını $M_k(f)$, $M_k(f_N)$ ile; infimumlarını $m_k(f)$, $m_k(f_N)$ ile gösterelim. (1) eşitsizliğinin sağ yarısından, alt aralığın her x noktası için $f(x)<f_N(x)+\eta\le M_k(f_N)+\eta$ olur; supremum alınırsa $M_k(f)\le M_k(f_N)+\eta$ çıkar. Aynı biçimde sol yarıdan $m_k(f)\ge m_k(f_N)-\eta$ bulunur. İkisini taraf tarafa çıkaralım:

$$M_k(f)-m_k(f)\le M_k(f_N)-m_k(f_N)+2\eta.$$

Her iki yanı $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ ile çarpıp k üzerinden toplayalım; $\sum_{k=1}^{p}\Delta x_k=b-a$ olduğundan (2) ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$U(P,f) - L(P,f) \le U(P,f_N) - L(P,f_N) + 2\eta\,(b-a)$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

elde edilir. Riemann ölçütü gereği $f \in \mathcal{R}[a,b]$.
(ii) $d_n = \sup_{x\in[a,b]} |\, f_n(x) - f(x) \,|$ *yazalım; Teorem 3.3 gereği* $d_n \to 0$*'dır.* $f_n - f$ *integrallenebilir olduğundan integralin lineerliği, integraller için üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 2) ve sıralama özelliğiyle*

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b \big(\, f_n(x) - f(x) \,\big)\,dx \right|$$
$$\le \int_a^b |\, f_n(x) - f(x) \,|\,dx$$
$$\le \int_a^b d_n\,dx = d_n\,(b-a)$$

bulunur. $d_n(b-a) \to 0$ *olduğundan sıkıştırma teoremiyle* $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.
(iii) $x \in [a,b]$ *olsun.* $x = a$ *için* $F_n(a) = F(a) = 0$*'dır.* $x > a$ *için (ii)'deki hesap* $[a,x]$ *aralığında yinelenirse*

$$|\, F_n(x) - F(x) \,| \le \int_a^x |\, f_n(t) - f(t) \,|\,dt \le d_n\,(x-a) \le d_n\,(b-a)$$

olur. Sağdaki $\alpha_n = d_n(b-a)$ *sayısı* x*'ten bağımsızdır ve* $\alpha_n \to 0$*'dır. Teorem 3.1 gereği* $F_n \rightrightarrows F$ *(*$[a,b]$*).* ■

Yani düzgün yakınsaklık altında integrallenebilirlik limite geçer ve "önce limit, sonra integral" ile "önce integral, sonra limit" aynı sayıyı verir. (ii)'nin ispatındaki eşitsizlik, hatanın büyüklüğünü de verir: integraller arasındaki fark en çok $d_n(b-a)$ kadardır.

Üç adımda integralin limiti

1. **Noktasal limit.** $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ bulunur.
2. **Düzgün yakınsaklık.** $[a,b]$ üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ olduğu bir ölçütle (sınırlama, supremum, Dini) gösterilir.
3. **Limiti içeri al.** Aranan limit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ integraline eşittir; bu integral hesaplanır.

Örnek 5.1 (Geometrik Toplamın İntegrali). $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ olsun. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} f_n(x)\,dx$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 1: Noktasal limit. $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$ için $x^{n+1} \to 0$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

olur. Uçlarda da aynı formül geçerlidir: $f_n(0) = 1 \to 1$ ve $f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \to 2$. Noktasal limit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$'tir.
Adım 2: Düzgün yakınsaklık. $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$ için $1 - x \ge \dfrac{1}{2}$, yani $\dfrac{1}{1-x} \le 2$ olur. Dolayısıyla

$$|\, f_n(x) - f(x) \,| = \frac{x^{n+1}}{1-x} \le 2\,x^{n+1} \le 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \alpha_n$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. $\alpha_n \to 0$ olduğundan Teorem 3.1 gereği $f_n \rightrightarrows f$ $\left([0, \tfrac{1}{2}]\right)$.
Adım 3: Limiti içeri al. Her f_n sürekli, dolayısıyla integrallenebilirdir. Teorem 5.1 gereği

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1/2} f_n(x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{dx}{1-x} = \Big[-\ln(1-x)\Big]_0^{1/2}$$
$$= -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2.$$

Bir yan ürün. $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ olduğundan soldaki integral doğrudan da hesaplanır:

$$\int_0^{1/2} f_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\,2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\,2^k}.$$

Bulduğumuz limit, bu toplamların $\ln 2$'ye yakınsadığını söyler: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,2^k} = \ln 2$.
Aynı dizi $(-1, 1)$ aralığında da $\dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonuna noktasal yakınsar, ama orada yakınsama düzgün değildir: f_n sınırlı, limit ise sınırsızdır (Sonuç 4.1). ■

Örnek 5.2 (Dini Teoremiyle Birlikte Kullanım). $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.
Örnek 4.5 gereği $[0, 1]$ üzerinde $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \rightrightarrows e^x$ olur. Her terim bir polinomdur; süreklidir ve integrallenebilirdir. Teorem 5.1 gereği

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^1 e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_0^1 = e - 1.$$

Doğrudan denetim. Soldaki integral açıkça hesaplanabilir:

$$\int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \left[\frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - 1\right].$$

Burada $\dfrac{n}{n+1} \to 1$ olur ve

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to e \cdot 1 = e$$

olduğundan limit $1 \cdot (e - 1) = e - 1$ çıkar; iki yol aynı sonucu verir. ■

5.2 Düzgün Yakınsaklık Olmadığında

Teorem 5.1 bir yeter koşul verir. Düzgün yakınsaklık yokken iki şey de olabilir: eşitlik bozulabilir ya da tesadüfen korunabilir.

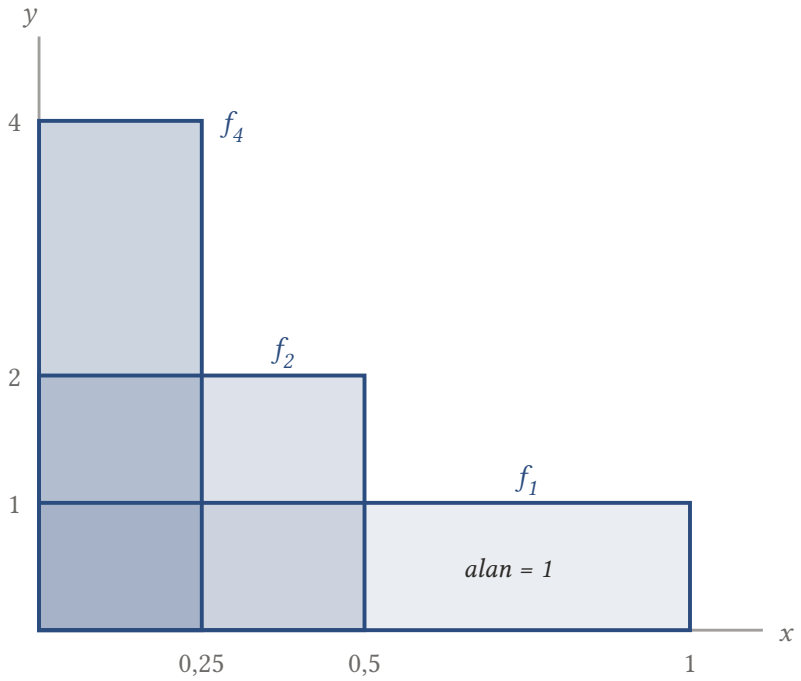
Örnek 5.3 (Noktasal Yakınsaklıkta Bozulan Eşitlik). $[0, 1]$ üzerinde

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ n, & 0 < x \le \tfrac{1}{n} \\ 0, & \tfrac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

dizisi için $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ ile $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$ sayılarını karşılaştırınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.



Şekil 5.1: f_1, f_2, f_4 basamak fonksiyonları. Dikdörtgenler incelip yükselirken alanları hep 1 kalır; noktasal limit olan sıfır fonksiyonunun altında ise alan yoktur.

Noktasal limit. $x = 0$ için her n'de $f_n(0) = 0$'dır. $x \in (0, 1]$ olsun. Arşimet özelliğine göre $N_x > \dfrac{1}{x}$ olan bir $N_x \in \mathbb{N}$ vardır. $n \geq N_x$ ise $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{N_x} < x$ olur; yani x üçüncü parçadadır ve $f_n(x) = 0$'dır. Öyleyse $f_n \to 0$ (noktasal, $[0, 1]$) ve

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0.$$

İntegrallerin limiti. Her f_n sonlu sayıda noktada süreksiz bir basamak fonksiyonudur; integrallenebilirdir (bkz. Analiz 2) ve

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} n\,dx + \int_{1/n}^1 0\,dx = n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

olur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$.

Karşılaştırma. $1 \neq 0$: limit ile integral yer değiştirmez. Şekildeki dikdörtgenler incelip yükselirken alanları hep 1 kalır; limit fonksiyonunun altında ise alan yoktur.
Teorem 5.1 gereği bu ancak yakınsama düzgün değilse olabilir. Gerçekten de $[0, 1]$ üzerinde $d_n = \sup| f_n(x) - 0 | = n$ olur ve $d_n \to +\infty$. ■

Örnek 5.4 (Düzgün Yakınsaklık Olmadan Korunan Eşitlik). $[0, 1]$ üzerinde $f_n(x) = nx(1 - x)^n$ dizisinin düzgün yakınsamadığını, buna karşın limit ile integralin yer değiştirdiğini gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Noktasal limit. $f_n(0) = 0$ ve $f_n(1) = 0$'dır. $0 < x < 1$ için $q = 1 - x \in (0,1)$ yazılırsa $f_n(x) = x \cdot nq^n$ olur. $0 < q < 1$ için $nq^n \to 0$ olduğundan (Alıştırma 3.2 çözümündeki gerekçe) $f_n(x) \to 0$. Noktasal limit $f = 0$'dır.
Düzgün yakınsamama. $g_n(x) = nx(1-x)^n$ için çarpım kuralıyla

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= n(1-x)^n - n^2 x(1-x)^{n-1} \\ &= n(1-x)^{n-1}\,\big(\,(1-x) - nx\,\big) = n(1-x)^{n-1}\,\big(\,1-(n+1)x\,\big) \end{aligned}$$

olur. $(0,1)$ içindeki tek kritik nokta $x = \dfrac{1}{n+1}$'dir; solunda türev pozitif, sağında negatiftir. Uçlarda $g_n = 0$ olduğundan

$$d_n = g_n\!\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

bulunur. $m = n+1$ yazılırsa $\left(1 - \dfrac{1}{m}\right)^m \to \dfrac{1}{e}$ olduğundan $d_n \to \dfrac{1}{e} \neq 0$. Teorem 3.3 gereği yakınsama $[0,1]$ üzerinde düzgün değildir.
İntegraller. $t = 1 - x$ değişken değiştirmesiyle ($dx = -dt$; $x = 0$ için $t = 1$, $x = 1$ için $t = 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 nx(1-x)^n\,dx &= n\int_0^1 (1-t)\,t^n\,dt = n\int_0^1 t^n\,dt - n\int_0^1 t^{n+1}\,dt \\ &= \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2} = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0 = \int_0^1 0\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Yakınsama düzgün olmadığı hâlde eşitlik sağlanır. Düzgün yakınsaklık limit ile integralin yer değiştirmesi için yeterlidir, ama gerekli değildir. ■

İki örneği birlikte okuyalım: düzgün yakınsaklık yoksa Teorem 5.1 hiçbir şey söylemez; eşitliğin sağlanıp sağlanmadığı integrallerin doğrudan hesaplanmasıyla anlaşılır. Ters yönde ise kesin bir sonuç vardır: limit ile integral yer değiştirmiyorsa yakınsama düzgün olamaz. Örneğin Örnek 2.5 çadırlarında $\int_0^2 f_n(x)\,dx$, tabanı $\dfrac{2}{n}$ ve yüksekliği n^2 olan üçgenin alanıdır:

$$\int_0^2 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot n^2 = n \to +\infty,$$

oysa noktasal limitin integrali 0'dır.

5.3 Alıştırmalar

Alıştırma 5.1 (Rasyonel Bir Dizinin İntegral Limiti). $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{n+x}\,dx$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.
Noktasal limit. $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x} = \dfrac{x}{1+\frac{x}{n}} \to x$; $f(x) = x$.
Düzgün yakınsaklık. $x \in [0,1]$ için

$$|\,f_n(x) - x\,| = \left|\frac{nx - x(n+x)}{n+x}\right| = \frac{x^2}{n+x} \le \frac{1}{n}$$

olur; çünkü $x^2 \le 1$ ve $n + x \ge n$'dir. $\dfrac{1}{n} \to 0$ olduğundan Teorem 3.1 gereği $f_n \rightrightarrows x$ ($[0,1]$).

 CC BY-NC-SA 4.0

Limit. Her f_n sürekli olduğundan Teorem 5.1 gereği

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{n+x}\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

■

Alıştırma 5.2 (Hızla Sönen Üstel Dizi). $\lim_{n\to\infty} \int_1^2 e^{-nx^2}\,dx$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.
$x \in [1,2]$ için $x^2 \geq 1$ olduğundan $0 < e^{-nx^2} \leq e^{-n}$ olur. $\alpha_n = e^{-n} \to 0$ olduğundan Teorem 3.1 gereği $e^{-nx^2} \rightrightarrows 0$ ($[1,2]$). Terimler sürekli olduğundan Teorem 5.1 gereği

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 e^{-nx^2}\,dx = \int_1^2 0\,dx = 0.$$

Bu integrallerin hiçbiri temel fonksiyonlarla hesaplanamaz; limit ise tek satırda bulunur. ■

Alıştırma 5.3 (Alanı Kaybolmayan Dizi). $[0,1]$ üzerinde $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ dizisinin noktasal limitini bulunuz, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ limitini hesaplayınız ve yakınsamanın düzgün olup olmadığına karar veriniz.

Çözüm.
Noktasal limit. $f_n(0) = 0$ ve $f_n(1) = 0$'dır. $0 < x < 1$ için $q = 1-x^2 \in (0,1)$ ile $f_n(x) = x \cdot nq^n \to 0$ olur. Noktasal limit $f = 0$ ve $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$'dır.
İntegraller. $u = 1-x^2$ değişken değiştirmesiyle ($du = -2x\,dx$; $x = 0$ için $u = 1$, $x = 1$ için $u = 0$)

$$\int_0^1 nx(1-x^2)^n\,dx = \frac{n}{2}\int_0^1 u^n\,du = \frac{n}{2(n+1)}$$

olur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Karar. Limit ile integral yer değiştirmiyor. Yakınsama düzgün olsaydı Teorem 5.1 eşitliği zorunlu kılardı; öyleyse yakınsama $[0,1]$ üzerinde düzgün değildir. ■

Alıştırma 5.4 (Aralığı Bölerek Limit Alma). $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\sin^n x$ dizisi $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ üzerinde noktasal olarak, $x < \frac{\pi}{2}$ için 0'a ve $x = \frac{\pi}{2}$ için 1'e yakınsar. Limit süreksiz olduğundan yakınsama düzgün değildir (Sonuç 4.2) ve Teorem 5.1 bütün aralıkta uygulanamaz. Sorunlu uç noktayı küçük bir aralıkla ayıralım.
$\varepsilon > 0$ verilsin; $\varepsilon < \pi$ varsayabiliriz. $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ alalım ve integrali ikiye bölelim:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2-\delta} \sin^n x\,dx + \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2} \sin^n x\,dx.$$

İkinci parça. $0 \leq \sin^n x \leq 1$ olduğundan bu integral en çok aralığın uzunluğu kadardır: $\leq \delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci parça. $\left[0, \dfrac{\pi}{2} - \delta\right]$ üzerinde sinüs artandır; $r = \sin\!\left(\dfrac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos\delta \in (0,1)$ yazılırsa $0 \le \sin^n x \le r^n$ olur. $r^n \to 0$ olduğundan bu aralıkta $\sin^n x \rightrightarrows 0$ ve

$$0 \le \int_0^{\pi/2-\delta} \sin^n x\,dx \le \frac{\pi}{2}\, r^n \to 0$$

olur. Öyleyse öyle bir N vardır ki $n \ge N$ için birinci parça $\dfrac{\varepsilon}{2}$'den küçüktür.
Sonuç. $n \ge N$ için

$$0 \le \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur; limit 0'dır. Bu örnek, düzgün yakınsaklığın yalnız küçük bir bölgede bozulduğu durumlarda izlenecek yolu gösterir: sorunlu bölge ayrılır ve orada integral doğrudan sınırlanır. ■

Alıştırma 5.5 (İntegral Fonksiyonlarının Düzgün Limiti). $[0,1]$ üzerinde $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\cos(nt)}{n}\,dt$ dizisinin düzgün limitini Teorem 5.1 (iii) yardımıyla bulunuz ve sonucu doğrudan hesapla doğrulayınız.

Çözüm.
$f_n(t) = \dfrac{\cos(nt)}{n}$ için $\mid f_n(t) - 0 \mid \le \dfrac{1}{n} \to 0$ olduğundan $f_n \rightrightarrows 0$ ($[0,1]$). Terimler süreklidir. Teorem 5.1 (iii) gereği

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_0^x 0\,dt = 0 \qquad ([0,1]).$$

Doğrudan hesap. $F_n(x) = \left[\dfrac{\sin(nt)}{n^2}\right]_0^x = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ olur ve $\mid F_n(x) \mid \le \dfrac{1}{n^2} \to 0$ sınırlaması aynı sonucu verir. ■

Düzgün yakınsaklığın integralle uyumunu gördük. Türevle ilişki daha incedir: düzgün yakınsak bir dizinin türevleri yakınsamayabilir. Düzgün Yakınsaklık ve Türev bölümünde terim terime türev için doğru koşulun ne olduğunu araştırıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

6. Düzgün Yakınsaklık ve Türev

Süreklilik ve integral için tablo yalındı: $f_n \rightrightarrows f$ ise süreklilik de integral de limite geçer. Türev için aynı şeyi bekleyip

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

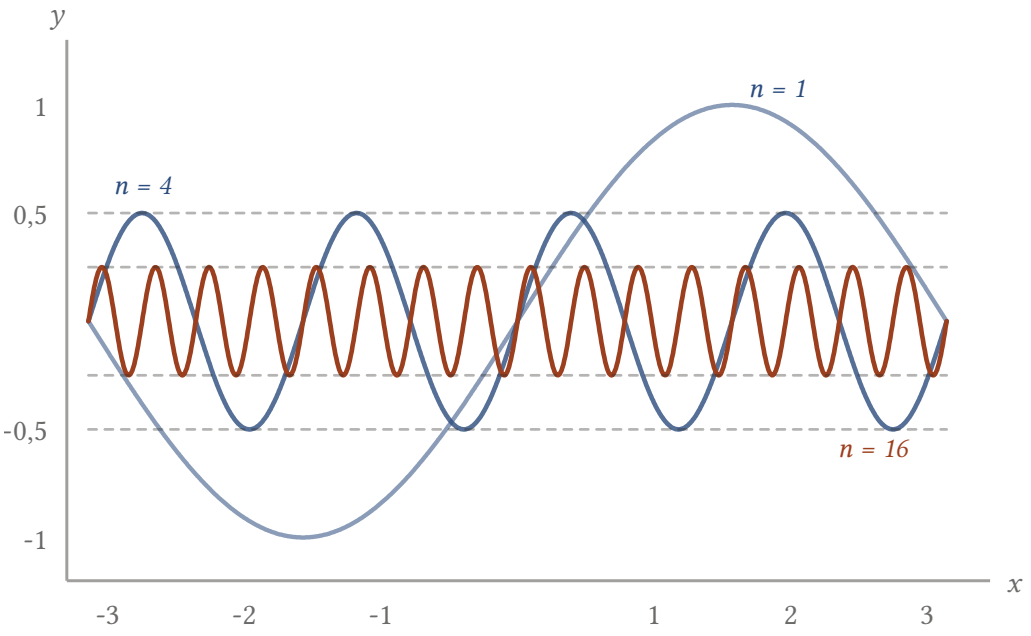
eşitliğini yazmak isteriz. Ama bu beklenti boşa çıkar. Düzgün yakınsaklık grafiklerin birbirine yakın olmasını ölçer; türev ise grafiğin eğimidir ve birbirine çok yakın iki grafiğin eğimleri çok farklı olabilir. Küçük genlikli ama sık salınan bir dalga, yatay eksene ne kadar yakın olursa olsun dik eğimlere sahiptir. Bu bölümde önce düzgün yakınsaklığın türev için neden yetmediğini üç örnekle görüyor, sonra doğru koşulu buluyoruz: düzgün yakınsaklık f_n dizisinden değil, **türev dizisi** f_n''den istenmelidir.

6.1 Düzgün Yakınsaklık Türevi Korumaz

Sorunun üç ayrı biçimi vardır: türevlerin dizisi hiç yakınsamayabilir, limit fonksiyonu türevlenebilir olmayabilir ya da her ikisi de var olduğu hâlde eşit çıkmayabilir.

Örnek 6.1 (Türevleri Iraksayan Düzgün Yakınsak Dizi). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ dizisinin düzgün yakınsadığını, ama (f_n') türev dizisinin $x = 0$ noktasında ıraksadığını gösteriniz.

Çözüm.



Şekil 6.1: $f_n(x) = \sin(nx)/\sqrt{n}$ dizisinin $n = 1, 4, 16$ terimleri. Genlik $1/\sqrt{n}$ ile küçülür, ama salınım sıklaştığından eğimler $\sqrt{n}$ ile büyür.

Örnek 2.1 gereği $f_n \rightrightarrows 0$ $(\mathbb{R})$; limit fonksiyonu $f = 0$ türevlenebilirdir ve $f' = 0$'dır. Öte yandan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\cos(nx)$$

olur ve $x = 0$ için $f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty$ bulunur. $\left(f_n'(0) \right)$ dizisi ıraksaktır; $\lim_{n\to\infty} f_n'(0)$ yoktur ve $f'(0) = 0$ değerine eşit olamaz.
Şekil nedenini gösterir: n büyüdükçe dalganın yüksekliği $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ile küçülür, ama dalga sayısı n ile arttığından eğimler $\sqrt{n}$ ile büyür. ■

Örnek 6.2 (Türevlenebilir Fonksiyonların Köşeli Düzgün Limiti). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$ dizisinin düzgün limitinin $x = 0$ noktasında türevlenebilir olmadığını gösteriniz ve (f_n') dizisinin noktasal limitini bulunuz.

Çözüm.
Alıştırma 2.4 gereği $f_n \rightrightarrows |\,x\,|$ $(\mathbb{R})$. Her f_n türevlenebilirdir, çünkü kök içindeki ifade hep pozitiftir. Limit fonksiyonu $f(x) = |\,x\,|$ ise $x = 0$'da türevlenebilir değildir: sağdan türev 1, soldan türev -1'dir. Türev dizisi

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}}$$

olur. $x = 0$ için $f_n'(0) = 0 \to 0$; $x \neq 0$ için $\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} \to |\,x\,|$ olduğundan $f_n'(x) \to \dfrac{x}{|\,x\,|}$. Noktasal limit

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Her f_n' sürekli, g ise 0'da süreksiz olduğundan $f_n' \to g$ yakınsaması 0'ı içeren hiçbir aralıkta düzgün değildir (Sonuç 4.2). ■

Örnek 6.3 (Türevlerin Limiti Limitin Türevine Eşit Olmayabilir). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$ dizisi için $f = \lim f_n$ ve $g = \lim f_n'$ fonksiyonlarını bulunuz; $f'(0)$ ile $g(0)$ değerlerini karşılaştırınız.

Çözüm.
Alıştırma 3.1 gereği $f_n \rightrightarrows 0$ $(\mathbb{R})$; yani $f = 0$ ve her x için $f'(x) = 0$'dır.
Aynı alıştırmada hesaplanan türev

$$f_n'(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}$$

idi. $x = 0$ için $f_n'(0) = 1 \to 1$. $x \neq 0$ için pay ve paydayı n^2 ile bölelim:

$$f_n'(x) = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{x^2}{n}}{\left(\frac{1}{n} + x^2\right)^2} \to \frac{0}{x^4} = 0.$$

Öyleyse $g(0) = 1$ ve $x \neq 0$ için $g(x) = 0$'dır. $x = 0$ noktasında

$$f'(0) = 0 \neq 1 = g(0) = \lim_{n\to\infty} f_n'(0)$$

olur. Dizi düzgün yakınsar, limit türevlenebilirdir, türevlerin dizisi her noktada yakınsar; buna rağmen limit ile türev $x = 0$'da yer değiştirmez. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

6.2 Terim Terime Türev Teoremi

Üç örnekte de eksik olan şey, türev dizisinin düzgün yakınsamasıdır. Bu koşul sağlandığında dizinin kendisinden çok az şey istemek yeter: tek bir noktada yakınsaklık.

Teorem 6.1 (Terim Terime Türev Teoremi). *$a < b$ olsun ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlansın:*

(i) en az bir $x_0 \in [a,b]$ için $\left(f_n(x_0) \right)$ sayı dizisi yakınsaktır;

(ii) (f_n') türev dizisi $[a,b]$ üzerinde bir g fonksiyonuna düzgün yakınsar.

O zaman (f_n) dizisi $[a,b]$ üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsar, f türevlenebilirdir ve her $x \in [a,b]$ için

$$f'(x) = g(x), \qquad \text{yani} \qquad \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

olur. (Uç noktalarda türev tek yönlü türev olarak anlaşılır.)

İspat.
Adım 1: Temel eşitsizlik. *$\varepsilon > 0$ verilsin. (f_n') düzgün yakınsak olduğundan düzgün Cauchy dizisidir (Teorem 3.4): öyle bir N_1 vardır ki $n, m \geq N_1$ ve her $t \in [a,b]$ için*

$$| f_n'(t) - f_m'(t) | < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{1}$$

olur. $n, m \geq N_1$ sabitlensin ve $h = f_n - f_m$ yazılsın; h türevlenebilirdir. $x, t \in [a,b], x \neq t$ için Lagrange ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) x ile t arasında

$$h(x) - h(t) = h'(c)\,(x - t)$$

olacak biçimde bir c noktası verir. (1) eşitsizliği $| h'(c) | < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$ demektir; dolayısıyla $n, m \geq N_1$ ve her $x, t \in [a,b]$ için

$$\left| \left(f_n(x) - f_m(x) \right) - \left(f_n(t) - f_m(t) \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} | x - t | \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

bulunur ($x = t$ için sol yan 0'dır).
Adım 2: (f_n) düzgün yakınsar. *$\left(f_n(x_0) \right)$ yakınsak olduğundan Cauchy dizisidir: öyle bir N_2 vardır ki $n, m \geq N_2$ için $| f_n(x_0) - f_m(x_0) | < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olur. $N = \max\{N_1, N_2\}$ alalım. $n, m \geq N$ ve $x \in [a,b]$ için (2) eşitsizliğini $t = x_0$ ile kullanarak*

$$\begin{aligned} | f_n(x) - f_m(x) | &\leq \left| \left(f_n(x) - f_m(x) \right) - \left(f_n(x_0) - f_m(x_0) \right) \right| + | f_n(x_0) - f_m(x_0) | \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde ederiz. (f_n), $[a,b]$ üzerinde düzgün Cauchy dizisidir; Teorem 3.4 gereği bir f fonksiyonuna düzgün yakınsar.
Adım 3: Fark oranları. *$x \in [a,b]$ sabitlensin. $[a,b]$ üzerinde*

$$\Phi_n(t) = \begin{cases} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, & t \neq x \\ f_n'(x), & t = x \end{cases} \qquad \Phi(t) = \begin{cases} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, & t \neq x \\ g(x), & t = x \end{cases}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. f_n, x noktasında türevlenebilir olduğundan $\lim_{t\to x} \Phi_n(t) = f_n'(x) = \Phi_n(x)$ olur; yani her Φ_n, x noktasında süreklidir.
$\Phi_n \to \Phi$ noktasal yakınsar: $t \neq x$ için $f_n(t) \to f(t)$ ve $f_n(x) \to f(x)$ olduğundan $\Phi_n(t) \to \Phi(t)$; $t = x$ için $\Phi_n(x) = f_n'(x) \to g(x) = \Phi(x)$.
Adım 4: (Φ_n) düzgün yakınsar. *$n, m \geq N_1$ olsun. $t \neq x$ için (2) eşitsizliğinin ilk yarısını $| t - x |$ ile bölersek*

$$| \Phi_n(t) - \Phi_m(t) | = \frac{\left| \left(f_n(t) - f_m(t) \right) - \left(f_n(x) - f_m(x) \right) \right|}{| t - x |} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $t = x$ için $\Phi_n(x) - \Phi_m(x) = f_n'(x) - f_m'(x)$ olduğundan (1) eşitsizliği aynı sınırı verir. ε keyfi olduğundan (Φ_n), $[a,b]$ üzerinde düzgün Cauchy dizisidir; Teorem 3.4 gereği düzgün yakınsaktır. Düzgün limit noktasal limite eşit olduğundan $\Phi_n \rightrightarrows \Phi$ ($[a,b]$).
Adım 5: Sonuç. *Her Φ_n, x noktasında süreklidir ve $\Phi_n \rightrightarrows \Phi$'dir. Teorem 4.2 gereği Φ de x noktasında süreklidir:*

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \Phi(t) = \Phi(x) = g(x).$$

Bu, f'nin x noktasında türevlenebilir olduğunu ve $f'(x) = g(x)$ olduğunu söyler. $x \in [a,b]$ keyfiydi. ■

Türevler sürekliyse kısa ispat.
Her f_n' fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğu durumda teorem integral teoreminden doğrudan çıkar. f_n' sürekli olduğundan analizin temel teoremi (bkz. Analiz 2) her $x \in [a,b]$ için

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \tag{3}$$

verir. $L = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ olsun. $f_n' \rightrightarrows g$ olduğundan g süreklidir (Teorem 4.2) ve Teorem 5.1 (iii) gereği $\int_a^x f_n'(t)\,dt$ integralleri x'e göre düzgün olarak $\int_a^x g(t)\,dt$'ye yakınsar. $\int_{x_0}^{x} = \int_a^x - \int_a^{x_0}$ olduğundan ve çıkarılan sayılar da yakınsadığından aynı şey $\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$ için geçerlidir. $f_n(x_0) \to L$ sabit dizisi de düzgün yakınsak olduğundan Teorem 2.1 (i) ile (3) eşitliğinden

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) = L + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \qquad ([a,b])$$

bulunur. g sürekli olduğundan sağdaki integral fonksiyonu türevlenebilirdir ve türevi g'dir (bkz. Analiz 2). Öyleyse $f' = g$. ■

Teoremin koşullarını yorumlayalım. (ii) koşulu asıl yükü taşır: eğimler düzgün yakınsar. (i) koşulu ise yalnız bir "çapa"dır. Türevler bir fonksiyonu ancak bir sabit farkıyla belirler; $f_n(x) = n$ sabit fonksiyonlarında $f_n' = 0$ düzgün yakınsar, ama dizinin kendisi hiçbir noktada yakınsamaz. Tek bir x_0 noktasındaki yakınsaklık bu serbestliği ortadan kaldırır.

Dört adımda terim terime türev

1. **Çapa noktası.** Bir x_0 noktasında $\big(\ f_n(x_0)\ \big)$ dizisinin yakınsadığı gösterilir (çoğu zaman noktasal limit zaten bulunmuştur).
2. **Türev dizisi.** f_n' hesaplanır ve noktasal limiti g bulunur.
3. **Düzgün yakınsaklık.** $f_n' \rightrightarrows g$ olduğu bir ölçütle gösterilir.
4. **Sonuç.** $f = \lim f_n$ türevlenebilirdir ve $f' = g$'dir.

Örnek 6.4 (Teoremin Doğrudan Uygulanması). $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde $f_n(x) = x - \dfrac{x^n}{n}$ dizisinin terim terime türevlenebildiğini gösteriniz.

Çözüm.
Çapa noktası. $x_0 = 0$ için $f_n(0) = 0 \to 0$.
Türev dizisi. $f_n'(x) = 1 - x^{n-1}$. $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$ ve $n \ge 2$ için $x^{n-1} \to 0$ olduğundan noktasal limit $g(x) = 1$'dir.
Düzgün yakınsaklık. $n \ge 2$ ve $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için

$$\mid f_n'(x) - 1 \mid = x^{n-1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$$

olduğundan Teorem 3.1 gereği $f_n' \rightrightarrows 1$ $\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç. Teorem 6.1 gereği (f_n) düzgün yakınsar, limiti f türevlenebilirdir ve $f' = 1$'dir. Gerçekten de $\left|\dfrac{x^n}{n}\right| \le \dfrac{1}{n\,2^n} \to 0$ olduğundan $f(x) = x$ ve $f'(x) = 1$ olur. ■

6.2.1 Sınırsız aralıklar

Teorem 6.1 sınırlı bir $[a,b]$ aralığı için ifade edildi; ispatta (2) eşitsizliğinde $\mid x - t \mid \le b - a$ sınırı kullanıldı. Sınırsız bir aralıkta f_n dizisinin düzgün yakınsaklığı kaybolabilir, ama türev formülü geçerli kalır.

Sonuç 6.1 (Herhangi Bir Aralıkta Terim Terime Türev). *$I \subseteq \mathbb{R}$ birden çok nokta içeren bir aralık ve her n için $f_n : I \to \mathbb{R}$ türevlenebilir olsun. Bir $x_0 \in I$ için $\big(\, f_n(x_0) \,\big)$ yakınsak ve $f_n' \rightrightarrows g$ (I) ise (f_n) dizisi I üzerinde bir f fonksiyonuna noktasal yakınsar, bu yakınsama I'nin kapalı ve sınırlı her alt aralığında düzgündür, f türevlenebilirdir ve I üzerinde $f' = g$'dir.*

İspat.
$x \in I$ verilsin. x_0 ve x noktalarını içeren, I'nin alt kümesi olan bir $[c,d]$ kapalı ve sınırlı aralığı seçelim $(c < d)$; x, I'nin bir uç noktası değilse $[c,d]$ aralığı x'i iç nokta olarak içerecek biçimde seçilir. Önerme 2.3 gereği $f_n' \rightrightarrows g$ $([c,d])$ olur. Teorem 6.1, $[c,d]$ aralığına uygulanırsa (f_n) dizisinin $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsadığını, limitin türevlenebilir olduğunu ve türevinin g olduğunu verir. Özel olarak $\big(\, f_n(x) \,\big)$ yakınsaktır; limitine $f(x)$ diyelim. Limit tek olduğundan farklı $[c,d]$ seçimleri aynı $f(x)$ değerini verir. Böylece f, I üzerinde tanımlanır ve $f'(x) = g(x)$ olur.
Kapalı ve sınırlı herhangi bir $[\alpha,\beta] \subseteq I$ alt aralığı verildiğinde $[c,d]$, hem x_0'ı hem $[\alpha,\beta]$'yı içerecek biçimde seçilebilir; (f_n) dizisi $[c,d]$ üzerinde, dolayısıyla $[\alpha,\beta]$ üzerinde düzgün yakınsar. ■

Örnek 6.5 (Sınırsız Aralıkta Terim Terime Türev). $[0,+\infty)$ üzerinde $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}\cos\dfrac{x}{n}$ dizisi noktasal yakınsak mıdır? Türev dizisi düzgün yakınsak mıdır? Dizi terim terime türevlenebilir mi?

Çözüm.
Noktasal limit. $x \ge 0$ sabit olsun. $\left|\cos\dfrac{x}{n}\right| \le 1$ olduğundan

$$0 \le \left|\frac{1}{n}\cos\frac{x}{n}\right| \le \frac{1}{n} \to 0$$

olur; sıkıştırma teoremiyle $\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{x}{n} \to 0$ ve $f_n(x) \to x$. Noktasal limit $f(x) = x$'tir. (Sınır x'ten bağımsız olduğundan yakınsama aslında düzgündür.)
Türev dizisi. Zincir kuralıyla

$$f_n'(x) = 1 - \frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}$$

olur. $\dfrac{1}{n^2} \to 0$ ve $\sin\dfrac{x}{n}$ sınırlı olduğundan noktasal limit $g(x) = 1$'dir.
Düzgün yakınsaklık. Her $x \ge 0$ için

$$\mid f_n'(x) - 1 \mid = \frac{1}{n^2}\left|\sin\frac{x}{n}\right| \le \frac{1}{n^2} = \alpha_n, \qquad \alpha_n \to 0$$

olduğundan Teorem 3.1 gereği $f_n' \rightrightarrows 1$ $([0,+\infty))$.
Sonuç. $x_0 = 0$ için $f_n(0) = \dfrac{1}{n} \to 0$ yakınsaktır ve türev dizisi düzgün yakınsaktır. Sonuç 6.1 gereği dizi terim terime türevlenebilir:

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = 1.$$

Gerçekten de $f(x) = x$ için $f'(x) = 1$'dir. ■

Örnek 6.6 (Türevler Düzgün Yakınsar, Dizi Düzgün Yakınsamaz). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)x$ dizisi için (f_n') dizisinin düzgün yakınsadığını, ama (f_n) dizisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsamadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $f_n'(x) = 1 + \dfrac{1}{n}$ sabit fonksiyondur ve $\mid f_n'(x) - 1 \mid = \dfrac{1}{n} \to 0$ olduğundan $f_n' \rightrightarrows 1$ ($\mathbb{R}$). $x_0 = 0$'da $f_n(0) = 0$ yakınsaktır. Sonuç 6.1 gereği $f_n \to f$ noktasal yakınsar ve $f' = 1$'dir; gerçekten $f(x) = x$. Ancak $\mid f_n(x) - x \mid = \dfrac{\mid x \mid}{n}$ olur ve $x_n = n$ için bu fark 1'dir. Teorem 3.2 gereği yakınsama $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün değildir. Her $[-R, R]$ aralığında ise $\dfrac{\mid x \mid}{n} \le \dfrac{R}{n} \to 0$ olduğundan düzgündür; bu, sonucun söylediğiyle uyumludur. ■

6.3 Alıştırmalar

Alıştırma 6.1 (Uç Noktada Bozulan Türev Eşitliği). $[0,1]$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ dizisi için $f = \lim f_n$ ve $g = \lim f_n'$ fonksiyonlarını bulunuz. $f' = g$ eşitliği hangi noktalarda sağlanır?

> **Çözüm.**
> **Dizinin limiti.** $x \in [0,1]$ için $\left|\dfrac{x^n}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} \to 0$ olduğundan $f_n \rightrightarrows 0$ ($[0,1]$); $f = 0$ ve $f' = 0$.
> **Türevlerin limiti.** $f_n'(x) = x^{n-1}$. $0 \le x < 1$ için $x^{n-1} \to 0$, $x = 1$ için $f_n'(1) = 1 \to 1$. Dolayısıyla
> $$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$
> olur.
> **Karşılaştırma.** $[0,1)$ üzerinde $f'(x) = 0 = g(x)$ eşitliği sağlanır. $x = 1$ noktasında $f'(1) = 0 \neq 1 = g(1)$ olur. Teorem 6.1 ile çelişki yoktur: her f_n' sürekli, g ise $x = 1$'de süreksiz olduğundan $f_n' \to g$ yakınsaması $[0,1]$ üzerinde düzgün değildir (Sonuç 4.2). ■

Alıştırma 6.2 (Hızlı Sönen Salınım). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ dizisinin terim terime türevlenebildiğini gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Çapa noktası.** $f_n(0) = 0 \to 0$.
> **Türev dizisi.** $f_n'(x) = \dfrac{n\cos(nx)}{n^2} = \dfrac{\cos(nx)}{n}$ ve her x için $\mid f_n'(x) \mid \le \dfrac{1}{n} \to 0$. Teorem 3.1 gereği $f_n' \rightrightarrows 0$ ($\mathbb{R}$).
> **Sonuç.** Sonuç 6.1 gereği $f = \lim f_n$ türevlenebilirdir ve $f' = 0$'dır. Doğrulama: $\mid f_n(x) \mid \le \dfrac{1}{n^2} \to 0$ olduğundan $f = 0$ ve $f' = 0$.
> Örnek 6.1 ile karşılaştıralım: orada payda $\sqrt{n}$ idi ve türevler $\sqrt{n}$ ile büyüyordu. Burada payda n^2 olduğundan türev alınınca gelen n çarpanına rağmen $\dfrac{1}{n}$ kalır. ■

Alıştırma 6.3 (Yumuşatılmış Köşe). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\ln(1 + e^{nx})$ dizisinin $f(x) = \max\{x, 0\}$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösteriniz ve (f_n') dizisinin noktasal limitini bulunuz.

> **Çözüm.**
> **Düzgün yakınsaklık.** İki durumu ayıralım.
> - $x \le 0$ ise $f(x) = 0$ ve $0 < e^{nx} \le 1$ olduğundan

CC BY-NC-SA 4.0

$$0 < f_n(x) - f(x) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{nx}) \le \frac{\ln 2}{n}.$$

- $x > 0$ ise $f(x) = x$ olur. $1 + e^{nx} = e^{nx}(1+e^{-nx})$ yazılırsa $f_n(x) = x + \frac{1}{n}\ln(1+e^{-nx})$ bulunur ve $0 < e^{-nx} < 1$ olduğundan

$$0 < f_n(x) - f(x) = \frac{1}{n}\ln(1+e^{-nx}) < \frac{\ln 2}{n}.$$

Her $x \in \mathbb{R}$ için $\mid f_n(x) - f(x) \mid \le \frac{\ln 2}{n} \to 0$ olduğundan Teorem 3.1 gereği $f_n \rightrightarrows \max\{x, 0\}$ $(\mathbb{R})$.
Türev dizisi. $f_n'(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{ne^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

- $x < 0$ ise $e^{nx} \to 0$ ve $f_n'(x) \to 0$.
- $x = 0$ ise $f_n'(0) = \frac{1}{2}$.
- $x > 0$ ise $f_n'(x) = \frac{1}{e^{-nx}+1} \to 1$.

Noktasal limit, $x < 0$ için 0, $x = 0$ için $\frac{1}{2}$, $x > 0$ için 1 değerini alan g fonksiyonudur. f fonksiyonu $x = 0$'da türevlenebilir değildir (soldan türev 0, sağdan türev 1); $x \neq 0$ için ise $f'(x) = g(x)$ olur. g süreksiz olduğundan $f_n' \to g$ yakınsaması 0'ı içeren hiçbir aralıkta düzgün değildir. ■

Alıştırma 6.4 (Çapa Noktası Neden Gerekli?). $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n(x) = \frac{x}{n} + (-1)^n$ dizisi için (f_n') dizisinin düzgün yakınsadığını, ama (f_n) dizisinin hiçbir noktada yakınsamadığını gösteriniz.

Çözüm.
$f_n'(x) = \frac{1}{n}$ olur ve $\mid f_n'(x) - 0 \mid = \frac{1}{n} \to 0$ olduğundan $f_n' \rightrightarrows 0$ $(\mathbb{R})$.
$x \in \mathbb{R}$ sabit olsun. $\frac{x}{n} \to 0$ olur. $\big(\, f_n(x) \,\big)$ yakınsak olsaydı $(-1)^n = f_n(x) - \frac{x}{n}$ dizisi de iki yakınsak dizinin farkı olarak yakınsak olurdu; oysa $\big(\, (-1)^n \,\big)$ ıraksaktır (bkz. Analiz 1). Öyleyse (f_n) hiçbir noktada yakınsamaz.
Terim terime türev teoreminin (Teorem 6.1) (i) koşulu sağlanmadığından teorem uygulanamaz; bu örnek o koşulun atılamayacağını gösterir. ■

Fonksiyon dizileri için düzgün yakınsaklığın üç büyük sonucunu tamamladık: süreklilik, integral ve türev. Bir fonksiyon serisi, kısmi toplamlarının dizisinden başka bir şey değildir; Fonksiyon Serileri bölümünde bütün bu sonuçları serilerin diline çeviriyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

7. Fonksiyon Serileri

Bir sayı serisi, kısmi toplamlarının dizisinden ibarettir; serinin yakınsaklığı o dizinin yakınsaklığıdır. Terimleri fonksiyon olan seriler için de aynı şey geçerlidir: $\sum f_n$ serisini anlamak, $S_n = f_1 + ... + f_n$ kısmi toplamlarından oluşan **fonksiyon dizisini** anlamaktır. Bu yüzden önceki bölümlerde fonksiyon dizileri için kurduğumuz her kavram ve her teorem, serilere hemen çevrilebilir.
Yine de serilerin kendine özgü bir yanı vardır. Kısmi toplamın kapalı bir formülü çoğu zaman bulunamaz; dolayısıyla $\sup|\ S_n - S\ |$ sayısını hesaplamak mümkün olmaz. Bunun yerine yalnız terimlere bakarak karar veren ölçütlere ihtiyaç duyulur. Bu bölümün ana aracı olan Weierstrass M-testi tam da bunu yapar. M-testi mutlak yakınsamayan serilerde işe yaramadığında Dirichlet ve Abel testleri devreye girer.

7.1 Noktasal, Mutlak ve Düzgün Yakınsaklık

Tanımlarla başlayalım; hepsi kısmi toplamlar dizisi üzerinden verilir.

Tanım 7.1 (Fonksiyon Serisi ve Kısmi Toplamlar). $E \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir küme ve (f_n), E üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \qquad (x \in E)$$

ile tanımlı (S_n) fonksiyon dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **fonksiyon serisinin kısmi toplamlar dizisi**, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ biçimsel toplamına da E üzerinde bir **fonksiyon serisi** denir.

Yani bir fonksiyon serisi, her $x \in E$ için bir $\sum f_n(x)$ sayı serisi verir. Toplamın $n = 0$'dan ya da başka bir indisten başlaması hiçbir şeyi değiştirmez; kısmi toplamlar buna göre yazılır.

Tanım 7.2 (Noktasal Yakınsaklık ve Yakınsaklık Kümesi). $\sum f_n$, E üzerinde bir fonksiyon serisi olsun. (S_n) kısmi toplamlar dizisi E üzerinde bir S fonksiyonuna noktasal yakınsıyorsa seri E üzerinde **noktasal yakınsaktır** denir; S fonksiyonuna serinin **toplamı** denir ve

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (x \in E)$$

yazılır. $\sum f_n(x)$ sayı serisinin yakınsak olduğu bütün x noktalarının kümesine serinin **yakınsaklık kümesi** denir.

Yani noktasal yakınsaklıkta x sabitlenir ve $\sum f_n(x)$ sıradan bir sayı serisi olarak incelenir; Analiz 2'nin bütün yakınsaklık testleri bu iş için kullanılabilir.

Tanım 7.3 (Mutlak Yakınsaklık). $\sum|\ f_n\ |$ serisi E üzerinde noktasal yakınsaksa, yani her $x \in E$ için $\sum|\ f_n(x)\ |$ sayı serisi yakınsaksa $\sum f_n$ serisi E üzerinde **mutlak yakınsaktır** denir.

Yani mutlak yakınsaklık da nokta nokta denetlenen bir özelliktir. Mutlak yakınsak her sayı serisi yakınsak olduğundan (bkz. Analiz 2) E üzerinde mutlak yakınsak bir fonksiyon serisi E üzerinde noktasal yakınsaktır.

Tanım 7.4 (Fonksiyon Serisinin Düzgün Yakınsaklığı). (S_n) kısmi toplamlar dizisi E üzerinde S fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa, yani $S_n \rightrightarrows S\ (E)$ ise $\sum f_n$ serisi E üzerinde S'ye **düzgün yakınsar** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani serinin düzgün yakınsaklığı yeni bir kavram değildir; kısmi toplamlar dizisinin düzgün yakınsaklığıdır. Seri noktasal yakınsakken

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

fonksiyonuna serinin ***n'inci kalanı*** denir. Düzgün yakınsaklık, Teorem 3.3 gereği

$$\sup_{x\in E} \mid R_n(x) \mid \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

olmasına denktir: kalan, E'nin bütün noktalarında aynı anda küçülür.

Örnek 7.1 (Geometrik Fonksiyon Serisi). $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisinin yakınsaklık kümesini ve toplamını bulunuz. Seri $0 < r < 1$ olmak üzere $[-r, r]$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır? $(-1, 1)$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm.
Yakınsaklık kümesi ve toplam. x sabitken $\sum x^n$ bir geometrik seridir; $\mid x \mid < 1$ için yakınsar, $\mid x \mid \geq 1$ için ıraksar (bkz. Analiz 2). Yakınsaklık kümesi $(-1, 1)$ aralığıdır. Kısmi toplam ve toplam

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \qquad S(x) = \frac{1}{1 - x} \qquad (\mid x \mid < 1)$$

olur. $\mid x \mid < 1$ için $\sum \mid x \mid^n$ de yakınsak olduğundan seri $(-1, 1)$ üzerinde mutlak yakınsaktır.
$[-r, r]$ üzerinde. Kalan $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{1 - x}$'tir. $\mid x \mid \leq r$ için $\mid x \mid^{n+1} \leq r^{n+1}$ ve $1 - x \geq 1 - r > 0$ olduğundan

$$\mid R_n(x) \mid \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r} \to 0$$

olur. Sınır x'ten bağımsızdır; Teorem 3.1 gereği seri $[-r, r]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
$(-1, 1)$ üzerinde. Her S_n bir polinomdur ve $(-1, 1)$ üzerinde sınırlıdır: $\mid S_n(x) \mid \leq n + 1$. Toplam $S(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ ise $x \to 1^-$ iken sınırsız büyür. Sonuç 4.1 gereği yakınsama $(-1, 1)$ üzerinde düzgün değildir. ■

Bu örnek tipiktir: bir fonksiyon serisi yakınsaklık kümesinin tamamında düzgün yakınsamayabilir, ama kümenin uçlarından uzak duran alt kümelerde düzgün yakınsar.

7.2 Cauchy Kriteri ve Gerek Koşul

Kısmi toplamlar dizisine Teorem 3.4 uygulanınca serilerin Cauchy kriteri elde edilir.

Teorem 7.1 (Fonksiyon Serileri için Cauchy Kriteri). *$\sum f_n$ serisinin E üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul şudur: her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır ki $n > m \geq N$ olan her n, m ve her $x \in E$ için*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| = \mid f_{m+1}(x) + f_{m+2}(x) + \ldots + f_n(x) \mid < \varepsilon$$

olur.

İspat.
$n > m$ için $S_n(x) - S_m(x) = \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)$'tir. Dolayısıyla ifadedeki koşul, (S_n) dizisinin E üzerinde düzgün Cauchy dizisi olması demektir ($n = m$ durumunda fark 0'dır, $n < m$ durumu ise rollerin değişimiyle aynıdır). Teorem 3.4 gereği bu, (S_n) dizisinin, yani serinin E üzerinde düzgün yakınsamasına denktir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç 7.1 (Düzgün Yakınsaklığın Gerek Koşulu). *$\sum f_n$ serisi E üzerinde düzgün yakınsaksa $f_n \rightrightarrows 0$ (E) olur.*

> ***İspat.***
> *$\varepsilon > 0$ verilsin. Teorem 7.1 koşulundaki N için $m \geq N$ ve $n = m+1$ alınırsa her $x \in E$ için $| f_{m+1}(x) | < \varepsilon$ bulunur. Yani $n \geq N+1$ olan her n ve her $x \in E$ için $| f_n(x) - 0 | < \varepsilon$'dur; bu, $f_n \rightrightarrows 0$ (E) demektir.* ■

Sonucun karşıt tersi bir ıraksaklık testi gibi çalışır: genel terim E üzerinde 0'a düzgün yakınsamıyorsa seri E üzerinde düzgün yakınsak olamaz. Örneğin $\sum x^n$ serisinde $\sup_{x\in(-1,1)} | x^n | = 1$ olduğundan x^n dizisi $(-1,1)$ üzerinde 0'a düzgün yakınsamaz; bu, geometrik seri örneğindeki sonucun (Örnek 7.1) ikinci bir gerekçesidir. Sayı serilerindeki gibi, koşul yeterli değildir (Alıştırma 7.5).

7.3 Weierstrass M-Testi

Düzgün yakınsaklığı göstermenin en pratik yolu, her terimi x'ten bağımsız bir sayıyla sınırlamak ve bu sayıların serisinin yakınsadığını görmektir. Bu ölçütle Analiz 2'de kuvvet serilerini incelerken karşılaşmıştık (bkz. Analiz 2); burada Cauchy kriterine dayanan kısa bir ispatını veriyoruz.

Teorem 7.2 (Weierstrass M-Testi). *$\sum f_n$, E üzerinde bir fonksiyon serisi olsun. Öyle $M_n \geq 0$ sayıları bulunsun ki*

$$| f_n(x) | \leq M_n \quad (\text{her } x \in E, \text{her } n \in \mathbb{N}) \qquad \text{ve} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ yakınsak}$$

olsun. O zaman $\sum f_n$ serisi E üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

> ***İspat.***
> ***Mutlak yakınsaklık.*** *$x \in E$ sabit olsun. $0 \leq | f_n(x) | \leq M_n$ ve $\sum M_n$ yakınsak olduğundan karşılaştırma testi (bkz. Analiz 2) gereği $\sum | f_n(x) |$ yakınsaktır.*
> ***Düzgün yakınsaklık.*** *$\varepsilon > 0$ verilsin. $\sum M_n$ yakınsak bir sayı serisi olduğundan seriler için Cauchy ölçütü (bkz. Analiz 2) gereği öyle bir N vardır ki $n > m \geq N$ için*
>
> $$\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon$$
>
> *olur. Bu N yalnız ε'a bağlıdır. $n > m \geq N$ ve $x \in E$ için üçgen eşitsizliğiyle*
>
> $$\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} | f_k(x) | \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon$$
>
> *bulunur. Teorem 7.1 gereği $\sum f_n$, E üzerinde düzgün yakınsaktır.* ■

Koşulun bir n_0 indisinden sonra sağlanması da yeter; sonlu sayıda terim düzgün yakınsaklığı etkilemez. Aynı ispat $\sum | f_n |$ serisinin de E üzerinde düzgün yakınsadığını gösterir.

> **Üç adımda Weierstrass M-testi**
>
> 1. **Terimi sınırla.** $| f_n(x) |$ için E üzerinde geçerli, x içermeyen bir M_n üst sınırı bulunur. Açık bir sınır görülmüyorsa $M_n = \sup_{x\in E} | f_n(x) |$ türevle hesaplanır.
> 2. **Sayı serisini incele.** $\sum M_n$ serisinin yakınsaklığı bilinen bir testle (p-serisi, geometrik seri, oran testi) gösterilir.
> 3. **Sonuç.** Seri E üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Örnek 7.2 (Trigonometrik Bir Seri). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Her $x \in \mathbb{R}$ ve her n için

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

olur. $\sum \dfrac{1}{n^2}$ bir p-serisidir ve $p = 2 > 1$ olduğundan yakınsaktır (bkz. Analiz 2). Teorem 7.2 gereği seri $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. ■

Örnek 7.3 (Üstel Terimli Bir Seri). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{e^{nx}}$ serisinin $[1, +\infty)$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz ve toplamını bulunuz.

Çözüm.
$x \geq 1$ için $e^x \geq e$, yani $\dfrac{1}{e^x} \leq \dfrac{1}{e}$ olur. Dolayısıyla her n için

$$\left|\frac{2^n}{e^{nx}}\right| = \left(\frac{2}{e^x}\right)^n \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n = M_n$$

bulunur. $0 < \dfrac{2}{e} < 1$ olduğundan $\sum \left(\dfrac{2}{e}\right)^n$ geometrik serisi yakınsaktır. Teorem 7.2 gereği seri $[1, +\infty)$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.
Toplam. $x \geq 1$ sabitken seri, ortak çarpanı $q = \dfrac{2}{e^x} \in (0, 1)$ olan bir geometrik seridir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e^x}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{e^x}} = \frac{e^x}{e^x - 2}.$$

■

Örnek 7.4 (Supremumu Türevle Bulunan Bir Seri). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ serisinin $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f_n(x) = x^2 e^{-nx} \geq 0$ için açık bir üst sınır görünmüyor; supremumu türevle bulalım.

$$f_n'(x) = 2xe^{-nx} - nx^2 e^{-nx} = x\,(2 - nx)\,e^{-nx}$$

olur. $(0, +\infty)$ üzerindeki tek kritik nokta $x = \dfrac{2}{n}$'dir; solunda $f_n' > 0$, sağında $f_n' < 0$'dır. Ayrıca $f_n(0) = 0$'dır. Dolayısıyla

$$M_n = \sup_{x \geq 0} f_n(x) = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\, e^{-2} = \frac{4}{e^2 n^2}$$

bulunur. $\sum M_n = \dfrac{4}{e^2} \sum \dfrac{1}{n^2}$ yakınsaktır. Teorem 7.2 gereği seri $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
■

M-testi bir yeter koşuldur. Test mutlak yakınsaklık da verdiğinden, mutlak yakınsamayan bir seride hiçbir zaman işe yaramaz; oysa böyle bir seri düzgün yakınsak olabilir.

Örnek 7.5 (M-Testinin Uygulanamadığı Düzgün Yakınsak Seri). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n + x^2}$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu, ama hiçbir noktada mutlak yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Mutlak yakınsak değildir. x sabit olsun. $\dfrac{1}{n+x^2}$ ile $\dfrac{1}{n}$ dizilerinin oranı $\dfrac{n}{n+x^2} \to 1$ olduğundan limit karşılaştırma testi gereği $\sum \dfrac{1}{n+x^2}$ serisi harmonik seriyle birlikte ıraksar. Seri hiçbir x için mutlak yakınsak değildir; dolayısıyla M-testinin koşulunu sağlayan M_n sayıları bulunamaz.

Düzgün yakınsaktır. x sabitken $b_n = \dfrac{1}{n+x^2}$ dizisi pozitiftir, azalandır ve 0'a yakınsar. Leibniz testi gereği seri yakınsaktır ve alterne seriler için hata kestirimi (bkz. Analiz 2) kalanın mutlak değerinin ilk atılan terimi aşmadığını söyler:

$$\mid R_n(x) \mid \le b_{n+1} = \frac{1}{n+1+x^2} \le \frac{1}{n+1}.$$

Sağdaki sayı x'ten bağımsızdır ve 0'a gider. Teorem 3.1 gereği $S_n \rightrightarrows S$ $(\mathbb{R})$; seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

7.4 Dirichlet ve Abel Testleri

Mutlak yakınsamayan serilerde düzgün yakınsaklığı göstermek için terimi iki çarpana ayıran testler kullanılır. İkisi de Abel'in kısmi toplamlarla toplama formülüne dayanır (bkz. Analiz 2): (a_k), (b_k) sayı dizileri ve $B_k = b_1 + \ldots + b_k$ $(B_0 = 0)$ olmak üzere $1 \le m \le n$ için

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_m B_{m-1} - \sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, B_k. \tag{1}$$

Teorem 7.3 (Düzgün Yakınsaklık için Dirichlet Testi). *(f_n) ve (g_n), E üzerinde tanımlı fonksiyon dizileri olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:*

(i) *$\sum f_n$ serisinin kısmi toplamları E üzerinde düzgün sınırlıdır: öyle bir $M > 0$ vardır ki her n ve her $x \in E$ için $\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \le M$ olur;*

(ii) *her $x \in E$ için $\big(\, g_n(x) \,\big)$ sayı dizisi monotondur;*

(iii) *$g_n \rightrightarrows 0$ (E).*

O zaman $\sum f_n g_n$ serisi E üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat.
$F_k(x) = \sum_{j=1}^{k} f_j(x)$ yazalım; (i) gereği $\mid F_k(x) \mid \le M$'dir ($F_0 = 0$ için de). $x \in E$ sabitken (1) formülünü $a_k = g_k(x)$ ve $b_k = f_k(x)$ ile uygulayalım: $1 \le m \le n$ için

$$\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\, g_k(x) = g_n(x)F_n(x) - g_m(x)F_{m-1}(x) - \sum_{k=m}^{n-1} \big(\, g_{k+1}(x) - g_k(x) \,\big)\, F_k(x).$$

Mutlak değer alıp $\mid F_k(x) \mid \le M$ sınırını kullanalım:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\, g_k(x)\right| \le M \mid g_n(x) \mid + M \mid g_m(x) \mid + M \sum_{k=m}^{n-1} \mid g_{k+1}(x) - g_k(x) \mid .$$

(ii) *gereği $g_{k+1}(x) - g_k(x)$ farklarının hepsi aynı işaretlidir; dolayısıyla mutlak değerlerinin toplamı, toplamlarının mutlak değerine eşittir ve toplam teleskopiktir:*

$$\sum_{k=m}^{n-1} \mid g_{k+1}(x) - g_k(x) \mid = \mid g_n(x) - g_m(x) \mid \le \mid g_n(x) \mid + \mid g_m(x) \mid .$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Öyleyse

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\, g_k(x)\right| \leq 2M\ (\ |\ g_n(x)\ |+|\ g_m(x)\ |\ ) \tag{2}$$

olur. $\varepsilon > 0$ *verilsin. (iii) gereği öyle bir* N *vardır ki* $k \geq N$ *ve her* $x \in E$ *için* $|\ g_k(x)\ | < \dfrac{\varepsilon}{4M}$ *olur.* $n \geq m \geq N$ *ve* $x \in E$ *için* (2) *eşitsizliği*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\, g_k(x)\right| < 2M\Big(\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4M}\Big) = \varepsilon$$

verir. Teorem 7.1 gereği $\sum f_n g_n$, E *üzerinde düzgün yakınsaktır.* ■

Teorem 7.4 (Düzgün Yakınsaklık için Abel Testi). (f_n) *ve* (g_n), E *üzerinde tanımlı fonksiyon dizileri olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:*

(i) $\sum f_n$ *serisi* E *üzerinde düzgün yakınsaktır;*

(ii) her $x \in E$ *için* $(\ g_n(x)\ )$ *sayı dizisi monotondur;*

(iii) (g_n) *dizisi* E *üzerinde düzgün sınırlıdır: öyle bir* $K > 0$ *vardır ki her* n *ve her* $x \in E$ *için* $|\ g_n(x)\ | \leq K$ *olur.*

O zaman $\sum f_n g_n$ *serisi* E *üzerinde düzgün yakınsaktır.*

İspat.
$\varepsilon > 0$ *verilsin. (i) ve Teorem 7.1 gereği öyle bir* N' *vardır ki* $k > m' \geq N'$ *ve her* $x \in E$ *için* $\left|\sum_{j=m'+1}^{k} f_j(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3K}$ *olur.* $N = N'+1$ *alalım ve* $m' = m-1$ *yazalım:* $k \geq m \geq N$ *ve her* $x \in E$ *için*

$$|\ T_k(x)\ | < \frac{\varepsilon}{3K}, \qquad T_k(x) = \sum_{j=m}^{k} f_j(x) \tag{3}$$

olur. $m \geq N$ *ve* $x \in E$ *sabitlensin;* $F_k(x) = \sum_{j=1}^{k} f_j(x)$ *olmak üzere* $T_k = F_k - F_{m-1}$*'dir.* (1) *formülünü* $a_k = g_k(x)$, $b_k = f_k(x)$ *ile yazıp* $F_k = T_k + F_{m-1}$ *koyalım:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} f_k g_k &= g_n\,(T_n + F_{m-1}) - g_m F_{m-1} \\ &\quad - \sum_{k=m}^{n-1} (g_{k+1}-g_k)(T_k + F_{m-1}) \\ &= g_n T_n - \sum_{k=m}^{n-1} (g_{k+1}-g_k)\, T_k \\ &\quad + F_{m-1}\left[\, g_n - g_m - \sum_{k=m}^{n-1} (g_{k+1}-g_k)\,\right].\end{aligned}$$

Köşeli parantezin içi sıfırdır, çünkü son toplam teleskopiktir ve $g_n - g_m$*'ye eşittir. Öyleyse*

$$\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\, g_k(x) = g_n(x)\, T_n(x) - \sum_{k=m}^{n-1} (\ g_{k+1}(x) - g_k(x)\ )\, T_k(x)$$

olur. (3)*, (iii) ve Dirichlet testinin ispatındaki teleskopik toplam gözlemi ile*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\sum_{k=m}^{n} f_k(x)\, g_k(x)\right| < K\cdot\frac{\varepsilon}{3K} + \frac{\varepsilon}{3K}\sum_{k=m}^{n-1} \mid g_{k+1}(x) - g_k(x) \mid$$
$$= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K} \mid g_n(x) - g_m(x) \mid \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K}\cdot 2K = \varepsilon$$

bulunur. Bu, $n \ge m \ge N$ ve her $x \in E$ için geçerlidir; Teorem 7.1 gereği $\sum f_n g_n$ düzgün yakınsaktır. ■

İki testin koşullarını karşılaştıralım:

Tablo 7.1: Dirichlet ve Abel testlerinin koşulları

	$\sum f_n$	(g_n)
Dirichlet	kısmi toplamları düzgün sınırlı	her noktada monoton, $g_n \rightrightarrows 0$
Abel	düzgün yakınsak	her noktada monoton, düzgün sınırlı

Dirichlet testi $\sum f_n$'den daha azını, (g_n)'den daha fazlasını ister; Abel testinde durum tersinedir.

Örnek 7.6 (Dirichlet Testiyle Sinüs Serisi). $0 < \delta < \pi$ olsun. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ serisinin $[\delta, 2\pi - \delta]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f_n(x) = \sin(nx)$ ve $g_n(x) = \dfrac{1}{n}$ alalım. M-testi burada kullanılamaz: $\sin(nx)$ fonksiyonunun periyodu $\dfrac{2\pi}{n}$'dir ve n yeterince büyükken aralığın uzunluğu $2\pi - 2\delta$ bir tam periyodu aşar; o zaman aralıkta $|\sin(nx)| = 1$ olan bir nokta bulunur ve $\sup\left|\dfrac{\sin(nx)}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ olur. $\sum \dfrac{1}{n}$ ise ıraksaktır.
(ii) ve (iii). $g_n = \dfrac{1}{n}$ sabit fonksiyonları n'ye göre azalandır ve $\sup_x \mid g_n(x) \mid = \dfrac{1}{n} \to 0$ olduğundan $g_n \rightrightarrows 0$.
(i) Kısmi toplamların sınırı. Çarpımı farka çeviren

$$2\sin\frac{x}{2}\sin(kx) = \cos\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)$$

özdeşliğini $k = 1, \dots, n$ için toplayalım. Sağ yan teleskopiktir:

$$2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right).$$

$x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ için $\dfrac{x}{2} \in \left[\dfrac{\delta}{2}, \pi - \dfrac{\delta}{2}\right]$ olur ve bu aralıkta $\sin\dfrac{x}{2} \ge \sin\dfrac{\delta}{2} > 0$'dır. Sağ yanın mutlak değeri en çok 2 olduğundan

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right| \le \frac{2}{2\sin\frac{x}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}} = M$$

bulunur; sınır n'ye ve x'e bağlı değildir.
Teorem 7.3 gereği seri $[\delta, 2\pi - \delta]$ üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

Örnek 7.7 (Abel Testiyle Uç Noktaya Kadar Düzgün Yakınsaklık). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$ serisinin $[0, 1]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ (sabit fonksiyon) ve $g_n(x) = x^n$ alalım.
(i) $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ alterne harmonik serisi Leibniz testi gereği yakınsaktır. Terimleri x'e bağlı olmayan yakınsak bir seri her kümede düzgün yakınsaktır; çünkü kalanı x'ten bağımsız bir sıfır dizisidir.
(ii) $x \in [0,1]$ için $x^{n+1} = x \cdot x^n \leq x^n$ olduğundan (x^n) dizisi n'ye göre azalandır.
(iii) $x \in [0,1]$ ve her n için $\mid x^n \mid \leq 1$ olduğundan $K = 1$ alınır.
Teorem 7.4 gereği seri $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
M-testi burada işe yaramaz: $\sup_{x\in[0,1]} \left| \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| = \dfrac{1}{n}$ ve $\sum \dfrac{1}{n}$ ıraksaktır. ■

7.5 Alıştırmalar

Alıştırma 7.1 (Rasyonel Terimli Seri). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Her $x \in \mathbb{R}$ için $n^2 + x^2 \geq n^2$ olduğundan

$$0 < \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2} = M_n$$

olur. $\sum \dfrac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan Teorem 7.2 gereği seri $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. ■

Alıştırma 7.2 (Kapalı Aralıkta Kuvvet Serisi). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ serisinin $[-1,1]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\mid x \mid \leq 1$ için $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| = \dfrac{\mid x \mid^n}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2} = M_n$ olur ve $\sum M_n$ yakınsaktır. Teorem 7.2 gereği seri $[-1,1]$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. ■

Alıştırma 7.3 (Yakınsaklık Kümesini Bulma). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ serisinin yakınsaklık kümesini bulunuz.

Çözüm.
x sabit olsun; $q = e^{-x} > 0$ yazılırsa seri $\sum nq^n$ olur.

- $x > 0$ ise $0 < q < 1$'dir. Oran testi: $\dfrac{(n+1)q^{n+1}}{nq^n} = \dfrac{n+1}{n}\, q \to q < 1$; seri yakınsaktır.
- $x \leq 0$ ise $q \geq 1$ ve genel terim $nq^n \geq n$ olur; genel terim 0'a gitmediğinden seri ıraksaktır.

Yakınsaklık kümesi $(0, +\infty)$ aralığıdır. ■

Alıştırma 7.4 (Sıfırdan Uzakta Düzgün Yakınsaklık). $a > 0$ olsun. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ serisinin $[a, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu, $(0, +\infty)$ üzerinde ise düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$[a, +\infty)$ üzerinde. $x \geq a$ için $e^{-nx} \leq e^{-na}$ olduğundan $\mid ne^{-nx} \mid \leq ne^{-na} = M_n$ olur. $q = e^{-a} \in (0,1)$ için $\sum nq^n$ oran testi gereği yakınsaktır (Alıştırma 7.3). Teorem 7.2 gereği seri $[a, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

$(0,+\infty)$ üzerinde. Genel terim için $x_n = \dfrac{1}{n} \in (0,+\infty)$ noktalarında

$$f_n(x_n) = ne^{-1} = \frac{n}{e} \to +\infty$$

olur; $f_n(x_n) \not\to 0$. Teorem 3.2 gereği f_n dizisi $(0,+\infty)$ üzerinde 0'a düzgün yakınsamaz. Düzgün yakınsaklığın gerek koşulu (Sonuç 7.1) sağlanmadığından seri $(0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. ■

Alıştırma 7.5 (Gerek Koşul Yeterli Değildir). $[0,1)$ üzerinde $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ için $f_n \rightrightarrows 0$ olduğunu, ama $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ serisinin $[0,1)$ üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Genel terim. $x \in [0,1)$ için $0 \le \dfrac{x^n}{n} \le \dfrac{1}{n} \to 0$ olduğundan Teorem 3.1 gereği $f_n \rightrightarrows 0$ ($[0,1)$).
Seri düzgün yakınsamaz. Cauchy kriterinin olumsuzunu kullanalım. $N \in \mathbb{N}$ verilsin; $m = N$ ve $n = 2N$ alalım. $x \in [0,1)$ için $k \le 2N$ iken $x^k \ge x^{2N}$ olduğundan

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{x^k}{k} \ge x^{2N} \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \ge x^{2N} \cdot N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{x^{2N}}{2}$$

olur. $x \to 1^-$ iken $x^{2N} \to 1$ olduğundan $x_N^{2N} \ge \dfrac{1}{2}$ olacak biçimde bir $x_N \in [0,1)$ vardır (örneğin $x_N = 2^{-1/(2N)}$). Bu nokta için

$$\left| \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{x_N^k}{k} \right| \ge \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

bulunur. Her N için böyle $n, m \ge N$ ve x_N bulunduğundan Teorem 7.1 koşulu sağlanmaz; seri $[0,1)$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. ■

Alıştırma 7.6 (Toplamı Süreksiz Çıkan Seri). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ serisinin $[0,1]$ üzerindeki toplamını bulunuz. Seri $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak mıdır?

Çözüm.
$x^n(1-x) = x^n - x^{n+1}$ olduğundan kısmi toplam teleskopiktir:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(x^k - x^{k+1} \right) = x - x^{n+1}.$$

$0 \le x < 1$ için $x^{n+1} \to 0$ ve $S_n(x) \to x$; $x = 1$ için $S_n(1) = 0 \to 0$. Toplam

$$S(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

fonksiyonudur. Her S_n sürekli, S ise $x = 1$'de süreksizdir; Sonuç 4.2 gereği seri $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir.
Genel terim $x^n(1-x)$ ise $[0,1]$ üzerinde 0'a düzgün yakınsar (Alıştırma 3.3); bu da gerek koşulun yeterli olmadığına ikinci bir örnektir. ■

Alıştırma 7.7 (Üs Değişkenli Seri: Düzgün Yakınsaklık). $a > 1$ olsun. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ serisinin $[a,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$x \geq a$ ve $n \geq 1$ için $n^x \geq n^a$ olduğundan

$$0 < \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a} = M_n$$

olur. $a > 1$ olduğundan $\sum \frac{1}{n^a}$ p-serisi yakınsaktır. Teorem 7.2 gereği seri $[a, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

Alıştırma 7.8 (Üs Değişkenli Seri: Düzgün Yakınsamama). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ serisinin $(1, +\infty)$ üzerinde noktasal yakınsak olduğunu, ama düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Noktasal yakınsaklık. $x > 1$ sabitken $\sum \frac{1}{n^x}$ bir p-serisidir ve $p = x > 1$ için yakınsaktır.
Düzgün yakınsamama. $N \in \mathbb{N}$ verilsin; $m = N$, $n = 2N$ alalım. $x > 1$ ve $N < k \leq 2N$ için $k^x \leq (2N)^x$ olduğundan

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k^x} \geq N \cdot \frac{1}{(2N)^x} = \frac{N}{(2N)^x}$$

olur. $x \to 1^+$ iken sağ yan $\frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$ sayısına yakınsar; dolayısıyla $\frac{N}{(2N)^{x_N}} \geq \frac{1}{4}$ olacak biçimde bir $x_N \in (1, +\infty)$ vardır. Bu nokta için

$$\left| \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k^{x_N}} \right| \geq \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

bulunur. Teorem 7.1 koşulu sağlanmaz; seri $(1, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. ■

Alıştırma 7.9 (Dirichlet Testiyle Kosinüs Serisi). $0 < \delta < \pi$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$ serisinin $[\delta, 2\pi - \delta]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f_n(x) = \cos(nx)$ ve $g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ alalım. g_n sabit fonksiyonları n'ye göre azalandır ve $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ olduğundan $g_n \rightrightarrows 0$.
Kısmi toplamlar için

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right)$$

özdeşliğini $k = 1, \ldots, n$ için toplayalım:

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin \frac{x}{2}.$$

Sağ yanın mutlak değeri en çok 2'dir ve $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ için $\sin \frac{x}{2} \geq \sin \frac{\delta}{2} > 0$ olduğundan

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

olur. Teorem 7.3 gereği seri $[\delta, 2\pi - \delta]$ üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 7.10 (Abel Testiyle Ağırlıklı Seri). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\, e^{-nx}$ serisinin $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ (sabit fonksiyon) ve $g_n(x) = e^{-nx}$ alalım.

- $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ Leibniz testi gereği yakınsaktır; terimleri x'e bağlı olmadığından $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
- $x \geq 0$ için $e^{-(n+1)x} = e^{-x}\, e^{-nx} \leq e^{-nx}$ olduğundan $\big(\, g_n(x) \,\big)$ azalandır.
- $x \geq 0$ için $0 < e^{-nx} \leq 1$ olduğundan (g_n) düzgün sınırlıdır ($K = 1$).

Teorem 7.4 gereği seri $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır. M-testi uygulanamaz: $\sup_{x\geq 0}\left|\dfrac{(-1)^n}{n}e^{-nx}\right| = \dfrac{1}{n}$ ve $\sum \dfrac{1}{n}$ ıraksaktır. ■

Düzgün yakınsaklığı sınamanın yollarını gördük. Fonksiyon Serilerinin Özellikleri bölümünde düzgün yakınsak bir serinin toplamının sürekli olduğunu ve serinin terim terime integrallenip türevlenebildiğini gösteriyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

8. Fonksiyon Serilerinin Özellikleri

Sonlu bir toplamda her şey yolundadır: sürekli fonksiyonların sonlu toplamı süreklidir, toplamın integrali integrallerin toplamıdır, toplamın türevi türevlerin toplamıdır. Sonsuz toplamda aynı kuralların geçerli olup olmadığı, analizin en sık sorulan sorularındandır:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Yanıtlar hazırdır. Bir serinin toplamı, kısmi toplamlar dizisinin limitidir; diziler için kanıtladığımız süreklilik, integral ve türev teoremlerini $S_n = f_1 + \ldots + f_n$ dizisine uygulamak yeter. Bu bölümde bu çeviriyi yapıyor ve sonuçları örneklerle kullanıyoruz.

8.1 Toplamın Sürekliliği

İlk sonuç, düzgün limitin sürekliliği koruması teoreminin seri biçimidir.

Teorem 8.1 (Düzgün Yakınsak Serinin Toplamı Süreklidir). *$\sum f_n$ serisi $E \subseteq \mathbb{R}$ üzerinde S fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Her f_n fonksiyonu bir $a \in E$ noktasında sürekliyse S de a noktasında süreklidir. Özel olarak her f_n, E üzerinde sürekliyse S de E üzerinde süreklidir.*

> ***İspat.***
> *$S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ kısmi toplamı, a noktasında sürekli sonlu sayıda fonksiyonun toplamı olduğundan a noktasında süreklidir. Serinin düzgün yakınsaklığı $S_n \rightrightarrows S$ (E) demektir (Tanım 7.4). Teorem 4.2 gereği S, a noktasında süreklidir.* ■

a noktası E'nin bir yığılma noktasıysa teorem, limit ile sonsuz toplamın yer değiştirmesi olarak da okunur:

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(a) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

Örnek 8.1 (Sürekli Bir Toplam Fonksiyonu). $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Örnek 7.2 gereği seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Her terim $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ bütün $\mathbb{R}$'de süreklidir.
> Teorem 8.1 gereği S, $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.
> S için kapalı bir formül bilmiyoruz; yine de sürekli olduğunu söyleyebiliyoruz. ■

8.1.1 Yerel düzgün yakınsaklık yeter

Süreklilik yerel bir özelliktir: bir noktadaki süreklilik yalnız o noktanın çevresindeki değerlere bağlıdır. Bu yüzden serinin bütün kümede düzgün yakınsaması gerekmez; her noktanın, üzerinde düzgün yakınsaklık olan bir komşuluğunun bulunması yeter.

Sonuç 8.1 (Yerel Düzgün Yakınsaklıkla Süreklilik). *$I \subseteq \mathbb{R}$ birden çok nokta içeren bir aralık ve her f_n, I üzerinde sürekli olsun. $\sum f_n$ serisi I'nin kapalı ve sınırlı her $[c,d] \subseteq I$ alt aralığında düzgün yakınsıyorsa toplam fonksiyonu S, I üzerinde süreklidir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$x_0 \in I$ verilsin. x_0 noktasını içeren ve x_0'ın I içindeki bir komşuluğunu kapsayan bir $[c,d] \subseteq I$ aralığı seçelim: x_0, I'nin bir iç noktasıysa $c < x_0 < d$ alınır; x_0, I'nin bir uç noktasıysa $[c,d]$'nin aynı ucu x_0 alınır. Seri $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğundan Teorem 8.1 gereği S'nin $[c,d]$'ye kısıtlaması x_0'da süreklidir. $[c,d]$ aralığı x_0'ın I içindeki bir komşuluğunu kapsadığından S, I üzerinde tanımlı bir fonksiyon olarak da x_0'da süreklidir. ■

Örnek 8.2 (Bütün Kümede Düzgün Yakınsamayan Serinin Sürekli Toplamı). $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ fonksiyonunun $(1, +\infty)$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Seri $(1, +\infty)$ üzerinde noktasal yakınsaktır, ama düzgün yakınsak değildir (Alıştırma 7.8); Teorem 8.1 doğrudan uygulanamaz.
$[c,d] \subseteq (1, +\infty)$ kapalı ve sınırlı bir alt aralık olsun; $c > 1$'dir. Alıştırma 7.7 gereği seri $[c, +\infty)$ üzerinde, dolayısıyla $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır (Önerme 2.3). Her terim $\frac{1}{n^x} = e^{-x \ln n}$ süreklidir. Sonuç 8.1 gereği ζ, $(1, +\infty)$ üzerinde süreklidir. ■

Süreklilik teoremi, toplamı süreksiz çıkan bir serinin düzgün yakınsak olamayacağını da söyler.

Örnek 8.3 (Süreksiz Toplamla Düzgün Yakınsamama). $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}$ serisinin $[0, +\infty)$ üzerindeki toplamını bulunuz ve serinin bu aralıkta düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$x = 0$ için bütün terimler 0'dır; $S(0) = 0$. $x > 0$ için $q = e^{-x} \in (0,1)$ yazılırsa seri $x \sum_{n \geq 1} q^n$ olur ve geometrik seri toplamıyla

$$S(x) = x \cdot \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1} \qquad (x > 0)$$

bulunur. $x \to 0^+$ iken $\frac{e^x - 1}{x} \to 1$ olduğundan

$$\lim_{x \to 0^+} S(x) = 1 \neq 0 = S(0)$$

olur; S, $x = 0$ noktasında sürekli değildir. Her terim sürekli olduğundan, seri $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olsaydı Teorem 8.1 gereği S sürekli olurdu. Öyleyse seri $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak değildir.
Bu seride genel terim 0'a düzgün yakınsar (Örnek 3.3: $\sup xe^{-nx} = \frac{1}{en}$); ama $\sum \frac{1}{en}$ ıraksak olduğundan M-testi sonuç vermez ve gerçekten de düzgün yakınsaklık yoktur. ■

8.2 Terim Terime İntegral

İkinci sonuç, integral ile sonsuz toplamın yer değiştirmesidir.

