Analitik Geometri

Açık Matematik

Açık Matematik — açık kaynaklı, reklamsız Türkçe matematik notları
acik-matematik.com
Bu çalışma Creative Commons BY-NC-SA 4.0 lisansıyla paylaşılmıştır: kaynak göstererek ve aynı lisansla, ticari olmayan amaçlarla kopyalayabilir, dağıtabilir ve uyarlayabilirsiniz.
Bu sürüm: 4 Kasım 2026

İçindekiler

Giriş 8

1 Dik Koordinatlar ve Uzaklık 9
1.1 Sayı Doğrusu ve Temel İlke 9
1.2 Dik Koordinat Sistemi 10
1.3 İki Nokta Arasındaki Uzaklık 14
1.4 Uzaklıkla Şekil Tanıma 19
1.5 Üç Noktaya Eşit Uzaklıktaki Nokta 28
1.6 Alıştırmalar 32

2 Bölme Oranı, Eğim ve Açı 51
2.1 Doğru Parçasını Verilen Oranda Bölme 51
2.2 Eğim Açısı ve Eğim 60
2.3 Paralel ve Dik Doğrular 67
2.4 Kesişen İki Doğru Arasındaki Açı 73
2.5 Alıştırmalar 81

3 Düzlemde Doğru Denklemleri 88
3.1 Bir Noktası ve Eğimi Verilen Doğru 88
3.2 Bir Doğrunun Genel Denklemi 93
3.3 Bir Doğrunun Normal Denklemi 97
3.4 Bir Noktanın Doğruya Uzaklığı 101
3.5 Alıştırmalar 106

4 Çember 117
4.1 Çemberin Tanımı ve Standart Denklemi 117
4.2 Çemberin Genel Denklemi 120
4.3 Koşullardan Çember Denklemi Kurmak 123
4.4 Bir Doğru ile Bir Çemberin Durumu 126
4.5 İki Çemberin Durumu 133
4.6 Alıştırmalar 142

5 Paralel ve Kutupsal Koordinatlar 147
5.1 Paralel koordinat sistemi 147
5.2 Kutupsal koordinat sistemi 151
5.3 Kutupsal koordinatlarda doğru denklemi 160
5.4 Alıştırmalar 167

 CC BY-NC-SA 4.0

6 Uzayda Dik Koordinat Sistemi . . . 183
6.1 Eksenler ve koordinat düzlemleri . . . 183
6.2 Bir noktanın koordinatları . . . 185
6.3 Denklemlerle verilen nokta kümeleri . . . 190
6.4 İki nokta arasındaki uzaklık . . . 195
6.5 Küre . . . 198
6.6 Alıştırmalar . . . 204

7 Vektörler . . . 210
7.1 Yönlü Doğru Parçaları . . . 210
7.2 Vektör Kavramı . . . 211
7.3 Vektörlerin Koordinatları . . . 213
7.4 Bir Vektörün Uzunluğu . . . 217
7.5 Vektör Cebri . . . 219
7.6 Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık . . . 231
7.7 Baz ve Boyut . . . 234
7.8 Alıştırmalar . . . 236

8 İç Çarpım . . . 241
8.1 İç çarpımın tanımı . . . 241
8.2 İç çarpımın özellikleri . . . 242
8.3 Cauchy–Schwarz ve üçgen eşitsizlikleri . . . 243
8.4 İki vektör arasındaki açı . . . 246
8.5 Diklik ve iç çarpımın işareti . . . 251
8.6 Dik izdüşüm . . . 252
8.7 Doğrultu açıları ve doğrultman kosinüsleri . . . 258
8.8 Alıştırmalar . . . 262

9 Vektörel ve Karma Çarpım . . . 274
9.1 Vektörel Çarpım . . . 274
9.2 Üçlü Özdeşlik . . . 279
9.3 Karma Çarpım . . . 282
9.4 Lagrange, Dörtlü ve Gram Özdeşlikleri . . . 284
9.5 Vektörel Çarpımın Geometrik Yorumu . . . 288
9.6 Karma Çarpımın Geometrik Yorumu . . . 296
9.7 Düzlemde Vektörler . . . 300
9.8 Alıştırmalar . . . 303

10 Uzayda Doğru Denklemleri . . . 312
10.1 Doğrultman vektörü . . . 312
10.2 Bir noktası ve doğrultmanı verilen doğru . . . 312
10.3 İki noktası verilen doğru . . . 320
10.4 İki doğrunun paralelliği . . . 323

 CC BY-NC-SA 4.0

10.5 İki doğrunun dikliği . . . 326
10.6 Koordinat eksenlerine göre özel doğrular . . . 331
10.7 Alıştırmalar . . . 334

11 Uzayda İki Doğru . . . 339
11.1 İki doğru arasındaki açı . . . 339
11.2 Bir noktanın bir doğruya uzaklığı . . . 342
11.3 İki doğrunun birbirine göre durumları . . . 347
11.4 İki doğru arasındaki en kısa uzaklık . . . 355
11.5 Alıştırmalar . . . 364

12 Uzayda Düzlem Denklemleri . . . 374
12.1 Bir Noktası ve Normali Verilen Düzlem . . . 374
12.2 Bir Noktası ve İki Doğrultusu Verilen Düzlem . . . 380
12.3 Doğrudaş Olmayan Üç Noktası Verilen Düzlem . . . 385
12.4 Alıştırmalar . . . 393

13 İki Düzlem ve Düzlemin İrdelenmesi . . . 408
13.1 İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları . . . 408
13.2 Kesişen İki Düzlemin Arakesit Doğrusu . . . 413
13.3 İki Düzlem Arasındaki Açı . . . 419
13.4 Düzlemin Uzayda Resmedilmesi . . . 422
13.5 Düzlem Denkleminin İrdelenmesi . . . 427
13.6 Alıştırmalar . . . 432

14 Doğru ile Düzlem ve Uzaklıklar . . . 443
14.1 Uzayda Doğru ile Düzlemin Durumları . . . 443
14.2 Doğru ile Düzlem Arasındaki Açı . . . 453
14.3 Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı . . . 455
14.4 Paralel İki Düzlem Arasındaki Uzaklık . . . 459
14.5 Alıştırmalar . . . 461

15 Uzayda Simetri . . . 467
15.1 Doğruya Göre Simetri . . . 467
15.2 Düzleme Göre Simetri . . . 474
15.3 Bir Doğrunun Bir Düzleme Göre Simetriği . . . 482
15.4 Alıştırmalar . . . 485

16 Öteleme . . . 493
16.1 Noktaların Ötelenmesi . . . 493
16.2 Eksenlerin Ötelenmesi . . . 500
16.3 Denklemleri Ötelemeyle Sadeleştirmek . . . 508
16.4 Alıştırmalar . . . 510

 CC BY-NC-SA 4.0

17 Döndürme ve Paralel Eksenler . . . 521
17.1 Noktaların döndürülmesi . . . 521
17.2 Eksenlerin döndürülmesi . . . 529
17.3 Dik koordinat sisteminden paralel koordinat sistemine geçiş . . . 539
17.4 Alıştırmalar . . . 546

18 Elips . . . 559
18.1 Konikler . . . 559
18.2 Elipsin Tanımı . . . 562
18.3 Elipsin Köşeleri ve Eksenleri . . . 564
18.4 Elipsin Standart Denklemi . . . 567
18.5 Eksenleri Koordinat Eksenlerine Paralel Elipsler . . . 570
18.6 Elipsin Parametresi . . . 573
18.7 Elipsin Bir Noktasındaki Teğeti ve Normali . . . 575
18.8 Elips ile Doğru . . . 578
18.9 Birbirine Dik Teğetler ve Monge Çemberi . . . 581
18.10 Dış Merkezlik . . . 584
18.11 Asal ve Yedek Çember, Parametrik Denklem . . . 586
18.12 Doğrultmanlar ve Elipsin İkinci Tanımı . . . 589
18.13 Alıştırmalar . . . 592

19 Hiperbol . . . 610
19.1 Hiperbolün Tanımı ve Temel Öğeleri . . . 610
19.2 Standart Denklem . . . 612
19.3 Asimptotlar . . . 615
19.4 Yedek Eksen ve Hiperbolü Çizmek . . . 617
19.5 Odakları Y-Ekseninde ya da Merkezi Kaymış Hiperbol . . . 619
19.6 İkizkenar Hiperbol . . . 622
19.7 Hiperbolün Parametresi . . . 623
19.8 Teğet ve Normal . . . 624
19.9 Hiperbol ile Doğru . . . 629
19.10 Dış Merkezlik ve Doğrultmanlar . . . 631
19.11 Parametrik Denklem . . . 635
19.12 Alıştırmalar . . . 637

20 Parabol . . . 655
20.1 Parabolün Tanımı ve Öğeleri . . . 655
20.2 Parabolün Standart Denklemi . . . 656
20.3 Köşesi Başka Bir Noktada Olan Paraboller . . . 663
20.4 Parabolün Parametrik Denklemleri . . . 665
20.5 Parabolün Bir Noktasındaki Teğet . . . 666
20.6 Parabol ile Doğru . . . 669

 CC BY-NC-SA 4.0

20.7 Koniklerin Kutupsal Denklemi . . . 671
20.8 Alıştırmalar . . . 678

21 Koniklerin Sınıflandırılması . . . 683
21.1 İkinci dereceden genel denklem . . . 683
21.2 Karma terim yoksa öteleme yeter . . . 683
21.3 Karma terimi dönmeyle yok etmek . . . 686
21.4 Dönmede değişmeyen büyüklükler . . . 690
21.5 Koniğin türü: eliptik, hiperbolik, parabolik . . . 692
21.6 Diskriminant . . . 694
21.7 Merkezli koniklerin sınıflandırılması . . . 697
21.8 Parabol: karakteristiği sıfır, diskriminantı sıfırdan farklı . . . 700
21.9 Koniğin merkezi . . . 701
21.10 Karakteristiği ve diskriminantı sıfır olan konikler . . . 707
21.11 Sınıflandırma tablosu . . . 709
21.12 Alıştırmalar . . . 712

22 Silindirik ve Küresel Koordinatlar . . . 727
22.1 Silindirik koordinatlar . . . 727
22.2 Küresel koordinatlar . . . 736
22.3 Uzayda kutupsal koordinatlar . . . 744
22.4 Alıştırmalar . . . 746

23 Özel Yüzeyler . . . 753
23.1 Yüzey ve Küre . . . 753
23.2 Uzay Eğrisi . . . 754
23.3 Silindir . . . 756
23.4 Koni . . . 763
23.5 Dönel Yüzeyler . . . 768
23.6 İkinci Derece Yüzeyler . . . 775
23.7 Denklemi Verilen Yüzeyi Tanımak . . . 786
23.8 Alıştırmalar . . . 788

 CC BY-NC-SA 4.0

Giriş

Analitik geometri, geometrik nesneleri koordinat sistemleri aracılığıyla cebirsel denklemlere çevirerek inceleyen daldır. Bu notlar düzlemdeki koordinat sistemlerinden başlar; vektörler ve çarpımları üzerinden uzayda doğru ve düzleme, koordinat dönüşümlerine, koniklere ve özel yüzeylere kadar uzanır.

CC BY-NC-SA 4.0

1. Dik Koordinatlar ve Uzaklık

Analitik geometri, geometriyi cebirle yapma yöntemidir. Öklid'in M.Ö. 300 dolaylarında *Elementler* adlı eserinde topladığı geometri; uzunluk, açı, alan ve hacim gibi ölçülebilir özellikleri sayı ve denklem kullanmadan, yalnız şekiller üzerinde akıl yürüterek inceler. Bu sentetik yöntem on yedinci yüzyıla kadar geometrinin ana yolu oldu. Koordinat sistemleri kullanılmaya başlanınca noktalar sayılarla, şekiller denklemlerle anlatılabildi; geometrik bir problem cebirsel bir probleme dönüştü ve analitik geometri doğdu. Araçlarımız sayılar, koordinatlar, denklemler ve denklem sistemleri, vektörler, matrisler ve determinantlardır. Bunlarla iki nokta arasındaki uzaklık, bir üçgenin alanı, iki yüzey arasındaki açı, iki eğrinin kesişmesi ya da teğet olması gibi soruları ve geometrik dönüşümleri inceleyeceğiz.
Çalışmamız iki yönlüdür. Bir yanda, bir özellikle tarif edilmiş bir noktalar kümesinin (bir *geometrik yerin*) denklemini bulur, çoğu zaman şeklini de çizeriz. Öbür yanda, verilen bir denklemi ya da denklem sistemini sağlayan noktaların oluşturduğu şeklin geometrik özelliklerini ortaya çıkarırız. Sahnemiz iki ve üç boyutlu Öklid uzayıdır. Düzlemde ($\mathbb{R}^2$) başrolde $Ax + By + C = 0$ biçimindeki doğrular ve $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ biçimindeki eğriler vardır; uzayda ($\mathbb{R}^3$) ise $Ax + By + Cz + D = 0$ biçimindeki düzlemler ve

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0$$

biçimindeki yüzeyler. Amacımız geometrik nesnelerin şeklini ve özelliklerini ortaya koymak, cebirsel kavramlarla rahatça işlem yapma alışkanlığı kazanmak ve cebirle ifade edilmiş bir bilginin geometrik anlamını görebilmektir.
Bu ilk bölümde bir doğrunun ve bir düzlemin noktalarını sayılarla adlandırmayı öğreneceğiz. Ardından ilk aracımızı, iki nokta arasındaki uzaklık formülünü kuracak ve onunla üçgenleri, kareleri ve aynı doğru üzerindeki noktaları tanıyacağız.

1.1 Sayı Doğrusu ve Temel İlke

Nokta geometrinin en temel kavramıdır: yalnızca bir konumu vardır, uzunluğu ya da genişliği yoktur. Doğrular, çemberler, üçgenler, yüzeyler, hepsi birer noktalar kümesi olarak düşünülebilir. O hâlde noktaları sayılarla adlandırabilirsek, bütün bu nesneleri de sayılarla ve denklemlerle anlatabiliriz. Bir noktayı temsil eden sayılara *koordinat* diyoruz. İlk adımı en basit yerde, bir doğru üzerinde atalım.

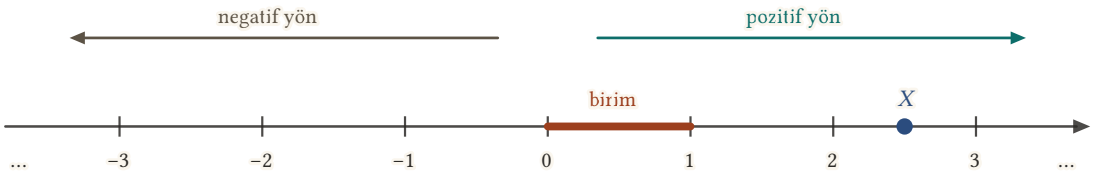
Tanım 1.1 (Analitik Geometrinin Temel İlkesi). Bir doğru üzerinde 0'a ve 1'e karşılık gelecek iki nokta seçelim. 0'ın noktasından 1'in bulunduğu tarafa doğru yön **pozitif yön**, öbür taraf **negatif yön** olsun ve bu iki nokta arasındaki uzaklık **birim** kabul edilsin. Bu durumda

- her $x \in \mathbb{R}$ için doğru üzerinde, 0'ın noktasına işaretli uzaklığı x olan bir ve yalnız bir X noktası vardır;
- tersine, doğrunun her X noktası, 0'ın noktasına işaretli uzaklığı olan bir ve yalnız bir $x \in \mathbb{R}$ sayısı belirtir.

Böylece doğrunun noktaları ile $\mathbb{R}$'nin elemanları birebir ve örten olarak eşlenir. Bütün koordinatlamalar bu eşlemeye dayandığından, bu ilkeye analitik geometrinin **temel ilkesi** denir.

Yani doğru üzerinde yalnız iki nokta işaretlemek yeter: biri başlangıcı (0), öbürü hem yönü hem de birimi (1) belirler. "İşaretli uzaklık", X noktası pozitif taraftaysa uzaklığın kendisi, negatif taraftaysa uzaklığın eksilisi demektir. Örneğin 0'ın 2,5 birim sağındaki noktanın sayısı 2,5, 3 birim solundakinin sayısı -3'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.1: Sayı doğrusu: 0 başlangıcı, 1 ise hem birimi hem de pozitif yönü belirler. 0'ın 2,5 birim sağındaki X noktasının sayısı 2,5'tir.

Tanım 1.2 (Cantor–Dedekind Yöntemi). Bir doğrunun noktalarını temel ilkedeki eşlemeyle (bkz. Tanım 1.1) $\mathbb{R}$'nin elemanları ile temsil etme yöntemine **Cantor–Dedekind yöntemi** denir.

Yani Cantor–Dedekind yöntemi, "doğrunun her noktasına bir reel sayı, her reel sayıya doğrunun bir noktası" ilkesinin adıdır. Böyle birebir ve örten bir eşlemenin var olduğunu ispatlamıyoruz; bu, analitik geometrinin başlangıç kabulüdür.

Tanım 1.3 (Sayı Doğrusu). $\mathbb{R}$ ile birebir ve örten olarak eşlenmiş bir doğruya **sayı doğrusu** denir.

Yani sayı doğrusu, üzerine başlangıç, yön ve birim yerleştirilmiş bir doğrudur; her noktası bir reel sayının "adresidir". Bundan sonra bir sayı doğrusu üzerindeki noktayı çoğu zaman karşılık geldiği sayıyla birlikte anacağız.

1.2 Dik Koordinat Sistemi

Düzlemde bir noktanın yerini tek bir sayıyla belirleyemeyiz; iki sayıya ihtiyaç vardır. Bunun için düzlemde birbirini dik kesen iki sayı doğrusu alırız: birinin pozitif yönünü sağa, öbürününkünü yukarı yönlendiririz.

Tanım 1.4 (X-Ekseni ve Y-Ekseni). Düzlemde birbirini dik kesen iki sayı doğrusundan sağa yönlendirilmiş yatay olanına $\boldsymbol{X}$**-ekseni**, yukarı yönlendirilmiş düşey olanına $\boldsymbol{Y}$**-ekseni** denir. İki eksenin kesim noktası O ile gösterilir ve iki eksen üzerinde de 0 sayısına karşılık gelir.

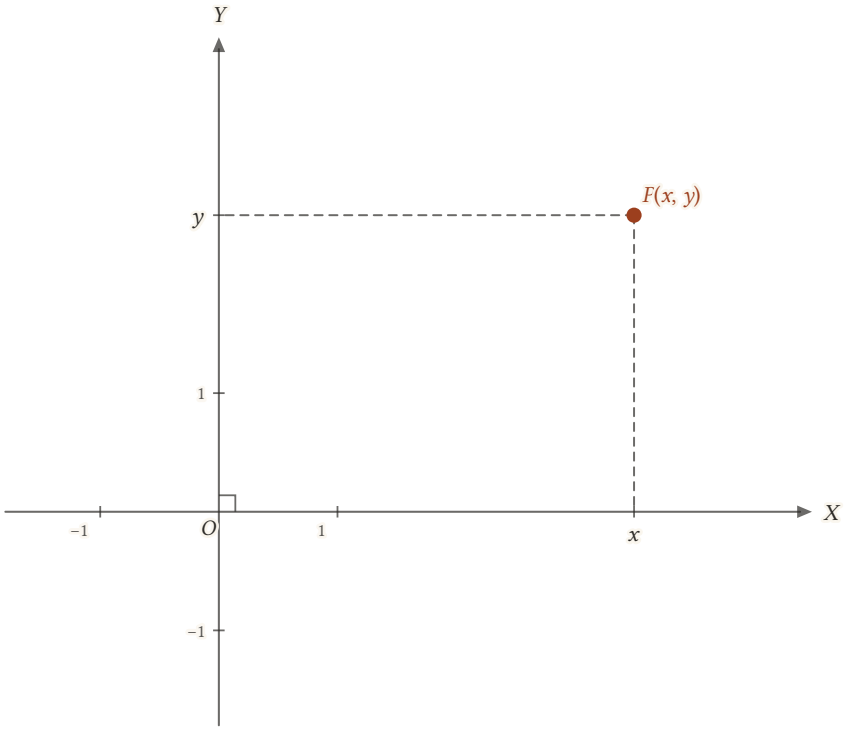
Yani X-ekseni ve Y-ekseni, ortak başlangıç noktası O olan iki sayı doğrusudur. Bu iki eksenle donatılmış düzleme bundan sonra kısaca *dik koordinat düzlemi* diyeceğiz.
Şimdi düzlemde bir P noktası alalım. P'den geçen ve eksenlere dik olan iki doğru çizelim. X-eksenine inilen dikme bu ekseni tek bir noktada keser; bu noktanın X-ekseni üzerindeki sayısı x olsun. Aynı biçimde Y-eksenine inilen dikme de bu ekseni tek bir noktada keser; onun Y-ekseni üzerindeki sayısı y olsun. Böylece P noktası bir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sıralı ikilisi belirtir.
Tersine, bir $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ikilisi verilsin. X-ekseni üzerinde x'e karşılık gelen noktadan bu eksene bir dik, Y-ekseni üzerinde y'ye karşılık gelen noktadan da bu eksene bir dik çizelim. Bu iki dik doğru tek bir noktada kesişir. Böylece düzlemin her noktasına bir sıralı ikili, her sıralı ikiliye de düzlemin bir noktası karşılık gelir: düzlemin noktaları ile $\mathbb{R}^2$ birebir ve örten olarak eşlenmiş olur.

Tanım 1.5 (Dik Koordinatlar). Düzlemdeki bir P noktasının yukarıdaki yolla belirttiği $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sıralı ikilisine P'nin **dik koordinatları** denir ve bu durum

$$P(x, y) \quad \text{ya da} \quad P = (x, y)$$

biçiminde yazılır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.2: Dik koordinat düzlemi. Pden eksenlere inilen dikmeler X-eksenini x'te, Y-eksenini y'de keser; Pnin dik koordinatları (x, y)'dir.

Yani $P(x, y)$ yazdığımızda, x sayısı P'nin X-eksenine dik izdüşümünün, y sayısı ise Y-eksenine dik izdüşümünün adresidir. Sıra önemlidir: $(2, 5)$ ile $(5, 2)$ farklı noktalardır. Başlangıç noktası $O = (0, 0)$'dır; X-ekseninin noktaları $(x, 0)$, Y-ekseninin noktaları $(0, y)$ biçimindedir.

Tanım 1.6 (Apsis ve Ordinat). $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$ noktası için x sayısına P'nin **apsisi**, y sayısına P'nin **ordinatı** denir.

Yani apsis "birinci koordinat", ordinat "ikinci koordinat"tır. Örneğin $P(-3, 6)$ noktasının apsisi -3, ordinatı 6'dır.

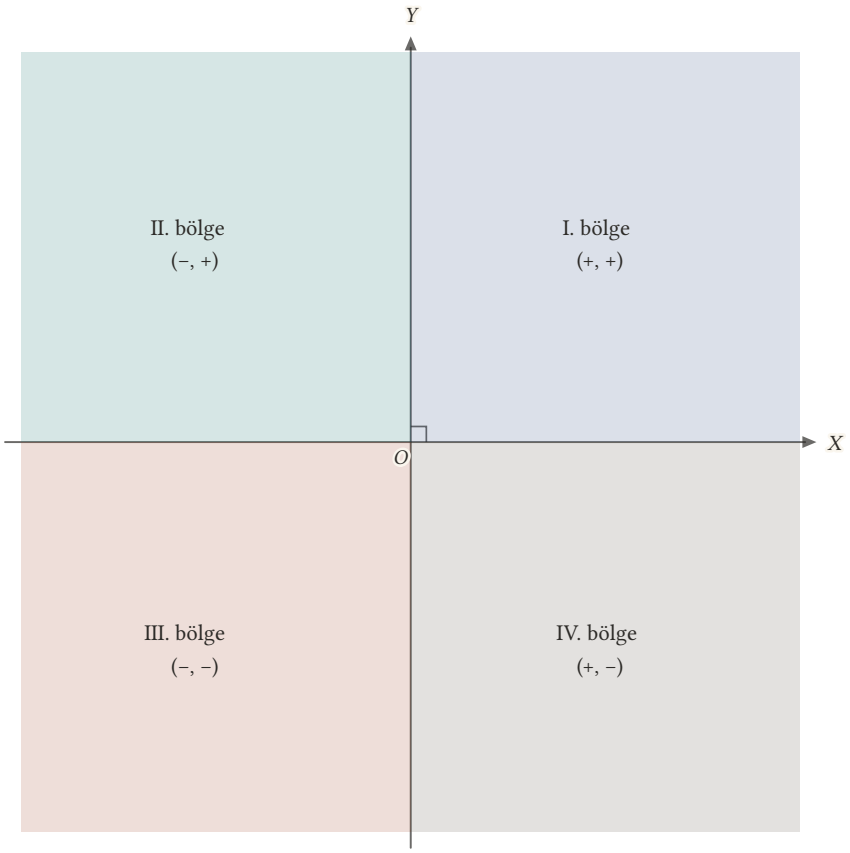
Tanım 1.7 (Apsisler Ekseni ve Ordinatlar Ekseni). X-eksenine **apsisler ekseni**, Y-eksenine **ordinatlar ekseni** denir.

Yani apsisler X-ekseni üzerinde, ordinatlar Y-ekseni üzerinde okunur.
İki eksen düzlemi O noktasında kesişen dört parçaya ayırır. Y-ekseninin sağındaki noktaların apsisi pozitif, solundakilerin negatiftir; X-ekseninin üstündeki noktaların ordinatı pozitif, altındakilerin negatiftir. Bu dört parçaya ad verelim.

Tanım 1.8 (Bölgeler). Eksenler dışında kalan noktalar, koordinatlarının işaretine göre dört **bölgeye** ayrılır:

Bölge	Apsis	Ordinat
I. bölge	$x > 0$	$y > 0$
II. bölge	$x < 0$	$y > 0$
III. bölge	$x < 0$	$y < 0$
IV. bölge	$x > 0$	$y < 0$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.3: Eksenler düzlemi dört bölgeye ayırır; parantez içindeki işaretler sırasıyla apsisin ve ordinatın işaretidir. Bölgeler saat yönünün tersine I'den IV'e sıralanır.

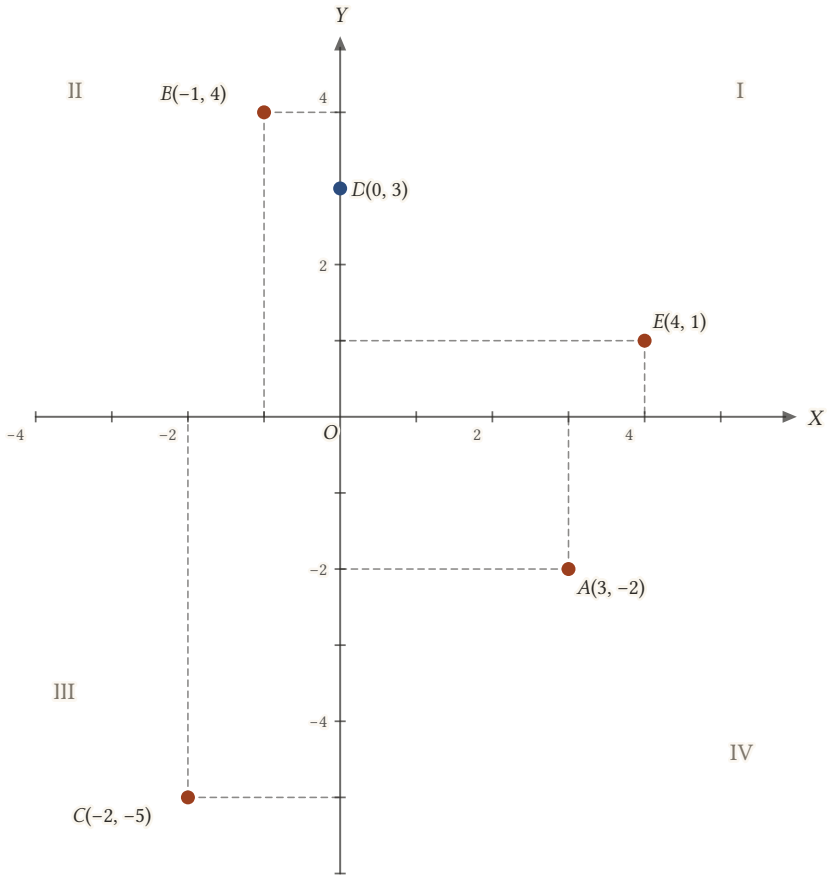
Yani bir noktanın hangi bölgede olduğunu koordinatlarının işaretleri söyler; bölgeler I'den IV'e saat yönünün tersine sıralanır. Eksenlerin üzerindeki noktalar (bir koordinatı 0 olanlar) hiçbir bölgeye ait değildir.

Örnek 1.1 (Noktaların Bölgelerini Bulma). $A(3,-2)$, $B(-1,4)$, $C(-2,-5)$, $D(0,3)$ ve $E(4,1)$ noktalarının hangi bölgede olduğunu belirleyin.

Çözüm.
Her noktada apsisin ve ordinatın işaretine bakıp bölgeler tablosunu (bkz. Tanım 1.8) kullanırız.

- $A(3,-2)$: apsis pozitif, ordinat negatif; A IV. bölgededir.
- $B(-1,4)$: apsis negatif, ordinat pozitif; B II. bölgededir.
- $C(-2,-5)$: iki koordinat da negatif; C III. bölgededir.
- $D(0,3)$: apsis 0 olduğundan D, Y-ekseni üzerindedir; hiçbir bölgeye ait değildir.
- $E(4,1)$: iki koordinat da pozitif; E I. bölgededir.

 CC BY-NC-SA 4.0



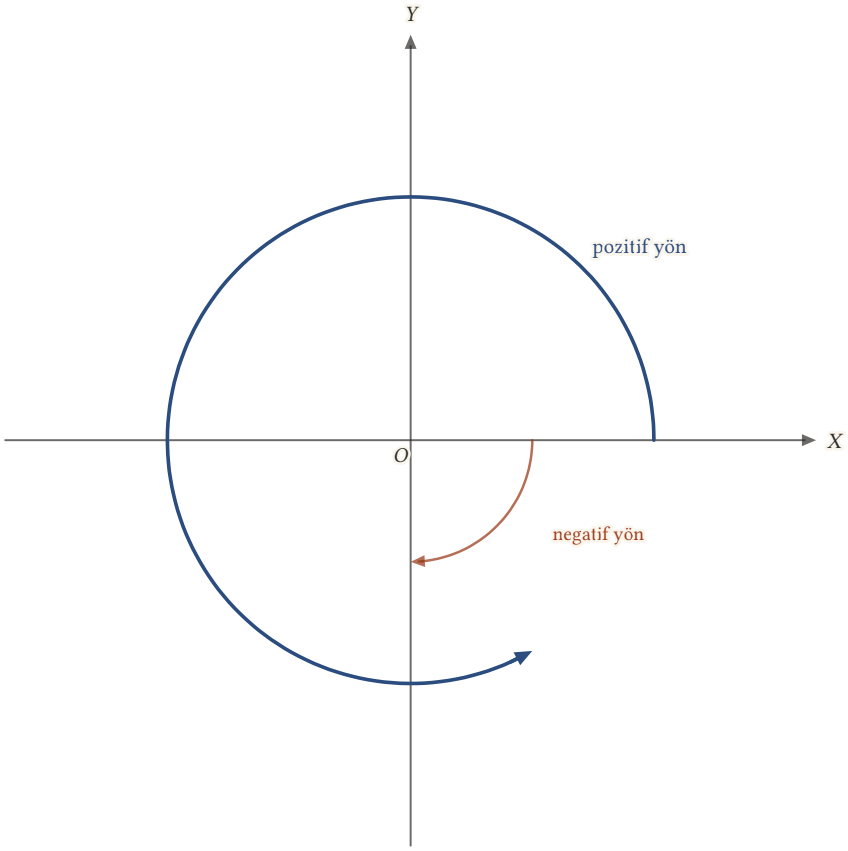
Şekil 1.4: A IV., B II., C III., E I. bölgededir; $D(0, 3)$ ise Y-ekseni üzerinde olduğundan hiçbir bölgeye ait değildir.

■

Düzlemde dönme ve açı ölçerken hangi yönün pozitif sayılacağını da baştan kararlaştıralım.

Tanım 1.9 (Pozitif Yön). Düzlemde **saat yönünün tersi pozitif yön**, saat yönü negatif yön kabul edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.5: Saat yönünün tersi pozitif yön, saat yönü negatif yöndür.

Yani pozitif X-ekseninden pozitif Y-eksenine giden çeyrek dönüş pozitif yöndedir; bölgelerin I, II, III, IV diye sıralanışı da bu yönü izler.

1.3 İki Nokta Arasındaki Uzaklık

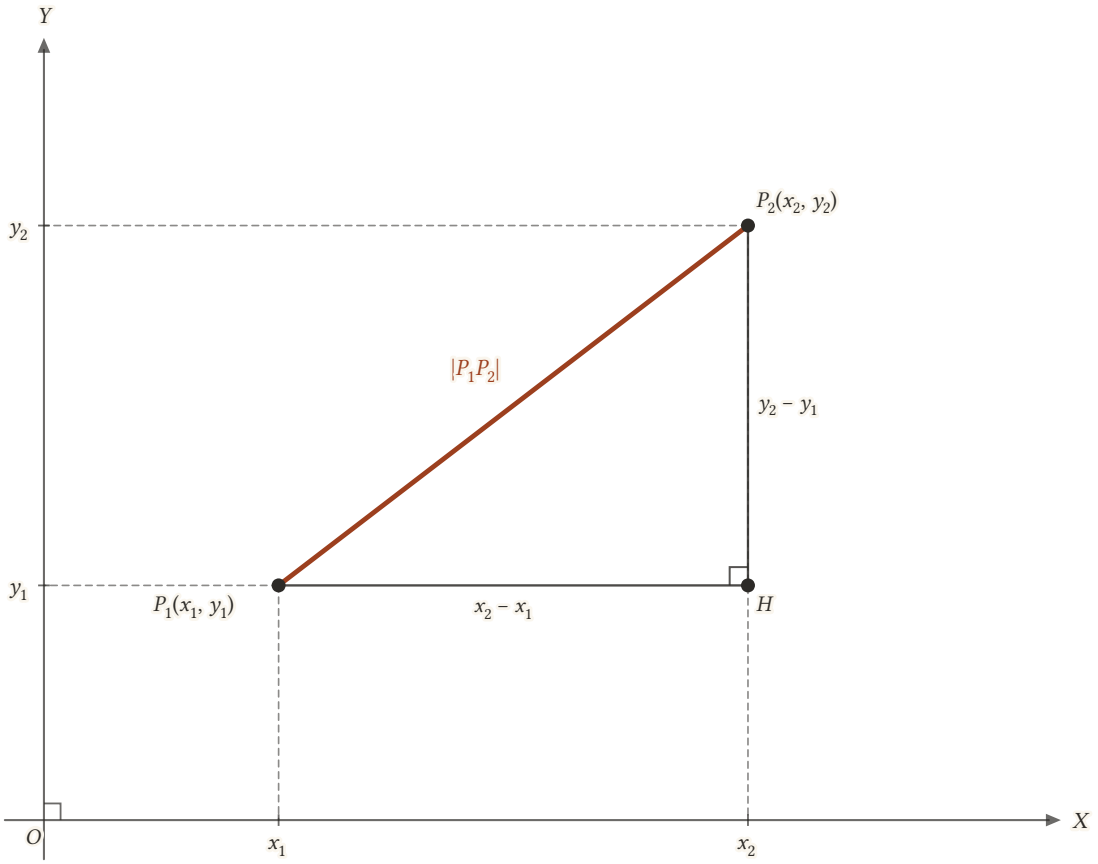
Koordinatlar elimizde olunca ilk soru şudur: iki noktanın koordinatları biliniyorsa aralarındaki uzaklık nedir? $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktalarını alalım. P_1'den geçen yatay doğru ile P_2'den geçen düşey doğru $H(x_2, y_1)$ noktasında dik açıyla kesişir. P_1HP_2 bir dik üçgendir: yatay dik kenarı $|\ P_1H\ | = |\ x_2 - x_1\ |$, düşey dik kenarı $|\ HP_2\ | = |\ y_2 - y_1\ |$ uzunluğundadır. Pisagor bağıntısı hipotenüsü verir.

Tanım 1.10 (İki Nokta Arasındaki Uzaklık). Düzlemde $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktaları verilsin. P_1 ile P_2 arasındaki **uzaklık** $|\ P_1P_2\ |$ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} |\ P_1P_2\ | &= \sqrt{|\ P_1H\ |^2 + |\ HP_2\ |^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

olarak tanımlanır; burada $H = (x_2, y_1)$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.6: P_1HP_2 dik üçgeninin dik kenarları $|x_2 - x_1|$ ve $|y_2 - y_1|$'dir; hipotenüs $|P_1P_2|$ Pisagor bağıntısıyla bulunur.