Teorem 8.2 (Serilerde Terim Terime İntegral). *$a < b$ olsun, her n için $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun ve $\sum f_n$ serisi $[a,b]$ üzerinde S fonksiyonuna düzgün yakınsasın. O zaman $S \in \mathcal{R}[a,b]$ olur ve*

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \Big) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

eşitliği sağlanır; sağdaki sayı serisi yakınsaktır. Ayrıca $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t)\, dt$ serisi $[a,b]$ üzerinde $\int_a^x S(t)\, dt$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$S_n = f_1 + \ldots + f_n$ kısmi toplamı, integrallenebilir sonlu sayıda fonksiyonun toplamı olduğundan integrallenebilirdir ve integralin lineerliğiyle

$$\int_a^b S_n(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx \tag{1}$$

olur. $S_n \rightrightarrows S$ $([a,b])$ olduğundan Teorem 5.1 gereği $S \in \mathcal{R}[a,b]$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

sağlanır. (1) eşitliğinin sağ yanı $\sum \int_a^b f_k$ sayı serisinin n'inci kısmi toplamıdır; limitinin var olması bu serinin yakınsak olduğunu ve toplamının $\int_a^b S$ olduğunu söyler. Son iddia, Teorem 5.1 (iii)'ün (S_n) dizisine uygulanmasıdır: $\sum_{k=1}^{n} \int_a^x f_k(t)\,dt$ kısmi toplamları $\int_a^x S_n(t)\,dt$ integraline eşittir ve $\int_a^x S(t)\,dt$'ye düzgün yakınsar. ■

Örnek 8.4 (Bir Serinin Terim Terime İntegrali). $x > 1$ olsun. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x \frac{2^n}{e^{nt}}\,dt$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm.
Örnek 7.3 gereği $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{e^{nt}}$ serisi $[1,+\infty)$ üzerinde, dolayısıyla $[1,x]$ üzerinde düzgün yakınsaktır ve toplamı $\dfrac{e^t}{e^t-2}$'dir. Terimler süreklidir. Teorem 8.2 gereği toplam ile integral yer değiştirir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_1^x \frac{2^n}{e^{nt}}\,dt = \int_1^x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e^t}\right)^n dt = \int_1^x \frac{e^t}{e^t-2}\,dt.$$

$u = e^t - 2$ değişken değiştirmesiyle ($du = e^t\,dt$; $t \geq 1$ için $u \geq e-2 > 0$)

$$\int_1^x \frac{e^t}{e^t-2}\,dt = \Big[\ln(e^t-2)\Big]_1^x = \ln\frac{e^x-2}{e-2}$$

bulunur.
Denetim. Sol yanı terim terim hesaplayalım. $n=0$ terimi $\int_1^x 1\,dt = x-1$'dir; $n \geq 1$ için

$$\int_1^x 2^n e^{-nt}\,dt = \frac{2^n}{n}\left(\,e^{-n} - e^{-nx}\,\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{e}\right)^n - \frac{1}{n}\left(\frac{2}{e^x}\right)^n$$

olur. $|\,q\,| < 1$ için $\sum_{n\geq 1} \dfrac{q^n}{n} = -\ln(1-q)$ olduğundan (bkz. Analiz 2)

$$\begin{aligned}(x-1) - \ln\left(1-\frac{2}{e}\right) + \ln\left(1-\frac{2}{e^x}\right) &= (x-1) + \ln\frac{(e^x-2)\,e}{e^x\,(e-2)} \\ &= (x-1) + \ln\frac{e^x-2}{e-2} + 1 - x = \ln\frac{e^x-2}{e-2}\end{aligned}$$

çıkar; iki yol aynı sonucu verir. ■

Örnek 8.5 (Trigonometrik Serinin İntegrali). $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ için $\displaystyle\int_0^{\pi} S(x)\,dx$ integralini bir sayı serisi olarak yazınız.

Çözüm.
Seri $\mathbb{R}$ üzerinde, dolayısıyla $[0,\pi]$ üzerinde düzgün yakınsaktır (Örnek 7.2) ve terimleri süreklidir. Teorem 8.2 gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{\pi} S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx.$$

İçteki integral

$$\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{1-\cos(n\pi)}{n} = \frac{1-(-1)^n}{n}$$

olur; bu sayı n çiftse 0, n tekse $\frac{2}{n}$'dir. Yalnız tek indisler ($n = 2k-1$) katkı verir:

$$\int_0^{\pi} S(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)^3} = 2\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \cdots\right).$$

■

8.3 Terim Terime Türev

Türev için koşul, dizilerde olduğu gibi, **türevlerin serisinden** istenir.

Teorem 8.3 (Serilerde Terim Terime Türev). *$a < b$ olsun ve her n için $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ türevlenebilir olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlansın:*

(i) en az bir $x_0 \in [a,b]$ için $\sum f_n(x_0)$ sayı serisi yakınsaktır;

(ii) $\sum f_n'$ türev serisi $[a,b]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

O zaman $\sum f_n$ serisi $[a,b]$ üzerinde düzgün yakınsar, toplamı S türevlenebilirdir ve her $x \in [a,b]$ için

$$S'(x) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

olur.

İspat.
$S_n = f_1 + \ldots + f_n$ türevlenebilirdir ve $S_n' = f_1' + \ldots + f_n'$, türev serisinin n'inci kısmi toplamıdır. (i) koşulu $\big(\ S_n(x_0)\ \big)$ sayı dizisinin yakınsak olduğunu, (ii) koşulu (S_n') dizisinin $[a,b]$ üzerinde bir G fonksiyonuna düzgün yakınsadığını söyler; burada $G(x) = \sum f_n'(x)$'tir. Teorem 6.1, (S_n) dizisine uygulanırsa $S_n \rightrightarrows S$ ($[a,b]$), S türevlenebilir ve $S' = G$ bulunur. ■

Sonuç 8.2 (Herhangi Bir Aralıkta Terim Terime Türev). *$I \subseteq \mathbb{R}$ birden çok nokta içeren bir aralık ve her f_n, I üzerinde türevlenebilir olsun. Bir $x_0 \in I$ için $\sum f_n(x_0)$ yakınsak olsun ve $\sum f_n'$ serisi I'nin kapalı ve sınırlı her alt aralığında düzgün yakınsasın. O zaman $\sum f_n$ serisi I üzerinde noktasal yakınsar, toplamı S türevlenebilirdir ve I üzerinde $S' = \sum f_n'$ olur.*

İspat.
$x \in I$ verilsin. x_0 ve x noktalarını içeren, x'in I içindeki bir komşuluğunu kapsayan kapalı ve sınırlı bir $[c,d] \subseteq I$ aralığı seçelim ($c < d$). Varsayım gereği $\sum f_n'$, $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Teorem 8.3, $[c,d]$ aralığına uygulanırsa $\sum f_n$ serisinin $[c,d]$ üzerinde yakınsadığı, toplamının x noktasında türevlenebilir olduğu ve türevinin $\sum f_n'(x)$ olduğu bulunur. Serinin x noktasındaki toplamı $[c,d]$ seçimine bağlı olmadığından S, I üzerinde iyi tanımlıdır; $[c,d]$ aralığı x'in I içindeki bir komşuluğunu kapsadığından $S'(x) = \sum f_n'(x)$ olur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Dört adımda serinin türevi

1. **Bir noktada yakınsaklık.** $\sum f_n(x_0)$ serisinin yakınsadığı bir x_0 bulunur.
2. **Türev serisi.** $\sum f_n'$ yazılır.
3. **Düzgün yakınsaklık.** Türev serisinin ilgili aralıkta (ya da kapalı ve sınırlı her alt aralıkta) düzgün yakınsadığı, çoğunlukla M-testiyle, gösterilir.
4. **Sonuç.** $S' = \sum f_n'$.

Örnek 8.6 (Türevlenebilir Bir Trigonometrik Toplam). $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olduğunu gösteriniz ve türevini bulunuz.

Çözüm.
Bir noktada yakınsaklık. $x_0 = 0$ için bütün terimler 0'dır; seri yakınsaktır.
Türev serisi. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ için $f_n'(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$.
Düzgün yakınsaklık. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ ve $\sum \dfrac{1}{n^2}$ yakınsaktır. Teorem 7.2 gereği türev serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
Sonuç. Sonuç 8.2 gereği S, $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

olur. Türev serisi sürekli terimli ve düzgün yakınsak olduğundan S' süreklidir (Teorem 8.1). ■

Örnek 8.7 (Terim Terime Türevlenemeyen Düzgün Yakınsak Seri). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu, ama terim terime türev serisinin $x = 0$ noktasında ıraksadığını gösteriniz.

Çözüm.
$\left|\dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$ olduğundan Teorem 7.2 gereği seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır; toplamı süreklidir.
Terimlerin türevi $\left(\dfrac{\sin(n^2x)}{n^2}\right)' = \cos(n^2x)$ olur. $x = 0$ için türev serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(0) = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

olur; genel terimi 0'a gitmediğinden ıraksaktır. Serinin kendisinin düzgün yakınsaması, terim terime türev almaya izin vermez; terim terime türev teoreminde (Teorem 8.3) koşul türev serisine konmuştur. ■

Örnek 8.8 (Yerel Düzgün Yakınsaklıkla Türev). $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ fonksiyonunun $(1, +\infty)$ üzerinde türevlenebilir olduğunu ve $\zeta'(x) = -\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Bir noktada yakınsaklık. $x_0 = 2$ için $\sum \dfrac{1}{n^2}$ yakınsaktır.
Türev serisi. $f_n(x) = n^{-x} = e^{-x \ln n}$ için zincir kuralıyla $f_n'(x) = -\dfrac{\ln n}{n^x}$ olur ($n = 1$ terimi sabit olduğundan türevi 0'dır).
Düzgün yakınsaklık. $[c, d] \subseteq (1, +\infty)$ olsun; $c > 1$'dir. $x \in [c, d]$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| f_n'(x) | = \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^c} = M_n$$

olur. $\sum M_n$ serisinin yakınsadığını görmek için $s = \dfrac{1+c}{2}$ alalım; $1 < s < c$'dir. $\dfrac{M_n}{1/n^s} = \dfrac{\ln n}{n^{c-s}} \to 0$ olduğundan (logaritma her pozitif kuvvetten yavaş büyür) bir n_0'dan sonra $M_n \leq \dfrac{1}{n^s}$ olur. $\sum \dfrac{1}{n^s}$ yakınsak olduğundan karşılaştırma testiyle $\sum M_n$ yakınsaktır. Teorem 7.2 gereği türev serisi $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Sonuç. Sonuç 8.2 gereği ζ, $(1,+\infty)$ üzerinde türevlenebilirdir ve $\zeta'(x) = -\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ olur. ■

8.4 Alıştırmalar

Alıştırma 8.1 (Limit ile Toplamın Yer Değiştirmesi). $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ limitinin $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sayısına eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Alıştırma 7.1 gereği seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Her terim $\dfrac{1}{n^2+x^2}$, $x=0$ noktasında süreklidir. Teorem 8.1 gereği toplam fonksiyonu S, $x=0$'da süreklidir:

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} = \lim_{x\to 0} S(x) = S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

■

Alıştırma 8.2 (Sonsuzda Limit). $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$ için $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\varepsilon > 0$ verilsin. $\sum \dfrac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan kalanı 0'a gider: öyle bir N vardır ki $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. Toplamı iki parçaya ayıralım. Her $x > 0$ için

$$\begin{aligned} 0 < S(x) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+x^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \\ &\leq \frac{N}{x^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{N}{x^2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

olur; birinci parçada $\dfrac{1}{n^2+x^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$, ikinci parçada $\dfrac{1}{n^2+x^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ kullanıldı. $x > \sqrt{\dfrac{2N}{\varepsilon}}$ ise $\dfrac{N}{x^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olur ve $0 < S(x) < \varepsilon$ bulunur. Öyleyse $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.
Her terimin $x \to +\infty$ limiti 0'dır; sonuç, limitin yine toplamın içine alınabildiğini gösterir. Bunu sağlayan, kalanın x'ten bağımsız bir sayıyla sınırlanması, yani düzgün yakınsaklıktır. ■

Alıştırma 8.3 (Terim Terime İntegral Hesabı). Aşağıdaki eşitliği gösteriniz:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1.$$

Çözüm.
Alıştırma 7.2 gereği seri $[-1,1]$ üzerinde, dolayısıyla $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaktır; terimleri süreklidir. Teorem 8.2 gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\int_0^1 x^n\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}.$$

Genel terimi basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}.$$

(Sağ yanın paydaları eşitlenirse pay $(n+1) - n(n+1) + n^2 = 1$ çıkar.) $\sum \frac{1}{n^2}$ yakınsaktır; $\sum\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ teleskopik serisinin kısmi toplamı $1 - \frac{1}{N+1} \to 1$ olur. İki yakınsak serinin farkı terim terim alınabildiğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1.$$

■

Alıştırma 8.4 (Türevle Toplam Bulma). $(0, +\infty)$ üzerinde $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğunu gösteriniz ve $S'(x)$ için kapalı bir formül bulunuz.

Çözüm.
Bir noktada yakınsaklık. $x_0 = 1$ için $\frac{e^{-n}}{n} \le e^{-n}$ ve $\sum e^{-n}$ yakınsak geometrik seridir; karşılaştırma testiyle $\sum \frac{e^{-n}}{n}$ yakınsaktır.
Türev serisi. $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$ için $f_n'(x) = -e^{-nx}$.
Düzgün yakınsaklık. $[c, d] \subseteq (0, +\infty)$ olsun; $c > 0$. $x \in [c, d]$ için $\mid f_n'(x) \mid = e^{-nx} \le e^{-nc} = M_n$ ve $\sum (e^{-c})^n, 0 < e^{-c} < 1$ olduğundan yakınsaktır. Teorem 7.2 gereği türev serisi $[c, d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
Sonuç. Sonuç 8.2 gereği S türevlenebilirdir ve $x > 0$ için geometrik seri toplamıyla

$$S'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = -\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = -\frac{1}{e^x - 1}$$

olur. ■

Alıştırma 8.5 (Arktanjant Terimli Seri). $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde yakınsadığını ve toplamının türevlenebilir olduğunu gösteriniz; $S'(0)$ değerini bir sayı serisi olarak yazınız.

Çözüm.
Bir noktada yakınsaklık. $x_0 = 0$ için bütün terimler $\arctan 0 = 0$'dır.
Türev serisi. $f_n(x) = \arctan \frac{x}{n^2}$ için zincir kuralıyla

$$f_n'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^4}} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^4 + x^2}.$$

Düzgün yakınsaklık. Her $x \in \mathbb{R}$ için $n^4 + x^2 \ge n^4$ olduğundan $0 < f_n'(x) \le \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$ olur. Teorem 7.2 gereği türev serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
Sonuç. Sonuç 8.2 gereği seri $\mathbb{R}$ üzerinde yakınsar, S türevlenebilirdir ve

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}, \qquad S'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. ■

Fonksiyon serilerinin en düzenli sınıfı, terimleri $a_n x^n$ biçiminde olan kuvvet serileridir. Kuvvet Serilerinde Düzgün Yakınsaklık ve Analitik Fonksiyonlar bölümünde bu bölümün teoremlerini kuvvet serilerine uyguluyor ve uç noktalardaki davranışı inceliyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

9. Kuvvet Serilerinde Düzgün Yakınsaklık ve Analitik Fonksiyonlar

Kuvvet serilerini Analiz 2'de ayrıntısıyla inceledik. Orada düzgün yakınsaklık kuramından yalnız gerektiği kadarını almıştık; şimdi kuramın tamamı elimizde olduğuna göre iki eksiği tamamlayabiliriz. Birincisi uç noktalarla ilgilidir: bir kuvvet serisi yakınsaklık aralığının bir ucunda yakınsıyorsa, düzgün yakınsaklık o uca kadar uzanır mı? İkincisi analitik fonksiyonlarla ilgilidir: sonsuz kez türevlenebilir bir fonksiyonun bir kuvvet serisiyle temsil edilebilmesi için türevleri ne kadar hızlı büyüyebilir?
Bölüm boyunca gösterimi hafifletmek için serinin merkezini 0 alıyoruz; $t = x - x_0$ ötelemesi genel durumu buna indirger.

i Analiz 2'den hatırlatma

$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ bir kuvvet serisi ve $R \in [0, +\infty]$ yakınsaklık yarıçapı olsun.

- Seri $|\,x\,| < R$ için mutlak yakınsar, $|\,x\,| > R$ için ıraksar; yarıçap Cauchy–Hadamard formülüyle bulunur (bkz. Analiz 2).
- $0 < \rho < R$ olan her ρ için seri $[-\rho, \rho]$ üzerinde düzgün yakınsar (bkz. Analiz 2).
- Seri $(-R, R)$ üzerinde terim terime türevlenebilir (bkz. Analiz 2) ve integrallenebilir (bkz. Analiz 2); yarıçap değişmez.
- Toplam fonksiyonu $(-R, R)$ üzerinde sonsuz kez türevlenebilirdir (bkz. Analiz 2).
- Katsayılar tektir: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (bkz. Analiz 2).

Bu sonuçların hepsi, Fonksiyon Serilerinin Özellikleri bölümündeki genel teoremlerin özel durumlarıdır: M-testi $[-\rho, \rho]$ üzerinde düzgün yakınsaklığı verir, gerisi süreklilik, integral ve türev teoremlerinden çıkar.

9.1 Uç Noktaya Kadar Düzgün Yakınsaklık

$[-\rho, \rho]$ üzerindeki düzgün yakınsaklık, $\rho < R$ olduğu sürece geçerlidir ve M-testiyle elde edilir. $\rho = R$ için M-testi artık çalışmaz; çünkü seri uç noktada mutlak yakınsak olmayabilir. Yine de serinin uç noktada yakınsaması, düzgün yakınsaklığı o uca kadar taşımaya yeter. Bunu sağlayan araç Abel testidir.

Teorem 9.1 (Uç Noktaya Kadar Düzgün Yakınsaklık). *$\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı $R \in (0, +\infty)$ olsun.*

(i) $\sum a_n R^n$ sayı serisi yakınsaksa kuvvet serisi $[0, R]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

(ii) $\sum a_n (-R)^n$ sayı serisi yakınsaksa kuvvet serisi $[-R, 0]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat.
(i) *Genel terimi iki çarpana ayıralım:*

$$a_n x^n = \underbrace{a_n R^n}_{f_n} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{R}\right)^n}_{g_n(x)}.$$

Abel testinin (Teorem 7.4) üç koşulunu $E = [0, R]$ üzerinde denetleyelim.

- *$f_n = a_n R^n$ sabit fonksiyonlardır ve $\sum a_n R^n$ varsayım gereği yakınsaktır. Terimleri x'e bağlı olmayan yakınsak bir serinin kalanı x'ten bağımsız bir sıfır dizisidir; dolayısıyla $\sum f_n$, $[0, R]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.*
- *$x \in [0, R]$ için $t = \dfrac{x}{R} \in [0, 1]$ olur ve $t^{n+1} = t \cdot t^n \leq t^n$ olduğundan $\big(\, g_n(x) \,\big)$ dizisi n'ye göre azalandır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

• $x \in [0,R]$ *için* $0 \le g_n(x) = t^n \le 1$ *olduğundan* (g_n) *düzgün sınırlıdır.*

Teorem 7.4 gereği $\sum f_n g_n = \sum a_n x^n$ *serisi* $[0,R]$ *üzerinde düzgün yakınsaktır.*
(ii) $b_n = (-1)^n a_n$ *olsun.* $\sum b_n x^n$ *kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı da* R*'dir, çünkü* $\mid b_n \mid = \mid a_n \mid$*'dir; ayrıca* $\sum b_n R^n = \sum a_n (-R)^n$ *yakınsaktır. (i) gereği* $\sum b_n y^n$ *serisi* $y \in [0,R]$ *üzerinde düzgün yakınsar.* $y = -x$ *yazılırsa* $b_n y^n = (-1)^n a_n (-x)^n = a_n x^n$ *olur ve* $y \in [0,R]$ *koşulu* $x \in [-R,0]$ *demektir. Öyleyse* $\sum a_n x^n$*,* $[-R,0]$ *üzerinde düzgün yakınsaktır.* ■

Sonuç 9.1 (Yakınsaklık Kümesinin Kapalı Alt Aralıkları). $\sum a_n x^n$ *kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı* $R \in (0,+\infty)$ *olsun ve seri* $x = R$ *noktasında yakınsasın. O zaman* $-R < c < R$ *olan her* c *için seri* $[c,R]$ *üzerinde düzgün yakınsaktır. Seri* $x = -R$ *noktasında da yakınsıyorsa* $[-R,R]$ *üzerinde düzgün yakınsaktır.*

İspat.
Önce şu gözlemi yapalım: bir fonksiyon serisi A *ve* B *kümelerinin her birinde düzgün yakınsıyorsa* $A \cup B$ *üzerinde de düzgün yakınsar; çünkü verilen* ε *için iki kümeden gelen* N_A *ve* N_B *sayılarının büyüğü, birleşimin bütün noktalarında iş görür.*
$c \ge 0$ *ise* $[c,R] \subseteq [0,R]$ *olur ve iddia Teorem 9.1 (i) ile alt kümeye kısıtlamadan (Önerme 2.3) çıkar.* $-R < c < 0$ *ise* $\rho = \mid c \mid < R$ *için seri* $[-\rho,\rho]$ *üzerinde düzgün yakınsaktır (hatırlatmadaki ikinci madde); özel olarak* $[c,0]$ *üzerinde düzgün yakınsaktır. Seri* $[0,R]$ *üzerinde de düzgün yakınsak olduğundan gözlem gereği* $[c,0] \cup [0,R] = [c,R]$ *üzerinde düzgün yakınsaktır.*
Seri $x = -R$*'de de yakınsıyorsa Teorem 9.1 (ii) gereği* $[-R,0]$ *üzerinde düzgün yakınsaktır; gözlem gereği* $[-R,0] \cup [0,R] = [-R,R]$ *üzerinde düzgün yakınsaktır.* ■

Düzgün yakınsaklık uç noktaya kadar uzanınca süreklilik ve integral teoremleri de oraya kadar uzanır.

Sonuç 9.2 (Uç Noktada Süreklilik ve İntegral). $\sum a_n x^n$ *kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı* $R \in (0,+\infty)$ *ve toplamı* f *olsun.* $\sum a_n R^n$ *yakınsaksa:*

(i) f*,* $[0,R]$ *üzerinde süreklidir; özel olarak* $\lim\limits_{x \to R^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *olur;*

(ii) seri $[0,R]$ *üzerinde terim terime integrallenebilir:*

$$\int_0^R f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n R^{n+1}}{n+1}.$$

İspat.
Teorem 9.1 (i) gereği seri $[0,R]$ *üzerinde düzgün yakınsaktır ve terimleri* $a_n x^n$ *süreklidir. (i) iddiası süreklilik teoreminden (Teorem 8.1), (ii) iddiası Teorem 8.2 ile* $\int_0^R a_n x^n\,dx = \dfrac{a_n R^{n+1}}{n+1}$ *hesabından çıkar.* ■

(i) şıkkı, Analiz 2'de doğrudan bir hesapla kanıtlanan Abel limit teoremidir (bkz. Analiz 2); burada düzgün yakınsaklığın bir sonucu olarak yeniden elde edilmiştir. (ii) şıkkı ise yenidir: $(-R,R)$ içindeki terim terime integral teoremi, integrasyon aralığının uca kadar uzanmasına izin vermiyordu.

Örnek 9.1 (Uç Noktaya Kadar İntegral). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm.
$\mid x \mid < 1$ için

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n$$

açılımı geçerlidir (bkz. Analiz 2); yarıçap $R = 1$'dir. $x = 1$ noktasında seri $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ alterne harmonik serisidir ve Leibniz testi gereği yakınsaktır. Sonuç 9.2 (i) gereği toplam $[0,1]$ üzerinde süreklidir;

 CC BY-NC-SA 4.0

$\ln(1+x)$ de sürekli olduğundan eşitlik $x=1$ için de geçerlidir. Sonuç 9.2 (ii) gereği seri $[0,1]$ üzerinde terim terime integrallenir:

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Sol yanı kısmi integrasyonla hesaplayalım ($u=\ln(1+x)$, $dv=dx$):

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x)\,dx &= \Big[\,x\ln(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx \\ &= \ln 2 - \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx = \ln 2 - (1-\ln 2) = 2\ln 2 - 1.\end{aligned}$$

Öyleyse

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2\ln 2 - 1 \approx 0{,}386.$$

■

Örnek 9.2 (Uç Noktada Limit Hesabı). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ kuvvet serisinin yakınsaklık kümesini bulunuz ve $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ limitini gerekçesiyle hesaplayınız.

Çözüm.
Yarıçap. $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1$$

olduğundan $R=1$'dir (bkz. Analiz 2); seri $(-1,1)$ üzerinde yakınsar.
Uç noktalar. $x=1$ için seri $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ olur. $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ olduğundan kısmi toplam teleskopiktir:

$$S_N = \left(1-\frac12\right)+\left(\frac12-\frac13\right)+\ldots+\left(\frac1N-\frac{1}{N+1}\right) = 1-\frac{1}{N+1}\to 1.$$

Seri yakınsaktır ve toplamı 1'dir. $x=-1$ için seri $\sum\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ olur; mutlak değerlerinin serisi az önceki yakınsak seri olduğundan mutlak yakınsaktır. Yakınsaklık kümesi $[-1,1]$'dir.
Limit. Seri $x=1$'de yakınsadığından Teorem 9.1 (i) gereği $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Terimler sürekli olduğundan limit ile toplam yer değiştirir (Sonuç 9.2):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1^-}\frac{x^n}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.\end{aligned}$$

(Bu örnekte M-testi de yeterlidir: $|\,x\,|\le 1$ için $\left|\dfrac{x^n}{n(n+1)}\right|\le\dfrac{1}{n(n+1)}$ ve sağdaki seri yakınsaktır; seri $[-1,1]$ üzerinde düzgün yakınsar.) ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 9.3 (Toplamı İntegral Olarak Yazma). $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ fonksiyonunu $|\,x\,| < 1$ için bir integral yardımıyla ifade ediniz.

Çözüm.
Serinin yarıçapı $R = 1$'dir ($\sqrt[n]{n^2} \to 1$). $(-1,1)$ üzerinde terim terime türev alalım:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots$$

Bu seriyi x ile çarparsak tanıdık bir seri çıkar:

$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \qquad (|\,x\,| < 1).$$

(Gerçekten, sol yanın türevi $\sum_{n\ge 1} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}$ geometrik serisidir ve $x = 0$'da iki yan da 0'dır.) Dolayısıyla $x \neq 0$ için

$$f'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

olur. $t \to 0$ iken $-\dfrac{\ln(1-t)}{t} \to 1 = f'(0)$ olduğundan sağ yan $t = 0$'da sürekli biçimde tanımlanır. $f(0) = 1$ olduğundan analizin temel teoremiyle

$$f(x) = 1 - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt \qquad (|\,x\,| < 1)$$

bulunur. Bu integral temel fonksiyonlarla ifade edilemez; f için elde edilebilecek "kapalı" biçim budur. Seri $x = \pm 1$ noktalarında da yakınsar (M-testi, Alıştırma 7.2) ve $[-1,1]$ üzerinde süreklidir. Dolayısıyla $f(1)$ ve $f(-1)$ değerleri, yukarıdaki formülün $x \to 1^-$ ve $x \to -1^+$ limitleridir. ■

9.2 Bir Noktada Analitik Olmanın Ölçütü

Bir fonksiyonun bir noktanın çevresinde kuvvet serisiyle temsil edilebilmesine o noktada **analitik** olmak denir (bkz. Analiz 2). Analitik bir fonksiyon sonsuz kez türevlenebilirdir, ama tersi doğru değildir: $x \neq 0$ için e^{-1/x^2}, $x = 0$ için 0 değerini alan fonksiyon sonsuz kez türevlenebilir olduğu hâlde 0 noktasında analitik değildir (bkz. Analiz 2). Aradaki farkı türevlerin büyüme hızı belirler.

Teorem 9.2 (Analitiklik için Türev Ölçütü). *f, 0'ın bir komşuluğunda tanımlı bir fonksiyon olsun. f'nin 0 noktasında analitik olması için gerek ve yeter koşul şudur: öyle $r > 0$, $K > 0$ sabitleri vardır ki f, $(-r, r)$ üzerinde sonsuz kez türevlenebilirdir ve her $x \in (-r,r)$, her $n \in \{0,1,2,\ldots\}$ için*

$$|\, f^{(n)}(x) \,| \le \frac{r K\, n!}{(r - |\,x\,|)^{n+1}} \tag{1}$$

olur.

İspat.
Gereklilik. *f, 0'da analitik olsun: öyle bir $R > 0$ ve (a_k) katsayıları vardır ki $|\,x\,| < R$ için $f(x) = \sum_{k\ge 0} a_k x^k$ olur. f, $(-R,R)$ üzerinde sonsuz kez türevlenebilirdir ve terim terime türev almayı n kez uygulayarak*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!}\, a_k\, x^{k-n} \qquad (|\,x\,| < R) \tag{2}$$

bulunur (bkz. Analiz 2).

 CC BY-NC-SA 4.0

$0 < r < R$ olan bir r seçelim. $\sum a_k r^k$ yakınsak olduğundan genel terimi 0'a gider; yakınsak dizi sınırlı olduğundan öyle bir $K > 0$ vardır ki her k için $\mid a_k r^k \mid \le K$ olur. $\mid x \mid < r$ için (2) eşitliğinde mutlak değer alalım ve $\mid a_k \mid \le \dfrac{K}{r^k}$ yazalım:

$$\mid f^{(n)}(x) \mid \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \cdot \frac{K}{r^k} \mid x \mid^{k-n} = \frac{K}{r^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \left(\frac{\mid x \mid}{r} \right)^{k-n}.$$

Sağdaki toplamı hesaplamak için (2) formülünü $\dfrac{1}{1-t} = \sum_{k \ge 0} t^k$ geometrik serisine uygulayalım. Sol yanın n'inci türevi $\dfrac{n!}{(1-t)^{n+1}}$ olduğundan

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!}\, t^{k-n} = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}} \qquad (\mid t \mid < 1)$$

elde edilir. $t = \dfrac{\mid x \mid}{r} \in [0,1)$ için

$$\mid f^{(n)}(x) \mid \le \frac{K}{r^n} \cdot \frac{n!}{\left(1 - \frac{\mid x \mid}{r}\right)^{n+1}} = \frac{K}{r^n} \cdot \frac{n!\, r^{n+1}}{(r - \mid x \mid)^{n+1}} = \frac{rK\, n!}{(r - \mid x \mid)^{n+1}}$$

olur; bu (1) eşitsizliğidir.

Yeterlilik. f, $(-r, r)$ üzerinde sonsuz kez türevlenebilir olsun ve (1) sağlansın. f'nin Maclaurin serisinin $\left(-\dfrac{r}{2}, \dfrac{r}{2}\right)$ aralığında f'ye yakınsadığını göstereceğiz.
$0 < \mid x \mid < \dfrac{r}{2}$ ve $n \ge 1$ olsun. Lagrange kalanlı Taylor teoremi (bkz. Analiz 2), 0 ile x arasında

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\, x^n$$

olacak biçimde bir ξ noktası verir. Son terim kalandır; $R_n(x)$ ile gösterelim. $\mid \xi \mid < \mid x \mid$ olduğundan $r - \mid \xi \mid > r - \mid x \mid > 0$ olur ve (1) eşitsizliği ξ noktasında

$$\mid f^{(n)}(\xi) \mid \le \frac{rK\, n!}{(r - \mid \xi \mid)^{n+1}} \le \frac{rK\, n!}{(r - \mid x \mid)^{n+1}}$$

verir. Dolayısıyla

$$\mid R_n(x) \mid = \frac{\mid f^{(n)}(\xi) \mid}{n!} \mid x \mid^n \le \frac{rK}{r - \mid x \mid} \left(\frac{\mid x \mid}{r - \mid x \mid} \right)^n$$

bulunur. $\mid x \mid < \dfrac{r}{2}$ olduğundan $r - \mid x \mid > \dfrac{r}{2} > \mid x \mid$, yani $q = \dfrac{\mid x \mid}{r - \mid x \mid} < 1$'dir. $q^n \to 0$ olduğundan $R_n(x) \to 0$ olur; bu,

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \qquad \left(\mid x \mid < \frac{r}{2} \right)$$

demektir ($x = 0$ için eşitlik açıktır). f, 0'ın $\left(-\dfrac{r}{2}, \dfrac{r}{2}\right)$ komşuluğunda bir kuvvet serisiyle temsil edilir; 0 noktasında analitiktir. ■

Ölçüt $x = 0$ noktasında $\mid f^{(n)}(0) \mid \le \dfrac{K\, n!}{r^n}$ verir: analitik bir fonksiyonun türevleri en çok "faktöriyel çarpı geometrik dizi" hızıyla büyüyebilir. Eşdeğer olarak Maclaurin katsayıları $\left| \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \le \dfrac{K}{r^n}$ sınırını sağlar; bu, serinin yarıçapının en az r olduğunu söyler.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 9.4 (Ölçütte Eşitlik Durumu). $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonunun (1) eşitsizliğini $r=1$, $K=1$ ile sağladığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Tümevarımla $f^{(n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ olur: $n=0$ için doğrudur ve $\left(\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)'=\dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$'dir. $\mid x\mid<1$ için $1-x\geq 1-\mid x\mid>0$ olduğundan
>
> $$\mid f^{(n)}(x)\mid=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\leq\frac{n!}{(1-\mid x\mid)^{n+1}}=\frac{rK\,n!}{(r-\mid x\mid)^{n+1}}\qquad(r=K=1)$$
>
> olur; $0\leq x<1$ için eşitlik sağlanır. Ölçütteki sınır, geometrik serinin toplam fonksiyonundan okunmuştur ve daha iyisi ile değiştirilemez. ■

9.3 Alıştırmalar

Alıştırma 9.1 (Arktanjantın Uca Kadar İntegrali). $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ serisinin toplamını bulunuz.

> **Çözüm.**
> $\mid x\mid<1$ için $\arctan x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,x^{2n+1}$ açılımı geçerlidir (bkz. Analiz 2); yarıçap $R=1$'dir. $x=1$'de seri $\sum\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ olur ve Leibniz testi gereği yakınsaktır. Sonuç 9.2 gereği eşitlik $[0,1]$ üzerinde geçerlidir ve seri bu aralıkta terim terime integrallenir:
>
> $$\int_0^1\arctan x\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2n+2}.$$
>
> Sol yan için kısmi integrasyon ($u=\arctan x$, $dv=dx$):
>
> $$\begin{aligned}\int_0^1\arctan x\,dx&=\Big[\,x\arctan x\Big]_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,dx\\&=\frac{\pi}{4}-\Big[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}.\end{aligned}$$
>
> Öyleyse
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}\approx 0{,}439.$$
>
> ■

Alıştırma 9.2 (Yalnız Bir Uçta Yakınsayan Seri). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ serisinin $[-1,0]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu, $[0,1)$ üzerinde ise düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $\sqrt[n]{\sqrt{n}}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^{1/2}\to 1$ olduğundan $R=1$'dir.
> **$[-1,0]$ üzerinde.** $x=-1$ için seri $\sum\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ olur; $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ azalarak 0'a gittiğinden Leibniz testi gereği yakınsaktır. Teorem 9.1 (ii) gereği seri $[-1,0]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
> **$[0,1)$ üzerinde.** Her kısmi toplam $S_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$, $[0,1)$ üzerinde sınırlıdır: $0\leq S_N(x)\leq N$. Toplam fonksiyonu S ise sınırlı değildir. Gerçekten, $M>0$ verilsin. $\sum\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ıraksak olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$\sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 2M$ olacak biçimde bir N vardır. $x \to 1^-$ iken $S_N(x) \to \sum_{n=1}^{N} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ olduğundan 1'e yeterince yakın bir $x \in [0,1)$ için $S_N(x) > M$ olur; terimler negatif olmadığından $S(x) \geq S_N(x) > M$. Sınırlı fonksiyonların sınırsız limiti düzgün olamaz (Sonuç 4.1); seri $[0,1)$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. ■

Alıştırma 9.3 (Sinüs Fonksiyonu Ölçütü Sağlar). $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun Teorem 9.2 ölçütünü her $r > 0$ için sağladığını gösteriniz.

Çözüm.
$\sin x$ fonksiyonunun türevleri sırayla $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ biçiminde yinelenir; dolayısıyla her n ve her x için $\left| f^{(n)}(x) \right| \leq 1$'dir.
$r > 0$ verilsin. Ölçütün sağ yanını alttan sınırlayalım: $|x| < r$ için $0 < r - |x| \leq r$ olduğundan

$$\frac{rK\,n!}{(r-|x|)^{n+1}} \geq \frac{rK\,n!}{r^{n+1}} = \frac{K\,n!}{r^n}$$

olur. $\dfrac{r^n}{n!} \to 0$ olduğundan $\left(\dfrac{r^n}{n!}\right)$ dizisi sınırlıdır; K sayısını bu dizinin bir üst sınırı olarak seçelim: her n için $\dfrac{r^n}{n!} \leq K$, yani $\dfrac{K\,n!}{r^n} \geq 1$. Öyleyse

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq 1 \leq \frac{K\,n!}{r^n} \leq \frac{rK\,n!}{(r-|x|)^{n+1}} \qquad (|x| < r)$$

sağlanır. Ölçüt her $r > 0$ için geçerlidir; bu, sinüsün Maclaurin serisinin bütün $\mathbb{R}$'de sinüse yakınsamasıyla uyumludur. ■

Fonksiyon serilerinin genel kuramını ve en düzenli örneği olan kuvvet serilerini tamamladık. Kuvvet serileri bir fonksiyonu x^n kuvvetleriyle açar; periyodik fonksiyonlar için doğal yapı taşları ise $\cos(nx)$ ve $\sin(nx)$ fonksiyonlarıdır. Sıradaki kısım bu açılımları, Fourier serilerini ele alır.

 CC BY-NC-SA 4.0

10. Trigonometrik Seriler ve Fourier Katsayıları

Kuvvet serileri bir fonksiyonu $1, x, x^2, x^3, \ldots$ kuvvetlerinin sonsuz toplamı olarak yazar. Bu açılımın bedeli ağırdır: fonksiyon sonsuz kez türevlenebilir olmalıdır, o da yetmez. Periyodik olaylar (titreşen bir tel, dönen bir çark, yinelenen bir sinyal) için daha doğal yapı taşları vardır: $\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ fonksiyonları. Bunlarla kurulan serilere trigonometrik seri denir ve şaşırtıcı biçimde, köşeli hatta sıçramalı fonksiyonları bile temsil edebilirler.

Bu bölümde iki soruyu ele alıyoruz. Birincisi: bir fonksiyon trigonometrik bir seriyle yazılabiliyorsa serinin katsayıları ne olmalıdır? Yanıt, sinüs ve kosinüslerin birbirine "dik" olmasından çıkan integral formülleridir. İkincisi: verilen bir fonksiyon için bu formüllerle katsayıları hesaplayıp seriyi nasıl kurarız? Serinin fonksiyona yakınsayıp yakınsamadığı sorusu sonraki bölümlerin konusudur.

10.1 Trigonometrik Seriler ve Periyodiklik

Önce inceleyeceğimiz serilerin biçimini sabitleyelim.

Tanım 10.1 (Trigonometrik Seri ve Trigonometrik Polinom). $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ve $b_1, b_2, \ldots$ reel sayılar olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\, a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \, \right)$$

biçimindeki fonksiyon serisine **trigonometrik seri**, sayılara serinin **katsayıları** denir. Serinin

$$T_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(\, a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \, \right)$$

kısmi toplamı biçimindeki sonlu toplamlara **trigonometrik polinom**, T_N'ye de derecesi en çok N olan trigonometrik polinom denir.

Yani trigonometrik seri, terimleri $\cos(nx)$ ve $\sin(nx)$ fonksiyonlarının katları olan bir fonksiyon serisidir. Sabit terimin a_0 değil $\frac{a_0}{2}$ yazılması bir alışkanlıktır; katsayı formüllerinin $n = 0$ için de aynı biçimde kalmasını sağlar.

Serinin her terimi 2π periyotludur: $\cos(n(x + 2\pi)) = \cos(nx)$ ve $\sin(n(x + 2\pi)) = \sin(nx)$. Bu yüzden seri bir x_0 noktasında yakınsıyorsa her $k \in \mathbb{Z}$ için $x_0 + 2k\pi$ noktasında da yakınsar ve toplamı aynıdır; ıraksıyorsa orada da ıraksar. Dolayısıyla bir trigonometrik serinin toplamı, tanımlı olduğu yerde, 2π periyotlu bir fonksiyondur. Trigonometrik seriyle temsil edilmek istenen fonksiyon da 2π periyotlu olmalıdır. Bu, ilk bakışta ağır bir kısıtlama gibi görünür; ama uzunluğu 2π olan bir aralıkta tanımlı her fonksiyon periyodik hâle getirilebilir.

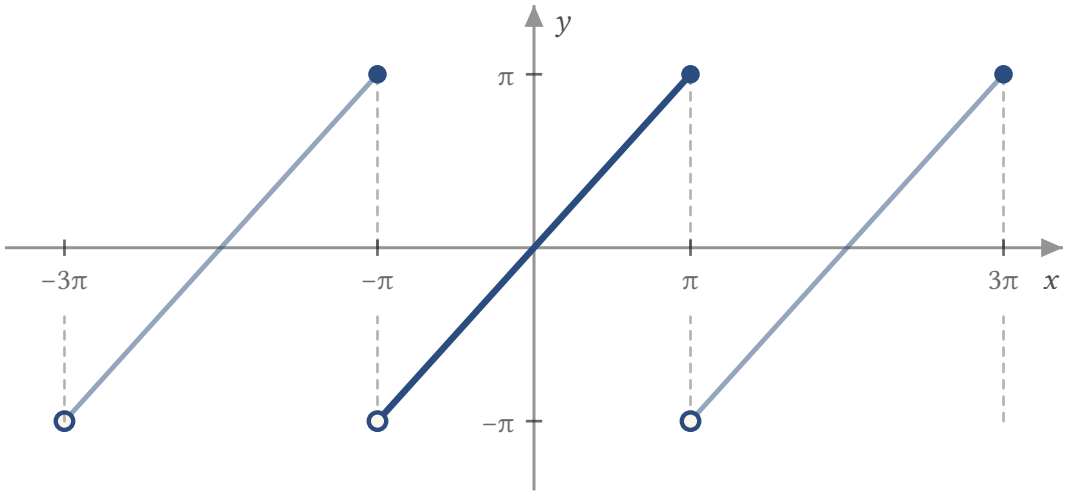
Tanım 10.2 (Periyodik Genişleme). $f : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $x - 2k\pi \in (-\pi, \pi]$ olacak biçimde tek bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

$$\tilde{f}(x) = f(x - 2k\pi)$$

ile tanımlı $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f'nin **2π periyotlu periyodik genişlemesi** denir.

Yani f'nin $(-\pi, \pi]$ üzerindeki grafiği, 2π uzunluğunda adımlarla sağa ve sola kopyalanır: $\pi < x \leq 3\pi$ için $\tilde{f}(x) = f(x - 2\pi)$, $-3\pi < x \leq -\pi$ için $\tilde{f}(x) = f(x + 2\pi)$ olur ve böyle devam eder. Genişleme $(-\pi, \pi]$ üzerinde f ile çakışır ve her x için $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x)$ sağlar. Çoğu zaman genişlemeyi de f ile gösteririz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.1: $f(x) = x$ fonksiyonunun $(-\pi, \pi]$ aralığındaki grafiği (koyu) ve 2π periyotlu genişlemesi. Genişleme π'nin tek katlarında π'den $-\pi$'ye sıçrar; dolu nokta fonksiyonun o noktadaki değerini gösterir.

Şekilde $f(x) = x$ fonksiyonunun periyodik genişlemesi görülür. $f(-\pi^+) \neq f(\pi)$ olduğundan genişleme π'nin tek katlarında sıçrar: bir aralıkta sürekli olan fonksiyonun periyodik genişlemesi sürekli olmayabilir. Genişlemenin sürekli olması için f'nin sürekli olması ve $\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = f(\pi)$ sağlaması gerekir.
Periyodik fonksiyonların integralleri için sık kullanacağımız bir özellik vardır: bir periyot boyunca alınan integral, periyodun nereden başladığına bağlı değildir.

Önerme 10.1 (Bir Periyot Üzerinde İntegral). *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π periyotlu ve $[-\pi, \pi]$ üzerinde integrallenebilir olsun. O zaman her $a \in \mathbb{R}$ için f, $[a, a + 2\pi]$ üzerinde integrallenebilirdir ve*

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

olur.

İspat.
Adım 1: Öteleme. *$k \in \mathbb{Z}$ ve $[c, d] \subseteq [-\pi, \pi]$ olsun. $x = t + 2k\pi$ değişken değiştirmesi ve $f(t + 2k\pi) = f(t)$ ile*

$$\int_{c+2k\pi}^{d+2k\pi} f(x)\,dx = \int_c^d f(t + 2k\pi)\,dt = \int_c^d f(t)\,dt \tag{1}$$

olur; özel olarak f, $[-\pi, \pi]$ aralığının her ötelemesinde, dolayısıyla sınırlı her aralıkta integrallenebilirdir. Aynı değişken değiştirmesi (1) eşitliğini artık her $[c, d]$ aralığı için verir.
Adım 2: Aralığı parçala. *$a \in \mathbb{R}$ verilsin. $a \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır; $c = a - 2k\pi \in (-\pi, \pi]$ yazalım. (1) ile*

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_c^{c+2\pi} f(t)\,dt = \int_c^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{c+2\pi} f(t)\,dt$$

olur. Son integralde $t = s + 2\pi$ yazılırsa s, $-\pi$'den c'ye değişir ve periyodiklikle $\int_{\pi}^{c+2\pi} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{c} f(s)\,ds$ bulunur. Öyleyse

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int_c^{\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{c} f(s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

10.2 Ortogonallik Bağıntıları

Katsayı formüllerinin arkasındaki bütün mekanizma, aşağıdaki integrallerdir. Hesaplarında çarpımı toplama çeviren üç özdeşlik kullanılır:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

Lemma 10.1 (Ortogonallik Bağıntıları). *$m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ olsun. O zaman:*

(i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0;$

(ii) kosinüslerin çarpımı için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \geq 1 \\ 2\pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

(iii) sinüslerin çarpımı için

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \geq 1 \\ 0, & m = n = 0 \end{cases}$$

İspat.
Önce iki temel integrali hesaplayalım. k sıfırdan farklı bir tam sayı olsun:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\,dx = \left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin(k\pi)-\sin(-k\pi)}{k} = 0, \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\,dx = \left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{\cos(k\pi)-\cos(-k\pi)}{k} = 0. \tag{3}$$

$k = 0$ için $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(0)\,dx = 2\pi$ ve $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(0)\,dx = 0$'dır.
(i) *Birinci özdeşlik $\sin(mx)\cos(nx)$ çarpımını $\sin((m+n)x)$ ve $\sin((m-n)x)$ fonksiyonlarının toplamının yarısı olarak yazar. (3) ve $\sin 0 = 0$ gereği iki terimin de integrali 0'dır.*
(ii) *İkinci özdeşlik $\cos(mx)\cos(nx)$ çarpımını $\cos((m+n)x)$ ve $\cos((m-n)x)$ fonksiyonlarının toplamının yarısı olarak yazar. $m \neq n$ ise $m+n \neq 0$ ve $m-n \neq 0$ olduğundan (2) gereği integral 0'dır. $m = n \geq 1$ ise birinci terimin integrali 0, ikinci terim $\cos 0 = 1$ olur ve integral $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$ bulunur. $m = n = 0$ ise integrand 1'dir ve integral 2π'dir.*
(iii) *Üçüncü özdeşlik $\sin(mx)\sin(nx)$ çarpımını $\cos((m-n)x)$ ile $\cos((m+n)x)$ fonksiyonlarının farkının yarısı olarak yazar. $m \neq n$ ise iki terimin integrali de 0'dır. $m = n \geq 1$ ise birinci terim 1'dir, ikincinin integrali 0'dır ve integral π bulunur. $m = n = 0$ ise integrand 0'dır.* ■

Bu bağıntılar, vektörlerin dikliğine benzetilerek okunur: $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,dx$ sayısı iki fonksiyonun "iç çarpımı" gibi düşünülürse $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ fonksiyonlarından farklı herhangi ikisinin iç çarpımı sıfırdır. Bu yüzden bu fonksiyon ailesine **ortogonal sistem** denir.

10.3 Katsayı Formülleri

Bir f fonksiyonu trigonometrik bir serinin toplamı olsun. Katsayıları f cinsinden bulmak için seriyi $\cos(kx)$ ya da $\sin(kx)$ ile çarpıp $[-\pi, \pi]$ üzerinde integralleyeceğiz; ortogonallik, sonsuz toplamdan tek bir terim bırakır. İntegrali toplamın içine alabilmek için düzgün yakınsaklık yeterlidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 10.1 (Düzgün Yakınsak Trigonometrik Serinin Katsayıları).

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\, a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \, \right)$$

trigonometrik serisi $[-\pi, \pi]$ üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsasın. O zaman f süreklidir ve

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \qquad (k \geq 0),$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx \qquad (k \geq 1)$$

olur.

İspat.
Terimler sürekli ve seri düzgün yakınsak olduğundan f süreklidir (Teorem 8.1); özel olarak integrallenebilirdir.
Adım 1: Çarpım serisi de düzgün yakınsar. *$k \geq 0$ sabit olsun ve T_N, serinin kısmi toplamı olsun. $|\cos(kx)| \leq 1$ olduğundan her $x \in [-\pi, \pi]$ için*

$$| \, T_N(x)\cos(kx) - f(x)\cos(kx) \, | \leq | \, T_N(x) - f(x) \, |$$

olur. Sağ yanın supremumu 0'a gittiğinden $T_N \cos(kx) \rightrightarrows f\cos(kx)$ ($[-\pi,\pi]$); yani

$$f(x)\cos(kx) = \frac{a_0}{2}\cos(kx) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\, a_n \cos(nx)\cos(kx) + b_n \sin(nx)\cos(kx) \, \right)$$

serisi düzgün yakınsaktır.
Adım 2: Terim terime integral. *Teorem 8.2 gereği*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\, dx \right)$$

olur.
Adım 3: Ortogonallik. *$k = 0$ ise Lemma 10.1 gereği toplamdaki bütün integraller 0'dır ve ilk terim $\frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0\pi$ verir. $k \geq 1$ ise ilk terim ve sinüslü bütün integraller 0'dır; kosinüslü integrallerden yalnız $n = k$ olanı sıfırdan farklıdır ve π'ye eşittir. Her iki durumda*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx = a_k\pi$$

bulunur; bu, a_k formülüdür.
Adım 4: b_k. *Aynı işlemler $\sin(kx)$ ile yinelenir ($k \geq 1$): $|\sin(kx)| \leq 1$ olduğundan çarpım serisi düzgün yakınsar, terim terime integralde Lemma 10.1 gereği yalnız $b_k \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\, dx = b_k\pi$ terimi kalır.* ■

Teorem, katsayıların nasıl seçilmesi gerektiğini söyler: bir fonksiyon (düzgün yakınsak) bir trigonometrik seriyle temsil edilecekse katsayılar yukarıdaki integrallerden başka bir şey olamaz. Bu gözlem tanımı tersine çevirmeyi önerir: sağdaki integraller yalnız f'nin integrallenebilir olmasını gerektirir; o hâlde integrallenebilir **her** fonksiyon için bu sayıları hesaplayıp seriyi kurabiliriz.

Tanım 10.3 (Fourier Katsayıları ve Fourier Serisi). f, $[-\pi, \pi]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad (n \geq 0),$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \qquad (n \geq 1)$$

sayılarına f'nin **Fourier katsayıları**, bu katsayılarla kurulan

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\, a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\,\right)$$

trigonometrik serisine f'nin **Fourier serisi** denir. Bu ilişki

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\, a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\,\right)$$

biçiminde yazılır. Serinin N'inci kısmi toplamı S_N ile gösterilir:

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(\, a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\,\right).$$

Yani Fourier serisi, katsayıları f'den integral formülleriyle üretilen trigonometrik seridir. Sabit terim $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, f'nin bir periyot üzerindeki ortalama değeridir.
$\sim$ işareti bilerek seçilmiştir ve eşitlik anlamına **gelmez**. Tanım yalnız katsayıların nasıl hesaplandığını söyler; serinin yakınsak olduğunu ya da $f(x)$'e yakınsadığını söylemez. Bir fonksiyonun Fourier serisi bazı noktalarda ıraksayabilir, yakınsadığı noktalarda da $f(x)$'ten farklı bir değere yakınsayabilir. Eşitliğin hangi koşullarda geçerli olduğu noktasal yakınsaklık bölümünde incelenir.
f, 2π periyotlu ise Önerme 10.1 gereği katsayı integralleri $[-\pi,\pi]$ yerine uzunluğu 2π olan herhangi bir aralıkta, örneğin $[0, 2\pi]$ üzerinde alınabilir.
Teorem 10.1 bu dille şunu söyler: düzgün yakınsak her trigonometrik seri, toplamının Fourier serisidir. Özel olarak bir trigonometrik polinomun Fourier serisi kendisidir.

Dört adımda Fourier serisi

1. **Simetriye bak.** f tek mi çift mi? Tekse bütün a_n, çiftse bütün b_n sıfırdır (Önerme 10.2).
2. **a_0'ı hesapla.** $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$; bu integral a_n formülünden ayrı hesaplanır, çünkü n'ye bölme içeren genel formül $n = 0$ için geçersizdir.
3. **a_n ve b_n'yi hesapla.** Çoğunlukla kısmi integrasyon gerekir; sonuçta $\sin(n\pi) = 0$ ve $\cos(n\pi) = (-1)^n$ kullanılır.
4. **Seriyi yaz.** Katsayılar n'nin tek ya da çift olmasına göre sadeleşiyorsa seri $n = 2k-1$ ya da $n = 2k$ indisleriyle yeniden yazılır.

Örnek 10.1 (Birim Eğimli Doğrunun Fourier Serisi). $f(x) = x$ fonksiyonunun $(-\pi, \pi]$ aralığındaki Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
a_0.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

a_n. $n \geq 1$ için $x\cos(nx)$ tek fonksiyondur: $(-x)\cos(-nx) = -x\cos(nx)$. Tek bir fonksiyonun $[-\pi,\pi]$ üzerindeki integrali 0'dır; çünkü $x = -t$ değişken değiştirmesiyle

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx = \int_{\pi}^{0} (-t)\cos(-nt)\,(-dt) = -\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\,dt$$

olur ve iki yarının integralleri birbirini götürür. Öyleyse her $n \geq 0$ için $a_n = 0$.

b_n. Kısmi integrasyonla ($u = x$, $dv = \sin(nx)\,dx$; $du = dx$, $v = -\dfrac{\cos(nx)}{n}$):

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\pi\cos(n\pi) - \pi\cos(n\pi)}{n} + 0 = -\frac{2\cos(n\pi)}{n} = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}.$$

Seri.

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right).$$

$x = \pi$ ve $x = -\pi$ noktalarında serinin bütün terimleri 0'dır; toplam 0 olur, oysa $f(\pi) = \pi$'dir. Bu, $\sim$ işaretinin neden eşitlik olmadığının ilk örneğidir. ■

Örnek 10.2 (Mutlak Değerin Fourier Serisi). $f(x) = |\,x\,|$ fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ aralığındaki Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
$|\,x\,|$ çift fonksiyondur. $|\,x\,|\sin(nx)$ tek olduğundan $b_n = 0$; $|\,x\,|\cos(nx)$ çift olduğundan integraller $[0, \pi]$ üzerindeki integralin iki katıdır.

a_0. $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.$

a_n. $n \geq 1$ için kısmi integrasyonla ($u = x$, $dv = \cos(nx)\,dx$):

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi n^2}\left(\,(-1)^n - 1\,\right).$$

n çiftse $(-1)^n - 1 = 0$, n tekse $(-1)^n - 1 = -2$ olur:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ çift} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

Seri. Yalnız tek indisler kalır; $n = 2k - 1$ yazalım:

$$|\,x\,| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\right).$$

Katsayılar $\dfrac{1}{n^2}$ hızıyla küçülür; M-testi gereği bu seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Bir önceki örnekteki (Örnek 10.1) katsayılar ise yalnız $\dfrac{1}{n}$ hızıyla küçülüyordu. Farkın nedeni, $|\,x\,|$'in periyodik genişlemesinin sürekli, x'inkinin sıçramalı olmasıdır. ■

10.4 Tek ve Çift Fonksiyonlar

İki örnekte de simetri hesabın yarısını ortadan kaldırdı. Bunu genel bir kural olarak kaydedelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 10.2 (Tek ve Çift Fonksiyonların Fourier Katsayıları). *f, $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir olsun.*

(i) f çift ise, yani her x için $f(-x)=f(x)$ ise, bütün b_n katsayıları sıfırdır ve

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad (n\geq 0), \qquad f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx).$$

(ii) f tek ise, yani her x için $f(-x)=-f(x)$ ise, bütün a_n katsayıları sıfırdır ve

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad (n\geq 1), \qquad f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin(nx).$$

İspat.
g, $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir olsun. $x=-t$ değişken değiştirmesiyle

$$\int_{-\pi}^{0} g(x)\,dx=\int_{\pi}^{0} g(-t)\,(-dt)=\int_0^{\pi} g(-t)\,dt$$

olur. Dolayısıyla

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx=\int_0^{\pi}\big(\,g(-t)+g(t)\,\big)\,dt \tag{4}$$

bulunur: g tek ise integral 0, g çift ise $2\displaystyle\int_0^{\pi} g(t)\,dt$'dir.
(i) *f çift olsun. $\cos(nx)$ çift olduğundan $f(x)\cos(nx)$ çifttir; $\sin(nx)$ tek olduğundan $f(x)\sin(nx)$ tektir. (4) gereği $b_n=0$ ve $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$.*
(ii) *f tek olsun. Bu kez $f(x)\cos(nx)$ tek, $f(x)\sin(nx)$ çifttir (iki tek fonksiyonun çarpımı çifttir). (4) gereği $a_n=0$ ve $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$.* ■

Örnek 10.3 (Basamak Fonksiyonunun Fourier Serisi). $[-\pi,\pi]$ üzerinde $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\leq x<0\\ 2, & 0\leq x\leq\pi\end{cases}$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
f ne tek ne çifttir; üç katsayı ailesini de hesaplayalım. f, $[-\pi,0)$ üzerinde 0 olduğundan integraller yalnız $[0,\pi]$ üzerinde alınır.
a_0. $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} 2\,dx=2$.
a_n. $n\geq 1$ için

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=0.$$

b_n.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}\,\big(\,1-(-1)^n\,\big)\,.$$

n çiftse $b_n=0$, n tekse $b_n=\dfrac{4}{n\pi}$ olur.
Seri.

$$f(x)\sim 1+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}=1+\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Sabit terim 1, fonksiyonun ortalama değeridir. $f-1$ fonksiyonu $x \neq 0$ için tektir (-1 ile 1 arasında sıçrar); serinin sabit terim dışında yalnız sinüs içermesinin nedeni budur. ■

10.5 Periyodu $2L$ Olan Fonksiyonlar

Periyot 2π olmak zorunda değildir. $L>0$ olmak üzere $2L$ periyotlu bir f fonksiyonu, değişkeni ölçekleyerek 2π periyotlu hâle getirilir: $g(t)=f\left(\dfrac{Lt}{\pi}\right)$ fonksiyonu 2π periyotludur, çünkü

$$g(t+2\pi)=f\left(\frac{Lt}{\pi}+2L\right)=f\left(\frac{Lt}{\pi}\right)=g(t).$$

g'nin Fourier katsayılarında $x=\dfrac{Lt}{\pi}$ değişken değiştirmesi yapılırsa ($dt=\dfrac{\pi}{L}\,dx$; $t=\pm\pi$ için $x=\pm L$)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\cdot\frac{\pi}{L}\,dx \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{aligned}$$

bulunur; b_n için de aynı hesap geçerlidir. g'nin Fourier serisinde $t=\dfrac{\pi x}{L}$ yazılınca $\cos(nt)$ ve $\sin(nt)$ yerine $\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ ve $\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ gelir; böylece aşağıdaki tanıma ulaşılır.

Tanım 10.4 (Periyodu 2L Olan Fonksiyonun Fourier Serisi). $L>0$ ve f, $[-L,L]$ üzerinde integrallenebilir olsun.

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (n\geq 0),$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (n\geq 1)$$

olmak üzere

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

serisine f'nin $[-L,L]$ aralığındaki **Fourier serisi** denir.

Yani 2π periyotlu durumdaki bütün formüllerde π yerine L, nx yerine $\dfrac{n\pi x}{L}$ gelir; $L=\pi$ için eski tanım geri elde edilir. Tek ve çift fonksiyon kuralları da aynen geçerlidir: f çiftse $b_n=0$ ve $a_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$; f tekse $a_n=0$ ve $b_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$. Periyot T ile verildiğinde $L=\dfrac{T}{2}$ alınır.

Örnek 10.4 (Periyodu 2 Olan Testere Dişi). $-1<t\leq 1$ için $f(t)=t$ ve $f(t+2)=f(t)$ ile verilen fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
Periyot $T=2$ olduğundan $L=1$'dir. f tek fonksiyondur; dolayısıyla $a_0=0$ ve $n\geq 1$ için $a_n=0$ olur.
b_n. $u=t$, $dv=\sin(n\pi t)\,dt$ ile kısmi integrasyon ($v=-\dfrac{\cos(n\pi t)}{n\pi}$):

 CC BY-NC-SA 4.0

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,dt = 2\left(\left[-\frac{t\cos(n\pi t)}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(n\pi t)\,dt\right)$$
$$= 2\left(-\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \left[\frac{\sin(n\pi t)}{n^2\pi^2}\right]_0^1\right) = -\frac{2\,(-1)^n}{n\pi} = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Seri.

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi t).$$

Bu, Örnek 10.1 serisinin ölçeklenmiş hâlidir: orada $x = \pi t$ yazılıp iki yan π'ye bölünürse aynı seri çıkar. ■

Örnek 10.5 (Dar Bir Darbenin Fourier Katsayıları). $[-2,2]$ aralığında $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier katsayılarını bulunuz.

Çözüm.
$L = 2$'dir ve integraller yalnız $[0,1]$ üzerinde alınır.
a_0. $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 dx = \frac{1}{2}$.
a_n. $n \ge 1$ için

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$\sin\dfrac{n\pi}{2}$ sayısı n çiftse 0, $n = 4k+1$ ise 1, $n = 4k+3$ ise -1'dir:

$$a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ çift} \\ \frac{1}{n\pi}, & n = 4k+1 \\ -\frac{1}{n\pi}, & n = 4k+3 \end{cases}$$

b_n.

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{n\pi}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

$\cos\dfrac{n\pi}{2}$ sayısı n tekse 0, $n = 4k$ ise 1, $n = 4k+2$ ise -1'dir:

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 4k \\ \frac{1}{n\pi}, & n \text{ tek} \\ \frac{2}{n\pi}, & n = 4k+2 \end{cases}$$

İlk katsayılar: $a_1 = \dfrac{1}{\pi}$, $a_2 = 0$, $a_3 = -\dfrac{1}{3\pi}$; $b_1 = \dfrac{1}{\pi}$, $b_2 = \dfrac{1}{\pi}$, $b_3 = \dfrac{1}{3\pi}$, $b_4 = 0$. ■

10.6 Alıştırmalar

Alıştırma 10.1 (Yarım Rampa). 2π periyotlu ve $(-\pi,\pi]$ üzerinde $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ ile verilen fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
a_0. $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$.

 CC BY-NC-SA 4.0

a_n. Örnek 10.2 çözümündeki integral burada yarı çarpanla gelir:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.$$

b_n. $u = x$, $dv = \sin(nx)\,dx$ ile

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right) \\ &= -\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Seri.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right).$$

Bu fonksiyon $\dfrac{|\,x\,| + x}{2}$'dir; katsayıları da Örnek 10.2 ile Örnek 10.1 katsayılarının toplamının yarısıdır. ■

Alıştırma 10.2 (Trigonometrik Polinomun Fourier Serisi). $f(x) = \cos(3x)$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
f çifttir; $b_n = 0$. Lemma 10.1 (ii) gereği

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(3x)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 1, & n = 3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases}$$

olur ($n = 0$ dahil). Fourier serisinde tek bir terim kalır:

$$\cos(3x) \sim \cos(3x).$$

Bir trigonometrik polinomun Fourier serisi kendisidir; katsayı formülleri, polinomda zaten yazılı olan katsayıları geri verir. ■

Alıştırma 10.3 (Özdeşlikle Fourier Serisi). $f(x) = \sin^2 x$ fonksiyonunun Fourier serisini integral hesaplamadan bulunuz.

Çözüm.
Yarım açı özdeşliği $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$ verir. Sağ yan bir trigonometrik polinomdur; Teorem 10.1 gereği kendi Fourier serisidir. Katsayılar $a_0 = 1$, $a_2 = -\dfrac{1}{2}$ ve öbürleri 0'dır:

$$\sin^2 x \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

■

Alıştırma 10.4 (Çarpım Biçiminde Çift Fonksiyon). $(-\pi, \pi]$ üzerinde $f(x) = x\sin x$ ve $f(x + 2\pi) = f(x)$ ile verilen fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
$(-x)\sin(-x) = x\sin x$ olduğundan f çifttir; $b_n = 0$.
a_0. $u = x$, $dv = \sin x\,dx$ ile

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx\right) = \frac{2}{\pi}(\pi + 0) = 2.$$

a_n. Çarpımı farka çeviren

$$\sin x\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\right]$$

özdeşliğiyle

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin((n+1)x)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin((n-1)x)\,dx \end{aligned}$$

olur. $m \geq 1$ için kısmi integrasyonla

$$\int_0^{\pi} x\sin(mx)\,dx = -\frac{\pi\cos(m\pi)}{m} = \frac{\pi\,(-1)^{m+1}}{m}$$

bulunur.

- $n = 1$ için ikinci integral $\sin 0 = 0$ nedeniyle 0'dır: $a_1 = \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{\pi\,(-1)^3}{2} = -\dfrac{1}{2}$.
- $n \geq 2$ için

$$a_n = \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n-1} = (-1)^n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n^2-1}.$$

Seri.

$$\begin{aligned} x\sin x &\sim 1 - \frac{1}{2}\cos x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2-1}\cos(nx) \\ &= 1 - \frac{\cos x}{2} - \frac{2\cos 2x}{3} + \frac{\cos 3x}{4} - \cdots \end{aligned}$$

■

Alıştırma 10.5 (Doğrultulmuş Sinüs). $f(x) = |\sin x|$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
$|\sin(-x)| = |\sin x|$ olduğundan f çifttir; $b_n = 0$. $[0,\pi]$ üzerinde $|\sin x| = \sin x$'tir.
a_0.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

a_1.

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = 0.$$

a_n, $n \geq 2$. Alıştırma 10.4 çözümündeki çarpım özdeşliğiyle

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\right]dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos((n+1)\pi)}{n+1} - \frac{1-\cos((n-1)\pi)}{n-1}\right). \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$\cos((n\pm1)\pi) = (-1)^{n+1}$ olduğundan

$$a_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right) = -\frac{2\left(\,1+(-1)^n\,\right)}{\pi\,(n^2-1)}$$

olur. n tekse $a_n = 0$; $n = 2k$ ise $a_{2k} = -\dfrac{4}{\pi\,(4k^2-1)}$.

Seri.

$$|\sin x\,| \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}.$$

Seride yalnız çift katlı kosinüsler vardır; bunun nedeni $|\sin x\,|$ fonksiyonunun periyodunun aslında π olmasıdır. ■

Alıştırma 10.6 (Periyodu 4 Olan Yarım Rampa). $f(x) = \begin{cases} 0, & -2<x<0 \\ x, & 0\le x\le 2 \end{cases}$ ve $f(x+4)=f(x)$ ile verilen fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
Periyot 4 olduğundan $L=2$'dir; integraller $[0,2]$ üzerinde alınır.

a_0. $a_0 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$.

a_n. $u=x$, $dv=\cos\dfrac{n\pi x}{2}\,dx$ ile $\left(v=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\right)$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 - \frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(0+\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2\right) = \frac{2}{n^2\pi^2}\left(\,(-1)^n-1\,\right).$$

b_n. $u=x$, $dv=\sin\dfrac{n\pi x}{2}\,dx$ ile $\left(v=-\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2}\right)$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{4\cos(n\pi)}{n\pi}+0\right) = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Seri.

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(\,(-1)^n-1\,\right)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

■

Alıştırma 10.7 (Kırpılmış Testere Dişi). $f(t) = \begin{cases} -1, & -2<t<-1 \\ t, & -1\le t\le 1 \\ 1, & 1<t<2 \end{cases}$ ve $f(t+4)=f(t)$ ile verilen fonksiyonun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
Her parçada $f(-t)=-f(t)$ olduğu doğrudan görülür: $1<t<2$ için $f(-t)=-1=-f(t)$ ve $|\,t\,|\le 1$ için $f(-t)=-t$. f tektir; $a_n=0$ $(n\ge 0)$. Periyot 4 olduğundan $L=2$'dir ve

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(t)\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = \int_0^1 t\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt + \int_1^2\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.

Birinci integral. $u = t$, $dv = \sin\dfrac{n\pi t}{2}\,dt$ ile

$$\int_0^1 t\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = \left[-\frac{2t}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \cos\frac{n\pi t}{2}\,dt$$
$$= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

İkinci integral.

$$\int_1^2 \sin\frac{n\pi t}{2}\,dt = \left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_1^2 = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Toplam. $\cos\dfrac{n\pi}{2}$ terimleri birbirini götürür:

$$b_n = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Seri.

$$f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\,(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi t}{2}.$$

İlk katsayılar $b_1 = \dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi^2}$, $b_2 = -\dfrac{1}{\pi}$, $b_3 = \dfrac{2}{3\pi} - \dfrac{4}{9\pi^2}$ olur. ■

Katsayıları hesaplamayı öğrendik, ama serinin fonksiyonla ilişkisi hâlâ belirsiz. İlk adım olarak En İyi Yaklaşım ve Bessel Eşitsizliği bölümünde Fourier kısmi toplamlarının hangi anlamda “en iyi” trigonometrik polinomlar olduğunu ve katsayıların neden sıfıra gitmek zorunda olduğunu görüyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

11. En İyi Yaklaşım ve Bessel Eşitsizliği

Bir f fonksiyonunun Fourier serisinin f'ye yakınsayıp yakınsamadığını henüz bilmiyoruz. Yakınsaklık sorusundan önce daha mütevazı bir soru soralım: derecesi en çok n olan trigonometrik polinomlar arasında f'ye en yakın olan hangisidir? "Yakınlık" bir noktadaki farkla değil, bütün aralık üzerindeki ortalama farkla ölçülürse yanıt kesindir ve hiçbir yakınsaklık varsayımı gerektirmez: en yakın polinom, Fourier serisinin n'inci kısmi toplamıdır.
Bu sonucun ispatı, yan ürün olarak iki önemli bilgi verir. Birincisi Bessel eşitsizliğidir: Fourier katsayılarının karelerinin toplamı, f^2'nin integraliyle sınırlıdır. İkincisi bunun sonucudur: integrallenebilir her fonksiyonun Fourier katsayıları sıfıra gider. Bölümün sonunda bu olgunun genel biçimi olan Riemann–Lebesgue lemmasını kanıtlıyoruz; bu lemma, sonraki bölümdeki yakınsaklık ispatının ana aracıdır.

11.1 Karesel Ortalama Hata

İki fonksiyon arasındaki uzaklığı ölçmenin birden çok yolu vardır. Düzgün yakınsaklıkta ölçü $\sup|f-g|$ idi. Burada farkın karesinin integralini kullanacağız.

Tanım 11.1 (Karesel Hata). f ve g, $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar olsun.

$$\Delta(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}\big[\,f(x)-g(x)\big]^2\,dx$$

sayısına g'nin f'ye yaklaşımındaki **karesel hata** denir.

Yani karesel hata, iki grafik arasındaki farkın karesinin altında kalan alandır. Tek bir noktadaki büyük fark bu sayıyı pek etkilemez; önemli olan farkın aralığın geneline yayılmış büyüklüğüdür. f ve g integrallenebilir olduğundan $f-g$ ve karesi de integrallenebilirdir (bkz. Analiz 2); dolayısıyla $\Delta(f,g)$ iyi tanımlıdır ve $\Delta(f,g)\geq 0$'dır.
Bir trigonometrik polinomun karesinin integrali, ortogonallik sayesinde katsayılardan doğrudan okunur.

Lemma 11.1 (Trigonometrik Polinomun Karesinin İntegrali).

$$T_n(x)=\frac{c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\big(\,c_k\cos(kx)+d_k\sin(kx)\,\big)$$

bir trigonometrik polinom ve f, $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir, Fourier katsayıları a_k, b_k olan bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\int_{-\pi}^{\pi}T_n(x)^2\,dx=\pi\left[\frac{c_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\big(\,c_k^2+d_k^2\,\big)\right], \tag{1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,T_n(x)\,dx=\pi\left[\frac{a_0c_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\big(\,a_kc_k+b_kd_k\,\big)\right] \tag{2}$$

olur.

> ***İspat.***
> **(2).** *İntegralin lineerliği ve Fourier katsayılarının tanımı (Tanım 10.3) ile*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f\,T_n\,dx &= \frac{c_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f\,dx \\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}\left(c_k\int_{-\pi}^{\pi} f\cos(kx)\,dx + d_k\int_{-\pi}^{\pi} f\sin(kx)\,dx\right) \\ &= \frac{c_0}{2}\cdot\pi a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\,c_k\cdot\pi a_k + d_k\cdot\pi b_k\,\right)\end{aligned}$$

bulunur.
(1). *T_n sürekli, dolayısıyla integrallenebilirdir. Teorem 10.1 gereği bir trigonometrik polinomun Fourier katsayıları kendi katsayılarıdır; yani $f = T_n$ için $a_k = c_k$ ve $b_k = d_k$ olur. (2) eşitliğinde $f = T_n$ alınırsa (1) çıkar.* ■

11.2 En İyi Yaklaşım Teoremi

Şimdi f sabit tutulup T_n'nin katsayıları serbest bırakıldığında karesel hatanın nasıl değiştiğine bakalım.

Teorem 11.1 (En İyi Yaklaşım Teoremi). *f, $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir ve Fourier katsayıları a_k, b_k olan bir fonksiyon, $n \geq 0$ olsun. Katsayıları c_k, d_k olan, derecesi en çok n olan her T_n trigonometrik polinomu için*

$$\begin{aligned}\Delta(f,T_n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\,a_k^2 + b_k^2\,\right)\right] \\ +\pi\left[\frac{(c_0-a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\,(c_k-a_k)^2 + (d_k-b_k)^2\,\Big)\right]\end{aligned} \tag{3}$$

olur. Dolayısıyla $\Delta(f,T_n)$, ancak ve ancak her k için $c_k = a_k$ ve $d_k = b_k$ olduğunda, yani $T_n = S_n$ Fourier kısmi toplamı olduğunda en küçük değerini alır.

İspat.
Kareyi açalım:

$$\Delta(f,T_n) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f\,T_n\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2\,dx.$$

(1) ve (2) eşitliklerini (Lemma 11.1) yerine koyalım:

$$\Delta(f,T_n) = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx + \pi\left[\frac{c_0^2}{2} - a_0c_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(\,c_k^2 - 2a_kc_k + d_k^2 - 2b_kd_k\,\right)\right].$$

Köşeli parantezin içindeki her ifadeyi tam kareye tamamlayalım:

$$\begin{aligned}\frac{c_0^2}{2} - a_0c_0 &= \frac{(c_0-a_0)^2}{2} - \frac{a_0^2}{2}, \\ c_k^2 - 2a_kc_k &= (c_k-a_k)^2 - a_k^2, \\ d_k^2 - 2b_kd_k &= (d_k-b_k)^2 - b_k^2.\end{aligned}$$

Bunlar yerine konup a ve b'li terimler ayrı toplanırsa (3) elde edilir.
(3) eşitliğinin ilk satırı c_k ve d_k sayılarına bağlı değildir. İkinci satır karelerin toplamıdır; negatif olamaz ve ancak bütün kareler sıfırken, yani $c_0 = a_0$, $c_k = a_k$, $d_k = b_k$ iken sıfır olur. Öyleyse $\Delta(f,T_n)$ en küçük değerini yalnız bu seçimde alır. ■

Teoremin dikkat çekici bir yanı vardır: en iyi yaklaşımın katsayıları n'ye bağlı değildir. Dereceyi n'den $n+1$'e çıkarmak, önceki katsayıları değiştirmeyi gerektirmez; yalnız yeni bir terim eklenir. Kuvvet serilerinde

 CC BY-NC-SA 4.0

Taylor polinomları da bu özelliğe sahiptir, ama başka tür yaklaşımlarda (örneğin bir aralıkta en iyi polinom yaklaşımında) durum böyle değildir.

Sonuç 11.1 (Fourier Kısmi Toplamının Karesel Hatası). *f, $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir ve S_n Fourier serisinin n'inci kısmi toplamı olsun. O zaman*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\, f(x) - S_n(x)\right]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(\, a_k^2 + b_k^2 \,\right)\right]$$

olur.

> ***İspat.***
> *(3) eşitliğinde $c_k = a_k$, $d_k = b_k$ alınırsa ikinci satır sıfır olur.* ■

Örnek 11.1 (Birinci Dereceden En İyi Yaklaşım). $[-\pi,\pi]$ üzerinde $f(x) = x$ fonksiyonuna $T(x) = \frac{c_0}{2} + c_1\cos x + d_1 \sin x$ biçimindeki polinomlar arasında karesel hatası en küçük olanı ve bu en küçük hatayı bulunuz.

> **Çözüm.**
> Teorem 11.1 gereği en iyi seçim Fourier katsayılarıdır. Örnek 10.1 gereği $a_0 = a_1 = 0$ ve $b_1 = 2$'dir; en iyi polinom
>
> $$T(x) = S_1(x) = 2\sin x$$
>
> olur. Hata için Sonuç 11.1:
>
> $$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}, \qquad \Delta(f, S_1) = \frac{2\pi^3}{3} - \pi\cdot 2^2 = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi \approx 8{,}10.$$
>
> Karşılaştırma için: hiç yaklaşım yapılmazsa ($T = 0$) hata $\dfrac{2\pi^3}{3} \approx 20{,}67$'dir. Tek bir sinüs terimi hatayı yarıdan fazla azaltır. ■

11.3 Bessel Eşitsizliği

Kısmi toplamın karesel hatasını veren eşitliğin (Sonuç 11.1) sol yanı bir karenin integralidir ve negatif olamaz. Bu basit gözlem, Fourier katsayıları üzerinde güçlü bir kısıt verir.

Teorem 11.2 (Bessel Eşitsizliği). *f, $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir ve Fourier katsayıları a_k, b_k olan bir fonksiyon olsun. O zaman $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\, a_k^2 + b_k^2 \,\right)$ serisi yakınsaktır ve*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\, a_k^2 + b_k^2 \,\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx$$

olur.

> ***İspat.***
> *Kısmi toplamın karesel hatasını veren eşitliğin (Sonuç 11.1) sol yanı ≥ 0 olduğundan her n için*
>
> $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\, a_k^2 + b_k^2 \,\right) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx \tag{4}$$
>
> *sağlanır. Sağ yan n'ye bağlı olmayan sonlu bir sayıdır. $\sum(a_k^2 + b_k^2)$ negatif olmayan terimli bir seridir ve (4) gereği kısmi toplamları üstten sınırlıdır; dolayısıyla yakınsaktır (bkz. Analiz 2). (4) eşitsizliğinde $n \to \infty$ limiti alınırsa sıralama korunur ve iddia çıkar.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç 11.2 (Fourier Katsayıları Sıfıra Gider). *f, $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir ise Fourier katsayıları için $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ olur. Açık yazımıyla:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = 0.$$

> ***İspat.***
> *Teorem 11.2 gereği $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ yakınsaktır; yakınsak bir serinin genel terimi sıfıra gider: $a_n^2 + b_n^2 \to 0$. $0 \le a_n^2 \le a_n^2 + b_n^2$ olduğundan sıkıştırma teoremiyle $a_n^2 \to 0$, dolayısıyla $a_n \to 0$ olur; b_n için de aynı gerekçe geçerlidir. İkinci satır, a_n ve b_n tanımlarının π ile çarpılmış hâlidir.* ■

Sonucun anlamı şudur: n büyüdükçe $\cos(nx)$ çok sık salınır; f'nin grafiği bu salınımın pozitif ve negatif yarılarında hemen hemen aynı kaldığından katkılar birbirini götürür.

Örnek 11.2 (Bessel Eşitsizliğinden Bir Sayısal Sınır). $f(x) = x$ fonksiyonuna Bessel eşitsizliğini uygulayarak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{\pi^2}{6}$ olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Örnek 10.1 gereği $a_n = 0$ ve $b_n = \dfrac{2\,(-1)^{n+1}}{n}$, dolayısıyla $b_n^2 = \dfrac{4}{n^2}$'dir. Bessel eşitsizliği
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$
>
> verir. İki yan 4'e bölünürse $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \frac{\pi^2}{6}$ bulunur.
> Gerçekte burada eşitlik vardır; bunu Fourier Serilerinin Düzgün Yakınsaklığı ve Parseval Eşitliği bölümünde göreceğiz. ■

Örnek 11.3 (Fourier Serisi Olamayan Bir Trigonometrik Seri). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ serisinin her x için yakınsadığını, ama $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir hiçbir fonksiyonun Fourier serisi olmadığını gösteriniz.