Yani iki nokta arasındaki uzaklık, apsisler farkının karesi ile ordinatlar farkının karesinin toplamının kareköküdür. Formülün arkasında yalnızca Pisagor bağıntısı vardır: P_1HP_2 dik üçgeninde hipotenüs P_1P_2'dir. Birkaç gözlem:

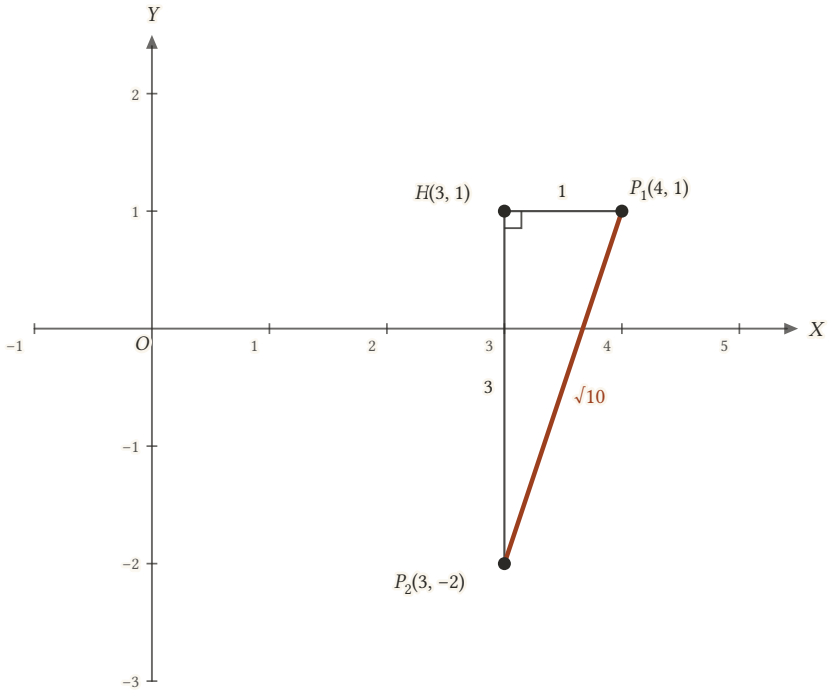
- Kenar uzunluklarındaki mutlak değerler kare alınınca kaybolur: $\mid x_2 - x_1 \mid^2 = (x_2 - x_1)^2$.
- Noktaların sırası önemli değildir: $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ olduğundan $\mid P_1P_2 \mid = \mid P_2P_1 \mid$.
- İki nokta aynı yatay doğru üzerindeyse ($y_1 = y_2$) formül $\mid P_1P_2 \mid = \mid x_2 - x_1 \mid$'e, aynı düşey doğru üzerindeyse ($x_1 = x_2$) $\mid P_1P_2 \mid = \mid y_2 - y_1 \mid$'e iner. Bu durumda P_1HP_2 üçgeni bozulur ama formül yine doğrudur.
- $P(x, y)$ noktasının başlangıç noktasına uzaklığı $\mid OP \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$'dir.

Örnek 1.2 (Uzaklık Hesabı: Genel Durum). $P_1(4, 1)$ ve $P_2(3, -2)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulun.

Çözüm.
Uzaklık formülünde (bkz. Tanım 1.10) $x_1 = 4, y_1 = 1, x_2 = 3, y_2 = -2$ yazarız:

$$\mid P_1P_2 \mid = \sqrt{(3-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.7: Dik kenarları 1 ve 3 olan dik üçgenin hipotenüsü $|P_1P_2| = \sqrt{10}$'dur.

■

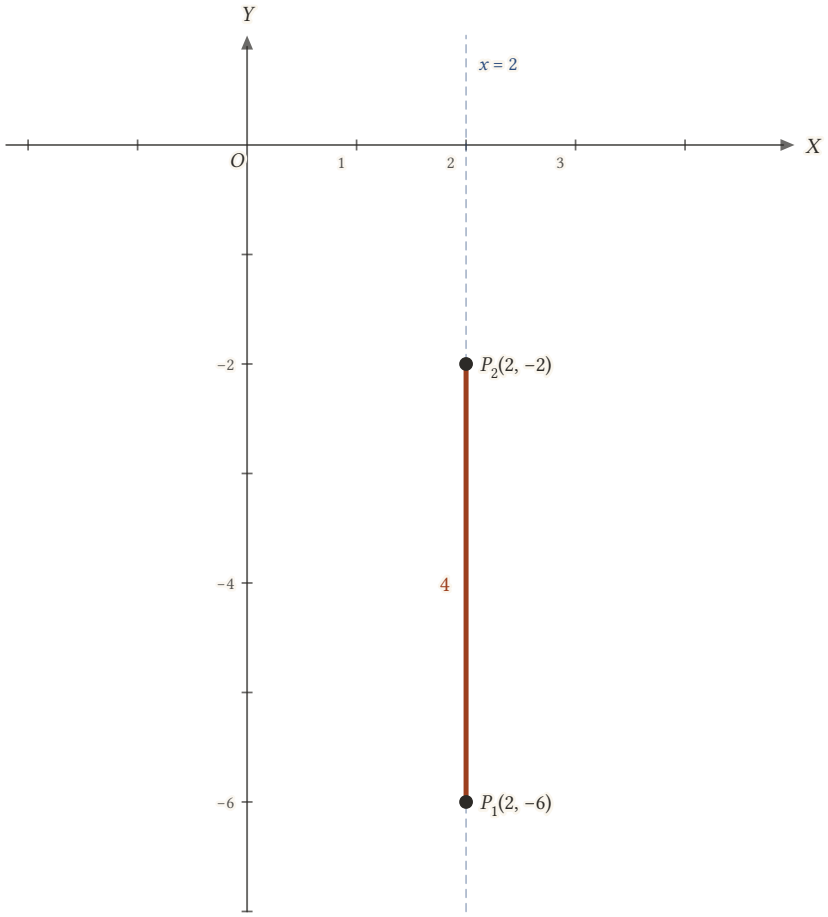
Örnek 1.3 (Uzaklık Hesabı: Aynı Düşey Doğru). $P_1(2,-6)$ ve $P_2(2,-2)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulun.

Çözüm.
İki noktanın apsisi aynıdır; noktalar $x = 2$ düşey doğrusu üzerindedir. Formül:

$$| P_1P_2 | = \sqrt{(2-2)^2 + \big(-2-(-6)\big)^2} = \sqrt{0+16} = 4.$$

Bu, ordinatlar farkının mutlak değeri $|-2-(-6)| = 4$ ile aynıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.8: Apsisleri eşit iki nokta $x = 2$ düşey doğrusu üzerindedir; aralarındaki uzaklık ordinatlar farkının mutlak değeri olan 4'tür.

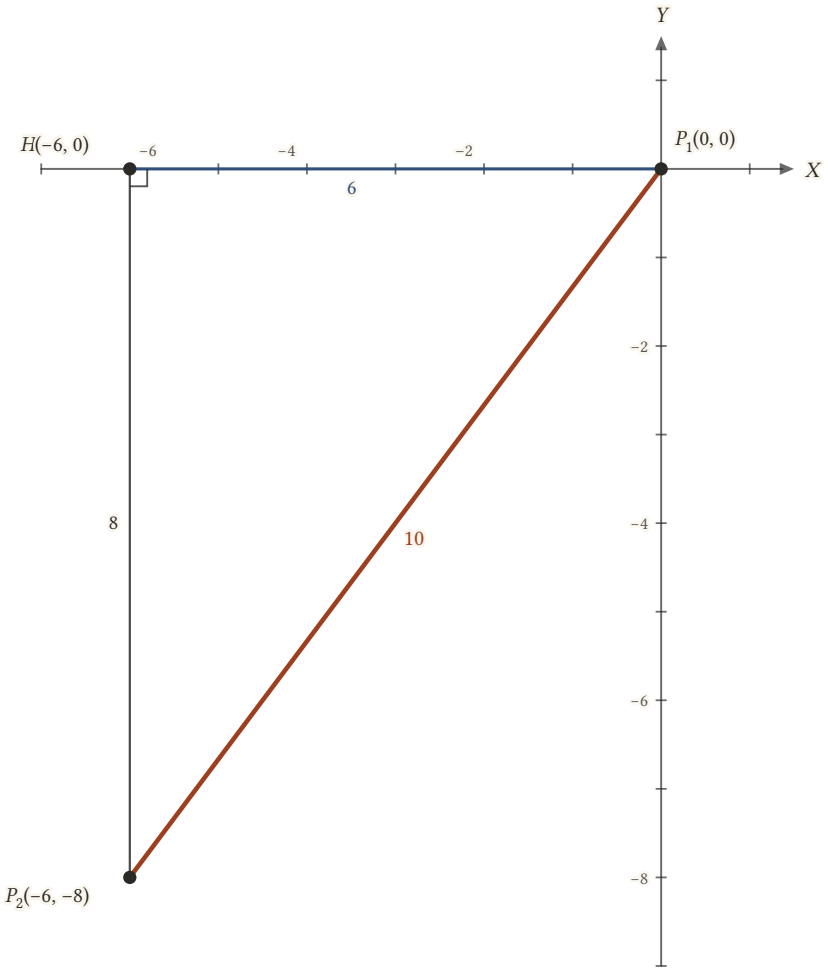
■

Örnek 1.4 (Uzaklık Hesabı: Başlangıç Noktasından). $P_1(0,0)$ ve $P_2(-6,-8)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulun.

Çözüm.
P_1 başlangıç noktası olduğundan formül $\sqrt{x_2^2 + y_2^2}$'ye iner:

$$| P_1P_2 | = \sqrt{(-6-0)^2 + (-8-0)^2} = \sqrt{36+64} = 10.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.9: Başlangıç noktasına uzaklık: dik kenarları 6 ve 8 olan dik üçgenin hipotenüsü 10'dur.

■

Uzaklık formülü bilinmeyen bir koordinatı bulmak için de kullanılır: uzaklık verilirse formül bir denkleme dönüşür.

Örnek 1.5 (Verilen Uzaklıktaki Noktalar). Apsisi 3 olan ve $P(-3,6)$ noktasına 10 birim uzaklıkta bulunan noktaları bulun.

Çözüm.
Aranan nokta $Q(3,y)$ olsun. $\mid PQ \mid = 10$ koşulunu iki tarafın karesini alarak yazalım:

$$\big(\,3-(-3)\big)^2+(y-6)^2=100 \Leftrightarrow 36+(y-6)^2=100 \Leftrightarrow (y-6)^2=64.$$

Karesi 64 olan sayılar 8 ve -8'dir; dolayısıyla $y-6=8$ ya da $y-6=-8$, yani $y=14$ ya da $y=-2$. Aranan noktalar

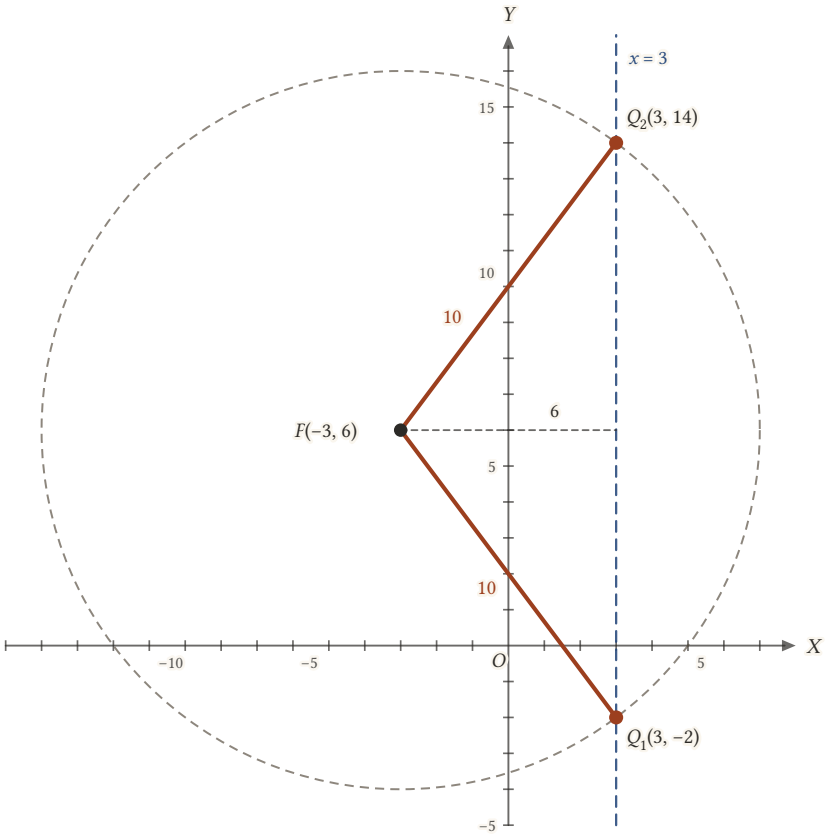
$$Q_1(3,-2) \quad \text{ve} \quad Q_2(3,14)$$

noktalarıdır. Denetim:

$$\mid PQ_1 \mid = \sqrt{6^2+(-8)^2}=10, \qquad \mid PQ_2 \mid = \sqrt{6^2+8^2}=10.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Geometrik olarak: apsisi 3 olan noktalar $x = 3$ düşey doğrusunu oluşturur; P'ye 10 birim uzaklıktaki noktalar ise P merkezli, 10 yarıçaplı çemberi. Doğru bu çemberi iki noktada keser.



Şekil 1.10: $x = 3$ doğrusu, P merkezli 10 yarıçaplı çemberi $Q_1(3, -2)$ ve $Q_2(3, 14)$ noktalarında keser.

■

1.4 Uzaklıkla Şekil Tanıma

Uzaklık formülü, köşeleri verilmiş bir çokgenin kenar uzunluklarını hesaplamamızı sağlar. Kenar uzunlukları da çoğu zaman şeklin ne olduğunu söyler: eşit kenarlar ikizkenarlığı, Pisagor bağıntısı dik açıyı, uzunlukların toplanabilmesi de doğrusallığı ele verir.

Dört adımda uzaklıkla şekil tanıma

1. Gereken bütün kenar uzunluklarını uzaklık formülüyle hesapla; kareleri de not et, çünkü çoğu karşılaştırma karelerle yapılır.
2. Eşit uzunluklara bak: iki kenar eşitse üçgen ikizkenar, dört kenar eşitse dörtgen eşkenar dörtgendir.
3. Dik açıyı Pisagor bağıntısının tersiyle ara: bir üçgende en uzun kenarın karesi öbür iki kenarın karelerinin toplamına eşitse, en uzun kenarın karşısındaki açı diktir.
4. Doğrusallığı toplamla ara: $|AB| + |BC| = |AC|$ ise B noktası AC doğru parçası üzerindedir ve üç nokta aynı doğru üzerindedir. Aksi hâlde üçgen eşitsizliği gereği $|AB| + |BC| > |AC|$ olur ve A, B, C bir üçgenin köşeleridir.

İlk iki örnekte yalnız kenar uzunluklarını hesaplıyoruz. Bir üçgenin **çevresi**, üç kenarının uzunlukları toplamıdır.

Örnek 1.6 (Üçgenin Çevresi: Birinci Üçgen). Köşeleri $A(0, 4)$, $B(-4, 1)$ ve $C(3, -3)$ olan üçgenin çevresini bulun.

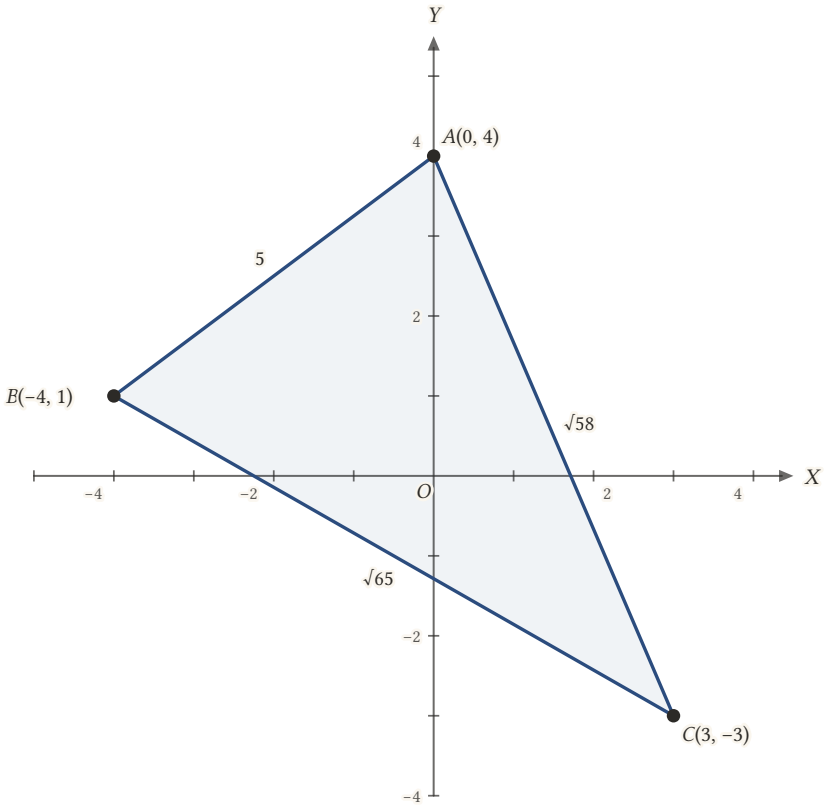
 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Kenar uzunlukları:

$$\begin{aligned}
|\,AB\,| &= \sqrt{(-4-0)^2+(1-4)^2} = \sqrt{16+9} = 5,\\
|\,BC\,| &= \sqrt{\big(\,3-(-4)\big)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65},\\
|\,CA\,| &= \sqrt{(0-3)^2+\big(\,4-(-3)\big)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}.
\end{aligned}$$

Çevre:

$$|\,AB\,|+|\,BC\,|+|\,CA\,| = 5+\sqrt{65}+\sqrt{58}.$$



Şekil 1.11: Kenarları 5, √65 ve √58 olan üçgenin çevresi 5 + √65 + √58'dir.

■

Örnek 1.7 (Üçgenin Çevresi: İkinci Üçgen). Köşeleri $A(-2,5)$, $B(4,3)$ ve $C(7,-2)$ olan üçgenin çevresini bulun.

Çözüm.
Kenar uzunlukları:

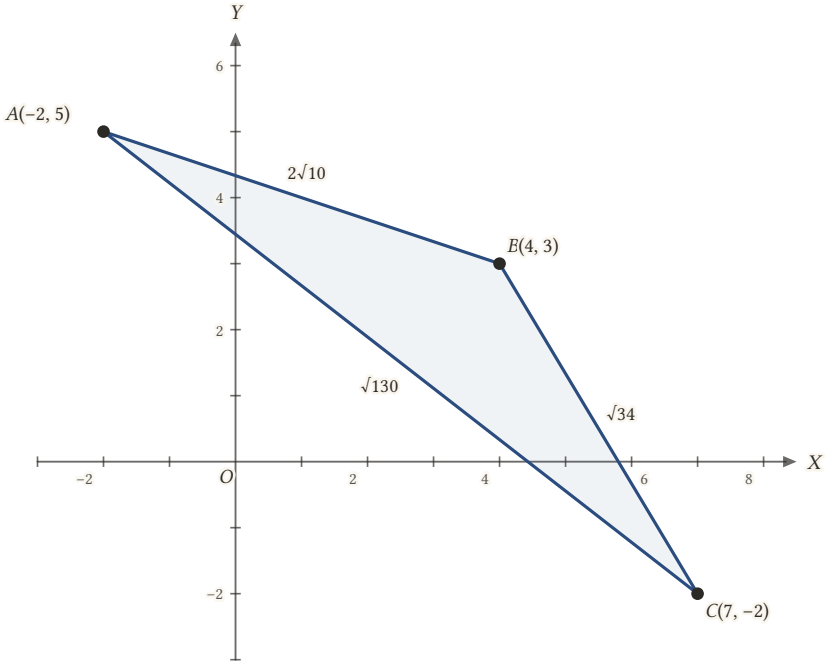
$$\begin{aligned}
|\,AB\,| &= \sqrt{\big(\,4-(-2)\big)^2+(3-5)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},\\
|\,BC\,| &= \sqrt{(7-4)^2+(-2-3)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34},\\
|\,CA\,| &= \sqrt{(-2-7)^2+\big(\,5-(-2)\big)^2} = \sqrt{81+49} = \sqrt{130}.
\end{aligned}$$

Çevre:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| AB | + | BC | + | CA | = 2\sqrt{10} + \sqrt{34} + \sqrt{130}.$$

Kareköklerin altındaki sayılarda tam kare çarpan kalmadığından bu toplam daha fazla sadeleşmez.



Şekil 1.12: Kenarları $2\sqrt{10}$, $\sqrt{34}$ ve $\sqrt{130}$ olan üçgen.

■

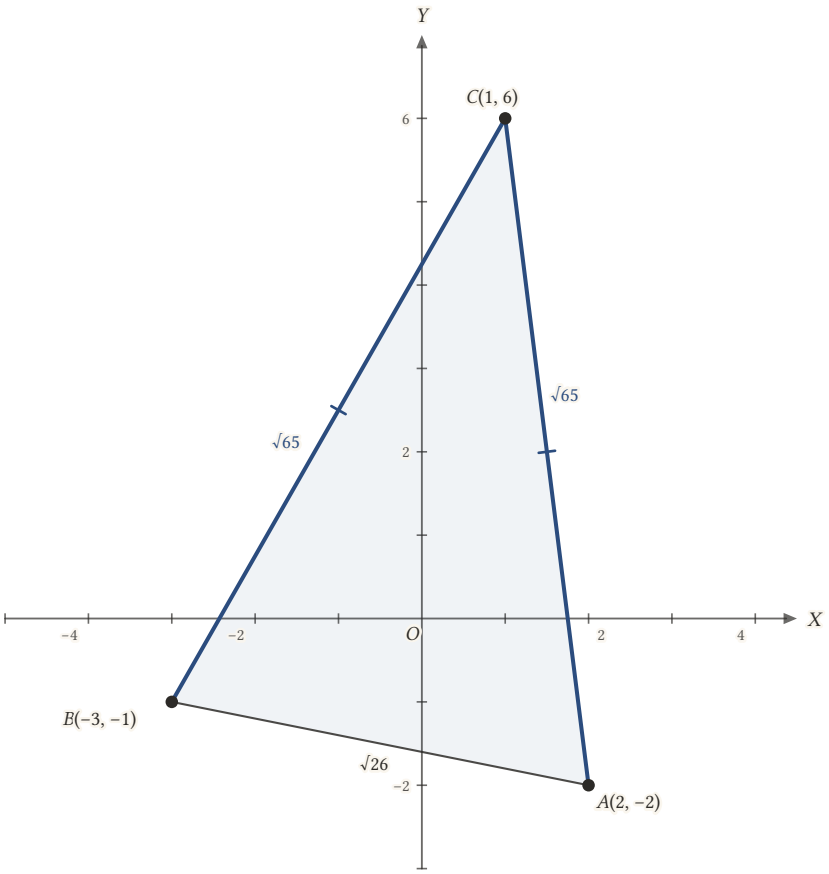
Örnek 1.8 (İkizkenar Üçgen: Birinci Üçgen). Köşeleri $A(2,-2)$, $B(-3,-1)$ ve $C(1,6)$ olan üçgenin ikizkenar olduğunu gösterin.

Çözüm.
Kenar uzunlukları:

$$| AB | = \sqrt{(-3-2)^2 + \big(-1-(-2)\big)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26},$$
$$| BC | = \sqrt{\big(1-(-3)\big)^2 + \big(6-(-1)\big)^2} = \sqrt{16+49} = \sqrt{65},$$
$$| CA | = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}.$$

$| BC | = | CA | = \sqrt{65}$ olduğundan ABC üçgeni, tepe noktası C olan bir ikizkenar üçgendir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.13: $|BC| = |CA| = \sqrt{65}$: tepe noktası C olan ikizkenar üçgen.

■

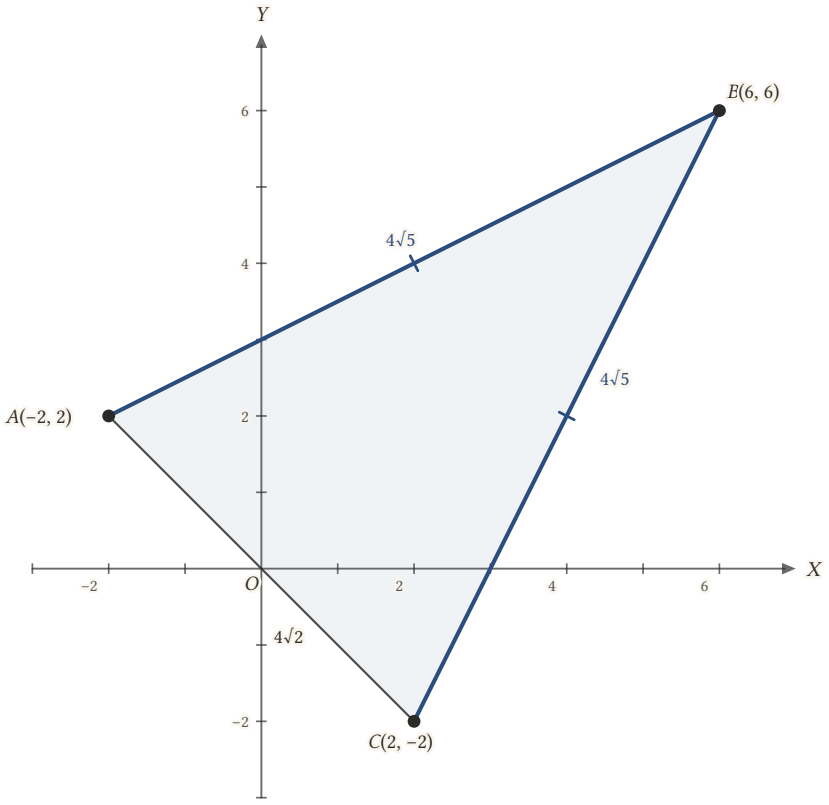
Örnek 1.9 (İkizkenar Üçgen: İkinci Üçgen). Köşeleri $A(-2,2)$, $B(6,6)$ ve $C(2,-2)$ olan üçgenin ikizkenar olduğunu gösterin.

Çözüm.
Kenar uzunlukları:

$$|\,AB\,| = \sqrt{\big(\,6-(-2)\big)^2+(6-2)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$$
$$|\,BC\,| = \sqrt{(2-6)^2+(-2-6)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$$
$$|\,CA\,| = \sqrt{(-2-2)^2+\big(\,2-(-2)\big)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

$|\,AB\,| = |\,BC\,| = 4\sqrt{5}$ olduğundan ABC üçgeni, tepe noktası B olan bir ikizkenar üçgendir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.14: $|AB| = |BC| = 4\sqrt{5}$: tepe noktası B olan ikizkenar üçgen.

■

Dik üçgenlerde alan da kolayca bulunur: dik kenarlardan biri taban, öbürü yükseklik olduğundan **dik üçgenin alanı dik kenarlarının çarpımının yarısıdır**. ABC üçgeninin alanını $\mathcal{A}(ABC)$ ile göstereceğiz.

Örnek 1.10 (Dik Üçgen Olduğunu Gösterme: Birinci Üçgen). Köşeleri $A(-4,-1)$, $B(3,2)$ ve $C(0,9)$ olan üçgenin dik üçgen olduğunu gösterin.

Çözüm.
Kenar uzunlukları:

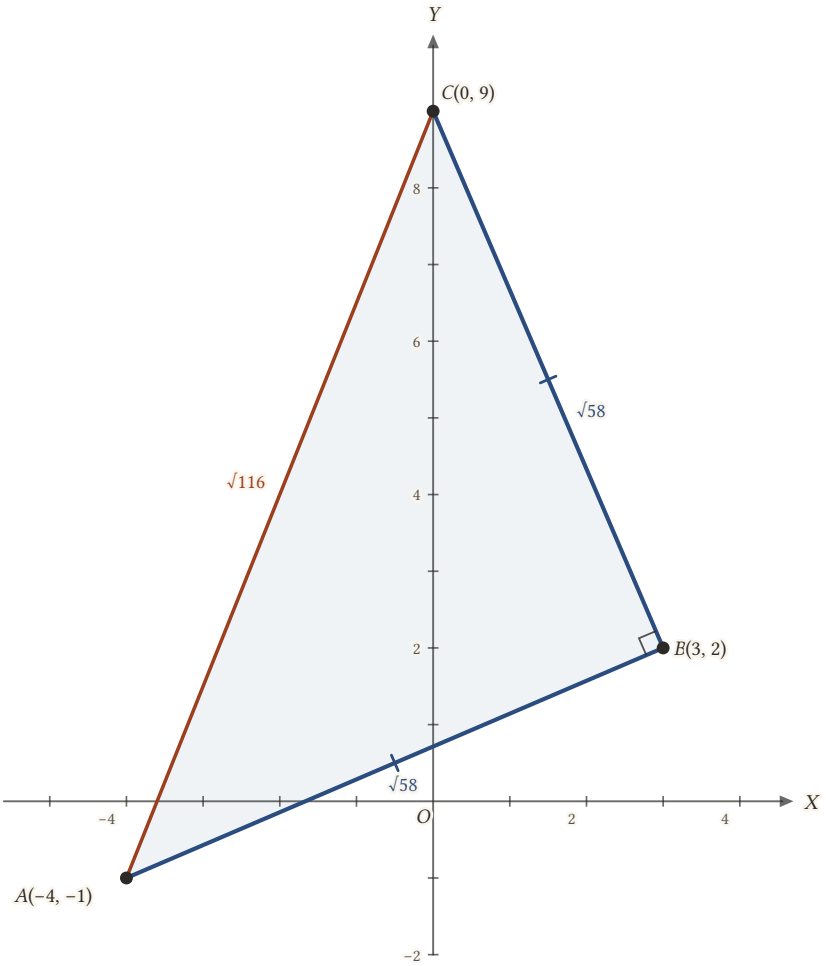
$$
\begin{aligned}
|\ AB\ | &= \sqrt{\big(\ 3-(-4)\big)^2+\big(\ 2-(-1)\big)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58},\\
|\ BC\ | &= \sqrt{(0-3)^2+(9-2)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58},\\
|\ CA\ | &= \sqrt{(-4-0)^2+(-1-9)^2} = \sqrt{16+100} = \sqrt{116}.
\end{aligned}
$$

En uzun kenar CA'dır ve

$$|\ AB\ |^2 + |\ BC\ |^2 = 58+58 = 116 = |\ CA\ |^2\ .$$

Pisagor bağıntısının tersi gereği CA'nın karşısındaki B açısı diktir; ABC bir dik üçgendir. Üstelik $|\ AB\ | = |\ BC\ |$ olduğundan bu üçgen bir ikizkenar dik üçgendir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.15: 58 + 58 = 116 olduğundan B açısı diktir; eşit dik kenarlar üçgeni ikizkenar dik üçgen yapar.

■

Örnek 1.11 (Dik Üçgenin Alanı: Birinci Üçgen). Köşeleri $A(-4,-1), B(3,2)$ ve $C(0,9)$ olan üçgenin alanını bulun.

Çözüm.
Bir önceki örnekte (bkz. Örnek 1.10) bu üçgenin B köşesinde dik olduğunu ve dik kenarlarının $|\,AB\,| = |\,BC\,| = \sqrt{58}$ olduğunu gördük. Dik kenarların çarpımının yarısı:

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}|\,AB\,||\,BC\,| = \frac{1}{2}\sqrt{58}\,\sqrt{58} = \frac{58}{2} = 29.$$

■

Örnek 1.12 (Dik Üçgen Olduğunu Gösterme: İkinci Üçgen). Köşeleri $A(-2,3), B(0,4)$ ve $C(3,-2)$ olan üçgenin dik üçgen olduğunu gösterin.

Çözüm.
Kenar uzunlukları:

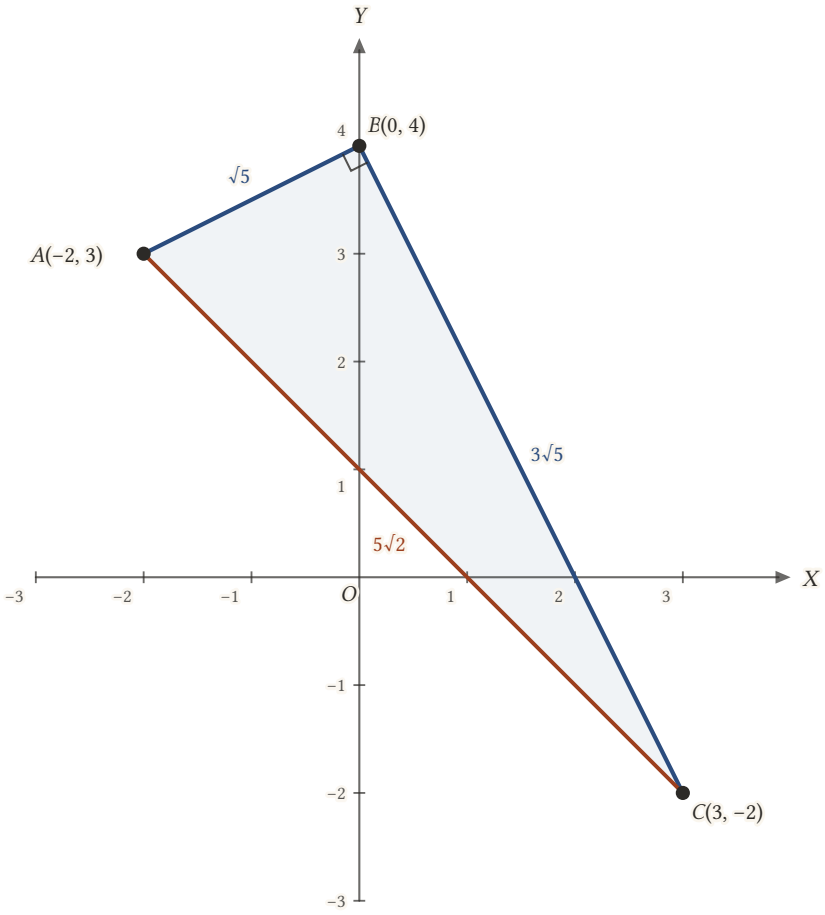
 CC BY-NC-SA 4.0

$$| AB | = \sqrt{(0-(-2))^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},$$
$$| BC | = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$
$$| AC | = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

En uzun kenar AC'dir ve

$$| AB |^2 + | BC |^2 = 5 + 45 = 50 = | AC |^2 .$$

Pisagor bağıntısının tersi gereği B açısı diktir; ABC bir dik üçgendir.



Şekil 1.16: 5 + 45 = 50 olduğundan B açısı diktir.

■

Örnek 1.13 (Dik Üçgenin Alanı: İkinci Üçgen). Köşeleri $A(-2,3)$, $B(0,4)$ ve $C(3,-2)$ olan üçgenin alanını bulun.

Çözüm.
Bir önceki örnekte (bkz. Örnek 1.12) dik açının B'de olduğunu, dik kenarların da $| AB | = \sqrt{5}$ ve $| BC | = 3\sqrt{5}$ olduğunu bulduk. Buna göre

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} | AB | | BC | = \frac{1}{2}\sqrt{5}\left(3\sqrt{5} \right) = \frac{3 \cdot 5}{2} = \frac{15}{2}.$$

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 1.14 (Dört Noktanın Kare Oluşturması). $A(-1,-2)$, $B(0,1)$, $C(-3,2)$ ve $D(-4,-1)$ noktalarının bir karenin köşeleri olduğunu gösterin.

Çözüm.
Önce dört kenarı hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
|\ AB\ | &= \sqrt{\big(\ 0-(-1)\big)^2+\big(\ 1-(-2)\big)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10},\\
|\ BC\ | &= \sqrt{(-3-0)^2+(2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10},\\
|\ CD\ | &= \sqrt{\big(-4-(-3)\big)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10},\\
|\ DA\ | &= \sqrt{\big(-1-(-4)\big)^2+\big(-2-(-1)\big)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.
\end{aligned}$$

Dört kenar eşit olduğundan $ABCD$ bir eşkenar dörtgendir. Kare olduğunu görmek için bir dik açı yeter. AC köşegenini hesaplayalım:

$$|\ CA\ | = \sqrt{\big(-1-(-3)\big)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}.$$

Buradan

$$\begin{aligned}
|\ AB\ |^2 + |\ BC\ |^2 &= 10+10 = 20 = |\ CA\ |^2 \quad \text{ve}\\
|\ CD\ |^2 + |\ DA\ |^2 &= 10+10 = 20 = |\ AC\ |^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Pisagor bağıntısının tersi gereği ABC ve CDA üçgenleri sırasıyla B'de ve D'de dik olan ikizkenar dik üçgenlerdir. Dört kenarı eşit ve bir açısı dik olan dörtgen karedir; dolayısıyla A, B, C, D bir karenin köşeleridir.
Aynı sonuca öbür köşegenle de ulaşabiliriz:

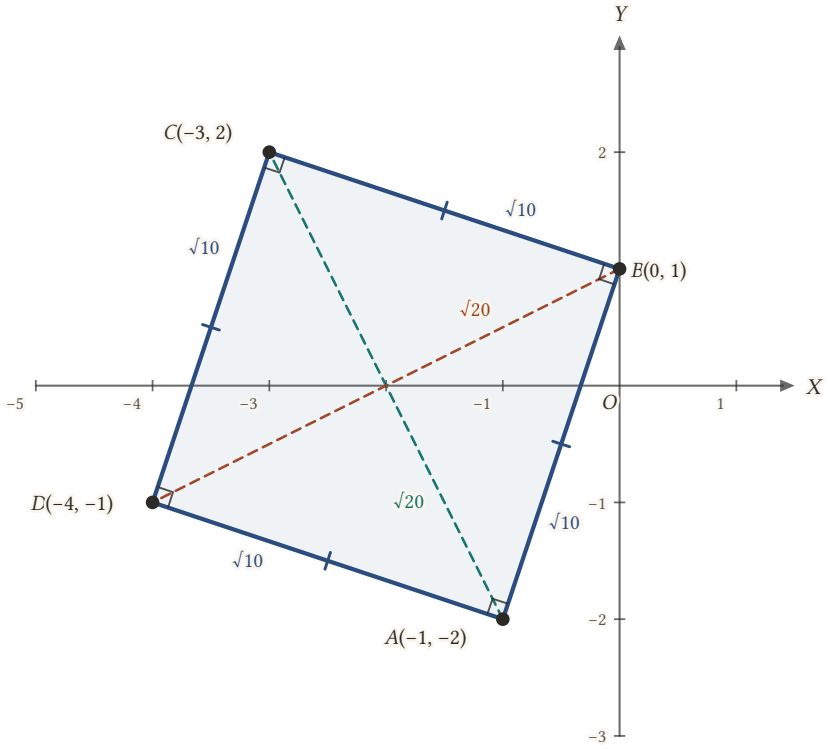
$$|\ DB\ | = \sqrt{\big(\ 0-(-4)\big)^2+\big(\ 1-(-1)\big)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20},$$

dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|\ BC\ |^2 + |\ CD\ |^2 &= 10+10 = 20 = |\ DB\ |^2 \quad \text{ve}\\
|\ DA\ |^2 + |\ AB\ |^2 &= 10+10 = 20 = |\ BD\ |^2\ .
\end{aligned}$$

Buna göre BCD ve DAB üçgenleri sırasıyla C'de ve A'da dik olan ikizkenar dik üçgenlerdir ve $ABCD$ yine bir karedir. İki köşegenin eşit çıkması ($|\ AC\ | = |\ BD\ | = \sqrt{20}$) da karenin bilinen bir özelliğidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.17: Dört kenarı $\sqrt{10}$, iki köşegeni $\sqrt{20}$ olan $ABCD$ bir karedir.