> **Çözüm.**
> **Yakınsaklık.** $x = 2k\pi$ ise bütün terimler 0'dır. x, 2π'nin tam katı değilse $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$ olur ve Örnek 7.6 çözümündeki özdeşlik
>
> $$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(kx)\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$
>
> verir: $\sum \sin(nx)$ serisinin kısmi toplamları sınırlıdır. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ dizisi azalarak 0'a gider. Dirichlet testi (bkz. Analiz 2) gereği seri yakınsaktır.
> **Fourier serisi değildir.** Seri, integrallenebilir bir f fonksiyonunun Fourier serisi olsaydı katsayıları $a_n = 0$ ve $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ olurdu. Bessel eşitsizliği $\sum b_n^2 = \sum \dfrac{1}{n}$ serisinin yakınsak olmasını gerektirir; oysa harmonik seri ıraksaktır. Öyleyse böyle bir f yoktur.
> Katsayıların sıfıra gitmesi (Sonuç 11.2) burada sağlanmaktadır; Bessel eşitsizliği daha fazlasını, karelerin toplanabilir olmasını ister. ■

11.4 Riemann–Lebesgue Lemması

Sonuç 11.2 iki yönde genelleştirilebilir: aralık $[-\pi,\pi]$ olmak zorunda değildir ve frekans yalnız tam sayı değerleri almak zorunda değildir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Lemma 11.2 (Riemann–Lebesgue Lemması). *f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ise*

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(tx)\,dx = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{t\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(tx)\,dx = 0$$

olur.

İspat.
Sinüslü integral için ispatlayalım; kosinüslü integralin ispatı aynı adımlarla yapılır. İspat üç aşamalıdır: önce en basit fonksiyonlar, sonra onların toplamları, sonra genel durum.
Adım 1: Bir alt aralıkta sabit, dışında sıfır olan fonksiyon. *$[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$ ve $C\in\mathbb{R}$ olsun; f, (α,β) üzerinde C, $[a,b]$'nin $[\alpha,\beta]$ dışındaki noktalarında 0 değerini alsın (α ve β noktalarındaki değerler integrali etkilemez). $t>0$ için*

$$\int_a^b f(x)\sin(tx)\,dx = C\int_\alpha^\beta \sin(tx)\,dx = C\cdot\frac{\cos(\alpha t)-\cos(\beta t)}{t}$$

olur ve

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(tx)\,dx\right| \le \frac{2\mid C\mid}{t}\to 0 \qquad (t\to+\infty).$$

Adım 2: Basamak fonksiyonu. *$[a,b]$'nin bir $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_p\}$ bölünüşünün her (x_{k-1},x_k) açık alt aralığında sabit bir C_k değeri alan fonksiyona basamak fonksiyonu diyelim. Böyle bir ψ fonksiyonu, sonlu sayıda nokta dışında, Adım 1'deki türden p tane fonksiyonun toplamıdır. Sonlu sayıda noktadaki değerler integrali etkilemediğinden ve sonlu bir toplamın limiti limitlerin toplamı olduğundan*

$$\int_a^b \psi(x)\sin(tx)\,dx = \sum_{k=1}^{p} C_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin(tx)\,dx \to 0 \qquad (t\to+\infty).$$

Adım 3: Genel durum. *f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun ve $\varepsilon>0$ verilsin. $\int_a^b f$ sayısı alt Darboux toplamlarının supremumu olduğundan öyle bir P bölünüşü vardır ki*

$$\int_a^b f(x)\,dx - L(P,f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. m_k, f'nin $[x_{k-1},x_k]$ üzerindeki infimumu olsun ve ψ, her (x_{k-1},x_k) açık alt aralığında m_k değerini, bölünüş noktalarında f'nin değerini alan basamak fonksiyonu olsun. O zaman $[a,b]$ üzerinde $\psi\le f$ ve $\int_a^b\psi=\sum m_k\Delta x_k = L(P,f)$ olur. Dolayısıyla

$$\int_a^b \mid f(x)-\psi(x)\mid dx = \int_a^b \big(\, f(x)-\psi(x)\,\big)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$f=(f-\psi)+\psi$ yazıp $\mid\sin(tx)\mid\le 1$ kullanalım:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(tx)\,dx\right| \le \int_a^b \mid f(x)-\psi(x)\mid dx + \left|\int_a^b \psi(x)\sin(tx)\,dx\right|.$$

Sağdaki birinci terim $\dfrac{\varepsilon}{2}$'den küçüktür. İkinci terim Adım 2 gereği $t\to+\infty$ iken 0'a gider; öyle bir $t_0>0$ vardır ki $t>t_0$ için $\dfrac{\varepsilon}{2}$'den küçük olur. Öyleyse $t>t_0$ için

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(tx)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur; limit 0'dır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

İspatın düzeni analizde sık kullanılan bir kalıptır: iddia önce elle hesaplanabilen basit fonksiyonlar için gösterilir, sonra genel fonksiyon basit olanlarla yaklaştırılır ve aradaki fark ayrıca sınırlanır.
Lemmada t reel bir değişkendir. $t = n$ tam sayı dizisi boyunca limit alınırsa Sonuç 11.2 yeniden elde edilir; $t = n + \dfrac{1}{2}$ dizisi boyunca alınan limit ise bir sonraki bölümde gerekecektir.

11.5 Alıştırmalar

Alıştırma 11.1 (Karesel Hatanın Azalışı). $f(x) = x$ için $\Delta_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \big[\, x - S_n(x)\big]^2\, dx$ sayılarını $n = 1, 2, 3$ için hesaplayınız.

Çözüm.
Sonuç 11.1 ve $b_k^2 = \dfrac{4}{k^2}$ ile

$$\Delta_n = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

olur. $\dfrac{2\pi^3}{3} \approx 20{,}671$ ve $4\pi \approx 12{,}566$ olduğundan:

Tablo 11.1: $f(x) = x$ için Fourier kısmi toplamlarının karesel hatası

n	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$	Δ_n
1	1	$\approx 8{,}104$
2	$\dfrac{5}{4}$	$\approx 4{,}963$
3	$\dfrac{49}{36}$	$\approx 3{,}567$

Hata her adımda azalır; n'inci terimin eklenmesi hatayı tam olarak $\pi b_n^2 = \dfrac{4\pi}{n^2}$ kadar düşürür. ■

Alıştırma 11.2 (Dördüncü Kuvvetler için Bir Sınır). $f(x) = |\, x \,|$ fonksiyonuna Bessel eşitsizliğini uygulayarak $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \le \frac{\pi^4}{96}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Örnek 10.2 gereği $a_0 = \pi$, tek n için $a_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}$, çift $n \ge 2$ için $a_n = 0$ ve $b_n = 0$'dır. Bessel eşitsizliğinin sol yanı

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4},$$

sağ yanı $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \frac{2\pi^2}{3}$ olur. Öyleyse

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \le \frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}$$

olur; iki yan $\dfrac{\pi^2}{16}$ ile çarpılırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \le \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^4}{96}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 11.3 (Hangi Üsler Dışlanır?). $p > 0$ olsun. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^p}$ serisinin, $p \le \dfrac{1}{2}$ ise $[-\pi, \pi]$ üzerinde integrallenebilir hiçbir fonksiyonun Fourier serisi olamayacağını gösteriniz.

Çözüm.
Seri integrallenebilir bir fonksiyonun Fourier serisi olsaydı $a_n = \dfrac{1}{n^p}, b_n = 0$ olurdu ve Bessel eşitsizliği gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$$

serisi yakınsak olurdu. Bu bir p-serisidir ve ancak $2p > 1$, yani $p > \dfrac{1}{2}$ için yakınsar. $p \le \dfrac{1}{2}$ ise seri ıraksaktır; çelişki. ■

Alıştırma 11.4 (Salınımlı Çarpanın Ortalaması). $f, [0, \pi]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Aşağıdaki eşitliği gösteriniz:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(x) \sin^2(nx)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(x)\, dx.$$

Çözüm.
Yarım açı özdeşliği $\sin^2(nx) = \dfrac{1 - \cos(2nx)}{2}$ ile

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin^2(nx)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(x)\, dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2nx)\, dx$$

olur. Lemma 11.2 ($t = 2n \to +\infty$) gereği ikinci integral 0'a gider. Limit $\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\, dx$'tir.
Yorum: $\sin^2(nx)$ çarpanı 0 ile 1 arasında hızla salınır ve ortalama değeri $\dfrac{1}{2}$'dir; n büyüdükçe integral, f'nin bu ortalama ile çarpılmış hâlinin integraline yaklaşır. ■

Alıştırma 11.5 (Lemmanın Doğrudan Denetimi). $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_0^{1} x \cos(tx)\, dx = 0$ olduğunu integrali hesaplayarak gösteriniz.

Çözüm.
$t > 0$ için $u = x$, $dv = \cos(tx)\, dx$ ile kısmi integrasyon:

$$\int_0^{1} x \cos(tx)\, dx = \left[\frac{x \sin(tx)}{t}\right]_0^{1} - \frac{1}{t} \int_0^{1} \sin(tx)\, dx = \frac{\sin t}{t} + \frac{\cos t - 1}{t^2}.$$

$|\sin t| \le 1$ ve $|\cos t - 1| \le 2$ olduğundan

$$\left| \int_0^{1} x \cos(tx)\, dx \right| \le \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} \to 0 \qquad (t \to +\infty)$$

olur; sonuç Lemma 11.2 ile uyumludur. Doğrudan hesap, yakınsama hızının $\dfrac{1}{t}$ mertebesinde olduğunu da gösterir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Fourier katsayıları her zaman sıfıra gider; ama bu, serinin yakınsaması için yeterli değildir. Fourier Serilerinin Noktasal Yakınsaklığı bölümünde kısmi toplamları bir integral olarak yazıp Riemann–Lebesgue lemmasıyla yakınsaklığı kanıtlıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

12. Fourier Serilerinin Noktasal Yakınsaklığı

Bir fonksiyonun Fourier katsayılarını hesaplamayı ve bu katsayıların sıfıra gittiğini biliyoruz. Şimdi asıl soruya geliyoruz: f'nin Fourier serisi bir x noktasında yakınsar mı, yakınsarsa toplamı $f(x)$ midir?
Yanıt için kısmi toplamın katsayılar üzerinden yazılmış hâli elverişli değildir. Onun yerine $S_n(x)$'i tek bir integral olarak yazacağız: f'nin x çevresindeki değerlerinin, **Dirichlet çekirdeği** denen belirli bir fonksiyonla ağırlıklandırılmış ortalaması. Bu gösterimde yakınsaklık sorusu, salınımlı bir integralin limitine dönüşür ve Riemann–Lebesgue lemmasıyla çözülür.
Varılan sonuç hem güçlü hem kullanışlıdır: f bir noktada sağdan ve soldan limite ve tek yönlü türevlere sahipse Fourier serisi o noktada yakınsar ve toplamı sağ ve sol limitlerin ortalamasıdır. Süreklilik noktalarında bu ortalama $f(x)$'in kendisidir.
Bölüm boyunca f, 2π periyotlu ve $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur; $(-\pi,\pi]$ üzerinde verilmiş bir fonksiyon periyodik genişlemesiyle (Tanım 10.2) düşünülür.

12.1 Dirichlet Çekirdeği

Kısmi toplamın integral gösteriminde ortaya çıkacak fonksiyonu önceden tanıyalım.

Tanım 12.1 (Dirichlet Çekirdeği). $N \in \{0,1,2,\dots\}$ olsun.

$$D_N(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \cos(n\theta) \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

ile tanımlı trigonometrik polinoma **N'inci dereceden Dirichlet çekirdeği** denir; $D_0(\theta) = \dfrac{1}{2}$'dir.

Yani Dirichlet çekirdeği, bütün katsayıları 1 olan kosinüs polinomudur. Tanımdan hemen görülen üç özelliği vardır: D_N süreklidir, 2π periyotludur ve çifttir ($D_N(-\theta) = D_N(\theta)$).

Lemma 12.1 (Dirichlet Çekirdeğinin Kapalı Biçimi). *$N \geq 0$ olsun. θ, 2π'nin tam katı değilse*

$$D_N(\theta) = \frac{\sin\!\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

olur; $\theta = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ise $D_N(2k\pi) = N + \dfrac{1}{2}$'dir.

> ***İspat.***
> *$D_N(\theta)$ ifadesini $\sin\dfrac{\theta}{2}$ ile çarpalım ve her terimde*
>
> $$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$$
>
> *özdeşliğini $\alpha = n\theta$, $\beta = \dfrac{\theta}{2}$ ile kullanalım:*
>
> $$\sin\frac{\theta}{2}\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right)\right].$$
>
> *$n = 1, \dots, N$ için toplanınca sağ yan teleskopik olur:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sin\frac{\theta}{2}\,D_N(\theta) = \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\left[\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\frac{\theta}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)\theta\right).$$

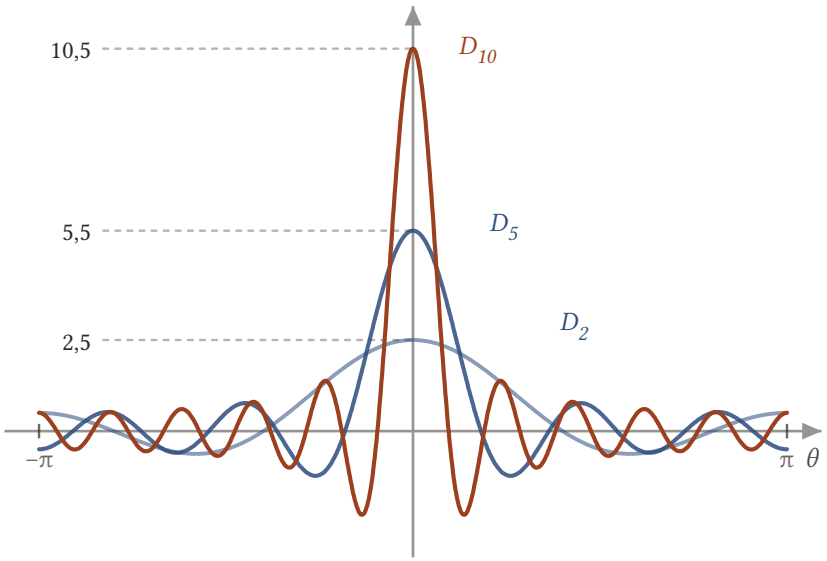
θ, 2π'nin tam katı değilse $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$ olur ve bölerek formül elde edilir. $\theta = 2k\pi$ ise her n için $\cos(2kn\pi) = 1$ olduğundan $D_N(2k\pi) = \frac{1}{2} + N$. ■

Lemma 12.2 (Dirichlet Çekirdeğinin İntegrali). *Her $N \geq 0$ için $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(\theta)\,d\theta = 1$ olur.*

İspat.
$n \geq 1$ için $\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\,d\theta = \left[\frac{\sin(n\theta)}{n}\right]_0^{\pi} = 0$'dır. Dolayısıyla

$$\int_0^{\pi} D_N(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\,d\theta + \sum_{n=1}^{N}\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

olur; $\frac{2}{\pi}$ ile çarpınca iddia çıkar. ■



Şekil 12.1: D_2, D_5 ve D_{10} Dirichlet çekirdekleri. Ortadaki tepe $N + 1/2$ yüksekliğine çıkıp daralır; yanlarda çekirdek işaret değiştirerek salınır.

Şekil çekirdeğin davranışını gösterir: N büyüdükçe $\theta = 0$'daki tepe $N + \frac{1}{2}$ yüksekliğine çıkar ve daralır; tepenin dışında çekirdek gittikçe sıklaşan bir salınım yapar. Toplam alan ise hep aynı kalır.
İleride paydadaki $\sin\frac{\theta}{2}$'yi alttan sınırlamamız gerekecek.

Lemma 12.3 (Sinüs için Alt Sınır). *$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ için $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ olur. Dolayısıyla $0 < u \leq \pi$ için*

$$\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} \leq \frac{\pi}{2u}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$h(t) = \sin t - \dfrac{2t}{\pi}$ *olsun.* $h(0) = 0$ *ve* $h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - 1 = 0$*'dır.* $h'(t) = \cos t - \dfrac{2}{\pi}$ *fonksiyonu* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *üzerinde azalandır ve* $h'(0) = 1 - \dfrac{2}{\pi} > 0$, $h'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{\pi} < 0$ *olduğundan tam bir* t_0 *noktasında işaret değiştirir:* h, $[0, t_0]$ *üzerinde artan,* $\left[t_0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *üzerinde azalandır. Birinci aralıkta* $h(t) \geq h(0) = 0$*, ikinci aralıkta* $h(t) \geq h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ *olur.*
İkinci iddia için $t = \dfrac{u}{2} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *alınır:* $\sin\dfrac{u}{2} \geq \dfrac{u}{\pi} > 0$*, yani* $\dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}} \leq \dfrac{\pi}{2u}$. ■

12.2 Kısmi Toplamın İntegral Gösterimi

Katsayı formüllerini kısmi toplamın içine yerleştirince Dirichlet çekirdeği kendiliğinden ortaya çıkar.

Teorem 12.1 (Kısmi Toplamın İntegral Gösterimi). *f, 2π periyotlu ve $[-\pi, \pi]$ üzerinde integrallenebilir olsun; S_n, Fourier serisinin n'inci kısmi toplamı olsun. O zaman her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\, D_n(u)\, du = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\, D_n(u)\, du$$

olur.

İspat.
Adım 1: Katsayıları yerine koy. *Katsayı formüllerinde integral değişkenini t ile gösterelim:*

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \big[\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)\big]\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\big(\,k(t-x)\,\big)\right] dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t-x)\, dt. \end{aligned}$$

Burada iki kosinüsün ve iki sinüsün çarpımlarının toplamı, kosinüsün fark formülüyle $\cos(k(t-x))$ olarak yazıldı.
Adım 2: Değişken değiştir. *$t = x + u$ yazalım; u, $-\pi - x$'ten $\pi - x$'e değişir:*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u)\, D_n(u)\, du.$$

$u \mapsto f(x+u)\, D_n(u)$ fonksiyonu 2π periyotludur ve integrallenebilirdir; integrasyon aralığının uzunluğu 2π'dir. Önerme 10.1 gereği integral $[-\pi, \pi]$ üzerinde alınabilir. Bu, birinci eşitliktir.
Adım 3: Aralığı katla. *$[-\pi, 0]$ üzerindeki parçada $u = -v$ yazalım; D_n çift olduğundan*

$$\int_{-\pi}^{0} f(x+u)\, D_n(u)\, du = \int_{0}^{\pi} f(x-v)\, D_n(v)\, dv$$

olur. İki parça toplanınca

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \big[\, f(x+u) + f(x-u)\,\big]\, D_n(u)\, du$$

bulunur; bu, ikinci eşitliktir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Gösterim şunu söyler: $S_n(x)$, f'nin x'in iki yanındaki simetrik değerlerinin ortalamasının, Dirichlet çekirdeğiyle ağırlıklandırılmış integralidir. Çekirdeğin tepesi $u = 0$'da yoğunlaştığından asıl katkı x'e yakın değerlerden gelir.

Sonuç 12.1 (Kısmi Toplam ile Aday Limit Arasındaki Fark). *Teorem 12.1 koşulları altında her $x \in \mathbb{R}$ ve her $s \in \mathbb{R}$ sayısı için*

$$S_n(x) - s = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(u)\, D_n(u)\, du, \qquad g(u) = \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - s$$

olur.

> ***İspat.***
> *Lemma 12.2 gereği $s = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} s\, D_n(u)\, du$ yazılabilir. Bu eşitlik, integral gösteriminin (Teorem 12.1) ikinci eşitliğinden çıkarılırsa iddia elde edilir.* ■

Böylece "$S_n(x) \to s$" önermesi, sağdaki integralin 0'a gitmesine denktir. g fonksiyonu x'e ve s'ye bağlıdır; bunlar sabit tutulduğu için yalnız $g(u)$ yazıyoruz.

12.3 Dini Koşulu ve Yakınsaklık

İntegralin 0'a gitmesi için g'nin $u = 0$ yakınında yeterince küçük olması gerekir. Bunu ölçen koşul şudur.

Tanım 12.2 (Dini Koşulu). f, 2π periyotlu ve integrallenebilir, $x, s \in \mathbb{R}$ ve $g(u) = \dfrac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - s$ olsun. Bir $\delta \in (0, \pi]$ için

$$\lim_{\eta \to 0^+} \int_{\eta}^{\delta} \frac{|\, g(u)\,|}{u}\, du$$

limiti sonluysa f, x noktasında s değeriyle **Dini koşulunu sağlar** denir.

Yani $\dfrac{|\, g(u)\,|}{u}$ fonksiyonunun $u = 0$ yakınındaki alanı sonlu kalmalıdır. Her $\eta \in (0, \delta)$ için integral tanımlıdır, çünkü $[\eta, \delta]$ üzerinde $\dfrac{1}{u}$ sürekli ve g integrallenebilirdir. η küçüldükçe aralık büyüdüğünden ve integrand negatif olmadığından integral artar; dolayısıyla limit her zaman vardır, ama $+\infty$ olabilir. Koşul bunun olmamasını ister. Limiti $J(\delta)$ ile gösterelim. En basit yeterli koşul, $\dfrac{|\, g(u)\,|}{u}$ oranının $(0, \delta]$ üzerinde sınırlı olmasıdır: $\dfrac{|\, g(u)\,|}{u} \le M$ ise her η için integral en çok $M\delta$'dır.

Teorem 12.2 (Dini Yakınsaklık Teoremi). *f, 2π periyotlu ve $[-\pi, \pi]$ üzerinde integrallenebilir olsun. f, bir x noktasında s değeriyle Dini koşulunu sağlıyorsa Fourier serisi x noktasında s'ye yakınsar: $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = s$.*

> ***İspat.***
> *$\varepsilon > 0$ verilsin. Sonuç 12.1 gereği $\delta_1 \in (0, \delta]$ için*
>
> $$S_n(x) - s = \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\delta_1} g(u)\, D_n(u)\, du}_{I_1} + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_{\delta_1}^{\pi} g(u)\, D_n(u)\, du}_{I_2}$$
>
> *yazılır. δ_1'i I_1 her n için küçük olacak biçimde seçecek, sonra I_2'yi n büyüterek küçülteceğiz.*
> ***Adım 1: δ_1 seçimi.*** *$0 < \eta < \delta_1 \le \delta$ için $\displaystyle\int_{\eta}^{\delta} = \int_{\eta}^{\delta_1} + \int_{\delta_1}^{\delta}$ olduğundan, $\eta \to 0^+$ limitinde*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$J(\delta_1) = J(\delta) - \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\mid g(u) \mid}{u}\, du$$

olur. $\delta_1 \to 0^+$ *iken sağdaki integral, tanım gereği* $J(\delta)$*'ya yakınsar; dolayısıyla* $J(\delta_1) \to 0$*. Öyleyse* $J(\delta_1) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ *olacak biçimde bir* $\delta_1 \in (0, \delta]$ *seçilebilir.*

Adım 2: $\boldsymbol{I_1}$ ***sınırı.*** $0 < u \le \pi$ *için Lemma 12.1 ve Lemma 12.3 ile*

$$\mid D_n(u) \mid = \frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)\right|}{2\sin\frac{u}{2}} \le \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} \le \frac{\pi}{2u}$$

olur. $0 < \eta < \delta_1$ *için*

$$\int_{\eta}^{\delta_1} \mid g(u) \mid\mid D_n(u) \mid du \le \frac{\pi}{2} \int_{\eta}^{\delta_1} \frac{\mid g(u) \mid}{u}\, du \le \frac{\pi}{2}\, J(\delta_1)$$

bulunur. $\mid g \mid\mid D_n \mid$ *fonksiyonu* $[0, \delta_1]$ *üzerinde integrallenebilir olduğundan sol yan,* $\eta \to 0^+$ *iken* $\displaystyle\int_0^{\delta_1} \mid g \mid\mid D_n \mid$ *integraline yakınsar (integral, alt sınırının sürekli fonksiyonudur). Dolayısıyla her* n *için*

$$\mid I_1 \mid \le \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta_1} \mid g(u) \mid\mid D_n(u) \mid du \le \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}\, J(\delta_1) = J(\delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Adım 3: $\boldsymbol{I_2}$ ***sınırı.*** $[\delta_1, \pi]$ *üzerinde* $\sin\dfrac{u}{2} \ge \sin\dfrac{\delta_1}{2} > 0$ *olduğundan* $\dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}$ *süreklidir;* g *integrallenebilir olduğundan*

$$\varphi(u) = \frac{g(u)}{2\sin\frac{u}{2}}$$

fonksiyonu $[\delta_1, \pi]$ *üzerinde integrallenebilirdir. Lemma 12.1 ile*

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{\delta_1}^{\pi} \varphi(u) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right) du$$

olur. Riemann–Lebesgue lemması (Lemma 11.2), $t = n + \dfrac{1}{2} \to +\infty$ *ile,* $I_2 \to 0$ *verir. Öyleyse öyle bir* N *vardır ki* $n \ge N$ *için* $\mid I_2 \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$ *olur.*

Sonuç. $n \ge N$ *için* $\mid S_n(x) - s \mid \le \mid I_1 \mid + \mid I_2 \mid < \varepsilon$ *olur.* ■

İspatın dikkat çekici bir sonucu vardır: I_2 parçası, f yalnız integrallenebilir olduğu sürece her zaman 0'a gider. Fourier serisinin bir x noktasında yakınsayıp yakınsamadığını, f'nin yalnız x'in keyfi küçük bir komşuluğundaki davranışı belirler; oysa katsayılar f'nin bütün aralıktaki değerlerinden hesaplanır.

12.4 Parçalı Sürekli ve Yarı-Türevlenebilir Fonksiyonlar

Dini koşulunu doğrudan denetlemek zahmetlidir. Uygulamada karşılaşılan fonksiyonların hemen hepsinin sağladığı, denetlemesi kolay koşullar verelim. Önce gösterim: bir x noktasındaki sağdan ve soldan limitleri (varsa)

$$f(x+0) = \lim_{h \to 0^+} f(x+h), \qquad f(x-0) = \lim_{h \to 0^+} f(x-h)$$

ile gösteriyoruz.

Tanım 12.3 (Parçalı Sürekli Fonksiyon). f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f, sonlu sayıda nokta dışında $[a,b]$'nin her noktasında sürekliyse ve bu istisna noktalarının her birinde sağdan ve soldan limitleri varsa ve sonluysa (a'da yalnız sağdan, b'de yalnız soldan limit) f'ye $[a,b]$ üzerinde **parçalı sürekli** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani parçalı sürekli bir fonksiyonun grafiği, sonlu sayıda sürekli parçadan oluşur ve parçaların birleşme yerlerinde en kötü olasılıkla sonlu bir sıçrama vardır; $\frac{1}{x}$ gibi sonsuza kaçan ya da $\sin\frac{1}{x}$ gibi limitsiz salınan davranışlara izin verilmez. Parçalı sürekli bir fonksiyon sınırlıdır ve sonlu sayıda süreksizlik noktası olduğundan integrallenebilirdir (bkz. Analiz 2).
Sıçrama noktasında sıradan türev tanımsızdır; ama sıçramanın iki yanındaki eğimler yine de ölçülebilir.

Tanım 12.4 (Genelleştirilmiş Tek Yönlü Türevler ve Yarı-Türevlenebilirlik). f fonksiyonunun bir x noktasında $f(x+0)$ ve $f(x-0)$ limitleri var ve sonlu olsun.

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x+0)}{h},$$
$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x-h)-f(x-0)}{-h}$$

limitlerine (varsa ve sonluysa) f'nin x noktasındaki **genelleştirilmiş sağdan ve soldan türevleri** denir. İkisi de varsa f'ye x noktasında **yarı-türevlenebilir** denir.

Yani sağdan türev hesaplanırken $f(x)$ yerine sağdan limit $f(x+0)$, soldan türev hesaplanırken soldan limit $f(x-0)$ kullanılır; böylece sıçramanın büyüklüğü hesaba karışmaz ve yalnız iki yandaki eğimler ölçülür. f bir noktada türevlenebilirse o noktada yarı-türevlenebilirdir ve iki genelleştirilmiş türev $f'(x)$'e eşittir. $|\,x\,|$ fonksiyonu 0'da türevlenebilir değildir, ama yarı-türevlenebilirdir ($f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=-1$).

Teorem 12.3 (Yarı-Türevlenebilir Noktada Yakınsaklık). *f, 2π periyotlu ve $[-\pi,\pi]$ üzerinde integrallenebilir olsun. f bir x noktasında yarı-türevlenebilir ise Fourier serisi x noktasında yakınsar ve*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

olur. Özel olarak f, x noktasında ayrıca sürekliyse Fourier serisi x'te $f(x)$'e yakınsar.

İspat.
$s = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ alalım ve Dini koşulunu denetleyelim. $u>0$ için

$$g(u) = \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - s = \frac{f(x+u)-f(x+0)}{2} + \frac{f(x-u)-f(x-0)}{2}$$

olur. u ile bölüp üçgen eşitsizliğini kullanalım:

$$\frac{|\,g(u)\,|}{u} \le \frac{1}{2}\left|\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\right| + \frac{1}{2}\left|\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\right|. \tag{1}$$

$u\to 0^+$ iken birinci oran $f'_+(x)$'e, ikinci oranın mutlak değeri $|\,f'_-(x)\,|$'e yakınsar. Sonlu limiti olan bir fonksiyon, limit noktasının yakınında sınırlıdır: öyle $\delta\in(0,\pi]$ ve $M>0$ vardır ki $0<u\le\delta$ için (1)'in sağındaki iki oran da mutlak değerce M'yi aşmaz. Dolayısıyla $0<u\le\delta$ için $\dfrac{|\,g(u)\,|}{u}\le M$ olur ve her $\eta\in(0,\delta)$ için

$$\int_\eta^\delta \frac{|\,g(u)\,|}{u}\,du \le M\delta$$

sağlanır; limit sonludur. f, x noktasında s değeriyle Dini koşulunu sağlar ve Teorem 12.2 gereği $S_n(x)\to s$.
f, x'te sürekliyse $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$ olur ve $s=f(x)$'tir. ∎

Sıçrama noktasındaki davranış dikkat çekicidir: Fourier serisi, fonksiyonun o noktada hangi değeri aldığını "bilmez" (tek bir noktadaki değer integralleri etkilemez) ve sıçramanın tam ortasına yakınsar.
Her noktada tek tek yarı-türevlenebilirlik denetlemek yerine, fonksiyonun tamamı için tek bir koşul vermek daha pratiktir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 12.5 (Parçalı Düzgün Fonksiyon). f, $[a,b]$ üzerinde parçalı sürekli olsun. f, sonlu sayıda nokta dışında türevlenebilirse ve f' türevi, istisna noktalarında sağdan ve soldan sonlu limitlere sahip olacak biçimde parçalar üzerinde sürekliyse f'ye $[a,b]$ üzerinde **parçalı düzgün** denir.

Yani parçalı düzgün bir fonksiyon, sonlu sayıda parçanın her birinde sürekli türevlidir ve türev parçaların uçlarında sonlu limitlere sahiptir. Polinomlardan, üstel ve trigonometrik fonksiyonlardan parça parça kurulan bütün fonksiyonlar bu sınıftadır.

Lemma 12.4 (Parçalı Düzgün Fonksiyon Her Noktada Yarı-Türevlenebilirdir). *f, $[a,b]$ üzerinde parçalı düzgün ise $a \le x < b$ olan her x için $f'_+(x)$ vardır ve $f'(x+0)$'a eşittir; $a < x \le b$ olan her x için $f'_-(x)$ vardır ve $f'(x-0)$'a eşittir.*

> ***İspat.***
> *$a \le x < b$ olsun. İstisna noktaları sonlu sayıda olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $(x, x+\delta)$ aralığında istisna noktası yoktur; f bu açık aralıkta türevlenebilirdir. $F(t) = f(t)$ $(x < t \le x+h)$ ve $F(x) = f(x+0)$ ile tanımlı fonksiyon, $0 < h < \delta$ için $[x, x+h]$ üzerinde süreklidir ve $(x, x+h)$ üzerinde türevlenebilirdir. Ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) bir $\xi_h \in (x, x+h)$ için*
>
> $$\frac{f(x+h) - f(x+0)}{h} = f'(\xi_h)$$
>
> *verir. $h \to 0^+$ iken $\xi_h \to x^+$ olur ve f''nin sağdan limiti var olduğundan $f'(\xi_h) \to f'(x+0)$. Öyleyse $f'_+(x) = f'(x+0)$. Soldan türev için aynı akıl yürütme $[x-h, x]$ aralığında yinelenir.* ■

Sonuç 12.2 (Parçalı Düzgün Fonksiyonların Fourier Serisi). *f, 2π periyotlu ve $[-\pi, \pi]$ üzerinde parçalı düzgün olsun. O zaman Fourier serisi her $x \in \mathbb{R}$ noktasında yakınsar ve toplamı*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

olur. Süreklilik noktalarında toplam $f(x)$'tir. $x = \pi$ ve $x = -\pi$ noktalarında toplam $\dfrac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}$'dir.

> ***İspat.***
> *f periyodik olduğundan her sınırlı aralıkta parçalı düzgündür; Lemma 12.4 gereği her noktada yarı-türevlenebilirdir. Teorem 12.3 her x için uygulanır. $x = \pi$ noktasında periyodiklikle $f(\pi+0) = f(-\pi+0)$ olur; $x = -\pi$ noktasında $f(-\pi-0) = f(\pi-0)$.* ■

Periyodu $2L$ olan fonksiyonlar için de aynı sonuç geçerlidir: $g(t) = f\left(\dfrac{Lt}{\pi}\right)$ ölçeklemesi (Tanım 10.4) parçalı düzgünlüğü ve tek yönlü limitleri korur.

> Üç adımda Fourier serisinin toplamı
>
> 1. **Periyodik genişlemeyi çiz.** Süreksizlik noktalarını (parçaların birleşme yerleri ve çoğu zaman periyodun uçları) belirle.
> 2. **Süreklilik noktaları.** Parçalı düzgün bir fonksiyonun Fourier serisi bu noktalarda $f(x)$'e eşittir; $\sim$ yerine $=$ yazılabilir.
> 3. **Sıçrama noktaları.** Serinin toplamı $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$'dir. Uygun bir x değeri seriye konursa bir sayı serisinin toplamı elde edilir.

Örnek 12.1 (Testere Dişinin Yakınsaklığı ve Leibniz Serisi). $f(x) = x$ fonksiyonunun $(-\pi, \pi]$ üzerindeki Fourier serisinin toplamını her $x \in [-\pi, \pi]$ için belirleyiniz ve $x = \dfrac{\pi}{2}$ alarak bir sayı serisinin toplamını bulunuz.

> **Çözüm.**

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 10.1 gereği $x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$. Periyodik genişleme parçalı düzgündür: $(-\pi,\pi)$ üzerinde $f(x)=x$ sürekli türevlidir; süreksizlikler yalnız π'nin tek katlarındadır.
$-\pi < x < \pi$. f süreklidir; Sonuç 12.2 gereği

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \qquad (-\pi < x < \pi).$$

$x = \pm\pi$. $f(\pi-0)=\pi$ ve $f(-\pi+0)=-\pi$ olduğundan toplam $\dfrac{-\pi+\pi}{2}=0$'dır. Bu, serinin bütün terimlerinin bu noktalarda 0 olmasıyla uyumludur.
Sayı serisi. $x=\dfrac{\pi}{2}$ alalım. $\sin\dfrac{n\pi}{2}$ sayısı çift n için 0, $n=2k-1$ için $(-1)^{k+1}$ olduğundan

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{2k-1}(-1)^{k+1} = 2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)$$

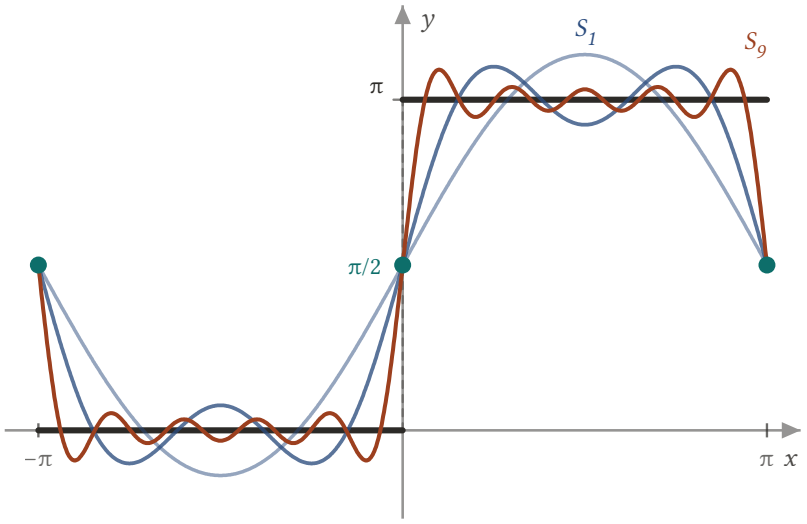
olur. Buradan Leibniz serisi elde edilir:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots = \frac{\pi}{4}.$$

■

Örnek 12.2 (Sıçramanın Ortasına Yakınsama). $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ \pi, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ fonksiyonu 2π periyotlu genişletilsin. Fourier serisini bulunuz ve her x için toplamını belirleyiniz.

Çözüm.



Şekil 12.2: Basamak fonksiyonu (koyu) ve Fourier serisinin S_1, S_3, S_9 kısmi toplamları. Hepsi sıçramanın orta noktası $(0,\,\pi/2)$'den geçer; sıçramanın hemen yanındaki aşım terim sayısı artınca kaybolmaz.

Katsayılar. f, Örnek 10.3 fonksiyonunun $\dfrac{\pi}{2}$ katıdır; katsayılar da aynı çarpanla gelir: $a_0=\pi$, $n\ge 1$ için $a_n=0$ ve

$$b_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\left(\,1-(-1)^n\,\right) = \frac{1-(-1)^n}{n} = \begin{cases}\frac{2}{n}, & n \text{ tek}\\ 0, & n \text{ çift}\end{cases}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Seri.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right).$$

Toplam. f parçalı düzgündür. x, π'nin tam katı değilse f süreklidir ve seri $f(x)$'e yakınsar. $x = k\pi$ noktalarında bir yanda limit 0, öbür yanda π'dir; seri

$$\frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

değerine yakınsar. Gerçekten de $x = k\pi$ için bütün sinüs terimleri 0 olur ve seriden yalnız $\frac{\pi}{2}$ kalır. Dikkat: $f(0) = \pi$ olarak tanımlanmıştı, ama seri 0 noktasında $\frac{\pi}{2}$ verir.
Şekilde S_1, S_3 ve S_9 kısmi toplamları görülür: hepsi $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ noktasından geçer ve terim sayısı arttıkça basamağa yaklaşır. Sıçramanın hemen yanında kısmi toplamların fonksiyonu bir miktar aştığı da görülür; bu aşım terim sayısı artınca kaybolmaz, yalnız sıçramaya doğru sıkışır. Yakınsama her noktada gerçekleşir, ama sıçramayı içeren bir aralıkta düzgün değildir: sürekli S_n fonksiyonlarının limiti süreksizdir (Sonuç 4.2). ■

Örnek 12.3 (Tek Sayıların Karelerinin Tersleri). $|\,x\,|$ fonksiyonunun Fourier serisinden yararlanarak $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$|\,x\,|$'in Fourier serisini biliyoruz (Örnek 10.2). $|\,x\,|$'in periyodik genişlemesi süreklidir ($f(-\pi) = f(\pi) = \pi$) ve parçalı düzgündür (türev -1 ya da 1). Sonuç 12.2 gereği her $x \in [-\pi, \pi]$ için eşitlik geçerlidir:

$$|\,x\,| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

$x = 0$ alalım:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8}.$$

■

Örnek 12.4 (Basel Problemi). $-\pi \le x \le \pi$ için $f(x) = x^2$ ve $f(x+2\pi) = f(x)$ olsun. Fourier serisini bulunuz, $x = \pi$ noktasındaki toplamını belirleyiniz ve buradan $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm.
Katsayılar. f çifttir; $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$n \ge 1$ için iki kez kısmi integrasyon yapalım. Önce $u = x^2$, $dv = \cos(nx)\,dx$:

$$\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \left[\frac{x^2\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx.$$

Sonra $u = x$, $dv = \sin(nx)\,dx$:

$$\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = -\frac{\pi\,(-1)^n}{n}.$$

Öyleyse

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(-\frac{\pi\,(-1)^n}{n}\right) = \frac{4\,(-1)^n}{n^2}.$$

Seri ve toplamı. f'nin periyodik genişlemesi süreklidir ($f(-\pi)=f(\pi)=\pi^2$) ve parçalı düzgündür. Sonuç 12.2 gereği her $x\in[-\pi,\pi]$ için

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

$x=\pi$. $\cos(n\pi)=(-1)^n$ ve $(-1)^n(-1)^n=1$ olduğundan

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Bu, Euler'in çözdüğü Basel problemidir. Aynı seride $x=0$ alınırsa $0 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, yani

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

bulunur. ■

12.5 Alıştırmalar

Alıştırma 12.1 (Çekirdeğin İki Biçimi). $D_2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ değerini hem tanımdan hem kapalı biçimden hesaplayınız.

Çözüm.
Tanımdan. $D_2(\theta) = \dfrac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta$ olduğundan

$$D_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Kapalı biçimden. Lemma 12.1, $N=2$ ve $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ ile

$$D_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\frac{5\pi}{6}}{2\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

İki yol aynı değeri verir. ■

Alıştırma 12.2 (Kare Dalga). $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi\le x<0 \\ 1, & 0\le x<\pi \end{cases}$ ve $f(x+2\pi)=f(x)$ olsun. Fourier serisini bulunuz ve her x için toplamını belirleyiniz.

Çözüm.
Katsayılar. $x\neq 0$ için $f(-x)=-f(x)$ olur; tek bir noktadaki değer integralleri etkilemediğinden katsayılar tek fonksiyon kuralıyla hesaplanır: $a_n=0$ ve

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(\,1-(-1)^n\,\right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

n çiftse $b_n = 0$, n tekse $b_n = \dfrac{4}{n\pi}$.
Seri.

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin((2m-1)x)}{2m-1}.$$

Toplam. f parçalı düzgündür. x, π'nin tam katı değilse seri $f(x)$'e yakınsar: $0 < x < \pi$ için 1'e, $-\pi < x < 0$ için -1'e. $x = k\pi$ noktalarında toplam $\dfrac{1+(-1)}{2} = 0$'dır; oysa $f(0) = 1$ ve $f(\pi) = f(-\pi) = -1$ olarak tanımlıdır.
$x = \dfrac{\pi}{2}$ alınırsa $1 = \dfrac{4}{\pi}\left(1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \cdots\right)$ olur; Leibniz serisi bir kez daha elde edilir. ■

Alıştırma 12.3 (Doğrultulmuş Sinüsten İki Toplam). $|\sin x|$ fonksiyonunun Fourier serisinden yararlanarak $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$ ve $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}$ toplamlarını bulunuz.

Çözüm.
$|\sin x|$ sürekli, 2π periyotlu ve parçalı düzgündür; Sonuç 12.2 gereği Fourier serisi (Alıştırma 10.5) her x için fonksiyona eşittir:

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}.$$

$\boldsymbol{x = 0}$**.** $0 = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$, dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

(Denetim: $\dfrac{1}{4k^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right)$ teleskopik serisinin toplamı $\dfrac{1}{2}$'dir.)
$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2}}$**.** $\cos(k\pi) = (-1)^k$ olduğundan

$$1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} = \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi-2}{4}.$$

■

Alıştırma 12.4 (Periyodu π Olan Bir Fonksiyon). $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ ve $f(x+\pi) = f(x)$ olsun. Fourier serisini bulunuz ve bundan yararlanarak $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm.
Periyot π olduğundan $L = \dfrac{\pi}{2}$ ve $\dfrac{n\pi x}{L} = 2nx$'tir. İntegrandlar π periyotlu olduğundan $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ üzerindeki parça, $x = t - \pi$ değişken değiştirmesiyle $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ üzerindeki integrale eşittir; katsayı integralleri $[0, \pi]$ aralığında alınabilir; f yalnız $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ üzerinde sıfırdan farklıdır.
$\boldsymbol{a_0}$**.** $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{4}$.
$\boldsymbol{a_n}$**.** $u = x$, $dv = \cos(2nx)\,dx$ ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\cos(2nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\sin(2nx)\,dx\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(0 + \left[\frac{\cos(2nx)}{4n^2}\right]_0^{\pi/2}\right) = \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n^2}.$$

b_n. $u = x$, $dv = \sin(2nx)\,dx$ ile

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(2nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x\cos(2nx)}{2n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2}\cos(2nx)\,dx\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi\,(-1)^n}{4n} + 0\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.$$

Kalan integral 0'dır, çünkü $\sin(2nx)$ fonksiyonu $x = 0$ ve $x = \dfrac{\pi}{2}$ noktalarında sıfırdır.
Seri.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{2\pi n^2}\cos(2nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{2n}\sin(2nx)\right).$$

Sayı serisi. $x = 0$ noktasına bakalım. Sağdan limit $f(0+0) = 0$; soldan limit periyodiklikle $f(0-0) = f(\pi - 0) = 0$. f parçalı düzgün olduğundan seri $x = 0$'da $\dfrac{0+0}{2} = 0$ değerine yakınsar. Sinüs terimleri 0 olur; a_n yalnız tek n için sıfırdan farklıdır ve $-\dfrac{1}{\pi n^2}$'ye eşittir:

$$0 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Sonuç Örnek 12.3 ile aynıdır. ■

Alıştırma 12.5 (Türevsiz Ama Dini Koşullu). $[-\pi, \pi]$ üzerinde $f(x) = \sqrt{|\,x\,|}$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında yarı-türevlenebilir olmadığını, ama $s = 0$ değeriyle Dini koşulunu sağladığını gösteriniz.

Çözüm.
Yarı-türevlenebilir değildir. $f(0+0) = 0$ ve

$$\frac{f(0+h) - f(0+0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \to +\infty \qquad (h \to 0^+)$$

olduğundan genelleştirilmiş sağdan türev yoktur.
Dini koşulu. $x = 0$ ve $s = f(0) = 0$ için

$$g(u) = \frac{\sqrt{u} + \sqrt{u}}{2} - 0 = \sqrt{u}, \qquad \frac{|\,g(u)\,|}{u} = \frac{1}{\sqrt{u}}$$

olur. $\delta = \pi$ ve $0 < \eta < \pi$ için

$$\int_{\eta}^{\pi}\frac{du}{\sqrt{u}} = \Big[\,2\sqrt{u}\,\Big]_{\eta}^{\pi} = 2\sqrt{\pi} - 2\sqrt{\eta} \to 2\sqrt{\pi} \qquad (\eta \to 0^+).$$

Limit sonludur; Dini koşulu sağlanır ve Teorem 12.2 gereği Fourier serisi $x = 0$'da $0 = f(0)$ değerine yakınsar. Dini koşulu, yarı-türevlenebilirlikten gerçekten daha geneldir. ■

Noktasal yakınsaklığı elde ettik; ama sıçramalı fonksiyonlarda yakınsama düzgün olamaz. Fourier Serilerinin Düzgün Yakınsaklığı ve Parseval Eşitliği bölümünde sürekli ve parçalı düzgün fonksiyonlarda

 CC BY-NC-SA 4.0

yakınsamanın düzgün olduğunu, serinin terim terime türevlenebildiğini ve Bessel eşitsizliğinin eşitliğe dönüştüğünü gösteriyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

13. Fourier Serilerinin Düzgün Yakınsaklığı ve Parseval Eşitliği

Noktasal yakınsaklık teoremi, parçalı düzgün bir fonksiyonun Fourier serisinin her noktada yakınsadığını söyler. Sıçramalı bir fonksiyonda bu yakınsama düzgün olamaz; çünkü sürekli kısmi toplamların düzgün limiti sürekli olmak zorundadır. Geriye şu soru kalır: fonksiyon sürekliyse yakınsama düzgün müdür?
Yanıt, türevin Fourier katsayılarıyla fonksiyonun Fourier katsayıları arasındaki basit bir bağıntıdan çıkar: türev almak, n'inci katsayıyı n ile çarpar. Bessel eşitsizliği türeve uygulanınca f'nin katsayılarının hızlı küçüldüğü görülür ve düzgün yakınsaklık elde edilir. Aynı bağıntı serinin terim terime türevlenmesini de açıklar.
Bölümün ikinci yarısında Bessel eşitsizliğine dönüyoruz. Eşitsizlik aslında bir eşitliktir; buna Parseval eşitliği denir. İspat için kısmi toplamların ortalamalarını ve onların çekirdeği olan Fejér çekirdeğini kullanacağız.

13.1 Türevin Fourier Katsayıları

Önce bu bölümde sık yinelenecek koşulu sabitleyelim: f, $[-\pi,\pi]$ üzerinde **sürekli**, $f(-\pi)=f(\pi)$ ve **parçalı düzgün** (Tanım 12.5) olsun. İlk iki koşul birlikte, periyodik genişlemenin bütün $\mathbb{R}$'de sürekli olması demektir. Üçüncü koşul, f' türevinin sonlu sayıda nokta dışında var olduğunu ve parçalı sürekli olduğunu söyler; f''nin tanımsız olduğu sonlu sayıda noktadaki değer integralleri etkilemez.

Lemma 13.1 (Türevin Fourier Katsayıları). *f, $[-\pi,\pi]$ üzerinde sürekli ve parçalı düzgün olsun ve $f(-\pi)=f(\pi)$ sağlansın. f'nin Fourier katsayıları a_n, b_n; f''nin Fourier katsayıları a'_n, b'_n ise*

$$a'_0 = 0, \qquad a'_n = n\,b_n, \qquad b'_n = -n\,a_n \qquad (n \geq 1)$$

olur.

İspat.
Adım 1: Kısmi integrasyon geçerlidir. *f''nin var olmadığı ya da süreksiz olduğu noktalar $-\pi = t_0 < t_1 < \dots < t_p = \pi$ bölünüşünün noktaları arasında olsun. Her $[t_{j-1},t_j]$ alt aralığında f süreklidir, açık aralıkta türevlenebilirdir ve f' uçlarda sonlu limitlere sahiptir; ayrıca Lemma 12.4 gereği f, uçlarda tek yönlü türevlenebilirdir ve bu türevler f''nin uçlardaki limitlerine eşittir. Dolayısıyla f, kapalı alt aralıkta sürekli türevlidir ve φ sürekli türevli herhangi bir fonksiyon olmak üzere kısmi integrasyon (bkz. Analiz 2) uygulanabilir:*

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = \Big[\,f(x)\,\varphi(x)\Big]_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x)\,\varphi'(x)\,dx.$$

$j=1,\dots,p$ için toplayalım. $f\varphi$ sürekli olduğundan sınır terimleri teleskopik biçimde sadeleşir ve

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\varphi(x)\,dx = f(\pi)\varphi(\pi) - f(-\pi)\varphi(-\pi) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \tag{1}$$

elde edilir.
Adım 2: Katsayılar. *(1) eşitliğinde $\varphi = 1$ alınırsa $\varphi' = 0$ ve*

$$a'_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = \frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi} = 0.$$

$\varphi(x)=\cos(nx)$ alınırsa $\varphi(\pm\pi)=(-1)^n$ ve $\varphi'(x) = -n\sin(nx)$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\left((-1)^n \left[\, f(\pi) - f(-\pi) \,\right] + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \right) = 0 + n\,b_n.$$

$\varphi(x) = \sin(nx)$ *alınırsa* $\varphi(\pm\pi) = 0$ *ve* $\varphi'(x) = n\cos(nx)$ *olduğundan*

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\left(0 - n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \right) = -n\,a_n.$$

■

Bağıntılar biçimsel bir hesabın söylediğiyle aynıdır: $a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ teriminin türevi $nb_n\cos(nx) - na_n\sin(nx)$'tir. Lemmanın söylediği, bu terim terime türevin f''nin Fourier serisini verdiğidir; bunun için serinin yakınsaması bile gerekmez. $f(-\pi) = f(\pi)$ koşulu vazgeçilmezdir: sağlanmazsa sınır terimleri kalır.

Teorem 13.1 (Fourier Serisinin Terim Terime Türevi). *f, $[-\pi,\pi]$ üzerinde sürekli ve parçalı düzgün olsun ve $f(-\pi) = f(\pi)$ sağlansın; f periyodik genişletilsin. f' fonksiyonunun yarı-türevlenebilir olduğu her x noktasında*

$$\frac{f'(x+0) + f'(x-0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\, n\,b_n\cos(nx) - n\,a_n\sin(nx) \,\right)$$

olur. Özel olarak $f''(x)$'in var olduğu her x noktasında sağdaki seri $f'(x)$'e yakınsar.

İspat.
f' parçalı sürekli, dolayısıyla integrallenebilirdir ve periyodik genişlemesi 2π periyotludur. Lemma 13.1 gereği f''nin Fourier serisi, sabit terimi 0 olan $\sum(nb_n\cos(nx) - na_n\sin(nx))$ serisidir. Teorem 12.3 f' fonksiyonuna uygulanırsa, f''nin yarı-türevlenebilir olduğu her x noktasında bu seri $\dfrac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2}$ değerine yakınsar. $f''(x)$ varsa f', x'te türevlenebilirdir; dolayısıyla sürekli ve yarı-türevlenebilirdir ve ortalama $f'(x)$'e eşittir. ■

Bu teoremin ispatında ne f'nin serisinin ne de türev serisinin düzgün yakınsaklığı kullanıldı; fonksiyon serilerindeki genel terim terime türev teoreminden farklı bir yoldur.

Örnek 13.1 (Mutlak Değer Serisinin Türevi). $|\,x\,|$ fonksiyonunun Fourier serisini terim terime türeterek elde edilen serinin toplamını $-\pi < x < \pi$ için bulunuz.

Çözüm.
$f(x) = |\,x\,|$, $[-\pi,\pi]$ üzerinde süreklidir, $f(-\pi) = f(\pi) = \pi$ ve f parçalı düzgündür. Örnek 12.3 gereği

$$|\,x\,| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}.$$

Terim terime türev alınırken $\cos((2k-1)x)$'in türevi $-(2k-1)\sin((2k-1)x)$ olduğundan her terimin paydasındaki kuvvet bir azalır ve işaret değişir. Türev fonksiyonu $x > 0$ için $f'(x) = 1$, $x < 0$ için $f'(x) = -1$'dir ve her noktada yarı-türevlenebilirdir (parçalar üzerinde sabittir). Teorem 13.1 gereği

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ 0, & x = 0 \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

olur; $x = 0$'da değer $\dfrac{1+(-1)}{2} = 0$'dır. Bu, kare dalganın Fourier serisidir (Alıştırma 12.2). ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 13.2 (Uç Koşulu Sağlanmazsa Terim Terime Türev Alınamaz). $f(x) = x$ fonksiyonunun $(-\pi, \pi)$ üzerindeki Fourier serisinin terim terime türevinin hiçbir noktada yakınsamadığını gösteriniz.

Çözüm.
$-\pi < x < \pi$ için $x = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$ olur (Örnek 12.1). Terim terime türev

$$2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos(nx)$$

serisini verir. Bu serinin genel teriminin mutlak değeri $2\,|\cos(nx)\,|$'tir. $\cos(nx) \to 0$ olsaydı $\cos(2nx) = 2\cos^2(nx) - 1 \to -1$ olurdu; oysa $\big(\cos(2nx)\big)$ dizisi $\big(\cos(nx)\big)$ dizisinin bir alt dizisidir ve o da 0'a gitmek zorundadır. Çelişki: genel terim 0'a gitmez ve seri her x için ıraksaktır.
Oysa $f'(x) = 1$'dir. Teoremin koşullarından $f(-\pi) = f(\pi)$ sağlanmamaktadır: $-\pi \neq \pi$. Periyodik genişleme süreksizdir ve türevin "Fourier serisi" sıçramaların katkısını göremez. ■

13.2 Mutlak ve Düzgün Yakınsaklık

Lemma 13.1, f'nin katsayılarını f''nin katsayıları cinsinden verir: $a_n = -\dfrac{b_n'}{n}$, $b_n = \dfrac{a_n'}{n}$. Bessel eşitsizliği $\sum({a_n'}^2 + {b_n'}^2)$ serisinin yakınsak olduğunu söyler; fazladan gelen $\dfrac{1}{n}$ çarpanı f'nin katsayılarını toplanabilir yapar. İki toplamı birbirine bağlayan araç, sonlu toplamlar için Cauchy–Schwarz eşitsizliğidir.

Lemma 13.2 (Sonlu Toplamlar için Cauchy–Schwarz Eşitsizliği). *$x_1, \dots, x_p$ ve $y_1, \dots, y_p$ reel sayılar olsun. O zaman*

$$\left(\sum_{k=1}^{p} x_k y_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{p} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{p} y_k^2\right)$$

olur.

İspat.
$A = \sum x_k^2$, $B = \sum x_k y_k$, $C = \sum y_k^2$ yazalım. Her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$0 \le \sum_{k=1}^{p} (\lambda x_k + y_k)^2 = A\lambda^2 + 2B\lambda + C$$

olur. $A = 0$ ise bütün x_k'lar 0'dır; $B = 0$ olur ve eşitsizlik açıktır. $A > 0$ ise $\lambda = -\dfrac{B}{A}$ koyalım: $0 \le \dfrac{B^2}{A} - \dfrac{2B^2}{A} + C = C - \dfrac{B^2}{A}$, yani $B^2 \le AC$. ■

Teorem 13.2 (Fourier Serisinin Mutlak ve Düzgün Yakınsaklığı). *f, $[-\pi, \pi]$ üzerinde sürekli ve parçalı düzgün olsun ve $f(-\pi) = f(\pi)$ sağlansın. O zaman f'nin Fourier serisi $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır, toplamı f'nin periyodik genişlemesidir ve her $n \ge 1$, her x için*

$$|\, f(x) - S_n(x) \,| \le \frac{C}{\sqrt{n}}, \qquad C = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)^2\,dx\right)^{1/2}$$

olur.

İspat.
Adım 1: Bir terimin sınırı. *Lemma 13.2, $p = 2$ için*

$$\big(\, a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\big)^2 \le (a_k^2 + b_k^2)\,\big(\cos^2(kx) + \sin^2(kx)\,\big) = a_k^2 + b_k^2$$

verir; dolayısıyla her x için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\mid a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\mid \le \sqrt{a_k^2+b_k^2}=\frac{1}{k}\sqrt{{a_k'}^2+{b_k'}^2}$$

olur. Son eşitlik türevin katsayı bağıntılarından (Lemma 13.1) gelir: $a_k^2+b_k^2=\dfrac{{b_k'}^2+{a_k'}^2}{k^2}$.

Adım 2: Kuyruğun sınırı. $m>n\ge 1$ *olsun. Cauchy–Schwarz eşitsizliğini (Lemma 13.2)* $x_k=\dfrac{1}{k}, y_k=\sqrt{{a_k'}^2+{b_k'}^2}$ *ile uygulayalım:*

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\sqrt{{a_k'}^2+{b_k'}^2}}{k}\le\left(\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n+1}^{m}\left({a_k'}^2+{b_k'}^2\right)\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Birinci çarpan için $\dfrac{1}{k^2}<\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$ *eşitsizliğini kullanalım; toplam teleskopiktir:*

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2}<\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}.$$

İkinci çarpan için f' *parçalı sürekli, dolayısıyla integrallenebilir olduğundan Bessel eşitsizliği (Teorem 11.2)* f' *fonksiyonuna uygulanır:*

$$\sum_{k=n+1}^{m}\left({a_k'}^2+{b_k'}^2\right)\le\sum_{k=1}^{\infty}\left({a_k'}^2+{b_k'}^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)^2\,dx=C^2.$$

(2) *ve Adım 1 birleşince her* $x\in\mathbb{R}$ *ve* $m>n\ge 1$ *için*

$$\mid S_m(x)-S_n(x)\mid\le\sum_{k=n+1}^{m}\mid a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\mid\le\frac{C}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

bulunur.

Adım 3: Düzgün ve mutlak yakınsaklık. $\dfrac{C}{\sqrt{n}}\to 0$ *olduğundan* (3) *eşitsizliği* (S_n) *dizisinin* $\mathbb{R}$ *üzerinde düzgün Cauchy dizisi olduğunu söyler; Teorem 3.4 gereği* (S_n) *düzgün yakınsaktır.* (3)*'ün orta ifadesi, mutlak değerlerin serisinin de aynı Cauchy koşulunu sağladığını gösterir; seri mutlak yakınsaktır.*

Adım 4: Limit f'dir. f *sürekli ve parçalı düzgün olduğundan Sonuç 12.2 gereği her* x *için* $S_n(x)\to f(x)$ *olur. Düzgün limit noktasal limite eşit olduğundan* $S_n\rightrightarrows f$ $(\mathbb{R})$.

Adım 5: Hata sınırı. (3) *eşitsizliğinde* n *ve* x *sabit tutulup* $m\to\infty$ *limiti alınırsa* $S_m(x)\to f(x)$ *olduğundan* $\mid f(x)-S_n(x)\mid\le\dfrac{C}{\sqrt{n}}$ *çıkar.* ■

Teorem üç şeyi birden verir: yakınsamanın düzgün olması, mutlak olması ve hatanın ne kadar hızlı küçüldüğü. Koşullar da doğaldır: toplam sürekli çıkacağına göre f periyodik olarak sürekli olmalıdır; bunu f'nin sürekliliği ve $f(-\pi)=f(\pi)$ birlikte sağlar.

Örnek 13.3 (Hata Sınırının Hesabı). $f(x)=\mid x\mid$ için $\mid f(x)-S_n(x)\mid$ farkına $[-\pi,\pi]$ üzerinde geçerli bir üst sınır veriniz. $n=100$ için sınır kaçtır?

Çözüm.
f sürekli ve parçalı düzgündür, $f(-\pi)=f(\pi)$. $x\neq 0$ için $f'(x)=\pm 1$, dolayısıyla $f'(x)^2=1$ olur ve

$$C^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2,\qquad C=\sqrt{2}.$$

Teorem 13.2 gereği her x için

$$\big|\mid x\mid-S_n(x)\big|\le\sqrt{\frac{2}{n}}$$

olur. $n=100$ için sınır $\sqrt{0{,}02}\approx 0{,}141$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu sınır kabadır. $|\ x\ |$'in katsayıları $\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}$ olduğundan gerçek hata, kalan terimlerin toplamıyla çok daha iyi sınırlanır; teoremin verdiği sınırın değeri, yalnız f''nin integralini kullanarak her fonksiyon için geçerli olmasındadır. ■

13.3 Fejér Çekirdeği ve Fejér Teoremi

Yalnız sürekli olan (türevi hakkında bir şey bilinmeyen) bir fonksiyonun Fourier serisi yakınsamayabilir. Buna karşın kısmi toplamların **ortalamaları** her zaman düzgün yakınsar. Bu sonuç kendi başına önemlidir; biz onu Parseval eşitliğini kanıtlamak için kullanacağız.

Tanım 13.1 (Fejér Ortalamaları ve Fejér Çekirdeği). f, 2π periyotlu ve integrallenebilir, $S_0, S_1, S_2, \ldots$ Fourier serisinin kısmi toplamları olsun ($S_0 = \dfrac{a_0}{2}$).

$$\sigma_N(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_N(x)}{N+1}$$

fonksiyonuna f'nin ***N*'inci Fejér ortalaması**,

$$K_N(\theta) = \frac{D_0(\theta) + D_1(\theta) + \ldots + D_N(\theta)}{N+1}$$

fonksiyonuna ***N*'inci dereceden Fejér çekirdeği** denir; burada D_k Dirichlet çekirdeğidir (Tanım 12.1).

Yani Fejér ortalaması, ilk $N+1$ kısmi toplamın aritmetik ortalamasıdır; Fejér çekirdeği de ilk $N+1$ Dirichlet çekirdeğinin ortalamasıdır. σ_N, derecesi en çok N olan bir trigonometrik polinomdur.

Lemma 13.3 (Fejér Çekirdeğinin Özellikleri). *$N \geq 0$ olsun.*

(i) K_N şu trigonometrik polinomdur:

$$K_N(\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{k}{N+1}\right) \cos(k\theta).$$

(ii) θ, 2π'nin tam katı değilse $K_N(\theta) = \dfrac{1}{2(N+1)} \left(\dfrac{\sin \frac{(N+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)^2$; özel olarak her θ için $K_N(\theta) \geq 0$.

(iii) $\dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} K_N(\theta)\, d\theta = 1.$

(iv) $0 < \delta \leq \theta \leq \pi$ *için* $K_N(\theta) \leq \dfrac{1}{2(N+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}}$.

İspat.
(i) $D_j(\theta) = \dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{j} \cos(k\theta)$ *toplamlarını* $j = 0, \ldots, N$ *için toplayalım.* $\dfrac{1}{2}$ *terimi* $N+1$ *kez gelir.* $\cos(k\theta)$ *terimi,* $j \geq k$ *olan* D_j*'lerde, yani* $j = k, k+1, \ldots, N$ *için, toplam* $N-k+1$ *kez gelir:*

$$\sum_{j=0}^{N} D_j(\theta) = \frac{N+1}{2} + \sum_{k=1}^{N} (N-k+1)\cos(k\theta).$$

$N+1$ *ile bölününce* $\dfrac{N-k+1}{N+1} = 1 - \dfrac{k}{N+1}$ *olur.*
(ii) θ, 2π*'nin tam katı olmasın. Lemma 12.1 gereği* $D_j(\theta) = \dfrac{\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$*'dir. Pay ve paydayı* $\sin\dfrac{\theta}{2}$ *ile çarpıp sinüslerin çarpımını kosinüslerin farkına çeviren özdeşliği* ($\alpha = \left(j+\frac{1}{2}\right)\theta$, $\beta = \dfrac{\theta}{2}$) *kullanalım:*

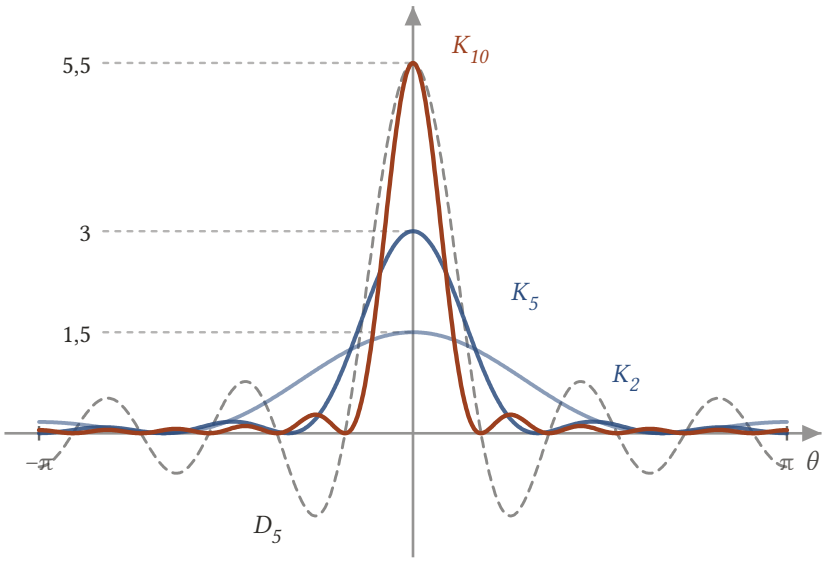
$$D_j(\theta) = \frac{\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos(j\theta) - \cos((j+1)\theta)}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$j = 0, \dots, N$ *için toplanınca pay teleskopik olur:*

$$\sum_{j=0}^{N} D_j(\theta) = \frac{1 - \cos((N+1)\theta)}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{(N+1)\theta}{2}}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

$N+1$ *ile bölünce formül çıkar. Sağ yan bir karenin pozitif katıdır;* $\theta = 2k\pi$ *ise* $K_N(\theta) = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N}\left(j+\frac{1}{2}\right) > 0$*'dır. Her durumda* $K_N \geq 0$.
(iii) *Lemma 12.2 gereği her* j *için* $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_j = 1$*'dir;* $N+1$ *tane* 1*'in ortalaması* 1*'dir.*
(iv) $\delta \leq \theta \leq \pi$ *için* $\frac{\theta}{2} \in \left[\frac{\delta}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *olur ve sinüs bu aralıkta artan olduğundan* $\sin\frac{\theta}{2} \geq \sin\frac{\delta}{2} > 0$. *(ii)'de payı* 1 *ile, paydayı bu alt sınırla değiştirince iddia çıkar.* ■



Şekil 13.1: K_2, K_5 ve K_{10} Fejér çekirdekleri; karşılaştırma için D_5 Dirichlet çekirdeği (kesikli). Fejér çekirdeği hiç negatif olmaz ve tepe dışında hızla söner.

İki çekirdeğin farkı şekilde görülür: Dirichlet çekirdeği negatif değerler alarak salınır, Fejér çekirdeği ise hiç negatif olmaz ve tepe dışında $\frac{1}{N+1}$ hızıyla söner ((iv) şıkkı). Aşağıdaki teoremin ispatını mümkün kılan bu iki özelliktir.

Teorem 13.3 (Fejér Teoremi). *f, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli ve 2π periyotlu olsun. O zaman Fejér ortalamaları f'ye düzgün yakınsar: $\sigma_N \rightrightarrows f$ $(\mathbb{R})$.*

İspat.
Adım 1: İntegral gösterimi. *Sonuç 12.1,* $s = f(x)$ *ile, her* j *için*

$$S_j(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_x(u)\, D_j(u)\, du$$

verir; burada

$$g_x(u) = \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} - f(x)$$

olur. $j = 0, \dots, N$ *için toplayıp* $N+1$ *ile bölelim:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sigma_N(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_x(u)\, K_N(u)\, du. \tag{4}$$

Adım 2: g_x için iki sınır. *f sürekli ve periyodik olduğundan sınırlıdır: $[-\pi,\pi]$ üzerinde sınırlıdır ve bütün değerlerini orada alır. $\mid f \mid \le M$ olsun; o zaman her x ve u için $\mid g_x(u) \mid \le 2M$.*
$\varepsilon > 0$ verilsin. f, $[-2\pi, 2\pi]$ kapalı aralığında süreklidir; Cantor teoremi (bkz. Analiz 1) gereği orada düzgün süreklidir. Öyle bir $\delta \in (0,\pi)$ vardır ki $y, z \in [-2\pi,2\pi]$ ve $\mid y - z \mid \le \delta$ olduğunda $\mid f(y) - f(z) \mid < \varepsilon$ olur. $x \in [-\pi,\pi]$ ve $0 \le u \le \delta$ için $x \pm u \in [-2\pi, 2\pi]$ olduğundan

$$\mid g_x(u) \mid \le \frac{\mid f(x+u) - f(x) \mid}{2} + \frac{\mid f(x-u) - f(x) \mid}{2} < \varepsilon$$

bulunur. Bu δ, x'e bağlı değildir.
Adım 3: İntegrali böl. *$x \in [-\pi,\pi]$ olsun. $K_N \ge 0$ olduğundan (4) eşitliğinde mutlak değer integralin içine alınabilir ve K_N işaret değiştirmez:*

$$\mid \sigma_N(x) - f(x) \mid \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} \mid g_x(u) \mid K_N(u)\, du + \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \mid g_x(u) \mid K_N(u)\, du.$$

Birinci integralde $\mid g_x \mid < \varepsilon$ ve Lemma 13.3 (iii) ile

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} \mid g_x(u) \mid K_N(u)\, du \le \varepsilon \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K_N(u)\, du = \varepsilon.$$

İkinci integralde $\mid g_x \mid \le 2M$ ve Lemma 13.3 (iv) ile

$$\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\pi} \mid g_x(u) \mid K_N(u)\, du \le \frac{2}{\pi} \cdot 2M \cdot \frac{\pi}{2(N+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{2M}{(N+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

Adım 4: Sonuç. *δ sabitlendikten sonra son ifade $N \to \infty$ iken 0'a gider; öyle bir N_0 vardır ki $N \ge N_0$ için ε'dan küçük olur. O zaman $N \ge N_0$ ve her $x \in [-\pi,\pi]$ için $\mid \sigma_N(x) - f(x) \mid < 2\varepsilon$. σ_N ve f, 2π periyotlu olduğundan aynı eşitsizlik her $x \in \mathbb{R}$ için geçerlidir. N_0, x'e bağlı olmadığından $\sigma_N \rightrightarrows f$ $(\mathbb{R})$.* ■

Adım 3, Dirichlet çekirdeğiyle yapılamaz: D_N işaret değiştirdiğinden $\int_0^{\pi} \mid D_N \mid$ integrali N ile birlikte sınırsız büyür ve birinci parça ε ile sınırlanamaz. Ortalamaya geçmek, çekirdeği negatif olmayan hâle getirerek bu engeli kaldırır.
Teoremin dolaysız bir sonucu vardır: sürekli ve 2π periyotlu her fonksiyona trigonometrik polinomlarla istenildiği kadar düzgün yaklaşılabilir; çünkü σ_N böyle bir polinomdur.

13.4 Parseval Eşitliği

Bessel eşitsizliği (Teorem 11.2) $\frac{a_0^2}{2} + \sum(a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ diyordu. Sonuç 11.1 gereği iki yan arasındaki fark, $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f - S_n)^2$ karesel hatasının limitidir. Dolayısıyla eşitlik, karesel hatanın 0'a gitmesine denktir.

Teorem 13.4 (Parseval Eşitliği). *f, $[-\pi,\pi]$ üzerinde parçalı sürekli ve Fourier katsayıları a_n, b_n olan bir fonksiyon olsun. O zaman*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \big[\, f(x) - S_n(x)\big]^2\, dx = 0$$

ve

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\, a_n^2 + b_n^2\,\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.

İspat.
$\Delta(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} (f-g)^2$ *gösterimini kullanalım (Tanım 11.1).*

Adım 1: f periyodik olarak sürekliyse. f, $[-\pi,\pi]$ *üzerinde sürekli ve* $f(-\pi) = f(\pi)$ *olsun; periyodik genişleme sürekli ve* 2π *periyotludur.* $\varepsilon > 0$ *verilsin. Teorem 13.3 gereği öyle bir* N_0 *vardır ki* $N \geq N_0$ *ve her* x *için* $\mid f(x) - \sigma_N(x) \mid < \varepsilon$ *olur; dolayısıyla*

$$\Delta(f,\sigma_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \big[\, f(x) - \sigma_N(x)\big]^2\, dx \leq 2\pi\varepsilon^2.$$

σ_N*, derecesi en çok* N *olan bir trigonometrik polinomdur. En iyi yaklaşım teoremi (Teorem 11.1) gereği Fourier kısmi toplamı* S_N *bu derecedeki bütün polinomlar arasında en küçük karesel hatayı verir:*

$$0 \leq \Delta(f,S_N) \leq \Delta(f,\sigma_N) \leq 2\pi\varepsilon^2 \qquad (N \geq N_0).$$

Öyleyse $\Delta(f,S_N) \to 0$.

Adım 2: Genel durum. f *parçalı sürekli olsun;* $\mid f \mid \leq M$ *olacak biçimde bir* $M > 0$ *vardır. Periyodik genişlemenin* $(-\pi,\pi]$ *aralığındaki süreksizlik noktaları* $t_1, \ldots, t_p$ *olsun (uçlardaki olası uyumsuzluk nedeniyle* π *noktası bunlardan biri olabilir).* $\varepsilon > 0$ *verilsin ve* $r > 0$ *sayısı,* $[t_j - r, t_j + r]$ *aralıkları ile bunların* 2π*'nin tam katları kadar ötelenmişleri ikişer ikişer ayrık olacak ve*

$$8M^2 p\, r < \varepsilon$$

sağlanacak kadar küçük seçilsin. h *fonksiyonunu şöyle tanımlayalım: bu aralıkların dışında* $h = f$*; her* $[t_j - r, t_j + r]$ *aralığında* h*,* $\big(\, t_j - r,\, f(t_j - r)\,\big)$ *ve* $\big(\, t_j + r,\, f(t_j + r)\,\big)$ *noktalarını birleştiren doğru parçası olsun;* h *periyodik genişletilsin.* f*,* $t_j \pm r$ *noktalarında sürekli olduğundan* h *bütün* $\mathbb{R}$*'de sürekli ve* 2π *periyotludur. İki değer arasındaki doğru parçası o değerlerin arasında kaldığından* $\mid h \mid \leq M$ *olur.* $f - h$ *farkı, bir periyot içinde yalnız toplam uzunluğu* $2rp$ *olan aralıklarda sıfırdan farklıdır ve orada* $\mid f - h \mid \leq 2M$*'dir:*

$$\Delta(f,h) \leq (2M)^2 \cdot 2rp = 8M^2 p\, r < \varepsilon.$$

h *için Adım 1 geçerlidir:* h*'nin Fejér ortalamaları* τ_N *olmak üzere öyle bir* N_0 *vardır ki* $N \geq N_0$ *için* $\Delta(h,\tau_N) < \varepsilon$ *olur. Her* $u, v \in \mathbb{R}$ *için* $(u+v)^2 \leq 2u^2 + 2v^2$ *olur; çünkü iki yanın farkı* $(u-v)^2 \geq 0$*'dır.* $f - \tau_N = (f-h) + (h - \tau_N)$ *yazılarak*

$$\Delta(f,\tau_N) \leq 2\Delta(f,h) + 2\Delta(h,\tau_N) < 4\varepsilon \qquad (N \geq N_0)$$

bulunur. τ_N*, derecesi en çok* N *olan bir trigonometrik polinomdur; Teorem 11.1 gereği* f*'nin kendi Fourier kısmi toplamı* S_N *için*

$$0 \leq \Delta(f,S_N) \leq \Delta(f,\tau_N) < 4\varepsilon \qquad (N \geq N_0)$$

olur. Öyleyse $\Delta(f,S_N) \to 0$.

Adım 3: Eşitlik. *Sonuç 11.1 gereği*

$$\frac{1}{\pi}\Delta(f,S_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx - \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(\, a_k^2 + b_k^2\,\big)\right]$$

olur. Sol yan 0*'a gittiğinden köşeli parantezdeki kısmi toplamlar* $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2$ *sayısına yakınsar.* ■

Parseval eşitliği, Pisagor teoreminin sonsuz boyutlu biçimi gibi okunabilir: f'nin "uzunluğunun karesi" $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2$, ortogonal bileşenlerinin karelerinin toplamına eşittir. Teoremin ilk iddiası da ilginçtir: Fourier serisi bazı noktalarda f'ye yakınsamasa bile, karesel ortalama anlamında her zaman f'ye yakınsar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda Parseval ile seri toplamı

1. **Katsayıları yaz.** a_0, a_n, b_n bulunur ve $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum(a_n^2 + b_n^2)$ toplamı kurulur.
2. **İntegrali hesapla.** $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx$; çift ya da tek fonksiyonlarda $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)^2\,dx$.
3. **Eşitle ve çöz.** Bilinmeyen seri toplamı yalnız bırakılır.

Örnek 13.4 (Parseval Eşitliğiyle Dördüncü Kuvvetler). $[-\pi,\pi]$ üzerinde $f(x) = \pi - |\,x\,|$ ve $f(x+2\pi) = f(x)$ olsun. Fourier serisini bulunuz ve Parseval eşitliğiyle $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm.
Katsayılar. f çifttir; $b_n = 0$. $|\,x\,|$'in katsayıları bilinmektedir (Örnek 10.2: $a_0 = \pi$; tek n için $a_n = -\dfrac{4}{\pi n^2}$, çift $n \geq 2$ için 0). π sabit fonksiyonunun tek sıfırdan farklı katsayısı $a_0 = 2\pi$'dir. Çıkarma yapılırsa $f = \pi - |\,x\,|$ için

$$a_0 = 2\pi - \pi = \pi, \qquad a_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ tek} \\ 0, & n \text{ çift} \end{cases}$$

olur ve

$$\pi - |\,x\,| \sim \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

Sol yan.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Sağ yan. f çift olduğundan

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi-x)^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Eşitle. f sürekli olduğundan Teorem 13.4 uygulanır:

$$\frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{2\pi^2}{3}$$

olur. Toplam yalnız bırakılırsa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^2}{16}\left(\frac{2\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{\pi^4}{96}.$$

Alıştırma 11.2 alıştırmasında Bessel eşitsizliğiyle bulunan üst sınırın gerçek değer olduğu böylece görülür. ■

Örnek 13.5 (Sıçramalı Fonksiyonda Parseval). $f(x) = x$ fonksiyonuna Parseval eşitliğini uygulayarak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f(x) = x$, $[-\pi,\pi]$ üzerinde süreklidir; periyodik genişlemesi sıçramalıdır, ama Teorem 13.4 yalnız parçalı süreklilik ister. $a_n = 0$ ve $b_n^2 = \dfrac{4}{n^2}$ olduğundan (Örnek 10.1)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2\pi^2}{3},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Bessel eşitsizliğiyle yalnız "$\le$" elde edilmişti (Örnek 11.2); Parseval eşitliği bunu eşitliğe çevirir. Aynı toplamı noktasal yakınsaklıkla da bulmuştuk (Örnek 12.4); iki yöntem birbirini doğrular. ■

13.5 Alıştırmalar

Alıştırma 13.1 (Kare Fonksiyonunun Serisini Türetmek). $-\pi<x<\pi$ için x^2'nin Fourier serisini terim terime türeterek x'in Fourier serisini elde ediniz.

Çözüm.
$f(x)=x^2$, $[-\pi,\pi]$ üzerinde sürekli ve parçalı düzgündür, $f(-\pi)=f(\pi)=\pi^2$. Örnek 12.4 gereği

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

$f'(x)=2x$ fonksiyonu $(-\pi,\pi)$ üzerinde türevlenebilirdir. Teorem 13.1 gereği $-\pi<x<\pi$ için

$$2x=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cdot\big(-n\sin(nx)\big)=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

olur. İki yan 2'ye bölününce $x=2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$ bulunur; bu, Örnek 10.1 serisidir. ■

Alıştırma 13.2 (Hangi Seriler Düzgün Yakınsar?). $[-\pi,\pi]$ üzerinde verilen x, $|x|$, x^2 fonksiyonlarının ve kare dalganın (Alıştırma 12.2) Fourier serilerinden hangilerinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.
Düzgün yakınsaklık teoreminin (Teorem 13.2) koşulları: f sürekli, parçalı düzgün ve $f(-\pi)=f(\pi)$.

- $\boldsymbol{|x|}$ **ve** $\boldsymbol{x^2}$**.** İkisi de sürekli ve parçalı düzgündür; $|-\pi|=|\pi|$ ve $(-\pi)^2=\pi^2$. Fourier serileri $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.
- $\boldsymbol{x}$**.** $f(-\pi^+)=-\pi\neq\pi=f(\pi)$; periyodik genişleme süreksizdir. Seri her noktada yakınsar, ama toplam fonksiyonu π'nin tek katlarında süreksizdir. Sürekli kısmi toplamların düzgün limiti sürekli olacağından (Teorem 4.2) yakınsama $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün değildir.
- **Kare dalga.** 0 ve $\pm\pi$ noktalarında sıçrar; aynı gerekçeyle yakınsama düzgün değildir.

Katsayılar da bunu yansıtır: düzgün yakınsayan iki seride katsayılar $\dfrac{1}{n^2}$, öbür ikisinde $\dfrac{1}{n}$ mertebesindedir. ■

Alıştırma 13.3 (Kare Dalgada Parseval). Kare dalganın Fourier serisine Parseval eşitliğini uygulayarak $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}$ toplamını bulunuz.

Çözüm.
Alıştırma 12.2 gereği $a_n=0$; tek n için $b_n=\dfrac{4}{n\pi}$, çift n için $b_n=0$. $f(x)^2=1$ olduğundan

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2,\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Sonuç Örnek 12.3 ile aynıdır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 13.4 (Dördüncü Kuvvetlerin Terslerinin Toplamı). $f(x) = x^2$ fonksiyonuna Parseval eşitliğini uygulayarak $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Örnek 12.4 gereği $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \dfrac{4\,(-1)^n}{n^2}$, $b_n = 0$.
Sol yan.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4} = \frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}.$$

Sağ yan. $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\pi^5}{5} = \frac{2\pi^4}{5}$.
Eşitle.

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} = \frac{18\pi^4 - 10\pi^4}{45} = \frac{8\pi^4}{45}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

■

Alıştırma 13.5 (Doğrultulmuş Sinüste Parseval). $|\sin x|$ fonksiyonuna Parseval eşitliğini uygulayarak $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$ toplamını bulunuz.

Çözüm.
Alıştırma 10.5 gereği $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$, $a_{2k} = -\dfrac{4}{\pi(4k^2-1)}$, öbür katsayılar 0'dır.
Sol yan.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}.$$

Sağ yan. $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1$ (Lemma 10.1 (iii), $m = n = 1$).
Eşitle.

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2} = 1 - \frac{8}{\pi^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2} = \frac{\pi^2-8}{16} \approx 0{,}117.$$

Denetim: ilk üç terim $\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{225} + \dfrac{1}{1225} \approx 0{,}1164$ eder. ■

Alıştırma 13.6 (Birinci Fejér Çekirdeği). $K_1(\theta)$ çekirdeğini Fejér çekirdeğinin özelliklerindeki (Lemma 13.3) (i) ve (ii) şıklarından ayrı ayrı hesaplayınız ve iki sonucun aynı olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
(i) ile. $N = 1$ için

$$K_1(\theta) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cos\theta = \frac{1+\cos\theta}{2}.$$

(ii) ile. $N = 1$ için paydaki ifade $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ olduğundan

$$K_1(\theta) = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yarım açı özdeşliği $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2}$ iki sonucun aynı olduğunu gösterir. Çekirdek gerçekten negatif değildir ve $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1+\cos\theta}{2}\,d\theta = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1$. $\blacksquare$

Fourier serilerinin yakınsaklık kuramını tamamladık. Uygulamada fonksiyonlar çoğu zaman bütün bir periyot üzerinde değil, yalnız $[0,\pi]$ gibi yarım bir aralıkta verilir. Fourier Sinüs ve Kosinüs Serileri bölümünde böyle bir fonksiyonun yalnız sinüslerle ya da yalnız kosinüslerle nasıl açılacağını görüyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

14. Fourier Sinüs ve Kosinüs Serileri

Şimdiye kadar fonksiyonlar bütün bir periyot üzerinde, $[-\pi, \pi]$ aralığında verilmişti. Uygulamada ise fonksiyon çoğu zaman yalnız $[0, \pi]$ gibi yarım bir aralıkta tanımlıdır: bir telin 0 ile π arasındaki biçimi, bir çubuğun bir ucundan öbür ucuna sıcaklığı. Böyle bir fonksiyonu trigonometrik seriyle açmak için önce onu $[-\pi, 0)$ aralığına genişletmek gerekir ve bunu yapmanın iki doğal yolu vardır: grafiği düşey eksene göre yansıtmak ya da orijine göre yansıtmak.
Birinci yol çift bir fonksiyon verir; Fourier serisinde yalnız kosinüsler kalır. İkinci yol tek bir fonksiyon verir; seride yalnız sinüsler kalır. Böylece aynı fonksiyon $[0, \pi]$ üzerinde iki farklı seriyle temsil edilir. Bu bölümde iki seriyi tanımlıyor, uç noktalardaki davranışlarını belirliyor ve örneklerle karşılaştırıyoruz.

14.1 Çift ve Tek Genişleme

Genişlemeleri tanımlayarak başlayalım.

Tanım 14.1 (Çift Genişleme ve Tek Genişleme). $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$f_{\text{ç}}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le \pi \\ f(-x), & -\pi \le x < 0 \end{cases} \qquad f_{\text{t}}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ 0, & x \in \{0, \pm\pi\} \\ -f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

fonksiyonlarına sırasıyla f'nin **çift genişlemesi** ve **tek genişlemesi** denir.

Yani $f_{\text{ç}}$, f'nin grafiğinin düşey eksene göre yansımasıyla; f_{t} ise orijine göre yansımasıyla elde edilir. $f_{\text{ç}}(-x) = f_{\text{ç}}(x)$ ve $f_{\text{t}}(-x) = -f_{\text{t}}(x)$ olduğu tanımdan görülür. Tek bir fonksiyon 0'da 0 değerini almak zorunda olduğundan $f_{\text{t}}(0) = 0$ konmuştur; $\pm\pi$ noktalarındaki değer integralleri etkilemez. İki genişleme de $(0, \pi)$ üzerinde f ile çakışır ve f integrallenebilirse onlar da integrallenebilirdir.
Genişlemeler sürekliliği farklı biçimde etkiler. f sürekliyse $f_{\text{ç}}$ her zaman süreklidir ve periyodik genişlemesi de süreklidir ($f_{\text{ç}}(-\pi) = f(\pi) = f_{\text{ç}}(\pi)$). f_{t} ise ancak $f(0) = 0$ ise 0 noktasında, ancak $f(\pi) = 0$ ise $\pm\pi$ noktalarında (periyodik anlamda) süreklidir.

14.2 Kosinüs ve Sinüs Serileri

Genişlemelerin Fourier serilerini Önerme 10.2 ile yazalım. $f_{\text{ç}}$ çift olduğundan $b_n = 0$ ve $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_{\text{ç}}(x)\cos(nx)\,dx$ olur; $[0, \pi]$ üzerinde $f_{\text{ç}} = f$ olduğundan integral doğrudan f ile yazılır. f_{t} için durum benzerdir.

Tanım 14.2 (Fourier Kosinüs Serisi ve Fourier Sinüs Serisi). f, $[0, \pi]$ üzerinde integrallenebilir olsun.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad (n \ge 0), \qquad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

serisine f'nin **Fourier kosinüs serisi**,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \quad (n \ge 1), \qquad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

serisine f'nin **Fourier sinüs serisi** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani kosinüs serisi çift genişlemenin, sinüs serisi tek genişlemenin Fourier serisidir. İki seri de yalnız f'nin $[0,\pi]$ üzerindeki değerlerinden hesaplanır. $[0,\pi]$ dışında ise farklı fonksiyonları temsil ederler: kosinüs serisinin toplamı çift, sinüs serisinin toplamı tektir.
Yakınsaklık, genişlemelere Sonuç 12.2 uygulanarak elde edilir; yeni olan yalnız uç noktalardaki değerlerdir.

Teorem 14.1 (Kosinüs ve Sinüs Serilerinin Yakınsaklığı). *f, $[0,\pi]$ üzerinde parçalı düzgün olsun.*

(i) *Her $x \in (0,\pi)$ için iki seri de $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ değerine, özel olarak süreklilik noktalarında $f(x)$'e yakınsar.*

(ii) *Kosinüs serisi $x=0$'da $f(0+0)$ değerine, $x=\pi$'de $f(\pi-0)$ değerine yakınsar.*

(iii) *Sinüs serisi $x=0$ ve $x=\pi$ noktalarında 0'a yakınsar.*

İspat.
f parçalı düzgün olduğundan $f_{ç}$ ve f_{t}, $[-\pi,\pi]$ üzerinde parçalı düzgündür: yansıma, sürekli parçaları sürekli parçalara ve tek yönlü limitleri tek yönlü limitlere götürür; istisna noktaları dışında $-\pi<x<0$ için $f_{ç}'(x)=-f'(-x)$ ve $f_{t}'(x)=f'(-x)$ olduğundan türevler de parçalı süreklidir ve tek yönlü limitleri sonludur. Sonuç 12.2 gereği periyodik genişlemelerin Fourier serileri her noktada sağ ve sol limitlerin ortalamasına yakınsar.
(i) *$x\in(0,\pi)$ için iki genişleme de x'in bir komşuluğunda f ile çakışır; tek yönlü limitler $f(x+0)$ ve $f(x-0)$'dır.*
(ii) *$x=0$'da $f_{ç}(0+0)=f(0+0)$ olur. Yansıma nedeniyle soldan limit de aynıdır: $f_{ç}(-h)=f(h)$ olduğundan $f_{ç}(0-0)=f(0+0)$. Ortalama $f(0+0)$'dır. $x=\pi$'de toplam $\dfrac{f_{ç}(-\pi+0)+f_{ç}(\pi-0)}{2}$'dir ve iki limit de $f(\pi-0)$'a eşittir.*
(iii) *$x=0$'da $f_{t}(0+0)=f(0+0)$ ve $f_{t}(0-0)=-f(0+0)$ olur; ortalama 0'dır. $x=\pi$'de $f_{t}(\pi-0)=f(\pi-0)$ ve $f_{t}(-\pi+0)=-f(\pi-0)$ olur; ortalama yine 0'dır. (Zaten $\sin(n\cdot 0)=\sin(n\pi)=0$ olduğundan sinüs serisinin bütün terimleri bu noktalarda 0'dır.)* ■

Uç noktalardaki fark, hangi serinin seçileceğini de belirler. Kosinüs serisi uçlarda f'nin limit değerlerini verir; f, $[0,\pi]$ üzerinde sürekli ve parçalı düzgünse bütün $[0,\pi]$ üzerinde f'ye düzgün yakınsar (Teorem 13.2, $f_{ç}$ için). Sinüs serisi uçlarda 0 verir; $f(0+0)\neq 0$ ya da $f(\pi-0)\neq 0$ ise toplam fonksiyonu ilgili uçta süreksizdir ve yakınsama $[0,\pi]$ üzerinde düzgün olamaz.

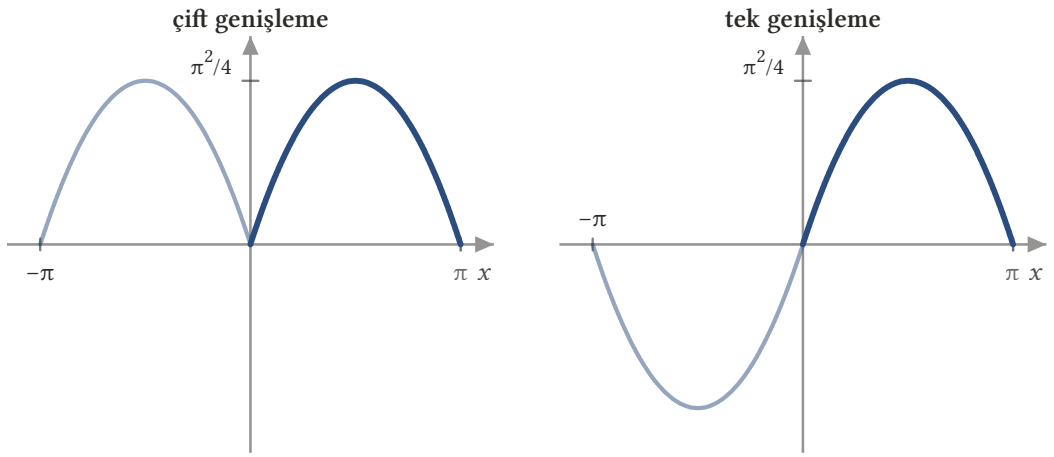
Üç adımda yarım aralık açılımı

1. **Seriyi seç.** Kosinüs serisi istenmişse çift genişleme, sinüs serisi istenmişse tek genişleme düşünülür; genişlemeyi açıkça yazmak gerekmez.
2. **Katsayıları hesapla.** $a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ ya da $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$; a_0 ayrı hesaplanır.
3. **Toplamı yorumla.** $(0,\pi)$ içinde seri f'ye (sıçramada ortalamaya) yakınsar; uçlarda Teorem 14.1 uygulanır.

Örnek 14.1 (Bir Parabol Yayının Kosinüs Serisi). $[0,\pi]$ üzerinde $f(x)=x(\pi-x)$ fonksiyonunun Fourier kosinüs serisini bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.1: $f(x) = x(\pi - x)$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ üzerindeki grafiği (koyu) ile çift ve tek genişlemeleri. Çift genişleme $x = 0$'da köşe yapar; tek genişleme oradan düzgün geçer.

Çift genişleme şeklin sol panelindeki fonksiyondur: $x = 0$'da bir köşesi vardır, ama süreklidir.
a_0.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

a_n. $n \geq 1$ için iki kez kısmi integrasyon yapalım. $u = \pi x - x^2$, $dv = \cos(nx)\,dx$:

$$\int_0^{\pi} (\pi x - x^2)\cos(nx)\,dx = \left[\frac{(\pi x - x^2)\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\sin(nx)\,dx.$$

Sınır terimi 0'dır. Kalan integralde $u = \pi - 2x$, $dv = \sin(nx)\,dx$:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} (\pi - 2x)\sin(nx)\,dx &= \left[-\frac{(\pi - 2x)\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{\pi\cos(n\pi)}{n} + \frac{\pi}{n} - 0 = \frac{\pi\left(1 + (-1)^n\right)}{n}.\end{aligned}$$

Öyleyse

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\pi\left(1 + (-1)^n\right)}{n} = -\frac{2\left(1 + (-1)^n\right)}{n^2} = \begin{cases} 0, & n \text{ tek} \\ -\frac{4}{n^2}, & n \text{ çift} \end{cases}$$

Seri. $n = 2k$ için $a_{2k} = -\dfrac{4}{4k^2} = -\dfrac{1}{k^2}$ olur. f sürekli ve parçalı düzgün olduğundan Teorem 14.1 gereği bütün $[0, \pi]$ üzerinde eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}x(\pi - x) &= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{k^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \left(\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right) \qquad (0 \leq x \leq \pi).\end{aligned}$$

$x = 0$ alınırsa $0 = \dfrac{\pi^2}{6} - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ bulunur; Basel toplamı bir kez daha elde edilir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 14.2 (Aynı Parabol Yayının Sinüs Serisi). $[0,\pi]$ üzerinde $f(x)=x(\pi-x)$ fonksiyonunun Fourier sinüs serisini bulunuz ve $x=\dfrac{\pi}{2}$ alarak bir sayı serisinin toplamını hesaplayınız.

Çözüm.
b_n. İki kez kısmi integrasyon. $u=\pi x-x^2$, $dv=\sin(nx)\,dx$:

$$\int_0^{\pi}(\pi x-x^2)\sin(nx)\,dx=\left[-\frac{(\pi x-x^2)\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos(nx)\,dx.$$

Sınır terimi 0'dır. Kalan integralde $u=\pi-2x$, $dv=\cos(nx)\,dx$:

$$\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos(nx)\,dx=\left[\frac{(\pi-2x)\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx$$
$$=0+\frac{2}{n}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n^2}.$$

Öyleyse

$$b_n=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{n^2}=\frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^3}=\begin{cases}\frac{8}{\pi n^3}, & n \text{ tek}\\ 0, & n \text{ çift}\end{cases}$$

Seri. f sürekli ve parçalı düzgündür; ayrıca $f(0)=f(\pi)=0$ olduğundan uçlarda da seri f ile çakışır:

$$x(\pi-x)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{(2k-1)^3}$$
$$=\frac{8}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3^3}+\frac{\sin 5x}{5^3}+\cdots\right)\qquad(0\le x\le\pi).$$

Sayı serisi. $x=\dfrac{\pi}{2}$ için $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^2}{4}$ ve $\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2}=(-1)^{k+1}$ olduğundan

$$\frac{\pi^2}{4}=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}$$

olur. Buradan

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\cdots=\frac{\pi^3}{32}.$$

Karşılaştırma. Aynı fonksiyon için kosinüs serisinin katsayıları $\dfrac{1}{k^2}$, sinüs serisininkiler $\dfrac{1}{n^3}$ hızıyla küçülür. Nedeni şeklin sağ panelinde görülür: tek genişleme $x=0$'da köşe yapmaz (türevi de süreklidir), çift genişleme ise köşelidir. Genişleme ne kadar düzgünse katsayılar o kadar hızlı küçülür. ■

Aşağıdaki dört örnek tek bir fonksiyonu, $(0,\pi)$ üzerinde $f(x)=\pi-x$ fonksiyonunu ele alır: önce iki serisi bulunur, sonra her seriden bir sayı serisi çıkarılır.

Örnek 14.3 (Azalan Doğrunun Sinüs Serisi). $(0,\pi)$ üzerinde $f(x)=\pi-x$ fonksiyonunun Fourier sinüs serisini bulunuz.

Çözüm.
$u=\pi-x$, $dv=\sin(nx)\,dx$ ile kısmi integrasyon ($du=-dx$, $v=-\dfrac{\cos(nx)}{n}$):

 CC BY-NC-SA 4.0

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{(\pi-x)\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} - 0\right) = \frac{2}{n}.$$

Sinüs serisi

$$\pi - x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n} \qquad (0 < x < \pi)$$

olur; eşitlik Teorem 14.1 (i) gereği $(0,\pi)$ üzerinde geçerlidir. $x = 0$'da seri 0 verir, oysa $f(0+0) = \pi$'dir. Tek genişleme 0'da $-\pi$'den π'ye sıçrar; serinin toplamı bu sıçramanın ortasıdır. ■

Örnek 14.4 (Azalan Doğrunun Kosinüs Serisi). $(0,\pi)$ üzerinde $f(x) = \pi - x$ fonksiyonunun Fourier kosinüs serisini bulunuz.

Çözüm.
a_0.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

a_n. $u = \pi - x$, $dv = \cos(nx)\,dx$ ile

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{(\pi-x)\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^2}.$$

n çiftse $a_n = 0$, n tekse $a_n = \dfrac{4}{\pi n^2}$ olur.
Seri. Çift genişleme $\pi - |x|$ fonksiyonudur; süreklidir. Teorem 14.1 gereği

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \qquad (0 \le x \le \pi)$$

olur; bu seriyle Parseval eşitliğini uygularken karşılaşmıştık (Örnek 13.4). ■

Örnek 14.5 (Kosinüs Serisinden Bir Toplam). $\pi - x$ fonksiyonunun kosinüs serisinden yararlanarak $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Kosinüs serisi $x = 0$'da $f(0+0) = \pi$ değerine yakınsar (Teorem 14.1 (ii)). Örnek 14.4 serisinde $x = 0$ alınırsa $\cos 0 = 1$ ile

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

■

Örnek 14.6 (Sinüs Serisinden Bir Toplam). $\pi - x$ fonksiyonunun sinüs serisinden yararlanarak $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$ olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ bir süreklilik noktasıdır; Örnek 14.3 serisi bu noktada $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ değerine yakınsar. $\sin\frac{n\pi}{2}$ sayısı çift n için 0, $n = 2k-1$ için $(-1)^{k+1}$ olduğundan

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

■

14.3 $[0, L]$ Aralığında Sinüs ve Kosinüs Serileri

Aralık $[0, L]$ ise ölçekleme (Tanım 10.4) aynı formülleri π yerine L ile verir.

Tanım 14.3 (Genel Yarım Aralıkta Kosinüs ve Sinüs Serileri). $L > 0$ ve f, $[0, L]$ üzerinde integrallenebilir olsun. f'nin $[0, L]$ üzerindeki **Fourier kosinüs serisi**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

Fourier sinüs serisi

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

serisidir.

Yani bunlar, f'nin $[-L, L]$ aralığına çift ve tek genişlemelerinin $2L$ periyotlu Fourier serileridir. Teorem 14.1, π yerine L yazılarak aynen geçerlidir.

Örnek 14.7 (Uzunluğu 2 Olan Aralıkta Sinüs Serisi). $[0, 2]$ üzerinde $f(x) = x$ fonksiyonunun Fourier sinüs serisini bulunuz.

Çözüm.
$L = 2$'dir. $u = x$, $dv = \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$ ile $(v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2})$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = \left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$= -\frac{4\cos(n\pi)}{n\pi} + 0 = \frac{4\,(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Sinüs serisi

$$x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2} \qquad (0 \le x < 2)$$

olur. $x = 0$'da iki yan da 0'dır; $x = 2$'de seri 0 verir, oysa $f(2) = 2$'dir. ■

14.4 Alıştırmalar

Alıştırma 14.1 (Sabit Fonksiyonun İki Serisi). $[0, \pi]$ üzerinde $f(x) = 1$ fonksiyonunun Fourier kosinüs serisini ve Fourier sinüs serisini bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kosinüs serisi. $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} dx = 2$ ve $n \geq 1$ için $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx = 0$. Seri tek terimden oluşur: $1 \sim 1$. Çift genişleme sabit 1 fonksiyonudur; serisi kendisidir.
Sinüs serisi.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\,\big(\,1-(-1)^n\,\big)$$

olur; bu sayı tek n için $\dfrac{4}{n\pi}$, çift n için 0'dır. Dolayısıyla

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} \qquad (0<x<\pi).$$

Tek genişleme kare dalgadır (Alıştırma 12.2). Uçlarda seri 0 verir. Aynı fonksiyonun iki serisi bundan daha farklı olamazdı: biri tek terimli, öbürü sonsuz ve yavaş yakınsayan bir seridir. ■

Alıştırma 14.2 (Basamak Fonksiyonunun Sinüs Serisi). $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$ fonksiyonunun $(0,\pi)$ aralığındaki Fourier sinüs serisini bulunuz ve $x = \dfrac{\pi}{2}$ noktasındaki toplamını belirleyiniz.

Çözüm.
f, $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ üzerinde 0 olduğundan

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right)$$

olur. İlk katsayılar: $b_1 = \dfrac{2}{\pi}$, $b_2 = \dfrac{2}{2\pi}(-1-1) = -\dfrac{2}{\pi}$, $b_3 = \dfrac{2}{3\pi}$, $b_4 = \dfrac{2}{4\pi}(1-1) = 0$. Sinüs serisi

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right)\sin(nx) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\sin x - \sin 2x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} - \cdots\right) \end{aligned}$$

olur.
$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2}}$**.** f bu noktada 0'dan 1'e sıçrar; Teorem 14.1 (i) gereği seri $\dfrac{0+1}{2} = \dfrac{1}{2}$ değerine yakınsar. ■

Alıştırma 14.3 (Kosinüsün Sinüs Serisi). $(0,\pi)$ üzerinde $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun Fourier sinüs serisini bulunuz.

Çözüm.

$$\cos x \sin(nx) = \frac{1}{2}\,\big[\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\,\big]$$

özdeşliğiyle

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\big[\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\,\big]\,dx$$

olur.
$\boldsymbol{n = 1}$**.**

 CC BY-NC-SA 4.0

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = 0.$$

$n \geq 2$. $m \geq 1$ için $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(mx)\,dx = \frac{1-(-1)^m}{m}$ ve $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ olduğundan

$$b_n = \frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1+(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{2n}{n^2-1}.$$

n tekse $b_n = 0$; $n = 2k$ ise $b_{2k} = \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{4k}{4k^2-1} = \dfrac{8k}{\pi(4k^2-1)}$.

Seri.

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1} \qquad (0 < x < \pi).$$

Bir kosinüsün sinüslerle yazılabilmesi şaşırtıcı görünebilir; ama eşitlik yalnız $(0,\pi)$ üzerindedir. $(-\pi, 0)$ üzerinde seri, tek genişlemeyi, yani $-\cos x$ fonksiyonunu verir. Katsayılar yalnız $\dfrac{1}{k}$ hızıyla küçülür, çünkü tek genişleme 0 ve $\pm\pi$ noktalarında sıçrar. ■

Alıştırma 14.4 (Sinüsün Kosinüs Serisi). $[0,\pi]$ üzerinde $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun Fourier kosinüs serisini bulunuz.

Çözüm.
$\sin x$'in $[-\pi,\pi]$ aralığına çift genişlemesi $|\sin x|$ fonksiyonudur: $-\pi \leq x < 0$ için $\sin(-x) = -\sin x = |\sin x|$. Kosinüs serisi, çift genişlemenin Fourier serisidir; Alıştırma 10.5 ve Alıştırma 12.3 gereği

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1} \qquad (0 \leq x \leq \pi)$$

olur. Çift genişleme sürekli olduğundan eşitlik uçlarda da geçerlidir. ■

Alıştırma 14.5 (Aynı Fonksiyon, İki Seri, İki Hız). $[0,\pi]$ üzerinde $f(x) = x$ fonksiyonunun kosinüs ve sinüs serilerini önceki bölümlerin sonuçlarından yazınız; hangisinin $[0,\pi]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu belirleyiniz.

Çözüm.
Kosinüs serisi. Çift genişleme $|x|$'tir; Örnek 12.3 gereği

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2} \qquad (0 \leq x \leq \pi).$$

Sinüs serisi. Tek genişleme $(-\pi,\pi)$ üzerinde x'in kendisidir; Örnek 12.1 gereği

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \qquad (0 \leq x < \pi).$$

Düzgün yakınsaklık. $|x|$ sürekli, parçalı düzgün ve $|-\pi| = |\pi|$ olduğundan kosinüs serisi $\mathbb{R}$ üzerinde, dolayısıyla $[0,\pi]$ üzerinde düzgün yakınsaktır (Teorem 13.2). Sinüs serisi $x = \pi$'de 0'a yakınsar, oysa $f(\pi) = \pi$'dir; toplam fonksiyonu $[0,\pi]$ üzerinde $x = \pi$'de süreksizdir ve sürekli kısmi toplamların düzgün limiti olamaz. Sinüs serisi $[0,\pi]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. ■

Fourier serileri kısmını burada tamamlıyoruz. Dini koşulunda karşımıza çıkan $\lim_{\eta\to 0^+}\int_{\eta}^{\delta}$ türü limitler, integrasyon aralığının ucunda sınırsız olan fonksiyonların integralleridir; sıradaki kısım bu genelleştirilmiş integralleri sistemli olarak ele alır.

 CC BY-NC-SA 4.0

15. Genelleştirilmiş İntegraller: Sınırsız Aralıklar

Riemann integrali iki koşul altında tanımlanmıştı: integrasyon aralığı sınırlı bir $[a, b]$ aralığıdır ve integrali alınan fonksiyon bu aralıkta sınırlıdır. Oysa $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ya da $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ gibi ifadeler bu iki koşuldan birini çiğnediği hâlde anlamlı bir alan sorusu sorar. Bu tür integrallere **genelleştirilmiş integral** denir ve hepsi aynı fikirle tanımlanır: önce sorunsuz bir aralıkta sıradan integral alınır, sonra aralığın ucu sorunlu noktaya doğru götürülerek limit alınır.
Genelleştirilmiş integraller üç tipe ayrılır.

Tablo 15.1: Genelleştirilmiş integrallerin tipleri

Tip	Sorun	Örnek
I. tip	integrasyon aralığı sınırsız	$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$
II. tip	aralık sınırlı, fonksiyon bir ya da birkaç nokta yakınında sınırsız	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$
III. tip	ikisi birden	$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$

Bu bölümde I. tipi tanımlıyor ve tanımdan doğrudan hesaplanabilen örnekleri inceliyoruz. İlkeli bulunamayan integrallerin yakınsaklığına karar vermeyi sağlayan testler bir sonraki bölümün konusudur.

15.1 Sınırsız Aralıkta İntegral

$[a, +\infty)$ üzerindeki genelleştirilmiş integralle Analiz 2'de integral testini kurarken karşılaşmıştık (bkz. Analiz 2). Tanımı, öbür sınırsız aralıkları da kapsayacak biçimde yeniden yazalım.

Tanım 15.1 (Birinci Tip Genelleştirilmiş İntegral). $a \in \mathbb{R}$ ve $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $b > a$ için $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olsun.

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

limiti var ve sonluysa $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ genelleştirilmiş integrali **yakınsaktır** denir ve değeri bu limittir. Limit yoksa ya da sonsuzsa integral **ıraksaktır** denir.
Aynı biçimde, $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ her $a < b$ için $[a, b]$ üzerinde integrallenebilirse

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

tanımlanır; limit var ve sonluysa integral yakınsak, değilse ıraksaktır.

Yani sınırsız aralıktaki integral, gittikçe uzayan sınırlı aralıklardaki integrallerin limitidir. $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ yazılırsa yakınsaklık, F fonksiyonunun $b \to +\infty$ iken sonlu bir limite sahip olmasıdır. Limit

 CC BY-NC-SA 4.0

tanımıyla: integralin A sayısına yakınsaması, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $B > a$ bulunması demektir ki $b \geq B$ olduğunda

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - A \right| < \varepsilon$$

olsun. "Yakınsak" ve "ıraksak" sözcükleri serilerden ödünç alınmıştır ve benzerlik rastlantı değildir: $F(b)$, serilerdeki kısmi toplamın rolünü oynar.

Üç adımda tanımla hesap

1. **Sınırlı aralıkta integralle.** $\int_a^b f(x)\,dx$ integrali bir ilkel yardımıyla b cinsinden hesaplanır.
2. **Limit al.** $b \to +\infty$ (ya da $a \to -\infty$) limiti incelenir.
3. **Karar ver.** Limit sonluysa integral yakınsaktır ve değeri bu limittir; limit sonsuzsa ya da yoksa ıraksaktır.

Örnek 15.1 (Yakınsak Bir İntegral). $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-4x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

Sınırlı aralık. $u = x$, $dv = e^{-4x}\,dx$ ile kısmi integrasyon ($v = -\dfrac{e^{-4x}}{4}$):

$$\begin{aligned}\int_0^b xe^{-4x}\,dx &= \left[-\frac{xe^{-4x}}{4}\right]_0^b + \frac{1}{4}\int_0^b e^{-4x}\,dx \\ &= -\frac{b\,e^{-4b}}{4} - \frac{e^{-4b}}{16} + \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

Limit. $b \to +\infty$ iken $e^{-4b} \to 0$ ve üstel fonksiyon her kuvvetten hızlı büyüdüğünden $b\,e^{-4b} \to 0$ olur. Dolayısıyla

$$\int_0^{+\infty} xe^{-4x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{16} - \frac{4b+1}{16\,e^{4b}}\right) = \frac{1}{16}.$$

İntegral yakınsaktır ve değeri $\dfrac{1}{16}$'dır. ■

Örnek 15.2 (Arktanjantla Hesaplanan İntegral). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2+1} = \Big[\arctan x\Big]_0^b = \arctan b$$

olur ve $\lim_{b\to+\infty} \arctan b = \dfrac{\pi}{2}$'dir. İntegral yakınsaktır:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Sınırsız bir bölgenin alanı sonlu çıkmıştır; eğri yatay eksene yeterince hızlı yaklaşmaktadır. ■

Örnek 15.3 (Sonsuza Iraksayan İntegral). $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ integralinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$u = \ln x$ değişken değiştirmesiyle $(du = \dfrac{dx}{x})$

$$\int_1^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^b = \frac{(\ln b)^2}{2}$$

olur. $b \to +\infty$ iken $\ln b \to +\infty$ olduğundan limit $+\infty$'dur; integral ıraksaktır. ■

Örnek 15.4 (Sol Ucu Sonsuz Olan İntegral). $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ integralinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\left(-2\sqrt{2-x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$ olduğundan $a < 0$ için

$$\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \Big[-2\sqrt{2-x}\Big]_a^0 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2-a}$$

olur. $a \to -\infty$ iken $2-a \to +\infty$ ve $2\sqrt{2-a} \to +\infty$ olduğundan limit $+\infty$'dur; integral ıraksaktır. ■

Örnek 15.5 (Limiti Olmayan İntegral). $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} \sin x\,dx$ integralinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\int_{-2}^b \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_{-2}^b = \cos 2 - \cos b$$

olur $(\cos(-2) = \cos 2)$. $\lim_{b\to+\infty} \cos b$ limiti yoktur: $b_k = 2k\pi$ dizisi boyunca $\cos b_k = 1$, $b_k = (2k+1)\pi$ dizisi boyunca $\cos b_k = -1$ olur ve dizisel ölçüt gereği limit olamaz. Öyleyse integral ıraksaktır. Bu örnekte integral sonsuza gitmez; $\cos 2 - 1$ ile $\cos 2 + 1$ arasında salınır. Iraksaklık "sonsuz olmak" demek değildir, "sonlu bir limitin olmaması" demektir. ■

15.2 Lineerlik

Limitin toplam ve skaler katla uyumu, genelleştirilmiş integrale aynen geçer.

Teorem 15.1 (Genelleştirilmiş İntegralin Lineerliği). *$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ve $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ yakınsak ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. O zaman $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big(\,\alpha f(x) + \beta g(x)\,\big)\,dx$ integrali yakınsaktır ve*

$$\int_a^{+\infty} \big(\,\alpha f + \beta g\,\big)\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g\,dx$$

olur. Aynı sonuç $(-\infty, b]$ üzerindeki integraller için de geçerlidir.

İspat.
Her $b > a$ için Riemann integralinin lineerliği (bkz. Analiz 2)

$$\int_a^b \big(\,\alpha f + \beta g\,\big)\,dx = \alpha \int_a^b f\,dx + \beta \int_a^b g\,dx$$

verir. Sağ yandaki iki integralin $b \to +\infty$ iken sonlu limitleri vardır; limitin toplam ve sabitle çarpım kuralları gereği sol yanın da limiti vardır ve limitlerin aynı birleşimine eşittir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Teoremin ters yönde kullanımına dikkat etmek gerekir: $\int(f+g)$ yakınsak olduğu hâlde $\int f$ ve $\int g$ ayrı ayrı ıraksak olabilir (örneğin $g=-f$). Bir integrali parçalara ayırmadan önce parçaların yakınsak olduğundan emin olunmalıdır. Öte yandan $\int f$ yakınsak ve $\int g$ ıraksak ise $\int(f+g)$ ıraksaktır; yakınsak olsaydı $g=(f+g)-f$ integrali de yakınsak olurdu.

Başlangıç noktası da yakınsaklığı etkilemez: $a<a'$ ise $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^{a'} f+\int_{a'}^b f$ olduğundan $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ile $\displaystyle\int_{a'}^{+\infty} f$ aynı anda yakınsar ya da ıraksar; yakınsaklık yalnız fonksiyonun sonsuzdaki davranışına bağlıdır.

15.3 İki Temel Aile

Karşılaştırma testlerinde ölçü olarak kullanılacak iki integral ailesini şimdi hesaplayalım.

Örnek 15.6 (Üstel İntegral). $a\in\mathbb{R}$ olsun. $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-tx}\,dx$ integrali t'nin hangi değerleri için yakınsaktır?

Çözüm.

$t=0$. $\displaystyle\int_a^b dx=b-a\to+\infty$; integral ıraksaktır.

$t\neq 0$.

$$F(b)=\int_a^b e^{-tx}\,dx=\left[-\frac{e^{-tx}}{t}\right]_a^b=\frac{1}{t}\bigl(e^{-at}-e^{-bt}\bigr).$$

$t>0$ ise $b\to+\infty$ iken $e^{-bt}\to 0$ olur ve $F(b)\to\dfrac{e^{-at}}{t}$. $t<0$ ise $e^{-bt}\to+\infty$ ve $\dfrac{1}{t}<0$ olduğundan $F(b)\to+\infty$ olur.

Sonuç.

$$\int_a^{+\infty} e^{-tx}\,dx=\frac{e^{-at}}{t}\quad(t>0);\qquad t\le 0\ \text{ için integral ıraksaktır.}$$

■

Teorem 15.2 (Sonsuzda Kuvvet İntegrali). *$a>0$ olsun. $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ integrali $p>1$ için yakınsak, $p\le 1$ için ıraksaktır; $p>1$ iken*

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{a^{1-p}}{p-1}$$

olur.

İspat.

$p=1$. $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{x}=\ln b-\ln a\to+\infty$; *integral ıraksaktır.*

$p\neq 1$.

$$\int_a^b\frac{dx}{x^p}=\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_a^b=\frac{b^{1-p}-a^{1-p}}{1-p}.$$

$p>1$ ise $1-p<0$ olduğundan $b^{1-p}\to 0$ ve limit $\dfrac{-a^{1-p}}{1-p}=\dfrac{a^{1-p}}{p-1}$ olur. $p<1$ ise $1-p>0$ olduğundan $b^{1-p}\to+\infty$ ve limit $+\infty$'dur. ■

Sonuç, p-serisi ölçütünün (bkz. Analiz 2) integral karşılığıdır ve aynı eşiğe sahiptir: $\frac{1}{x}$ sınırdadır ve ıraksar; ondan biraz daha hızlı sönen her kuvvet yakınsar.

15.4 Bütün Doğru Üzerinde İntegral

İki ucu da sonsuz olan integral, tek bir limitle değil, iki ayrı genelleştirilmiş integralle tanımlanır.

Tanım 15.2 (Bütün Doğru Üzerinde Genelleştirilmiş İntegral). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ her sınırlı kapalı aralıkta integrallenebilir ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ ve $\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$ integrallerinin **ikisi de** yakınsaksa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ integrali **yakınsaktır** denir ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

tanımlanır. İki integralden en az biri ıraksaksa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ **ıraksaktır** denir.

Yani iki uç birbirinden bağımsız olarak sonsuza götürülür. Tanım c seçimine bağlı değildir: $c < c'$ ise $\int_{-\infty}^{c'} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{c'} f$ ve $\int_{c}^{+\infty} f = \int_{c}^{c'} f + \int_{c'}^{+\infty} f$ olduğundan yakınsaklık da toplam da aynı kalır.

Örnek 15.7 (Bütün Doğruda Yakınsak İntegral). $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integralini hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> $c = 0$ alalım.
>
> $$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2},$$
> $$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \left(-\arctan a \right) = \frac{\pi}{2}.$$
>
> İki integral de yakınsaktır; dolayısıyla
>
> $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$
>
> ■

İki ucu aynı hızla, simetrik olarak sonsuza götürmek daha zayıf bir kavram verir.

Tanım 15.3 (Cauchy Temel Değeri). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ her sınırlı kapalı aralıkta integrallenebilir olsun.

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx$$

limiti var ve sonluysa bu sayıya $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ integralinin **Cauchy temel değeri** denir.

Yani temel değerde iki uç birbirine bağlıdır: soldaki $-c$, sağdaki c ile aynı anda uzaklaşır. Bu, soldaki ve sağdaki sonsuz alanların birbirini götürmesine izin verir.

Önerme 15.1 (Yakınsak İntegralin Temel Değeri). $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *yakınsaksa Cauchy temel değeri de vardır ve integralin değerine eşittir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$c > 0$ için $\int_{-c}^{c} f = \int_{-c}^{0} f + \int_{0}^{c} f$ olur. $c \to +\infty$ iken birinci integral $\int_{-\infty}^{0} f$ sayısına, ikinci integral $\int_{0}^{+\infty} f$ sayısına yakınsar; toplamın limiti, limitlerin toplamıdır. ■

Önermenin tersi doğru değildir.

Örnek 15.8 (Temel Değeri Olan Iraksak İntegral). p.v. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ değerini bulunuz. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm.
Temel değer. Her $c > 0$ için

$$\int_{-c}^{c} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-c}^{c} = \frac{c^2 - c^2}{2} = 0$$

olduğundan p.v. $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$'dır.
İntegral. $\int_{0}^{b} x\,dx = \frac{b^2}{2} \to +\infty$ olduğundan $\int_{0}^{+\infty} x\,dx$ ıraksaktır. İki parçadan biri ıraksak olduğundan $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ ıraksaktır.
Temel değerin 0 çıkması, sağdaki sonsuz pozitif alan ile soldaki sonsuz negatif alanın simetrik kesimde birbirini götürmesindendir. Uçlar farklı hızla götürülürse sonuç değişir: $\int_{-c}^{2c} x\,dx = \frac{3c^2}{2} \to +\infty$. ■

15.5 Alıştırmalar

Alıştırma 15.1 (Değişken Değiştirmeyle Hesap). $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
$u = x^2$ ile $du = 2x\,dx$ olur:

$$\int_{0}^{b} xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{b^2} e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-b^2}\right).$$

$b \to +\infty$ iken $e^{-b^2} \to 0$ olduğundan integral yakınsaktır ve değeri $\frac{1}{2}$'dir. ■

Alıştırma 15.2 (Logaritmalı Kuvvet İntegrali). $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
$u = \ln x$ ile $du = \frac{dx}{x}$ olur:

$$\int_{2}^{b} \frac{dx}{x\,(\ln x)^2} = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln 2}^{\ln b} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln b}.$$

$b \to +\infty$ iken $\frac{1}{\ln b} \to 0$ olduğundan integral yakınsaktır ve değeri $\frac{1}{\ln 2}$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Karşılaştırma için: $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ ıraksaktır; paydaya eklenen $(\ln x)^2$ çarpanı integrali yakınsak yapmaya yetmiştir. ■

Alıştırma 15.3 (Basit Kesirlerle Hesap). $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
$\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$ olduğundan

$$\int_1^b \frac{dx}{x(x+1)} = \Big[\ln x - \ln(x+1)\Big]_1^b = \ln\frac{b}{b+1} + \ln 2$$

olur. $b \to +\infty$ iken $\dfrac{b}{b+1} \to 1$ ve $\ln\dfrac{b}{b+1} \to 0$; integral yakınsaktır ve değeri $\ln 2$'dir.
İntegrali $\displaystyle\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1}$ biçiminde iki genelleştirilmiş integrale ayırmak yanlış olurdu: ikisi de ıraksaktır. Fark, limit alınmadan önce, sınırlı aralıkta alınmalıdır. ■

Alıştırma 15.4 (Çift Üstel Fonksiyon). $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
$c = 0$ ile ikiye ayıralım. $x \geq 0$ için $e^{-|x|} = e^{-x}$, $x < 0$ için $e^{-|x|} = e^{x}$ olur.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(1 - e^{-b}\right) = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(1 - e^{a}\right) = 1.$$

İki parça da yakınsaktır; $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = 2$. ■

Alıştırma 15.5 (Tek Fonksiyonun Temel Değeri). p.v. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ değerini bulunuz ve integralin yakınsak olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.
$\dfrac{x}{1+x^2}$ tek fonksiyondur; her $c > 0$ için $\displaystyle\int_{-c}^{c} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0$ olur ve temel değer 0'dır.
Öte yandan

$$\int_0^b \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^b = \frac{1}{2}\ln(1+b^2) \to +\infty$$

olduğundan $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$ ıraksaktır; bütün doğru üzerindeki integral ıraksaktır. ■

Tanımla hesap, integralin ilkeli bulunabildiği sürece işe yarar. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ gibi ilkeli temel fonksiyonlarla yazılamayan integrallerde yakınsaklığa, değeri hesaplamadan karar vermek gerekir. Bunun araçlarını Birinci Tip İntegraller için Yakınsaklık Testleri bölümünde kuruyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

16. Birinci Tip İntegraller için Yakınsaklık Testleri

Önceki bölümde bir genelleştirilmiş integralin yakınsaklığına, integrali sınırlı aralıkta hesaplayıp limit alarak karar verdik. Bu yol, integrali alınan fonksiyonun ilkeli yazılabildiği sürece işler. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ ya da $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ gibi integrallerde ilkel, temel fonksiyonlarla ifade edilemez; sınırlı aralıktaki integral için kapalı bir formül yoktur. Yine de çoğu zaman asıl soru integralin değeri değil, yakınsak olup olmadığıdır ve bu soru değer hesaplanmadan yanıtlanabilir.
Durum sayı serilerindekiyle aynıdır: orada da kısmi toplamın formülü nadiren bulunur ve yakınsaklığa, terimlere bakan testlerle karar verilir. Bu bölümde o testlerin integral karşılıklarını kuruyoruz: Cauchy kriteri, negatif olmayan fonksiyonlar için karşılaştırma testleri, mutlak yakınsaklık ve işaret değiştiren fonksiyonlar için Dirichlet ve Abel testleri.
Bölüm boyunca $a \in \mathbb{R}$'dir ve $[a, +\infty)$ üzerinde tanımlı her fonksiyonun her $b > a$ için $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olduğu kabul edilir. Bir f fonksiyonunun sınırlı aralıktaki integralini

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (b \geq a)$$

ile gösteriyoruz. Tanım 15.1 gereği $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integralinin yakınsaklığı, $\lim_{b\to+\infty} F(b)$ limitinin var ve sonlu olması demektir.

16.1 Cauchy Kriteri

Bir limitin varlığını, limitin değerini bilmeden denetlemenin yolu Cauchy koşuludur. Diziler için kurduğumuz ölçütün (bkz. Analiz 1) integral biçimi, bu bölümdeki bütün testlerin dayanağıdır.

Teorem 16.1 (Genelleştirilmiş İntegraller için Cauchy Kriteri). *$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul şudur: her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $B \geq a$ vardır ki $b_2 > b_1 \geq B$ olan her b_1, b_2 için*

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

olur.

> ***İspat.***
> *$b_2 > b_1 \geq a$ için integralin aralık üzerinde toplamsallığı (bkz. Analiz 2) gereği*
>
> $$\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx = F(b_2) - F(b_1)$$
>
> *olur; ispat boyunca bu eşitliği kullanacağız.*
> ***Gereklilik.*** *İntegral yakınsak ve değeri A olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Limit tanımı gereği öyle bir $B > a$ vardır ki $b \geq B$ için $|\,F(b) - A\,| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $b_2 > b_1 \geq B$ ise üçgen eşitsizliğiyle*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| = |\ F(b_2) - F(b_1)\ |$$
$$\leq |\ F(b_2) - A\ | + |\ A - F(b_1)\ | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur.
Yeterlilik. *Koşul sağlansın. Önce limitin adayını bulalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için*

$$a_n = F(a+n) = \int_a^{a+n} f(x)\,dx$$

sayı dizisini ele alalım. $\varepsilon > 0$ verilsin; koşuldaki B sayısını alalım ve $a + N \geq B$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ seçelim. $n > m \geq N$ ise $a + n > a + m \geq B$ olduğundan

$$|\ a_n - a_m\ | = \left|\int_{a+m}^{a+n} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

olur. Demek ki (a_n) bir Cauchy dizisidir; Cauchy ölçütü gereği bir A sayısına yakınsar.
Şimdi $\lim_{b\to+\infty} F(b) = A$ olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. Koşulu $\frac{\varepsilon}{2}$ ile uygulayarak bir B' sayısı bulalım. $a_n \to A$ olduğundan öyle bir N_1 vardır ki $n \geq N_1$ için $|\ a_n - A\ | < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $N \geq N_1$ ve $a + N \geq B'$ olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ seçelim. $b > a + N$ olan her b için

$$|\ F(b) - A\ | \leq |\ F(a+N) - A\ | + |\ F(b) - F(a+N)\ |$$
$$= |\ a_N - A\ | + \left|\int_{a+N}^{b} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur; ilk terimde $N \geq N_1$, ikinci terimde $b > a + N \geq B'$ kullanıldı. Bu, integralin yakınsak ve değerinin A olduğunu gösterir. ■

Yani integral yakınsaksa yeterince uzaktaki her aralığın integrale katkısı istenildiği kadar küçüktür; tersine, uzak aralıkların katkısı küçülüyorsa integral yakınsar. Koşulda limitin değeri A hiç geçmez; kriterin gücü buradadır.
Kriterin olumsuzu bir ıraksaklık ölçütüdür. Öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ bulunabiliyorsa ki her $B \geq a$ için

$$b_2 > b_1 \geq B \qquad \text{ve} \qquad \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \geq \varepsilon_0$$

olan b_1, b_2 sayıları vardır, integral ıraksaktır. Örneğin $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx$ integralinde her $N \in \mathbb{N}$ için

$$\int_{2N\pi}^{(2N+1)\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_{2N\pi}^{(2N+1)\pi} = 1 + 1 = 2$$

olur. Ne kadar uzağa gidilirse gidilsin katkısı 2 olan bir aralık bulunduğundan $\varepsilon_0 = 2$ alınabilir; integral ıraksaktır.

16.2 Negatif Olmayan Fonksiyonlar

Fonksiyon işaret değiştirmiyorsa F monotondur ve yakınsaklık tek bir soruya iner: F sınırlı mıdır? Bu, negatif olmayan terimli serilerdeki sınırlı kısmi toplam ölçütünün (bkz. Analiz 2) integral karşılığıdır.

Teorem 16.2 (Negatif Olmayan Fonksiyonlar için Sınırlılık Ölçütü). *Her $x \geq a$ için $f(x) \geq 0$ olsun. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul F fonksiyonunun üstten sınırlı olmasıdır: öyle bir $M > 0$ vardır ki her $b \geq a$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

olur. Bu durumda integralin değeri $\sup_{b\geq a} F(b)$ *sayısıdır.* F *üstten sınırlı değilse* $\lim_{b\to+\infty} F(b) = +\infty$ *olur.*

İspat.
F artandır. $a \leq x_1 < x_2$ *olsun.* $[x_1, x_2]$ *üzerinde* $f \geq 0$ *olduğundan integrali negatif değildir (bkz. Analiz 2):*

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \geq 0.$$

Yeterlilik. F *üstten sınırlı olsun ve* $S = \sup_{b\geq a} F(b)$ *diyelim;* S *sonludur.* $\varepsilon > 0$ *verilsin. Supremum tanımı gereği* $F(b_0) > S - \varepsilon$ *olan bir* $b_0 \geq a$ *vardır.* F *artan olduğundan* $b \geq b_0$ *için*

$$S - \varepsilon < F(b_0) \leq F(b) \leq S$$

olur, yani $|\ F(b) - S\ | < \varepsilon$*. Demek ki* $\lim_{b\to+\infty} F(b) = S$*'dir; integral yakınsaktır ve değeri* S*'dir.*
Gereklilik. *İntegral yakınsak ve değeri* A *olsun. Bir* b_0 *için* $F(b_0) > A$ *olsaydı,* F *artan olduğundan her* $b \geq b_0$ *için* $F(b) \geq F(b_0)$ *olur, limit alınınca* $A \geq F(b_0) > A$ *çelişkisi çıkardı. Öyleyse her* $b \geq a$ *için* $F(b) \leq A$*'dır;* F *üstten sınırlıdır.*
Sınırsız durum. F *üstten sınırlı olmasın.* $K > 0$ *verilsin;* $F(b_0) > K$ *olan bir* b_0 *vardır ve* F *artan olduğundan* $b \geq b_0$ *için* $F(b) \geq F(b_0) > K$ *olur. Bu,* $\lim_{b\to+\infty} F(b) = +\infty$ *demektir.* ■

Yani negatif olmayan bir fonksiyonun integrali ya yakınsar ya da $+\infty$'a ıraksar; Örnek 15.5 türünden salınarak ıraksama burada görülmez. Bu yüzden negatif olmayan f için yakınsaklık kısaca $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ biçiminde de yazılır.

16.3 Karşılaştırma Testi

Sınırlılık ölçütünün en kullanışlı sonucu, bir integrali karakteri bilinen başka bir integralle kıyaslamaktır.

Teorem 16.3 (Karşılaştırma Testi). $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *fonksiyonları her* $x \geq a$ *için* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *koşulunu sağlasın.*

(i) $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *yakınsak ise* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *de yakınsaktır ve* $\int_a^{+\infty} f\,dx \leq \int_a^{+\infty} g\,dx$ *olur.*

(ii) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *ıraksak ise* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *de ıraksaktır.*

İspat.
$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ *ve* $G(b) = \int_a^b g(x)\,dx$ *yazalım. Sıralama teoremi (bkz. Analiz 2) gereği her* $b \geq a$ *için*

$$0 \leq F(b) \leq G(b)$$

olur.
(i) $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *yakınsak olsun ve değerine* I *diyelim. Teorem 16.2 gereği* $I = \sup_{b\geq a} G(b)$ *olduğundan her* $b \geq a$ *için* $F(b) \leq G(b) \leq I$ *bulunur.* F *üstten sınırlıdır ve* $f \geq 0$*'dır; yine Teorem 16.2 gereği* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *yakınsaktır ve değeri* $\sup_{b\geq a} F(b) \leq I$ *olur.*
(ii) *Bu, (i) şıkkının karşıt tersidir:* $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *yakınsak olsaydı (i) gereği* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *de yakınsak olurdu.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Teoremi kullanırken iki noktaya dikkat edilir. Birincisi, başlangıç noktasının değişmesi yakınsaklığı etkilemediğinden $0 \le f(x) \le g(x)$ eşitsizliğinin bir $c \ge a$ sayısından sonraki bütün x'ler için sağlanması yakınsaklık ve ıraksaklık sonuçları için yeter; yalnız bu durumda integrallerin değerleri arasındaki eşitsizlik $[c, +\infty)$ üzerinde geçerlidir. İkincisi, negatif olmama koşulu atılamaz: $f(x) = -1$ ve $g(x) = 0$ için $f \le g$ olur, $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = 0$ yakınsaktır, ama $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ıraksaktır.

Üç adımda karşılaştırma testi

1. **Tahmin et.** x büyükken f'nin hangi basit fonksiyon gibi davrandığına bakılır. Yakınsaklık bekleniyorsa f'yi yukarıdan, ıraksaklık bekleniyorsa aşağıdan sınırlayan bir g aranır.
2. **Eşitsizliği kur.** $0 \le f(x) \le g(x)$ ya da $0 \le g(x) \le f(x)$ eşitsizliği, bir noktadan sonraki bütün x'ler için gösterilir.
3. **Bilinen integrale bağla.** g'nin integralinin karakteri kuvvet integrali (Teorem 15.2) ya da üstel integral (Örnek 15.6) yardımıyla belirlenir ve sonuç f'ye aktarılır.

Örnek 16.1 (Üstel Kare Fonksiyonu). $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Tahmin. e^{-x^2} fonksiyonu e^{-x}'ten de hızlı söner; yukarıdan e^{-x} ile sınırlamayı deneyelim.
Eşitsizlik. $x \ge 1$ için $x^2 \ge x$, dolayısıyla $-x^2 \le -x$ olur. Üstel fonksiyon artan olduğundan

$$0 < e^{-x^2} \le e^{-x} \qquad (x \ge 1)$$

bulunur.
Bilinen integral. Örnek 15.6 gereği ($t = 1$, $a = 1$)

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{e}$$

yakınsaktır. Teorem 16.3 gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ yakınsaktır ve değeri $\dfrac{1}{e}$ sayısını aşmaz. İntegralin tam değerini bulmadan yakınsaklığına karar vermiş olduk. ■

Örnek 16.2 (Köklü Bir İfadenin İntegrali). $\displaystyle\int_{3/2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+2}}$ integralinin karakterini belirleyiniz.

Çözüm.
Her $x > 0$ için $x^4 + 2 \ge x^4$, dolayısıyla $\sqrt{x^4+2} \ge x^2$ olur. Ters çevirince

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x^4+2}} \le \frac{1}{x^2} \qquad \left(x \ge \frac{3}{2}\right)$$

bulunur. Teorem 15.2 gereği ($p = 2 > 1$, $a = \dfrac{3}{2}$)

$$\int_{3/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{(3/2)^{-1}}{2-1} = \frac{2}{3}$$

yakınsaktır. Teorem 16.3 gereği verilen integral yakınsaktır ve değeri $\dfrac{2}{3}$ sayısını aşmaz. ■

Örnek 16.3 (Aşağıdan Sınırlayarak Iraksaklık). $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\sin x}{x}\,dx$ integralinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Her x için $\sin x \geq -1$, yani $2 + \sin x \geq 1$ olur. $x \geq 1$ için

$$\frac{2+\sin x}{x} \geq \frac{1}{x} > 0$$

bulunur. Teorem 15.2 gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ ıraksaktır ($p = 1$). Teorem 16.3 gereği, küçük fonksiyonun integrali ıraksak olduğundan büyük fonksiyonun integrali de ıraksaktır. İntegrali alınan fonksiyon negatif olmadığından ıraksama $+\infty$'adır. ■

16.4 Limit Karşılaştırma Testi

Karşılaştırma testinde gereken eşitsizlik her zaman elverişli yönde çıkmaz. Örneğin $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-2}}$ fonksiyonu $\dfrac{1}{x^2}$'den büyüktür, oysa iki fonksiyon sonsuzda aynı hızla söner. Böyle durumlarda eşitsizlik yerine oranın limitine bakılır.

Teorem 16.4 (Limit Karşılaştırma Testi). *$f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları her $x \geq a$ için $f(x) \geq 0$ ve $g(x) > 0$ koşullarını sağlasın ve*

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limiti (sonlu ya da $+\infty$ olarak) var olsun.

(i) $0 < L < +\infty$ *ise* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *ve* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *integralleri aynı karakterdedir: ikisi de yakınsaktır ya da ikisi de ıraksaktır.*

(ii) $L = 0$ *ve* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *yakınsak ise* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *yakınsaktır.*

(iii) $L = +\infty$ *ve* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *ıraksak ise* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *ıraksaktır.*

İspat.
Üç şıkta da limit tanımından bir $c \geq a$ sayısı bulup $[c, +\infty)$ üzerinde karşılaştırma testini uygulayacağız; başlangıç noktasının a yerine c olması yakınsaklığı etkilemez.
(i) *$\varepsilon = \dfrac{L}{2} > 0$ için öyle bir $c \geq a$ vardır ki $x \geq c$ olduğunda $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \dfrac{L}{2}$, yani $\dfrac{L}{2} < \dfrac{f(x)}{g(x)} < \dfrac{3L}{2}$ olur. $g(x) > 0$ ile çarpalım:*

$$\frac{L}{2}\,g(x) < f(x) < \frac{3L}{2}\,g(x) \qquad (x \geq c).$$

$\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ yakınsaksa Teorem 15.1 gereği $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{3L}{2}\,g(x)\,dx$ de yakınsaktır; sağdaki eşitsizlik ve Teorem 16.3 gereği $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ yakınsaktır. Tersine $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ yakınsaksa soldaki eşitsizlik $0 < g(x) < \dfrac{2}{L}\,f(x)$ verir ve aynı gerekçeyle $\displaystyle\int_c^{+\infty} g(x)\,dx$ yakınsaktır. İntegrallerden biri yakınsaksa öbürü de yakınsaktır; dolayısıyla biri ıraksaksa öbürü de ıraksaktır.
(ii) *$\varepsilon = 1$ için öyle bir $c \geq a$ vardır ki $x \geq c$ olduğunda $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 1$, yani $0 \leq f(x) < g(x)$ olur. $\displaystyle\int_c^{+\infty} g(x)\,dx$ yakınsak olduğundan Teorem 16.3 gereği $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ yakınsaktır.*
(iii) *$\dfrac{f(x)}{g(x)} \to +\infty$ olduğundan öyle bir $c \geq a$ vardır ki $x \geq c$ olduğunda $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 1$, yani $f(x) > g(x) > 0$ olur. $\displaystyle\int_c^{+\infty} g(x)\,dx$ ıraksak olduğundan Teorem 16.3 gereği $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ ıraksaktır.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Teoremin (ii) ve (iii) şıkları tek yönlüdür. $L = 0$ iken $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ ıraksaksa test bir şey söylemez: $[2, +\infty)$ üzerinde $g(x) = \dfrac{1}{x}$ alınırsa hem $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ hem $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ için $L = 0$ olur; birincinin integrali yakınsak, ikincinin integrali ıraksaktır, çünkü

$$\int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) \to +\infty.$$

Aynı biçimde $L = +\infty$ iken $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ yakınsaksa da sonuç çıkarılamaz.

Uygulamada g olarak neredeyse her zaman bir kuvvet fonksiyonu seçilir. Bu özel durum ayrı bir ad taşır.

Sonuç 16.1 (Kuvvet Testi). *Her $x \geq a$ için $f(x) \geq 0$ olsun, $p \in \mathbb{R}$ olsun ve*

$$l = \lim_{x \to +\infty} x^p f(x)$$

limiti (sonlu ya da $+\infty$ olarak) var olsun.

(i) $0 < l < +\infty$ *ise* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *integrali $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır.*

(ii) $l = 0$ *ve* $p > 1$ *ise* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *yakınsaktır.*

(iii) $l = +\infty$ *ve* $p \leq 1$ *ise* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *ıraksaktır.*

> ***İspat.***
> *$a' = \max\{a, 1\}$ alalım. Başlangıç noktası yakınsaklığı etkilemediğinden $\displaystyle\int_{a'}^{+\infty} f(x)\,dx$ integralini incelemek yeter. $[a', +\infty)$ üzerinde $g(x) = \dfrac{1}{x^p} > 0$ fonksiyonu için*
>
> $$\frac{f(x)}{g(x)} = x^p f(x) \to l \qquad (x \to +\infty)$$
>
> *olur. $a' > 0$ olduğundan Teorem 15.2 gereği $\displaystyle\int_{a'}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ integrali $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır. Üç şık, limit karşılaştırma testinin (Teorem 16.4) aynı numaralı şıklarından çıkar.* ■

Yani f sonsuzda $\dfrac{l}{x^p}$ gibi davranıyorsa integrali de $\displaystyle\int \frac{dx}{x^p}$ integrali gibi davranır; karar yalnız p üssüne bağlıdır.

> **Üç adımda kuvvet testi**
>
> 1. **Baskın terimleri ayır.** Pay ve paydada x'in en büyük kuvvetleri bırakılarak $f(x)$'in sonsuzda hangi $\dfrac{1}{x^p}$ fonksiyonu gibi davrandığı bulunur.
> 2. **Limiti hesapla.** $l = \lim_{x \to +\infty} x^p f(x)$ hesaplanır; p doğru seçildiyse $0 < l < +\infty$ çıkar.
> 3. **Üsse bak.** $p > 1$ ise integral yakınsak, $p \leq 1$ ise ıraksaktır.

Örnek 16.4 (Kuvvet Testiyle Iraksaklık). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}\,dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

> **Çözüm.**
> $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$ fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyondur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Baskın terimler. Büyük x için kökün içinde x^4 baskındır; $f(x)$ sonsuzda $\dfrac{x}{\sqrt{x^4}} = \dfrac{1}{x}$ gibi davranır. $p = 1$ alalım.
Limit. Pay ve paydayı x^2'ye bölerek

$$x \cdot f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} \to 1 \qquad (x \to +\infty)$$

bulunur; $l = 1$'dir.
Üs. $0 < l < +\infty$ ve $p = 1 \leq 1$ olduğundan Sonuç 16.1 gereği integral ıraksaktır. ■

Örnek 16.5 (Üstel Sönme Her Kuvveti Bastırır). $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx$ integralinin her p için yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f(x) = x^p e^{-x}$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ üzerinde pozitiftir. Kuvvet testini 2 üssüyle uygulayalım:

$$x^2 f(x) = \frac{x^{p+2}}{e^x}.$$

$p + 2 \leq 0$ ise $x \geq 1$ için $x^{p+2} \leq 1$ olduğundan $0 < x^2 f(x) \leq e^{-x} \to 0$ olur. $p + 2 > 0$ ise üstel fonksiyon x'in her kuvvetinden hızlı büyüdüğünden (bkz. Analiz 2) yine $\dfrac{x^{p+2}}{e^x} \to 0$ olur. Her iki durumda

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = 0$$

bulunur. Limit 0 ve üs $2 > 1$ olduğundan Sonuç 16.1 (ii) gereği integral, p ne olursa olsun, yakınsaktır. ■

16.5 Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık

Karşılaştırma testleri yalnız negatif olmayan fonksiyonlar içindir. İşaret değiştiren bir f için ilk deneme, testleri $|f|$ fonksiyonuna uygulamaktır. Seriler için yaptığımız ayrımın (bkz. Analiz 2) aynısı burada da ortaya çıkar.

Tanım 16.1 (Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık). $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ olsun. $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ integrali yakınsaksa $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integrali **mutlak yakınsaktır** denir.
$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ yakınsak, buna karşın $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ ıraksak ise $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integrali **şartlı yakınsaktır** (koşullu yakınsaktır) denir.

Yani mutlak yakınsaklıkta eğri ile yatay eksen arasında kalan toplam alan sonludur. Şartlı yakınsaklıkta toplam alan sonsuzdur; integral, yalnız eksenin üstündeki ve altındaki parçalar birbirini götürdüğü için yakınsar. f her $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olduğunda $|f|$ de integrallenebilir olduğundan (bkz. Analiz 2) tanım anlamlıdır. $f \geq 0$ ise $|f| = f$ olur ve mutlak yakınsaklık ile yakınsaklık aynı şeydir.

Teorem 16.5 (Mutlak Yakınsak İntegral Yakınsaktır). *$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ mutlak yakınsak ise yakınsaktır ve*

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

olur.

İspat.
$\varepsilon > 0$ verilsin. $\int_a^{+\infty} |\, f(x)\,|\, dx$ yakınsak olduğundan Teorem 16.1 gereği öyle bir $B \geq a$ vardır ki $b_2 > b_1 \geq B$ için

$$\int_{b_1}^{b_2} |\, f(x)\,|\, dx < \varepsilon$$

olur. İntegraller için üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 2) gereği aynı b_1, b_2 için

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\, dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |\, f(x)\,|\, dx < \varepsilon$$

bulunur. Bu, f için Cauchy koşuludur; Teorem 16.1 gereği $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ yakınsaktır.
Eşitsizlik. *Her $b \geq a$ için üçgen eşitsizliği ve Teorem 16.2 gereği*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |\, f(x)\,|\, dx \leq \int_a^{+\infty} |\, f(x)\,|\, dx$$

olur. $b \to +\infty$ iken sol yan $\left| \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \right|$ sayısına yakınsar; limit eşitsizliği korur. ■

Teorem, karşılaştırma testini işaret değiştiren fonksiyonlara taşır: her $x \geq a$ için $|\, f(x)\,| \leq g(x)$ ve $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ yakınsak ise Teorem 16.3 gereği $\int_a^{+\infty} |\, f(x)\,|\, dx$ yakınsaktır; yani $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır.

Örnek 16.6 (Mutlak Yakınsak Sinüs İntegrali). $p > 1$ olmak üzere $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ integralinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Her $x \geq 1$ için $|\sin x\,| \leq 1$ olduğundan

$$0 \leq \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$$

olur. $p > 1$ olduğundan Teorem 15.2 gereği $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ yakınsaktır. Teorem 16.3 gereği $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx$ yakınsaktır; verilen integral mutlak yakınsaktır ve Teorem 16.5 gereği yakınsaktır. ■

Örnek 16.7 (Mutlak Yakınsak Kosinüs İntegrali). $p > 1$ olmak üzere $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx$ integralinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Her $x \geq 1$ için $|\cos x\,| \leq 1$ olduğundan

$$0 \leq \left| \frac{\cos x}{x^p} \right| \leq \frac{1}{x^p}$$

olur. $p > 1$ için $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ yakınsaktır (Teorem 15.2). Teorem 16.3 gereği $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^p} \right| dx$ yakınsaktır; verilen integral mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Mutlak yakınsaklık yakınsaklığı gerektirir, ama tersi doğru değildir: yakınsak bir integral mutlak yakınsak olmayabilir.

Örnek 16.8 (Şartlı Yakınsak Bir İntegral). $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ integralinin şartlı yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Yakınsaklık. $b > 1$ için $u = \dfrac{1}{x}$, $dv = \sin x\,dx$ ile kısmi integrasyon yapalım ($du = -\dfrac{dx}{x^2}$, $v = -\cos x$):

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,dx &= \Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx \\ &= \cos 1 - \frac{\cos b}{b} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,dx.\end{aligned}$$

$b \to +\infty$ iken $\left|\dfrac{\cos b}{b}\right| \le \dfrac{1}{b} \to 0$ olur. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ integrali ise Örnek 16.7 gereği ($p = 2$) yakınsaktır. Dolayısıyla sağ yanın sonlu bir limiti vardır; integral yakınsaktır ve

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

olur.

Mutlak yakınsak değildir. $|\sin x| \le 1$ olduğundan $|\sin x| \ge |\sin x|^2 = \sin^2 x$ olur; yarım açı formülüyle

$$|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

bulunur. $b > 1$ için $x > 0$ ile bölüp integral alalım:

$$\begin{aligned}\int_1^b \frac{|\sin x|}{x}\,dx &\ge \frac{1}{2}\int_1^b \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\cos 2x}{x}\,dx \\ &= \frac{\ln b}{2} - \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\cos 2x}{x}\,dx.\end{aligned}$$

Son integrali yine kısmi integrasyonla inceleyelim ($u = \dfrac{1}{x}$, $dv = \cos 2x\,dx$, $v = \dfrac{\sin 2x}{2}$):

$$\int_1^b \frac{\cos 2x}{x}\,dx = \frac{\sin 2b}{2b} - \frac{\sin 2}{2} + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx.$$

$\left|\dfrac{\sin 2x}{x^2}\right| \le \dfrac{1}{x^2}$ olduğundan $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2}\,dx$ mutlak yakınsaktır; ayrıca $\dfrac{\sin 2b}{2b} \to 0$'dır. Sağ yanın $b \to +\infty$ iken sonlu bir limiti vardır, yani $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,dx$ yakınsaktır. Üstelik her $b \ge 1$ için

$$\left|\int_1^b \frac{\cos 2x}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{dx}{x^2} \le \frac{3}{2}$$

olur, çünkü $\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{b} \le 1$'dir. Bunu yukarıdaki eşitsizlikte kullanalım:

$$\int_1^b \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \frac{\ln b}{2} - \frac{3}{4} \to +\infty \qquad (b \to +\infty).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Demek ki $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ ıraksaktır. İntegral yakınsaktır ama mutlak yakınsak değildir; şartlı yakınsaktır. ■

16.6 Dirichlet ve Abel Testleri

Şartlı yakınsak integrallerde $|f|$ üzerinden yürüyen hiçbir test sonuç vermez; yakınsaklık, fonksiyonun salınımından doğan götürmelere dayanır. Sayı serilerindeki Dirichlet ve Abel testleri (bkz. Analiz 2) bu götürmeyi yakalar. İntegrallerde Abel toplamının yerini ikinci ortalama değer teoremi alır (bkz. Analiz 2): g fonksiyonu $[b_1, b_2]$ üzerinde monoton ve f integrallenebilir ise öyle bir $\xi \in [b_1, b_2]$ vardır ki

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx = g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f(x)\,dx \tag{1}$$

olur. Aşağıdaki iki teoremde g monotondur; monoton fonksiyon her $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olduğundan (bkz. Analiz 2) fg çarpımı da integrallenebilirdir (bkz. Analiz 2) ve $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ integralinden söz etmek anlamlıdır.

Teorem 16.6 (Dirichlet Testi). *$f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:*

(i) $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *fonksiyonu sınırlıdır: öyle bir $M > 0$ vardır ki her $b \geq a$ için $|F(b)| \leq M$ olur;*

(ii) g, $[a,+\infty)$ üzerinde monotondur ve $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$'dır.

O zaman $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ integrali yakınsaktır.

İspat.
Önce şunu not edelim: $a \leq s \leq t$ olan her s, t için (i) gereği

$$\left|\int_s^t f(x)\,dx\right| = |F(t) - F(s)| \leq |F(t)| + |F(s)| \leq 2M$$

olur.
$\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ olduğundan öyle bir $B \geq a$ vardır ki $x \geq B$ için $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$ olur. $b_2 > b_1 \geq B$ alalım. g, $[b_1, b_2]$ üzerinde monoton olduğundan (1) eşitliğini sağlayan bir $\xi \in [b_1, b_2]$ vardır. Mutlak değer alıp yukarıdaki sınırı kullanalım:

$$\begin{aligned}\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx\right| &\leq |g(b_1)|\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx\right| + |g(b_2)|\left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)\,dx\right| \\ &\leq 2M|g(b_1)| + 2M|g(b_2)| \\ &< 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{4M}\right) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Teorem 16.1 gereği $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ yakınsaktır. ■

Teorem 16.7 (Abel Testi). *$f, g : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:*

(i) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *integrali yakınsaktır;*

(ii) g, $[a,+\infty)$ üzerinde monoton ve sınırlıdır: öyle bir $K > 0$ vardır ki her $x \geq a$ için $|g(x)| \leq K$ olur.

O zaman $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ integrali yakınsaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$\varepsilon > 0$ verilsin. (i) ve Teorem 16.1 gereği öyle bir $B \geq a$ vardır ki $t > s \geq B$ için

$$\left| \int_s^t f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

olur; $s = t$ iken integral 0 olduğundan eşitsizlik $t \geq s \geq B$ için de geçerlidir.
$b_2 > b_1 \geq B$ alalım. g, $[b_1, b_2]$ üzerinde monoton olduğundan (1) eşitliğini sağlayan bir $\xi \in [b_1, b_2]$ vardır. $B \leq b_1 \leq \xi \leq b_2$ olduğundan (1) eşitliğinin sağ yanındaki iki integralin de mutlak değeri $\frac{\varepsilon}{2K}$ sayısından küçüktür. (ii) ile birlikte

$$\begin{aligned}\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx \right| &\leq |\, g(b_1)\,| \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx \right| + |\, g(b_2)\,| \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x)\,dx \right| \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Teorem 16.1 gereği $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ yakınsaktır. ■

İki testin koşullarını karşılaştıralım:

Tablo 16.1: Dirichlet ve Abel testlerinin koşulları

	f	g
Dirichlet	$\int_a^b f(x)\,dx$ sınırlı	monoton, $g(x) \to 0$
Abel	$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ yakınsak	monoton, sınırlı

Dirichlet testi f'den daha azını ister: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integralinin yakınsak olması gerekmez, sınırlı aralıklardaki integrallerin sınırlı kalması yeter; $f(x) = \sin x$ böyledir. Karşılığında g'nin 0'a gitmesi istenir. Abel testinde denge ters yöndedir: f'nin integrali yakınsak olmalıdır, g'nin ise sınırlı kalması yeter. İki testte de g'nin monotonluğu atılamaz. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ alınırsa F sınırlıdır ve $g(x) \to 0$ olur, ama g monoton değildir ve

$$\int_1^b f(x)g(x)\,dx = \int_1^b \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \geq \frac{\ln b}{2} - \frac{3}{4} \to +\infty$$

olduğundan çarpımın integrali ıraksaktır; eşitsizlik Örnek 16.8 çözümünde elde edilmişti. Abel testi için rolleri değiştirmek yeter: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ (integrali yakınsaktır) ve $g(x) = \sin x$ (sınırlı ama monoton değil) alınırsa çarpım yine $\dfrac{\sin^2 x}{x}$ olur ve integrali ıraksaktır.

Üç adımda Dirichlet testi

1. **Çarpanlara ayır.** İntegrali alınan fonksiyon, salınan bir f ile sönen bir g'nin çarpımı olarak yazılır.
2. ***f*'nin integralini sınırla.** $F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ hesaplanır ve b'den bağımsız bir M sayısıyla sınırlandığı gösterilir.
3. ***g*'yi denetle.** g'nin monoton olduğu (çoğu zaman türevin işaretinden) ve $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ olduğu gösterilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 16.9 (Dirichlet Testiyle Sinüs İntegrali). $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ integralinin yakınsak olduğunu Dirichlet testiyle gösteriniz.

Çözüm.
Çarpanlar. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \dfrac{1}{x}$ alalım.
***f*'nin integrali.** Her $b \geq 1$ için

$$\mid F(b) \mid = \left| \int_1^b \sin x\,dx \right| = \mid \cos 1 - \cos b \mid \leq 2$$

olur; $M = 2$ alınabilir.
***g* fonksiyonu.** $g(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ üzerinde azalandır ve $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$'dır.
Teorem 16.6 gereği integral yakınsaktır. Örnek 16.8 çözümündeki kısmi integrasyona gerek kalmadan aynı sonuca ulaştık. ■

Şimdi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx$ integralini p'nin bütün değerleri için sınıflandıralım. $p > 1$ için integralin mutlak yakınsak olduğunu Örnek 16.7 göstermişti; geriye $0 < p \leq 1$ ve $p \leq 0$ durumları kalıyor.

Örnek 16.10 (Şartlı Yakınsak Kosinüs İntegrali). $0 < p \leq 1$ olmak üzere $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx$ integralinin şartlı yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Yakınsaklık. $f(x) = \cos x$ ve $g(x) = \dfrac{1}{x^p}$ alalım. Her $b \geq 1$ için

$$\mid F(b) \mid = \left| \int_1^b \cos x\,dx \right| = \mid \sin b - \sin 1 \mid \leq 2$$

olur. $p > 0$ olduğundan $g'(x) = -\dfrac{p}{x^{p+1}} < 0$'dır; g azalandır ve $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$'dır. Teorem 16.6 gereği integral yakınsaktır.
Mutlak yakınsak değildir. Tersini varsayalım: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mid \cos x \mid}{x^p}\,dx$ yakınsak olsun. $\mid \cos x \mid \leq 1$ olduğundan $\cos^2 x \leq \mid \cos x \mid$, dolayısıyla

$$0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^p} \leq \frac{\mid \cos x \mid}{x^p} \qquad (x \geq 1)$$

olur; Teorem 16.3 gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^p}\,dx$ yakınsaktır. Öte yandan $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p}\,dx$ integrali de Dirichlet testi gereği yakınsaktır: g aynıdır ve

$$\left| \int_1^b \cos 2x\,dx \right| = \frac{\mid \sin 2b - \sin 2 \mid}{2} \leq 1$$

olur. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ özdeşliğinden

$$\frac{1}{x^p} = 2 \cdot \frac{\cos^2 x}{x^p} - \frac{\cos 2x}{x^p}$$

yazılır. Sağ yandaki iki fonksiyonun integralleri yakınsak olduğundan Teorem 15.1 gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ yakınsak olurdu. Oysa $p \leq 1$ için bu integral ıraksaktır (Teorem 15.2). Bu çelişki, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mid \cos x \mid}{x^p}\,dx$ integralinin ıraksak olduğunu gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İntegral yakınsaktır ama mutlak yakınsak değildir; şartlı yakınsaktır. ■

Örnek 16.11 (Cauchy Kriteriyle Iraksaklık). $p \le 0$ olmak üzere $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx$ integralinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Cauchy koşulunun $\varepsilon_0 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ için sağlanmadığını göstereceğiz.
$B \ge 1$ keyfi olsun. $2N\pi \ge B$ olan bir $N \in \mathbb{N}$ seçelim ve

$$b_1 = 2N\pi + \frac{\pi}{6}, \qquad b_2 = 2N\pi + \frac{\pi}{3}$$

alalım; $b_2 > b_1 \ge B$ olur. $[b_1, b_2]$ aralığında $\cos x \ge \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} > 0$'dır. Ayrıca $x \ge 1$ ve $-p \ge 0$ olduğundan $\dfrac{1}{x^p} = x^{-p} \ge 1$ olur. Dolayısıyla bu aralıkta

$$\frac{\cos x}{x^p} \ge \cos x > 0$$

bulunur ve sıralama teoremi gereği

$$\begin{aligned}\int_{b_1}^{b_2} \frac{\cos x}{x^p}\,dx &\ge \int_{b_1}^{b_2} \cos x\,dx = \sin b_2 - \sin b_1 \\ &= \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \varepsilon_0\end{aligned}$$

olur. Her B için integrali en az ε_0 olan, B'nin sağında kalan bir aralık bulduk. Cauchy koşulu sağlanmaz; Teorem 16.1 gereği integral ıraksaktır. ■

Üç örnek birlikte tam bir sınıflandırma verir:

Tablo 16.2: Kosinüs integralinin üsse göre karakteri

p	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx$	Araç
$p > 1$	mutlak yakınsak	karşılaştırma testi
$0 < p \le 1$	şartlı yakınsak	Dirichlet testi
$p \le 0$	ıraksak	Cauchy kriteri

Aynı sınıflandırma $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\,dx$ integrali için de geçerlidir; çözümlerde cos ile sin yer değiştirir, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ özdeşliği kullanılır ve $\sin\dfrac{\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{6}$ yerine aynı değerdeki $\cos\dfrac{\pi}{6} - \cos\dfrac{\pi}{3}$ farkı gelir.

Örnek 16.12 (Abel Testiyle Yakınsaklık). $p > 0$ olmak üzere $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\arctan x\,dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f(x) = \dfrac{\cos x}{x^p}$ ve $g(x) = \arctan x$ alalım.
***f*'nin integrali yakınsaktır.** $p > 1$ için Örnek 16.7, $0 < p \le 1$ için Örnek 16.10 gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\,dx$ yakınsaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

g monoton ve sınırlıdır. Her $x \geq 1$ için

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

olduğundan g artandır; ayrıca $|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2}$'dir.
Teorem 16.7 gereği verilen integral her $p > 0$ için yakınsaktır. ■

16.7 Sol Ucu Sonsuz Olan İntegraller

$(-\infty, b]$ üzerindeki integraller için ayrı testlere gerek yoktur; bir yansıma hepsini yukarıdaki duruma indirger. $x = -t$ yansıması $[c, b]$ aralığını $[-b, -c]$ aralığına taşır; bu sırada bölüntüler bölüntülere, alt ve üst toplamlar da aynı toplamlara karşılık geldiğinden her $c < b$ için

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-c} f(-t)\,dt$$

olur. $c \to -\infty$ iken $-c \to +\infty$ olduğundan $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ integrali, ancak ve ancak $\displaystyle\int_{-b}^{+\infty} f(-t)\,dt$ integrali yakınsaksa yakınsaktır ve bu durumda iki integralin değeri eşittir. Dolayısıyla bu bölümdeki her test, $t \mapsto f(-t)$ fonksiyonuna uygulanarak sol ucu sonsuz olan integrallere taşınır. Örneğin

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(-t)}{-t}\,dt = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

integrali Örnek 16.9 gereği yakınsaktır. Bütün doğru üzerindeki bir integral ise Tanım 15.2 gereği iki parçaya ayrılır ve her parça ayrı incelenir.