■

Örnek 1.15 (Aynı Doğru Üzerindeki Üç Nokta). $A(-2,8)$, $B(0,4)$ ve $C(3,-2)$ noktalarının aynı doğru üzerinde bulunduğunu gösterin.

Çözüm.
Üç uzaklığı hesaplayalım:

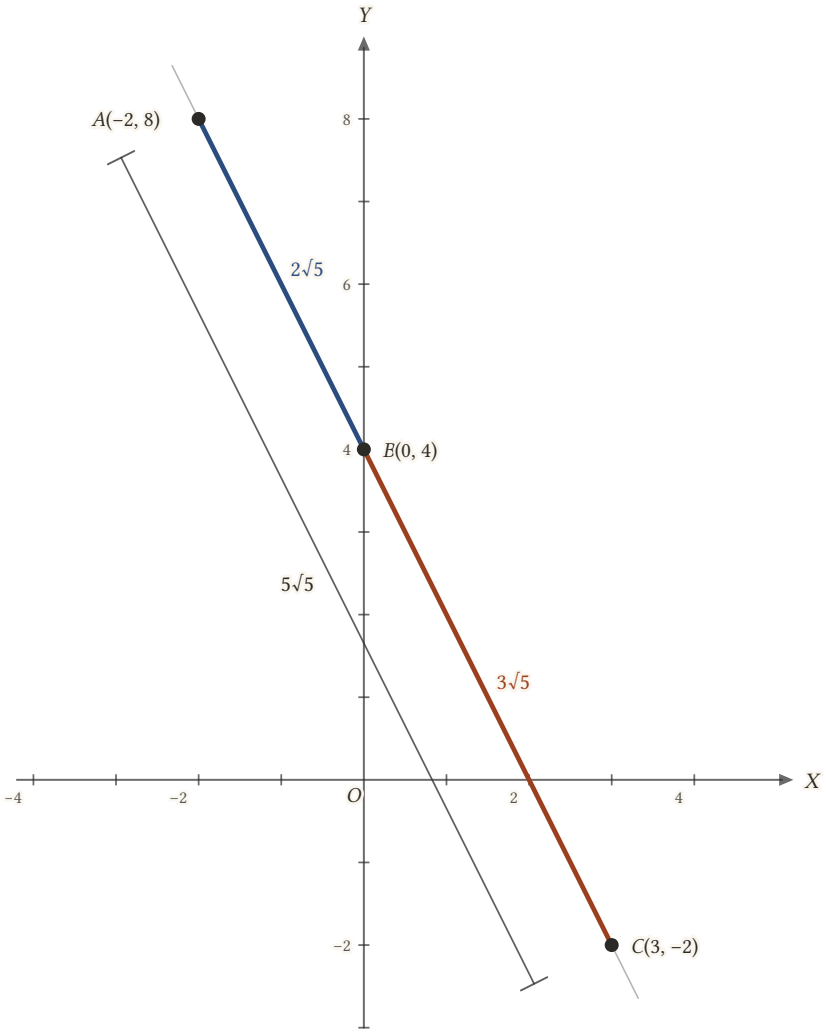
$$|\,AB\,| = \sqrt{(\,0-(-2))^2+(4-8)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5},$$
$$|\,BC\,| = \sqrt{(3-0)^2+(-2-4)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5},$$
$$|\,AC\,| = \sqrt{(\,3-(-2))^2+(-2-8)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}.$$

Buradan

$$|\,AB\,|+|\,BC\,| = 2\sqrt{5}+3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} = |\,AC\,|$$

bulunur. Üçgen eşitsizliğinde eşitlik ancak B noktası AC doğru parçası üzerindeyken olur; dolayısıyla A, B, C aynı doğru üzerindedir ve B, A ile C'nin arasındadır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.18: $|AB| + |BC| = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5} = |AC|$: B, AC doğru parçası üzerindedir.

■

1.5 Üç Noktaya Eşit Uzaklıktaki Nokta

Uzaklık formülü bilinmeyen bir noktayı da bulmamızı sağlar. A, B, C noktalarına eşit uzaklıktaki $P(x, y)$ noktasını arayalım. $\mid PA \mid = \mid PB \mid$ koşulunun iki tarafının karesini alıp açarsak x^2 ve y^2 terimleri iki tarafta da birer kez bulunduğu için sadeleşir ve geriye x ile y'ye göre birinci dereceden bir denklem kalır. $\mid PA \mid = \mid PC \mid$ koşulu da ikinci bir birinci dereceden denklem verir. İki denklemin ortak çözümü aranan noktadır. A, B, C bir üçgenin köşeleriyse bu nokta, üç köşeden geçen çemberin merkezidir: üçgenin **çevrel çemberinin merkezi**.

Örnek 1.16 (Eşit Uzaklıktaki Nokta: Birinci Üçlü). $A(1, 7)$, $B(8, 6)$ ve $C(7, -1)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktanın koordinatlarını bulun.

Çözüm.
Aranan nokta $P(x, y)$ olsun.
Birinci koşul. $\mid PA \mid = \mid PB \mid$ ile $\mid PA \mid^2 = \mid PB \mid^2$ denktir (uzaklıklar negatif değildir):

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(x-1)^2+(y-7)^2=(x-8)^2+(y-6)^2$$
$$x^2-2x+1+y^2-14y+49=x^2-16x+64+y^2-12y+36$$
$$-2x-14y+50=-16x-12y+100$$
$$14x-2y=50,$$

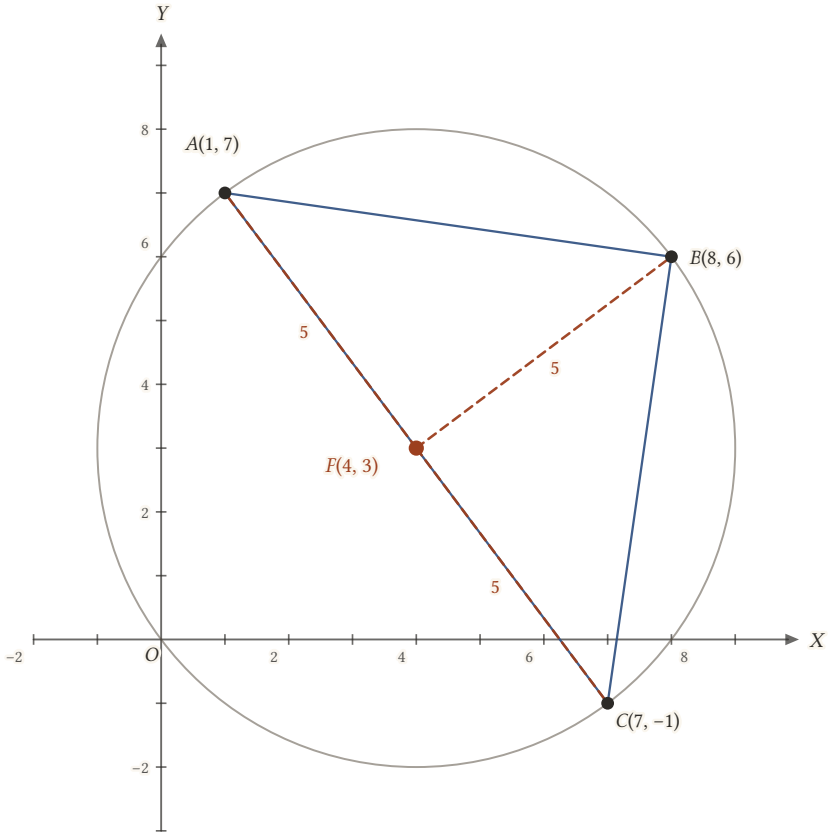
yani $7x-y=25$.
İkinci koşul. $|\,PA\,|^2=|\,PC\,|^2$:

$$(x-1)^2+(y-7)^2=(x-7)^2+(y+1)^2$$
$$x^2-2x+1+y^2-14y+49=x^2-14x+49+y^2+2y+1$$
$$12x-16y=0,$$

yani $3x-4y=0$.
Denklem sistemi. Birinci denklemden $y=7x-25$; bunu ikincide yerine yazarsak

$$3x-4(7x-25)=0\Leftrightarrow -25x+100=0\Leftrightarrow x=4,$$

ve $y=7\cdot 4-25=3$ bulunur. Aranan nokta $P(4,3)$'tür.
Denetim. $|\,PA\,|=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $|\,PB\,|=\sqrt{4^2+3^2}=5$, $|\,PC\,|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$.



Şekil 1.19: $P(4,3)$ üç köşeye de 5 birim uzaklıktadır; P merkezli 5 yarıçaplı çember A, B ve C'den geçer.

■

Örnek 1.17 (Eşit Uzaklıktaki Nokta: İkinci Üçlü). $A(3,3)$, $B(6,2)$ ve $C(8,-2)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktanın koordinatlarını bulun.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

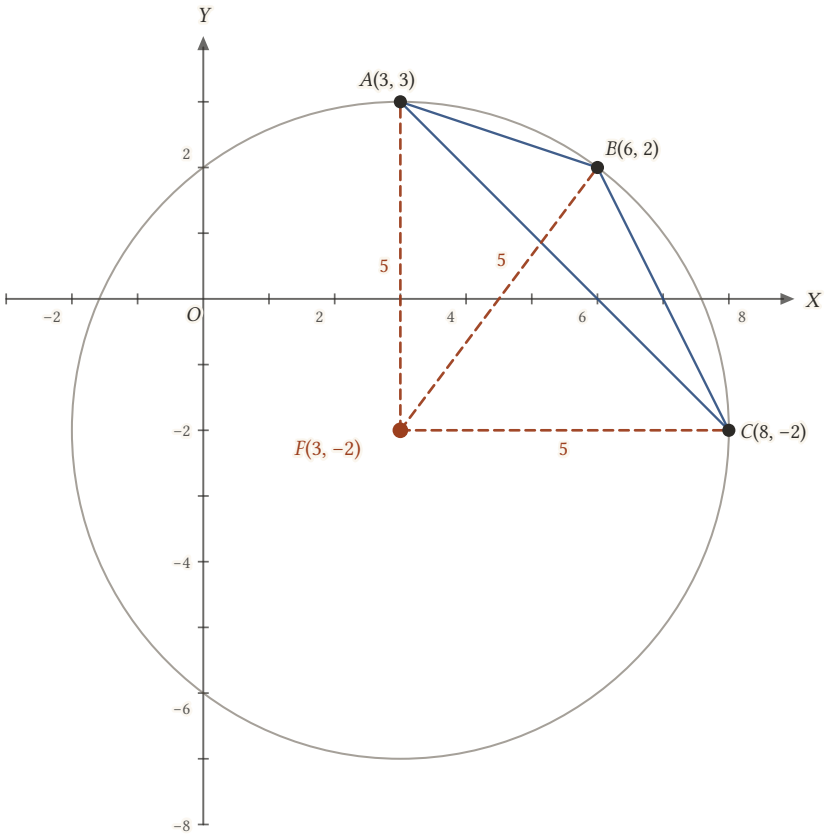
Aranan nokta $P(x, y)$ olsun.
Birinci koşul. $|\,PA\,|^2 = |\,PB\,|^2$:

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y-3)^2 &= (x-6)^2 + (y-2)^2\\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4\\ -6x - 6y + 18 &= -12x - 4y + 40\\ 6x - 2y &= 22,\end{aligned}$$

yani $3x - y = 11$.
İkinci koşul. $|\,PA\,|^2 = |\,PC\,|^2$:

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y-3)^2 &= (x-8)^2 + (y+2)^2\\ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 - 16x + 64 + y^2 + 4y + 4\\ -6x - 6y + 18 &= -16x + 4y + 68\\ 10x - 10y &= 50,\end{aligned}$$

yani $x - y = 5$.
Denklem sistemi. Birinci denklemden ikinciyi çıkarırsak $2x = 6$, yani $x = 3$; ikinci denklemden $y = x - 5 = -2$. Aranan nokta $P(3, -2)$'dir.
Denetim. $|\,PA\,| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$, $|\,PB\,| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $|\,PC\,| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$.



Şekil 1.20: $P(3, -2)$ üç noktaya da 5 birim uzaklıktadır; PA düşey, PC yataydır.

■

Örnek 1.18 (Eşit Uzaklıktaki Nokta: Üçüncü Üçlü). $A(4, 3)$, $B(2, 7)$ ve $C(-3, -8)$ noktalarına eşit uzaklıkta bulunan noktanın koordinatlarını bulun.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Aranan nokta $P(x, y)$ olsun.
Birinci koşul. $|\,PA\,|^2 = |\,PB\,|^2$:

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + (y-3)^2 &= (x-2)^2 + (y-7)^2\\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 - 14y + 49\\ -8x - 6y + 25 &= -4x - 14y + 53\\ -4x + 8y &= 28,\end{aligned}$$

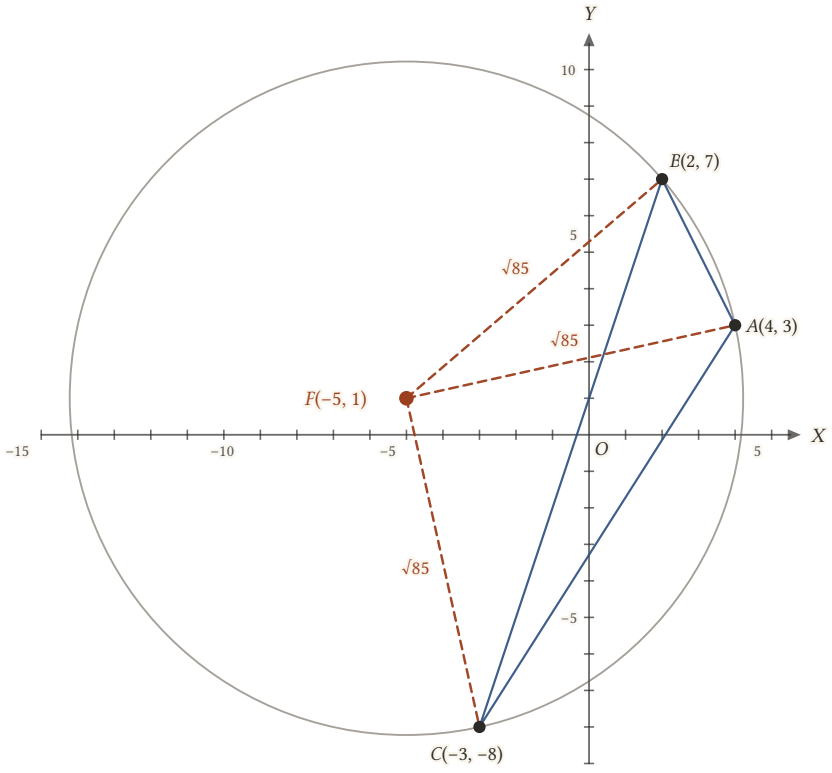
yani $x - 2y = -7$.
İkinci koşul. $|\,PA\,|^2 = |\,PC\,|^2$:

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + (y-3)^2 &= (x+3)^2 + (y+8)^2\\ x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 &= x^2 + 6x + 9 + y^2 + 16y + 64\\ -8x - 6y + 25 &= 6x + 16y + 73\\ -14x - 22y &= 48,\end{aligned}$$

yani $7x + 11y = -24$.
Denklem sistemi. Birinci denklemden $x = 2y - 7$; bunu ikincide yerine yazarsak

$$7(2y-7) + 11y = -24 \Leftrightarrow 25y - 49 = -24 \Leftrightarrow y = 1,$$

ve $x = 2 \cdot 1 - 7 = -5$. Aranan nokta $P(-5, 1)$'dir.
Denetim. $|\,PA\,| = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}$, $|\,PB\,| = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85}$, $|\,PC\,| = \sqrt{2^2 + (-9)^2} = \sqrt{85}$.



Şekil 1.21: Geniş açılı üçgende çevrel çemberin merkezi $P(-5, 1)$ üçgenin dışında kalır; yarıçap $\sqrt{85} \approx 9{,}22$'dir.