16.8 Alıştırmalar

Alıştırma 16.1 (Logaritmanın Tersinin İntegrali). $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$ integralinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$x \geq 2$ için $\ln x > 0$'dır. Ayrıca her $x > 0$ için $\ln x \leq x - 1 < x$ olduğundan $0 < \ln x < x$, yani

$$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} > 0 \qquad (x \geq 2)$$

olur. Teorem 15.2 gereği $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x}$ ıraksaktır ($p = 1$). Küçük fonksiyonun integrali ıraksak olduğundan Teorem 16.3 (ii) gereği $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$ ıraksaktır. ■

Alıştırma 16.2 (Köklü İfadede Kuvvet Testi). $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+3}\,dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm.
$f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+3}$ fonksiyonu $[1, +\infty)$ üzerinde pozitiftir.
Baskın terimler. Büyük x için pay $\sqrt{x}$ gibi, payda x^2 gibi davranır; $f(x)$ sonsuzda $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{1}{x^{3/2}}$ gibidir.
$p = \dfrac{3}{2}$ alalım.
Limit. $x^{3/2}\sqrt{x+1} = x^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^{3/2}f(x) = \frac{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{3}{x^2}} \to 1 \qquad (x \to +\infty)$$

bulunur; $l = 1$'dir.
Üs. $0 < l < +\infty$ ve $p = \dfrac{3}{2} > 1$ olduğundan Sonuç 16.1 gereği integral yakınsaktır. ■

Alıştırma 16.3 (Kuvvet Testinin Karar Veremediği Aile). $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^p}$ integrali p'nin hangi değerleri için yakınsaktır?

Çözüm.
$u = \ln x$ değişken değiştirmesiyle $du = \dfrac{dx}{x}$ olur ve $b > 2$ için

$$\int_2^b \frac{dx}{x\,(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{du}{u^p}$$

bulunur. $b \to +\infty$ iken $\ln b \to +\infty$ olduğundan verilen integralin karakteri $\displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^p}$ integralinin karakteriyle aynıdır. $\ln 2 > 0$ olduğundan Teorem 15.2 uygulanır: integral $p > 1$ için yakınsak, $p \le 1$ için ıraksaktır ve $p > 1$ iken

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^p} = \frac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1}$$

olur.
$p > 0$ iken bu ailede Sonuç 16.1 sonuç vermez. $q \le 1$ olan her üsle $x^q f(x) = \dfrac{x^{q-1}}{(\ln x)^p} \to 0$ olur, ama (ii) şıkkı 1'den büyük bir üs ister. $q > 1$ olan her üsle ise

$$x^q f(x) = \frac{x^{q-1}}{(\ln x)^p} \to +\infty$$

olur (logaritmanın her kuvveti, x'in her pozitif kuvvetinden yavaş büyür), ama (iii) şıkkı 1'i aşmayan bir üs ister. Fonksiyon $\dfrac{1}{x}$ ile bütün $\dfrac{1}{x^q}$ $(q > 1)$ fonksiyonlarının arasına düşer; böyle durumlarda karar doğrudan hesapla verilir. $p \le 0$ için ise test karar verir: $xf(x) = (\ln x)^{-p}$ limiti $p = 0$ iken 1, $p < 0$ iken $+\infty$ olur ve integral ıraksaktır. ■

Alıştırma 16.4 (Mutlak Yakınsak Salınımlı İntegral). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x}{1+x^2}\,dx$ integralinin mutlak yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Her $x \ge 0$ için $|\cos 3x| \le 1$ olduğundan

$$0 \le \left|\frac{\cos 3x}{1+x^2}\right| \le \frac{1}{1+x^2}$$

olur. Örnek 15.2 gereği

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

yakınsaktır. Teorem 16.3 gereği $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos 3x}{1+x^2}\right| dx$ yakınsaktır; verilen integral mutlak yakınsaktır. Teorem 16.5 ayrıca değeri için bir sınır verir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x}{1+x^2}\, dx \right| \leq \frac{\pi}{2}.$$

■

Alıştırma 16.5 (Sınırsız Fonksiyonun Yakınsak İntegrali). $\displaystyle\int_1^{+\infty} x \sin(x^4)\, dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Değişken değiştirme. $u = x^4$ alalım. $x = u^{1/4}$ ve $dx = \frac{1}{4}u^{-3/4}\, du$ olduğundan

$$x\, dx = u^{1/4} \cdot \frac{1}{4}u^{-3/4}\, du = \frac{du}{4\sqrt{u}}$$

olur. $b > 1$ için

$$\int_1^b x \sin(x^4)\, dx = \frac{1}{4}\int_1^{b^4} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$$

bulunur.
Dirichlet testi. $f(u) = \sin u$ ve $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ alalım. Her $c \geq 1$ için

$$\left| \int_1^c \sin u\, du \right| = |\cos 1 - \cos c\,| \leq 2$$

olur. $g'(u) = -\dfrac{1}{2u^{3/2}} < 0$ olduğundan g azalandır ve $\lim_{u\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{u}} = 0$'dır. Teorem 16.6 gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$ yakınsaktır.
Sonuç. $b \to +\infty$ iken $b^4 \to +\infty$ olduğundan

$$\int_1^{+\infty} x \sin(x^4)\, dx = \frac{1}{4}\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$$

olur; integral yakınsaktır.
Bu örnek, serilerle integraller arasındaki bir farkı gösterir. Yakınsak bir serinin genel terimi 0'a gider; oysa burada $x\sin(x^4)$ fonksiyonu 0'a gitmediği gibi sınırlı bile değildir. İntegral, salınım gittikçe sıklaştığı ve ardışık pozitif ve negatif parçalar birbirini götürdüğü için yakınsar. ■

Alıştırma 16.6 (Logaritmalı Şartlı Yakınsak İntegral). $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x}\, dx$ integralinin şartlı yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Yakınsaklık. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ alalım. Her $b \geq 2$ için

$$\left| \int_2^b \sin x\, dx \right| = |\cos 2 - \cos b\,| \leq 2$$

olur. $x \geq 2$ için $g'(x) = -\dfrac{1}{x\,(\ln x)^2} < 0$ olduğundan g azalandır ve $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$'dır. Teorem 16.6 gereği integral yakınsaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Mutlak yakınsak değildir. Tersini varsayalım: $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\ln x}\,dx$ yakınsak olsun. $\sin^2 x \le |\sin x|$ olduğundan

$$0 \le \frac{\sin^2 x}{\ln x} \le \frac{|\sin x|}{\ln x} \qquad (x \ge 2)$$

olur ve Teorem 16.3 gereği $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\ln x}\,dx$ yakınsaktır. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\ln x}\,dx$ integrali de Dirichlet testi gereği yakınsaktır: g aynıdır ve

$$\left|\int_2^b \cos 2x\,dx\right| = \frac{|\sin 2b - \sin 4|}{2} \le 1$$

olur. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ özdeşliğinden

$$\frac{1}{\ln x} = 2\cdot\frac{\sin^2 x}{\ln x} + \frac{\cos 2x}{\ln x}$$

yazılır; Teorem 15.1 gereği $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$ yakınsak olurdu. Bu, Alıştırma 16.1 ile çelişir. Demek ki $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\ln x}\,dx$ ıraksaktır.
İntegral yakınsaktır ama mutlak yakınsak değildir; şartlı yakınsaktır. ■

Alıştırma 16.7 (Abel Testinin Uygulanması). $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1}\,dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
İntegrali alınan fonksiyonu iki çarpana ayıralım:

$$\frac{\sqrt{x}\sin x}{x+1} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\cdot\frac{x}{x+1}.$$

$f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ ve $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ alalım.
***f*'nin integrali yakınsaktır.** $\displaystyle\int_1^b \sin x\,dx$ integralleri 2 ile sınırlıdır, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ fonksiyonu azalandır ve 0'a gider; Teorem 16.6 gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ yakınsaktır.
***g* monoton ve sınırlıdır.** $g(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ olduğundan

$$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

olur; g artandır. Ayrıca $x \ge 1$ için $0 < g(x) < 1$'dir.
Teorem 16.7 gereği verilen integral yakınsaktır.
İkinci yol. Dirichlet testi doğrudan da uygulanabilir: $f(x) = \sin x$ ve $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ alınırsa

$$h'(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}\,(x+1)^2} \le 0 \qquad (x \ge 1)$$

olduğundan h azalandır ve $0 < h(x) < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ eşitsizliğinden $h(x) \to 0$ bulunur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu bölümdeki testlerin hepsi sınırsız aralıktaki integraller içindi. Aralık sınırlı, fonksiyon ise bir nokta yakınında sınırsız olduğunda aynı fikirler küçük değişikliklerle yeniden kurulur; bunu İkinci Tip Genelleştirilmiş İntegraller bölümünde yapıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

17. İkinci Tip Genelleştirilmiş İntegraller

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integralinde aralık sınırlıdır ama fonksiyon sınırlı değildir: x sıfıra yaklaşırken $\frac{1}{\sqrt{x}}$ sınırsız büyür. Riemann integrali yalnız sınırlı fonksiyonlar için tanımlandığından bu ifade sıradan bir integral değildir. Yine de eğrinin altındaki bölgenin alanını sormak anlamlıdır ve yanıt, sınırsız aralıklardaki fikirle verilir: sorunlu noktadan biraz uzakta durulur, sıradan integral alınır, sonra o noktaya doğru limit alınır.
Bu bölümde II. tip genelleştirilmiş integrali tanımlıyor ve önceki bölümde sınırsız aralıklar için kurulan yakınsaklık testlerinin karşılıklarını ispatlıyoruz. Testlerin biçimi aynıdır; değişen, ölçü olarak kullanılan kuvvet integralinin eşiğidir: sonsuzda $p > 1$ yakınsaklık verirken sorunlu noktada $p < 1$ yakınsaklık verir. Bölümün sonunda iki sorunun birlikte görüldüğü III. tip integrallere geçiyoruz.

17.1 Tekil Noktada İntegral

Önce fonksiyonun aralığın yalnız bir ucunda sınırsız olduğu durumu ele alalım.

Tanım 17.1 (İkinci Tip Genelleştirilmiş İntegral). $a < b$ reel sayılar olsun. $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in (a, b)$ için $[x, b]$ üzerinde integrallenebilir ve a'nın her sağ komşuluğunda sınırsız olsun. Bu durumda a noktasına f'nin **tekil noktası** denir.

$$\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$$

limiti var ve sonluysa $\int_a^b f(x)\,dx$ genelleştirilmiş integrali **yakınsaktır** denir ve değeri bu limittir. Limit yoksa ya da sonsuzsa integral **ıraksaktır** denir.
Aynı biçimde, $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ her $x \in (a, b)$ için $[a, x]$ üzerinde integrallenebilir ve b'nin her sol komşuluğunda sınırsızsa (tekil nokta b)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$$

tanımlanır; limit var ve sonluysa integral yakınsak, değilse ıraksaktır.

Yani tekil noktanın kendisi integrale hiç sokulmaz: ondan x kadar uzakta kesilen aralıkta fonksiyon sınırlıdır, orada sıradan integral alınır ve kesim noktası tekil noktaya yaklaştırılır. $F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ yazılırsa yakınsaklık, F fonksiyonunun $x \to a^+$ iken sonlu bir limite sahip olmasıdır. Limit tanımıyla: integralin A sayısına yakınsaması, her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunması demektir ki $a < x < a + \delta$ olduğunda

$$\left| \int_x^b f(t)\,dt - A \right| < \varepsilon$$

olsun. $h = x - a$ yazılarak aynı limit $\lim_{h \to 0^+} \int_{a+h}^b f(t)\,dt$ biçiminde de ifade edilebilir.
Tekil ucu vurgulamak için $\int_{a^+}^b f(x)\,dx$ ve $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$ yazımları da kullanılır. Biz sınırları yalın yazacak, tekil noktanın hangisi olduğunu her seferinde ayrıca söyleyeceğiz.

Örnek 17.1 (Sağ Ucu Tekil Yakınsak İntegral). $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4 - x}}$ integrali yakınsak mıdır?

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Fonksiyon $x < 4$ için tanımlıdır ve $x \to 4^-$ iken $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}} \to +\infty$ olur; tekil nokta aralığın sağ ucu 4'tür. $\left(-2\sqrt{4-t}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{4-t}}$ olduğundan $0 < x < 4$ için

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{4-t}} = \Big[-2\sqrt{4-t}\Big]_0^x = 4 - 2\sqrt{4-x}$$

olur. $x \to 4^-$ iken $\sqrt{4-x} \to 0$ olduğundan limit vardır ve sonludur:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \lim_{x\to 4^-}\left(4 - 2\sqrt{4-x}\right) = 4.$$

İntegral yakınsaktır ve değeri 4'tür. Bölge yukarı doğru sınırsız uzadığı hâlde alanı sonludur. ■

Tanımdaki sınırsızlık koşulunun bir nedeni vardır: fonksiyon a yakınında sınırlı kalıyorsa limit almak yeni bir şey vermez.

Önerme 17.1 (Sınırlı Fonksiyonda Limit Sıradan İntegraldir). *$f : (a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı ve her $x \in (a,b)$ için $[x,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. $f(a)$ değeri nasıl seçilirse seçilsin $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olur ve*

$$\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

sağlanır.

İspat.
$f(a)$ herhangi bir sayı olarak seçilsin ve $M > 0$ sayısı, her $t \in [a,b]$ için $|\,f(t)\,| \le M$ olacak biçimde alınsın.
İntegrallenebilirlik. *$\varepsilon > 0$ verilsin. $2M(x_0 - a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ olacak biçimde bir $x_0 \in (a,b)$ seçelim. $f \in \mathcal{R}[x_0,b]$ olduğundan Riemann ölçütü (bkz. Analiz 2) gereği $[x_0,b]$ aralığının*

$$U(P_0,f) - L(P_0,f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

koşulunu sağlayan bir P_0 bölünüşü vardır. $P = \{a\} \cup P_0$ kümesi $[a,b]$'nin bir bölünüşüdür ve P_0'a göre tek fazladan alt aralığı $[a,x_0]$'dır. Bu alt aralıkta $\sup f - \inf f \le 2M$ olduğundan

$$U(P,f) - L(P,f) \le 2M(x_0 - a) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olur. Riemann ölçütü gereği $f \in \mathcal{R}[a,b]$'dir.
Limit. *İntegralin aralık üzerinde toplamsallığı (bkz. Analiz 2) gereği her $x \in (a,b)$ için*

$$\int_a^b f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt$$

olur. İntegraller için üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 2) ile

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt\right| \le \int_a^x |\,f(t)\,|\,dt \le M(x-a)$$

bulunur. $x \to a^+$ iken sağ yan sıfıra gider; limit $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ sayısıdır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örneğin $\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x=0$'da tanımsızdır, ama $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ olduğundan $(0,1]$ üzerinde sınırlıdır; $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ sıradan bir integraldir. Bir noktada tanımsız olmak tekil olmak demek değildir: tekillik sınırsızlıktır. Bu yüzden bir integrali II. tip saymadan önce fonksiyonun kuşkulu noktadaki limitine bakılır.

17.2 İç Noktada ve Birden Çok Noktada Tekillik

Tekil nokta aralığın içindeyse ya da birden çok tekil nokta varsa integral, her biri yalnız bir ucunda tekil olan parçalara ayrılır.

Tanım 17.2 (İç Noktada ve Birden Çok Noktada Tekil İntegral). $c\in(a,b)$ olsun. $f:[a,b]\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu c'yi içermeyen her kapalı alt aralıkta integrallenebilir ve c yakınında sınırsız olsun. (f, c'nin bir yanında sınırlı kalıyorsa o yandaki parça sıradan bir integraldir; bkz. Önerme 17.1.) $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ ve $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ integrallerinin **ikisi de** yakınsaksa $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ integrali **yakınsaktır** denir ve

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

tanımlanır. İki integralden en az biri ıraksaksa $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **ıraksaktır** denir.

Daha genel olarak f'nin $[a,b]$ içinde sonlu sayıda tekil noktası varsa aralık, her parçada tekil nokta yalnız bir uçta kalacak biçimde sonlu sayıda alt aralığa bölünür. Bütün parçalardaki integraller yakınsaksa $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ yakınsaktır ve değeri bu integrallerin toplamıdır; parçalardan en az biri ıraksaksa ıraksaktır.

Yani tekil noktaya soldan ve sağdan birbirinden bağımsız yaklaşılır; $\lim\limits_{x\to c^-}\displaystyle\int_a^x f$ ve $\lim\limits_{y\to c^+}\displaystyle\int_y^b f$ limitleri ayrı ayrı var olmalıdır. İki ucu da tekil olan bir integral herhangi bir $c\in(a,b)$ noktasından ikiye bölünür. Bölme noktasının seçimi sonucu değiştirmez: $c<c'$ ise $\displaystyle\int_x^{c'} f=\int_x^c f+\int_c^{c'} f$ olduğundan iki seçim yalnız sıradan bir integral kadar farklı parçalar üretir ve toplam aynı kalır.

Örnek 17.2 (Tekil Noktası İçeride Olan İntegral). $\displaystyle\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
$x\to 0$ iken $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ sınırsızdır; tekil nokta aralığın içindeki 0'dır. İntegrali 0'dan ikiye ayıralım. $t\neq 0$ için $\left(\dfrac{3}{2}\left(\sqrt[3]{t}\right)^2\right)'=\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}}$ olur; bu eşitlik negatif t için de geçerlidir.
Sağ parça. $0<x<8$ için

$$\int_x^8\frac{dt}{\sqrt[3]{t}}=\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{t}\right)^2\right]_x^8=6-\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2$$

olur ve $x\to 0^+$ iken limit 6'dır.
Sol parça. $-1<x<0$ için

$$\int_{-1}^x\frac{dt}{\sqrt[3]{t}}=\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{t}\right)^2\right]_{-1}^x=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\frac{3}{2}$$

olur ve $x\to 0^-$ iken limit $-\dfrac{3}{2}$'dir.
Sonuç. İki parça da yakınsaktır; dolayısıyla

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

Sol parçanın negatif çıkması doğaldır: $x < 0$ için $\sqrt[3]{x} < 0$'dır. ■

Örnek 17.3 (İki Ucu da Tekil Olan İntegral). $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
$x \to 1^-$ ve $x \to -1^+$ iken $1 - x^2 \to 0^+$ olduğundan iki uç da tekildir. $c = 0$ ile bölelim; $(\arcsin t)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ olduğundan

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to -1^+} \left(-\arcsin x \right) = \frac{\pi}{2}.$$

İki parça da yakınsaktır; dolayısıyla

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

■

⚠ Tekil nokta aranmadan Newton–Leibniz formülü uygulanmaz

$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$ integralinde ilkel körü körüne kullanılırsa $\left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2$ bulunur. Pozitif bir fonksiyonun integrali negatif olamaz; hesap yanlıştır, çünkü 0 noktası tekildir ve formülün istediği integrallenebilirlik koşulu sağlanmaz. Doğrusu, 0'dan bölmektir: $0 < x < 1$ için

$$\int_{x}^{1} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x} - 1$$

olur ve $x \to 0^+$ iken bu ifade $+\infty$'a gider. Parçalardan biri ıraksak olduğundan integral ıraksaktır.

17.3 Kuvvet İntegrali

Testlerde ölçü olarak kullanılacak integral ailesi, I. tipte olduğu gibi kuvvet fonksiyonlarından oluşur.

Teorem 17.1 (Tekil Noktada Kuvvet İntegrali). *$a < b$ ve $p \in \mathbb{R}$ olsun. $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^p}$ integrali (tekil nokta a) $p < 1$ için yakınsak, $p \geq 1$ için ıraksaktır; $p < 1$ iken*

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^p} = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$$

olur. Aynı sonuç ve aynı değer, tekil noktası b olan $\displaystyle\int_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^p}$ integrali için de geçerlidir.

İspat.
Sol uç, $p = 1$. *$a < x < b$ için*

$$\int_x^b \frac{dt}{t-a} = \ln(b-a) - \ln(x-a)$$

olur. $x \to a^+$ iken $\ln(x-a) \to -\infty$ olduğundan limit $+\infty$'dur; integral ıraksaktır.
Sol uç, $p \neq 1$.

$$\int_x^b \frac{dt}{(t-a)^p} = \left[\frac{(t-a)^{1-p}}{1-p}\right]_x^b = \frac{(b-a)^{1-p} - (x-a)^{1-p}}{1-p}.$$

$p < 1$ ise $1-p > 0$ olduğundan $x \to a^+$ iken $(x-a)^{1-p} \to 0$ olur ve limit $\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$'dir. $p > 1$ ise $1-p < 0$ olduğundan $(x-a)^{1-p} \to +\infty$ olur; payda $1-p$ negatif olduğundan kesir $+\infty$'a gider ve integral ıraksaktır.
Sağ uç. $\left(-\dfrac{(b-t)^{1-p}}{1-p}\right)' = \dfrac{1}{(b-t)^p}$ *olduğundan $p \neq 1$ ve $a < x < b$ için*

$$\int_a^x \frac{dt}{(b-t)^p} = \frac{(b-a)^{1-p} - (b-x)^{1-p}}{1-p}$$

olur; $p = 1$ için integral $\ln(b-a) - \ln(b-x)$'tir. $x \to b^-$ iken $b-x \to 0^+$ olduğundan sol uçtaki inceleme sözcüğü sözcüğüne yinelenir. ■

$p \leq 0$ için $\dfrac{1}{(x-a)^p}$ sınırlıdır ve integral sıradan bir integraldir; formül bu durumda da doğrudur. Teoremin asıl içeriği $0 < p < 1$ ve $p \geq 1$ durumlarının ayrılmasıdır.
Eşik yine $p = 1$'dir, ama yön I. tiptekinin tersidir (Teorem 15.2).

Tablo 17.1: Kuvvet integrallerinin iki tipte karşılaştırması

	Sonsuzda (I. tip)	Tekil noktada (II. tip)
Ölçü integrali	$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$
Yakınsak	$p > 1$	$p < 1$
Iraksak	$p \leq 1$	$p \geq 1$
Testte bakılan limit	$\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)$	$\lim_{x\to a^+} (x-a)^p f(x)$

Yani sonsuzda yakınsaklık için fonksiyonun yeterince **hızlı sönmesi**, tekil noktada ise yeterince **yavaş büyümesi** gerekir. $\dfrac{1}{x}$ iki tarafta da sınırdadır ve ikisinde de ıraksar; $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sıfırda yakınsar, sonsuzda ıraksar; $\dfrac{1}{x^2}$ sonsuzda yakınsar, sıfırda ıraksar.
Yönün ters dönmesi bir rastlantı değildir; iki tip bir değişken değiştirmeyle birbirine çevrilir. $t = a + \dfrac{1}{s}$ dönüşümüyle $dt = -\dfrac{ds}{s^2}$ ve $\dfrac{1}{(t-a)^p} = s^p$ olduğundan

$$\int_x^b \frac{dt}{(t-a)^p} = \int_{1/(b-a)}^{1/(x-a)} \frac{ds}{s^{2-p}}$$

elde edilir. $x \to a^+$ iken üst sınır $+\infty$'a gider; tekil noktadaki integral, sonsuzdaki $\displaystyle\int \frac{ds}{s^{2-p}}$ integraline dönüşür ve $2-p > 1$ koşulu tam olarak $p < 1$ demektir.

 CC BY-NC-SA 4.0

17.4 Testlerin Çerçevesi ve Cauchy Kriteri

İlkeli bulunamayan integrallerde yakınsaklığa, değeri hesaplamadan karar vermek gerekir. Bundan sonraki testlerde $f : (a, b] \to \mathbb{R}$, her $x \in (a, b)$ için $[x, b]$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyondur ve

$$F(x) = \int_x^b f(t)\,dt \qquad (a < x \leq b)$$

yazıyoruz. f'nin a yakınında gerçekten sınırsız olup olmadığını ayrıca denetlemek gerekmez: sınırlıysa $\lim_{x\to a^+} F(x)$ limiti zaten vardır (Önerme 17.1). Bütün ifadeleri sol ucu tekil integraller için yazıyoruz; sağ ucu tekil integrallerde $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $x \to b^-$ ve $x - a$ yerine $b - x$ alınarak aynı ifadeler aynı ispatlarla elde edilir.
Üç basit gözlem ispatlarda sürekli kullanılacak.
Dilim formülü. İntegralin aralık üzerinde toplamsallığı (bkz. Analiz 2) gereği

$$F(x_1) - F(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \qquad (a < x_1 < x_2 \leq b) \tag{1}$$

olur.
Yerellik. $c \in (a, b)$ ise (1) gereği her $x \in (a, c)$ için $F(x) = \int_x^c f(t)\,dt + F(c)$ olur. İkinci terim sabittir; dolayısıyla $\int_a^b f$ ile $\int_a^c f$ aynı anda yakınsar ya da ıraksar. Yakınsaklık yalnız fonksiyonun tekil nokta yakınındaki davranışına bağlıdır.
Lineerlik. Limitin toplam ve sabitle çarpım kuralları burada da geçerli olduğundan lineerlik teoremi (Teorem 15.1) II. tip integraller için aynı ispatla doğrudur. Özel olarak $k \neq 0$ sabiti için $\int_a^b kf$ ile $\int_a^b f$ aynı anda yakınsar ya da ıraksar.
İlk test, limitin değerini bilmeden limitin varlığını denetler; I. tipteki karşılığı Teorem 16.1 ifadesidir.

Teorem 17.2 (Tekil Noktada Cauchy Kriteri). *$\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin (tekil nokta a) yakınsak olması için gerek ve yeter koşul şudur: her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta \in (0, b - a]$ vardır ki $a < x_1 < x_2 < a + \delta$ olan her x_1, x_2 için*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| < \varepsilon$$

olur.

> ***İspat.***
>
> *(1) gereği koşuldaki integral $F(x_1) - F(x_2)$ farkıdır; koşul, F fonksiyonunun a yakınındaki değerlerinin birbirine yakın olduğunu söyler.*
>
> ***Gereklilik.*** *$\lim_{x\to a^+} F(x) = A$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle bir $\delta \in (0, b - a]$ vardır ki $a < x < a + \delta$ iken $| F(x) - A | < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $a < x_1 < x_2 < a + \delta$ ise (1) ve üçgen eşitsizliği ile*
>
> $$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \right| \leq | F(x_1) - A | + | A - F(x_2) | < \varepsilon$$
>
> *bulunur.*
> ***Yeterlilik.*** *Koşul sağlansın. $x_n = a + \frac{b-a}{n}$ dizisini alalım; $x_n \in (a, b]$ ve $x_n \to a$ olur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve koşuldaki δ sayısı $\frac{\varepsilon}{2}$ için seçilsin. $\frac{b-a}{N} < \delta$ olan bir N alalım. $m, n \geq N$ ise x_m ve x_n noktaları $(a, a + \delta)$ aralığındadır ve (1) gereği*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| F(x_n) - F(x_m) | < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Demek ki $\left(F(x_n) \right)$ *bir Cauchy dizisidir ve bir* A *sayısına yakınsar (bkz. Analiz 1). Son eşitsizlikte* $m \to \infty$ *alınırsa* $n \geq N$ *için* $| F(x_n) - A | \leq \frac{\varepsilon}{2}$ *elde edilir.*
Şimdi $a < x < a + \delta$ *olan herhangi bir* x *alalım.* x *ve* x_N *noktalarının ikisi de* $(a, a + \delta)$ *aralığında olduğundan*

$$| F(x) - A | \leq | F(x) - F(x_N) | + | F(x_N) - A | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. ε *keyfi olduğundan* $\lim_{x \to a^+} F(x) = A$*'dır; integral yakınsaktır.* ■

Yani integral tam olarak, tekil noktaya yeterince yakın iki kesim arasındaki dilimin katkısı istenildiği kadar küçük yapılabildiğinde yakınsar.

17.5 Negatif Olmayan Fonksiyonlar ve Karşılaştırma Testi

Fonksiyon işaret değiştirmiyorsa F monotondur ve yakınsaklık sorusu bir sınırlılık sorusuna iner.

Teorem 17.3 (Negatif Olmayan Fonksiyonlarda Sınırlılık Ölçütü). *Her* $x \in (a, b]$ *için* $f(x) \geq 0$ *olsun.* $\int_a^b f(x)\,dx$ *integralinin (tekil nokta* a*) yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,* F *fonksiyonunun* $(a, b]$ *üzerinde üstten sınırlı olmasıdır. Bu durumda*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{a < x \leq b} F(x)$$

olur; F *üstten sınırlı değilse* $\lim_{x \to a^+} F(x) = +\infty$*'dur.*

İspat.
$f \geq 0$ *olduğundan* $a < x_1 < x_2 \leq b$ *için* $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt \geq 0$ *olur (bkz. Analiz 2); (1) gereği* $F(x_1) \geq F(x_2)$*'dir. Yani* x *küçüldükçe* $F(x)$ *azalmaz.*
F üstten sınırlıysa. $S = \sup F$ *olsun ve* $\varepsilon > 0$ *verilsin. Supremum tanımı gereği* $F(x_0) > S - \varepsilon$ *olan bir* $x_0 \in (a, b]$ *vardır.* $a < x < x_0$ *ise*

$$S - \varepsilon < F(x_0) \leq F(x) \leq S$$

olur, yani $| F(x) - S | < \varepsilon$*.* $\delta = x_0 - a$ *seçimiyle limit tanımı sağlanır:* $\lim_{x \to a^+} F(x) = S$ *ve integral yakınsaktır.*
F üstten sınırlı değilse. *Her* $M > 0$ *için* $F(x_0) > M$ *olan bir* $x_0 \in (a, b]$ *vardır ve* $a < x < x_0$ *ise* $F(x) \geq F(x_0) > M$ *olur. Demek ki* $\lim_{x \to a^+} F(x) = +\infty$*'dur ve integral ıraksaktır.*
İki durum birlikte, yakınsaklığın üstten sınırlılığa denk olduğunu gösterir. ■

Yani negatif olmayan bir fonksiyonun II. tip integrali ya yakınsar ya da $+\infty$'a ıraksar; salınarak ıraksama olmaz. I. tipteki karşılığı Teorem 16.2 ifadesidir. Sınırlılık ölçütü, integrali bilinen bir fonksiyonla karşılaştırmaya izin verir.

Teorem 17.4 (Tekil Noktada Karşılaştırma Testi). $f, g : (a, b] \to \mathbb{R}$ *her* $x \in (a, b)$ *için* $[x, b]$ *üzerinde integrallenebilir olsun ve her* $x \in (a, b]$ *için* $0 \leq f(x) \leq g(x)$ *sağlansın. Tekil nokta* a *olmak üzere:*

1. $\int_a^b g$ *yakınsaksa* $\int_a^b f$ *de yakınsaktır ve* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ *olur.*
2. $\int_a^b f$ *ıraksaksa* $\int_a^b g$ *de ıraksaktır.*

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

$G(x) = \int_x^b g(t)\,dt$ yazalım. $f \le g$ olduğundan sıralama teoremi (bkz. Analiz 2) gereği her $x \in (a,b]$ için $F(x) \le G(x)$'tir.

1. *$\int_a^b g$ yakınsaksa sınırlılık ölçütü (Teorem 17.3) gereği her x için $G(x) \le \int_a^b g$ olur. O zaman*

$$F(x) \le G(x) \le \int_a^b g(t)\,dt$$

sağlanır; F üstten sınırlıdır ve aynı ölçüt gereği $\int_a^b f$ yakınsaktır. Değeri $\sup F$ olduğundan ve $\int_a^b g$ sayısı F'nin bir üst sınırı olduğundan $\int_a^b f \le \int_a^b g$ bulunur.

2. *Birinci şıkkın karşıt tersidir: $\int_a^b g$ yakınsak olsaydı $\int_a^b f$ de yakınsak olurdu.* ■

Yerellik gereği eşitsizliğin bütün $(a,b]$ üzerinde sağlanması şart değildir: bir $c \in (a,b)$ için $0 \le f \le g$ eşitsizliği yalnız $(a,c]$ üzerinde doğruysa yakınsaklık ve ıraksaklık sonuçları yine geçerlidir. Testin işareti sabit fonksiyonlar için olduğu unutulmamalıdır; işaret değiştiren fonksiyonlarda mutlak değere geçilir.

Örnek 17.4 (Karşılaştırma Testiyle Yakınsaklık). $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm.
$x \to 1^+$ iken $x^4 - 1 \to 0^+$ ve $\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}} \to +\infty$ olur; tekil nokta sol uç 1'dir.

Karşılaştırma. $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ yazılır. $1 < x \le 5$ için $(x+1)(x^2+1) > 1$ olduğundan $x^4 - 1 > x - 1 > 0$ ve

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

bulunur.

Ölçü integrali. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{(x-1)^{1/2}}$ bir kuvvet integralidir; $p = \dfrac{1}{2} < 1$ olduğundan yakınsaktır ve değeri $\dfrac{4^{1/2}}{1/2} = 4$'tür (Teorem 17.1).

Sonuç. Karşılaştırma testi (Teorem 17.4) gereği integral yakınsaktır ve $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} \le 4$ olur. ■

17.6 Limit Karşılaştırma ve Kuvvet Testi

Eşitsizlik kurmak her zaman kolay değildir; çoğu zaman iki fonksiyonun tekil nokta yakınında aynı hızla büyüdüğünü görmek yeter.

Teorem 17.5 (Tekil Noktada Limit Karşılaştırma Testi). *$f, g : (a,b] \to \mathbb{R}$ her $x \in (a,b)$ için $[x,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun; her $x \in (a,b]$ için $f(x) \ge 0$ ve $g(x) > 0$ sağlansın ve*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

limiti (sonlu ya da $+\infty$ olarak) var olsun. Tekil nokta a olmak üzere:

1. *$0 < L < +\infty$ ise $\int_a^b f$ ve $\int_a^b g$ aynı anda yakınsar ya da ıraksar.*
2. *$L = 0$ ve $\int_a^b g$ yakınsaksa $\int_a^b f$ yakınsaktır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

3. $L = +\infty$ *ve* $\int_a^b g$ *ıraksaksa* $\int_a^b f$ *ıraksaktır.*

İspat.
1. *Limit tanımını* $\varepsilon = \dfrac{L}{2} > 0$ *ile uygulayalım: öyle bir* $\delta \in (0, b-a]$ *vardır ki* $a < x < a+\delta$ *iken*

$$\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2}$$

olur. $g(x) > 0$ *ile çarpılırsa,* $c = a + \dfrac{\delta}{2}$ *olmak üzere her* $x \in (a, c]$ *için*

$$0 < \frac{L}{2}\, g(x) < f(x) < \frac{3L}{2}\, g(x) \tag{2}$$

bulunur.
$\int_a^b g$ *yakınsak olsun. Yerellik gereği* $\int_a^c g$*, lineerlik gereği* $\int_a^c \dfrac{3L}{2}\, g$ *yakınsaktır. (2)'nin sağ yarısı ve karşılaştırma testi (Teorem 17.4) ile* $\int_a^c f$ *yakınsaktır; yerellik gereği* $\int_a^b f$ *yakınsaktır.*
Tersine $\int_a^b f$ *yakınsak olsun. O zaman* $\int_a^c f$ *yakınsaktır; (2)'nin sol yarısı ve karşılaştırma testi ile* $\int_a^c \dfrac{L}{2}\, g$ *yakınsaktır.* $\dfrac{2}{L}$ *ile çarpılırsa* $\int_a^c g$*, yerellik gereği de* $\int_a^b g$ *yakınsaktır.*
İki integral aynı anda yakınsadığına göre aynı anda ıraksar.
2. *Limit tanımını* $\varepsilon = 1$ *ile uygulayalım: öyle bir* $\delta \in (0, b-a]$ *vardır ki* $a < x < a+\delta$ *iken* $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 1$ *olur.* $c = a + \dfrac{\delta}{2}$ *ile her* $x \in (a, c]$ *için* $0 \le f(x) < g(x)$ *sağlanır.* $\int_a^c g$ *yakınsak olduğundan karşılaştırma testi gereği* $\int_a^c f$*, yerellik gereği* $\int_a^b f$ *yakınsaktır.*
3. $L = +\infty$ *olduğundan öyle bir* $\delta \in (0, b-a]$ *vardır ki* $a < x < a+\delta$ *iken* $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 1$ *olur.* $c = a + \dfrac{\delta}{2}$ *ile her* $x \in (a, c]$ *için* $0 < g(x) < f(x)$ *sağlanır.* $\int_a^b f$ *yakınsak olsaydı* $\int_a^c f$ *yakınsak olur, karşılaştırma testi* $\int_a^c g$ *integralinin, yerellik de* $\int_a^b g$ *integralinin yakınsak olduğunu verirdi; bu varsayımla çelişir. Öyleyse* $\int_a^b f$ *ıraksaktır.* ■

Yani L sonlu ve pozitifse iki fonksiyon tekil nokta yakınında birbirinin sabit katı gibi davranır ve integralleri aynı kaderi paylaşır. I. tipteki karşılığı Teorem 16.4 ifadesidir. g yerine kuvvet fonksiyonu alındığında uygulamada en çok kullanılan test çıkar.

Sonuç 17.1 (Tekil Noktada Kuvvet Testi). *$f : (a, b] \to \mathbb{R}$ her $x \in (a, b)$ için $[x, b]$ üzerinde integrallenebilir ve negatif olmayan bir fonksiyon, $p \in \mathbb{R}$ olsun ve*

$$\lim_{x \to a^+} (x-a)^p f(x) = r$$

limiti (sonlu ya da $+\infty$ olarak) var olsun. Tekil nokta a olmak üzere:

1. $0 < r < +\infty$ *ise* $\int_a^b f(x)\,dx$ *integrali $p < 1$ için yakınsak, $p \ge 1$ için ıraksaktır.*
2. $r = 0$ *ve* $p < 1$ *ise* $\int_a^b f(x)\,dx$ *yakınsaktır.*
3. $r = +\infty$ *ve* $p \ge 1$ *ise* $\int_a^b f(x)\,dx$ *ıraksaktır.*

Tekil nokta b ise aynı sonuçlar $\lim_{x \to b^-} (b-x)^p f(x) = r$ *limitiyle geçerlidir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$g(x) = \dfrac{1}{(x-a)^p}$ *alalım.* g, $(a,b]$ *üzerinde sürekli ve pozitiftir ve* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = (x-a)^p f(x)$ *olduğundan* $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = r$*'dir.* $\int_a^b g$ *integrali* $p<1$ *için yakınsak,* $p \geq 1$ *için ıraksaktır (Teorem 17.1). Üç şık, limit karşılaştırma testinin (Teorem 17.5) üç şıkkından sırasıyla elde edilir. Tekil nokta* b *ise* $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^p}$ *alınır.* ■

Teoremin kapsamadığı iki durum vardır: $r = 0$ ve $p \geq 1$ ile $r = +\infty$ ve $p < 1$. Bu durumlarda seçilen p karar vermeye yetmez; başka bir p ya da başka bir karşılaştırma fonksiyonu denenir.

Dört adımda tekil noktada yakınsaklık

1. **Tekil noktaları bul.** Paydayı sıfırlayan ya da fonksiyonu sınırsız yapan noktalar belirlenir; limit sonlu çıkıyorsa nokta tekil değildir.
2. **Parçala.** Aralık, her parçada tekil nokta yalnız bir uçta kalacak biçimde bölünür.
3. **İşareti sabitle.** Parçada $f \leq 0$ ise $-f$ ile, işaret değişiyorsa $|f|$ ile çalışılır.
4. **Kuvveti bul.** $(x-a)^p f(x)$ limitini (sağ uçta $(b-x)^p f(x)$) sonlu ve pozitif yapan p aranır. $p<1$ ise parça yakınsak, $p \geq 1$ ise ıraksaktır; bütün parçalar yakınsaksa integral yakınsaktır.

Örnek 17.5 (Kuvvet Testiyle Yakınsaklık). $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^2-1}}$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm.
Tekil nokta. $x \to 1^+$ iken $x^2-1 \to 0^+$ ve $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}} \to +\infty$ olur; tekil nokta sol uç 1'dir. Fonksiyon $(1,2]$ üzerinde pozitiftir.
Kuvvet. $x^2-1 = (x-1)(x+1)$ olduğundan payda $(x-1)^{1/4}(x+1)^{1/4}$ biçimindedir; $p = \dfrac{1}{4}$ alınır:

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt[4]{x+1}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Sonuç. $r = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ sonlu ve pozitiftir, $p = \dfrac{1}{4} < 1$'dir. Kuvvet testi (Sonuç 17.1) gereği integral yakınsaktır. ■

Örnek 17.6 (Tekil Noktada Iraksak İntegral). $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\,dx$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm.
Tekil nokta. $x \to 1^+$ iken $\ln x \to 0^+$ ve $\sqrt{x} \to 1$ olduğundan $\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x} \to +\infty$ olur; tekil nokta sol uç 1'dir. Fonksiyon $(1,3]$ üzerinde pozitiftir.
Kuvvet. $\ln 1 = 0$ olduğundan türev tanımı gereği

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = (\ln x)'\Big|_{x=1} = 1$$

olur; yani 1 yakınında $\ln x$, $x-1$ gibi davranır. $p = 1$ alınır:

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\cdot \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x}\cdot \frac{x-1}{\ln x} = 1.$$

Sonuç. $r = 1$ sonlu ve pozitiftir, $p = 1 \geq 1$'dir. Kuvvet testi (Sonuç 17.1) gereği integral ıraksaktır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 17.7 (Limitin Sıfır Olduğu Durum). $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve değerini bulunuz.

Çözüm.
Tekil nokta ve işaret. $x \to 0^+$ iken $\ln x \to -\infty$ olur; tekil nokta sol uç 0'dır. $(0,1]$ üzerinde $\ln x \le 0$ olduğundan $-\ln x \ge 0$ fonksiyonuyla çalışalım.
Kuvvet. Her $q > 0$ için $\lim\limits_{x\to 0^+} x^q \,|\ln x\,| = 0$ olur (bkz. Analiz 2). Dolayısıyla limiti sonlu ve pozitif yapan bir p yoktur: $p > 0$ için limit 0, $p \le 0$ için $+\infty$'dur. $p = \dfrac{1}{2}$ alalım:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/2}\,(-\ln x) = 0.$$

$r = 0$ ve $p = \dfrac{1}{2} < 1$ olduğundan kuvvet testinin ikinci şıkkı (Sonuç 17.1) gereği $\displaystyle\int_0^1 (-\ln x)\,dx$ yakınsaktır; lineerlik gereği $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ de yakınsaktır.
Değer. $(t\ln t - t)' = \ln t$ olduğundan $0 < x < 1$ için

$$\int_x^1 \ln t\,dt = \Big[\,t\ln t - t\,\Big]_x^1 = -1 - x\ln x + x$$

olur. $x \to 0^+$ iken $x\ln x \to 0$ olduğundan

$$\int_0^1 \ln x\,dx = -1$$

bulunur. Logaritma sıfırda sınırsızdır, ama her kuvvet fonksiyonundan yavaş büyür; bu yüzden integrali yakınsar. ■

17.7 Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık

Karşılaştırma testleri negatif olmayan fonksiyonlar içindir. İşaret değiştiren fonksiyonlarda, serilerde ve I. tip integrallerde olduğu gibi (Tanım 16.1), mutlak değerin integraline bakılır. f, $[x,b]$ üzerinde integrallenebilirse $|\,f\,|$ de integrallenebilirdir (bkz. Analiz 2); dolayısıyla aşağıdaki tanım anlamlıdır.

Tanım 17.3 (İkinci Tipte Mutlak ve Şartlı Yakınsaklık). $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ her $x \in (a,b)$ için $[x,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun ve tekil nokta a olsun. $\displaystyle\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$ yakınsaksa $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ integrali **mutlak yakınsaktır** denir. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ yakınsak, ama $\displaystyle\int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$ ıraksaksa integral **şartlı yakınsaktır** denir. Tekil nokta b ise tanım aynıdır.

Yani mutlak yakınsaklıkta integral, pozitif ve negatif alanlar birbirini götürmese bile yakınsar; şartlı yakınsaklıkta yakınsaklığı sağlayan tam da bu götürmedir.

Teorem 17.6 (Mutlak Yakınsak İntegral Yakınsaktır). *$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ integrali (tekil nokta a) mutlak yakınsaksa yakınsaktır ve*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |\,f(x)\,|\,dx$$

olur.

İspat.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\int_a^b |\, f \,|$ yakınsak olduğundan Cauchy kriteri (Teorem 17.2) gereği öyle bir $\delta \in (0, b-a]$ vardır ki $a < x_1 < x_2 < a + \delta$ iken $\int_{x_1}^{x_2} |\, f(t) \,| dt < \varepsilon$ olur. İntegraller için üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 2) ile

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt \right| \leq \int_{x_1}^{x_2} |\, f(t) \,| dt < \varepsilon$$

bulunur. Cauchy koşulu f için de sağlanır; aynı kriter gereği $\int_a^b f$ yakınsaktır.

Eşitsizlik için her $x \in (a, b)$ üzerinde $\left| \int_x^b f(t)\, dt \right| \leq \int_x^b |\, f(t) \,| dt$ yazılır ve $x \to a^+$ alınır; mutlak değer sürekli olduğundan ve limit sıralamayı koruduğundan istenen elde edilir. ■

Teoremin uygulamadaki anlamı şudur: $|\, f \,|$ negatif olmayan bir fonksiyondur, dolayısıyla karşılaştırma ve kuvvet testleri ona uygulanabilir; $\int |\, f \,|$ yakınsak çıkarsa $\int f$ de yakınsaktır. Aşağıdaki problemde hem birden çok tekil nokta hem de işaret sorunu vardır.

Örnek 17.8 (İki Tekil Noktalı İntegral). $\int_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt[5]{x^3 - x}}$ genelleştirilmiş integrali yakınsak mıdır?

Çözüm.
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3 - x}}$ yazalım.
Tekil noktalar. $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ ifadesi $-1, 0$ ve 1'de sıfırlanır. $[0, 2]$ aralığında 0 ve 1 vardır; bu noktalara yaklaşırken $|\, f(x) \,| \to +\infty$ olur. Tekil noktalar sol uç 0 ve iç nokta 1'dir.
Parçalama. Her parçada tekil nokta yalnız bir uçta kalsın diye $(0, 1)$ aralığını $\dfrac{1}{2}$'den bölelim:

$$\int_0^2 f = \underbrace{\int_0^{1/2} f}_{I_1} + \underbrace{\int_{1/2}^{1} f}_{I_2} + \underbrace{\int_1^2 f}_{I_3}.$$

I_1 integralinde tekil nokta sol uç 0, I_2 integralinde sağ uç 1, I_3 integralinde sol uç 1'dir.
İşaret. $0 < x < 1$ için $x^3 - x = -x(1-x)(1+x) < 0$ olduğundan $f(x) < 0$'dır ve

$$|\, f(x) \,| = \frac{1}{\sqrt[5]{x - x^3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x(1-x)(1+x)}}$$

olur. $1 < x \leq 2$ için $x^3 - x > 0$ ve $f(x) > 0$'dır.
I_1. $p = \dfrac{1}{5}$ ile

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1/5} |\, f(x) \,| = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[5]{(1-x)(1+x)}} = 1$$

olur. $r = 1$ ve $p = \dfrac{1}{5} < 1$ olduğundan kuvvet testi (Sonuç 17.1) gereği $\int_0^{1/2} |\, f \,|$ yakınsaktır; I_1 mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır (Teorem 17.6).
I_2. Tekil nokta sağ uçtadır; $p = \dfrac{1}{5}$ ile

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)^{1/5} |\, f(x) \,| = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt[5]{x(1+x)}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$$

olur. $r = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}}$ sonlu ve pozitif, $p < 1$ olduğundan I_2 mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

I_3. Bu parçada $f > 0$'dır; $p = \dfrac{1}{5}$ ile

$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{1/5} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt[5]{x(x+1)}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$$

olur ve I_3 yakınsaktır.

Sonuç. Üç parça da yakınsak olduğundan $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3-x}}$ integrali yakınsaktır (Tanım 17.2). ■

Şartlı yakınsak II. tip integraller de vardır; tekil nokta yakınında hızla salınan fonksiyonlar bunun tipik kaynağıdır.

Örnek 17.9 (Tekil Noktada Şartlı Yakınsak İntegral). $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx$ integralinin şartlı yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,1]$ üzerinde süreklidir. $x_k = \dfrac{1}{\pi/2 + 2k\pi}$ noktalarında $f(x_k) = \dfrac{1}{x_k} \to +\infty$ olduğundan 0 tekil noktadır.

Dönüşüm. $0 < x < 1$ olsun. $[x,1]$ üzerinde $s = \dfrac{1}{t}$ değişken değiştirmesi yapalım; $ds = -\dfrac{dt}{t^2}$ olur, $s = x$ iken $t = \dfrac{1}{x}$ ve $s = 1$ iken $t = 1$'dir. Belirli integralde değişken değiştirme (bkz. Analiz 2) ile

$$\int_x^1 \frac{1}{s}\sin\frac{1}{s}\,ds = \int_{1/x}^1 t\sin t\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^{1/x} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

bulunur. Aynı hesap mutlak değerle yinelenirse

$$\int_x^1 \left|\frac{1}{s}\sin\frac{1}{s}\right| ds = \int_1^{1/x} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$$

elde edilir.

Yakınsaklık. $x \to 0^+$ iken $\dfrac{1}{x} \to +\infty$ olur. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ integrali şartlı yakınsaktır (Örnek 16.8). Yakınsak olduğundan birinci eşitliğin sağ yanının limiti vardır; $\displaystyle\int_0^1 f$ yakınsaktır.

Mutlak yakınsaklık yok. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ ıraksaktır ve integrali alınan fonksiyon negatif değildir; dolayısıyla ikinci eşitliğin sağ yanı $x \to 0^+$ iken $+\infty$'a gider (Teorem 16.2). $\displaystyle\int_0^1 |f|$ ıraksaktır.

İntegral yakınsak ama mutlak yakınsak değildir; şartlı yakınsaktır. ■

17.8 Tekil Noktada Cauchy Temel Değeri

İç noktada tekil bir integralde soldan ve sağdan yaklaşma birbirinden bağımsızdır. İki yaklaşma aynı hızla, simetrik yapılırsa I. tipteki temel değerin (Tanım 15.3) karşılığı elde edilir.

Tanım 17.4 (Tekil Noktada Cauchy Temel Değeri). $c \in (a,b)$ olsun ve $f : [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu c'yi içermeyen her kapalı alt aralıkta integrallenebilir olsun.

$$\text{p.v.}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right]$$

limiti var ve sonluysa bu sayıya $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ integralinin **Cauchy temel değeri** denir.

Yani temel değerde tekil noktanın iki yanından eşit uzunlukta birer parça atılır ve bu parçalar aynı anda küçültülür. Bu, tekil noktanın solundaki ve sağındaki sonsuz alanların birbirini götürmesine izin verir.

Önerme 17.2 (Yakınsak İkinci Tip İntegralin Temel Değeri). *$c \in (a,b)$ tekil noktası olan $\int_a^b f(x)\,dx$ integrali yakınsaksa Cauchy temel değeri de vardır ve integralin değerine eşittir.*

> ***İspat.***
> *İntegral yakınsak olduğundan $\lim_{x\to c^-}\int_a^x f$ ve $\lim_{y\to c^+}\int_y^b f$ limitleri vardır ve toplamları integralin değeridir (Tanım 17.2). $\varepsilon \to 0^+$ iken $c-\varepsilon \to c^-$ ve $c+\varepsilon \to c^+$ olduğundan köşeli parantezdeki iki terim sırasıyla bu iki limite yakınsar; toplamın limiti, limitlerin toplamıdır.* ■

Önermenin tersi doğru değildir.

Örnek 17.10 (Temel Değeri Olan Iraksak İkinci Tip İntegral). p.v. $\int_{-1}^{2} \dfrac{dx}{x}$ değerini bulunuz. $\int_{-1}^{2} \dfrac{dx}{x}$ integrali yakınsak mıdır?

> **Çözüm.**
> Tekil nokta aralığın içindeki 0'dır.
> **İntegral.** $\int_0^2 \dfrac{dx}{x}$ bir kuvvet integralidir ve $p=1$ olduğundan ıraksaktır (Teorem 17.1). Parçalardan biri ıraksak olduğundan $\int_{-1}^{2} \dfrac{dx}{x}$ ıraksaktır.
> **Temel değer.** $0<\varepsilon<1$ için $(\ln|\,x\,|)' = \dfrac{1}{x}$ kullanılarak
>
> $$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \Big[\ln|\,x\,|\Big]_{-1}^{-\varepsilon} = \ln\varepsilon,$$
> $$\int_{\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x} = \Big[\ln x\Big]_{\varepsilon}^{2} = \ln 2 - \ln\varepsilon$$
>
> bulunur. İki parçanın toplamı her ε için $\ln 2$'dir; sonsuza giden $\ln\varepsilon$ terimleri birbirini götürür. Dolayısıyla
>
> $$\text{p.v.}\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln 2 = \ln 2.$$
>
> Kesim simetrik yapılmazsa sonuç değişir: sağdan 2ε kadar atılırsa
>
> $$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{2\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x} = \ln\varepsilon + \ln 2 - \ln(2\varepsilon) = 0$$
>
> olur. Yakınsak bir integralde böyle bir bağımlılık olamazdı. ■

17.9 Üçüncü Tip Genelleştirilmiş İntegraller

Bir integralde hem aralık sınırsız hem de fonksiyon bazı noktalarda sınırsız olabilir. Böyle bir integral, I. tip ve II. tip integrallerin toplamı olarak ele alınır.

Tanım 17.5 (Üçüncü Tip Genelleştirilmiş İntegral). $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $[x,y]\subset(a,+\infty)$ aralığında integrallenebilir ve a noktası f'nin tekil noktası olsun. $b>a$ olmak üzere $\int_a^b f(x)\,dx$ (II. tip) ve $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ (I. tip) integrallerinin **ikisi de** yakınsaksa $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ integrali **yakınsaktır** denir ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

tanımlanır. İki integralden en az biri ıraksaksa $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **ıraksaktır** denir.

Daha genel olarak aralığı sınırsız olan ve sonlu sayıda tekil noktası bulunan bir integral, her parçada tek bir sorun (sonsuz bir uç ya da tek uçta bir tekil nokta) kalacak biçimde sonlu sayıda parçaya ayrılır. Bütün parçalar yakınsaksa integral yakınsaktır ve değeri parçaların toplamıdır; parçalardan en az biri ıraksaksa ıraksaktır. Bu türden integrallere **III. tip genelleştirilmiş integral** denir.

Yani III. tip yeni bir limit kavramı getirmez; her sorun ayrı bir parçaya hapsedilir ve her parça kendi tipinin testleriyle incelenir. Tanım b seçimine bağlı değildir: $b < b'$ ise $\displaystyle\int_a^{b'} f = \int_a^{b} f + \int_b^{b'} f$ ve $\displaystyle\int_b^{+\infty} f = \int_b^{b'} f + \int_{b'}^{+\infty} f$ olduğundan yakınsaklık da toplam da aynı kalır.

Aralığın bütün doğru olması integrali III. tip yapmaz. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ integralinde (Alıştırma 15.4) fonksiyon her noktada sınırlıdır; bu bir I. tip integraldir.

Örnek 17.11 (Tekil Noktası Yüzünden Iraksayan İntegral). $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ integrali yakınsak mıdır?

Çözüm.
$x \to 0$ iken $\dfrac{1}{x^2} \to +\infty$ olur; aralık iki yönde sınırsızdır ve içinde 0 tekil noktası vardır. Her parçada tek sorun kalsın diye integrali dört parçaya ayıralım:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Üçüncü parça, tekil noktası 0 olan bir kuvvet integralidir ve $p = 2 \geq 1$ olduğundan ıraksaktır (Teorem 17.1). Parçalardan biri ıraksak olduğundan $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ ıraksaktır.

Sonsuzdaki parçalar yakınsaktır: $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$ (Teorem 15.2). Iraksaklığın tek kaynağı tekil noktadır. ■

Örnek 17.12 (Yakınsak Bir Üçüncü Tip İntegral). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz ve değerini bulunuz.

Çözüm.
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ fonksiyonu $(0, +\infty)$ üzerinde sürekli ve pozitiftir. $x \to 0^+$ iken $f(x) \to +\infty$ olduğundan 0 tekil noktadır; aralık da sınırsızdır. $b = 1$ ile iki parçaya ayıralım.

Tekil nokta yakınında. $p = \dfrac{1}{2}$ ile

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/2} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$$

olur. $p < 1$ olduğundan $\displaystyle\int_0^{1} f$ yakınsaktır (Sonuç 17.1).

Sonsuzda. $p = \dfrac{3}{2}$ ile

$$\lim_{x\to +\infty} x^{3/2} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $p > 1$ olduğundan $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ yakınsaktır (Sonuç 16.1). İki parça da yakınsak olduğundan integral yakınsaktır.

Değer. $x = t^2$ $(t > 0)$ değişken değiştirmesiyle $dx = 2t\,dt$ ve $\sqrt{x} = t$ olur. $0 < \varepsilon < 1 < b$ için

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{1} \frac{2\,dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\sqrt{\varepsilon},$$

$$\int_{1}^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \int_{1}^{\sqrt{b}} \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\arctan\sqrt{b} - \frac{\pi}{2}$$

bulunur. $\varepsilon \to 0^+$ iken $\arctan\sqrt{\varepsilon} \to 0$ ve $b \to +\infty$ iken $\arctan\sqrt{b} \to \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan iki parçanın değeri de $\dfrac{\pi}{2}$'dir:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

■

17.10 Alıştırmalar

Alıştırma 17.1 (Sağ Ucu Tekil Köklü İntegral). $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{(3-x)\sqrt{2-x}}\,dx$ integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.

$f(x) = \dfrac{x^2}{(3-x)\sqrt{2-x}}$ yazalım. $[1,2]$ üzerinde $3 - x \geq 1$ olduğundan bu çarpan sorun çıkarmaz. $x \to 2^-$ iken $\sqrt{2-x} \to 0^+$ ve $f(x) \to +\infty$ olur; tek tekil nokta sağ uç 2'dir. Fonksiyon $[1,2)$ üzerinde pozitiftir.

$p = \dfrac{1}{2}$ ile

$$\lim_{x\to 2^-} (2-x)^{1/2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{3-x} = 4$$

olur. $r = 4$ sonlu ve pozitif, $p = \dfrac{1}{2} < 1$ olduğundan kuvvet testi (Sonuç 17.1) gereği integral yakınsaktır.

■

Alıştırma 17.2 (İki Ucu Tekil Arktanjantlı İntegral). $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^{3/2}\sqrt[3]{1-x}}\,dx$ integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.

$f(x) = \dfrac{\arctan x}{x^{3/2}\sqrt[3]{1-x}}$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde sürekli ve pozitiftir. Kuşkulu noktalar 0 ve 1'dir; integrali $\dfrac{1}{2}$'den bölelim.

Sol uç. $\arctan 0 = 0$ olduğundan türev tanımı gereği

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = (\arctan x)'\Big|_{x=0} = 1$$

olur. $p = \dfrac{1}{2}$ ile

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/2} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Bu, 0 yakınında $f(x)$'in $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ gibi büyüdüğünü, yani 0'ın gerçekten tekil olduğunu da gösterir. $p<1$ olduğundan $\displaystyle\int_0^{1/2} f$ yakınsaktır.

Sağ uç. $x\to 1^-$ iken $f(x)\to+\infty$ olur. $p=\dfrac{1}{3}$ ile

$$\lim_{x\to 1^-}(1-x)^{1/3}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\arctan x}{x^{3/2}}=\frac{\pi}{4}$$

bulunur. $p<1$ olduğundan $\displaystyle\int_{1/2}^{1} f$ yakınsaktır.

İki parça da yakınsak olduğundan integral yakınsaktır. ■

Alıştırma 17.3 (Görünürde Tekil Bir Uç). $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x}{\sin x}\,dx$ integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
$f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ fonksiyonu $(0,\pi)$ üzerinde sürekli ve pozitiftir; payda iki uçta da sıfırlanır.

Sol uç. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sin x}=1$ olduğundan f, 0 yakınında sınırlıdır; 0 tekil nokta değildir ve $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f$ sıradan bir integraldir (Önerme 17.1).

Sağ uç. $x\to\pi^-$ iken $\sin x\to 0^+$ ve $x\to\pi$ olduğundan $f(x)\to+\infty$ olur; π tekil noktadır. $\sin x=\sin(\pi-x)$ özdeşliği ve $p=1$ ile

$$\lim_{x\to\pi^-}(\pi-x)f(x)=\lim_{x\to\pi^-}x\cdot\frac{\pi-x}{\sin(\pi-x)}=\pi$$

bulunur. $r=\pi$ sonlu ve pozitif, $p=1\geq 1$ olduğundan kuvvet testi (Sonuç 17.1) gereği $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} f$ ıraksaktır.

Parçalardan biri ıraksak olduğundan integral ıraksaktır. ■

Alıştırma 17.4 (Tekil Noktada Iraksak Trigonometrik İntegral). $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\sin\theta}}$ integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
$\theta\to(\pi/2)^-$ iken $1-\sin\theta\to 0^+$ olur; tekil nokta sağ uç $\dfrac{\pi}{2}$'dir. Fonksiyon $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ üzerinde pozitiftir.

Paydanın büyüklüğü. $u=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ yazalım. $\sin\theta=\cos u$ ve $1-\cos u=2\sin^2\dfrac{u}{2}$ olduğundan, $0<u\leq\dfrac{\pi}{2}$ için $\sin\dfrac{u}{2}>0$ olduğu da kullanılarak

$$\sqrt{1-\sin\theta}=\sqrt{2}\sin\frac{u}{2}$$

bulunur.

Kuvvet. $p=1$ ile

$$\lim_{\theta\to(\pi/2)^-}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{1}{\sqrt{1-\sin\theta}}=\lim_{u\to 0^+}\frac{u}{\sqrt{2}\sin\frac{u}{2}}=\sqrt{2}$$

olur; çünkü $\dfrac{u}{\sin(u/2)}=2\cdot\dfrac{u/2}{\sin(u/2)}\to 2$'dir.

Sonuç. $r=\sqrt{2}$ sonlu ve pozitif, $p=1\geq 1$ olduğundan kuvvet testi (Sonuç 17.1) gereği integral ıraksaktır. Kök işareti yanıltmamalıdır: $1-\sin\theta$ ifadesi $\dfrac{\pi}{2}$'de ikinci mertebeden sıfırlandığından karekökü birinci mertebeden sıfırlanır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 17.5 (Tek Kuvvetin Temel Değeri). p.v. $\displaystyle\int_{-1}^{75} \frac{dx}{x^3}$ değerini bulunuz.

Çözüm.
Tekil nokta aralığın içindeki 0'dır. $\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)' = \dfrac{1}{x^3}$ olduğundan $0 < \varepsilon < 1$ için

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{-\varepsilon} = -\frac{1}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2},$$
$$\int_{\varepsilon}^{75} \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{\varepsilon}^{75} = -\frac{1}{11250} + \frac{1}{2\varepsilon^2}$$

olur ($2 \cdot 75^2 = 11250$). Toplamda $\dfrac{1}{2\varepsilon^2}$ terimleri birbirini götürür ve toplam her ε için aynı sayıdır:

$$\text{p.v.}\int_{-1}^{75} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{11250} = \frac{2812}{5625}.$$

Sonuç şöyle de görülür: $\dfrac{1}{x^3}$ tek fonksiyon olduğundan $[-1,-\varepsilon]$ ve $[\varepsilon,1]$ üzerindeki integraller birbirini götürür; geriye $\displaystyle\int_{1}^{75} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{11250}$ kalır. İntegralin kendisi ıraksaktır, çünkü $\displaystyle\int_{0}^{75} \frac{dx}{x^3}$ kuvvet integralinde $p = 3 \geq 1$'dir. ■

Alıştırma 17.6 (Temel Değeri Olmayan İntegral). p.v. $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{dx}{x^4}$ temel değerinin var olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm.
Tekil nokta 0'dır. $\left(-\dfrac{1}{3x^3}\right)' = \dfrac{1}{x^4}$ olduğundan $0 < \varepsilon < 2$ için

$$\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{-2}^{-\varepsilon} = \frac{1}{3\varepsilon^3} - \frac{1}{24},$$
$$\int_{\varepsilon}^{3} \frac{dx}{x^4} = \left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{\varepsilon}^{3} = -\frac{1}{81} + \frac{1}{3\varepsilon^3}$$

olur. Bu kez sonsuza giden terimler aynı işaretlidir ve toplanır:

$$\int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^4} + \int_{\varepsilon}^{3} \frac{dx}{x^4} = \frac{2}{3\varepsilon^3} - \frac{35}{648}.$$

$\varepsilon \to 0^+$ iken bu ifade $+\infty$'a gider; temel değer yoktur.
Fark şuradadır: $\dfrac{1}{x^4}$ çift ve pozitiftir, tekil noktanın iki yanındaki alanların ikisi de $+\infty$'dur ve birbirini götürmez. Simetrik kesim yalnız zıt işaretli sonsuzlukları dengeleyebilir. ■

Alıştırma 17.7 (Üstel Çarpanlı Üçüncü Tip İntegral). $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\,dx$ integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
$f(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$ fonksiyonu $(1,+\infty)$ üzerinde sürekli ve pozitiftir. $x \to 1^+$ iken payda sıfıra gider ve $f(x) \to +\infty$ olur; 1 tekil noktadır ve aralık sınırsızdır. İntegral III. tiptir; $b = 2$ ile ayıralım.
Tekil nokta yakınında. $(x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2$ olduğundan payda $(x-1)^{2/3}(x+1)^{2/3}$ biçimindedir. $p = \dfrac{2}{3}$ ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{2/3}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^{-x}}{(x+1)^{2/3}}=\frac{1}{e\sqrt[3]{4}}$$

olur. Limit sonlu ve pozitif, $p=\dfrac{2}{3}<1$ olduğundan $\displaystyle\int_1^2 f$ yakınsaktır (Sonuç 17.1).
Sonsuzda. $x\geq 2$ için $x^2-1\geq 3$ ve $\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\geq\sqrt[3]{9}>1$ olduğundan

$$0<f(x)<e^{-x}$$

olur. $\displaystyle\int_2^{+\infty}e^{-x}\,dx$ yakınsaktır (Örnek 15.6); karşılaştırma testi (Teorem 16.3) gereği $\displaystyle\int_2^{+\infty}f$ yakınsaktır.
İki parça da yakınsak olduğundan integral yakınsaktır. ■

Alıştırma 17.8 (Bir Parçası Iraksak Üçüncü Tip İntegral). $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}\,dx$ integralinin yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,+\infty)$ üzerinde süreklidir. $x_k=\dfrac{1}{2k\pi}$ noktalarında $f(x_k)=\sqrt{2k\pi}\to+\infty$ olduğundan 0 tekil noktadır; aralık da sınırsızdır. $b=1$ ile ayıralım.
Tekil nokta yakınında. $(0,1]$ üzerinde f işaret değiştirir; mutlak değere bakalım:

$$|\,f(x)\,|\leq\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^{1/2}}$ yakınsaktır ($p=\dfrac{1}{2}<1$, Teorem 17.1). Karşılaştırma testi (Teorem 17.4) gereği $\displaystyle\int_0^1|\,f\,|$ yakınsaktır; $\displaystyle\int_0^1 f$ mutlak yakınsaktır, dolayısıyla yakınsaktır (Teorem 17.6).
Sonsuzda. $x\geq 1$ için $0<\dfrac{1}{x}\leq 1<\dfrac{\pi}{2}$ olur. Kosinüs $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ üzerinde azalan olduğundan $\cos\dfrac{1}{x}\geq\cos 1>0$ ve

$$f(x)\geq\frac{\cos 1}{\sqrt{x}}>0$$

bulunur. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1/2}}$ ıraksaktır ($p=\dfrac{1}{2}\leq 1$, Teorem 15.2); sabit katı da ıraksaktır. Karşılaştırma testi (Teorem 16.3) gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty}f$ ıraksaktır.
Sonuç. Parçalardan biri ıraksak olduğundan integral ıraksaktır. Tekil nokta burada zararsızdır; ıraksaklığın kaynağı, $x\to+\infty$ iken $\cos\dfrac{1}{x}\to 1$ olması ve fonksiyonun $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ gibi yavaş sönmesidir. ■

Genelleştirilmiş integraller yalnız alan hesaplamaya yaramaz; yeni fonksiyonlar tanımlamanın da yoludur. Bir parametreye bağlı, hem sonsuzda hem tekil noktada yakınsaklığı bu bölümün testleriyle denetlenen iki ünlü integrali Euler İntegralleri: Gamma ve Beta Fonksiyonları bölümünde inceliyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

18. Euler İntegralleri: Gamma ve Beta Fonksiyonları

Faktöriyel yalnız doğal sayılar için tanımlıdır: $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. Bu tanımdan $\left(\frac{1}{2}\right)!$ gibi bir ifadeye anlam vermek mümkün değildir. Euler bu boşluğu bir integralle doldurmuştur. $x^n e^{-x}$ fonksiyonuna art arda kısmi integrasyon uygulandığında (bkz. Analiz 2) üs her adımda bir azalır ve sonunda

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$$

eşitliğine varılır. Sol yandaki integralde n'nin doğal sayı olması gerekmez; üs herhangi bir reel sayı olabilir. Böylece faktöriyel, doğal sayılardan bir aralığa taşınmış olur.
Bu bölümde parametre içeren iki genelleştirilmiş integrali inceliyoruz: **Gamma** ve **Beta** fonksiyonları. İkisine birden **Euler integralleri** denir. Önce önceki iki bölümün testleriyle bu integrallerin parametrelerin hangi değerlerinde yakınsak olduğunu belirliyoruz, sonra temel özelliklerini çıkarıyoruz. Bölümün ikinci yarısında bu iki fonksiyonun bir hesap aracı olduğunu görüyoruz: ilkeli temel fonksiyonlarla yazılamayan ya da yazılması zahmetli olan pek çok belirli integral, bir değişken değiştirmeyle Gamma ya da Beta fonksiyonuna indirgenir.

18.1 Gamma Fonksiyonu

Faktöriyeli veren integralde üssü n yerine $\alpha - 1$ ile gösterelim.

Tanım 18.1 (Gamma Fonksiyonu). Her $\alpha > 0$ için

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$$

genelleştirilmiş integraliyle tanımlanan $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna **Gamma fonksiyonu** denir.

Yani $\Gamma(\alpha)$, $y = e^{-x}x^{\alpha-1}$ eğrisinin $[0, +\infty)$ üzerinde altında kalan alandır. İntegralin değişkeni x'tir; α ise integralden önce sabitlenen bir parametredir ve her α için ayrı bir eğri, dolayısıyla ayrı bir alan vardır. Üsteki -1 kayması bir alışkanlıktır; bu yüzden faktöriyelle bağlantı $\Gamma(n+1) = n!$ biçiminde çıkacaktır.
Tanımın anlamlı olması için integralin yakınsak olması gerekir. İntegralde iki ayrı sorun vardır: aralık sınırsızdır ve $\alpha < 1$ ise $x \to 0^+$ iken $x^{\alpha-1} \to +\infty$ olur. Dolayısıyla integral genel olarak III. tiptir (Tanım 17.5) ve iki sorun birbirinden ayrılarak incelenir.

Teorem 18.1 (Gamma İntegralinin Yakınsaklığı). *$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\, dx$ integrali $\alpha > 0$ için yakınsak, $\alpha \le 0$ için ıraksaktır.*

> ***İspat.***
> *$f(x) = e^{-x}x^{\alpha-1}$ yazalım; f, $(0, +\infty)$ üzerinde sürekli ve pozitiftir. İntegrali $x = 1$ noktasında ikiye ayıralım:*
>
> $$\Gamma_1 = \int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\, dx,$$
> $$\Gamma_2 = \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\, dx.$$
>
> *Tanım 17.5 gereği integral, ancak Γ_1 ve Γ_2 integrallerinin ikisi de yakınsaksa yakınsaktır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Γ_2 her $\alpha \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *ile karşılaştıralım:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{e^x} = 0.$$

Limitin gerekçesi şudur. $\alpha+1>0$ *ise üstel fonksiyon* x*'in her pozitif kuvvetinden hızlı büyür (bkz. Analiz 2).* $\alpha+1\le 0$ *ise* $x\ge 1$ *için* $0<x^{\alpha+1}\le 1$ *olduğundan* $0<x^{\alpha+1}e^{-x}\le e^{-x}$ *ve* $e^{-x}\to 0$ *olur.* $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ *yakınsaktır (Teorem 15.2,* $p=2$*). Limit* 0 *ve karşılaştırılan integral yakınsak olduğundan limit karşılaştırma testi (Teorem 16.4) gereği* Γ_2 *yakınsaktır.*
$\alpha \ge 1$ iken Γ_1. $\alpha-1\ge 0$ *olduğundan* f*,* $[0,1]$ *üzerinde süreklidir.* Γ_1 *sıradan bir Riemann integralidir; yakınsaklık sorusu yoktur.*
$0<\alpha<1$ iken Γ_1. $\alpha-1<0$ *olduğundan* $x\to 0^+$ *iken* $f(x)\to+\infty$ *olur;* Γ_1 *bir II. tip genelleştirilmiş integraldir.*

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$$

olur. Limit sonlu ve pozitiftir, üs ise $p = 1-\alpha < 1$*'dir; kuvvet testi (Sonuç 17.1) gereği* Γ_1 *yakınsaktır.*
$\alpha<0$ iken Γ_1. $x\to 0^+$ *iken* $x^\alpha\to+\infty$ *ve* $e^{-x}\to 1$ *olduğundan*

$$\lim_{x\to 0^+} x\, f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha e^{-x} = +\infty$$

olur. Üs $p=1$*'dir; kuvvet testi (Sonuç 17.1) gereği* Γ_1 *ıraksaktır.*
$\alpha=0$ iken Γ_1. $0<x\le 1$ *için* $e^{-x}\ge e^{-1}$ *olduğundan*

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} \ge \frac{e^{-1}}{x} > 0$$

olur. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ *ıraksaktır (Teorem 17.1,* $p=1$*); pozitif bir sabitle çarpımı olan* $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x}\,dx$ *de ıraksaktır. Karşılaştırma testi (Teorem 17.4) gereği* Γ_1 *ıraksaktır.*
Sonuç. $\alpha>0$ *ise* Γ_1 *ve* Γ_2 *yakınsaktır; integral yakınsaktır.* $\alpha\le 0$ *ise* Γ_1 *ıraksaktır; integral ıraksaktır.* ■

İspat, ıraksaklığın nereden geldiğini de gösterir. Sonsuzdaki kuyruk e^{-x} çarpanı sayesinde her α için yakınsaktır; sorunu yalnız 0 yakınındaki $x^{\alpha-1}$ çarpanı çıkarır. Örneğin $\alpha=\frac{1}{2}$ için $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$ yakınsaktır, $\alpha=0$ için $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x\,e^x}$ ıraksaktır.

18.2 Gamma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

Gamma fonksiyonuyla yapılan hesapların neredeyse tamamı aşağıdaki beş özelliğe dayanır.

Teorem 18.2 (Gamma Fonksiyonunun Özellikleri). $\alpha>0$ *olsun.*

1. $\Gamma(\alpha)>0$*'dır.*
2. $\Gamma(1)=1$*'dir.*
3. $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$ *olur.*
4. *Her* $n\in\{0,1,2,\ldots\}$ *için* $\Gamma(n+1)=n!$ *olur.*
5. *Her* $t>0$ *için aşağıdaki integral yakınsaktır ve*

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}x^{\alpha-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{t^\alpha}$$

olur.

İspat.
$f(x)=e^{-x}x^{\alpha-1}$ *ve* Γ_1,Γ_2 *önceki ispattaki gibi olsun;* $\Gamma(\alpha)=\Gamma_1+\Gamma_2$*'dir. Tanım gereği*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\Gamma_1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx,$$

$$\Gamma_2 = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b f(x)\,dx$$

olur. $0 < \varepsilon < 1 < b$ *için* $\displaystyle\int_\varepsilon^b f = \int_\varepsilon^1 f + \int_1^b f$ *olduğundan,* $\varepsilon \to 0^+$ *ve* $b \to +\infty$ *limitleri birbirinden bağımsız alındığında* $\displaystyle\int_\varepsilon^b f(x)\,dx$ *integrali* $\Gamma(\alpha)$ *sayısına yaklaşır. Aşağıda "limite geçmek" bu anlamdadır.*

1. f *pozitif olduğundan her* $0 < \varepsilon < 1$ *için* $\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(x)\,dx \geq 0$ *ve dolayısıyla* $\Gamma_1 \geq 0$ *olur.* $x \in [1,2]$ *için* $e^{-x} \geq e^{-2}$*'dir.* $x^{\alpha-1}$ *fonksiyonu* $[1,2]$ *üzerinde monoton olduğundan en küçük değerini bir uçta alır;* $c = \min\{1, 2^{\alpha-1}\} > 0$ *dersek* $x^{\alpha-1} \geq c$ *olur. O hâlde her* $b \geq 2$ *için*

$$\int_1^b f(x)\,dx \geq \int_1^2 f(x)\,dx \geq c\,e^{-2}$$

ve limitte $\Gamma_2 \geq c\,e^{-2} > 0$ *bulunur. Sonuç olarak* $\Gamma(\alpha) = \Gamma_1 + \Gamma_2 > 0$*'dır.*
2. *Örnek 15.6 gereği* $(a = 0, t = 1)$

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \frac{e^0}{1} = 1.$$

3. *Kısmi integrasyon kuralı sınırlı kapalı aralıklar içindir (bkz. Analiz 2); bu yüzden önce* $0 < \varepsilon < b$ *için* $[\varepsilon, b]$ *üzerinde çalışalım.* $u = x^\alpha$, $dv = e^{-x}\,dx$ *seçimiyle* $du = \alpha x^{\alpha-1}\,dx$ *ve* $v = -e^{-x}$ *olur:*

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^b e^{-x}x^\alpha\,dx &= \Big[-x^\alpha e^{-x}\Big]_\varepsilon^b + \alpha\int_\varepsilon^b e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx \\ &= \varepsilon^\alpha e^{-\varepsilon} - b^\alpha e^{-b} + \alpha\int_\varepsilon^b e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx.\end{aligned}$$

Şimdi limite geçelim. $\alpha > 0$ *olduğundan* $\varepsilon \to 0^+$ *iken* $\varepsilon^\alpha \to 0$ *ve* $e^{-\varepsilon} \to 1$ *olur; yani* $\varepsilon^\alpha e^{-\varepsilon} \to 0$*. Üstel fonksiyon her pozitif kuvvetten hızlı büyüdüğünden (bkz. Analiz 2)* $b \to +\infty$ *iken* $b^\alpha e^{-b} \to 0$ *olur.* $\alpha + 1 > 0$ *ve* $\alpha > 0$ *olduğundan soldaki integral* $\Gamma(\alpha+1)$ *sayısına, sağdaki integral* $\Gamma(\alpha)$ *sayısına yaklaşır (Teorem 18.1). Böylece*

$$\Gamma(\alpha+1) = 0 - 0 + \alpha\,\Gamma(\alpha) = \alpha\,\Gamma(\alpha).$$

4. n *üzerinden tümevarım yapalım.* $n = 0$ *için* $\Gamma(1) = 1 = 0!$ *olur (2. özellik).* $\Gamma(n+1) = n!$ *olduğunu kabul edelim. 3. özellikte* $\alpha = n+1$ *alınırsa*

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\,\Gamma(n+1) = (n+1)\,n! = (n+1)!$$

bulunur.
5. $0 < \varepsilon < b$ *için* $[\varepsilon, b]$ *üzerinde* $y = tx$ *değişken değiştirmesini yapalım (bkz. Analiz 2).* $x = \dfrac{y}{t}$ *ve* $dx = \dfrac{dy}{t}$ *olur;* $x = \varepsilon$ *iken* $y = t\varepsilon$, $x = b$ *iken* $y = tb$*'dir.*

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^b e^{-tx}x^{\alpha-1}\,dx &= \int_{t\varepsilon}^{tb} e^{-y}\left(\frac{y}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{dy}{t} \\ &= \frac{1}{t^\alpha}\int_{t\varepsilon}^{tb} e^{-y}y^{\alpha-1}\,dy.\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$t>0$ olduğundan $\varepsilon\to 0^+$ iken $t\varepsilon\to 0^+$, $b\to+\infty$ iken $tb\to+\infty$ olur. Sağ yandaki integral bu limitlerde $\Gamma(\alpha)$ sayısına yaklaşır; öyleyse sol yanın da limiti vardır, yani integral yakınsaktır ve değeri $\dfrac{\Gamma(\alpha)}{t^{\alpha}}$ olur. ■

Üçüncü özelliğe **indirgeme bağıntısı** denir: Γ'nın $\alpha+1$ noktasındaki değeri, α noktasındaki değerinden bir çarpmayla bulunur. Bağıntı art arda uygulanırsa parametre her adımda bir azalır; bu yüzden Γ'yı $(0,1]$ aralığında bilmek her yerde bilmeye yeter. Örneğin

$$\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Dördüncü özellik, girişteki sorunun yanıtıdır: $\Gamma(n+1)=n!$ olduğundan Gamma fonksiyonu faktöriyelin reel sayılara genişletilmiş hâlidir; doğal sayılarda $\Gamma(n)=(n-1)!$ yazılır. Beşinci özellik ise üstel çarpanın e^{-x} yerine e^{-tx} olduğu integralleri doğrudan hesaplar.

Örnek 18.1 (Kuvvet ile Üstelin Çarpımı). $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^4e^{-2x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
İntegral, Teorem 18.2 içindeki 5. özelliğin kalıbındadır. $x^{\alpha-1}=x^4$ olduğundan $\alpha=5$, üstel çarpandan $t=2$ okunur:

$$\int_0^{+\infty} x^4e^{-2x}\,dx=\frac{\Gamma(5)}{2^5}=\frac{4!}{32}=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}.$$

Aynı sonuca dört kez kısmi integrasyon yaparak da varılır; Gamma fonksiyonu bu dört adımı tek satıra indirir. ■

18.3 Beta Fonksiyonu

İkinci Euler integrali iki parametrelidir ve sınırlı bir aralıkta alınır.

Tanım 18.2 (Beta Fonksiyonu). Her $x>0$ ve $y>0$ için

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

integraliyle tanımlanan iki değişkenli β fonksiyonuna **Beta fonksiyonu** denir.

Yani $\beta(x,y)$, $[0,1]$ aralığında t'nin bir kuvveti ile $1-t$'nin bir kuvvetinin çarpımının integralidir. İntegralin değişkeni t'dir; x ve y parametrelerdir. Burada aralık sınırlıdır, sorun yalnız uçlarda çıkabilir: $x<1$ ise $t\to0^+$ iken $t^{x-1}\to+\infty$, $y<1$ ise $t\to1^-$ iken $(1-t)^{y-1}\to+\infty$ olur. $x\geq1$ ve $y\geq1$ iken integral sıradan bir Riemann integralidir; öbür durumlarda II. tip genelleştirilmiş integraldir.

Teorem 18.3 (Beta İntegralinin Yakınsaklığı). *$x,y\in\mathbb{R}$ olsun. $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$ integrali $x>0$ ve $y>0$ ise yakınsaktır; $x\leq0$ ya da $y\leq0$ ise ıraksaktır.*

İspat.
$f(t)=t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ yazalım; f, $(0,1)$ üzerinde sürekli ve pozitiftir. İki uçtaki sorunu ayırmak için integrali $t=\frac{1}{2}$ noktasında bölelim:

$$I_1=\int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,$$

$$I_2=\int_{1/2}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Her parçada yalnız bir uç sorunludur; integral, ancak I_1 ve I_2 integrallerinin ikisi de yakınsaksa yakınsaktır.
I_1 yalnız $x > 0$ iken yakınsaktır. *$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde $1 - t \geq \frac{1}{2}$ olduğundan $(1-t)^{y-1}$ çarpanı her y için süreklidir ve $t \to 0^+$ iken 1'e yaklaşır. Dört durum vardır.*
$x \geq 1$. t^{x-1} de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde süreklidir; I_1 sıradan bir Riemann integralidir.
$0 < x < 1$. $t \to 0^+$ iken $f(t) \to +\infty$ olur; I_1 II. tiptir.

$$\lim_{t\to 0^+} t^{1-x} f(t) = \lim_{t\to 0^+} (1-t)^{y-1} = 1$$

olur. Limit sonlu ve pozitiftir, üs $p = 1 - x < 1$'dir; kuvvet testi (Sonuç 17.1) gereği I_1 yakınsaktır.
$x = 0$. Bu kez t ile çarpalım:

$$\lim_{t\to 0^+} t\, f(t) = \lim_{t\to 0^+} (1-t)^{y-1} = 1.$$

Limit sonlu ve pozitiftir, üs $p = 1$'dir; aynı test gereği I_1 ıraksaktır.
$x < 0$. $t \to 0^+$ iken $t^x \to +\infty$ olduğundan

$$\lim_{t\to 0^+} t\, f(t) = \lim_{t\to 0^+} t^x (1-t)^{y-1} = +\infty$$

olur. Üs $p = 1$'dir; kuvvet testi gereği I_1 yine ıraksaktır.
I_2 yalnız $y > 0$ iken yakınsaktır. *$0 < \delta < \frac{1}{2}$ için $s = 1 - t$ değişken değiştirmesini yapalım. $dt = -ds$ olur; $t = \frac{1}{2}$ iken $s = \frac{1}{2}$, $t = 1 - \delta$ iken $s = \delta$'dır:*

$$\int_{1/2}^{1-\delta} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \int_{\delta}^{1/2} s^{y-1}(1-s)^{x-1}\, ds.$$

Sağ yan, I_1 integralinde x ile y'nin yer değiştirmiş hâlidir. Az önce gösterilene göre $\delta \to 0^+$ iken sağ yanın sonlu limiti ancak $y > 0$ ise vardır; sol yanın limiti I_2 olduğundan iddia elde edilir.
Sonuç. *$x > 0$ ve $y > 0$ ise I_1 ve I_2 yakınsaktır; integral yakınsaktır. $x \leq 0$ ise I_1, $y \leq 0$ ise I_2 ıraksaktır; integral ıraksaktır.* ■

İspattaki $s = 1 - t$ dönüşümü iki parametrenin rolünü değiştirir. Aynı dönüşüm integralin tamamına uygulanırsa Beta fonksiyonunun simetrik olduğu görülür.

Önerme 18.1 (Beta Fonksiyonunun Simetrisi). *Her $x > 0$ ve $y > 0$ için $\beta(x, y) = \beta(y, x)$ olur.*

İspat.
$0 < a < b < 1$ olsun. $s = 1 - t$ değişken değiştirmesiyle $dt = -ds$ olur; $t = a$ iken $s = 1 - a$, $t = b$ iken $s = 1 - b$'dir:

$$\int_a^b t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \int_{1-b}^{1-a} s^{y-1}(1-s)^{x-1}\, ds.$$

$a \to 0^+$ ve $b \to 1^-$ iken sol yan $\beta(x, y)$ sayısına yaklaşır. Aynı anda $1 - b \to 0^+$ ve $1 - a \to 1^-$ olduğundan sağ yan $\beta(y, x)$ sayısına yaklaşır. ■

Beta fonksiyonunun ikinci bir yazılışı, trigonometrik integrallerle bağlantıyı kurar.

Önerme 18.2 (Beta Fonksiyonunun Trigonometrik Biçimi). *Her $x > 0$ ve $y > 0$ için*

$$\beta(x, y) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta\, d\theta$$

olur.

İspat.
$0 < a < b < 1$ olsun ve $\theta_a = \arcsin\sqrt{a}$, $\theta_b = \arcsin\sqrt{b}$ diyelim; $0 < \theta_a < \theta_b < \frac{\pi}{2}$ olur. $[\theta_a, \theta_b]$ üzerinde $t = \sin^2\theta$ değişken değiştirmesini yapalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} dt &= 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta, \\ t^{x-1} &= \sin^{2x-2}\theta, \\ (1-t)^{y-1} &= \cos^{2y-2}\theta. \end{aligned}$$

$\theta = \theta_a$ iken $t = a$, $\theta = \theta_b$ iken $t = b$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt &= \int_{\theta_a}^{\theta_b} \sin^{2x-2}\theta\cos^{2y-2}\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta \\ &= 2\int_{\theta_a}^{\theta_b} \sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta \end{aligned}$$

bulunur. $a \to 0^+$ ve $b \to 1^-$ iken sol yan $\beta(x,y)$ sayısına yaklaşır. arcsin *ve karekök sürekli olduğundan aynı anda $\theta_a \to 0^+$ ve $\theta_b \to (\frac{\pi}{2})^-$ olur; sağ yan iddiadaki integrale yaklaşır.* ■

$2x-1<0$ ya da $2y-1<0$ ise sağ yandaki trigonometrik integral de II. tiptir; ispat bu integralin yakınsak olduğunu da göstermektedir. Üsleri yeniden adlandırarak sinüs ve kosinüs kuvvetlerinin integralini doğrudan veren bir formül elde ederiz.

Sonuç 18.1 (Sinüs ve Kosinüs Kuvvetlerinin İntegrali). *$m > -1$ ve $n > -1$ reel sayılar olsun. O zaman*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m\theta\cos^n\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,\beta\!\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right)$$

olur.

İspat.
$x = \dfrac{m+1}{2}$ ve $y = \dfrac{n+1}{2}$ diyelim. $m > -1$ ve $n > -1$ olduğundan $x > 0$ ve $y > 0$'dır; ayrıca $2x-1 = m$ ve $2y-1 = n$ olur. Önerme 18.2 bu değerlerle

$$\beta\!\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^m\theta\cos^n\theta\,d\theta$$

verir; iki yan 2'ye bölünür. ■

18.4 Gamma ile Beta Arasındaki Bağıntı

Beta fonksiyonunun değerleri ayrıca hesaplanmaz; iki parametreli Beta fonksiyonu tek parametreli Gamma fonksiyonu cinsinden yazılır.

Teorem 18.4 (Gamma ile Beta Arasındaki Bağıntı). *Her $x > 0$ ve $y > 0$ için*

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

olur.

Bu bağıntının ispatı iki katlı integral gerektirir; bu yüzden bağıntıyı burada ispatsız kullanıyoruz. Parametreler doğal sayı olduğunda ise bağıntı yalnız kısmi integrasyonla doğrulanabilir.

Önerme 18.3 (Doğal Sayılarda Beta Fonksiyonu). *$m \geq 1$ ve $n \geq 1$ doğal sayılar olsun. O zaman*

$$\beta(m,n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
m ve n doğal sayı olduğunda $t^{m-1}(1-t)^{n-1}$ bir polinomdur; bütün integraller sıradan Riemann integralidir.
İndirgeme bağıntısı. *$m \geq 1$ ve $n \geq 2$ olsun. $u = (1-t)^{n-1}$, $dv = t^{m-1}\,dt$ seçimiyle $du = -(n-1)(1-t)^{n-2}\,dt$ ve $v = \dfrac{t^m}{m}$ olur:*

$$\beta(m,n) = \left[\frac{t^m(1-t)^{n-1}}{m}\right]_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 t^m(1-t)^{n-2}\,dt.$$

$m \geq 1$ olduğundan köşeli parantez $t=0$'da, $n-1 \geq 1$ olduğundan $t=1$'de sıfırdır. Kalan integralde üsler $m = (m+1)-1$ ve $n-2 = (n-1)-1$ biçimindedir; yani integral $\beta(m+1, n-1)$'dir. Böylece

$$\beta(m,n) = \frac{n-1}{m}\,\beta(m+1,n-1) \qquad (m \geq 1, n \geq 2)$$

elde edilir.
Tümevarım. *n üzerinden tümevarımla, formülün her $m \geq 1$ için doğru olduğunu gösterelim. $n = 1$ için*

$$\beta(m,1) = \int_0^1 t^{m-1}\,dt = \frac{1}{m} = \frac{(m-1)!\,0!}{m!}$$

olur. Formül bir $n \geq 1$ ve her $m \geq 1$ için doğru olsun. İndirgeme bağıntısı (n yerine $n+1$ yazılarak) ve tümevarım varsayımı (m yerine $m+1$ yazılarak)

$$\begin{aligned}\beta(m,n+1) &= \frac{n}{m}\,\beta(m+1,n)\\ &= \frac{n}{m}\cdot\frac{m!\,(n-1)!}{(m+n)!}\\ &= \frac{(m-1)!\,n!}{(m+n)!}\end{aligned}$$

verir; bu, formülün $n+1$ için yazılmış hâlidir. ■

Doğal sayılarda $\Gamma(k) = (k-1)!$ olduğundan önermedeki eşitliğin sağ yanı tam olarak $\dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ sayısıdır; Teorem 18.4 doğal sayı parametreler için böylece ispatlanmış olur. Örneğin $\beta(3,2) = \dfrac{2!\,1!}{4!} = \dfrac{1}{12}$'dir. Bağıntının en ünlü sonucu, Gamma fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ noktasındaki değeridir.

Sonuç 18.2 (Gamma Fonksiyonunun Yarımdaki Değeri). *$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$'dir.*

İspat.
Teorem 18.4 içinde $x = y = \frac{1}{2}$ alalım. $\Gamma(1) = 1$ olduğundan

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

olur. Öte yandan trigonometrik biçimde (Önerme 18.2) $x = y = \frac{1}{2}$ için iki üs de $2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 0$'dır:

$$\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Demek ki $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$'dir. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ olduğundan (Teorem 18.2) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ bulunur. ■

e^{-x^2} fonksiyonunun ilkeli temel fonksiyonlarla yazılamaz; buna karşın $[0,+\infty)$ üzerindeki integrali $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ yardımıyla tam olarak hesaplanır.

Sonuç 18.3 (Gauss İntegrali). *e^{-x^2} fonksiyonunun $[0,+\infty)$ üzerindeki integrali yakınsaktır ve*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olur.

İspat.
$0 < \varepsilon < b$ *olsun.* $[\varepsilon^2, b^2]$ *üzerinde tanımlı* $x = \sqrt{u}$ *değişken değiştirmesiyle* $dx = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$ *olur;* $u = \varepsilon^2$ *iken* $x = \varepsilon$, $u = b^2$ *iken* $x = b$*'dir:*

$$\int_\varepsilon^b e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\varepsilon^2}^{b^2} e^{-u}u^{-1/2}\,du.$$

Sağ yandaki integralin içindeki fonksiyon, $\alpha = \frac{1}{2}$ *için Gamma fonksiyonunu tanımlayan* $e^{-u}u^{\alpha-1}$ *fonksiyonudur.*
$\boldsymbol{\varepsilon \to 0^+}$ ***limiti.*** e^{-x^2} *fonksiyonu* $[0, b]$ *üzerinde sürekli olduğundan integrali alt sınırına sürekli bağlıdır (bkz. Analiz 2); sol yan* $\displaystyle\int_0^b e^{-x^2}\,dx$ *sayısına yaklaşır. Sağ yanda* $\varepsilon^2 \to 0^+$ *olur ve* $\alpha = \frac{1}{2} > 0$ *için* 0 *ucundaki integral yakınsaktır (Teorem 18.1). Böylece*

$$\int_0^b e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} e^{-u}u^{-1/2}\,du$$

elde edilir.
$\boldsymbol{b \to +\infty}$ ***limiti.*** $b^2 \to +\infty$ *olduğundan sağ yan* $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ *sayısına yaklaşır. Öyleyse sol yanın da sonlu limiti vardır; yani integral yakınsaktır. Sonuç 18.2 gereği*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

■

e^{-x^2} çift fonksiyon olduğundan $(-\infty, 0]$ üzerindeki integral de $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$'dir ve bütün doğru üzerinde $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ bulunur (Tanım 15.2).
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ bilindikten sonra indirgeme bağıntısı, Gamma fonksiyonunun bütün yarım tam sayılardaki değerlerini verir.

Önerme 18.4 (Yarım Tam Sayılarda Gamma Fonksiyonu). *Her* $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *için*

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{\pi}$$

olur. Özel olarak $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ *ve* $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$*'tür.*

İspat.
n *üzerinden tümevarım yapalım.* $n = 0$ *için sağ yan* $\dfrac{0!}{1 \cdot 0!}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$ *olur; bu, Sonuç 18.2 ile verilen değerdir. Formül* n *için doğru olsun. İndirgeme bağıntısında* $\alpha = n + \frac{1}{2}$ *alınırsa*

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(2n)!}{4^n\, n!}\sqrt{\pi}\\ &= \frac{(2n+1)!}{2 \cdot 4^n\, n!}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

olur. Pay ve payda $2n + 2 = 2(n+1)$ *ile çarpılırsa*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2n+2)!}{4^{n+1}\,(n+1)!}\,\sqrt{\pi}$$

bulunur; bu, formülün $n+1$ için yazılmış hâlidir.
$n=1$ *için* $\dfrac{2!}{4\cdot 1!}\sqrt{\pi}=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, $n=2$ *için* $\dfrac{4!}{16\cdot 2!}\sqrt{\pi}=\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$ *elde edilir.* ■

18.5 İntegralleri Euler İntegrallerine İndirgeme

Gamma ve Beta fonksiyonlarının değerleri bilindiğine göre, bir integrali hesaplamak çoğu zaman onu bu iki kalıptan birine sokmaktan ibarettir. Aşağıdaki çözümlerde değişken değiştirme doğrudan genelleştirilmiş integral üzerinde yazılmıştır. Kastedilen, Teorem 18.2 ispatındaki yoldur: dönüşüm önce sorunlu uçlardan uzak, sınırlı ve kapalı bir aralıkta yapılır, sonra uçlar limite götürülür.

Dört adımda Gamma ya da Beta fonksiyonuna indirgeme

1. **Kalıbı tanı.** $[0,+\infty)$ üzerinde bir kuvvet ile bir üstel fonksiyonun çarpımı Gamma fonksiyonuna götürür. Sınırlı bir aralıkta iki kuvvetin çarpımı ya da $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ üzerinde sinüs ve kosinüs kuvvetlerinin çarpımı Beta fonksiyonuna götürür.
2. **Değişken değiştir.** Gamma için üstel fonksiyonun üssündeki ifade yeni değişken yapılır (e^{-x^3} için $u=x^3$). Beta için aralık $[0,1]$'e taşınır ($[0,a]$ için $x=at$) ve çarpanlar t ile $1-t$'nin kuvvetleri olarak yazılır.
3. **Parametreleri oku.** Kalıplardaki üsler parametrenin bir eksiğidir; parametre, üsse 1 eklenerek bulunur. Parametreler pozitif değilse integral ıraksaktır.
4. **Değeri hesapla.** Beta fonksiyonu Teorem 18.4 ile Gamma fonksiyonuna çevrilir. Gamma değerleri indirgeme bağıntısı, $\Gamma(n+1)=n!$ ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ ile bulunur.

Örnek 18.2 (Üstelin Üssünde Kuvvet). $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^3}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Kalıp. $[0,+\infty)$ üzerinde bir kuvvet ile bir üstel fonksiyonun çarpımı vardır; hedef Gamma fonksiyonudur.
Değişken değiştirme. $u=x^3$ diyelim. $du=3x^2\,dx$, yani $x^2\,dx=\dfrac{du}{3}$ olur; $x=0$ iken $u=0$, $x\to+\infty$ iken $u\to+\infty$'dur:

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^3}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty} e^{-u}\,du.$$

Parametre. $e^{-u}=e^{-u}u^0$ olduğundan $\alpha-1=0$, yani $\alpha=1$'dir.
Değer.

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x^3}\,dx=\frac{1}{3}\,\Gamma(1)=\frac{1}{3}.$$

■

Örnek 18.3 (İki Ucunda Sınırsız Bir Fonksiyon). $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Kalıp. $x-x^2=x(1-x)$ olduğundan

$$\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}=x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Aralık zaten $[0,1]$'dir ve fonksiyon, x ile $1-x$'in kuvvetlerinin çarpımıdır; değişken değiştirmeye gerek yoktur. Fonksiyon iki uçta da sınırsızdır; integral II. tiptir.
Parametreler. İki üs de $-\frac{1}{2}$'dir; 1 eklenince iki parametre de $\frac{1}{2}$ bulunur. Parametreler pozitif olduğundan integral yakınsaktır (Teorem 18.3) ve $\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ sayısına eşittir.
Değer. Teorem 18.4 ve Sonuç 18.2 gereği

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{1} = \pi.$$

■

Örnek 18.4 (Aralığı Birim Aralığa Taşıma). $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Kalıp. Sınırlı bir aralıkta x'in ve $2-x$'in kuvvetlerinin çarpımı vardır; hedef Beta fonksiyonudur. Fonksiyon $x\to 2^-$ iken sınırsızdır.
Değişken değiştirme. Aralığı $[0,1]$'e taşımak için $x=2t$ diyelim. $dx=2\,dt$, $x^2=4t^2$ ve $\sqrt{2-x}=\sqrt{2}\sqrt{1-t}$ olur:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx &= \int_0^1 \frac{4t^2\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}\,dt \\ &= 4\sqrt{2}\int_0^1 t^2(1-t)^{-1/2}\,dt.\end{aligned}$$

Burada $\dfrac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ kullanılmıştır.
Parametreler. Üsler 2 ve $-\frac{1}{2}$'dir; parametreler 3 ve $\frac{1}{2}$ olur. İntegral $4\sqrt{2}\,\beta\left(3,\frac{1}{2}\right)$ sayısına eşittir.
Değer. $\Gamma(3)=2!=2$ ve indirgeme bağıntısıyla

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$$

olur. Dolayısıyla

$$\beta\left(3,\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(3)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = 2\sqrt{\pi}\cdot\frac{8}{15\sqrt{\pi}} = \frac{16}{15}$$

ve

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx = 4\sqrt{2}\cdot\frac{16}{15} = \frac{64\sqrt{2}}{15}$$

bulunur. ■

Örnek 18.5 (Sinüs ve Kosinüs Kuvvetlerinin Çarpımı). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Kalıp ve parametreler. Sonuç 18.1 içinde $m=4$ ve $n=2$ alınır; parametreler $\dfrac{m+1}{2}=\dfrac{5}{2}$ ve $\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{3}{2}$ olur:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right).$$

Değer. Önerme 18.4 gereği $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$ ve $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$'dir; ayrıca $\Gamma(4) = 3! = 6$ olur. Teorem 18.4 ile

$$\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi}{16}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{32}.$$

■

18.6 Alıştırmalar

Alıştırma 18.1 (İndirgeme Bağıntısıyla Bir Değer). $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm.
İndirgeme bağıntısı $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$ parametreyi her adımda bir azaltır. $\frac{9}{2}$'den başlayıp $\frac{1}{2}$'ye inene kadar uygulayalım:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) &= \frac{7}{2}\,\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \\
&= \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2}\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}$$

$7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$, $2^4 = 16$ ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ olduğundan

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}$$

bulunur. Sonuç Önerme 18.4 ile de denetlenebilir: $n = 4$ için $\dfrac{8!}{4^4 \cdot 4!} = \dfrac{40320}{6144} = \dfrac{105}{16}$. ■

Alıştırma 18.2 (Karekök ile Üstelin Çarpımı). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Değişken değiştirme. Üstelin üssündeki ifadeye $u = x^3$ diyelim. $x = u^{1/3}$ ve $dx = \frac{1}{3}u^{-2/3}\,du$ olur; ayrıca $\sqrt{x} = u^{1/6}$'dır. Sınırlar 0 ve $+\infty$ olarak kalır:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx &= \int_0^{+\infty} u^{1/6} e^{-u} \cdot \frac{1}{3} u^{-2/3}\, du \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{-1/2}\, du.
\end{aligned}$$

Üslerin toplamı $\frac{1}{6} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{1}{2}$'dir.
Parametre. $\alpha - 1 = -\frac{1}{2}$, yani $\alpha = \frac{1}{2}$ olur; parametre pozitiftir, integral yakınsaktır.
Değer.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x^3}\, dx = \frac{1}{3}\,\Gamma\!\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}.$$

■

Alıştırma 18.3 (Tabanı Farklı Bir Üstel). $\displaystyle\int_0^{+\infty} 5^{-2x^2}\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Tabanı e'ye çevirme. $5 = e^{\ln 5}$ olduğundan $5^{-2x^2} = e^{-(2\ln 5)\,x^2}$ olur. $c = 2\ln 5$ diyelim; $c > 0$'dır ve integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-cx^2}\, dx$ biçimini alır.
Değişken değiştirme. $s = \sqrt{c}\,x$ diyelim. $x = \dfrac{s}{\sqrt{c}}, dx = \dfrac{ds}{\sqrt{c}}$ ve $cx^2 = s^2$ olur; sınırlar 0 ve $+\infty$ olarak kalır:

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^{+\infty} e^{-s^2}\, ds.$$

Değer. Sonuç 18.3 gereği sağdaki integral $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$'dir. $c = 2\ln 5$ yerine yazılırsa

$$\int_0^{+\infty} 5^{-2x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2\ln 5}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2\ln 5}} \approx 0{,}494$$

bulunur. ■

Alıştırma 18.4 (Logaritma İçeren Bir İntegral). $\displaystyle\int_0^1 x^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Fonksiyon $x = 0$ noktasında tanımsızdır; integral $\varepsilon \to 0^+$ iken $[\varepsilon, 1]$ üzerindeki integrallerin limiti olarak anlaşılır.
Değişken değiştirme. Logaritmadan kurtulmak için $x = e^{-u}$ diyelim. $\ln\dfrac{1}{x} = u$, $x^2 = e^{-2u}$ ve $dx = -e^{-u}\, du$ olur. $x = 1$ iken $u = 0$, $x = \varepsilon$ iken $u = \ln\dfrac{1}{\varepsilon}$'dur. Eksi işareti sınırların yerini değiştirir:

$$\int_\varepsilon^1 x^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx = \int_0^{\ln(1/\varepsilon)} u^3 e^{-3u}\, du.$$

$\varepsilon \to 0^+$ iken $\ln\dfrac{1}{\varepsilon} \to +\infty$ olduğundan

$$\int_0^1 x^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx = \int_0^{+\infty} u^3 e^{-3u}\, du$$

olur.
Parametreler ve değer. Sağ yan, Teorem 18.2 içindeki 5. özelliğin kalıbındadır: $\alpha - 1 = 3$, yani $\alpha = 4$ ve $t = 3$. Öyleyse

$$\int_0^1 x^2 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx = \frac{\Gamma(4)}{3^4} = \frac{6}{81} = \frac{2}{27}.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 18.5 (Bir Parametresi Yarım Olan Beta). Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $\beta\left(n, \frac{1}{2}\right) = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{n\,(2n)!}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Gamma fonksiyonuna çevirme. Teorem 18.4 gereği

$$\beta\left(n, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

olur.
Değerler. $\Gamma(n) = (n-1)!$ ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$'dir. Önerme 18.4 gereği $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{4^n\,n!}\sqrt{\pi}$ olur.
Sadeleştirme. Paydadaki kesir ters çevrilip çarpılır, $\sqrt{\pi}$ çarpanları sadeleşir:

$$\beta\left(n, \frac{1}{2}\right) = (n-1)!\,\sqrt{\pi}\cdot\frac{4^n\,n!}{(2n)!\,\sqrt{\pi}} = \frac{4^n\,n!\,(n-1)!}{(2n)!}.$$

$(n-1)! = \dfrac{n!}{n}$ yazılırsa

$$\beta\left(n, \frac{1}{2}\right) = \frac{4^n\,(n!)^2}{n\,(2n)!}$$

elde edilir. $n=1$ için formül $\dfrac{4\cdot 1}{1\cdot 2} = 2$ verir; doğrudan hesap da aynı sonucu verir: $\beta\left(1, \frac{1}{2}\right) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2$. ■

Alıştırma 18.6 (Karekök İçinde Kare). $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Kalıp. Aralık $[0,1]$'dir ama ikinci çarpan $1-x$'in değil $1-x^2$'nin kuvvetidir. Fonksiyon $x \to 1^-$ iken sınırsızdır.
Değişken değiştirme. $t = x^2$ diyelim. $x = t^{1/2}$ ve $dx = \frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt$ olur; $x^4 = t^2$'dir ve sınırlar 0 ile 1 olarak kalır:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_0^1 t^2(1-t)^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{3/2}(1-t)^{-1/2}\,dt.\end{aligned}$$

Parametreler. Üsler $\frac{3}{2}$ ve $-\frac{1}{2}$'dir; parametreler $\frac{5}{2}$ ve $\frac{1}{2}$ olur. İntegral $\frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sayısına eşittir.
Değer. $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ve $\Gamma(3) = 2$ olduğundan

$$\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{3\pi}{8}$$

ve

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{16}$$

bulunur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 18.7 (Tek Kuvvetlerin Çarpımı). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^5\theta\,d\theta$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Kalıp ve parametreler. Sonuç 18.1 içinde $m=3$ ve $n=5$ alınır; parametreler $\dfrac{m+1}{2}=2$ ve $\dfrac{n+1}{2}=3$ olur:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^5\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,\beta(2,3).$$

Değer. Parametreler doğal sayıdır; Önerme 18.3 gereği

$$\beta(2,3) = \frac{1!\,2!}{4!} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

olur. Dolayısıyla

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^5\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{24}.$$

■

Gamma ve Beta fonksiyonları, integralin içindeki bir parametreye bağlı olarak tanımlanmış fonksiyonlardır. Bu bölümde onları her parametre değeri için ayrı ayrı, birer sayı olarak ele aldık. Parametre değiştikçe integralin nasıl davrandığı, yani böyle bir fonksiyonun sürekli ve türevlenebilir olup olmadığı ve türevin integral işaretinin altına geçip geçemeyeceği soruları Parametreye Bağlı İntegraller bölümünün konusudur.

 CC BY-NC-SA 4.0

19. Parametreye Bağlı İntegraller

Euler İntegralleri bölümünde Gamma fonksiyonunu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx$$

integraliyle tanımlamıştık (Tanım 18.1). Bu ifadede integral x'e göre alınır, ama sonuç integrandın içinde duran α sayısına bağlıdır: integral bir sayı değil, α'nın bir fonksiyonudur. İntegrandında integral değişkeninden başka bir değişken daha bulunan integrallere **parametreye bağlı integral** denir.

Bir fonksiyon integralle tanımlanınca sorulacak sorular bellidir. $F(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx$ fonksiyonu sürekli midir? Türevlenebilir midir ve türevi, integrandın y'ye göre türevinin integrali midir? F'nin integrali alınırken iki integralin sırası değiştirilebilir mi? Üçü de iki limit işleminin yer değiştirmesi sorusudur; fonksiyon dizilerinde aynı soruları limit ile integral (Teorem 5.1) ve limit ile türev (Teorem 6.1) için sormuştuk. Orada yanıtı düzgün yakınsaklık veriyordu. Burada dizinin n indisinin yerini sürekli değişen y parametresi, düzgün yakınsaklığın yerini de integrandın **düzgün sürekliliği** alacak.

Bu bölümde en sade durumu inceliyoruz: integrasyon aralığı sınırlı, integrand sürekli. İntegrand iki değişkenli bir fonksiyon olduğundan önce böyle fonksiyonların sürekliliği hakkında gereken birkaç bilgiyi derliyoruz. Gamma fonksiyonu gibi sınırsız aralıktaki ya da sınırsız integrandlı örnekler bir sonraki bölümün konusudur.

19.1 İki Değişkenli Sürekli Fonksiyonlar

İntegrand $f(x,y)$ iki değişkene bağlıdır; ihtiyaç duyacağımız kavramları tek değişkenli tanımları örnek alarak kuralım.

Tanım 19.1 (İki Değişkenli Fonksiyonun Sürekliliği). $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ ve $(x_0, y_0) \in D$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunuyorsa ki

$$|\, x - x_0 \,| < \delta \quad \text{ve} \quad |\, y - y_0 \,| < \delta$$

koşullarını sağlayan her $(x,y) \in D$ noktası için

$$|\, f(x,y) - f(x_0,y_0) \,| < \varepsilon$$

olsun, f fonksiyonu (x_0, y_0) noktasında **süreklidir** denir. f, D'nin her noktasında sürekliyse **D üzerinde süreklidir** denir.

Yani (x,y) noktası (x_0,y_0) noktasına **iki koordinatta birden** yeterince yakınsa fonksiyonun değerleri de birbirine yakındır. Tanımda $y = y_0$ alınırsa şu görülür: f, D üzerinde sürekliyse y sabit tutulduğunda $x \mapsto f(x,y)$ tek değişkenli fonksiyonu da süreklidir; aynı şey x sabitken $y \mapsto f(x,y)$ için geçerlidir. Bunun tersi doğru değildir: her değişkene göre ayrı ayrı sürekli olan bir fonksiyon, iki değişkenin fonksiyonu olarak sürekli olmayabilir (Örnek 19.4).

Tek değişkenli durumda olduğu gibi süreklilik dizilerle de ifade edilebilir. Bir $\big(\ (x_n, y_n)\ \big)$ nokta dizisi için $x_n \to x_0$ ve $y_n \to y_0$ ise kısaca $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$ yazacağız.

Lemma 19.1 (İki Değişkende Süreklilik için Dizisel Ölçüt). *$f : D \to \mathbb{R}$ ve $(x_0,y_0) \in D$ olsun. f fonksiyonunun (x_0,y_0) noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul, D içinde kalan ve $(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$ koşulunu sağlayan her nokta dizisi için*

$$f(x_n,y_n) \to f(x_0,y_0)$$

olmasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Gereklilik. *f, (x_0, y_0)'da sürekli ve $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin ve δ tanımdaki sayı olsun. $x_n \to x_0$ olduğundan bir N_1'den sonra $\mid x_n - x_0 \mid < \delta$, $y_n \to y_0$ olduğundan bir N_2'den sonra $\mid y_n - y_0 \mid < \delta$ olur. $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ için iki koşul birden sağlanır ve tanım gereği*

$$\mid f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0) \mid < \varepsilon$$

bulunur.
Yeterlilik. *Karşıt tersini gösterelim: f, (x_0, y_0)'da sürekli olmasın. O zaman öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki hiçbir δ tanımdaki işi görmez. $\delta = \dfrac{1}{n}$ için bu, D içinde*

$$\mid x_n - x_0 \mid < \frac{1}{n}, \qquad \mid y_n - y_0 \mid < \frac{1}{n}$$

ve $\mid f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0) \mid \geq \varepsilon_0$ olan bir (x_n, y_n) noktasının bulunması demektir. Böylece $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ olduğu hâlde $f(x_n, y_n)$ dizisi $f(x_0, y_0)$ sayısına yakınsamaz. ■

Dizisel ölçüt, sürekliliğin cebirsel işlemler ve bileşke altında korunduğunu dizilerin limit kurallarına indirger.

Önerme 19.1 (İki Değişkenli Sürekli Fonksiyonlarla İşlemler). *$f, g : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $D \subseteq \mathbb{R}^2$ üzerinde sürekli olsun.*
(i) *$f + g$ ve fg fonksiyonları D üzerinde süreklidir; g hiçbir noktada sıfır olmuyorsa $\dfrac{f}{g}$ de süreklidir.*
(ii) *J bir aralık, $\varphi : J \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $(x, y) \in D$ için $f(x, y) \in J$ ise $(x, y) \mapsto \varphi\big(\, f(x, y) \,\big)$ bileşkesi D üzerinde süreklidir.*
(iii) *I bir aralık, $\psi : I \to \mathbb{R}$ sürekli ve her $(x, y) \in D$ için $x \in I$ ise $(x, y) \mapsto \psi(x)$ fonksiyonu D üzerinde süreklidir. Aynı sonuç $(x, y) \mapsto \psi(y)$ için de geçerlidir.*

İspat.
$(x_0, y_0) \in D$ ve D içinde $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ olsun. Her maddede Lemma 19.1 gereği ilgili fonksiyonun bu dizi boyunca doğru değere yakınsadığını göstermek yeter.
(i) *Lemma 19.1 gereği $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$ ve $g(x_n, y_n) \to g(x_0, y_0)$ olur. Dizilerin limit aritmetiği (bkz. Analiz 1) gereği toplam, çarpım ve paydası sıfır olmayan bölüm dizileri de karşılık gelen değerlere yakınsar.*
(ii) *$t_n = f(x_n, y_n)$ dizisi J içindedir ve $t_n \to t_0 = f(x_0, y_0) \in J$ olur. φ, t_0'da sürekli olduğundan tek değişkenli dizisel ölçüt (bkz. Analiz 1) gereği $\varphi(t_n) \to \varphi(t_0)$ olur.*
(iii) *$x_n \to x_0$ ve ψ, x_0'da sürekli olduğundan aynı ölçüt gereği $\psi(x_n) \to \psi(x_0)$ olur.* ■

Önerme, karşılaşacağımız integrandların sürekliliğini bir bakışta verir. (iii) gereği $(x, y) \mapsto x$ ve $(x, y) \mapsto y$ süreklidir; (i) gereği x ile y'nin her polinomu, (ii) gereği de e^{-xy}, $\cos(xy)$, $\sqrt{x^2 + y^2}$ gibi bileşkeler $\mathbb{R}^2$ üzerinde süreklidir. $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ ise paydanın sıfır olmadığı her kümede, yani $(0, 0)$ noktasını içermeyen her kümede süreklidir.
Parametreye bağlı integrallerin bütün teoremleri, sürekliliğin daha güçlü bir biçimine dayanır.

Tanım 19.2 (İki Değişkenli Fonksiyonun Düzgün Sürekliliği). $f : D \to \mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ bulunuyorsa ki

$$\mid x - x' \mid < \delta \quad \text{ve} \quad \mid y - y' \mid < \delta$$

koşullarını sağlayan her $(x, y), (x', y') \in D$ nokta çifti için

$$\mid f(x, y) - f(x', y') \mid < \varepsilon$$

olsun, f fonksiyonu D üzerinde **düzgün süreklidir** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani δ yalnız ε'a bağlıdır; D'nin her yerinde aynı δ iş görür. Tek değişkenli düzgün süreklilik tanımının (bkz. Analiz 1) iki koordinata taşınmış hâlidir. Cantor teoremi (bkz. Analiz 1) ve kapalı aralıkta sürekli fonksiyonun sınırlılığı da aynı yolla taşınır; kapalı aralığın yerini kapalı bir dikdörtgen alır.

Teorem 19.1 (Kapalı Dikdörtgende Sürekli Fonksiyon). *$R = [a,b]\times[c,d]$ ve $f : R \to \mathbb{R}$ sürekli olsun. O zaman*
(i) *f, R üzerinde sınırlıdır: her $(x,y)\in R$ için $\mid f(x,y)\mid \le M$ olan bir M sayısı vardır;*
(ii) *f, R üzerinde düzgün süreklidir.*

İspat.
Ortak adım: yakınsak alt dizi. *$\big((x_n,y_n)\big)$, R içinde bir nokta dizisi olsun. (x_n) dizisi $[a,b]$ içinde kaldığından sınırlıdır; Bolzano–Weierstrass teoremi (bkz. Analiz 1) gereği yakınsak bir alt dizisi vardır: $x_{n_k}\to x_0$. Aynı indislerle alınan (y_{n_k}) dizisi $[c,d]$ içinde kaldığından o da sınırlıdır; teoremi bu diziye uygulayıp indisleri bir kez daha seyreltirsek $y_{m_j}\to y_0$ olan bir alt dizi buluruz. Burada (m_j), (n_k) indislerinin bir alt dizisidir; yakınsak dizinin her alt dizisi aynı limite yakınsadığından (bkz. Analiz 1) $x_{m_j}\to x_0$ olmaya devam eder. Kapalı aralıkta kalan yakınsak dizinin limiti de o aralıkta olduğundan (bkz. Analiz 1) $x_0\in[a,b]$ ve $y_0\in[c,d]$ olur. Sonuç: R içindeki her nokta dizisinin, R'nin bir (x_0,y_0) noktasına yakınsayan bir alt dizisi vardır.*
(i) Sınırlılık. *f sınırlı olmasın. O zaman her $n\in\mathbb{N}$ için $\mid f(x_n,y_n)\mid > n$ olan bir $(x_n,y_n)\in R$ noktası vardır. Ortak adım gereği $(x_{m_j},y_{m_j})\to(x_0,y_0)\in R$ olan bir alt dizi bulunur. f, (x_0,y_0)'da sürekli olduğundan Lemma 19.1 gereği $f(x_{m_j},y_{m_j})\to f(x_0,y_0)$ olur; yakınsak dizi sınırlıdır (bkz. Analiz 1). Oysa $\mid f(x_{m_j},y_{m_j})\mid > m_j$ ve $m_j\to\infty$ olduğundan bu dizi sınırsızdır. Çelişki; f sınırlıdır.*
(ii) Düzgün süreklilik. *f düzgün sürekli olmasın. O zaman öyle bir $\varepsilon_0>0$ vardır ki hiçbir δ tanımdaki işi görmez. $\delta=\dfrac{1}{n}$ alınırsa R içinde*

$$\mid x_n-x_n'\mid <\frac{1}{n},\qquad \mid y_n-y_n'\mid <\frac{1}{n}$$

ve

$$\mid f(x_n,y_n)-f(x_n',y_n')\mid \ge\varepsilon_0$$

olan $(x_n,y_n),(x_n',y_n')$ nokta çiftleri bulunur. Ortak adım gereği $(x_{m_j},y_{m_j})\to(x_0,y_0)\in R$ olan bir alt dizi vardır. Aynı indislerle

$$\mid x_{m_j}'-x_0\mid \le \mid x_{m_j}'-x_{m_j}\mid + \mid x_{m_j}-x_0\mid <\frac{1}{m_j}+\mid x_{m_j}-x_0\mid \to 0$$

olduğundan $x_{m_j}'\to x_0$, aynı hesapla $y_{m_j}'\to y_0$ olur. f, (x_0,y_0)'da sürekli olduğundan Lemma 19.1 gereği

$$f(x_{m_j},y_{m_j})\to f(x_0,y_0),\qquad f(x_{m_j}',y_{m_j}')\to f(x_0,y_0)$$

olur; iki dizinin farkı 0'a yakınsar. Bu, farkın mutlak değerinin her j için en az ε_0 olmasıyla çelişir. Öyleyse f düzgün süreklidir. ∎

Türev teoremi için son bir kavram gerekir: iki değişkenli bir fonksiyonun değişkenlerden yalnız birine göre türevi.

Tanım 19.3 (Kısmi Türev). $R=[a,b]\times[c,d]$, $f:R\to\mathbb{R}$ ve $(x_0,y_0)\in R$ olsun.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

limiti var ve sonluysa bu sayıya f'nin (x_0,y_0) noktasında ***y*'ye göre kısmi türevi** denir; kısaca $f_y(x_0,y_0)$ da yazılır. Limitte $y_0+h\in[c,d]$ olan $h\neq0$ değerleri alınır; $y_0=c$ ya da $y_0=d$ ise limit tek yönlüdür. x'e göre kısmi türev $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ aynı biçimde, y sabit tutularak tanımlanır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani $x = x_0$ sabit tutulur ve $y \mapsto f(x_0, y)$ tek değişkenli fonksiyonunun y_0 noktasındaki türevi alınır. Hesapta x bir sabit gibi davranır; bütün türev kuralları geçerlidir. Örneğin $f(x,y) = x^2 e^{-xy}$ için $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x^3 e^{-xy}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ için $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$ olur.

19.2 Parametreye Bağlı İntegralin Tanımı

İntegrandın değişkenlerinden birine göre integral alınınca geriye öbür değişkenin bir fonksiyonu kalır.

Tanım 19.4 (Parametreye Bağlı İntegral). $R = [a,b] \times [c,d]$ ve $f : R \to \mathbb{R}$ olsun. Her $y \in [c,d]$ için $x \mapsto f(x,y)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirse

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx \qquad (y \in [c,d])$$

ile tanımlı $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna **parametreye bağlı integral** denir. y'ye **parametre**, x'e integral değişkeni denir.

Yani her y için ayrı bir belirli integral hesaplanır; integral x'i "tüketir" ve sonuç yalnız y'ye bağlı kalır. f, R üzerinde sürekliyse her y için $x \mapsto f(x,y)$ sürekli, dolayısıyla integrallenebilir olduğundan (bkz. Analiz 2) F tanımlıdır. Değişkenlerin rolleri değiştirilebilir: x parametre alınıp y'ye göre integral alınırsa $[a,b]$ üzerinde $\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ fonksiyonu elde edilir.

Örnek 19.1 (Açıkça Hesaplanan Parametreli İntegral). $F(y) = \displaystyle\int_0^1 (2x + y^3)^2 dx$ fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm.

y sabit tutulur ve integral x'e göre alınır. $\left(\dfrac{(2x+y^3)^3}{6}\right)' = (2x+y^3)^2$ olduğundan (x'e göre türev)

$$F(y) = \left[\frac{(2x+y^3)^3}{6}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{(2+y^3)^3 - y^9}{6}$$
$$= \frac{8 + 12y^3 + 6y^6}{6} = \frac{4}{3} + 2y^3 + y^6$$

olur. Sonuç y'nin bir polinomudur; F bütün $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, sürekli ve türevlenebilirdir. ■

Örnek 19.2 (Üstel Çarpanlı Parametreli İntegral). $F(y) = \displaystyle\int_1^2 x^2 e^{-xy}\,dx$ fonksiyonunu y cinsinden yazınız; $F(0)$ ve $F(1)$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.

$f(x,y) = x^2 e^{-xy}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde süreklidir; F her $y \in \mathbb{R}$ için tanımlıdır.

$y = 0$. $F(0) = \displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$.

$y \neq 0$. İki kez kısmi integrasyon yapılır. Önce $u = x^2$, $dv = e^{-xy}\,dx$, sonra $u = x$, $dv = e^{-xy}\,dx$ seçimiyle ($v = -\dfrac{e^{-xy}}{y}$)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-xy}\,dx &= -\frac{x^2 e^{-xy}}{y} + \frac{2}{y}\int x e^{-xy}\,dx \\ &= -\frac{x^2 e^{-xy}}{y} + \frac{2}{y}\left(-\frac{x e^{-xy}}{y} - \frac{e^{-xy}}{y^2}\right) \\ &= -e^{-xy}\left(\frac{x^2}{y} + \frac{2x}{y^2} + \frac{2}{y^3}\right)\end{aligned}$$

bulunur. $x = 1$ ve $x = 2$ sınırları yerine konursa

$$F(y) = e^{-y}\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{y^2} + \frac{2}{y^3}\right) - e^{-2y}\left(\frac{4}{y} + \frac{4}{y^2} + \frac{2}{y^3}\right) \qquad (y \neq 0)$$

olur. Özel olarak

$$F(1) = 5e^{-1} - 10e^{-2} = \frac{5}{e} - \frac{10}{e^2}.$$

$y \neq 0$ formülü $y = 0$'da anlamsızdır, oysa $F(0) = \dfrac{7}{3}$ tanımlıdır. F'nin 0'da sürekli olup olmadığı formülden kolayca okunmaz; bir sonraki teorem bu soruyu hiç hesap yapmadan yanıtlar. ■

19.3 Parametreye Göre Süreklilik

İlk soru, integrandın sürekliliğinin F fonksiyonuna geçip geçmediğidir.

Teorem 19.2 (Parametreye Bağlı İntegralin Sürekliliği). *f, $R = [a,b] \times [c,d]$ üzerinde sürekli olsun. O zaman*

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde süreklidir. Özel olarak her $y_0 \in [c,d]$ için limit integral işaretinin içine alınabilir:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y_0)\,dx.$$

İspat.
$\varepsilon > 0$ verilsin. f, R üzerinde düzgün süreklidir (Teorem 19.1); dolayısıyla öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $|\,y_1 - y_2\,| < \delta$ olan her $y_1, y_2 \in [c,d]$ ve her $x \in [a,b]$ için

$$|\,f(x,y_1) - f(x,y_2)\,| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

olur (düzgün süreklilik tanımı (x,y_1) ve (x,y_2) noktalarına uygulanmıştır; birinci koordinatlar eşittir). İntegralin lineerliği, integraller için üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 2) ve sıralama özelliği gereği $|\,y_1 - y_2\,| < \delta$ iken

$$\begin{aligned}|\,F(y_1) - F(y_2)\,| &= \left|\int_a^b \big(\,f(x,y_1) - f(x,y_2)\,\big)\,dx\right| \\ &\le \int_a^b |\,f(x,y_1) - f(x,y_2)\,|\,dx \\ &\le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

olur. Demek ki F, $[c,d]$ üzerinde düzgün sürekli, özel olarak süreklidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

F'nin y_0'daki sürekliliği $\lim_{y\to y_0} F(y) = F(y_0)$ demektir; bu, ifadedeki ilk ve son terimin eşitliğidir. $y \mapsto f(x,y)$ de y_0'da sürekli olduğundan her x için $\lim_{y\to y_0} f(x,y) = f(x,y_0)$ olur; ortadaki eşitlik buradan gelir. ■

İspatta δ sayısının x'ten bağımsız seçilebilmesi belirleyicidir: integrand, x'in bütün değerleri için aynı anda az değişir. Fonksiyon dizilerinde limit ile integralin yer değiştirmesini sağlayan düzgün yakınsaklığın (Teorem 5.1) buradaki karşılığı budur. Teoremde x ile y'nin rolleri değiştirilebilir: $\int_c^d f(x,y)\,dy$ fonksiyonu da $[a,b]$ üzerinde süreklidir.

Örnek 19.3 (Limitin İntegralin İçine Alınması). $\lim_{y\to 0}\int_1^2 x^2 e^{-xy}\,dx$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.
$f(x,y) = x^2e^{-xy}$ fonksiyonu $[1,2]\times[-1,1]$ dikdörtgeninde süreklidir (Önerme 19.1). Teorem 19.2 gereği

$$\lim_{y\to 0}\int_1^2 x^2e^{-xy}\,dx = \int_1^2 x^2e^0\,dx = \int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$$

olur. Bu, Örnek 19.2 çözümündeki $F(0)$ değeridir: F, 0'da süreklidir. Aynı sonucu $y\neq 0$ formülünden çıkarmak, her biri sınırsız büyüyen terimlerin birbirini nasıl götürdüğünü izlemeyi gerektirirdi. ■

Teoremin koşulu yalnız tek bir noktada bozulsa bile sonuç bozulabilir.

Örnek 19.4 (Süreklilik Olmadan Bozulan Eşitlik). $[0,1]\times[0,1]$ üzerinde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

olsun. $F(y) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$ fonksiyonunun $y=0$ noktasında sürekli olmadığını gösteriniz ve Teorem 19.2 koşulunun nerede bozulduğunu açıklayınız.

Çözüm.
$F(0)$. Her $x\in[0,1]$ için $f(x,0)=0$ olduğundan $F(0)=0$'dır.
$y>0$. $u = x^2+y^2$ değişken değiştirmesiyle ($du = 2x\,dx$)

$$F(y) = \frac{y^2}{2}\int_{y^2}^{1+y^2}\frac{du}{u^2} = \frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{1+y^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{y^2}{2(1+y^2)} = \frac{1}{2(1+y^2)}$$

olur.
Limit. $\lim_{y\to 0^+} F(y) = \frac{1}{2} \neq 0 = F(0)$; F, 0'da sürekli değildir.
Limit ile integral. $x\in(0,1]$ sabitken $y\to 0^+$ için pay 0'a, payda $x^4>0$ sayısına gider; $x=0$ için $f(0,y)=0$'dır. Yani her $x\in[0,1]$ için $\lim_{y\to 0^+} f(x,y)=0$ olur ve

$$\int_0^1 \lim_{y\to 0^+} f(x,y)\,dx = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{y\to 0^+}\int_0^1 f(x,y)\,dx$$

bulunur: limit integralin içine alınamaz.
Bozulan koşul. f, $(0,0)$ noktasında sürekli değildir. $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$ olduğu hâlde

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1/n^3}{(2/n^2)^2}=\frac{n}{4}\to+\infty$$

olur; Lemma 19.1 gereği süreklilik için bu dizinin $f(0,0)=0$ sayısına yakınsaması gerekirdi. Dikkat edilirse f her değişkene göre ayrı ayrı süreklidir: y sabitken x'in, x sabitken y'nin sürekli fonksiyonudur. İki değişkenli süreklilik bundan fazlasını ister. ■

19.4 İntegral İşareti Altında Türev

İkinci soru türevle ilgilidir: F'nin türevi, integrandın parametreye göre kısmi türevinin integrali midir?

Teorem 19.3 (İntegral İşareti Altında Türev). *f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonları $R=[a,b]\times[c,d]$ üzerinde sürekli olsun. O zaman*

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde türevlenebilirdir (uç noktalarda tek yönlü türev anlaşılır) ve her $y\in[c,d]$ için

$$F'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

olur. Ayrıca F', $[c,d]$ üzerinde süreklidir.

İspat.
$y\in[c,d]$ sabit olsun; $h\neq 0$ ve $y+h\in[c,d]$ alalım.
Adım 1: Ortalama değer teoremi. *$x\in[a,b]$ sabitken $t\mapsto f(x,t)$ fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde türevlenebilirdir ve türevi $f_y(x,t)$'dir; özel olarak uçları y ile $y+h$ olan kapalı aralıkta süreklidir. Lagrange ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) gereği y ile $y+h$ arasında öyle bir η_x sayısı vardır ki*

$$\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}=f_y(x,\eta_x)$$

olur.
Adım 2: Farkın integral olarak yazılması. *İntegralin lineerliği gereği*

$$\begin{aligned}&\frac{F(y+h)-F(y)}{h}-\int_a^b f_y(x,y)\,dx\\&=\int_a^b\left(\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}-f_y(x,y)\right)dx\\&=\int_a^b\big(\,f_y(x,\eta_x)-f_y(x,y)\,\big)\,dx\end{aligned}$$

olur. η_x sayısının x'e nasıl bağlı olduğunu bilmiyoruz, ama buna gerek de yoktur: son integrand, bir üst satırdaki integrandın kendisidir ve o, x'in sürekli bir fonksiyonudur.
Adım 3: Düzgün süreklilik. *$\varepsilon>0$ verilsin. f_y, R üzerinde sürekli olduğundan düzgün süreklidir (Teorem 19.1); öyle bir $\delta>0$ vardır ki $|\,t-y\,|<\delta$ olan her $t\in[c,d]$ ve her $x\in[a,b]$ için*

$$|\,f_y(x,t)-f_y(x,y)\,|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

olur. $0<|\,h\,|<\delta$ ise η_x, y ile $y+h$ arasında olduğundan $|\,\eta_x-y\,|<|\,h\,|<\delta$ olur ve bu eşitsizlik $t=\eta_x$ için her x'te geçerlidir. Üçgen eşitsizliği ve sıralama özelliği gereği

$$\left|\frac{F(y+h)-F(y)}{h}-\int_a^b f_y(x,y)\,dx\right|\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,(b-a)<\varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur.

Sonuç. *Fark oranının $h \to 0$ limiti vardır ve $\displaystyle\int_a^b f_y(x,y)\,dx$ sayısına eşittir. $y = c$ için yalnız $h > 0$, $y = d$ için yalnız $h < 0$ değerleri alınabildiğinden bu noktalarda elde edilen tek yönlü türevdir. Son olarak f_y, R üzerinde sürekli olduğundan Teorem 19.2 gereği $F'(y) = \displaystyle\int_a^b f_y(x,y)\,dx$ fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde süreklidir.* ■

Teorem iki yönde kullanılır. Birincisi, değeri bilinen bir F'nin türevini alarak yeni bir integralin değerini ek bir integral hesabı yapmadan elde etmektir.

Örnek 19.5 (Bilinen İntegralden Yeni İntegral). $y > 0$ olsun. $F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}$ integralinden yararlanarak

$$\int_0^1 \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Koşullar. $0 < c < d$ olmak üzere $y \in [c,d]$ alalım. $[0,1]\times[c,d]$ dikdörtgeninde $x^2+y^2 \geq c^2 > 0$ olduğundan

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$$

fonksiyonlarının ikisi de bu dikdörtgende süreklidir (Önerme 19.1). Teorem 19.3 gereği aranan integral $F'(y)$'dir.
***F*'nin hesabı.**

$$F(y) = \left[\frac{1}{y}\arctan\frac{x}{y}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y}\arctan\frac{1}{y}.$$

Türev. Çarpım ve zincir kurallarıyla, $\left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{1}{y^2}$ kullanılarak

$$\begin{aligned} F'(y) &= -\frac{1}{y^2}\arctan\frac{1}{y} + \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right) \\ &= -\frac{1}{y^2}\arctan\frac{1}{y} - \frac{1}{y\,(1+y^2)} \end{aligned}$$

bulunur. c ve d keyfi olduğundan sonuç her $y > 0$ için geçerlidir:

$$\int_0^1 \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\,dx = -\frac{1}{y^2}\arctan\frac{1}{y} - \frac{1}{y\,(1+y^2)}.$$

İki yan $-2y$ ile bölünürse kısmi kesirlerle uğraştıran bir integral tek satırda elde edilir:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2y^3}\arctan\frac{1}{y} + \frac{1}{2y^2(1+y^2)}.$$

Örneğin $y = 1$ için $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$ olur. ■

İkinci kullanım ters yöndedir: hesaplanamayan bir integral bir parametreye bağlanır, türevi alınınca kolaylaşan integral hesaplanır ve sonra geri dönülür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dört adımda integral işareti altında türev

1. **Parametreyi belirle.** Hesaplanacak integral bir $I(y)$ ailesinin üyesi olarak yazılır; parametre yoksa uygun bir yere eklenir.
2. **Koşulları denetle.** f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ bir $[a,b]\times[c,d]$ dikdörtgeninde sürekli olmalıdır. Sorun çıkaran parametre değerleri dikdörtgenin dışında bırakılır.
3. **Türevi içeri al.** $I'(y)=\displaystyle\int_a^b f_y\,dx$ hesaplanır; amaç bu integralin I'dan kolay olmasıdır.
4. **Geri dön.** I' integrallenir; integral sabiti I'nın bilinen bir değerinden, gerekirse sürekliliğin verdiği bir limitten bulunur.

Örnek 19.6 (Türev Alarak İntegral Hesabı). $y\geq 0$ için

$$I(y)=\int_0^1 \frac{x^y-1}{\ln x}\,dx=\ln(1+y)$$

olduğunu gösteriniz. İntegrand $x=0$ ve $x=1$ noktalarında tanımsızdır; bu noktalarda limit değerleriyle tamamlanır.

Çözüm.
Adım 1: Parametre ve integrand. Parametre y'dir. İntegrandı $[0,1]\times[0,+\infty)$ üzerinde

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^y-1}{\ln x}, & 0<x<1,\\ 0, & x=0,\\ y, & x=1\end{cases}$$

olarak tanımlayalım ve her $d>0$ için $[0,1]\times[0,d]$ üzerinde sürekli olduğunu görelim.
$g(s)=\dfrac{1-e^{-s}}{s}$ $(s>0)$, $g(0)=1$ fonksiyonu $[0,+\infty)$ üzerinde süreklidir, çünkü $\lim_{s\to 0^+}\dfrac{1-e^{-s}}{s}=1$'dir ($e^{-s}$ fonksiyonunun 0'daki türevi -1'dir). $0<x<1$ ve $y>0$ için $s=-y\ln x>0$ yazılırsa $x^y=e^{-s}$ ve

$$f(x,y)=\frac{e^{-s}-1}{\ln x}=y\cdot\frac{1-e^{-s}}{-y\ln x}=y\,g(-y\ln x)$$

olur. Aynı formül $y=0$ için $(0=0\cdot g(0))$ ve $x=1$ için $(y=y\cdot g(0))$ de doğrudur. Demek ki $(0,1]\times[0,d]$ üzerinde $f(x,y)=y\,g(-y\ln x)$'tir; sürekli fonksiyonların çarpımı ve bileşkesi olduğundan f bu kümede süreklidir (Önerme 19.1). $x_0>0$ olan bir noktaya yeterince yakın noktalar $x=0$ kenarına değmediğinden bu, f'nin dikdörtgenin $x_0>0$ olan her noktasındaki sürekliliğini verir.
Geriye $x=0$ kenarı kalır. $0<x<1$ ve $y\geq 0$ için $0<x^y\leq 1$ ve $\ln x<0$ olduğundan

$$0\leq f(x,y)=\frac{1-x^y}{-\ln x}\leq\frac{1}{-\ln x}$$

olur. $x\to 0^+$ iken sağ yan y'den bağımsız olarak 0'a gider: $\varepsilon>0$ verildiğinde $0<x<\delta$ için $\dfrac{1}{-\ln x}<\varepsilon$ olan bir $\delta\in(0,1)$ vardır ve bu x'ler için her y'de $|\,f(x,y)-0\,|<\varepsilon$ olur. $f(0,y)=0$ olduğundan f, $(0,y_0)$ noktalarında da süreklidir.
Adım 2: Koşullar. $0<x<1$ için $x^y=e^{y\ln x}$ olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^y\ln x}{\ln x}=x^y$$

olur. $x=1$ için $f(1,y)=y$ ve kısmi türev $1=1^y$'dir; $x=0$ için $f(0,y)=0$ ve kısmi türev 0'dır. Yani $f_y(x,y)=x^y$ $(0<x\leq 1)$ ve $f_y(0,y)=0$'dır.
Bu fonksiyon $y=0$ doğrusunu içeren bir dikdörtgende sürekli değildir: $x>0$ için $f_y(x,0)=1$, oysa $f_y(0,0)=0$'dır. Bu yüzden $0<c<d$ alıp $[0,1]\times[c,d]$ dikdörtgeninde çalışalım. Burada f_y, $(0,1]\times[c,d]$ üzerinde $e^{y\ln x}$ bileşkesi olarak süreklidir. $x=0$ kenarında ise $0<x<1$ ve $y\geq c$ için $y\ln x\leq c\ln x$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$0 \le x^y \le x^c \to 0 \qquad (x \to 0^+)$$

olur; sınır yine y'den bağımsızdır ve Adım 1'deki gerekçeyle f_y, $(0, y_0)$ noktalarında da süreklidir. Teorem 19.3 koşulları $[0,1] \times [c,d]$ üzerinde sağlanır.
Adım 3: Türev. $y \in [c,d]$ için

$$I'(y) = \int_0^1 x^y \, dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 = \frac{1}{y+1}$$

olur. $0 < c < d$ keyfi olduğundan bu eşitlik her $y > 0$ için geçerlidir.
Adım 4: Geri dönüş. $d > 0$ olsun ve $[0,d]$ üzerinde $H(y) = I(y) - \ln(1+y)$ tanımlayalım. Adım 1 ve Teorem 19.2 gereği I, dolayısıyla H, $[0,d]$ üzerinde süreklidir. Adım 3 gereği her $y \in (0,d)$ için

$$H'(y) = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{1+y} = 0$$

olur. Türevi iç noktalarda sıfır olan sürekli fonksiyon sabittir (bkz. Analiz 2); $f(x,0) = 0$ olduğundan $I(0) = 0$ ve $H(0) = 0$'dır. Öyleyse $[0,d]$ üzerinde $H = 0$, yani

$$I(y) = \ln(1+y) \qquad (y \ge 0)$$

olur. Örneğin $y = 1$ için $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx = \ln 2$ bulunur; bu integralin ilkeli temel fonksiyonlarla yazılamaz. ■

19.5 İntegral Sırasının Değişmesi

F sürekli olduğundan $[c,d]$ üzerinde integrallenebilir; $\displaystyle\int_c^d F(y)\,dy$ sayısı, önce x'e sonra y'ye göre alınan ardışık bir integraldir. Üçüncü soru, sıranın sonucu etkileyip etkilemediğidir.

Teorem 19.4 (İntegral Sırasının Değişmesi). *f, $R = [a,b] \times [c,d]$ üzerinde sürekli olsun. O zaman*

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

olur.

İspat.
Teorem 19.2 gereği $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde, $\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde süreklidir; iki yandaki dış integraller tanımlıdır. Eşitliği, üst sınır d yerine değişken bir $t \in [c,d]$ yazıp iki yanın t'ye göre türevlerini karşılaştırarak göstereceğiz.
Adım 1: Yardımcı fonksiyon. *R üzerinde*

$$\varphi(x,t) = \int_c^t f(x,y)\,dy$$

tanımlayalım. x sabitken $y \mapsto f(x,y)$ sürekli olduğundan analizin ikinci temel teoremi (bkz. Analiz 2) gereği her $t \in [c,d]$ için

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t) = f(x,t)$$

olur (uçlarda tek yönlü). Özel olarak $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = f$, R üzerinde süreklidir.
Adım 2: φ süreklidir. *Teorem 19.1 gereği f sınırlı ve düzgün süreklidir; R üzerinde $|f| \le M$ ve $M > 0$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle bir $\delta_1 > 0$ vardır ki $|x - x_0| < \delta_1$ iken her $y \in [c,d]$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| f(x,y) - f(x_0,y) | < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$$

olur. $(x,t),(x_0,t_0) \in R$ *için, integralin toplamsallığı (bkz. Analiz 2) kullanılarak*

$$\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t_0) = \int_c^t \big(f(x,y) - f(x_0,y) \big)\, dy + \int_{t_0}^t f(x_0,y)\, dy$$

yazılır. $| x - x_0 | < \delta_1$ *ise birinci integralin mutlak değeri en çok* $(t-c)\cdot \dfrac{\varepsilon}{2(d-c)} \le \dfrac{\varepsilon}{2}$ *olur. İkinci integralin mutlak değeri en çok* $M | t - t_0 |$*'dır;* $| t - t_0 | < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ *ise bu da* $\dfrac{\varepsilon}{2}$*'den küçüktür.* $\delta = \min\left\{\delta_1, \dfrac{\varepsilon}{2M}\right\}$ *alınırsa* $| x - x_0 | < \delta$ *ve* $| t - t_0 | < \delta$ *iken*

$$| \varphi(x,t) - \varphi(x_0,t_0) | < \varepsilon$$

olur; φ*,* R *üzerinde süreklidir.*
Adım 3: İki yanın türevi. $[c,d]$ *üzerinde*

$$\Phi(t) = \int_a^b \varphi(x,t)\, dx, \qquad \Psi(t) = \int_c^t \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

tanımlayalım. Adım 1 ve Adım 2 gereği φ *ve* $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ *sürekli olduğundan Teorem 19.3 (*t *parametresiyle) uygulanır:*

$$\Phi'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,t)\, dx = \int_a^b f(x,t)\, dx.$$

Ψ *ise sürekli bir fonksiyonun integral fonksiyonudur; ikinci temel teorem gereği*

$$\Psi'(t) = \int_a^b f(x,t)\, dx$$

olur. Demek ki her $t \in [c,d]$ *için* $(\Phi - \Psi)'(t) = 0$*'dır.*
Adım 4: Sonuç. *Türevi özdeş sıfır olan fonksiyon sabittir (bkz. Analiz 2).* $\varphi(x,c) = 0$ *olduğundan* $\Phi(c) = 0$*, ayrıca* $\Psi(c) = 0$*'dır; öyleyse* $[c,d]$ *üzerinde* $\Phi = \Psi$ *olur.* $t = d$ *için*

$$\Phi(d) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx, \qquad \Psi(d) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

olduğundan istenen eşitlik elde edilir. ■

Sıra değişimi de bir hesap aracıdır: ardışık integrallerden biri kolay, öbürü zor olabilir.

Örnek 19.7 (Sıra Değiştirerek İntegral Hesabı). $0 < p < q$ olsun. $[0,1] \times [p,q]$ üzerinde $f(x,y) = x^y$ $(x > 0)$, $f(0,y) = 0$ fonksiyonunun iki ardışık integralini karşılaştırarak

$$\int_0^1 \frac{x^q - x^p}{\ln x}\, dx = \ln \frac{q+1}{p+1}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Süreklilik. $p > 0$ olduğundan f, $[0,1] \times [p,q]$ üzerinde süreklidir; gerekçe Örnek 19.6 çözümünün ikinci adımındakiyle aynıdır ($0 \le x^y \le x^p$).
Önce y'ye göre. $0 < x < 1$ için $x^y = e^{y \ln x}$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_p^q x^y\,dy = \left[\frac{x^y}{\ln x}\right]_{y=p}^{y=q} = \frac{x^q - x^p}{\ln x}$$

olur. $x = 0$ için integral 0, $x = 1$ için $q - p$'dir; bunlar sağdaki ifadenin $x \to 0^+$ ve $x \to 1^-$ limitleridir. **Önce x'e göre.** $y \in [p, q]$ için

$$\int_0^1 x^y\,dx = \frac{1}{y+1}.$$

Sıra değişimi. Teorem 19.4 gereği

$$\int_0^1 \frac{x^q - x^p}{\ln x}\,dx = \int_p^q \frac{dy}{y+1} = \Big[\ln(y+1)\Big]_p^q = \ln\frac{q+1}{p+1}$$

olur. Sonuç Örnek 19.6 ile uyumludur: sol yan $I(q) - I(p)$, sağ yan $\ln(1+q) - \ln(1+p)$'dir. Örneğin $p = 1$, $q = 2$ için $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x}\,dx = \ln\frac{3}{2}$ bulunur. ■

19.6 Leibniz Formülü

Şimdiye kadar integralin sınırları sabitti. Sınırlar da parametreye bağlıysa türevde iki yeni terim ortaya çıkar. İntegrandın parametreye bağlı olmadığı özel durumu Analiz 2'de görmüştük (bkz. Analiz 2); genel formül, o sonuç ile Teorem 19.3 teoremini birleştirir.

Sonuç 19.1 (Leibniz Formülü). *f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonları $R = [a,b] \times [c,d]$ üzerinde sürekli olsun. $u, v : [c,d] \to [a,b]$ türevlenebilir fonksiyonlar olsun. O zaman*

$$G(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx$$

fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned} G'(y) = &\int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx \\ &+ f\big(\,v(y), y\,\big)\,v'(y) - f\big(\,u(y), y\,\big)\,u'(y) \end{aligned}$$

olur. ($u(y) > v(y)$ olan noktalarda integraller yönlü integral olarak anlaşılır.)

İspat.
$y_0 \in [c,d]$ sabit olsun; $u_0 = u(y_0)$ ve $v_0 = v(y_0)$ yazalım. $y \in [c,d]$, $y \neq y_0$ alalım.
Adım 1: Farkın üç parçası. *y sabitken $x \mapsto f(x,y)$, $[a,b]$ üzerinde süreklidir. Yönlü integralde toplamsallık (bkz. Analiz 2), $u(y)$, u_0, v_0, $v(y)$ noktalarının sırası ne olursa olsun*

$$\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx = \int_{u(y)}^{u_0} f(x,y)\,dx + \int_{u_0}^{v_0} f(x,y)\,dx + \int_{v_0}^{v(y)} f(x,y)\,dx$$

verir. Bundan $G(y_0) = \displaystyle\int_{u_0}^{v_0} f(x,y_0)\,dx$ çıkarılırsa

$$G(y) - G(y_0) = A(y) + B(y) - C(y)$$

olur; burada

 CC BY-NC-SA 4.0

$$A(y) = \int_{u_0}^{v_0} \big(f(x,y) - f(x,y_0) \big)\, dx,$$
$$B(y) = \int_{v_0}^{v(y)} f(x,y)\, dx,$$
$$C(y) = \int_{u_0}^{u(y)} f(x,y)\, dx.$$

A'da sınırlar sabit, integrand değişkendir; B ve C'de değişen, sınırdır. Her parçayı $y - y_0$ ile bölüp $y \to y_0$ limitini alacağız.

Adım 2: A parçası. *$u_0 < v_0$ ise Teorem 19.3, $[u_0, v_0] \times [c,d]$ dikdörtgeninde $\int_{u_0}^{v_0} f(x,y)\, dx$ fonksiyonuna uygulanır; $A(y)$ bu fonksiyonun y ile y_0'daki değerlerinin farkı olduğundan*

$$\lim_{y \to y_0} \frac{A(y)}{y - y_0} = \int_{u_0}^{v_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx$$

olur. $u_0 > v_0$ ise aynı teorem $[v_0, u_0] \times [c,d]$ üzerinde uygulanır ve iki yan birlikte işaret değiştirir; $u_0 = v_0$ ise iki yan da 0'dır. Eşitlik her durumda geçerlidir.

Adım 3: B parçası. *$v(y) \neq v_0$ ise integraller için ortalama değer teoremi (bkz. Analiz 2) gereği v_0 ile $v(y)$ arasında (uçlar dahil) öyle bir ξ_y vardır ki*

$$B(y) = f(\xi_y, y)\, \big(v(y) - v_0 \big)$$

olur; $v(y) < v_0$ durumunda teorem $[v(y), v_0]$ aralığına uygulanır ve yönlü integralin işaret değişimi aynı formülü verir. $v(y) = v_0$ ise $B(y) = 0$'dır ve $\xi_y = v_0$ alınır. Her durumda $| \xi_y - v_0 | \leq | v(y) - v_0 |$ ve

$$\frac{B(y)}{y - y_0} = f(\xi_y, y) \cdot \frac{v(y) - v_0}{y - y_0}$$

olur. İkinci çarpan $y \to y_0$ iken $v'(y_0)$ sayısına yakınsar. Birinci çarpan için $\varepsilon > 0$ verilsin. f, (v_0, y_0)'da sürekli olduğundan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $| x - v_0 | < \delta$ ve $| y - y_0 | < \delta$ iken $| f(x,y) - f(v_0,y_0) | < \varepsilon$ olur. v, y_0'da türevlenebilir, dolayısıyla süreklidir; öyle bir $\delta' \in (0, \delta]$ vardır ki $| y - y_0 | < \delta'$ iken $| v(y) - v_0 | < \delta$ olur. Bu y'ler için $| \xi_y - v_0 | < \delta$ ve $| y - y_0 | < \delta$ olduğundan

$$| f(\xi_y, y) - f(v_0, y_0) | < \varepsilon$$

bulunur; yani $f(\xi_y, y) \to f(v_0, y_0)$. Çarpımın limiti alınırsa

$$\lim_{y \to y_0} \frac{B(y)}{y - y_0} = f(v_0, y_0)\, v'(y_0)$$

olur.

Adım 4: C parçası. *Adım 3, v yerine u yazılarak yinelenir:*

$$\lim_{y \to y_0} \frac{C(y)}{y - y_0} = f(u_0, y_0)\, u'(y_0).$$

Sonuç. *Üç limit birleştirilirse G, y_0'da türevlenebilirdir ve*

$$G'(y_0) = \int_{u_0}^{v_0} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\, dx + f(v_0, y_0)\, v'(y_0) - f(u_0, y_0)\, u'(y_0)$$

olur (y_0 bir uç noktaysa limitler ve türev tek yönlüdür). $y_0 \in [c,d]$ keyfi olduğundan formül ispatlanmıştır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Formül üç katkının toplamıdır: integrandın değişmesi, üst sınırın kayması ve alt sınırın kayması. u ve v sabitse son iki terim düşer ve Teorem 19.3 geri gelir; f parametreye bağlı değilse ilk terim düşer ve Analiz 2'deki formül kalır.

Örnek 19.8 (Leibniz Formülünün Doğrudan Hesapla Karşılaştırılması). $G(y) = \displaystyle\int_0^{y} (x+y)^2\,dx$ fonksiyonunun türevini önce Leibniz formülüyle, sonra integrali hesaplayarak bulunuz.

Çözüm.

Leibniz formülü. $f(x,y) = (x+y)^2$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(x+y)$ her yerde süreklidir; $u(y) = 0$, $v(y) = y$ türevlenebilirdir ($u' = 0$, $v' = 1$). Verilen bir y için $d > |\,y\,|$ seçilirse bütün koşullar $[-d,d]\times[-d,d]$ dikdörtgeninde sağlanır. Sonuç 19.1 gereği

$$\begin{aligned} G'(y) &= \int_0^{y} 2(x+y)\,dx + (y+y)^2\cdot 1 - (0+y)^2\cdot 0 \\ &= \Big[\,(x+y)^2\Big]_{x=0}^{x=y} + 4y^2 = 4y^2 - y^2 + 4y^2 = 7y^2 \end{aligned}$$

olur.

Doğrudan hesap.

$$G(y) = \left[\frac{(x+y)^3}{3}\right]_{x=0}^{x=y} = \frac{8y^3 - y^3}{3} = \frac{7y^3}{3}$$

ve $G'(y) = 7y^2$. İki yol aynı sonucu verir. ■

Örnek 19.9 (İlkeli Bulunamayan İntegralin Türevi). $y > 0$ için $\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int_{y}^{y^2} \frac{\cos(xy)}{x}\,dx$ türevini hesaplayınız.

Çözüm.

Koşullar. $0 < c < d$ olsun ve $a = \min\{c, c^2\}$, $b = \max\{d, d^2\}$ alalım. $y \in [c,d]$ için $u(y) = y$ ve $v(y) = y^2$ değerleri $[a,b]$ aralığındadır ve $a > 0$'dır. $[a,b]\times[c,d]$ dikdörtgeninde

$$f(x,y) = \frac{\cos(xy)}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x\sin(xy)}{x} = -\sin(xy)$$

fonksiyonları süreklidir (Önerme 19.1); $u' = 1$, $v' = 2y$'dir.

Formül. Sonuç 19.1 gereği

$$G'(y) = \int_{y}^{y^2} \big(-\sin(xy)\big)\,dx + \frac{\cos(y^2\cdot y)}{y^2}\cdot 2y - \frac{\cos(y\cdot y)}{y}\cdot 1$$

olur.

İntegral. x'e göre $\left(\dfrac{\cos(xy)}{y}\right)' = -\sin(xy)$ olduğundan

$$\int_{y}^{y^2} \big(-\sin(xy)\big)\,dx = \left[\frac{\cos(xy)}{y}\right]_{x=y}^{x=y^2} = \frac{\cos(y^3) - \cos(y^2)}{y}.$$

Toplam.

$$\begin{aligned} G'(y) &= \frac{\cos(y^3) - \cos(y^2)}{y} + \frac{2\cos(y^3)}{y} - \frac{\cos(y^2)}{y} \\ &= \frac{3\cos(y^3) - 2\cos(y^2)}{y}. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

c ve d keyfi olduğundan sonuç her $y > 0$ için geçerlidir. $\dfrac{\cos(xy)}{x}$ fonksiyonunun x'e göre ilkeli temel fonksiyonlarla yazılamaz; G'nin kendisini hesaplayamadığımız hâlde türevini tam olarak bulduk. ■

19.7 Alıştırmalar

Alıştırma 19.1 (Karekök İçeren Limit). $\displaystyle\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx$ limitini hesaplayınız.

Çözüm.
$(x,y)\mapsto x^2+y^2$ bir polinomdur ve negatif değer almaz; karekök fonksiyonu $[0,+\infty)$ üzerinde süreklidir. Önerme 19.1 gereği $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ fonksiyonu $[-1,1]\times[-1,1]$ dikdörtgeninde süreklidir. Teorem 19.2 gereği limit integralin içine alınır:

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,dx=\int_{-1}^{1}|\,x\,|\,dx.$$

$|\,x\,|$ çift fonksiyon olduğundan

$$\int_{-1}^{1}|\,x\,|\,dx=2\int_{0}^{1}x\,dx=1$$

olur. Limit 1'dir. ■

Alıştırma 19.2 (İçeri Alınamayan Limit). $[0,1]\times[0,1]$ üzerinde $y>0$ için $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}\,e^{-x^2/y^2}$ ve $f(x,0)=0$ olsun.

$$\lim_{y\to 0^+}\int_0^1 f(x,y)\,dx\qquad\text{ile}\qquad\int_0^1\lim_{y\to 0^+}f(x,y)\,dx$$

sayılarını karşılaştırınız; sonucun Teorem 19.2 ile neden çelişmediğini açıklayınız.

Çözüm.
İntegralin limiti. $y>0$ için x'e göre $\left(-\dfrac{1}{2}e^{-x^2/y^2}\right)'=\dfrac{x}{y^2}e^{-x^2/y^2}$ olduğundan

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2/y^2}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1-e^{-1/y^2}}{2}$$

olur. $y\to 0^+$ iken $\dfrac{1}{y^2}\to+\infty$ ve $e^{-1/y^2}\to 0$ olduğundan limit $\dfrac{1}{2}$'dir.
Limitin integrali. $x=0$ için $f(0,y)=0$'dır. $x\in(0,1]$ sabitken $s=\dfrac{x^2}{y^2}$ yazılırsa $y\to 0^+$ iken $s\to+\infty$ ve

$$f(x,y)=\frac{1}{x}\cdot s\,e^{-s}\to 0$$

olur. Her x için limit 0 olduğundan ikinci sayı 0'dır.
Karşılaştırma. $\dfrac{1}{2}\neq 0$; limit integralin içine alınamaz. Bu, teoremle çelişmez, çünkü f, $(0,0)$ noktasında sürekli değildir: $\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\to(0,0)$ olduğu hâlde

$$f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=n\,e^{-1}\to+\infty$$

olur ve Lemma 19.1 gereği bu dizinin $f(0,0)=0$ sayısına yakınsaması gerekirdi. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 19.3 (Türevle Logaritma Çarpanı Üretmek). $y > 0$ için $\displaystyle\int_0^1 x^y\,dx = \frac{1}{y+1}$ eşitliğinden yararlanarak $\displaystyle\int_0^1 x^y \ln x\,dx$ integralini hesaplayınız. (İntegrand $x = 0$'da limit değeri olan 0 ile tamamlanır.)

Çözüm.
Koşullar. $0 < c < d$ olsun. $[0,1] \times [c,d]$ üzerinde $f(x,y) = x^y$ $(x > 0)$, $f(0,y) = 0$ fonksiyonu süreklidir (Örnek 19.6, Adım 2). $x > 0$ için $x^y = e^{y \ln x}$ olduğundan $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$, $x = 0$ için $f(0,y) = 0$ olduğundan $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$'dır. Bu fonksiyon $(0,1] \times [c,d]$ üzerinde sürekli fonksiyonların çarpımıdır. $x = 0$ kenarında, $0 < x < 1$ ve $y \geq c$ için

$$\mid x^y \ln x \mid \leq x^c \mid \ln x \mid \to 0 \qquad (x \to 0^+)$$

olur. Limit, $x^c \ln x = \dfrac{\ln x}{x^{-c}}$ yazılıp L'Hôpital kuralı uygulanarak bulunur: türevlerin oranı $\dfrac{1/x}{-c\,x^{-c-1}} = -\dfrac{x^c}{c} \to 0$'dır. Sınır y'den bağımsız olduğundan $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $(0, y_0)$ noktalarında da süreklidir.
Türev. Teorem 19.3 gereği $y \in [c,d]$ için

$$\int_0^1 x^y \ln x\,dx = \frac{d}{dy}\int_0^1 x^y\,dx = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y+1}\right) = -\frac{1}{(y+1)^2}$$

olur; c, d keyfi olduğundan sonuç her $y > 0$ için geçerlidir.
Kontrol. $y = 1$ için formül $\displaystyle\int_0^1 x \ln x\,dx = -\frac{1}{4}$ verir. Kısmi integrasyonla da $\left[\dfrac{x^2}{2}\ln x\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = 0 - \frac{1}{4}$ bulunur. ■

Alıştırma 19.4 (Logaritmalı İntegrandla Leibniz Formülü). $F(y) = \displaystyle\int_y^{y^2} \ln(x^2+y^2+1)dx$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm.
Koşullar. $x^2 + y^2 + 1 \geq 1 > 0$ olduğundan

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$$

fonksiyonları $\mathbb{R}^2$ üzerinde süreklidir. $u(y) = y$, $v(y) = y^2$ türevlenebilirdir. Verilen bir y için $d \geq 1$ ve $d > \mid y \mid$ seçilirse $[-d,d]$ aralığındaki her parametre için u ve v değerleri $[-d^2, d^2]$ içinde kalır; Sonuç 19.1, $[-d^2,d^2] \times [-d,d]$ dikdörtgeninde uygulanabilir.
Formül.

$$F'(y) = \int_y^{y^2} \frac{2y}{x^2+y^2+1}\,dx + 2y\ln(y^4+y^2+1) - \ln(2y^2+1).$$

Sınır terimlerinde $f(y^2,y) = \ln(y^4+y^2+1)$, $f(y,y) = \ln(2y^2+1)$, $v' = 2y$ ve $u' = 1$ kullanılmıştır.
İntegral. $k = \sqrt{y^2+1}$ yazılırsa $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+k^2} = \frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k}$ olduğundan

$$\int_y^{y^2} \frac{2y}{x^2+y^2+1}\,dx = \frac{2y}{\sqrt{y^2+1}}\left(\arctan\frac{y^2}{\sqrt{y^2+1}} - \arctan\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right).$$

Sonuç.