Bu örnekte P noktası üçgenin dışında kaldı: çevrel çemberin merkezi, geniş açılı bir üçgende üçgenin dışına düşer. Gerçekten $|\,AB\,|^2 = 20$, $|\,AC\,|^2 = 170$, $|\,BC\,|^2 = 250$ ve $20 + 170 < 250$ olduğundan A açısı geniştir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

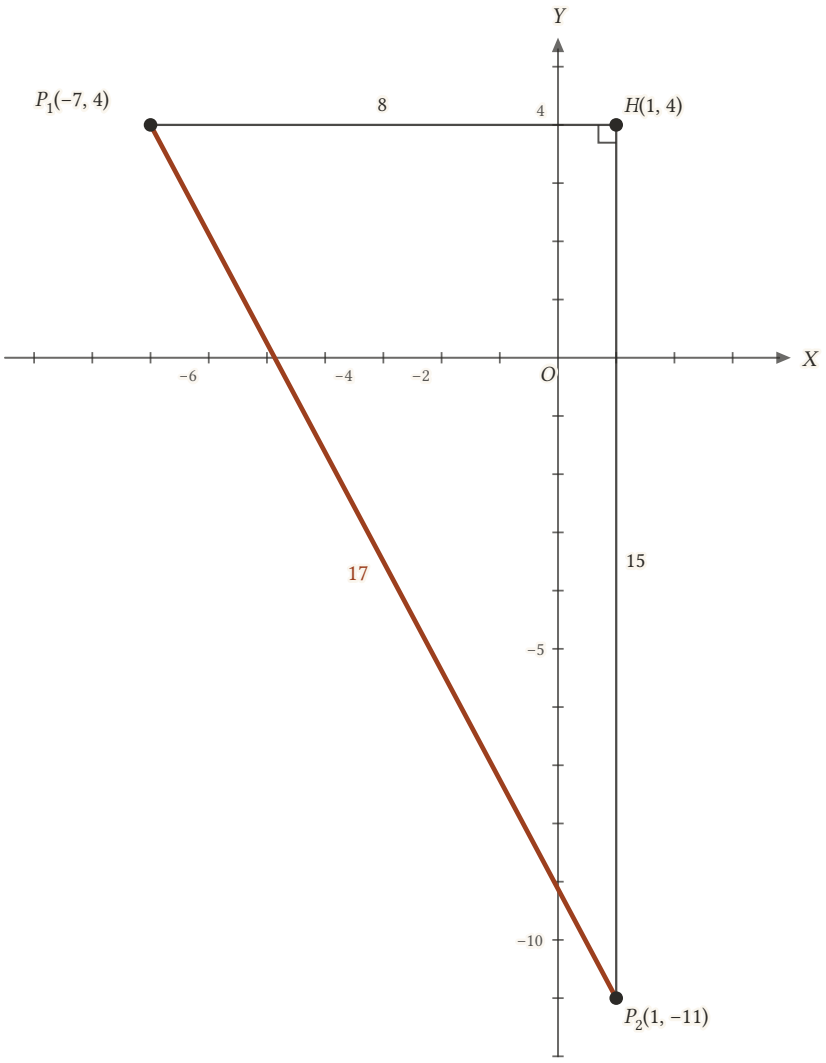
1.6 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda uzaklık formülünü ve şekil tanıma adımlarını kullanıyoruz. Birkaçında orta nokta, ağırlık merkezi ve eğim de karşımıza çıkıyor; bunları gerektiği yerde uzaklıklarla gerekçelendiriyoruz.

Alıştırma 1.1 (İki Nokta Arası Uzaklık: Birinci Çift). $P_1(-7,4)$ ve $P_2(1,-11)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulun.

Çözüm.
Uzaklık formülünde $x_1=-7$, $y_1=4$, $x_2=1$, $y_2=-11$ yazarız:

$$|\,P_1P_2\,| = \sqrt{\big(\,1-(-7)\big)^2+(-11-4)^2} = \sqrt{64+225} = \sqrt{289} = 17.$$



Şekil 1.22: Dik kenarları 8 ve 15 olan dik üçgenin hipotenüsü 17'dir.

■

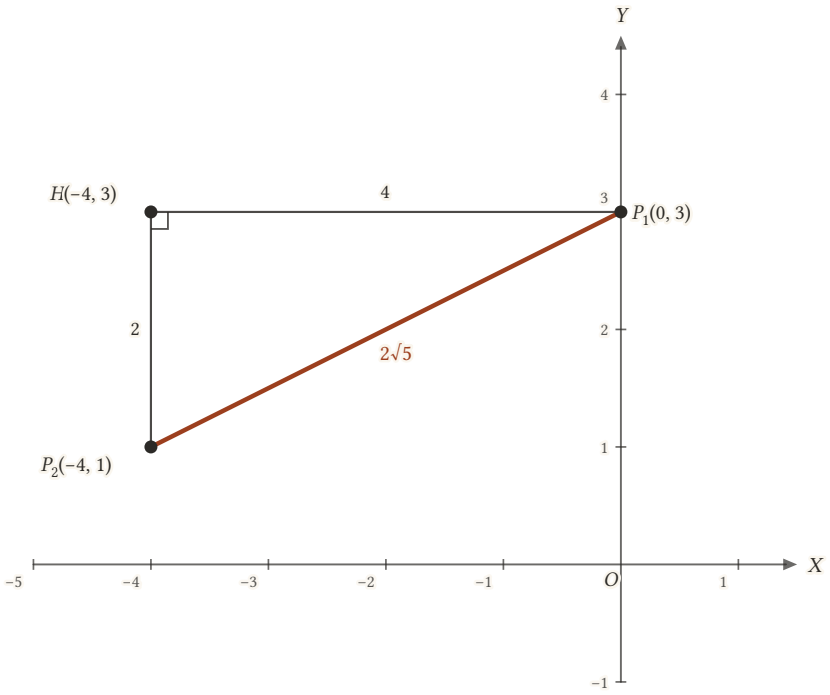
 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 1.2 (İki Nokta Arası Uzaklık: İkinci Çift). $P_1(0,3)$ ve $P_2(-4,1)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulun.

Çözüm.
Uzaklık formülünden

$$| P_1P_2 | = \sqrt{(-4-0)^2+(1-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Son adımda $20 = 4 \cdot 5$ olduğundan $\sqrt{20} = \sqrt{4}\,\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ yazdık.



Şekil 1.23: Dik kenarları 4 ve 2 olan dik üçgenin hipotenüsü √20 = 2√5'tir.

■

Alıştırma 1.3 (Dik Üçgen: A(10, 5), B(3, 2), C(6, −5)). Köşeleri $A(10,5)$, $B(3,2)$ ve $C(6,-5)$ olan ABC üçgeninin dik üçgen olduğunu gösterin.

Çözüm.
Kenar uzunlukları:

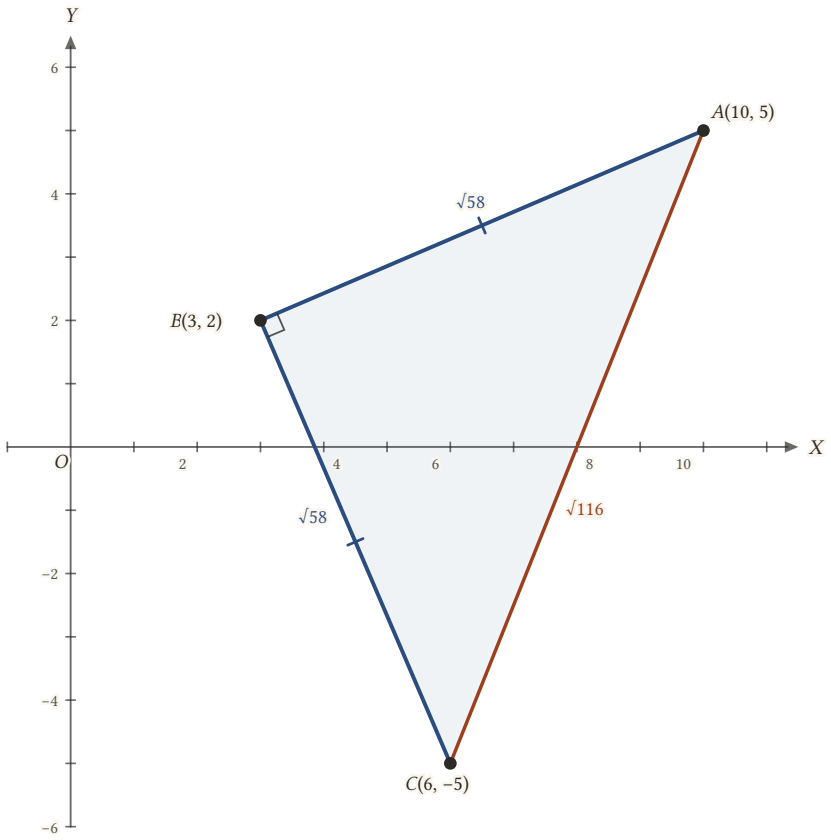
$$| AB | = \sqrt{(3-10)^2+(2-5)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58},$$
$$| BC | = \sqrt{(6-3)^2+(-5-2)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58},$$
$$| CA | = \sqrt{(10-6)^2+\big(5-(-5)\big)^2} = \sqrt{16+100} = \sqrt{116}.$$

En uzun kenar CA'dır ve

$$| AB |^2 + | BC |^2 = 58+58 = 116 = | CA |^2 .$$

Pisagor bağıntısının tersi gereği B açısı diktir; ABC bir dik üçgendir. $| AB | = | BC |$ olduğundan ikizkenar dik üçgendir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.24: 58 + 58 = 116 olduğundan B açısı diktir; üçgen ikizkenar dik üçgendir.

■

Alıştırma 1.4 (Alan: A(10, 5), B(3, 2), C(6, −5)). Köşeleri $A(10,5)$, $B(3,2)$ ve $C(6,-5)$ olan ABC üçgeninin alanını bulun.

Çözüm.
Bir önceki alıştırmada (bkz. Alıştırma 1.3) üçgenin B'de dik olduğunu ve dik kenarlarının $|\,AB\,| = |\,BC\,| = \sqrt{58}$ olduğunu gördük. Dik üçgenin alanı dik kenarların çarpımının yarısıdır:

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}|\,AB\,||\,BC\,| = \frac{1}{2}\sqrt{58}\,\sqrt{58} = \frac{58}{2} = 29.$$

■

Alıştırma 1.5 (Dik Üçgen: A(7, 5), B(2, 3), C(6, −7)). Köşeleri $A(7,5)$, $B(2,3)$ ve $C(6,-7)$ olan ABC üçgeninin dik üçgen olduğunu gösterin.

Çözüm.
Kenar uzunlukları:

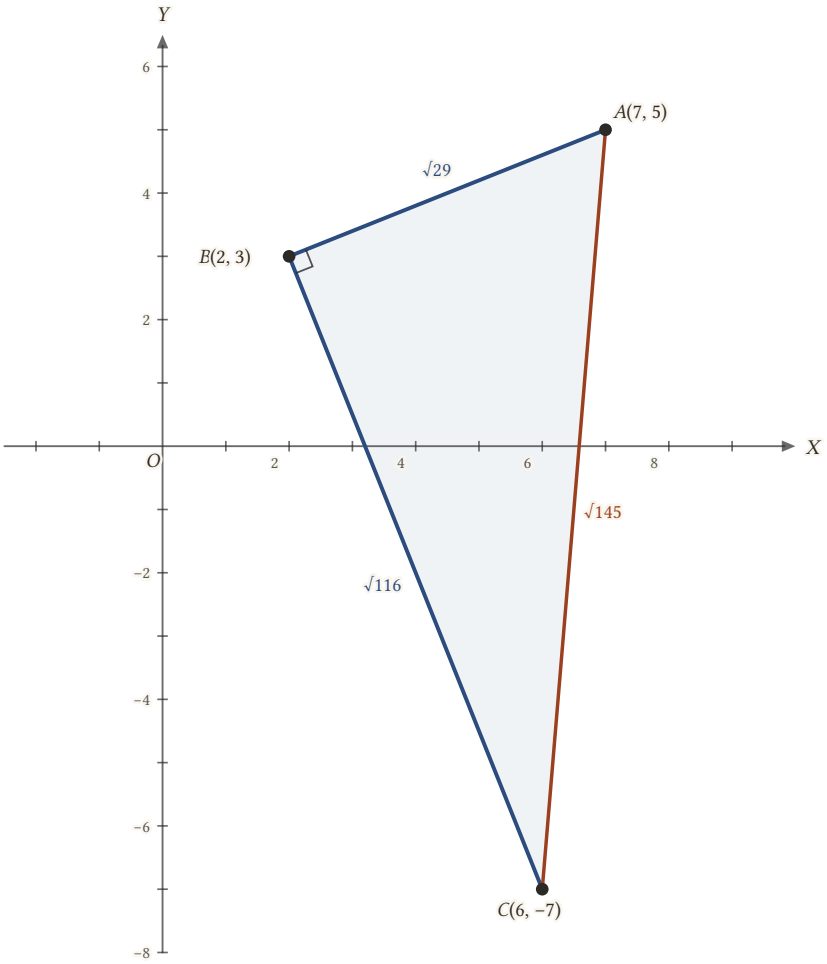
$$\begin{aligned}
|\,AB\,| &= \sqrt{(2-7)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29},\\
|\,BC\,| &= \sqrt{(6-2)^2 + (-7-3)^2} = \sqrt{16+100} = \sqrt{116},\\
|\,CA\,| &= \sqrt{(7-6)^2 + \big(5-(-7)\big)^2} = \sqrt{1+144} = \sqrt{145}.
\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

En uzun kenar CA'dır ve

$$| AB |^2 + | BC |^2 = 29 + 116 = 145 = | CA |^2 .$$

Pisagor bağıntısının tersi gereği B açısı diktir; ABC bir dik üçgendir.



Şekil 1.25: 29 + 116 = 145 olduğundan B açısı diktir.

■

Alıştırma 1.6 (Alan: A(7, 5), B(2, 3), C(6, −7)). Köşeleri $A(7,5)$, $B(2,3)$ ve $C(6,-7)$ olan ABC üçgeninin alanını bulun.

Çözüm.
Bir önceki alıştırmada (bkz. Alıştırma 1.5) dik açının B'de olduğunu, dik kenarların da $| AB | = \sqrt{29}$ ve $| BC | = \sqrt{116}$ olduğunu gördük. $116 = 4 \cdot 29$ olduğundan $\sqrt{116} = 2\sqrt{29}$'dur. Buna göre

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} | AB | \, | BC | = \frac{1}{2}\sqrt{29}\left(2\sqrt{29} \right) = 29.$$

■

Alıştırma 1.7 (Dik Üçgen: A(8, 6), B(4, 8), C(2, 4)). Köşeleri $A(8,6)$, $B(4,8)$ ve $C(2,4)$ olan ABC üçgeninin dik üçgen olduğunu gösterin.

 CC BY-NC-SA 4.0

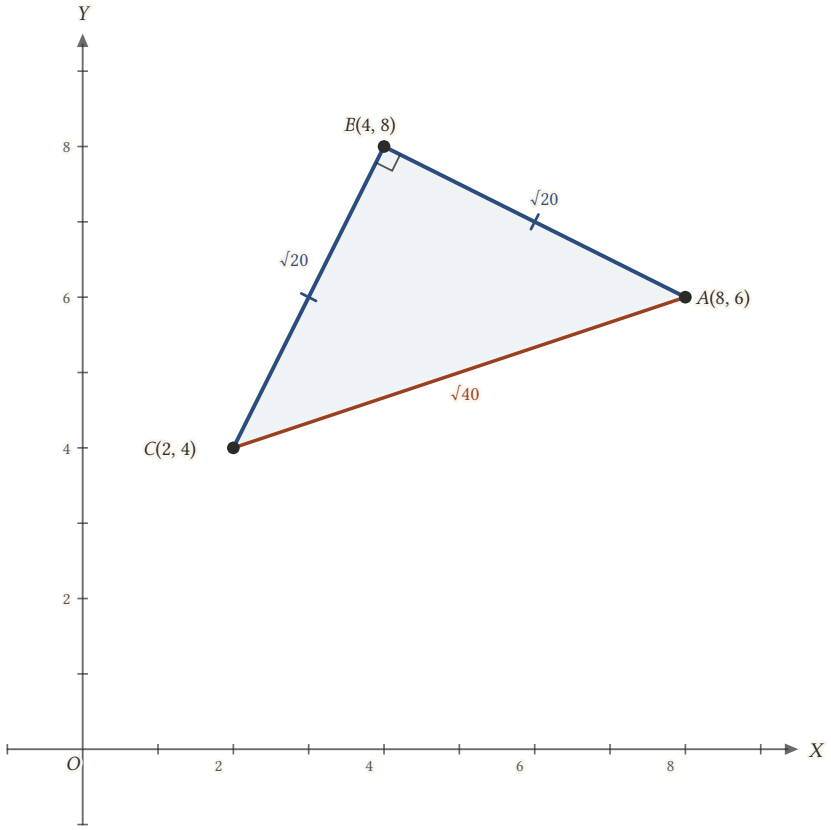
Çözüm.
Kenar uzunlukları:

$$\begin{aligned} |\ AB\ | &= \sqrt{(4-8)^2+(8-6)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}, \\ |\ BC\ | &= \sqrt{(2-4)^2+(4-8)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}, \\ |\ CA\ | &= \sqrt{(8-2)^2+(6-4)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}. \end{aligned}$$

En uzun kenar CA'dır ve

$$|\ AB\ |^2 + |\ BC\ |^2 = 20 + 20 = 40 = |\ CA\ |^2\ .$$

Pisagor bağıntısının tersi gereği B açısı diktir; ABC bir dik üçgendir. $|\ AB\ | = |\ BC\ |$ olduğundan ikizkenar dik üçgendir.



Şekil 1.26: 20 + 20 = 40 olduğundan B açısı diktir; üçgen ikizkenar dik üçgendir.

■

Alıştırma 1.8 (Alan: A(8, 6), B(4, 8), C(2, 4)). Köşeleri $A(8,6)$, $B(4,8)$ ve $C(2,4)$ olan ABC üçgeninin alanını bulun.

Çözüm.
Bir önceki alıştırmada (bkz. Alıştırma 1.7) üçgenin B'de dik olduğunu ve $|\ AB\ | = |\ BC\ | = \sqrt{20}$ olduğunu gördük. Buna göre

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}|\ AB\ ||\ BC\ | = \frac{1}{2}\sqrt{20}\,\sqrt{20} = \frac{20}{2} = 10.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 1.9 (Orta Noktalarından Üçgenin Köşeleri: Birinci Üçgen). Kenarlarının orta noktaları $(-2,1)$, $(5,2)$ ve $(2,-3)$ olan $P_1P_2P_3$ üçgeninin köşelerinin koordinatlarını bulun.

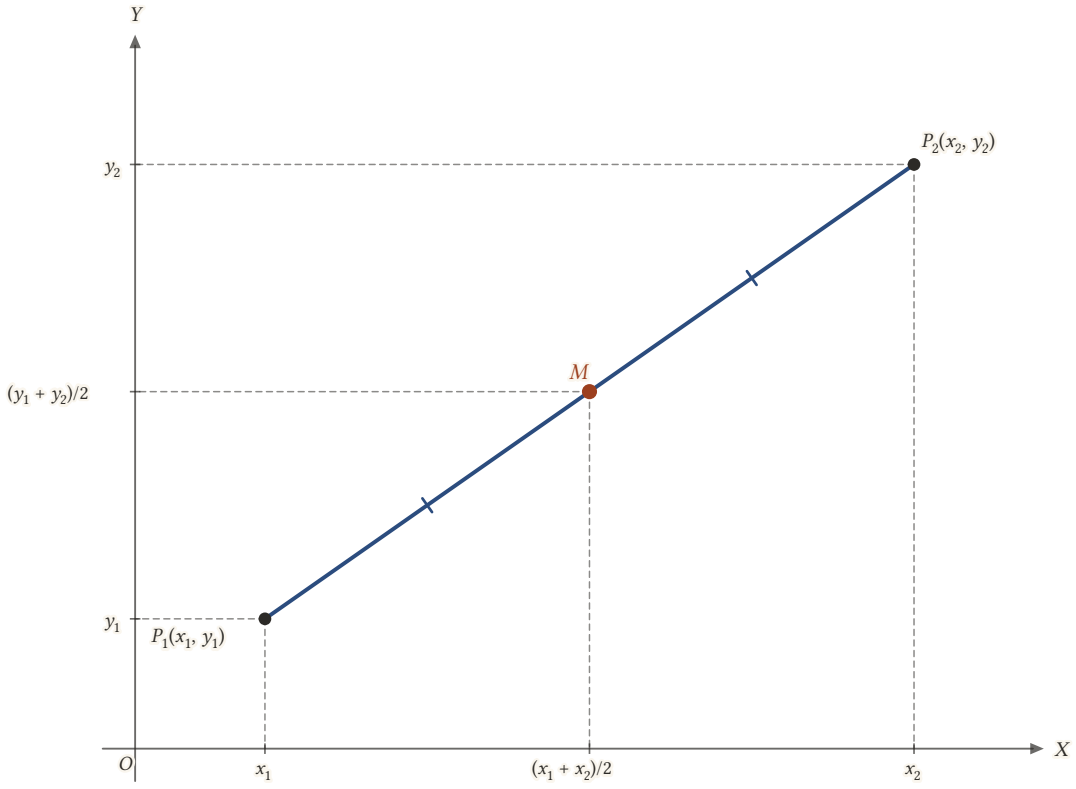
Çözüm.
Orta noktanın koordinatları. $P_1(x_1,y_1)$ ile $P_2(x_2,y_2)$'nin orta noktası

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

noktasıdır. Bunu uzaklık formülüyle doğrulayalım. M'nin koordinatlarından P_1'inkileri çıkarırsak $\frac{x_2-x_1}{2}$ ve $\frac{y_2-y_1}{2}$ kalır; P_2'ninkilerden M'ninkileri çıkarırsak da aynı sayılar. Dolayısıyla

$$|\,P_1M\,| = |\,MP_2\,| = \frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \frac{1}{2}\,|\,P_1P_2\,|\,.$$

Buna göre $|\,P_1M\,|+|\,MP_2\,| = |\,P_1P_2\,|$'dir; şekil tanıma adımlarındaki doğrusallık ölçütüyle M, P_1P_2 doğru parçası üzerindedir ve iki uca eşit uzaklıktadır, yani orta noktadır. (Bir doğru parçasını herhangi bir oranda bölen noktayı Bölme Oranı, Eğim ve Açı bölümünde genel olarak bulacağız.)



Şekil 1.27: Orta nokta: M'nin koordinatları uç noktaların koordinatlarının ortalamasıdır ve $|P_1M| = |MP_2|$'dir.

Denklemleri kuralım. Köşeler $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ olsun ve orta noktalar sırasıyla P_1P_2, P_2P_3, P_1P_3 kenarlarına ait olsun. Orta nokta formülünü iki tarafı 2 ile çarparak yazarsak apsisler için

$$x_1+x_2=-4, \qquad x_2+x_3=10, \qquad x_1+x_3=4,$$

ordinatlar için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y_1 + y_2 = 2, \qquad y_2 + y_3 = 4, \qquad y_1 + y_3 = -6$$

elde ederiz.
Apsisler. Üç denklemi toplarsak

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = -4 + 10 + 4 = 10,$$

yani $x_1 + x_2 + x_3 = 5$. Bu toplamdan her denklemi çıkarırız:

$$x_3 = 5 - (-4) = 9, \qquad x_1 = 5 - 10 = -5, \qquad x_2 = 5 - 4 = 1.$$

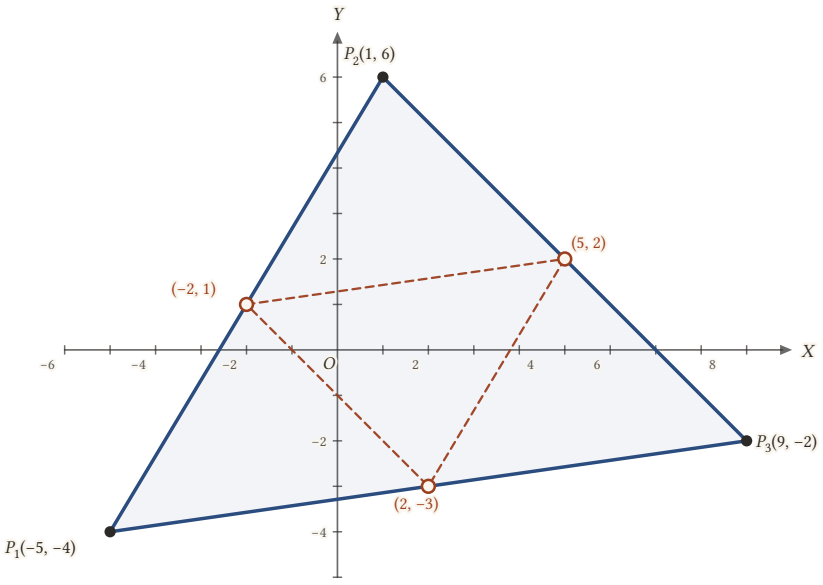
Ordinatlar. Aynı yolla

$$2(y_1 + y_2 + y_3) = 2 + 4 - 6 = 0,$$

yani $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ ve

$$y_3 = 0 - 2 = -2, \qquad y_1 = 0 - 4 = -4, \qquad y_2 = 0 - (-6) = 6.$$

Köşeler $P_1(-5,-4)$, $P_2(1,6)$ ve $P_3(9,-2)$'dir.
Denetim. P_1P_2'nin orta noktası $\left(\frac{-5+1}{2}, \frac{-4+6}{2}\right) = (-2,1)$, P_2P_3'ünkü $\left(\frac{1+9}{2}, \frac{6-2}{2}\right) = (5,2)$, P_1P_3'ünkü $\left(\frac{-5+9}{2}, \frac{-4-2}{2}\right) = (2,-3)$.



Şekil 1.28: Kenar orta noktaları (−2, 1), (5, 2) ve (2, −3) olan üçgenin köşeleri P_1(−5, −4), P_2(1, 6) ve P_3(9, −2)'dir.

■

Alıştırma 1.10 (Dikdörtgende Karşılıklı Köşelere Uzaklıklar). Köşeleri $O(0,0)$, $B(0,b)$, $C(a,b)$ ve $A(a,0)$ olan bir $OBCA$ dikdörtgeni verilsin. Düzlemin her $P(x,y)$ noktası için

$$|\,OP\,|^2 + |\,PC\,|^2 = |\,AP\,|^2 + |\,PB\,|^2$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
O ile C ve A ile B dikdörtgenin karşılıklı köşeleridir. Dört uzaklığın karesini uzaklık formülüyle açalım:

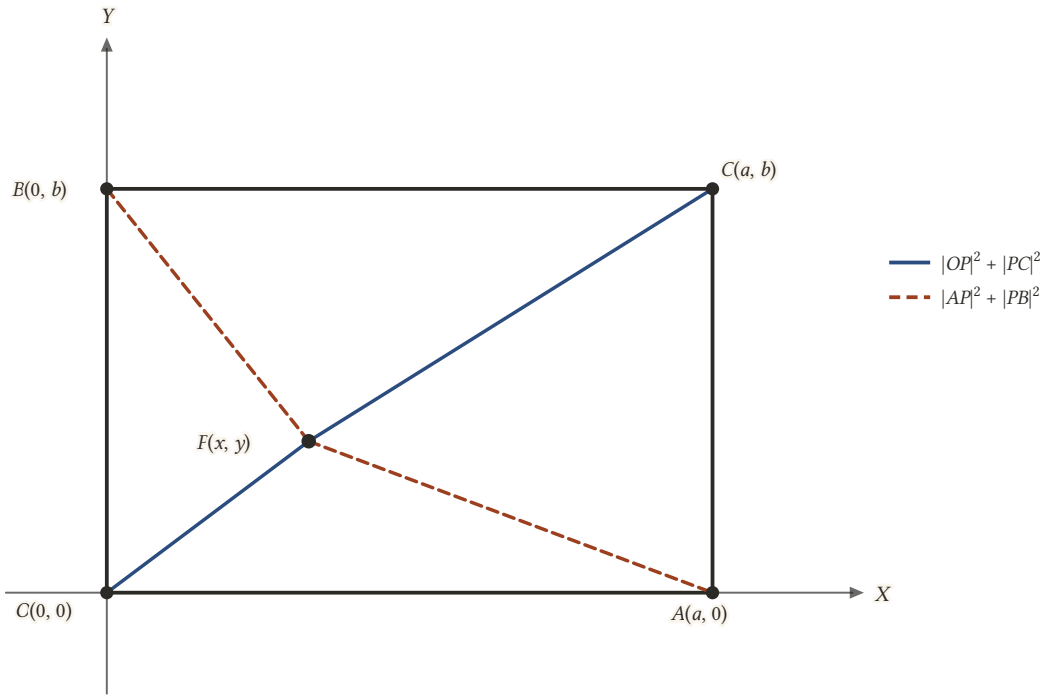
 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
|\,OP\,|^2 &= (x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2 + y^2,\\
|\,PC\,|^2 &= (a-x)^2 + (b-y)^2\\
&= a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2by + y^2,\\
|\,AP\,|^2 &= (x-a)^2 + (y-0)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2,\\
|\,PB\,|^2 &= (0-x)^2 + (b-y)^2 = x^2 + b^2 - 2by + y^2.
\end{aligned}
$$

İlk ikisini ve son ikisini toplayalım:

$$
\begin{aligned}
|\,OP\,|^2 + |\,PC\,|^2 &= 2x^2 - 2ax + a^2 + 2y^2 - 2by + b^2,\\
|\,AP\,|^2 + |\,PB\,|^2 &= 2x^2 - 2ax + a^2 + 2y^2 - 2by + b^2.
\end{aligned}
$$

İki toplam aynıdır; dolayısıyla $|\,OP\,|^2 + |\,PC\,|^2 = |\,AP\,|^2 + |\,PB\,|^2$. P noktası hiçbir koşula bağlı olmadığından eşitlik, dikdörtgenin içinde ya da dışında, düzlemin her noktası için geçerlidir.



Şekil 1.29: Dikdörtgenin karşılıklı köşelerine uzaklıkların kareleri toplamı eşittir: $|OP|^2 + |PC|^2 = |AP|^2 + |PB|^2$.

■

Alıştırma 1.11 (Ağırlık Merkezi: Birinci Üçgen). Köşeleri $P_1(5,7)$, $P_2(1,-3)$ ve $P_3(-5,1)$ olan üçgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulun.

Çözüm.
Formül. Bir üçgenin ağırlık merkezi G, kenarortaylarının kesim noktasıdır ve her kenarortayı köşeden itibaren $2:1$ oranında böler. Köşeleri $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ olan üçgende G'nin koordinatları köşe koordinatlarının ortalamasıdır:

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu formülü, verilen oranda bölen nokta yardımıyla Bölme Oranı, Eğim ve Açı bölümünde elde edeceğiz. Burada formülün verdiği noktanın iki kenarortayın da üzerinde olduğunu, yani gerçekten kenarortayların kesim noktası olduğunu uzaklıklarla doğrudan denetleyeceğiz.

Hesap.

$$x = \frac{5+1+(-5)}{3} = \frac{1}{3}, \qquad y = \frac{7+(-3)+1}{3} = \frac{5}{3},$$

yani $G\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Denetim. P_2P_3 kenarının orta noktası

$$M\left(\frac{1+(-5)}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) = M(-2,-1)$$

noktasıdır; P_1M bir kenarortaydır. Uzaklıklar:

$$|\, P_1G \,| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-5\right)^2 + \left(\frac{5}{3}-7\right)^2} = \frac{\sqrt{14^2+16^2}}{3} = \frac{\sqrt{452}}{3} = \frac{2\sqrt{113}}{3},$$

$$|\, GM \,| = \sqrt{\left(-2-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1-\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{7^2+8^2}}{3} = \frac{\sqrt{113}}{3},$$

$$|\, P_1M \,| = \sqrt{(-2-5)^2+(-1-7)^2} = \sqrt{49+64} = \sqrt{113}.$$

$|\, P_1G \,| + |\, GM \,| = \sqrt{113} = |\, P_1M \,|$ olduğundan G, P_1M kenarortayı üzerindedir ve $|\, P_1G \,| = 2\,|\, GM \,|$'dir.

Aynı denetimi ikinci bir kenarortayla yineleyelim. P_1P_3 kenarının orta noktası

$$N\left(\frac{5+(-5)}{2}, \frac{7+1}{2}\right) = N(0,4)$$

noktasıdır; P_2N bir kenarortaydır. Uzaklıklar:

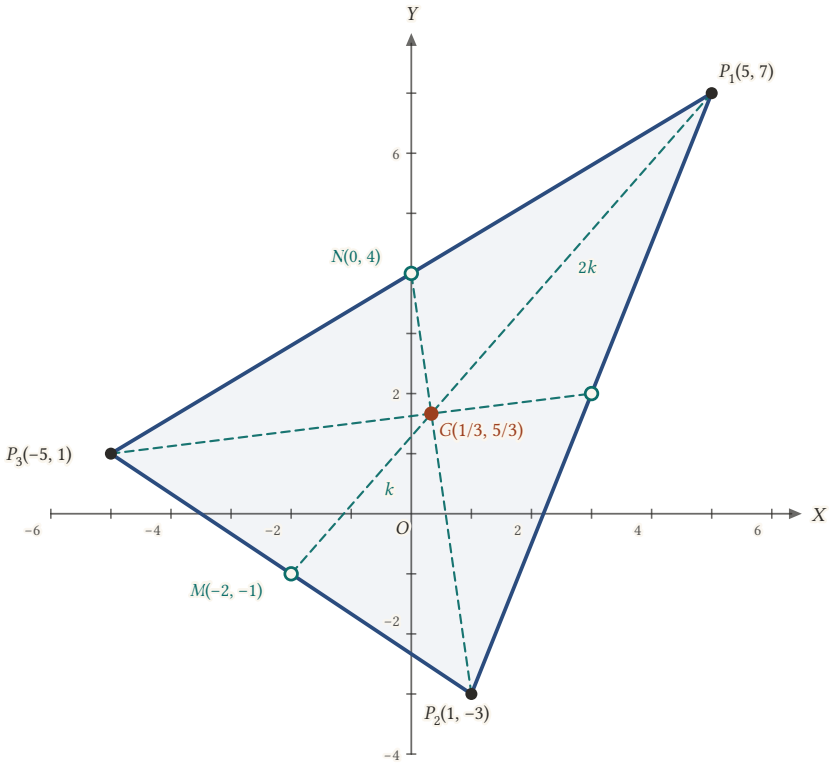
$$|\, P_2G \,| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{5}{3}+3\right)^2} = \frac{\sqrt{2^2+14^2}}{3} = \frac{\sqrt{200}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{3},$$

$$|\, GN \,| = \sqrt{\left(0-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(4-\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{1^2+7^2}}{3} = \frac{\sqrt{50}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{3},$$

$$|\, P_2N \,| = \sqrt{(0-1)^2+\big(4-(-3)\big)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

$|\, P_2G \,| + |\, GN \,| = 5\sqrt{2}$ ve bu değer $|\, P_2N \,|$'ye eşit olduğundan G, P_2N kenarortayı üzerindedir ve $|\, P_2G \,| = 2\,|\, GN \,|$'dir. Farklı iki kenarortay tek bir noktada kesişir; G ikisinin de üzerinde olduğuna göre bu kesim noktasıdır, yani üçgenin ağırlık merkezidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.30: Kenarortaylar $G(1/3, 5/3)$'te kesişir; G her kenarortayı köşeden itibaren $2:1$ oranında böler.

■

Alıştırma 1.12 (Ağırlık Merkezi: İkinci Üçgen). Köşeleri $P_1(2,-1)$, $P_2(6,7)$ ve $P_3(-4,-3)$ olan üçgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını bulun.

Çözüm.
Ağırlık merkezi köşe koordinatlarının ortalamasıdır (bkz. Alıştırma 1.11):

$$x = \frac{2+6+(-4)}{3} = \frac{4}{3}, \qquad y = \frac{-1+7+(-3)}{3} = \frac{3}{3} = 1,$$

yani $G\left(\frac{4}{3}, 1\right)$.
Denetim. P_2P_3'ün orta noktası $M\left(\frac{6+(-4)}{2}, \frac{7+(-3)}{2}\right) = (1,2)$'dir. Uzaklıklar:

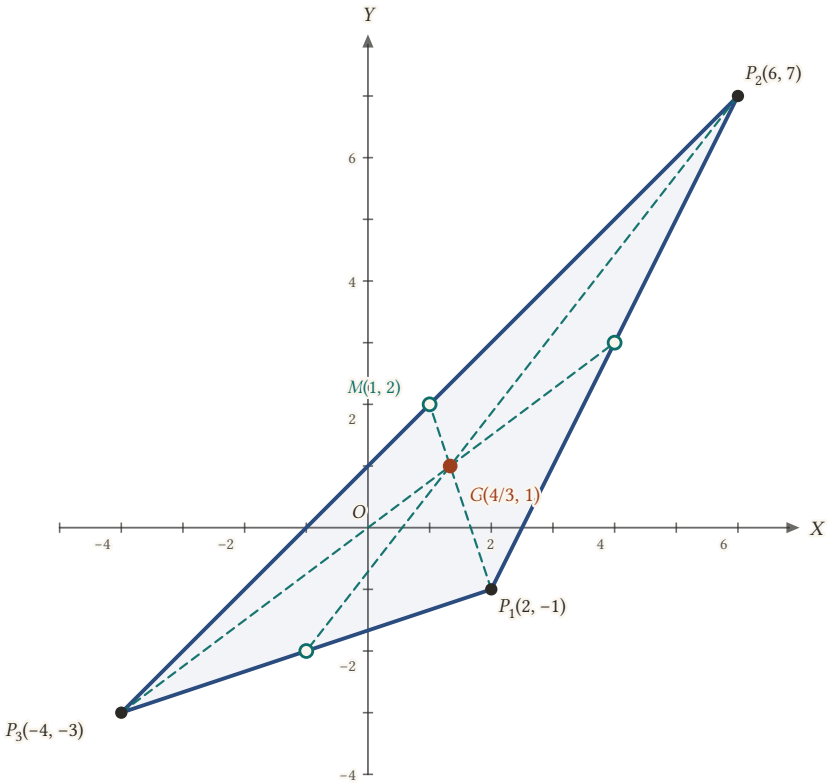
$$|\,P_1G\,| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}-2\right)^2 + \big(\,1-(-1)\big)^2} = \sqrt{\frac{4}{9}+4} = \frac{\sqrt{40}}{3} = \frac{2\sqrt{10}}{3},$$

$$|\,GM\,| = \sqrt{\left(1-\frac{4}{3}\right)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}+1} = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

$$|\,P_1M\,| = \sqrt{(1-2)^2 + \big(\,2-(-1)\big)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

$|\,P_1G\,| + |\,GM\,| = \sqrt{10} = |\,P_1M\,|$ ve $|\,P_1G\,| = 2\,|\,GM\,|$; G kenarortayı köşeden itibaren $2:1$ oranında böler.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.31: Kenarortaylar $G(4/3, 1)$'de kesişir; P_1M kenarortayında $|P_1G| = 2\,|GM|$'dir.