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F'(y) = \frac{2y}{\sqrt{y^2+1}}\left(\arctan\frac{y^2}{\sqrt{y^2+1}} - \arctan\frac{y}{\sqrt{y^2+1}}\right) + 2y\ln(y^4+y^2+1) - \ln(2y^2+1).$$

Bir kontrol: $y=1$ için iki sınır çakışır, arktanjantlı terim 0 olur ve $F'(1) = 2\ln 3 - \ln 3 = \ln 3$ kalır. ■

Alıştırma 19.5 (Arktanjantlı İntegrandla Leibniz Formülü). $y>0$ için $F(y) = \displaystyle\int_y^{y^2} \arctan\frac{1}{xy^2}\,dx$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm.

Kısmi türev. $w = \dfrac{1}{xy^2}$ yazılırsa $\dfrac{\partial w}{\partial y} = -\dfrac{2}{xy^3}$ ve $\dfrac{1}{1+w^2} = \dfrac{x^2y^4}{1+x^2y^4}$ olur. Zincir kuralıyla

$$\frac{\partial}{\partial y}\arctan\frac{1}{xy^2} = -\frac{2}{xy^3}\cdot\frac{x^2y^4}{1+x^2y^4} = -\frac{2xy}{1+x^2y^4}.$$

Koşullar. $0<c<d$, $a=\min\{c,c^2\}$, $b=\max\{d,d^2\}$ olsun. $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde $xy^2>0$ olduğundan f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ süreklidir; $y\in[c,d]$ için $u(y)=y$ ve $v(y)=y^2$ değerleri $[a,b]$ içindedir.

Formül. Sonuç 19.1 gereği, $f(y^2,y) = \arctan\dfrac{1}{y^4}$ ve $f(y,y) = \arctan\dfrac{1}{y^3}$ ile

$$F'(y) = \int_y^{y^2} \frac{-2xy}{1+x^2y^4}\,dx + 2y\arctan\frac{1}{y^4} - \arctan\frac{1}{y^3}.$$

İntegral. x'e göre $\Big(\ln(1+x^2y^4)\Big)' = \dfrac{2xy^4}{1+x^2y^4}$ olduğundan

$$\int_y^{y^2} \frac{-2xy}{1+x^2y^4}\,dx = -\frac{1}{y^3}\Big[\ln(1+x^2y^4)\Big]_{x=y}^{x=y^2} = -\frac{1}{y^3}\left(\ln(1+y^8) - \ln(1+y^6)\right).$$

Sonuç.

$$F'(y) = -\frac{1}{y^3}\ln\frac{1+y^8}{1+y^6} + 2y\arctan\frac{1}{y^4} - \arctan\frac{1}{y^3} \qquad (y>0).$$

■

Alıştırma 19.6 (Sıra Değiştirerek Kolaylaşan İntegral). $F(y) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(xy)\,dx$ olsun. $\displaystyle\int_0^1 F(y)\,dy$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.

$f(x,y) = x\cos(xy)$ fonksiyonu $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$ dikdörtgeninde süreklidir. Teorem 19.4 gereği

$$\int_0^1 F(y)\,dy = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 x\cos(xy)\,dy\right)dx$$

olur. İç integralde x sabittir ve y'ye göre $\big(\sin(xy)\big)' = x\cos(xy)$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^1 x\cos(xy)\,dy = \Big[\sin(xy)\Big]_{y=0}^{y=1} = \sin x$$

bulunur ($x = 0$ için iki yan da 0'dır). Dolayısıyla

$$\int_0^1 F(y)\,dy = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

Verilen sırayla hesap çok daha zahmetlidir: kısmi integrasyonla $y \neq 0$ için

$$F(y) = \frac{\pi}{2y}\sin\frac{\pi y}{2} + \frac{1}{y^2}\Big(\cos\frac{\pi y}{2} - 1\Big)$$

bulunur; bu fonksiyonun ilkelini görmek kolay değildir, sıra değişimi ise hesabı tek satıra indirir. ■

Alıştırma 19.7 (Parametre Ekleyerek İntegral Hesabı). $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$ integralini, $I(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}\,dx$ fonksiyonunu inceleyerek hesaplayınız.

Çözüm.
Adım 1: Parametre. Aranan sayı $I(1)$'dir; ayrıca $\ln 1 = 0$ olduğundan $I(0) = 0$'dır.
Adım 2: Koşullar. $[0,1]\times[0,1]$ üzerinde $1 + xy \geq 1 > 0$ olduğundan

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{1+x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}$$

fonksiyonları süreklidir (Önerme 19.1).
Adım 3: Türev. Teorem 19.3 gereği $I'(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+xy)(1+x^2)}$ olur. İntegrandı basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{x}{(1+xy)(1+x^2)} = \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{x+y}{1+x^2} - \frac{y}{1+xy}\right).$$

Gerçekten, parantez içi ortak paydaya alınınca pay

$$(x+y)(1+xy) - y(1+x^2) = x + xy^2 = x(1+y^2)$$

olur. Üç temel integral

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\ln 2}{2},$$
$$\int_0^1 \frac{y}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi y}{4},$$
$$\int_0^1 \frac{y}{1+xy}\,dx = \Big[\ln(1+xy)\Big]_{x=0}^{x=1} = \ln(1+y)$$

olduğundan

$$I'(y) = \frac{1}{1+y^2}\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi y}{4} - \ln(1+y)\right)$$

bulunur.
Adım 4: Geri dönüş. I' sürekli olduğundan (Teorem 19.3) Newton–Leibniz formülü (bkz. Analiz 2) gereği $I(1) = I(1) - I(0) = \displaystyle\int_0^1 I'(y)\,dy$ olur:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$I(1) = \frac{\ln 2}{2}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{y\,dy}{1+y^2} - \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}\,dy.$$

İlk iki integral $\dfrac{\pi}{4}$ ve $\dfrac{\ln 2}{2}$'dir. Üçüncü integral, değişkenin adı dışında aranan integralin kendisidir, yani $I(1)$'dir. Böylece

$$I(1) = \frac{\ln 2}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\ln 2}{2} - I(1)$$

olur ve $2\,I(1) = \dfrac{\pi \ln 2}{4}$, yani

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

bulunur. ■

Bu bölümün bütün teoremleri sınırlı bir aralık ve kapalı bir dikdörtgende sürekli bir integrand varsayar; ispatların her biri dikdörtgendeki düzgün süreklilige dayanır. Gamma fonksiyonu gibi örneklerde integrasyon aralığı sınırsızdır ya da integrand bir uçta sınırsızdır ve bu araç doğrudan kullanılamaz. Süreklilik, türev ve sıra değişimi teoremlerinin oraya taşınması için gereken yeni kavramı, integralin parametreye göre düzgün yakınsaklığını, Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegraller bölümünde kuruyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

20. Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegraller

Parametreye Bağlı İntegraller bölümünde $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ fonksiyonunu sınırlı bir $[a,b]$ aralığında inceledik: f sürekli olduğunda F de sürekliydi ve iki integralin sırası değiştirilebiliyordu; $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de sürekliyse türev integral işaretinin altında alınabiliyordu. İntegrasyon aralığı sınırsız olduğunda ya da integrali alınan fonksiyon bir uç yakınında sınırsız kaldığında $F(y)$ bir genelleştirilmiş integrale dönüşür ve f'nin sürekliliği artık tek başına yetmez. Örneğin

$$F(t) = \int_0^{+\infty} te^{-tx}\,dx \qquad (t \geq 0)$$

integralinde te^{-tx} fonksiyonu her yerde süreklidir; buna karşın birazdan göreceğimiz gibi $F(0) = 0$ ve $t > 0$ için $F(t) = 1$ olur: F, $t = 0$ noktasında süreksizdir.
Bu tablo tanıdıktır. Sürekli fonksiyonların noktasal limiti süreksiz olabiliyordu ve çare düzgün yakınsaklıktı. Genelleştirilmiş integral de bir limittir; dolayısıyla aynı çare burada da işe yarar. Fonksiyon serileriyle parametreye bağlı genelleştirilmiş integraller arasındaki sözlük şöyledir:

Tablo 20.1: Fonksiyon serileri ile parametreye bağlı genelleştirilmiş integraller arasındaki sözlük

Fonksiyon serisi	Parametreye bağlı integral
toplam indisi n	integrasyon değişkeni x
değişken $x \in E$	parametre $y \in Y$
kısmi toplam $S_n(x)$	$\int_a^b f(x,y)\,dx$
toplam $S(x)$	$F(y)$
kalan $S(x) - S_n(x)$	$\int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx$

Bu bölümde önce düzgün yakınsaklığı tanımlıyor, sonra onu göstermenin yollarını (Cauchy kriteri, Weierstrass M-testi, Dirichlet ve Abel testleri) kuruyoruz. Ardından düzgün yakınsaklığın sağladıklarını sırayla ispatlıyoruz: F süreklidir, parametreye göre integrali ve türevi integral işaretinin altında alınabilir. Gamma fonksiyonunun sürekliliği bu sonuçların ilk uygulamasıdır. Bölümün sonunda bu araçlarla $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$ integralinin değerini buluyoruz.

20.1 Noktasal ve Düzgün Yakınsaklık

Parametrenin her değeri için ayrı bir genelleştirilmiş integral vardır; önce bunların hepsinin yakınsak olmasını, sonra yakınsamanın parametreden bağımsız bir hızla gerçekleşmesini tanımlıyoruz. Bölüm boyunca $Y \subseteq \mathbb{R}$ boş olmayan bir kümedir; en sık karşılaşılan durum $Y = [c,d]$ aralığıdır.

Tanım 20.1 (Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegral). $a \in \mathbb{R}$ ve $f : [a,+\infty) \times Y \to \mathbb{R}$ olsun; her $y \in Y$ ve her $b > a$ için $x \mapsto f(x,y)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Her $y \in Y$

 CC BY-NC-SA 4.0

için $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ genelleştirilmiş integrali (Tanım 15.1) yakınsaksa bu integrale Y üzerinde **noktasal yakınsaktır** denir. Bu durumda

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x,y)\,dx$$

ile tanımlanan $F : Y \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna **parametreye bağlı genelleştirilmiş integral**, y değişkenine **parametre** denir.

Yani y sabitlenir ve x'e göre sıradan bir genelleştirilmiş integral hesaplanır; sonuç y'ye bağlı bir sayıdır. Limit tanımıyla yazarsak: her $y \in Y$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $B > a$ vardır ki $b \geq B$ olduğunda $\left| F(y) - \int_a^b f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$ olur. Buradaki B sayısı hem ε'a hem y'ye bağlıdır. Düzgün yakınsaklık, tek bir B'nin bütün parametre değerleri için yetmesidir.

Tanım 20.2 (Genelleştirilmiş İntegralin Düzgün Yakınsaklığı). $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ integrali Y üzerinde F fonksiyonuna noktasal yakınsasın. Her $\varepsilon > 0$ için yalnız ε'a bağlı öyle bir $B = B(\varepsilon) > a$ sayısı varsa ki $b \geq B$ olan her b ve her $y \in Y$ için

$$\left| F(y) - \int_a^b f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

olsun, o zaman integrale Y üzerinde **düzgün yakınsaktır** denir. Sol yandaki fark integralin **kalanıdır**:

$$F(y) - \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

Dolayısıyla düzgün yakınsaklık

$$\lim_{b\to+\infty} \sup_{y\in Y} \left| \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| = 0$$

koşuluna denktir.

Yani b yeterince büyük seçildiğinde $[a,b]$ üzerindeki integral, $F(y)$ değerine bütün $y \in Y$ noktalarında aynı anda ε'dan daha yakındır. Tanımdaki iki eşitliği gerekçelendirelim. $b < b'$ için integralin aralık üzerinde toplamsallığı (bkz. Analiz 2)

$$\int_a^{b'} f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y)\,dx + \int_b^{b'} f(x,y)\,dx$$

verir. $b' \to +\infty$ iken sol yan $F(y)$'ye yakınsar; öyleyse sağdaki son integralin de limiti vardır ve bu limit $F(y) - \int_a^b f(x,y)\,dx$ sayısıdır. Kalan için yazılan eşitlik budur. Supremumlu koşula gelince: tanımdaki eşitsizlik her $y \in Y$ için sağlanıyorsa $b \geq B$ iken kalanların mutlak değerlerinin supremumu en çok ε'dur; tersine, supremum 0'a gidiyorsa bir B'den sonra ε'dan küçüktür ve her y için kalan da öyledir.
Tanımdan iki basit sonuç çıkar. İntegral Y üzerinde düzgün yakınsaksa Y'nin her alt kümesinde de düzgün yakınsaktır; aynı B sayısı iş görür. İntegral Y_1 ve Y_2 kümelerinin her birinde düzgün yakınsaksa $Y_1 \cup Y_2$ üzerinde de düzgün yakınsaktır; iki B sayısının büyüğü alınır.

Örnek 20.1 (Noktasal Yakınsak Bir İntegral). $F(t) = \int_0^{+\infty} te^{-tx}\,dx$ integralinin $[0,+\infty)$ üzerinde noktasal yakınsak olduğunu gösteriniz ve F fonksiyonunu bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$t = 0$. İntegrali alınan fonksiyon özdeş olarak sıfırdır: her $b > 0$ için $\int_0^b 0\,dx = 0$ ve $F(0) = 0$.
$t > 0$. $\left(-e^{-tx}\right)' = te^{-tx}$ olduğundan

$$\int_0^b te^{-tx}\,dx = \Big[-e^{-tx}\Big]_0^b = 1 - e^{-bt}$$

olur. $b \to +\infty$ iken $e^{-bt} \to 0$ olduğundan $F(t) = 1$'dir.
İntegral her $t \geq 0$ için yakınsaktır ve

$$F(t) = \begin{cases} 0, t = 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$$

olur. ■

Örnek 20.2 (Düzgün Yakınsamayan Bir İntegral). $\int_0^{+\infty} te^{-tx}\,dx$ integralinin $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Örnek 20.1 çözümündeki hesaptan kalanı yazalım. $t > 0$ için

$$\int_b^{+\infty} te^{-tx}\,dx = F(t) - \int_0^b te^{-tx}\,dx = 1 - \left(1 - e^{-bt}\right) = e^{-bt}$$

olur; $t = 0$ için kalan 0'dır. Herhangi bir $b > 0$ verilsin ve $t_b = \dfrac{1}{b}$ alınsın. Bu parametre değerinde kalan

$$e^{-b\cdot\frac{1}{b}} = e^{-1}$$

sayısıdır. Öyleyse her $b > 0$ için

$$\sup_{t\geq 0}\left|\int_b^{+\infty} te^{-tx}\,dx\right| \geq \frac{1}{e}$$

olur ve bu supremum $b \to +\infty$ iken 0'a gitmez. Tanım 20.2 gereği integral $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. ($\varepsilon = \dfrac{1}{3}$ için hiçbir B sayısı tanımdaki koşulu sağlamaz, çünkü $\dfrac{1}{e} > \dfrac{1}{3}$'tür.) ■

Örnek 20.3 (Sıfırdan Uzakta Düzgün Yakınsaklık). $\delta > 0$ olsun. $\int_0^{+\infty} te^{-tx}\,dx$ integralinin $[\delta, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$t \geq \delta$ ve $b > 0$ için $bt \geq b\delta$ olduğundan kalan

$$0 < \int_b^{+\infty} te^{-tx}\,dx = e^{-bt} \leq e^{-b\delta}$$

eşitsizliğini sağlar. Sağdaki sayı t'den bağımsızdır; dolayısıyla

$$\sup_{t\geq \delta}\left|\int_b^{+\infty} te^{-tx}\,dx\right| \leq e^{-b\delta}$$

olur. $\delta > 0$ sabit olduğundan $b \to +\infty$ iken $e^{-b\delta} \to 0$'dır. Kalanların supremumu 0'a gider; integral $[\delta, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç örnek birlikte okunmalıdır. t küçüldükçe e^{-bt} kalanını küçültmek için gereken b büyür; $t \to 0^+$ iken bu b sınırsız büyür ve ortak bir B bulunamaz. Parametre 0'dan δ kadar uzak tutulduğunda sorun ortadan kalkar. F'nin $t = 0$'daki süreksizliği ile düzgün yakınsaklığın 0 yakınında bozulması arasındaki bağ rastlantı değildir; bunu Teorem 20.6 açıklayacak.
Aynı kavramlar II. tip integraller için de tanımlanır.

Tanım 20.3 (İkinci Tip İntegralde Düzgün Yakınsaklık). $a < b$ reel sayılar ve $f : [a, b) \times Y \to \mathbb{R}$ olsun; her $y \in Y$ ve her $a < t < b$ için $x \mapsto f(x, y)$ fonksiyonu $[a, t]$ üzerinde integrallenebilir olsun (tekil nokta b; Tanım 17.1). Her $y \in Y$ için

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x,y)\,dx$$

limiti var ve sonluysa integrale Y üzerinde **noktasal yakınsaktır** denir. Buna ek olarak her $\varepsilon > 0$ için yalnız ε'a bağlı öyle bir $\delta \in (0, b-a)$ varsa ki $b - \delta < t < b$ olan her t ve her $y \in Y$ için

$$\left| F(y) - \int_a^t f(x,y)\,dx \right| = \left| \int_t^b f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

olsun, o zaman integrale Y üzerinde **düzgün yakınsaktır** denir.

Yani I. tipteki "b yeterince büyük" koşulunun yerini "t, tekil noktaya yeterince yakın" koşulu alır; düzgünlük yine δ'nın y'ye bağlı olmamasıdır. Tekil nokta sol uçsa ya da integral $(-\infty, b]$ üzerindeyse tanım aynı biçimde yazılır. Bu bölümdeki teoremleri I. tip integraller için ifade ve ispat ediyoruz; II. tip için ifadeler ve ispatlar, "$b \geq B$" yerine "$b - \delta < t < b$" yazılarak aynen yinelenir.

20.2 Dizi Ölçütü ve Cauchy Kriteri

Düzgün yakınsaklığı fonksiyon dizilerinin diline çeviren bir ölçütle başlıyoruz; önceki bölümlerin teoremlerini integrallere taşıyan köprü budur.

Teorem 20.1 (Düzgün Yakınsaklık için Dizi Ölçütü). *$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ integrali Y üzerinde F fonksiyonuna noktasal yakınsasın. İntegralin Y üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul şudur: $u_k \geq a$ ve $u_k \to +\infty$ olan her (u_k) sayı dizisi için*

$$F_k(y) = \int_a^{u_k} f(x,y)\,dx \qquad (y \in Y)$$

fonksiyon dizisi Y üzerinde F'ye düzgün yakınsar: $F_k \rightrightarrows F$ (Y).

İspat.
($\Rightarrow$) İntegral düzgün yakınsak olsun, $u_k \to +\infty$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Tanım 20.2 gereği öyle bir $B > a$ vardır ki $b \geq B$ ve her $y \in Y$ için $\left| F(y) - \int_a^b f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$ olur. $u_k \to +\infty$ olduğundan öyle bir $K \in \mathbb{N}$ vardır ki $k \geq K$ için $u_k \geq B$ olur. Öyleyse $k \geq K$ ve her $y \in Y$ için

$$|\ F(y) - F_k(y)\ | = \left| F(y) - \int_a^{u_k} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

bulunur. K yalnız ε'a bağlıdır; $F_k \rightrightarrows F$ (Y).
($\Leftarrow$) Karşıt tersini gösterelim: integral Y üzerinde düzgün yakınsak olmasın. Tanımın olumsuzu gereği öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ vardır ki her $B > a$ için

$$b \geq B \qquad \text{ve} \qquad \left| F(y) - \int_a^b f(x,y)\,dx \right| \geq \varepsilon_0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olacak biçimde bir b sayısı ve bir $y \in Y$ noktası bulunur. Her $k \in \mathbb{N}$ için bunu $B = a + k$ ile uygulayalım ve bulunan sayıya u_k, bulunan noktaya y_k diyelim. $u_k \geq a + k$ olduğundan $u_k \geq a$ ve $u_k \to +\infty$ olur. Öte yandan bu dizi için her k'de

$$\mid F(y_k) - F_k(y_k) \mid \geq \varepsilon_0$$

sağlanır. Öyleyse $\varepsilon = \varepsilon_0$ için hiçbir indisten sonra $\mid F(y) - F_k(y) \mid < \varepsilon_0$ eşitsizliği bütün $y \in Y$ noktalarında birden geçerli olamaz; (F_k) dizisi F'ye düzgün yakınsamaz. Böylece koşul sağlanıyorsa integral düzgün yakınsaktır. ■

Ölçüt çoğu zaman $u_k = a + k$ dizisiyle kullanılır: integral düzgün yakınsaksa $F_k(y) = \displaystyle\int_a^{a+k} f(x,y)\,dx$ fonksiyonları F'ye düzgün yakınsar. Her F_k sınırlı bir aralıktaki parametreye bağlı integraldir ve bir önceki bölümün teoremleri ona uygulanır; düzgün yakınsaklık da bu özellikleri F'ye taşır.
Limit fonksiyonu F'yi bilmeden düzgün yakınsaklığa karar vermek için yine Cauchy kriterine başvurulur.

Teorem 20.2 (Parametreye Bağlı İntegraller için Cauchy Kriteri). *$f : [a, +\infty) \times Y \to \mathbb{R}$ olsun ve her $y \in Y$, her $b > a$ için $x \mapsto f(x,y)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ integralinin Y üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul şudur: her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $B > a$ vardır ki $b_2 > b_1 \geq B$ olan her b_1, b_2 ve her $y \in Y$ için*

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

olur.

İspat.
(⇒) *İntegral Y üzerinde F'ye düzgün yakınsasın ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Öyle bir $B > a$ vardır ki $b \geq B$ ve her $y \in Y$ için $\left| F(y) - \displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $b_2 > b_1 \geq B$ ve $y \in Y$ için araya $F(y)$ ekleyip çıkaralım:*

$$\begin{aligned}
\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx \right| &= \left| \int_a^{b_2} f(x,y)\,dx - \int_a^{b_1} f(x,y)\,dx \right| \\
&\leq \left| \int_a^{b_2} f(x,y)\,dx - F(y) \right| + \left| F(y) - \int_a^{b_1} f(x,y)\,dx \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

(⇐) *Koşul sağlansın.*
Adım 1: Noktasal yakınsaklık. *$y \in Y$ sabit olsun. Koşul, bu y için tek değişkenli $x \mapsto f(x,y)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş integraller için Cauchy kriterini (Teorem 16.1) sağladığını söyler. Öyleyse $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ yakınsaktır; değerine $F(y)$ diyelim.*
Adım 2: Yakınsama düzgündür. *$\varepsilon > 0$ verilsin ve koşuldaki B sayısı $\frac{\varepsilon}{2}$ için seçilsin. $b_1 \geq B$ ve $y \in Y$ sabitlensin. $b_2 > b_1$ olan her b_2 için*

$$\left| \int_a^{b_2} f(x,y)\,dx - \int_a^{b_1} f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. $b_2 \to +\infty$ iken ilk integral $F(y)$'ye yakınsar; limitte kesin olmayan eşitsizlik korunduğundan

$$\left| F(y) - \int_a^{b_1} f(x,y)\,dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Bu, $b_1 \geq B$ olan her b_1 ve her $y \in Y$ için geçerlidir ve B yalnız ε'a bağlıdır. İntegral Y üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

Kriterin olumsuzu, düzgün yakınsamamayı göstermenin elverişli bir yoludur: integralin Y üzerinde düzgün yakınsak **olmaması** için gerek ve yeter koşul, öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ bulunmasıdır ki her $B > a$ için $b_2 > b_1 \geq B$ olan b_1, b_2 sayıları ve bir $y \in Y$ noktası

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx \right| \geq \varepsilon_0$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu biçimi Örnek 20.10 çözümünde kullanacağız.

20.3 Weierstrass M-Testi

Düzgün yakınsaklığı göstermenin en kısa yolu, serilerdeki gibi (Teorem 7.2), integrali alınan fonksiyonu parametreden bağımsız ve integrali yakınsak bir fonksiyonla sınırlamaktır.

Teorem 20.3 (İntegraller için Weierstrass M-Testi). *$f : [a,+\infty) \times Y \to \mathbb{R}$ olsun ve her $y \in Y$, her $b > a$ için $x \mapsto f(x,y)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Her $b > a$ için $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir öyle bir $M : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bulunsun ki*

$$|\, f(x,y)\,| \leq M(x) \qquad (\text{her} \quad x \geq a, \text{her} \quad y \in Y)$$

olsun ve $\displaystyle\int_a^{+\infty} M(x)\,dx$ yakınsak olsun. O zaman $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ integrali her $y \in Y$ için mutlak yakınsaktır ve Y üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat.
$\varepsilon > 0$ verilsin. $\displaystyle\int_a^{+\infty} M(x)\,dx$ yakınsak olduğundan Cauchy kriteri (Teorem 16.1) gereği öyle bir $B > a$ vardır ki $b_2 > b_1 \geq B$ için

$$\int_{b_1}^{b_2} M(x)\,dx < \varepsilon$$

olur ($M \geq 0$ olduğundan mutlak değere gerek yoktur). Bu B yalnız ε'a bağlıdır. $b_2 > b_1 \geq B$ ve $y \in Y$ için integraller için üçgen eşitsizliği (bkz. Analiz 2) ve sıralama özelliğiyle

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,dx \right| \leq \int_{b_1}^{b_2} |\, f(x,y)\,|\,dx \leq \int_{b_1}^{b_2} M(x)\,dx < \varepsilon \tag{1}$$

bulunur.
Mutlak yakınsaklık. *$y \in Y$ sabitken (1) zincirinin son iki halkası, $x \mapsto |\, f(x,y)\,|$ fonksiyonunun Cauchy kriterini sağladığını gösterir; $\displaystyle\int_a^{+\infty} |\, f(x,y)\,|\,dx$ yakınsaktır (Tanım 16.1).*
Düzgün yakınsaklık. *(1) zincirinin ilk ve son halkası, Teorem 20.2 koşulunun sağlandığını gösterir; integral Y üzerinde düzgün yakınsaktır.* ■

Eşitsizliğin bir $x_0 \geq a$ sayısından sonra sağlanması da yeter: $[a,x_0]$ üzerindeki integral kalanı etkilemez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda integraller için M-testi

1. **Parametreyi yok et.** $|\ f(x,y)\ |$ için bütün $y \in Y$ değerlerinde geçerli, y içermeyen bir $M(x)$ üst sınırı bulunur.
2. **Tek değişkenli integrali incele.** $\displaystyle\int_a^{+\infty} M(x)\,dx$ integralinin yakınsaklığı tanımla ya da bir testle gösterilir.
3. **Sonuç.** İntegral Y üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Örnek 20.4 (Bütün Doğruda Düzgün Yakınsak İntegral). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xy)}{1+x^2}\,dx$ integralinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Sınır. Her $x \geq 0$ ve her $y \in \mathbb{R}$ için $|\sin(xy)\ | \leq 1$ olduğundan

$$\left|\frac{\sin(xy)}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2} = M(x)$$

olur.
Tek değişkenli integral. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ yakınsaktır (Örnek 15.2).
Sonuç. Teorem 20.3 gereği integral $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. ■

Örnek 20.5 (Üstel Çarpanla Sınırlama). $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,\frac{\sin(xy)}{x}\,dx$ integralinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$x \geq 1$ için $\dfrac{1}{x} \leq 1$ ve her $y \in \mathbb{R}$ için $|\sin(xy)\ | \leq 1$ olduğundan

$$\left|e^{-x}\,\frac{\sin(xy)}{x}\right| \leq e^{-x} = M(x)$$

olur. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-1}$ yakınsaktır (Örnek 15.6, $t=1$ ve $a=1$). Teorem 20.3 gereği integral $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. ■

Test II. tip integrallere de aynen uygulanır.

Sonuç 20.1 (İkinci Tip İntegraller için M-Testi). *$f : [a,b) \times Y \to \mathbb{R}$, Tanım 20.3 koşullarını sağlasın. Her $a < t < b$ için $[a,t]$ üzerinde integrallenebilir öyle bir $M : [a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bulunsun ki her $x \in [a,b)$ ve her $y \in Y$ için $|\ f(x,y)\ | \leq M(x)$ olsun ve $\displaystyle\int_a^b M(x)\,dx$ integrali (tekil nokta b) yakınsak olsun. O zaman $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ integrali her $y \in Y$ için mutlak yakınsaktır ve Y üzerinde düzgün yakınsaktır.*

İspat.
Noktasal yakınsaklık. *$y \in Y$ sabit olsun. $0 \leq |\ f(x,y)\ | \leq M(x)$ olduğundan karşılaştırma testi (Teorem 17.4) gereği $\displaystyle\int_a^b |\ f(x,y)\ |\,dx$ yakınsaktır; mutlak yakınsak integral yakınsak olduğundan (Teorem 17.6) $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,dx$ de yakınsaktır. Değerine $F(y)$ diyelim. (Anılan iki teorem tekil nokta sağ uçta olduğunda da aynı ispatla geçerlidir; ispatlar $f(\cdot,y)$ fonksiyonunun sınırsız olmasını kullanmaz.)*

 CC BY-NC-SA 4.0

Düzgün yakınsaklık. *$\varepsilon > 0$ verilsin. $\int_a^b M(x)\,dx$ yakınsak olduğundan kalanı 0'a gider: öyle bir $\delta \in (0, b-a)$ vardır ki $b-\delta < t < b$ için $\int_t^b M(x)\,dx < \varepsilon$ olur. Böyle bir t, bir $y \in Y$ ve $t < s < b$ için*

$$\left|\int_t^s f(x,y)\,dx\right| \le \int_t^s |\,f(x,y)\,|\,dx \le \int_t^s M(x)\,dx \le \int_t^b M(x)\,dx$$

olur; son adımda $M \ge 0$ kullanıldı. $s \to b^-$ iken sol yan $\left|\int_t^b f(x,y)\,dx\right|$ sayısına yakınsar; öyleyse

$$\left|F(y) - \int_a^t f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_t^b f(x,y)\,dx\right| \le \int_t^b M(x)\,dx < \varepsilon$$

bulunur. δ yalnız ε'a bağlıdır; integral Y üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

Örnek 20.6 (İkinci Tip Bir İntegralde M-Testi). $c \in \mathbb{R}$ olsun. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{xy}}{\sqrt{1-x}}\,dx$ integralinin $(-\infty, c]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
İntegrali alınan fonksiyon $x \to 1^-$ iken sınırsızdır; integral II. tiptir ve tekil nokta $x = 1$'dir.
Sınır. $0 \le x < 1$ ve $y \le c$ olsun. $y \le 0$ ise $xy \le 0 \le |\,c\,|$ olur. $y > 0$ ise $xy \le y \le c = |\,c\,|$ olur. İki durumda da $xy \le |\,c\,|$'dir; üstel fonksiyon artan olduğundan $e^{xy} \le e^{|\,c\,|}$ ve

$$\left|\frac{e^{xy}}{\sqrt{1-x}}\right| \le \frac{e^{|\,c\,|}}{\sqrt{1-x}} = M(x)$$

bulunur. M, y'ye bağlı değildir.
Tek değişkenli integral. $\left(-2\sqrt{1-x}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ olduğundan $0 < t < 1$ için

$$\int_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^t = 2 - 2\sqrt{1-t}$$

olur ve $t \to 1^-$ iken bu ifade 2'ye yakınsar. Dolayısıyla $\displaystyle\int_0^1 M(x)\,dx = 2e^{|\,c\,|}$ yakınsaktır.
Sonuç. Sonuç 20.1 gereği integral $(-\infty, c]$ üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

M-testi bir yeter koşuldur ve her zaman mutlak yakınsaklık da verir. Şartlı yakınsak integrallerde, örneğin $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ türünden integrallerde (Örnek 16.8) hiçbir zaman işe yaramaz; böyle integraller için daha ince testler gerekir.

20.4 Dirichlet ve Abel Testleri

Mutlak yakınsamayan integrallerde, integrali alınan fonksiyon $f \cdot g$ biçiminde iki çarpana ayrılır: f salınan, g ise monoton çarpandır. Tek değişkenli testlerin (Teorem 16.6, Teorem 16.7) ve serilerdeki karşılıklarının (Teorem 7.3, Teorem 7.4) düzgün sürümlerini kuracağız. Serilerde Abel'in toplama formülünün oynadığı rolü burada ikinci ortalama değer teoremi oynar (bkz. Analiz 2): φ, $[p,q]$ üzerinde integrallenebilir ve ψ monoton ise

$$\int_p^q \varphi(x)\,\psi(x)\,dx = \psi(p)\int_p^{\xi} \varphi(x)\,dx + \psi(q)\int_{\xi}^q \varphi(x)\,dx \tag{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olacak biçimde bir $\xi \in [p,q]$ vardır.

Teorem 20.4 (Parametreye Bağlı İntegraller için Dirichlet Testi). *$f,g:[a,+\infty)\times Y\to\mathbb{R}$ olsun ve her $y\in Y$, her $b>a$ için $x\mapsto f(x,y)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:*

(i) *f'nin integralleri düzgün sınırlıdır: öyle bir $M>0$ vardır ki her $\tau\geq a$ ve her $y\in Y$ için $\left|\int_a^\tau f(x,y)\,dx\right|\leq M$ olur;*

(ii) *her $y\in Y$ için $x\mapsto g(x,y)$ fonksiyonu $[a,+\infty)$ üzerinde monotondur;*

(iii) *$x\to+\infty$ iken $g(x,y)$, y'ye göre düzgün olarak 0'a gider: her $\eta>0$ için öyle bir $B>a$ vardır ki $x\geq B$ ve her $y\in Y$ için $|\,g(x,y)\,|<\eta$ olur.*

O zaman $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ integrali Y üzerinde düzgün yakınsaktır.

İspat.
y sabitken $x\mapsto g(x,y)$ monoton olduğundan sınırlı her aralıkta integrallenebilirdir (bkz. Analiz 2); integrallenebilir iki fonksiyonun çarpımı olan $x\mapsto f(x,y)\,g(x,y)$ de öyledir (bkz. Analiz 2).
Adım 1: f'nin her aralıktaki integrali sınırlıdır. *$a\leq p\leq q$ ve $y\in Y$ için (i) koşulu*

$$\left|\int_p^q f(x,y)\,dx\right| = \left|\int_a^q f(x,y)\,dx - \int_a^p f(x,y)\,dx\right| \leq 2M \tag{3}$$

verir.
Adım 2: Cauchy kriteri. *$\varepsilon>0$ verilsin. (iii) koşulunu $\eta=\dfrac{\varepsilon}{4M}$ ile uygulayalım: öyle bir $B>a$ vardır ki $x\geq B$ ve her $y\in Y$ için $|\,g(x,y)\,|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$ olur. $b_2>b_1\geq B$ ve $y\in Y$ sabitlensin. (2) eşitliğini $[b_1,b_2]$ aralığında $\varphi=f(\cdot,y)$ ve $\psi=g(\cdot,y)$ ile yazalım: öyle bir $\xi\in[b_1,b_2]$ vardır ki*

$$\begin{aligned}\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,g(x,y)\,dx &= g(b_1,y)\int_{b_1}^{\xi} f(x,y)\,dx \\ &\quad + g(b_2,y)\int_{\xi}^{b_2} f(x,y)\,dx\end{aligned}$$

olur. Mutlak değer alıp (3) sınırını kullanalım:

$$\begin{aligned}\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,g(x,y)\,dx\right| &\leq 2M\left(\,|\,g(b_1,y)\,|+|\,g(b_2,y)\,|\,\right)\\ &< 2M\left(\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{4M}\right)=\varepsilon.\end{aligned}$$

B yalnız ε'a bağlıdır. Teorem 20.2 gereği integral Y üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

Teorem 20.5 (Parametreye Bağlı İntegraller için Abel Testi). *$f,g:[a,+\infty)\times Y\to\mathbb{R}$ olsun ve her $y\in Y$, her $b>a$ için $x\mapsto f(x,y)$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:*

(i) *$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ integrali Y üzerinde düzgün yakınsaktır;*

(ii) *her $y\in Y$ için $x\mapsto g(x,y)$ fonksiyonu $[a,+\infty)$ üzerinde monotondur;*

(iii) *g düzgün sınırlıdır: öyle bir $K>0$ vardır ki her $x\geq a$ ve her $y\in Y$ için $|\,g(x,y)\,|\leq K$ olur.*

O zaman $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ integrali Y üzerinde düzgün yakınsaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Çarpımın sınırlı aralıklarda integrallenebilirliği Dirichlet testinin ispatındaki gibidir. $\varepsilon > 0$ verilsin. (i) koşulu ve Teorem 20.2 gereği öyle bir $B > a$ vardır ki $q > p \geq B$ ve her $y \in Y$ için

$$\left| \int_p^q f(x,y)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{3K} \tag{4}$$

olur; $p = q$ için integral 0 olduğundan eşitsizlik $q \geq p \geq B$ için de geçerlidir. $b_2 > b_1 \geq B$ ve $y \in Y$ sabitlensin. (2) eşitliği, $[b_1, b_2]$ aralığında $\varphi = f(\cdot, y)$ ve $\psi = g(\cdot, y)$ için bir $\xi \in [b_1, b_2]$ verir. $b_1 \leq \xi \leq b_2$ olduğundan (4) eşitsizliği iki integrale de uygulanır; (iii) ile birlikte

$$\begin{aligned} \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x,y)\,g(x,y)\,dx \right| &\leq |\, g(b_1,y)\,| \left| \int_{b_1}^{\xi} f(x,y)\,dx \right| \\ &\quad + |\, g(b_2,y)\,| \left| \int_{\xi}^{b_2} f(x,y)\,dx \right| \\ &< K \cdot \frac{\varepsilon}{3K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{3K} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 20.2 gereği integral Y üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

İki testin koşullarını karşılaştıralım:

Tablo 20.2: Parametreye bağlı integraller için Dirichlet ve Abel testlerinin koşulları

	f	g
Dirichlet	$\int_a^\tau f\,dx$ integralleri düzgün sınırlı	x'e göre monoton, düzgün olarak 0'a gider
Abel	$\int_a^{+\infty} f\,dx$ düzgün yakınsak	x'e göre monoton, düzgün sınırlı

Dirichlet testi f'den daha azını, g'den daha çoğunu ister; Abel testinde denge tersinedir. Çarpanlardan biri parametreye bağlı değilse o çarpanla ilgili düzgünlük koşulu kendiliğinden sağlanır: tek bir B zaten bütün y değerleri için aynıdır.

Örnek 20.7 (Abel Testiyle Düzgün Yakınsaklık). $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$ integralinin $[0, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ olduğundan

$$s(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde süreklidir; $x = 0$ bir tekil nokta değildir ve integral I. tiptir. $f(x,y) = s(x)$ ve $g(x,y) = e^{-xy}$ alalım; $Y = [0, +\infty)$.
(i) $\int f$ düzgün yakınsaktır. $\displaystyle\int_0^1 s(x)\,dx$ sürekli bir fonksiyonun sıradan integralidir; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ ise yakınsaktır (Örnek 16.9). Dolayısıyla $\displaystyle\int_0^{+\infty} s(x)\,dx$ yakınsaktır. f, y'ye bağlı olmadığından tanımdaki B sayısı her y için aynıdır; yakınsama Y üzerinde düzgündür.
(ii) Monotonluk. $y \geq 0$ sabitken $x \mapsto e^{-xy}$ azalandır ($y = 0$ için sabittir).
(iii) Düzgün sınırlılık. $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ için $xy \geq 0$ olduğundan $0 < e^{-xy} \leq 1$; $K = 1$ alınır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 20.5 gereği integral $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
M-testi burada kullanılamaz: $y=0$ için integral şartlı yakınsaktır, mutlak yakınsak değildir (Örnek 16.8); oysa M-testi her parametre değerinde mutlak yakınsaklık verir. ■

Örnek 20.8 (Abel Testinde Çarpanları Seçmek). $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}\,\frac{\sin(xy)}{x}\,dx$ integralinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu Abel testiyle gösteriniz.

Çözüm.
İntegrali alınan fonksiyonu

$$e^{-x}\,\frac{\sin(xy)}{x} = \underbrace{xe^{-x}\sin(xy)}_{f(x,y)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x,y)}$$

biçiminde ayıralım.
(i) $\int f$ düzgün yakınsaktır. Her $x\geq 1$ ve $y\in\mathbb{R}$ için $\mid xe^{-x}\sin(xy)\mid \leq xe^{-x}$ olur. Kısmi integrasyonla

$$\int_1^b xe^{-x}\,dx = \Big[-xe^{-x}-e^{-x}\Big]_1^b = \frac{2}{e}-\frac{b+1}{e^b}$$

bulunur; $b\to+\infty$ iken bu ifade $\dfrac{2}{e}$ sayısına yakınsar. Teorem 20.3 gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}\sin(xy)\,dx$ integrali $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
(ii) Monotonluk. $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ fonksiyonu $[1,+\infty)$ üzerinde azalandır.
(iii) Düzgün sınırlılık. $x\geq 1$ için $0<\dfrac{1}{x^2}\leq 1$; $K=1$ alınır.
Teorem 20.5 gereği integral $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Aynı sonucu Örnek 20.5 çözümünde doğrudan M-testiyle elde etmiştik; bu örnek, Abel testinde çarpanların nasıl seçildiğini göstermektedir. ■

Örnek 20.9 (Dirichlet Testiyle Düzgün Yakınsaklık). $\delta>0$ olsun. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\,dx$ integralinin $[\delta,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$f(x,y)=\sin(xy)$ ve $g(x,y)=\dfrac{1}{x}$ alalım; $Y=[\delta,+\infty)$.
(i) İntegraller düzgün sınırlıdır. $y\geq\delta$ ve $\tau\geq 1$ için

$$\left|\int_1^{\tau}\sin(xy)\,dx\right| = \left|\left[-\frac{\cos(xy)}{y}\right]_1^{\tau}\right| = \frac{\mid\cos y-\cos(\tau y)\mid}{y}\leq\frac{2}{y}\leq\frac{2}{\delta}$$

olur; $M=\dfrac{2}{\delta}$ alınır.
(ii) Monotonluk. $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $[1,+\infty)$ üzerinde azalandır.
(iii) Düzgün olarak sıfıra gitme. $\dfrac{1}{x}\to 0$ olur ve g, y'ye bağlı olmadığından bu yakınsama y'ye göre düzgündür.
Teorem 20.4 gereği integral $[\delta,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır. ■

Örnek 20.10 (Sıfır Yakınında Düzgünlüğün Bozulması). $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\,dx$ integralinin $(0,+\infty)$ üzerinde noktasal yakınsak olduğunu, ama düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Noktasal yakınsaklık. $y_0 > 0$ verilsin. Örnek 20.9 sonucu $\delta = y_0$ ile uygulanırsa integral $[y_0, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır; özel olarak $y = y_0$ için yakınsaktır.
Düzgün yakınsamama. Cauchy kriterinin olumsuzunu kullanacağız. $B > 1$ verilsin; $b_1 = B$, $b_2 = 2B$ ve $y_B = \dfrac{\pi}{4B} > 0$ alalım. $u = xy_B$ değişken değiştirmesiyle $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{u}$ olur; $x = B$ için $u = \dfrac{\pi}{4}$, $x = 2B$ için $u = \dfrac{\pi}{2}$'dir:

$$\int_B^{2B} \frac{\sin(xy_B)}{x}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

$\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ aralığında sinüs artandır; dolayısıyla $\sin u \geq \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ olur ve

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin u}{u}\,du \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{du}{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$$

bulunur. $\varepsilon_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 \approx 0{,}49$ sayısı B'den bağımsızdır. Her $B > 1$ için $b_2 > b_1 \geq B$ olan b_1, b_2 sayıları ve bir $y_B \in (0, +\infty)$ noktası

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin(xy_B)}{x}\,dx\right| \geq \varepsilon_0$$

eşitsizliğini sağlamaktadır. Teorem 20.2 gereği integral $(0, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. Dirichlet testi açısından bozulan koşul (i)'dir: $\dfrac{2}{y}$ sınırı $y \to 0^+$ iken sınırsız büyür. ■

20.5 Süreklilik ve Dini Teoremi

Düzgün yakınsaklığın ilk ödülü sürekliliktir. İki değişkenli f fonksiyonunun sürekliliğini Parametreye Bağlı İntegraller bölümündeki anlamda kullanıyoruz.

Teorem 20.6 (Düzgün Yakınsak İntegral Süreklidir). *$c < d$ olsun ve f, $[a, +\infty) \times [c, d]$ üzerinde sürekli olsun. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ integrali $[c, d]$ üzerinde düzgün yakınsaksa*

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

fonksiyonu $[c, d]$ üzerinde süreklidir.

İspat.
Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\,dx \qquad (y \in [c, d])$$

tanımlayalım. f, $[a, a+n] \times [c, d]$ dikdörtgeninde sürekli olduğundan Teorem 19.2 gereği her F_n, $[c, d]$ üzerinde süreklidir. $u_n = a + n \to +\infty$ ve integral düzgün yakınsak olduğundan Teorem 20.1 gereği $F_n \rightrightarrows F$ ($[c, d]$) olur. Sürekli fonksiyonların düzgün limiti süreklidir (Teorem 4.2); öyleyse F, $[c, d]$ üzerinde süreklidir. ■

Süreklilik yerel bir özellik olduğundan düzgün yakınsaklığın bütün parametre kümesinde değil, her kapalı ve sınırlı alt aralıkta sağlanması yeter.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç 20.2 (Yerel Düzgün Yakınsaklıkla Süreklilik). *$J \subseteq \mathbb{R}$ birden çok nokta içeren bir aralık ve f, $[a,+\infty) \times J$ üzerinde sürekli olsun. $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ integrali J'nin kapalı ve sınırlı her $[c,d]$ alt aralığında düzgün yakınsaksa F, J üzerinde süreklidir.*

> ***İspat.***
> *$y_0 \in J$ verilsin. y_0 noktasını içeren bir $[c,d] \subseteq J$ aralığı ($c<d$) seçelim; y_0, J'nin bir uç noktası değilse $[c,d]$ aralığı y_0'ı iç nokta olarak içerecek biçimde seçilir. Teorem 20.6 gereği F'nin $[c,d]$'ye kısıtlaması y_0'da süreklidir. J'nin y_0'a yeterince yakın bütün noktaları $[c,d]$ aralığında olduğundan bu, F'nin J üzerinde y_0 noktasında sürekli olması demektir.* ■

Teoremin koşulları altında $y_0 \in [c,d]$ için $\lim_{y\to y_0} F(y) = F(y_0)$ olur. f sürekli olduğundan $f(x,y_0) = \lim_{y\to y_0} f(x,y)$'dir; dolayısıyla bu eşitlik

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{+\infty} \Big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Big)\,dx$$

biçiminde yazılabilir: limit ile genelleştirilmiş integral yer değiştirir.
Teoremin karşıt tersi, serilerdeki gibi, düzgün yakınsamamayı hesapsız göstermeye yarar: f sürekli olduğu hâlde F sürekli değilse yakınsama düzgün olamaz. Bölümün başındaki $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-tx}\,dx$ integralinde te^{-tx} fonksiyonu $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ üzerinde süreklidir, ama F, $t=0$'da süreksizdir (Örnek 20.1). Öyleyse hiçbir $d>0$ için integral $[0,d]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir; Örnek 20.2 çözümündeki hesap da bunu verir: oradaki $t_b = \dfrac{1}{b}$ noktası $b \geq \dfrac{1}{d}$ için $[0,d]$ içindedir.
Süreklilik teoreminin ilk uygulaması olarak, Euler İntegralleri bölümünde tanımlanan Gamma fonksiyonunun (Tanım 18.1) sürekli olduğunu gösterelim.

Örnek 20.11 (Gamma Fonksiyonunun Sürekliliği). $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$ fonksiyonunun $(0,+\infty)$ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

> **Çözüm.**
> Süreklilik yerel olduğundan, $0<c<d$ olan her $[c,d]$ aralığında sürekliliği göstermek yeter. İntegral $\alpha<1$ için $x=0$'da tekildir; Teorem 18.1 ispatındaki gibi ikiye ayıralım:
>
> $$\Gamma_1(\alpha) = \int_0^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx,$$
> $$\Gamma_2(\alpha) = \int_1^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx.$$
>
> **Γ_2 süreklidir.** $e^{-x}x^{\alpha-1}$ fonksiyonu $[1,+\infty)\times[c,d]$ üzerinde süreklidir. $x\geq 1$ ve $\alpha \leq d$ için $x^{\alpha-1} \leq x^{d-1}$ olduğundan
>
> $$0 < e^{-x}x^{\alpha-1} \leq e^{-x}x^{d-1} = M(x)$$
>
> olur. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}x^{d-1}\,dx$ yakınsaktır (Teorem 18.1). Teorem 20.3 gereği $\Gamma_2(\alpha)$ integrali $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır; Teorem 20.6 gereği Γ_2, $[c,d]$ üzerinde süreklidir.
> **Γ_1 süreklidir.** Her $n\geq 2$ için
>
> $$G_n(\alpha) = \int_{1/n}^1 e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$$
>
> tanımlayalım. İntegrali alınan fonksiyon $\left[\dfrac{1}{n},1\right]\times[c,d]$ dikdörtgeninde sürekli olduğundan Teorem 19.2 gereği her G_n, $[c,d]$ üzerinde süreklidir. $0<x\leq 1$ ve $\alpha\geq c$ için $e^{-x}\leq 1$ ve $x^{\alpha-1}\leq x^{c-1}$ olduğundan karşılaştırma testiyle (Teorem 17.4)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$0 \le \Gamma_1(\alpha) - G_n(\alpha) = \int_0^{1/n} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx \le \int_0^{1/n} x^{c-1}\,dx = \frac{1}{c\,n^c}$$

bulunur. Sağdaki sayı α'dan bağımsızdır ve $c > 0$ olduğundan $n \to \infty$ iken 0'a gider. Teorem 3.1 gereği $G_n \rightrightarrows \Gamma_1$ ($[c,d]$) olur; sürekli fonksiyonların düzgün limiti olarak Γ_1 süreklidir (Teorem 4.2).
Sonuç. $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, $[c,d]$ üzerinde süreklidir. c ve d keyfi olduğundan Γ, $(0,+\infty)$ üzerinde süreklidir. ■

Γ_1 için yapılan hesap $\dfrac{1}{n}$ yerine herhangi bir $0 < t \le 1$ ile yinelenirse her $\alpha \in [c,d]$ için

$$0 \le \int_0^{t} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx \le \frac{t^c}{c}$$

bulunur. Sağ yan α'dan bağımsızdır ve $t \to 0^+$ iken 0'a gider; yani tekil noktası 0 olan integral $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır (Tanım 20.3). Öte yandan yakınsama $(0,d]$ üzerinde düzgün değildir: $0 < t \le 1$ sabitken $[0,t]$ üzerinde $e^{-x} \ge e^{-1}$ olduğundan kalan

$$\int_0^{t} e^{-x} x^{\alpha-1}\,dx \ge \frac{1}{e}\int_0^{t} x^{\alpha-1}\,dx = \frac{t^\alpha}{e\,\alpha}$$

eşitsizliğini sağlar ve sağ yan $\alpha \to 0^+$ iken sınırsız büyür.
Teorem 20.6 ifadesinin tersi ise doğru değildir: f ve F sürekli olduğu hâlde yakınsama düzgün olmayabilir.

Örnek 20.12 (Sürekli Limite Düzgün Olmayan Yakınsama). $\displaystyle\int_0^{+\infty} y\,(xy-1)\,e^{-xy}\,dx$ integralinin $[0,1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyona noktasal yakınsadığını, ama yakınsamanın düzgün olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
$f(x,y) = y\,(xy-1)\,e^{-xy}$ fonksiyonu $[0,+\infty) \times [0,1]$ üzerinde süreklidir.
Sınırlı aralıkta integral. Çarpım kuralıyla

$$\frac{\partial}{\partial x}(-xy\,e^{-xy}) = -y\,e^{-xy} + xy^2 e^{-xy} = y\,(xy-1)\,e^{-xy}$$

olduğundan her $b > 0$ için

$$\int_0^{b} y\,(xy-1)\,e^{-xy}\,dx = \Big[-xy\,e^{-xy}\Big]_0^{b} = -by\,e^{-by}$$

bulunur.
Noktasal limit. $y = 0$ için bu ifade 0'dır. $y > 0$ için $b \to +\infty$ iken $by \to +\infty$ olur ve üstel fonksiyon her kuvvetten hızlı büyüdüğünden $by\,e^{-by} \to 0$'dır. Öyleyse her $y \in [0,1]$ için $F(y) = 0$ olur; F süreklidir.
Düzgün yakınsamama. Kalan

$$F(y) - \int_0^{b} f(x,y)\,dx = by\,e^{-by}$$

sayısıdır. $b \ge 1$ için $y_b = \dfrac{1}{b} \in [0,1]$ noktasında kalan $1 \cdot e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ olur. Öyleyse her $b \ge 1$ için kalanların $[0,1]$ üzerindeki supremumu en az $\dfrac{1}{e}$'dir ve 0'a gitmez; integral $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu örnekte f işaret değiştirmektedir: $xy < 1$ iken negatif, $xy > 1$ iken pozitiftir. Bu bir zorunluluktur. Fonksiyon dizilerinde olduğu gibi (Teorem 4.3), işaret değiştirmeyen integrallerde limitin sürekliliği düzgün yakınsaklığı kendiliğinden getirir.

Teorem 20.7 (Parametreye Bağlı İntegraller için Dini Teoremi). *$c < d$ olsun ve f, $[a, +\infty) \times [c, d]$ üzerinde sürekli olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:*

(i) *her (x, y) için $f(x, y) \geq 0$;*

(ii) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ *integrali $[c, d]$ üzerinde noktasal yakınsaktır;*

(iii) $\displaystyle F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx$ *fonksiyonu $[c, d]$ üzerinde süreklidir.*

O zaman integral $[c, d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

> ***İspat.***
> $\displaystyle F_n(y) = \int_a^{a+n} f(x, y)\, dx$ *dizisini ele alalım ve fonksiyon dizileri için Dini teoreminin (Teorem 4.3) koşullarını denetleyelim.*
> *Her F_n, $[c, d]$ üzerinde süreklidir (Teorem 19.2). $f \geq 0$ olduğundan her $y \in [c, d]$ için*
>
> $$F_{n+1}(y) - F_n(y) = \int_{a+n}^{a+n+1} f(x, y)\, dx \geq 0$$
>
> *olur; $\big(\, F_n(y) \,\big)$ sayı dizisi artandır. (iii) gereği F süreklidir ve (ii) gereği $F_n \to F$ (noktasal, $[c, d]$) olur. Dört koşul da sağlandığından Teorem 4.3 gereği $F_n \rightrightarrows F$ ($[c, d]$) olur. Geriye tam sayı olmayan üst sınırlara geçmek kalıyor. $\varepsilon > 0$ verilsin; öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $y \in [c, d]$ için $0 \leq F(y) - F_N(y) < \varepsilon$ olur. $b \geq a + N$ ve $y \in [c, d]$ olsun. $f \geq 0$ olduğundan $b \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x, y)\, dx$ fonksiyonu artandır ve limiti $F(y)$'dir; dolayısıyla*
>
> $$F_N(y) = \int_a^{a+N} f(x, y)\, dx \leq \int_a^b f(x, y)\, dx \leq F(y)$$
>
> *sağlanır. Buradan*
>
> $$0 \leq F(y) - \int_a^b f(x, y)\, dx \leq F(y) - F_N(y) < \varepsilon$$
>
> *bulunur. $B = a + N$ sayısı yalnız ε'a bağlıdır; integral $[c, d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.* ■

Teorem $f \leq 0$ için de geçerlidir; $-f$ fonksiyonuna uygulanır.

Örnek 20.13 (Dini Teoremiyle Düzgün Yakınsaklık). $0 < c < d$ olsun. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y}{1 + x^2 y^2}\, dx$ integralinin $[c, d]$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu Dini teoremiyle gösteriniz.

> **Çözüm.**
> $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2 y^2}$ fonksiyonu $[0, +\infty) \times [c, d]$ üzerinde süreklidir (payda hiç sıfır olmaz) ve $y > 0$ olduğundan pozitiftir.
> **Noktasal limit.** $\dfrac{\partial}{\partial x} \arctan(xy) = \dfrac{y}{1 + x^2 y^2}$ olduğundan
>
> $$\int_0^b \frac{y}{1 + x^2 y^2}\, dx = \Big[\arctan(xy)\Big]_0^b = \arctan(by)$$
>
> olur. $y > 0$ sabitken $b \to +\infty$ için $by \to +\infty$ ve $\arctan(by) \to \dfrac{\pi}{2}$'dir. Öyleyse her $y \in [c, d]$ için $F(y) = \dfrac{\pi}{2}$ olur.

Sonuç. F sabit fonksiyondur ve süreklidir. Teorem 20.7 gereği integral $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
Doğrulama. Kalan $\dfrac{\pi}{2} - \arctan(by)$ sayısıdır. Arktanjant artan olduğundan $y \geq c$ için kalan en çok $\dfrac{\pi}{2} - \arctan(bc)$ olur; bu sayı y'den bağımsızdır ve $b \to +\infty$ iken 0'a gider. ■

Aynı integral $[0,d]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir: $y = 0$ için integral 0'dır, yani $F(0) = 0 \neq \dfrac{\pi}{2}$ olur ve F, 0'da süreksizdir. Dini teoreminin (iii) koşulu bozulmuştur.

20.6 Parametreye Göre İntegral ve Türev

Sınırlı aralıkta sürekli f için geçerli olan iki işlem, integral sırasının değiştirilmesi (Teorem 19.4) ve integral işareti altında türev (Teorem 19.3), düzgün yakınsaklık eklendiğinde genelleştirilmiş integrallere taşınır. Bu sonuçlar fonksiyon dizilerindeki limit–integral (Teorem 5.1) ve limit–türev (Teorem 6.1) teoremlerinin karşılıklarıdır.

Teorem 20.8 (Genelleştirilmiş İntegralin Parametreye Göre İntegrali). *$c < d$ olsun ve f, $[a,+\infty)\times[c,d]$ üzerinde sürekli olsun. $F(y) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ integrali $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsaksa $\displaystyle\int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$ genelleştirilmiş integrali yakınsaktır ve*

$$\int_c^d \left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

olur.

İspat.
Teorem 20.6 gereği F, $[c,d]$ üzerinde süreklidir; dolayısıyla sol yandaki $\displaystyle\int_c^d F(y)\,dy$ integrali vardır. $b > a$ için

$$F_b(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx, \qquad \varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

yazalım. f, $[a,b]\times[c,d]$ dikdörtgeninde sürekli olduğundan F_b, $[c,d]$ üzerinde ve φ, $[a,b]$ üzerinde süreklidir (Teorem 19.2); integral sırası da değiştirilebilir (Teorem 19.4):

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_c^d F_b(y)\,dy. \tag{5}$$

$\rho(b) = \sup_{y\in[c,d]} | F(y) - F_b(y) |$ yazalım; düzgün yakınsaklık $b \to +\infty$ iken $\rho(b) \to 0$ demektir. (5) eşitliği, integralin lineerliği ve integraller için üçgen eşitsizliğiyle

$$\left|\int_c^d F(y)\,dy - \int_a^b \varphi(x)\,dx\right| = \left|\int_c^d \big(\,F(y) - F_b(y)\,\big)\,dy\right|$$
$$\leq \int_c^d | F(y) - F_b(y) |\,dy \leq \rho(b)\,(d-c)$$

bulunur. Sağ yan $b \to +\infty$ iken 0'a gider. Öyleyse $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\int_a^b \varphi(x)\,dx$ limiti vardır ve $\displaystyle\int_c^d F(y)\,dy$ sayısına eşittir. ■

Yani biri genelleştirilmiş olan iki integralin sırası, düzgün yakınsaklık altında değiştirilebilir. Bu, ilkeli bulunamayan bazı integralleri hesaplamanın yoludur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 20.14 (İntegral Sırasını Değiştirerek Hesap). $0 < c < d$ olsun. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-cx} - e^{-dx}}{x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Parametreli integral olarak yazma. $x > 0$ için

$$\int_c^d e^{-xy}\,dy = \left[-\frac{e^{-xy}}{x}\right]_{y=c}^{y=d} = \frac{e^{-cx} - e^{-dx}}{x}$$

olur. $x = 0$ için aynı integral $\displaystyle\int_c^d dy = d - c$ sayısıdır; bu, sağdaki kesrin $x \to 0^+$ limitidir. Öyleyse hesaplanacak integral, $f(x,y) = e^{-xy}$ olmak üzere $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$ integralidir ve $x = 0$ bir tekil nokta değildir.
Düzgün yakınsaklık. $f, [0,+\infty)\times[c,d]$ üzerinde süreklidir. $y \geq c$ ve $x \geq 0$ için $e^{-xy} \leq e^{-cx}$ olur ve $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-cx}\,dx = \frac{1}{c}$ yakınsaktır (Örnek 15.6). Teorem 20.3 gereği $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx$ integrali $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır; değeri $F(y) = \dfrac{1}{y}$'dir.
Sıra değişimi. Teorem 20.8 gereği

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-cx} - e^{-dx}}{x}\,dx = \int_c^d \frac{dy}{y} = \ln d - \ln c = \ln\frac{d}{c}$$

bulunur. ■

Türev teoreminde, fonksiyon dizilerindeki gibi, asıl koşul türevin integralinin düzgün yakınsamasıdır; integralin kendisinden yalnız bir noktada yakınsaklık istenir.

Teorem 20.9 (Genelleştirilmiş İntegralin Parametreye Göre Türevi). *$c < d$ olsun; f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $[a,+\infty)\times[c,d]$ üzerinde sürekli olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlansın:*

(i) en az bir $y_0 \in [c,d]$ için $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx$ yakınsaktır;

(ii) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ integrali $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

O zaman $\displaystyle F(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ integrali $[c,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır, F türevlenebilirdir ve her $y \in [c,d]$ için

$$F'(y) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

olur. (Uç noktalarda türev tek yönlü türev olarak anlaşılır.)

İspat.
$b > a$ ve $t \in [c,d]$ için

$$G(t) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dx, \qquad G_b(t) = \int_a^{b} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dx$$

yazalım. (ii) ve Teorem 20.6 gereği G, $[c,d]$ üzerinde süreklidir; G_b de süreklidir (Teorem 19.2). $\rho(b) = \sup_{t\in[c,d]} |\,G(t) - G_b(t)\,|$ olsun; (ii) gereği $b \to +\infty$ iken $\rho(b) \to 0$'dır.
Adım 1: Sınırlı aralıkta bir eşitlik. *$x \geq a$ sabitken $t \mapsto f(x,t)$ fonksiyonunun türevi $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t)$ süreklidir; analizin temel teoremi (bkz. Analiz 2) her $y \in [c,d]$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(x,y) - f(x,y_0) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,t)\,dt$$

verir. İki yanı x'e göre $[a,b]$ üzerinde integralleyip sağ yanda integral sırasını değiştirelim (Teorem 19.4; $y < y_0$ ise $[y,y_0]$ aralığında uygulanır ve iki yanın işareti birlikte değişir):

$$\int_a^b f(x,y)\,dx - \int_a^b f(x,y_0)\,dx = \int_{y_0}^{y} G_b(t)\,dt. \tag{6}$$

Adım 2: Limit adayı. $A = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx$ *olsun ve*

$$\Phi(y) = A + \int_{y_0}^{y} G(t)\,dt \qquad (y \in [c,d])$$

tanımlayalım. (6) *eşitliğinden*

$$\Phi(y) - \int_a^b f(x,y)\,dx = \left(A - \int_a^b f(x,y_0)\,dx\right) + \int_{y_0}^{y} \big(\, G(t) - G_b(t) \,\big)\,dt$$

olur. y_0 ile y arasındaki aralığın uzunluğu en çok $d-c$ olduğundan son integralin mutlak değeri en çok $\rho(b)\,(d-c)$'dir. Dolayısıyla her $y \in [c,d]$ için

$$\left|\Phi(y) - \int_a^b f(x,y)\,dx\right| \le \left|A - \int_a^b f(x,y_0)\,dx\right| + \rho(b)\,(d-c) \tag{7}$$

bulunur.
Adım 3: Düzgün yakınsaklık. (7) *eşitsizliğinin sağ yanı y'ye bağlı değildir ve $b \to +\infty$ iken 0'a gider: ilk terim (i) gereği, ikinci terim (ii) gereği. Öyleyse her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $B > a$ vardır ki $b \ge B$ ve her $y \in [c,d]$ için sol yan ε'dan küçüktür. Bu, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ integralinin her y için yakınsak olduğunu, değerinin $\Phi(y)$ olduğunu ve yakınsamanın $[c,d]$ üzerinde düzgün olduğunu söyler: $F = \Phi$.*
Adım 4: Türev. *G sürekli olduğundan $y \mapsto \displaystyle\int_{y_0}^{y} G(t)\,dt$ fonksiyonu türevlenebilirdir ve türevi $G(y)$'dir (bkz. Analiz 2). Öyleyse $F(y) = A + \displaystyle\int_{y_0}^{y} G(t)\,dt$ türevlenebilirdir ve $F'(y) = G(y)$ olur.* ■

Teoremi Teorem 6.1 ile karşılaştıralım: y_0 noktası oradaki "çapa" noktasının, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ integralinin düzgün yakınsaklığı da türev dizisinin düzgün yakınsaklığının karşılığıdır. Türevlenebilirlik de yerel bir özelliktir: koşullar bir J aralığının kapalı ve sınırlı her alt aralığında sağlanıyorsa türev formülü bütün J üzerinde geçerlidir.

20.7 Dirichlet İntegrali

Bölümün bütün araçlarını tek bir hesapta bir araya getiriyoruz. $\dfrac{\sin x}{x}$ fonksiyonunun ilkeli temel fonksiyonlarla yazılamaz; yine de $[0,+\infty)$ üzerindeki integrali, integrale bir parametre eklenerek bulunabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Beş adımda integral işareti altında türevle hesap

1. **Parametre ekle.** Hesaplanacak integral, bir $I(y)$ ailesinin özel bir değeri olacak biçimde parametreye bağlanır.
2. **Düzgün yakınsaklığı göster.** $I(y)$ integralinin ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ integralinin hangi kümelerde düzgün yakınsadığı bir testle belirlenir.
3. **Türev al.** Teorem 20.9 ile $I'(y)$ yazılır; bu integralin çoğu zaman ilkeli bulunur.
4. **Geri integralle.** $I'(y)$ bilindiğinde $I(y)$ bir sabit farkıyla belirlenir.
5. **Sabiti bul.** I'nin bilinen bir değeri ya da bir limiti kullanılır; aranan değere gerekiyorsa süreklilikle (Teorem 20.6) geçilir.

Örnek 20.15 (Dirichlet İntegralinin Değeri). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

Adım 1: Parametre. Örnek 20.7 çözümündeki sürekli s fonksiyonuyla ($x>0$ için $s(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $s(0)=1$)

$$I(y)=\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,s(x)\,dx \qquad (y\geq 0)$$

tanımlayalım; aranan sayı $I(0)$'dır. $f(x,y)=e^{-xy}\,s(x)$ fonksiyonu $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ üzerinde süreklidir. $x\,s(x)=\sin x$ eşitliği $x=0$ için de doğru olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x\,e^{-xy}\,s(x)=-e^{-xy}\sin x$$

olur ve bu fonksiyon da süreklidir.

Adım 2: Düzgün yakınsaklık. Örnek 20.7 gereği $I(y)$ integrali $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Sonuç 20.2 gereği I, $[0,+\infty)$ üzerinde süreklidir; özel olarak

$$I(0)=\lim_{y\to 0^+} I(y) \tag{8}$$

olur. Türevin integrali için $0<\delta<d$ alalım. $y\in[\delta,d]$ ve $x\geq 0$ için

$$|-e^{-xy}\sin x|\leq e^{-xy}\leq e^{-\delta x}$$

olur ve $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\delta x}\,dx=\frac{1}{\delta}$ yakınsaktır (Örnek 15.6). Teorem 20.3 gereği $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ integrali $[\delta,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Adım 3: Türev. f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ süreklidir, $I(y)$ her $y\geq 0$ için yakınsaktır ve türevin integrali $[\delta,d]$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Teorem 20.9, $[\delta,d]$ aralığında uygulanır: I bu aralıkta türevlenebilirdir ve

$$I'(y)=-\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$$

olur. Her $y>0$ sayısı $\delta<y<d$ olan bir $[\delta,d]$ aralığının iç noktası olduğundan bu formül her $y>0$ için geçerlidir. Sağdaki integrali hesaplayalım. Çarpım kuralıyla

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\,e^{-xy}\,(y\sin x+\cos x)\,\Big) &= -y\,e^{-xy}\,(y\sin x+\cos x)\\ &\quad +e^{-xy}\,(y\cos x-\sin x)\\ &= -(1+y^2)\,e^{-xy}\sin x\end{aligned}$$

olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^b e^{-xy}\sin x\,dx = \left[-\frac{e^{-xy}\,(y\sin x+\cos x)}{1+y^2}\right]_0^b = \frac{1-e^{-by}\,(y\sin b+\cos b)}{1+y^2}$$

bulunur. Paydaki ikinci terim için

$$\left|e^{-by}\,(y\sin b+\cos b)\right| \le (y+1)\,e^{-by}$$

olur ve $y>0$ olduğundan $b\to+\infty$ iken bu terim 0'a gider. Öyleyse

$$I'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \qquad (y>0)$$

olur.

Adım 4: Geri integralleme. $(\arctan y)' = \dfrac{1}{1+y^2}$ olduğundan $I(y)+\arctan y$ fonksiyonunun $(0,+\infty)$ aralığındaki türevi özdeş olarak sıfırdır; bu fonksiyon sabittir (bkz. Analiz 2). Bir C sabiti için

$$I(y) = C - \arctan y \qquad (y>0)$$

olur.

Adım 5: Sabit. $x\ge 0$ için $|\sin x| \le x$ olduğundan $|\,s(x)\,|\le 1$'dir. $y>0$ ve $b>0$ için

$$\left|\int_0^b e^{-xy}\,s(x)\,dx\right| \le \int_0^b e^{-xy}\,dx = \frac{1-e^{-by}}{y} \le \frac{1}{y}$$

olur; $b\to+\infty$ iken $|\,I(y)\,|\le \dfrac{1}{y}$ bulunur. Dolayısıyla $\lim_{y\to+\infty} I(y)=0$'dır. Öte yandan $\lim_{y\to+\infty}\arctan y = \dfrac{\pi}{2}$ olduğundan

$$0 = \lim_{y\to+\infty} I(y) = C - \frac{\pi}{2}$$

ve $C=\dfrac{\pi}{2}$ çıkar:

$$I(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan y \qquad (y>0).$$

Sonuç. (8) eşitliği ve arktanjantın 0'daki sürekliliğiyle

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = I(0) = \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan y\right) = \frac{\pi}{2}$$

bulunur. ■

Hesabın her adımı bir teoreme yaslanır ve hiçbiri atlanamaz. $I'(y)$ formülü yalnız $y>0$ için elde edildi, çünkü türevin integrali $y=0$ yakınında düzgün yakınsamaz; $y=0$'a ancak I'nin sürekliliğiyle, yani Abel testinin verdiği düzgün yakınsaklıkla inilebildi.

Bu sonuç, Örnek 20.10 ile ilgili de bir şey söyler. $y>0$ için $u=xy$ değişken değiştirmesi

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\,dx = \int_y^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\,du$$

verir ve $y\to 0^+$ iken sağ yan $\dfrac{\pi}{2}$ sayısına yakınsar. Oysa $y=0$ için integral 0'dır. Parametreye 0 eklendiğinde limit fonksiyonu süreksiz olur; 0 yakınında düzgün yakınsaklığın bozulması bir kez daha kendini göstermiştir.

 CC BY-NC-SA 4.0

20.8 Alıştırmalar

İlk üç alıştırma, sınırlı aralıktaki parametreye bağlı integraller için Leibniz formülünü (Sonuç 19.1) yineler; kalanlar bu bölümün konusudur.

Alıştırma 20.1 (Sınırları Parametreye Bağlı İntegral). $0 < y \le \pi$ için $F(y) = \displaystyle\int_{\sin y}^{y} (\ln 2 + xy)\,dx$ olsun. $F'(y)$ türevini Leibniz formülüyle hesaplayınız.

Çözüm.
$f(x,y) = \ln 2 + xy$, alt sınır $u(y) = \sin y$ ve üst sınır $v(y) = y$ olsun. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x$, $u'(y) = \cos y$ ve $v'(y) = 1$'dir. f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ bütün düzlemde süreklidir; $0 < y \le \pi$ için $\sin y$ ve y sayıları $[0,\pi]$ aralığındadır. Öyleyse her $0 < c < \pi$ için koşullar $[0,\pi] \times [c,\pi]$ dikdörtgeninde sağlanır. Sonuç 19.1 gereği

$$F'(y) = \int_{\sin y}^{y} x\,dx + f(y,y)\cdot 1 - f(\sin y, y)\cdot \cos y$$

olur. Üç terimi ayrı ayrı yazalım:

$$\int_{\sin y}^{y} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\sin y}^{y} = \frac{y^2 - \sin^2 y}{2},$$

$$f(y,y) = \ln 2 + y^2,$$

$$f(\sin y, y)\cos y = \ln 2 \cdot \cos y + y \sin y \cos y.$$

Toplayarak

$$F'(y) = \frac{3y^2 - \sin^2 y}{2} + (1 - \cos y)\ln 2 - y \sin y \cos y$$

bulunur.
Doğrulama. İntegral doğrudan alınabilir:

$$F(y) = (y - \sin y)\ln 2 + \frac{y\,(y^2 - \sin^2 y)}{2}.$$

Çarpım kuralıyla türevi

$$F'(y) = (1 - \cos y)\ln 2 + \frac{y^2 - \sin^2 y}{2} + y\,(y - \sin y \cos y)$$

olur; $\dfrac{y^2}{2} + y^2 = \dfrac{3y^2}{2}$ olduğundan bu, yukarıdaki ifadeyle aynıdır. ■

Alıştırma 20.2 (Leibniz Formülü ve Üstel Fonksiyon). $y > 0$ için $F(y) = \displaystyle\int_{y}^{y^2} \frac{e^{-xy}}{x}\,dx$ olsun. $F'(y)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm.
$f(x,y) = \dfrac{e^{-xy}}{x}$, $u(y) = y$ ve $v(y) = y^2$ olsun. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -e^{-xy}$, $u'(y) = 1$ ve $v'(y) = 2y$'dir. y pozitif sayılardan oluşan kapalı ve sınırlı bir aralıkta değişirken $u(y)$ ve $v(y)$ de pozitif sayılardan oluşan kapalı ve sınırlı bir aralıkta kalır; f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ bu dikdörtgende süreklidir. Sonuç 19.1 gereği

$$F'(y) = \int_{y}^{y^2} (-e^{-xy})dx + f(y^2,y)\cdot 2y - f(y,y)\cdot 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{e^{-xy}}{y}\right) = -e^{-xy}$ olduğundan

$$\int_{y}^{y^2} (-e^{-xy})dx = \left[\frac{e^{-xy}}{y}\right]_{x=y}^{x=y^2} = \frac{e^{-y^3} - e^{-y^2}}{y}$$

bulunur. Sınır terimleri

$$f(y^2, y)\cdot 2y = \frac{e^{-y^3}}{y^2}\cdot 2y = \frac{2e^{-y^3}}{y}, \qquad f(y,y) = \frac{e^{-y^2}}{y}$$

olur. Toplayarak

$$F'(y) = \frac{e^{-y^3} - e^{-y^2}}{y} + \frac{2e^{-y^3}}{y} - \frac{e^{-y^2}}{y} = \frac{3e^{-y^3} - 2e^{-y^2}}{y}$$

elde edilir. ($0 < y < 1$ için $y^2 < y$ olur; $\displaystyle\int_y^{y^2} = -\int_{y^2}^{y}$ anlaşmasıyla formül aynen geçerlidir.) ■

Alıştırma 20.3 (İntegrasyon Değişkenini İçermeyen İntegrand). $y > 0$ için $F(y) = \displaystyle\int_y^{y^2} \frac{dx}{\ln(1+y)}$ olsun. $F'(y)$ türevini Leibniz formülüyle hesaplayınız.

Çözüm.
$f(x,y) = \dfrac{1}{\ln(1+y)}$ fonksiyonu x'e bağlı değildir; $u(y) = y$, $v(y) = y^2$. $y > 0$ için $\ln(1+y) \neq 0$ olduğundan f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $0 < c \le y \le d$ olan her şeritte süreklidir; u ve v türevlenebilirdir ve bu y'ler için değerleri sınırlı bir aralıkta kalır. Zincir kuralıyla

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{(1+y)\ln^2(1+y)}$$

olur. Sonuç 19.1 gereği

$$F'(y) = \int_y^{y^2} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx + \frac{2y}{\ln(1+y)} - \frac{1}{\ln(1+y)}$$

yazılır. İlk integralde integrali alınan fonksiyon x'e göre sabittir; integral, bu sabit ile aralığın uzunluğu $y^2 - y$ sayısının çarpımıdır. Öyleyse

$$F'(y) = -\frac{y^2 - y}{(1+y)\ln^2(1+y)} + \frac{2y-1}{\ln(1+y)}$$

bulunur.
Doğrulama. $F(y) = \dfrac{y^2 - y}{\ln(1+y)}$ olduğundan bölüm kuralı aynı sonucu verir. ■

Alıştırma 20.4 (M-Testiyle Düzgün Yakınsaklık). $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^4}\,dx$ integralinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Her $x \ge 1$ ve her $y \in \mathbb{R}$ için $|\cos(xy)| \le 1$ ve $1 + x^4 > x^4$ olduğundan

$$\left|\frac{\cos(xy)}{1+x^4}\right| \le \frac{1}{1+x^4} < \frac{1}{x^4} = M(x)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ integrali $p = 4 > 1$ olduğundan yakınsaktır ve değeri $\frac{1}{3}$'tür (Teorem 15.2). Teorem 20.3 gereği integral $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.
İntegrali alınan fonksiyon $[1, +\infty) \times \mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğundan, Sonuç 20.2 gereği integralin tanımladığı fonksiyon $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. ■

Alıştırma 20.5 (Üstel Çarpanlı Kosinüs: Düzgün Yakınsaklık). $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx$ integralinin $[1, +\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$y \geq 1$ ve $x \geq 0$ için $xy \geq x$, dolayısıyla $e^{-xy} \leq e^{-x}$ olur. $|\cos x| \leq 1$ ile birlikte

$$|e^{-xy}\cos x| \leq e^{-x} = M(x)$$

bulunur. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$ yakınsaktır (Örnek 15.6, $t = 1$ ve $a = 0$). Teorem 20.3 gereği integral $[1, +\infty)$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. ■

Alıştırma 20.6 (Üstel Çarpanlı Kosinüs: Değer). $y > 0$ için $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
$b > 0$ için

$$K = \int_0^b e^{-xy}\cos x\,dx, \qquad L = \int_0^b e^{-xy}\sin x\,dx$$

yazalım ve iki kez kısmi integrasyon uygulayalım.
Birinci kısmi integrasyon. $u = \cos x$, $dv = e^{-xy}\,dx$ ile $du = -\sin x\,dx$ ve $v = -\dfrac{e^{-xy}}{y}$ olur:

$$K = \left[-\frac{e^{-xy}\cos x}{y}\right]_0^b - \frac{1}{y}L = \frac{1 - e^{-by}\cos b}{y} - \frac{L}{y}.$$

İkinci kısmi integrasyon. $u = \sin x$, $dv = e^{-xy}\,dx$ ile

$$L = \left[-\frac{e^{-xy}\sin x}{y}\right]_0^b + \frac{1}{y}K = -\frac{e^{-by}\sin b}{y} + \frac{K}{y}.$$

***K*'yi çözme.** İkinci eşitliği birincide yerine koyalım:

$$K = \frac{1 - e^{-by}\cos b}{y} + \frac{e^{-by}\sin b}{y^2} - \frac{K}{y^2}.$$

$\dfrac{K}{y^2}$ terimini sola alıp iki yanı y^2 ile çarpalım:

$$(y^2 + 1)\,K = y - y\,e^{-by}\cos b + e^{-by}\sin b.$$

Buradan

$$K = \frac{y + e^{-by}\,(\sin b - y\cos b)}{1 + y^2}$$

bulunur.
Limit. Paydaki ikinci terim için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|e^{-by}\left(\sin b - y\cos b\right)\right| \le (1+y)\,e^{-by}$$

olur ve $y > 0$ olduğundan $b \to +\infty$ iken bu terim 0'a gider (sıkıştırma teoremi). Öyleyse

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx = \frac{y}{1+y^2} \qquad (y>0)$$

olur. ■

Alıştırma 20.7 (Üstel Çarpanlı Kosinüs: Sıfır Yakını). $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx$ integralinin $(0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Alıştırma 20.6 çözümündeki iki sonuçtan kalan

$$\int_b^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx = \frac{y}{1+y^2} - K = -\frac{e^{-by}\left(\sin b - y\cos b\right)}{1+y^2}$$

olarak bulunur. $k \in \mathbb{N}$ için $b_k = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ alalım; $\sin b_k = 1$ ve $\cos b_k = 0$ olduğundan bu b değerlerinde kalanın mutlak değeri $\dfrac{e^{-b_k y}}{1+y^2}$ olur. $y_k = \dfrac{1}{b_k} \in (0,1)$ noktasında

$$\frac{e^{-b_k y_k}}{1+y_k^2} = \frac{e^{-1}}{1+y_k^2} > \frac{1}{2e}$$

sağlanır, çünkü $y_k^2 < 1$'dir. $b_k \to +\infty$ olduğundan, ne kadar büyük bir B seçilirse seçilsin $b_k \ge B$ olan bir b_k ve kalanın $\dfrac{1}{2e}$'den büyük olduğu bir y_k noktası vardır. $\varepsilon = \dfrac{1}{2e}$ için tanımdaki koşul sağlanamaz; integral $(0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. ■

Alıştırma 20.8 (Gauss Çarpanlı Kosinüs: Düzgün Yakınsaklık). $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(xy)\,dx$ integralinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Her $x \ge 0$ ve $y \in \mathbb{R}$ için

$$\left|e^{-x^2}\cos(xy)\right| \le e^{-x^2} = M(x)$$

olur. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ Gauss integrali yakınsaktır ve değeri $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$'dir (Sonuç 18.3). Teorem 20.3 gereği integral $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. ■

Alıştırma 20.9 (Gauss Çarpanlı Kosinüs: Değer). Gauss integralinden (Sonuç 18.3) yararlanarak her $y \in \mathbb{R}$ için $J(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(xy)\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
$f(x,y) = e^{-x^2}\cos(xy)$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x\,e^{-x^2}\sin(xy)$ fonksiyonları $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir.
Düzgün yakınsaklık. $J(y)$ her y için yakınsaktır (Alıştırma 20.8). Türev için

$$\left|-x\,e^{-x^2}\sin(xy)\right| \le x\,e^{-x^2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur ve $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}$ yakınsaktır (Alıştırma 15.1). Teorem 20.3 gereği $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx$ integrali $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Türev. Herhangi bir $d > 0$ için Teorem 20.9, $[-d, d]$ aralığında uygulanır; d keyfi olduğundan her $y \in \mathbb{R}$ için

$$J'(y) = -\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2}\sin(xy)\,dx$$

olur. Sağdaki integrale kısmi integrasyon uygulayalım: $u = \sin(xy)$, $dv = x\,e^{-x^2}\,dx$ ile $du = y\cos(xy)\,dx$ ve $v = -\dfrac{e^{-x^2}}{2}$ olur:

$$\int_0^b x\,e^{-x^2}\sin(xy)\,dx = \left[-\frac{e^{-x^2}\sin(xy)}{2}\right]_0^b + \frac{y}{2}\int_0^b e^{-x^2}\cos(xy)\,dx.$$

$b \to +\infty$ iken köşeli parantezli terim $-\dfrac{e^{-b^2}\sin(by)}{2} \to 0$ olur ve son integral $J(y)$'ye yakınsar. Öyleyse

$$J'(y) = -\frac{y}{2}\,J(y) \qquad (y \in \mathbb{R})$$

bulunur.

Geri integralleme. $h(y) = J(y)\,e^{y^2/4}$ tanımlayalım. Çarpım kuralıyla

$$h'(y) = J'(y)\,e^{y^2/4} + J(y)\cdot\frac{y}{2}\,e^{y^2/4} = \left(J'(y) + \frac{y}{2}\,J(y)\right)e^{y^2/4} = 0$$

olur; h sabittir (bkz. Analiz 2).

Sabit. $\cos 0 = 1$ olduğundan $J(0)$, Gauss integralidir: $h(0) = J(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Öyleyse her y için $h(y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, yani

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(xy)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-y^2/4}$$

bulunur. İntegrali alınan fonksiyon x'e göre çift olduğundan bütün doğru üzerindeki integral bunun iki katıdır: $\sqrt{\pi}\,e^{-y^2/4}$. ■

Alıştırma 20.10 (Türevle Hesaplanan Bir İntegral). Her $y \in \mathbb{R}$ için $G(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\frac{\sin(xy)}{x}\,dx$ integralini, integral işareti altında türev alarak hesaplayınız.

Çözüm.

Süreklilik. Örnek 20.7 çözümündeki s fonksiyonunu $s(-u) = s(u)$ ile bütün doğruya genişletelim; s, $\mathbb{R}$ üzerinde süreklidir ve her u için $u\,s(u) = \sin u$ olur. $x > 0$ için $\dfrac{\sin(xy)}{x} = y\,s(xy)$ olduğundan integrali alınan fonksiyon

$$g(x, y) = y\,e^{-x}\,s(xy)$$

biçiminde yazılır; $x = 0$'daki değeri y'dir ve g, $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$ üzerinde süreklidir. $x > 0$ için $\dfrac{\partial g}{\partial y} = e^{-x}\cos(xy)$ olur; $x = 0$ için $g(0, y) = y$ ve türev $1 = e^0\cos 0$'dır. Öyleyse her yerde

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = e^{-x}\cos(xy)$$

olur ve bu fonksiyon süreklidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Düzgün yakınsaklık. $|\,e^{-x}\cos(xy)\,| \le e^{-x}$ ve $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$ olduğundan Teorem 20.3 gereği $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial y}\,dx$ integrali $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Çapa noktası $y_0 = 0$'dır: $g(x,0) = 0$ olduğundan $G(0) = 0$.

Türev. Herhangi bir $d > 0$ için Teorem 20.9, $[-d, d]$ aralığında uygulanır: $G(y)$ yakınsaktır, G türevlenebilirdir ve

$$G'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(xy)\,dx$$

olur. Bu integrali hesaplayalım. Çarpım kuralıyla

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\,e^{-x}\,\big(\,y\sin(xy) - \cos(xy)\,\big)\Big) &= -e^{-x}\,\big(\,y\sin(xy) - \cos(xy)\,\big)\\ &\quad + e^{-x}\,\big(\,y^2\cos(xy) + y\sin(xy)\,\big)\\ &= (1+y^2)\,e^{-x}\cos(xy)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\int_0^{b} e^{-x}\cos(xy)\,dx = \frac{e^{-b}\,\big(\,y\sin(by) - \cos(by)\,\big) + 1}{1+y^2}$$

bulunur. Paydaki ilk terim için

$$\big|e^{-b}\,\big(\,y\sin(by) - \cos(by)\,\big)\big| \le (\,|\,y\,| + 1)\,e^{-b}$$

olur ve sağ yan $b \to +\infty$ iken 0'a gider. Öyleyse

$$G'(y) = \frac{1}{1+y^2} \qquad (y \in \mathbb{R})$$

olur.

Geri integralleme ve sabit. $G(y) - \arctan y$ fonksiyonunun türevi özdeş olarak sıfırdır; bu fonksiyon sabittir ve $y = 0$'daki değeri $G(0) - \arctan 0 = 0$'dır. Öyleyse

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\frac{\sin(xy)}{x}\,dx = \arctan y \qquad (y \in \mathbb{R})$$

bulunur. ■

Bu bölümle birlikte kitabın izlediği yol tamamlanıyor. Fonksiyon dizilerinde, fonksiyon serilerinde, Fourier serilerinde ve parametreye bağlı integrallerde hep aynı soruyu sorduk: iki limit işleminin sırası ne zaman değiştirilebilir? Yanıt her seferinde aynı kavrama, düzgün yakınsaklığa dayandı. Son iki bölümde iki değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonlarıyla karşılaştık, ama her seferinde değişkenlerden birini sabit tutarak çalıştık. Çok değişkenli fonksiyonların limiti, sürekliliği ve türevi kendi başına bir konudur; bu konuyu Analiz 4 kitabında ele alıyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

21. Uygulamalı Özet

Bu sayfa kitabın yöntemlerini ispatsız, soru çözmeye dönük bir kopya kâğıdı olarak toplar. Uygulama sorularının çoğu “düzgün yakınsak mıdır?”, “terim terime türevlenebilir mi?”, “Fourier serisini bulunuz ve şu toplamı hesaplayınız”, “integral yakınsak mıdır?”, “Gamma fonksiyonuyla yazınız” ya da “Leibniz formülüyle türevini bulunuz” biçimindedir. Sayfa her soru tipi için adım adım bir algoritma, sık kullanılan ölçütleri ve formülleri bir arada gösteren tablolar ve kısa ama tam çözülmüş örnekler verir. En ayrıntılı algoritmalar en çok karşılaşılan üç tipe ayrıldı: genelleştirilmiş integralin yakınsaklığı, Fourier serisinin hesabı ve toplamı, parametreye bağlı integralin türevi. Her kural, ayrıntısının ve gerekçesinin bulunduğu bölüme bağlanır.

21.1 Soru Tipine Göre Yöntem

Bir soruyu okuyunca ilk iş, hangi aracın istendiğini ya da hangisinin en kısa yol olduğunu belirlemektir. Aşağıdaki tablo soru kalıplarını yöntemlerle eşleştirir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.1: Soru kalıpları ve yöntemler

Soruda istenen	Kullanılacak yöntem	Bu sayfada
Fonksiyon dizisinin noktasal limiti; tanımla ya da bir ölçütle düzgün yakınsaklık	Sınırlama, supremum, nokta dizisi, süreklilik ve sınırlılık ölçütleri	Bölüm 21.2
Limit ile integral ya da türev yer değiştirir mi, terim terime türev alınabilir mi	Yer değiştirme teoremlerinin koşulları	Bölüm 21.3
Fonksiyon serisi düzgün yakınsak mı, terim terime integral ya da türev	Weierstrass M-testi, Dirichlet ve Abel testleri	Bölüm 21.4
Kuvvet serisinin yakınsaklık kümesi, uç noktada limit	Oran ya da kök formülü, uç nokta testleri, Abel limiti	Bölüm 21.5
Bir fonksiyonun Fourier serisi	Katsayı formülleri, simetri, hazır integraller	Bölüm 21.6
Serinin bir noktadaki toplamı, oradan bir sayı serisinin toplamı	Dirichlet yakınsaklık teoremi	Bölüm 21.7
$[0, \pi]$ ya da $[0, L]$ üzerinde sinüs ya da kosinüs serisi	Tek ya da çift genişleme	Bölüm 21.8
Karelerin ya da dördüncü kuvvetlerin terslerinin toplamı	Parseval eşitliği	Bölüm 21.9
Genelleştirilmiş integral yakınsak mı, mutlak mı şartlı mı	Tip belirleme, parçalama, karşılaştırma, kuvvet, Dirichlet ve Abel testleri	Bölüm 21.10
İntegrali Gamma ya da Beta fonksiyonuyla yazmak, hesaplamak	Kalıp tanıma ve değişken değiştirme	Bölüm 21.11
Sınırları parametreye bağlı bir integralin türevi	Leibniz formülü	Bölüm 21.12
İlkeli bulunamayan bir integrali parametre yardımıyla hesaplamak	İntegral işareti altında türev, sıra değiştirme	Bölüm 21.13
Parametreye bağlı genelleştirilmiş integral düzgün yakınsak mı	M-testi, kalanın supremumu, Dirichlet ve Abel testleri	Bölüm 21.14

21.2 Noktasal Limit ve Düzgün Yakınsaklık

Bir fonksiyon dizisi sorusu hemen her zaman iki aşamalıdır: önce noktasal limit bulunur, sonra yakınsamanın düzgün olup olmadığına karar verilir. Düzgün limit varsa noktasal limite eşittir, bu yüzden aday tek ve bellidir (Önerme 2.1).

 CC BY-NC-SA 4.0

Beş adımda düzgün yakınsaklık incelemesi

1. **Noktasal limit.** x'i sabit tut, $n \to \infty$ limitini al. Davranışın değiştiği noktaları ($x = 0$, $x = 1$, $|\,x\,| = 1$, paydanın sıfırları) ayrı incele ve sonucu parçalı bir f olarak yaz.
2. **Hızlı olumsuz denetim.** Her f_n sürekli ama f süreksizse ya da her f_n sınırlı ama f sınırsızsa yakınsama düzgün değildir; dur (Sonuç 4.2, Sonuç 4.1).
3. **Fark fonksiyonu.** $|\,f_n(x) - f(x)\,|$ ifadesini tek kesir yap ve sadeleştir.
4. **Sınırla ya da supremumu al.** Fark x içermeyen bir $\alpha_n \to 0$ ile sınırlanıyorsa düzgündür (Teorem 3.1). Sınır görünmüyorsa $d_n = \sup_{x \in E} |\,f_n(x) - f(x)\,|$ türevle hesaplanır: kritik noktalar ve kümenin uçları denetlenir (Teorem 3.3).
5. **Karar.** $d_n \to 0$ ise düzgün, değilse düzgün değil. Olumsuz sonucu tek satırda göstermek için tepe noktasının yerini izleyen bir x_n seçip $f_n(x_n) - f(x_n) \not\to 0$ olduğunu yazmak yeter (Teorem 3.2).

Soru "tanım kullanarak" diyorsa dördüncü adımdaki eşitsizlik zinciri ε ile sonlandırılır: $\alpha_n < \varepsilon$ eşitsizliğinden bir $N(\varepsilon)$ seçilir ve bu N'nin x'e bağlı olmadığı vurgulanır (Tanım 2.1). Hangi aracın ne zaman işe yaradığı aşağıda özetlenmiştir.

Tablo 21.2: Düzgün yakınsaklık için araç seçimi

Durum	Araç	Sonuç
Fark, x içermeyen bir $\alpha_n \to 0$ ile sınırlanıyor	Sınırlama ölçütü (Teorem 3.1)	Düzgün
Fark türevlenebilir, sınır açık değil	Supremum ölçütü (Teorem 3.3)	$d_n \to 0$ ise ve ancak o zaman düzgün
f_n sürekli, f süreksiz	Sonuç 4.2	Düzgün değil
f_n sınırlı, f sınırsız	Sonuç 4.1	Düzgün değil
f_n'nin tepesi yükseliyor ya da kayıyor	Nokta dizisi testi (Teorem 3.2)	Düzgün değil
Kapalı aralık, f_n sürekli, monoton yakınsama, f sürekli	Dini teoremi (Teorem 4.3)	Düzgün
Limit fonksiyonu bilinmiyor	Cauchy kriteri (Teorem 3.4)	Düzgün Cauchy ise düzgün

Supremum hesabında sık karşılaşılan dizilerin sonuçlarını bilmek zaman kazandırır. Tablodaki supremum değerleri kritik noktanın yerine konmasıyla bulunur; örneğin nxe^{-nx} için türev $x = \frac{1}{n}$'de sıfırdır ve değer e^{-1}'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.3: Standart dizilerin supremumları

$f_n(x)$	Küme	Noktasal limit	$\sup\lvert\, f_n - f \,\rvert$	Düzgün mü?
x^n	$[0,1)$	0	1	hayır
x^n	$[0,a]$, $a<1$	0	a^n	evet
$x^n(1-x)$	$[0,1]$	0	$\le \dfrac{1}{n+1}$	evet
nxe^{-nx}	$[0,+\infty)$	0	$\dfrac{1}{e}$	hayır
x^2e^{-nx}	$[0,+\infty)$	0	$\dfrac{4}{e^2n^2}$	evet
$\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$	$[0,+\infty)$	0	$\dfrac{1}{2}$	hayır
$\dfrac{x}{1+nx^2}$	$\mathbb{R}$	0	$\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$	evet
$\dfrac{\sin(nx)}{n}$	$\mathbb{R}$	0	$\dfrac{1}{n}$	evet

Düzgün yakınsaklık kümeye bağlıdır. Sorunlu nokta (yukarıda $x=1$ ya da $x=0$) kümeden atılıp ondan uzak durulursa düzgün yakınsaklık çoğu zaman geri gelir (Önerme 2.3). Aşağıdaki iki örnek aynı dizinin iki kümedeki davranışını karşılaştırır.

Örnek 21.1 (Sıfırdan Uzakta Düzgün Yakınsaklık). $a>0$ olmak üzere $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+nx^2}$ dizisinin $[a,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Noktasal limit. $x \ge a > 0$ sabitken pay ve paydayı n'ye bölelim:

$$f_n(x)=\frac{2x}{\frac{1}{n}+x^2}\to\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}.$$

Noktasal limit $f(x)=\dfrac{2}{x}$'tir.
Fark. Kesirleri eşitleyelim:

$$\lvert\, f_n(x)-f(x)\,\rvert=\left|\frac{2nx^2-2(1+nx^2)}{x(1+nx^2)}\right|=\frac{2}{x(1+nx^2)}.$$

Sınırlama. $x\ge a$ olduğundan $x(1+nx^2)\ge a(1+na^2)$'dir. Dolayısıyla her $x\in[a,+\infty)$ için

$$\lvert\, f_n(x)-f(x)\,\rvert\le\frac{2}{a(1+na^2)}=\alpha_n$$

olur. α_n sayısı x içermez ve $n\to\infty$ iken 0'a gider. Teorem 3.1 gereği $f_n \rightrightarrows f$ $([a,+\infty))$.
Tanımla yazmak istenirse: $\varepsilon>0$ verildiğinde $\alpha_n<\dfrac{2}{na^3}$ olduğundan $N>\dfrac{2}{a^3\varepsilon}$ seçmek yeter; bu N yalnız ε'a bağlıdır. ■

Örnek 21.2 (Sıfıra Kadar Uzanan Aralıkta Bozulma). $f_n(x)=\dfrac{2nx}{1+nx^2}$ dizisinin $(0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Noktasal limit, önceki örnekteki gibi $f(x)=\dfrac{2}{x}$'tir $(x>0)$.
Her f_n sınırlıdır. Türev

$$f_n'(x) = \frac{2n(1-nx^2)}{(1+nx^2)^2}$$

$x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$'de sıfırdır; f_n bu noktaya kadar artar, sonra azalır. En büyük değer $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n}$ olduğundan $0 < f_n(x) \le \sqrt{n}$'dir.

Limit sınırsızdır. $x \to 0^+$ iken $\dfrac{2}{x} \to +\infty$ olur. Sınırlı fonksiyonların sınırsız limitine yakınsama düzgün olamaz (Sonuç 4.1).

Aynı sonuç nokta dizisiyle de görülür: tepe noktası $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ için

$$f_n(x_n) - f(x_n) = \sqrt{n} - 2\sqrt{n} = -\sqrt{n}$$

dizisi 0'a gitmez (Teorem 3.2). ■

⚠ Sık yapılan hatalar

- Noktasal limiti bulurken $x = 0$ ya da $x = 1$ gibi özel noktaları ayırmamak. Limit fonksiyonu parçalıysa çoğu zaman cevap oradan çıkar.
- $N(\varepsilon)$'yi x'e bağlı bırakmak. $N = \dfrac{1}{x\varepsilon}$ gibi bir seçim noktasal yakınsaklığı gösterir, düzgün yakınsaklığı göstermez.
- Supremumu yalnız kritik noktada aramak. Kümenin uçları da denetlenmelidir; uç kümeye ait değilse o uçtaki limit alınır.
- Düzgün yakınsaklığı kümeden bağımsız sanmak. $[a, +\infty)$ üzerindeki olumlu sonuç $(0, +\infty)$ için geçerli değildir.

21.3 Limit, İntegral ve Türev Yer Değiştirir mi?

"Limit ile integral yer değiştirir mi?", "terim terime türevlenebilir mi?" türündeki soruların hepsi aynı kalıbı izler: ilgili teoremin koşulu düzgün yakınsaklıktır ve iş o koşulu denetlemeye iner. Aşağıdaki tablo dizi, seri ve parametreli integral sürümlerini bir arada verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.4: Limit, integral ve türevin yer değiştirme koşulları

Soru	Yeterli koşul	Teorem
$\lim f_n$ sürekli mi?	f_n sürekli ve $f_n \rightrightarrows f$	Teorem 4.2
$\lim \int_a^b f_n = \int_a^b \lim f_n$ mi?	f_n integrallenebilir ve $[a,b]$ üzerinde $f_n \rightrightarrows f$	Teorem 5.1
$(\lim f_n)' = \lim f_n'$ mi?	Bir noktada $\left(f_n(x_0) \right)$ yakınsak ve $f_n' \rightrightarrows g$	Teorem 6.1, Sonuç 6.1
$\sum f_n$ sürekli mi?	f_n sürekli ve seri düzgün yakınsak	Teorem 8.1
$\int \sum = \sum \int$ mi?	f_n integrallenebilir ve seri $[a,b]$ üzerinde düzgün yakınsak	Teorem 8.2
$(\sum f_n)' = \sum f_n'$ mi?	Bir noktada yakınsak ve türev serisi düzgün yakınsak	Teorem 8.3, Sonuç 8.2
Kuvvet serisinde uçta limit	Seri uç noktada yakınsak	Sonuç 9.2
$\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx$ içeri girer mi?	f dikdörtgende sürekli	Teorem 19.2
$\dfrac{d}{dy}\int_a^b f\,dx = \int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dx$ mi?	f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ dikdörtgende sürekli	Teorem 19.3
Genelleştirilmiş integralde aynı işlemler	$[c,d]$ parametre aralığında: süreklilik ve integral için $\int_a^{+\infty} f\,dx$, türev için $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial y}dx$ düzgün yakınsak; türevde ayrıca bir y_0 için $\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\,dx$ yakınsak	Teorem 20.6, Teorem 20.8, Teorem 20.9

Koşullar yeterlidir ama gerekli değildir: düzgün yakınsaklık olmadan da eşitlik bazen tesadüfen korunur (Örnek 5.4). Bu yüzden "yer değiştirmez" demek için koşulun bozulduğunu göstermek yetmez; iki yanı ayrı ayrı hesaplayıp farklı çıktıklarını göstermek gerekir (Örnek 5.3).

Dört adımda terim terime türev sorusu

1. **Çapa noktası.** $f_n(x_0)$ dizisinin yakınsadığı bir x_0 bul; çoğu zaman $x_0 = 0$ işe yarar.
2. **Türev dizisi.** f_n''yi hesapla ve noktasal limiti g'yi bul.
3. **Düzgünlük.** $\mid f_n'(x) - g(x) \mid$ farkını x'ten bağımsız bir sıfır dizisiyle sınırla. Türev dizisi düzgün yakınsamıyorsa teorem uygulanamaz; eşitliği doğrudan denetle.
4. **Sonuç.** $f = \lim f_n$ türevlenebilirdir ve $f' = g$'dir. Sağlama için f'yi ayrıca bulup türevini g ile karşılaştır.

Örnek 21.3 (Terim Terime Türevin Uygulanması). $f_n(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{\cos(nx)}{n^3}$ dizisi için $\mathbb{R}$ üzerinde terim terime türev alınabileceğini gösteriniz ve limit fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm.
Çapa noktası. $f_n(0) = \dfrac{1}{n^3} \to 0$; dizi $x_0 = 0$'da yakınsaktır.
Türev dizisi. $f_n'(x) = x - \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ olur ve noktasal limiti $g(x) = x$'tir.
Düzgünlük. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\mid f_n'(x) - x \mid = \frac{\mid \sin(nx) \mid}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan Teorem 3.1 gereği $f_n' \rightrightarrows g$ $(\mathbb{R})$.
Sonuç. Sonuç 6.1 gereği (f_n) bir f fonksiyonuna yakınsar, f türevlenebilirdir ve $f'(x) = x$'tir.
Sağlama. $\left|\dfrac{\cos(nx)}{n^3}\right| \le \dfrac{1}{n^3}$ olduğundan $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$'dir ve gerçekten $f'(x) = x = \lim f_n'(x)$ olur. ■

21.4 Fonksiyon Serilerinde Düzgün Yakınsaklık

Bir fonksiyon serisinin düzgün yakınsaklığı, kısmi toplamlar dizisinin düzgün yakınsaklığıdır (Tanım 7.4). Pratikte kısmi toplamlarla nadiren uğraşılır; aşağıdaki sıra izlenir.

Dört adımda fonksiyon serisinin düzgün yakınsaklığı

1. **Gerek koşul.** $\sup_{x\in E} \mid f_n(x) \mid \to 0$ mı? Değilse seri E üzerinde düzgün yakınsak olamaz (Sonuç 7.1).
2. **M-testi.** $M_n = \sup_{x\in E} \mid f_n(x) \mid$ bul: ya açık bir eşitsizlikle ($|\sin| \le 1$, $x \ge 1$ ise $e^{-nx} \le e^{-n}$) ya da türevle. $\sum M_n$ yakınsaksa seri mutlak ve düzgün yakınsaktır (Teorem 7.2).
3. **Salınım varsa.** $\sum M_n$ ıraksak ama terim $\sin(nx), \cos(nx)$ ya da $(-1)^n$ çarpanı taşıyorsa Dirichlet testi (kısmi toplamlar düzgün sınırlı, öbür çarpan monoton ve düzgün olarak 0'a gider) ya da Abel testi (bir çarpanın serisi düzgün yakınsak, öbürü monoton ve düzgün sınırlı) denenir (Teorem 7.3, Teorem 7.4).
4. **Olumsuz cevap.** Terimler sürekli ama toplam süreksizse seri düzgün yakınsak değildir (Örnek 8.3).

M-testinde supremum için türev almadan önce aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliğine bakmak çoğu zaman yeter: $1 + nx^2 \ge 2\sqrt{n}\,\mid x \mid$ olduğundan

$$\frac{\mid x \mid}{1+nx^2} \le \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

olur. Dirichlet testinde kullanılan kısmi toplam sınırları aşağıdadır (Örnek 7.6).

Tablo 21.5: Dirichlet testi için düzgün sınırlı kısmi toplamlar

Seri	Kısmi toplamların sınırı	Geçerli olduğu küme
$\sum (-1)^k$	1	her yerde
$\sum \sin(kx)$	$\dfrac{1}{\sin(\delta/2)}$	$[\delta, 2\pi-\delta]$
$\sum \cos(kx)$	$\dfrac{1}{\sin(\delta/2)}$	$[\delta, 2\pi-\delta]$

Sınır δ'ya bağlıdır ve $\delta \to 0$ iken büyür. Dirichlet testiyle $\sum \dfrac{\sin(nx)}{n}$ serisi $[\delta, 2\pi-\delta]$ üzerinde düzgün yakınsar. Seri her noktada yakınsaktır, ama $x = 0$'ı içeren ya da 0'a uç olarak dayanan bir aralıkta düzgün yakınsamaz: toplam $(0, 2\pi)$ üzerinde $\dfrac{\pi - x}{2}$, $x = 0$'da ise 0'dır, yani süreksizdir (bkz. Örnek 8.3).

Örnek 21.4 (Supremumu Türevle Bulunan M-Testi). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$ serisinin $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Supremum. Terim tek fonksiyon olduğundan $x \ge 0$ ile çalışmak yeter. $g(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ için

$$g'(x) = \frac{1 - nx^2}{n(1+nx^2)^2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur ve tek kritik nokta $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$'dir. $g(0) = 0$ ve $x \to +\infty$ iken $g(x) \to 0$ olduğundan en büyük değer

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1/\sqrt{n}}{n \cdot 2} = \frac{1}{2n^{3/2}}$$

olur. Dolayısıyla $M_n = \dfrac{1}{2n^{3/2}}$ alınabilir.
Sayı serisi. $\displaystyle\sum \frac{1}{2n^{3/2}}$ serisi $p = \dfrac{3}{2} > 1$ olan bir p-serisinin katıdır ve yakınsaktır.
Sonuç. Teorem 7.2 gereği seri $\mathbb{R}$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Aynı M_n, aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliğinden de çıkar: $\dfrac{|\,x\,|}{n(1+nx^2)} \le \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. ■

Örnek 21.5 (Terim Terime İntegralle Bir Sayı). $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ olsun. $\displaystyle\int_0^{\pi} S(x)\,dx$ değerini bulunuz.

Çözüm.
Düzgün yakınsaklık. $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^3}\right| \le \dfrac{1}{n^3}$ ve $\sum \dfrac{1}{n^3}$ yakınsak olduğundan seri $[0,\pi]$ üzerinde düzgün yakınsaktır (Teorem 7.2).
Terim terime integral. Teorem 8.2 gereği integral ile toplam yer değiştirir:

$$\int_0^{\pi} S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4}.$$

Çift n'lerde pay 0, tek n'lerde 2'dir:

$$\int_0^{\pi} S(x)\,dx = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = 2 \cdot \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{48}.$$

Tek sayıların dördüncü kuvvetlerinin terslerinin toplamı Parseval eşitliğinden gelir (Tablo 21.12). ■

21.5 Kuvvet Serileri: Yakınsaklık Kümesi ve Abel Limiti

Kuvvet serisi sorularında önce yakınsaklık kümesi bulunur, sonra bu küme üzerindeki düzgün yakınsaklık ya da bir uç noktadaki limit sorulur. Yarıçap formülleri için bkz. Analiz 2.

Beş adımda kuvvet serisi

1. **Yarıçap.** $\sum a_n (x-x_0)^n$ için $R = \lim \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ya da $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|\,a_n\,|}}$ (bkz. Analiz 2). x^{2n} gibi atlamalı serilerde oran testini doğrudan terimlere uygula.
2. **Açık aralık.** $|\,x-x_0\,| < R$ için seri mutlak yakınsaktır, $|\,x-x_0\,| > R$ için ıraksaktır.
3. **Uç noktalar.** $x = x_0 \pm R$ koyup çıkan sayı serisini ayrı ayrı incele.
4. **Düzgün yakınsaklık.** Seri açık aralığın kapalı her alt aralığında düzgün yakınsar. Bir uçta yakınsıyorsa o uca kadar kapalı aralıkta da düzgün yakınsar (Teorem 9.1, Sonuç 9.1).
5. **Uçta limit ve integral.** Seri $x = x_0 + R$'de yakınsaksa $\lim_{x \to (x_0+R)^-} S(x) = \sum a_n R^n$ olur ve seri uca kadar terim terime integrallenir (Sonuç 9.2).

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.6: Uç noktalarda sık çıkan sayı serileri

Uç noktada çıkan sayı serisi	Karar	Araç
$\sum \dfrac{1}{n^p}$	$p>1$ ise yakınsak, $p\le 1$ ise ıraksak	p-serisi
$\sum (-1)^n b_n$, b_n azalarak 0'a gider	Yakınsak	Leibniz testi
Terimler 0'a gitmiyor	Iraksak	Gerek koşul
$\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ gibi teleskopik	Yakınsak, toplam hesaplanır	Kısmi toplam
Pozitif terimli, $\dfrac{1}{n^p}$ gibi davranıyor	Limit karşılaştırma ile p-serisine bağlanır	Karşılaştırma

Örnek 21.6 (Merkezi Kaydırılmış Bir Kuvvet Serisi). $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\,2^n}$ serisinin yakınsaklık kümesini bulunuz.

Çözüm.
Yarıçap. $a_n = \dfrac{1}{n\,2^n}$ için

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n\,2^n}{(n+1)\,2^{n+1}} = \frac{n}{2(n+1)} \to \frac{1}{2}$$

olduğundan $R=2$'dir. Seri $|\,x-1\,|<2$, yani $-1<x<3$ için mutlak yakınsaktır.
$\boldsymbol{x=3}$**.** Seri $\displaystyle\sum \frac{2^n}{n\,2^n} = \sum \frac{1}{n}$ olur; harmonik seri ıraksaktır.
$\boldsymbol{x=-1}$**.** Seri $\displaystyle\sum \frac{(-2)^n}{n\,2^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ olur. $\dfrac{1}{n}$ azalarak 0'a gittiğinden Leibniz testi gereği yakınsaktır; mutlak değerler harmonik seriyi verdiğinden yakınsaklık şartlıdır.
Sonuç. Yakınsaklık kümesi $[-1,3)$'tür. ■

Örnek 21.7 (Uç Noktada Limit). $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n\,2^n}$ olsun. $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} S(x)$ limitini bulunuz.

Çözüm.
$t=x-1$ yazalım: seri $\sum a_n t^n$ olur, yarıçapı $R=2$'dir ve önceki örneğe göre $t=-R=-2$'de yakınsaktır. Teorem 9.1 (ii) gereği seri $t\in[-2,0]$, yani $x\in[-1,1]$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Terimler sürekli olduğundan toplam bu aralıkta süreklidir (Teorem 8.1) ve limit, serinin uçtaki değerine eşittir:

$$\lim_{x\to -1^+} S(x) = S(-1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Alterne harmonik serinin toplamı için bkz. Analiz 2.
Sağlama. $|\,u\,|<1$ için $-\ln(1-u)=\sum \dfrac{u^n}{n}$ olduğundan $u=\dfrac{x-1}{2}$ ile $S(x)=\ln\dfrac{2}{3-x}$ bulunur; $x\to -1^+$ iken bu ifade $\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$'ye gider. ■

21.6 Fourier Serisini Hesaplamak

Fourier serisi sorusu bir integral hesabı sorusudur: dikkat edilecek yerler periyot, simetri ve kısmi integrasyondaki sınır terimleridir. Kitabın dört adımlık reçetesini (Tanım 10.3) aralık türünü de kapsayacak biçimde genişletelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Beş adımda Fourier serisi

1. **Periyot ve aralık.** Periyot $T = 2L$ ise $L = \dfrac{T}{2}$'dir. $T = 2\pi$ ise $L = \pi$ ve formüller $\cos(nx)$, $\sin(nx)$ ile yazılır; değilse $\cos\dfrac{n\pi x}{L}$, $\sin\dfrac{n\pi x}{L}$ ile (Tanım 10.4). Fonksiyon $[0, \pi]$ ya da $[0, L]$ üzerinde verilip sinüs ya da kosinüs serisi isteniyorsa Bölüm 21.8 kesimine geç.
2. **Simetri.** f tekse bütün $a_n = 0$, çiftse bütün $b_n = 0$'dır ve kalan katsayı yarım aralıktaki integralin iki katıyla hesaplanır (Önerme 10.2). Parçalı fonksiyonlarda simetriyi grafikten denetle.
3. **a_0 ayrı.** $a_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$; a_n için bulunan kapalı ifadede n'ye bölme olduğundan oraya $n = 0$ konamaz; a_0 integralden ayrıca hesaplanır.
4. **a_n ve b_n.** Parçalı fonksiyonda integrali parçalara böl; $f = 0$ olan parçalar düşer. Kısmi integrasyonda u polinom, dv trigonometrik olsun. Çarpım biçimli integrandlarda ($x\sin x$, $|\sin x\,|$, $\cos(3x)\cos(nx)$) çarpımı toplama çevir ve paydayı sıfırlayan n değerini ($n = 1$ ya da $n = 3$ gibi) ayrıca hesapla.
5. **Sadeleştir ve yaz.** $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ kullan; katsayı tek ya da çift n'de sıfırlanıyorsa seriyi $n = 2k - 1$ ya da $n = 2k$ ile yeniden yaz.

Tablo 21.7: Fourier katsayı formülleri

Durum	a_n	b_n
2π periyot	$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$	$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$
$2L$ periyot	$\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$	$\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx$
Çift f, 2π periyot	$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$	0
Tek f, 2π periyot	0	$\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

Seri her durumda $\dfrac{a_0}{2} + \sum\big(\,a_n\cos(\cdot) + b_n\sin(\cdot)\,\big)$ biçimindedir; sabit terim a_0 değil $\dfrac{a_0}{2}$'dir. Hesapta en çok şu değerler ve hazır integraller kullanılır ($n \geq 1$ tam sayı).

Tablo 21.8: Tam sayı katlarında trigonometrik değerler

İfade	Değer
$\sin(n\pi)$	0
$\cos(n\pi)$	$(-1)^n$
$1 - (-1)^n$	çift n için 0, tek n için 2
$\sin\dfrac{n\pi}{2}$	çift n için 0; $n = 2k-1$ için $(-1)^{k+1}$
$\cos\dfrac{n\pi}{2}$	tek n için 0; $n = 2k$ için $(-1)^k$

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.9: Fourier hesabında hazır integraller

İntegral	Değer
$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$	$\dfrac{1-(-1)^n}{n}$
$\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx$	$\dfrac{(-1)^n-1}{n^2}$
$\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$	$\dfrac{(-1)^{n+1}\pi}{n}$
$\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx$	$\dfrac{2(-1)^n\pi}{n^2}$
$\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\cos(nx)\,dx,\ n\neq 1$	$\dfrac{1+(-1)^n}{1-n^2}$

Çarpımı toplama çeviren üç özdeşlik:

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right],$$
$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right],$$
$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right].$$

Bir trigonometrik polinom kendi Fourier serisidir (Teorem 10.1). Örneğin $\cos(3x)$'in serisi yalnız $\cos(3x)$ terimidir, $\sin^2 x$'in serisi de $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)$'tir; integral hesaplamaya gerek yoktur.

Örnek 21.8 (Sağ Yarıda Azalan Doğru).

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ \pi-x, & 0\le x\le\pi\end{cases},\qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

Çözüm.
Simetri. f ne tek ne çifttir; iki katsayı ailesi de hesaplanır. $(-\pi,0)$ parçasında $f=0$ olduğundan bütün integraller $[0,\pi]$ üzerine iner.
$\boldsymbol{a_0}$**.**

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

$\boldsymbol{a_n}$**.** $u=\pi-x$, $dv=\cos(nx)\,dx$ alalım; $du=-dx$, $v=\dfrac{\sin(nx)}{n}$:

$$\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos(nx)\,dx=\left[\frac{(\pi-x)\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx$$
$$=0+\frac{1-(-1)^n}{n^2}.$$

Dolayısıyla $a_n=\dfrac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$: tek n için $\dfrac{2}{\pi n^2}$, çift n için 0.
$\boldsymbol{b_n}$**.** $u=\pi-x$, $dv=\sin(nx)\,dx$ alalım; $v=-\dfrac{\cos(nx)}{n}$:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\int_0^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx = \left[-\frac{(\pi - x)\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{\pi}{n} - 0 = \frac{\pi}{n}.$$

Dolayısıyla $b_n = \dfrac{1}{n}$.

Seri.

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\big((2k-1)x\big)}{(2k-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}.$$

■

⚠ Sık yapılan hatalar

- Sabit terimi a_0 yazmak. Serinin sabit terimi $\dfrac{a_0}{2}$'dir; yukarıdaki örnekte $\dfrac{\pi}{4}$.
- a_0'ı, a_n için hesaplanmış kapalı ifadeye $n = 0$ koyarak bulmaya çalışmak.
- $2L$ periyotlu fonksiyonda L yerine periyodun kendisini kullanmak. $f(x+4) = f(x)$ ise $L = 2$'dir.
- $\sin\dfrac{n\pi}{2}$'yi 0 sanmak. Yalnız $\sin(n\pi)$ her n için sıfırdır.
- $x\sin x$ ya da $|\sin x|$ gibi integrandlarda paydası $1-n$ olan terimi $n = 1$ için de kullanmak; a_1 ayrıca hesaplanır.
- Tek ya da çift fonksiyonun integralini $[0, \pi]$'ye indirirken 2 çarpanını unutmak.

21.7 Fourier Serisinin Toplamı: Dirichlet Teoremi

Fourier serisi bulunduktan sonra çoğu zaman "seri şu noktada neye yakınsar?" ya da "buradan şu sayı serisinin toplamını bulunuz" diye sorulur. Cevap, periyodik genişlemenin o noktadaki sağ ve sol limitlerinin ortalamasıdır (Teorem 12.3, Sonuç 12.2).

💡 Üç adımda seri toplamı

1. **Periyodik genişlemeyi çiz.** Parçaların birleşme noktalarını ve periyodun uçlarını işaretle; burada sıçrama olup olmadığına bak.
2. **Noktanın türünü belirle.** Aşağıdaki tablodan serinin o noktadaki toplamını oku.
3. **Seriye koy.** Seçilen x değerini seriye yaz; $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin\dfrac{n\pi}{2}$ gibi değerlerle sayı serisini sadeleştir ve aranan toplamı yalnız bırak.

Tablo 21.10: Parçalı düzgün bir fonksiyonun Fourier serisinin toplamı

Nokta	Serinin toplamı
f'nin sürekli olduğu iç nokta	$f(x)$
İç sıçrama noktası x_0	$\dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$
$x = \pm\pi$ (2π periyot)	$\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$
Kosinüs serisi, $x = 0$ ve $x = \pi$	$f(0+0)$ ve $f(\pi-0)$
Sinüs serisi, $x = 0$ ve $x = \pi$	0

Hangi noktanın seçileceğini aranan seri belirler:

 CC BY-NC-SA 4.0

- Kosinüslü katsayılarda $(-1)^n$ çarpanı varsa $x=\pi$ seçilir; $\cos(n\pi)=(-1)^n$ ile çarpılınca işaretler kaybolur ve işaret değiştirmeyen toplam çıkar.
- Katsayılarda $(-1)^n$ yoksa $x=0$ işaret değiştirmeyen toplamı, $x=\pi$ alterne toplamı verir.
- Sinüslü terimler $x=0$ ve $x=\pi$'de sıfırdır; sinüslü katsayılardan bir toplam elde etmek için $x=\dfrac{\pi}{2}$ uygundur ve tek indisli alterne toplamlar çıkar.

Örnek 21.9 (Tek Sayılarla Alterne Toplam). Örnek 21.8 örneğindeki serinin $x=\dfrac{\pi}{2}$ noktasındaki toplamından yararlanarak $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ toplamını bulunuz.

Çözüm.
Toplam. Periyodik genişleme parçalı düzgündür; $x=\dfrac{\pi}{2}$ noktasında f süreklidir ve $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$'dir. Dolayısıyla seri bu noktada $\dfrac{\pi}{2}$'ye yakınsar (Sonuç 12.2).
Seriye koy. $\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2}=0$ olduğundan kosinüslü terimlerin hepsi düşer. Sinüslü toplamda çift n'ler için $\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$, $n=2k-1$ için $\sin\dfrac{n\pi}{2}=(-1)^{k+1}$'dir:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}.$$

Sonuç.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

■

Aynı seri başka noktalarda da bilgi verir. $x=0$ bir sıçrama noktasıdır: $f(0+0)=\pi$, $f(0-0)=0$ olduğundan seri $\dfrac{\pi}{2}$'ye yakınsar ve sinüslü terimler sıfır olduğundan

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

bulunur. $x=\pi$'de ise $f(\pi-0)=0=f(-\pi+0)$ olduğundan genişleme süreklidir ve seri 0'a yakınsar.

21.8 Sinüs ve Kosinüs Serileri

Fonksiyon yalnız $[0,\pi]$ ya da $[0,L]$ üzerinde verilmişse ve sinüs ya da kosinüs serisi isteniyorsa f önce tek ya da çift genişletilmiş gibi düşünülür (Tanım 14.1). Genişlemeyi açıkça yazmak gerekmez; formüller yalnız $[0,\pi]$ üzerindeki değerleri kullanır (Tanım 14.2).

Dört adımda yarım aralık açılımı

1. **Seriyi seç.** Kosinüs serisi çift genişlemenin, sinüs serisi tek genişlemenin Fourier serisidir.
2. **Katsayılar.** Kosinüs için $a_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$ (a_0 ayrı), sinüs için $b_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$; $L=\pi$ ise kesirler sadeleşir (Tanım 14.3).
3. **Uçlarda toplam.** İçeride seri f'ye ya da sıçramada ortalamaya, kosinüs serisi uçlarda $f(0+0)$ ile $f(L-0)$'a, sinüs serisi uçlarda 0'a yakınsar (Teorem 14.1).
4. **Düzgün yakınsaklık.** Genişleme sürekli ve parçalı düzgünse seri düzgün yakınsar (Teorem 13.2). Kosinüs serisi için f'nin $[0,\pi]$ üzerinde sürekli olması yeter; sinüs serisi için ek olarak $f(0)=0$ ve $f(\pi)=0$ gerekir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.11: Kosinüs ve sinüs serilerinin karşılaştırması

	Kosinüs serisi	Sinüs serisi
Genişleme	Çift: $f(-x)=f(x)$	Tek: $f(-x)=-f(x)$
Katsayı ($L=\pi$)	$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$	$b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$
$x=0$'da toplam	$f(0+0)$	0
$x=\pi$'de toplam	$f(\pi-0)$	0
Düzgün yakınsaklık için	f sürekli ve parçalı düzgün	Ek olarak $f(0)=f(\pi)=0$

Örnek 21.10 (Çadır Fonksiyonunun Sinüs Serisi).

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \frac{\pi}{2}\\ \pi-x, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi\end{cases}$$

fonksiyonunun $[0,\pi]$ üzerindeki Fourier sinüs serisini bulunuz.

Çözüm.
$b_n=\dfrac{2}{\pi}(I_1+I_2)$ olsun; I_1 ve I_2 iki parçadaki integrallerdir.
I_1. $u=x$, $dv=\sin(nx)\,dx$:

$$I_1=\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,dx=-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

I_2. $u=\pi-x$, $dv=\sin(nx)\,dx$:

$$\begin{aligned} I_2&=\left[-\frac{(\pi-x)\cos(nx)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)\,dx\\ &=\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.\end{aligned}$$

Toplam. Kosinüslü terimler birbirini götürür:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Çift n için $b_n=0$, $n=2k-1$ için $b_n=\dfrac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^2}$'dir:

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin\big(\,(2k-1)x\,\big).$$

■

Örnek 21.11 (Sinüs Serisinin Düzgün Yakınsaklığı). Örnek 21.10 örneğindeki sinüs serisinin $[0,\pi]$ üzerinde f'ye düzgün yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm.
Düzgün yakınsaklık. Her x için

$$\left|\frac{4(-1)^{k+1}}{\pi(2k-1)^2}\sin\big(\,(2k-1)x\,\big)\right|\le\frac{4}{\pi(2k-1)^2}$$

ve $\sum \dfrac{1}{(2k-1)^2}$ yakınsak olduğundan seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır (Teorem 7.2).
Toplam f'dir. f sürekli ve parçalı düzgündür; $f(0) = f(\pi) = 0$ olduğundan tek genişlemesi 0 ve $\pm\pi$ noktalarında da süreklidir. Teorem 14.1 gereği seri $(0, \pi)$ içinde $f(x)$'e, uçlarda $0 = f(0) = f(\pi)$'ye yakınsar. Yani düzgün yakınsamanın limiti $[0, \pi]$ üzerinde f'dir. Aynı sonuç Teorem 13.2 ile de çıkar. ■

Bu seri $x = \dfrac{\pi}{2}$'de $f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2}$'ye eşittir. $\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2} = (-1)^{k+1}$ olduğundan işaretler karelenir ve $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4}{\pi}\sum \dfrac{1}{(2k-1)^2}$ bulunur; $\dfrac{\pi^2}{8}$ toplamı bir kez daha elde edilir.

21.9 Parseval ve Bessel ile Seri Toplamı

Dirichlet teoremi katsayıların kendisini toplar, Parseval eşitliği karelerini (Teorem 13.4). Bu yüzden bir Fourier serisinin katsayıları $\dfrac{1}{n^2}$ gibiyse Dirichlet teoremi $\sum \dfrac{1}{n^2}$ türünden, Parseval eşitliği $\sum \dfrac{1}{n^4}$ türünden toplamlar verir.

Dört adımda Parseval ile seri toplamı

1. **Katsayılar.** a_0, a_n, b_n hazır olsun; sol yan $\dfrac{a_0^2}{2} + \sum(a_n^2 + b_n^2)$'dir.
2. **Sağ yan.** $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx$. Sinüs ya da kosinüs serisinde ya da f tek veya çiftse bu $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)^2\,dx$ olur. $2L$ periyotta $\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx$ yazılır.
3. **Eşitle.** Parseval eşitliği için f'nin parçalı sürekli olması yeter; süreklilik ya da düzgün yakınsaklık gerekmez.
4. **Yalnız bırak.** Aranan toplamı çek; tek ve çift indisleri ayırma hilesiyle başka toplamlara geç.

Tek ve çift indisleri ayırma. $S = \sum_{n\ge1} \dfrac{1}{n^p}$ ve $T = \sum_{k\ge1} \dfrac{1}{(2k-1)^p}$ olsun. Çift indisli terimlerin toplamı $\dfrac{S}{2^p}$ olduğundan

$$S = T + \frac{S}{2^p}, \qquad S = \frac{2^p}{2^p - 1}\,T$$

olur. $p = 2$ için $T = \dfrac{\pi^2}{8}$'den $S = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\pi^2}{8} = \dfrac{\pi^2}{6}$, $p = 4$ için $T = \dfrac{\pi^4}{96}$'dan $S = \dfrac{16}{15}\cdot\dfrac{\pi^4}{96} = \dfrac{\pi^4}{90}$ çıkar. Alterne toplam da aynı yoldan gelir: $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} = S - \dfrac{2S}{4} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.12: Fourier serilerinden elde edilen klasik toplamlar

Toplam	Değer	Fonksiyon ve yöntem	Ayrıntı
$\sum \dfrac{1}{n^2}$	$\dfrac{\pi^2}{6}$	x^2, $x=\pi$'de toplam	Örnek 12.4
$\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$	$\dfrac{\pi^2}{12}$	x^2, $x=0$'da toplam	Örnek 12.4
$\sum \dfrac{1}{(2k-1)^2}$	$\dfrac{\pi^2}{8}$	$\lvert x \rvert$, $x=0$'da toplam	Örnek 12.3
$\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$	$\dfrac{\pi}{4}$	x, $x=\dfrac{\pi}{2}$'de toplam	Örnek 12.1
$\sum \dfrac{1}{4k^2-1}$	$\dfrac{1}{2}$	$\lvert \sin x \rvert$, $x=0$'da toplam	Alıştırma 12.3
$\sum \dfrac{1}{n^4}$	$\dfrac{\pi^4}{90}$	x^2, Parseval	Alıştırma 13.4
$\sum \dfrac{1}{(2k-1)^4}$	$\dfrac{\pi^4}{96}$	$\pi - \lvert x \rvert$, Parseval	Örnek 13.4

Örnek 21.12 (Çadır Fonksiyonunda Parseval). Örnek 21.10 örneğindeki sinüs serisine Parseval eşitliğini uygulayarak $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$ toplamını bulunuz.

Çözüm.
Neden uygulanır? Sinüs serisi, f'nin tek genişlemesinin Fourier serisidir. Tek genişleme $[-\pi,\pi]$ üzerinde süreklidir, dolayısıyla parçalı süreklidir ve Teorem 13.4 uygulanır. Tek genişlemenin karesi çift olduğundan sağ yan $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)^2\,dx$'tir.

Sol yan. $a_n = 0$ ve $b_{2k-1}^2 = \dfrac{16}{\pi^2(2k-1)^4}$, $b_{2k}=0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}.$$

Sağ yan. f, $x=\dfrac{\pi}{2}$'ye göre simetrik olduğundan iki parçanın integrali eşittir:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2} x^2\,dx = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{24} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Eşitle.

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

■

Bessel eşitsizliği Parseval eşitliğinin "$\le$" sürümüdür ve integrallenebilir her fonksiyon için geçerlidir (Teorem 11.2). İki pratik sonucu vardır: Fourier katsayıları 0'a gider (Sonuç 11.2), ve $\sum(a_n^2+b_n^2)$ ıraksak olan bir trigonometrik seri, $\sum \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ gibi, integrallenebilir hiçbir fonksiyonun Fourier serisi olamaz (Örnek 11.3).

 CC BY-NC-SA 4.0

21.10 Genelleştirilmiş İntegralin Yakınsaklığı

Bu tür sorularda integral çoğu zaman hesaplanamaz; istenen yalnız yakınsaklık kararı ve gerekçesidir. Kararın büyük kısmı, integrandın sorunlu noktalarda hangi kuvvet gibi davrandığını görmekten ibarettir. Önce integralin tipini belirlemek gerekir.

Tablo 21.13: Genelleştirilmiş integral tipleri

Tip	Sorun	Tanım	Örnek
I. tip	Sınır sonsuz	$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b$ (Tanım 15.1)	$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$
II. tip	Fonksiyon bir uçta sınırsız	$\lim_{t\to a^+}\int_t^b$ (Tanım 17.1)	$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$
İç tekil nokta	Fonksiyon (a,b) içinde sınırsız	İki parçaya ayrılır (Tanım 17.2)	$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$
III. tip	Sonsuz sınır ve tekil nokta birlikte	Her parçada tek sorun (Tanım 17.5)	$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

Altı adımda yakınsaklık kararı

1. **Sorunlu noktaları listele.** Sonsuz uçlar ile paydayı sıfırlayan, $\ln x$ ya da $\frac{1}{x}$ gibi sınırsızlık doğuran noktaları yaz. Her adayda limiti al: limit sonluysa nokta yalnız görünürde tekildir ve o yandaki parça sıradan bir integraldir (Önerme 17.1).
2. **Parçala.** Aralığı her parçada tek sorun kalacak biçimde böl; ara nokta (çoğu zaman 1) serbestçe seçilir. Bütün parçalar yakınsaksa integral yakınsak, biri bile ıraksaksa ıraksaktır.
3. **İşarete bak.** Parçada $f \geq 0$ ise karşılaştırma ve kuvvet testleri doğrudan uygulanır; $f \leq 0$ ise $-f$ ile çalışılır. İşaret değişiyorsa önce $|f|$ ile mutlak yakınsaklık denenir (Teorem 16.5).
4. **Kuvveti bul.** Sonsuzda $x^p f(x)$, tekil nokta a'da $(x-a)^p f(x)$ limitini sonlu ve pozitif yapan p'yi bul. Baskın terimleri ve denklik tablosunu kullan. Karar: sonsuzda $p>1$, tekil noktada $p<1$ ise yakınsak; aksi hâlde ıraksak (Sonuç 16.1, Sonuç 17.1).
5. **Limit 0 ya da ∞ çıkarsa.** Logaritma ya da üstel çarpan varsa p'yi biraz kaydır: sonsuzda $l=0$ ve $p>1$ ise yakınsak, $l=+\infty$ ve $p\leq 1$ ise ıraksak. Tekil noktada aynı kural $p<1$ ve $p\geq 1$ ile işler.
6. **Salınım.** sin, cos çarpanı varsa ve $|f|$ ile sonuç alınamıyorsa Dirichlet testi ($F(b)=\int_a^b f$ sınırlı, öbür çarpan monoton ve 0'a gider) ya da Abel testi uygulanır (Teorem 16.6, Teorem 16.7). Şartlı yakınsaklık için $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ eşitsizliği kullanılır.

Kuvvet testinin ölçüsü olan integraller ve kararda sık kullanılan öbür kıyas integralleri aşağıdadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.14: Kıyas integralleri

İntegral	Yakınsak olduğu durum	Ayrıntı
$\int_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p},\ a>0$	$p>1$	Teorem 15.2
$\int_a^{b} \dfrac{dx}{(x-a)^p}$	$p<1$	Teorem 17.1
$\int_a^{+\infty} e^{-tx}\,dx$	$t>0$	Örnek 15.6
$\int_1^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx$	her p	Örnek 16.5
$\int_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x(\ln x)^p}$	$p>1$	Alıştırma 16.3
$\int_0^{1} \ln x\,dx$	yakınsak, değeri -1	Örnek 17.7
$\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x^p}\,dx$	$p>1$ mutlak, $0<p\le 1$ şartlı	Tablo 16.2

Tekil noktadaki davranışı bulmak için standart limitlerden gelen denklikler kullanılır. Tablodaki her satır, $x\to 0$ iken iki ifadenin oranının 1'e gittiğini söyler; dolayısıyla limit karşılaştırma testinde sol sütun sağ sütunla değiştirilebilir (Teorem 17.5).

Tablo 21.15: Sıfır yakınında denklikler

$x\to 0$ iken	Gibi davranır	$x\to 0$ iken	Gibi davranır
$\sin x$, $\tan x$	x	$1-\cos x$	$\dfrac{x^2}{2}$
$\arcsin x$, $\arctan x$	x	$(1+x)^a-1,\ a\neq 0$	ax
$\ln(1+x)$	x	e^x-1	x

Sonsuzda ise üç sıralama yeter: her $\varepsilon>0$ ve her m için $\ln x$, x^{ε}'dan; x^m de e^x'ten yavaş büyür. $\arctan x$ sonsuzda $\dfrac{\pi}{2}$'ye gider, yani sabit gibi davranır. İntegrandın görünüşüne göre test seçimi şöyle yapılır.

Tablo 21.16: İntegrandın biçimine göre test seçimi

İntegrandın görünüşü	Önerilen yol
Rasyonel ya da köklü ifade	Kuvvet testi: pay ve paydanın baskın derecelerinin farkı p'yi verir
$\ln x$ çarpanı	Kuvvet testi, p biraz kaydırılarak ($l=0$ ya da $l=+\infty$ durumu)
e^{-x} çarpanı	$x^2 f(x)\to 0$ ile $p=2$ seçilir
$\sin x$, $\cos x$ çarpanı ve bir kuvvet	Önce $\lvert\sin x\rvert\le 1$ ile mutlak yakınsaklık; işlemezse Dirichlet testi
Monoton ve sınırlı bir çarpan ($\arctan x$, $e^{-1/x}$)	Abel testi ya da sınırla karşılaştırma
Tekil noktada sin, $1-\cos$, $\ln(1+\cdot)$, arctan	Denklik tablosuyla kuvvete indirgeme

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 21.13 (İki Ucu Sorunlu Logaritmalı İntegral). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}\,dx$ integralinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Sorunlu noktalar. Sınır sonsuzdur ve $x \to 0^+$ iken integrand sınırsızdır:

$$\frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} = \frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty.$$

Bu bir III. tip integraldir; $x = 1$'de bölelim:

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^{1} + \int_1^{+\infty} = I_1 + I_2.$$

İki parçada da integrand pozitiftir.
I_1 (tekil nokta 0). Denklik tablosundan $\ln(1+x)$, x gibi davranır; integrand $x^{-1/2}$ gibidir. $p = \dfrac{1}{2}$ ile

$$\lim_{x\to 0^+} x^{1/2}\,\frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

olur. $0 < 1 < +\infty$ ve $p = \dfrac{1}{2} < 1$ olduğundan I_1 yakınsaktır (Sonuç 17.1).
I_2 (sonsuz uç). $p = \dfrac{3}{2}$ seçilirse $x^{3/2} f(x) = \ln(1+x) \to +\infty$ olur; bu durumda test yalnız $p \le 1$ için karar verir. p'yi biraz küçültelim, $p = \dfrac{5}{4}$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{5/4}\,\frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^{1/4}} = 0.$$

Limit 0 ve $p = \dfrac{5}{4} > 1$ olduğundan I_2 yakınsaktır (Sonuç 16.1 (ii)).
Sonuç. İki parça da yakınsak olduğundan integral yakınsaktır. ■

Örnek 21.14 (Şartlı Yakınsak Salınımlı İntegral). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ integralinin şartlı yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Görünürde tekil nokta. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sin x}{x}\cdot\sqrt{x} \to 1\cdot 0 = 0$ $(x \to 0^+)$. İntegrand $(0,1]$ üzerinde sınırlıdır; $\displaystyle\int_0^1$ sıradan bir integraldir (Önerme 17.1). Yalnız $\displaystyle\int_1^{+\infty}$ incelenir.
Yakınsaklık. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ alalım. $F(b) = \displaystyle\int_1^b \sin x\,dx$ integrali $\cos 1 - \cos b$'ye eşittir ve $|\,F(b)\,| \le 2$'dir; g azalandır ve 0'a gider. Dirichlet testi gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ yakınsaktır (Teorem 16.6).
Mutlak yakınsak değil. $|\sin x| \ge \sin^2 x$ olduğundan

$$\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} \ge \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{x}}.$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{x}}\,dx$ yine Dirichlet testiyle yakınsaktır, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ ise $p = \dfrac{1}{2} \le 1$ olduğundan ıraksaktır. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$ yakınsak olsaydı

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} + \frac{\cos(2x)}{2\sqrt{x}}$$

eşitliği gereği iki yakınsak integralin toplamı olarak $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ de yakınsak olurdu. Öyleyse $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$ ıraksaktır ve karşılaştırma testi gereği $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx$ de ıraksaktır (Teorem 16.3).
Sonuç. İntegral yakınsak ama mutlak yakınsak değildir: şartlı yakınsaktır (Tanım 16.1). ■

Örnek 21.15 (Denklikle Iraksaklık). $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^3}\,dx$ integralinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Tekil nokta. Tek sorunlu nokta $x = 0$'dır; denklik tablosundan $1-\cos x$, $\dfrac{x^2}{2}$ gibi davrandığından integrand $\dfrac{1}{2x}$ gibidir ve sınırsızdır. $(0, \frac{\pi}{2}]$ üzerinde integrand pozitiftir.
Kuvvet testi. $p = 1$ ile

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{1-\cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

olur. Limit sonlu ve pozitif, $p = 1 \geq 1$ olduğundan integral ıraksaktır (Sonuç 17.1). ■

⚠ Sık yapılan hatalar

- Tekil noktayı görmeden Newton–Leibniz formülünü uygulamak. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ için ilkelden -2 bulunur, oysa integral ıraksaktır; $x = 1$ iç tekil noktadır (Tanım 17.2).
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}$ integralini $\displaystyle\lim_{c\to+\infty}\int_{-c}^{c}$ olarak hesaplamak. Bu Cauchy temel değeridir; integral yakınsak olmasa da var olabilir (Tanım 15.3).
- Kuvvet testini sonsuzda ve tekil noktada aynı eşikle kullanmak. Sonsuzda $p > 1$, tekil noktada $p < 1$ yakınsaklık verir.
- İşaret değiştiren bir integrandda karşılaştırma testini doğrudan uygulamak. Test negatif olmayan fonksiyonlar içindir; önce $|f|$'ye geçilir.
- Limit 0 çıktığında $p \leq 1$ ile ya da limit $+\infty$ çıktığında $p > 1$ ile karar vermek. Bu iki durumda test sonuç vermez; p kaydırılır.
- III. tip integralde yalnız bir parçayı incelemek. Bütün parçalar ayrı ayrı yakınsak olmalıdır.

21.11 Gamma ve Beta Fonksiyonlarıyla Hesap

"Gamma fonksiyonuyla yazınız" ya da "Beta fonksiyonundan yararlanarak hesaplayınız" diyen sorular, integrali bir değişken değiştirmeyle tanım kalıbına sokmayı ister. Dört adımlık reçete Euler integralleri bölümündedir; burada formülleri ve kalıpları tek yerde topluyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.17: Gamma ve Beta formülleri

İfade	Eşiti	Koşul	Ayrıntı
$\Gamma(\alpha)$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}\,dx$	$\alpha>0$	Tanım 18.1
$\Gamma(\alpha+1)$	$\alpha\,\Gamma(\alpha)$	$\alpha>0$	Teorem 18.2
$\Gamma(n+1)$	$n!$	$n\geq 0$ tam sayı	Teorem 18.2
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\Gamma\left(\frac{3}{2}\right),\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\sqrt{\pi},\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$		Önerme 18.4
$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$	$\dfrac{(2n)!}{4^n\,n!}\sqrt{\pi}$	$n\geq 0$ tam sayı	Önerme 18.4
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx}x^{\alpha-1}\,dx$	$\dfrac{\Gamma(\alpha)}{t^\alpha}$	$t>0,\ \alpha>0$	Teorem 18.2
$\beta(x,y)$	$\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$	$x,y>0$	Tanım 18.2
$\beta(x,y)$	$\dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$	$x,y>0$	Teorem 18.4
$\beta(m,n)$	$\dfrac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$	$m,n\geq 1$ tam sayı	Önerme 18.3
$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^m\theta\cos^n\theta\,d\theta$	$\dfrac{1}{2}\beta\left(\dfrac{m+1}{2},\dfrac{n+1}{2}\right)$	$m,n>-1$	Sonuç 18.1
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$		Sonuç 18.3

Sık görülen kalıplar ve onları tanım kalıbına sokan değişken değiştirmeler aşağıdadır. Her satır, ilk sütundaki dönüşümle bir satır hesapla elde edilir.

Tablo 21.18: Euler integrallerine götüren kalıplar

İntegral	Dönüşüm	Sonuç
$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^k}\,dx$	$u=ax^k$	$\dfrac{1}{k\,a^{(m+1)/k}}\,\Gamma\left(\dfrac{m+1}{k}\right)$
$\displaystyle\int_c^{+\infty}(x-c)^m e^{-ax}\,dx$	$t=x-c$	$e^{-ac}\,\dfrac{\Gamma(m+1)}{a^{m+1}}$
$\displaystyle\int_0^1 x^m(-\ln x)^n\,dx$	$x=e^{-t}$	$\dfrac{\Gamma(n+1)}{(m+1)^{n+1}}$
$\displaystyle\int_0^c x^m(c-x)^n\,dx$	$x=ct$	$c^{m+n+1}\,\beta(m+1,n+1)$
$\displaystyle\int_0^c x^m(c^2-x^2)^n\,dx$	$x=c\sin\theta$	sin, cos kuvvetleri, Sonuç 18.1

Koşullar: 1. satırda $a,k>0$ ve $m>-1$; 2. satırda $a>0$ ve $m>-1$; 3. satırda $m>-1$ ve $n>-1$; 4. satırda $c>0$ ve $m,n>-1$. Yani Gamma'nın argümanı ve Beta'nın iki parametresi pozitif olmalıdır; değilse integral ıraksaktır (Teorem 18.1, Teorem 18.3).

Örnek 21.16 (Ötelenmiş ve Ölçeklenmiş Gamma). $\displaystyle\int_2^{+\infty}\sqrt{x-2}e^{-3x}\,dx$ integralini Gamma fonksiyonu yardımıyla hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Öteleme. $t = x - 2$ alalım; $x = 2 \Rightarrow t = 0$, $x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$ ve $e^{-3x} = e^{-6}e^{-3t}$ olur:

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{x-2}e^{-3x}\,dx = e^{-6}\int_0^{+\infty} t^{1/2}e^{-3t}\,dt.$$

Ölçekleme. Kalıpta $\alpha - 1 = \dfrac{1}{2}$, yani $\alpha = \dfrac{3}{2}$ ve t yerine 3 vardır. Teorem 18.2 (5) gereği

$$\int_0^{+\infty} t^{1/2}e^{-3t}\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{3^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}/2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{6\sqrt{3}}.$$

Sonuç.

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{x-2}e^{-3x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{6\sqrt{3}\,e^{6}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{18\,e^{6}}.$$

■

Örnek 21.17 (Logaritmanın Kuvvetiyle Gamma). $\displaystyle\int_0^1 x^2(\ln x)^4\,dx$ integralini Gamma fonksiyonu yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.
Dönüşüm. $x = e^{-t}$ alalım: $\ln x = -t$, $dx = -e^{-t}\,dt$; $x \to 0^+$ iken $t \to +\infty$, $x = 1$ iken $t = 0$:

$$\int_0^1 x^2(\ln x)^4\,dx = \int_{+\infty}^0 e^{-2t}\,t^4\,(-e^{-t})\,dt = \int_0^{+\infty} t^4e^{-3t}\,dt.$$

$(\ln x)^4 = (-t)^4 = t^4$ olduğundan işaret sorunu çıkmaz.
Gamma. Kalıpta $\alpha = 5$ ve t yerine 3 vardır:

$$\int_0^{+\infty} t^4e^{-3t}\,dt = \frac{\Gamma(5)}{3^5} = \frac{4!}{243} = \frac{24}{243} = \frac{8}{81}.$$

■

Örnek 21.18 (Trigonometrik Dönüşümle Beta). $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ integralini Beta fonksiyonu yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm.
Dönüşüm. $x = 2\sin\theta$ alalım; $dx = 2\cos\theta\,d\theta$, $\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta$ ve θ, 0'dan $\dfrac{\pi}{2}$'ye gider:

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sin^2\theta\cdot 2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta = 16\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta.$$

Beta. Sonuç 18.1 ile $m = n = 2$:

$$16\cdot\frac{1}{2}\beta\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = 8\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)^2}{\Gamma(3)} = 8\cdot\frac{\pi/4}{2} = \pi.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

21.12 Leibniz Formülü

Sınırları da integrandı da parametreye bağlı bir integralin türevi Leibniz formülüyle bulunur (Sonuç 19.1):

$$\frac{d}{dy}\int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)\,dx = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx + f\big(v(y),y\big)\,v'(y) - f\big(u(y),y\big)\,u'(y).$$

Formül üç parçalıdır: integrandın türevinden gelen iç kısım ve iki sınır terimi. Sınırlar sabitse yalnız iç kısım kalır (Teorem 19.3); integrand y'ye bağlı değilse yalnız sınır terimleri kalır ve formül analizin temel teoremine iner.

Beş adımda Leibniz formülü

1. **Rolleri ayır.** İntegral değişkeni x, parametre y'dir. $f(x,y)$, $u(y)$ ve $v(y)$'yi açıkça yaz.
2. **Koşulları denetle.** f ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, x'in aldığı değerleri ve ilgilenilen y değerlerini içeren bir dikdörtgende sürekli; u ve v türevlenebilir olmalıdır. Sorun çıkaran y değerlerini (paydayı sıfırlayanlar, logaritmanın tanımsız olduğu yerler) dışarıda bırak.
3. **İç kısım.** $\dfrac{\partial f}{\partial y}$'yi hesapla ve x'e göre integralle. Logaritma ve arktanjant içeren integrandlarda türev çoğu zaman rasyonel bir ifadeye sadeleşir.
4. **Sınır terimleri.** f'de x yerine üst sınırı koy ve $v'(y)$ ile çarp; alt sınırı koy ve $u'(y)$ ile çarpıp çıkar. f'deki y'ler aynen kalır.
5. **Topla ve sadeleştir.** Logaritmaları birleştir; mümkünse bir y değerinde sayısal ya da doğrudan hesapla sağlama yap.

Örnek 21.19 (Logaritmalı İntegrandla Leibniz Formülü). $y>0$ için $F(y)=\displaystyle\int_{y}^{y^3}\frac{\ln(1+xy)}{x}\,dx$ olsun. $F'(y)$'yi bulunuz.

Çözüm.
Roller ve koşullar. $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+xy)}{x}$, $u(y)=y$, $v(y)=y^3$. $0<c<d$ olmak üzere $y\in[c,d]$ için sınırlar pozitif bir kapalı aralıkta kalır. $x>0$, $y>0$ bölgesinde f ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{1+xy}=\frac{1}{1+xy}$$

süreklidir; Sonuç 19.1 uygulanır.
İç kısım.

$$\int_{y}^{y^3}\frac{dx}{1+xy}=\frac{1}{y}\Big[\ln(1+xy)\Big]_{x=y}^{x=y^3}=\frac{\ln(1+y^4)-\ln(1+y^2)}{y}.$$

Sınır terimleri. Üst sınırda $f(y^3,y)=\dfrac{\ln(1+y^4)}{y^3}$ ve $v'(y)=3y^2$; alt sınırda $f(y,y)=\dfrac{\ln(1+y^2)}{y}$ ve $u'(y)=1$:

$$f(y^3,y)\cdot 3y^2 - f(y,y)\cdot 1 = \frac{3\ln(1+y^4)}{y}-\frac{\ln(1+y^2)}{y}.$$

Toplam.

$$F'(y)=\frac{4\ln(1+y^4)-2\ln(1+y^2)}{y}=\frac{2}{y}\ln\frac{(1+y^4)^2}{1+y^2}.$$

Örneğin $F'(1)=2\ln 2\approx 1{,}386$'dır; F'nin sayısal türeviyle aynı değer bulunur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Sık yapılan hatalar

- Sınır terimlerini $u'(y)$ ve $v'(y)$ ile çarpmayı unutmak.
- Sınır teriminde x yerine sınırı koyarken f'deki y'yi de değiştirmek ya da tam tersine x'i bırakmak. $f(v(y), y)$ yalnız y'ye bağlı bir ifadedir.
- İç kısımda $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ almak. Türev parametreye, yani y'ye göredir.
- Sabit sınırlı bir integralde sınır terimi eklemek. Sınırlar y'ye bağlı değilse $v' = u' = 0$'dır.
- $\ln(1 + xy)$ gibi ifadelerin y'ye göre türevinde iç türevi (x) unutmak.

21.13 İntegral İşareti Altında Türev ve Sıra Değiştirme

İlkeli temel fonksiyonlarla yazılamayan bir integral, bir parametre ailesinin üyesi yapılarak hesaplanabilir: ya türev alınır ve türevin integrali kolaydır, ya da integrand bir başka integral olarak yazılıp sıra değiştirilir. Beş adımlık reçete Parametreye bağlı genelleştirilmiş integraller bölümündedir; aşağıdaki tablo hangi kalıpta hangi hilenin işe yaradığını gösterir.

Tablo 21.19: Parametre ekleyerek hesap kalıpları

İntegrandda görülen	Hile	Ayrıntı
$\dfrac{x^b - x^a}{\ln x}$	$\displaystyle\int_a^b x^y\,dy$ olarak yaz ya da x^y ile türev al	Örnek 19.6
$\dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$	$\displaystyle\int_a^b e^{-xy}\,dy$ olarak yaz, sırayı değiştir	Teorem 20.8
$\ln(1 + y\,\cdot)$, $\arctan(y\,\cdot)$	y'ye göre türev al; $y = 0$'daki değer bilinir	Teorem 19.3
$\dfrac{\sin x}{x}$	e^{-xy} çarpanı ekle, türev al	Örnek 20.15

Bu hesaplarda sık çıkan sonuçlar:

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.20: Sık kullanılan integral değerleri

İntegral	Değer	Ayrıntı
$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx$	$\dfrac{1}{y},\ y>0$	Örnek 15.6
$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\cos x\,dx$	$\dfrac{y}{1+y^2},\ y>0$	Alıştırma 20.6
$\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\,dx$	$\dfrac{1}{1+y^2},\ y>0$	Örnek 20.15
$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$	$\dfrac{\pi}{2}$	Örnek 20.15
$\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(xy)}{x}\,dx$	$y>0$ ise $\dfrac{\pi}{2}$, $y=0$ ise 0, $y<0$ ise $-\dfrac{\pi}{2}$	$t=\mid y\mid x$ dönüşümü
$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$	Sonuç 18.3
$\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$	$\ln\dfrac{b}{a},\ a,b>0$	Örnek 21.21

Örnek 21.20 (Türev Alarak Logaritmalı İntegral). $y>0$ için

$$I(y)=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\cos^2 x+y^2\sin^2 x\right)dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm.
Koşullar. $0<c<d$ olsun. $y\in[c,d]$ için logaritmanın içi $\min(1,c^2)$'den küçük olmaz; f ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y\sin^2 x}{\cos^2 x+y^2\sin^2 x}$$

$[0,\tfrac{\pi}{2}]\times[c,d]$ üzerinde süreklidir. Teorem 19.3 gereği $I'(y)$, bu ifadenin integralidir.
Türev. $t=\tan x$ dönüşümüyle ($\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$)

$$I'(y)=\int_0^{+\infty}\frac{2y\,t^2}{(1+t^2)(1+y^2t^2)}\,dt$$

olur. $y\neq 1$ için basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{2y\,t^2}{(1+t^2)(1+y^2t^2)}=\frac{2y}{y^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{1+y^2t^2}\right).$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}$ ve $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+y^2t^2}=\frac{\pi}{2y}$ olduğundan

$$I'(y)=\frac{2y}{y^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{y}\right)=\frac{2y}{y^2-1}\cdot\frac{\pi(y-1)}{2y}=\frac{\pi}{y+1}.$$

$y=1$'de doğrudan $I'(1)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}2\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}$ bulunur; formül bu değeri de verir.
Geri integral. $I(y)=\pi\ln(1+y)+C$. $y=1$ için logaritmanın içi $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ olduğundan $I(1)=0$'dır; buradan $C=-\pi\ln 2$:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$I(y) = \pi \ln \frac{1+y}{2}.$$

■

Örnek 21.21 (Sıra Değiştirerek Üstel Fark). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm.
İntegral olarak yaz. Her $x > 0$ için

$$\frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{x} = \int_2^5 e^{-xy}\,dy$$

olur; $x = 0$'da iki yan da 3'e eşit tutulursa eşitlik $[0, +\infty)$ üzerinde geçerlidir ve integrand süreklidir.
Düzgün yakınsaklık. $f(x,y) = e^{-xy}$, $[0,+\infty) \times [2,5]$ üzerinde süreklidir ve $0 < e^{-xy} \le e^{-2x}$ olur. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2}$ yakınsak olduğundan $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx$ integrali $[2,5]$ üzerinde düzgün yakınsaktır (Teorem 20.3).
Sıra değiştir. Teorem 20.8 gereği

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_2^5 e^{-xy}\,dy\right)dx = \int_2^5\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dx\right)dy = \int_2^5 \frac{dy}{y} = \ln\frac{5}{2}.$$

■

21.14 Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş İntegrallerde Düzgün Yakınsaklık

Parametreye bağlı bir genelleştirilmiş integralin düzgün yakınsaklığı, kalanın parametreden bağımsız olarak küçülmesidir (Tanım 20.2):

$$\lim_{b\to+\infty} \sup_{y\in Y} \left| \int_b^{+\infty} f(x,y)\,dx \right| = 0.$$

Bu tür soruların büyük çoğunluğu Weierstrass M-testiyle tek satırda çözülür; zor olan, parametreyi yok eden $M(x)$ sınırını bulmaktır.

Dört adımda parametreli integralde düzgün yakınsaklık

1. **Noktasal yakınsaklık.** Her sabit y için integralin yakınsak olduğunu tek değişkenli testlerle göster.
2. **M-testi.** $|\,f(x,y)\,| \le M(x)$ olacak, y içermeyen bir M bul ve $\displaystyle\int_a^{+\infty} M(x)\,dx$'in yakınsadığını göster (Teorem 20.3). Tekil noktalı integrallerde aynı test geçerlidir (Sonuç 20.1).
3. **M-testi işlemezse.** Kalan açıkça hesaplanabiliyorsa supremumuna bak. Salınımlı integrallerde Dirichlet ya da Abel testini uygula (Teorem 20.4, Teorem 20.5).
4. **Olumsuz cevap.** Kalanın supremumu 0'a gitmiyorsa ya da f sürekli olduğu hâlde $F(y)$ bir noktada süreksizse integral orada düzgün yakınsak değildir (Teorem 20.6). Sorun çoğu zaman parametrenin bir uç değerinde ($y \to 0$) çıkar; o uçtan uzak durulan $[c,d]$ aralıklarında düzgünlük geri gelir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tablo 21.21: M-testinde parametreyi yok eden sınırlar

İfade	Sınır	Geçerli olduğu yer
$\lvert\sin(xy)\rvert, \lvert\cos(xy)\rvert$	1	her x, y
e^{-xy}	e^{-cx}	$y \geq c > 0, x \geq 0$
$\lvert\sin(xy)\rvert$	$\lvert x\rvert\,\lvert y\rvert$	her x, y
$\dfrac{1}{x^2+y^2}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$y^k e^{-xy}$	$\dfrac{k^k e^{-k}}{x^k}$ (türevle, $y=\frac{k}{x}$'te)	$y \geq 0, x > 0$

Örnek 21.22 (Parametreyi Türevle Yok Etmek). $\displaystyle\int_1^{+\infty} y^2 e^{-xy}\,dx$ integralinin $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Sınır. $x \geq 1$ sabitken $h(y) = y^2 e^{-xy}$ fonksiyonunun $y \geq 0$ üzerindeki en büyük değerini arayalım:

$$h'(y) = (2y - xy^2)\,e^{-xy} = y(2-xy)\,e^{-xy}$$

$y = \dfrac{2}{x}$'te sıfırdır; h bu noktaya kadar artar, sonra azalır. En büyük değer

$$h\!\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{4}{x^2}\,e^{-2}$$

olduğundan her $x \geq 1$ ve her $y \geq 0$ için $0 \leq y^2 e^{-xy} \leq M(x) = \dfrac{4}{e^2 x^2}$'dir.
M-testi. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4}{e^2x^2}\,dx = \frac{4}{e^2}$ yakınsaktır. Teorem 20.3 gereği integral $[0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
Bir sağlama. $y > 0$ için integral $F(y) = y^2 \cdot \dfrac{e^{-y}}{y} = y\,e^{-y}$, $y = 0$ için $F(0) = 0$'dır; F süreklidir, Teorem 20.6 ile uyumludur. ■

Örnek 21.23 (Sıfır Yakınında Düzgünlüğün Bozulması). $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{y}{1+x^2y^2}\,dx$ integralinin $(0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak olmadığını gösteriniz.

Çözüm.
Noktasal değer. $y > 0$ için $\Big[\arctan(xy)\Big]_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2}$; integral her $y > 0$ için yakınsaktır.
Kalan. $b > 0$ için

$$\int_b^{+\infty} \frac{y}{1+x^2y^2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \arctan(by).$$

$y \to 0^+$ iken bu ifade $\dfrac{\pi}{2}$'ye gider; dolayısıyla her b için

$$\sup_{y>0}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan(by)\Big) = \frac{\pi}{2}$$

olur ve $b \to +\infty$ iken 0'a gitmez. İntegral $(0,+\infty)$ üzerinde düzgün yakınsak değildir (Tanım 20.2). ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Sorun yalnız $y = 0$ yakınındadır. $c > 0$ olmak üzere $[c, +\infty)$ üzerinde kalanın supremumu $\frac{\pi}{2} - \arctan(bc)$'dir ve $b \to +\infty$ iken 0'a gider; orada yakınsama düzgündür. $F(0) = 0$ iken $y > 0$ için $F(y) = \frac{\pi}{2}$ olması, yani F'nin 0'da süreksiz olması da $[0, +\infty)$ üzerinde düzgünlüğün bulunamayacağını gösterir.

21.15 Son Kontrol Listesi

Bir çözümü bitirmeden önce şu soruları sor:

1. Noktasal limiti bütün özel noktaları ayırarak buldun mu? $N(\varepsilon)$ ya da supremum x'ten bağımsız mı?
2. Supremumu ararken kritik noktaların yanında kümenin uçlarını da denetledin mi?
3. Bir limit, integral ya da türevi içeri alırken gereken düzgün yakınsaklığı gösterdin mi? Terim terime türevde çapa noktasını yazdın mı?
4. M-testindeki M_n ya da $M(x)$ gerçekten x'ten (parametreli integralde y'den) bağımsız mı?
5. Kuvvet serisinde iki uç noktayı ayrı ayrı inceledin mi?
6. Fourier serisinde periyodu ve L'yi doğru aldın mı? a_0'ı ayrı hesapladın mı, sabit terimi $\frac{a_0}{2}$ yazdın mı?
7. Seri toplamı sorusunda seçtiğin noktanın sıçrama mı, uç mu, süreklilik noktası mı olduğuna baktın mı?
8. Genelleştirilmiş integralde bütün sorunlu noktaları bulup her parçayı ayrı ayrı inceledin mi? Kuvvet testinin eşiğini (sonsuzda $p > 1$, tekil noktada $p < 1$) doğru kullandın mı?
9. Gamma ve Beta dönüşümünde sınırları ve dx'i birlikte dönüştürdün mü? Parametreler pozitif mi?
10. Leibniz formülünde iki sınır terimini de türevleriyle çarparak ekledin mi?

Kuralların gerekçeleri ve daha fazla çözümlü örnek için her bölümün alıştırmalarına, ders içeriğinin tamamı için Müfredat ve Giriş sayfasına dönebilirsin.

 CC BY-NC-SA 4.0