■

Alıştırma 1.13 (Eğimle Diklik: A(10, 5), B(3, 2), C(6, −5)). Köşeleri $A(10, 5)$, $B(3, 2)$ ve $C(6, -5)$ olan üçgenin dik üçgen olduğunu kenarlarının eğimlerinden yararlanarak gösterin.

Çözüm.
Eğim. Apsisleri farklı iki noktadan geçen doğrunun **eğimi**, ordinatlar farkının apsisler farkına oranıdır: $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ için $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Bu oran doğru üzerinde hangi iki noktanın seçildiğine bağlı değildir: aynı doğru üzerindeki her nokta çifti, yatay ve düşey kenarlarıyla birbirine benzer dik üçgenler oluşturur, benzer üçgenlerde de düşey kenarın yatay kenara oranı sabittir (yatay doğruda bu oran hep 0'dır). Yani eğim, doğru boyunca sağa doğru bir birim gidildiğinde ne kadar yükselindiğini (eğim negatifse ne kadar alçalındığını) söyler. Bu kavramı Bölme Oranı, Eğim ve Açı bölümünde ayrıntılı işleyeceğiz.
Diklik ölçütü. Eğimleri m_1 ve m_2 olan ve bir $B(p, q)$ noktasında kesişen iki doğru alalım. Birinci doğru üzerinde $U(p + 1, q + m_1)$, ikincisi üzerinde $V(p + 1, q + m_2)$ noktaları vardır, çünkü her iki doğruda da sağa bir birim gidince ordinat eğim kadar değişir. Uzaklık formülüyle

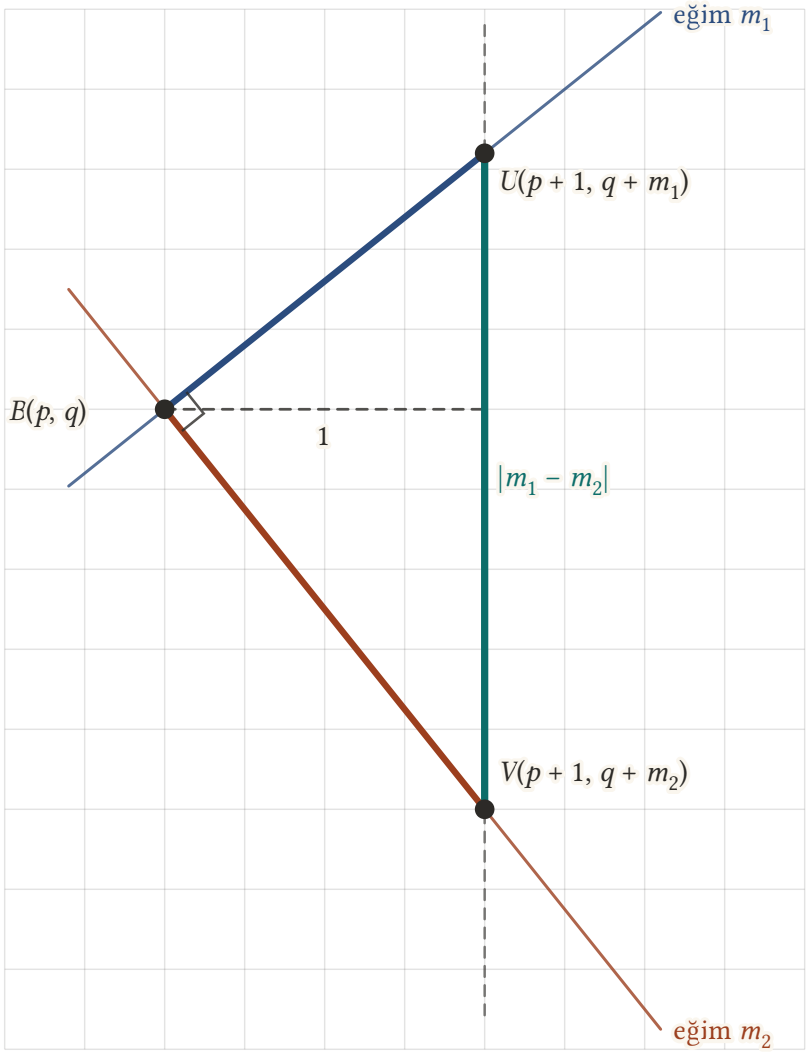
$$|\,BU\,|^2 = 1 + m_1^2, \qquad |\,BV\,|^2 = 1 + m_2^2, \qquad |\,UV\,|^2 = (m_1 - m_2)^2.$$

İki doğru B'de dik kesişir ancak ve ancak UBV açısı diktir; Pisagor bağıntısı ve tersi gereği bu, $|\,BU\,|^2 + |\,BV\,|^2 = |\,UV\,|^2$ demektir:

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 \Leftrightarrow m_1m_2 = -1.$$

Demek ki eğimleri tanımlı iki doğru ancak ve ancak eğimlerinin çarpımı -1 ise diktir.

 CC BY-NC-SA 4.0



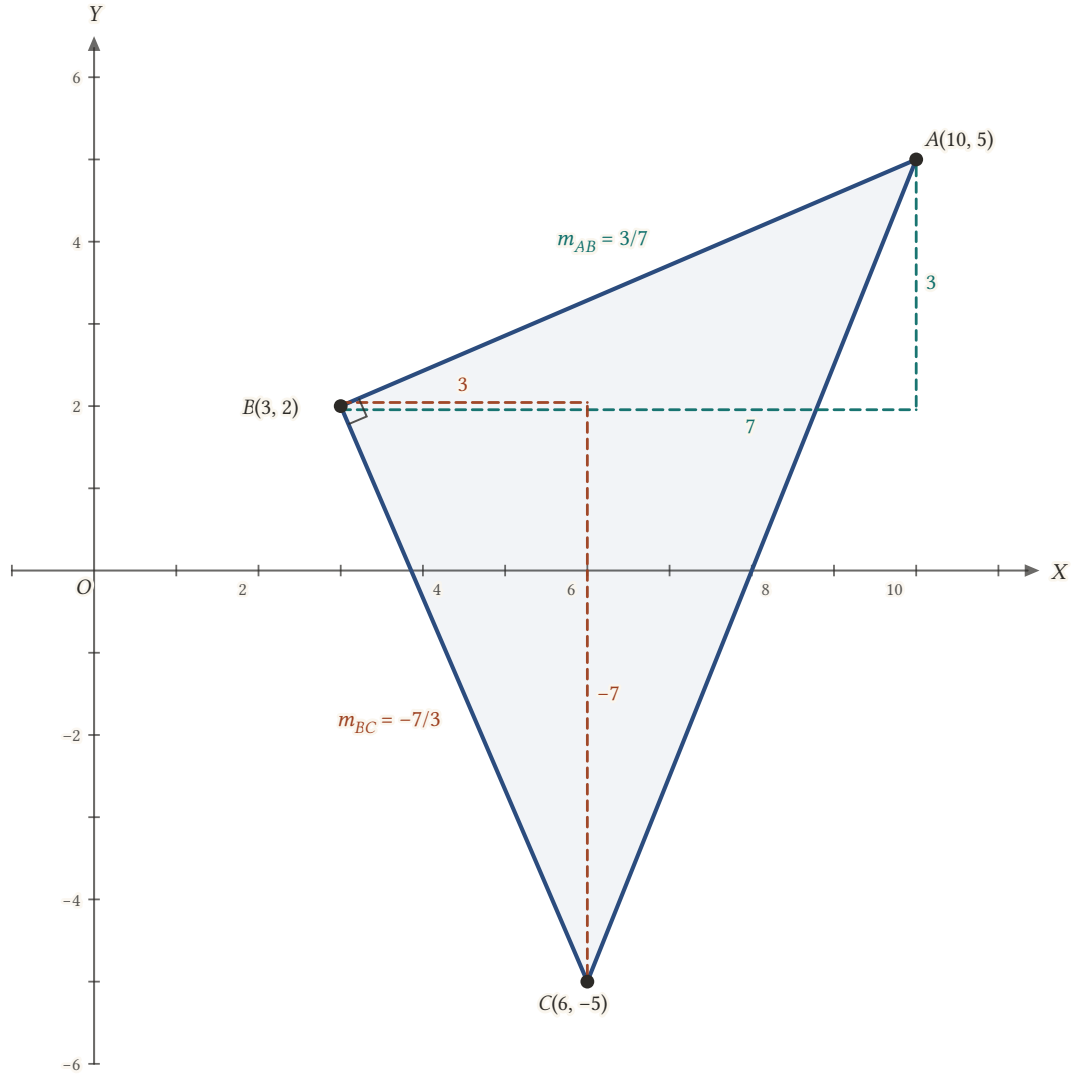
Şekil 1.32: B'den sağa bir birim gidince iki doğru U ve V'ye ulaşır. UBV açısı ancak ve ancak $|BU|^2 + |BV|^2 = |UV|^2$, yani $m_1 m_2 = -1$ iken diktir.

Uygulama. AB ve BC kenarlarının eğimleri:

$$m_{AB} = \frac{2-5}{3-10} = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}, \qquad m_{BC} = \frac{-5-2}{6-3} = -\frac{7}{3}.$$

$m_{AB}\, m_{BC} = \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = -1$ olduğundan $AB \perp BC$; üçgen B'de diktir. Bu, uzaklıklarla bulduğumuz sonuçla (bkz. Alıştırma 1.3) uyumludur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.33: Eğim üçgenleri: $m_{AB} = 3/7$ ve $m_{BC} = -7/3$; çarpımları -1 olduğundan $AB \perp BC$'dir.

■

Alıştırma 1.14 (Eğimle Diklik: A(7, 5), B(2, 3), C(6, −7)). Köşeleri $A(7,5)$, $B(2,3)$ ve $C(6,-7)$ olan üçgenin dik üçgen olduğunu kenarlarının eğimlerinden yararlanarak gösterin.

Çözüm.
Eğimleri m_1, m_2 olan iki doğru ancak ve ancak $m_1 m_2 = -1$ ise diktir (bkz. Alıştırma 1.13). AB ve BC kenarlarının eğimleri:

$$m_{AB} = \frac{3-5}{2-7} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}, \qquad m_{BC} = \frac{-7-3}{6-2} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}.$$

$m_{AB}\, m_{BC} = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -1$ olduğundan $AB \perp BC$; üçgen B'de diktir.
■

Alıştırma 1.15 (Eğimle Diklik: A(8, 6), B(4, 8), C(2, 4)). Köşeleri $A(8,6)$, $B(4,8)$ ve $C(2,4)$ olan üçgenin dik üçgen olduğunu kenarlarının eğimlerinden yararlanarak gösterin.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Diklik ölçütü $m_1 m_2 = -1$'dir (bkz. Alıştırma 1.13). AB ve BC kenarlarının eğimleri:

$$m_{AB} = \frac{8-6}{4-8} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}, \qquad m_{BC} = \frac{4-8}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

$m_{AB}\, m_{BC} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = -1$ olduğundan $AB \perp BC$; üçgen B'de diktir.
■

Alıştırma 1.16 (Paralelkenar: A(–1, –5), B(2, 1), C(1, 5), D(–2, –1)). Köşeleri $A(-1,-5)$, $B(2,1)$, $C(1,5)$ ve $D(-2,-1)$ olan $ABCD$ dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu kanıtlayın.

Çözüm.
Eğimlerle. Eğimleri eşit olan iki doğru ya paraleldir ya da çakışıktır (eğim için bkz. Alıştırma 1.13). Gerçekten, eğimi m olan iki doğru bir $B(p,q)$ noktasında kesişseydi, ikisi de $(p+1, q+m)$ noktasından geçerdi; iki ortak noktası olan doğrular çakışır. Dört kenarın eğimleri:

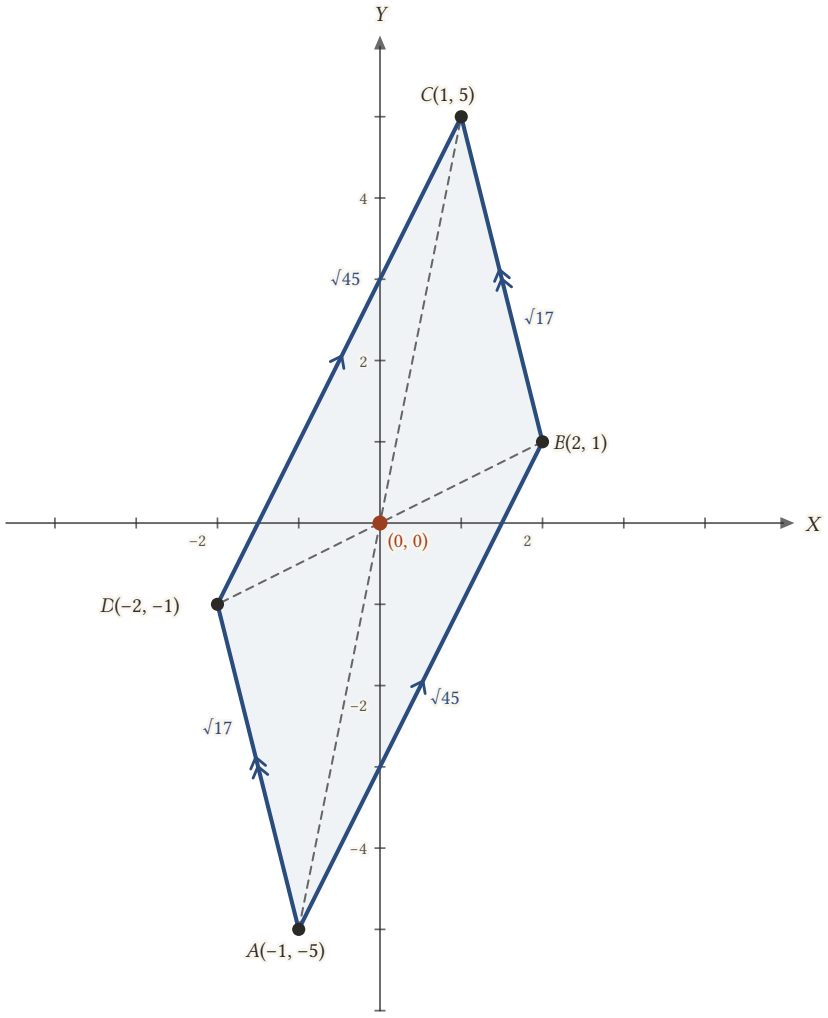
$$m_{AB} = \frac{1-(-5)}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2, m_{BC} = \frac{5-1}{1-2} = -4,$$
$$m_{CD} = \frac{-1-5}{-2-1} = \frac{-6}{-3} = 2, m_{DA} = \frac{-5-(-1)}{-1-(-2)} = -4.$$

$m_{AB} = m_{CD}$ ve $m_{BC} = m_{DA}$'dır. $m_{AB} \neq m_{BC}$ olduğundan A, B, C aynı doğru üzerinde değildir; bu yüzden AB ile CD çakışık değil paraleldir, aynı biçimde BC ile DA da paraleldir. Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgen paralelkenardır.
Uzunluklarla denetim. Karşılıklı kenarlar eşit de çıkar:

$$|\,AB\,| = \sqrt{\big(\,2-(-1)\big)^2 + \big(\,1-(-5)\big)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45},$$
$$|\,BC\,| = \sqrt{(1-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17},$$
$$|\,CD\,| = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45},$$
$$|\,DA\,| = \sqrt{\big(-1-(-2)\big)^2 + \big(-5-(-1)\big)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}.$$

Köşegenlerle ikinci yol. Köşegenleri birbirini ortalayan dörtgen paralelkenardır. AC'nin orta noktası $\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{-5+5}{2}\right) = (0,0)$, BD'nin orta noktası $\left(\frac{2-2}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = (0,0)$'dır. İki köşegenin orta noktası aynı olduğundan $ABCD$ paralelkenardır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.34: Karşılıklı kenarlar paraleldir (eğimler 2 ve −4) ve eşittir; köşegenler birbirini (0, 0)'da ortalar.

■

Alıştırma 1.17 (Paralelkenar: A(2, 4), B(6, 2), C(8, 6), D(4, 8)). Köşeleri $A(2,4)$, $B(6,2)$, $C(8,6)$ ve $D(4,8)$ olan $ABCD$ dörtgeninin bir paralelkenar olduğunu kanıtlayın.

Çözüm.
Eğimlerle. Dört kenarın eğimleri:

$$m_{AB} = \frac{2-4}{6-2} = -\frac{1}{2}, m_{BC} = \frac{6-2}{8-6} = 2,$$
$$m_{CD} = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2}, m_{DA} = \frac{4-8}{2-4} = 2.$$

$m_{AB} = m_{CD}$, $m_{BC} = m_{DA}$ ve $m_{AB} \neq m_{BC}$ olduğundan $AB \parallel CD$ ve $BC \parallel DA$; $ABCD$ bir paralelkenardır.
Aslında bir kare. Kenar uzunlukları

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
|\,AB\,| &= \sqrt{(6-2)^2+(2-4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20},\\
|\,BC\,| &= \sqrt{(8-6)^2+(6-2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20},\\
|\,CD\,| &= \sqrt{(4-8)^2+(8-6)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20},\\
|\,DA\,| &= \sqrt{(2-4)^2+(4-8)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}
\end{aligned}
$$

olduğundan $ABCD$ bir eşkenar dörtgendir. Üstelik $m_{AB}\, m_{BC} = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2 = -1$ olduğundan (diklik ölçütü için bkz. Alıştırma 1.13) $AB \perp BC$'dir. Bir açısı dik olan eşkenar dörtgen karedir.
Eğim kullanmadan. Karelik yalnız uzaklıklarla da gösterilebilir. Kenarlar $\sqrt{20}$ bulundu; ayrıca

$$|\,CA\,| = \sqrt{(2-8)^2+(4-6)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$$

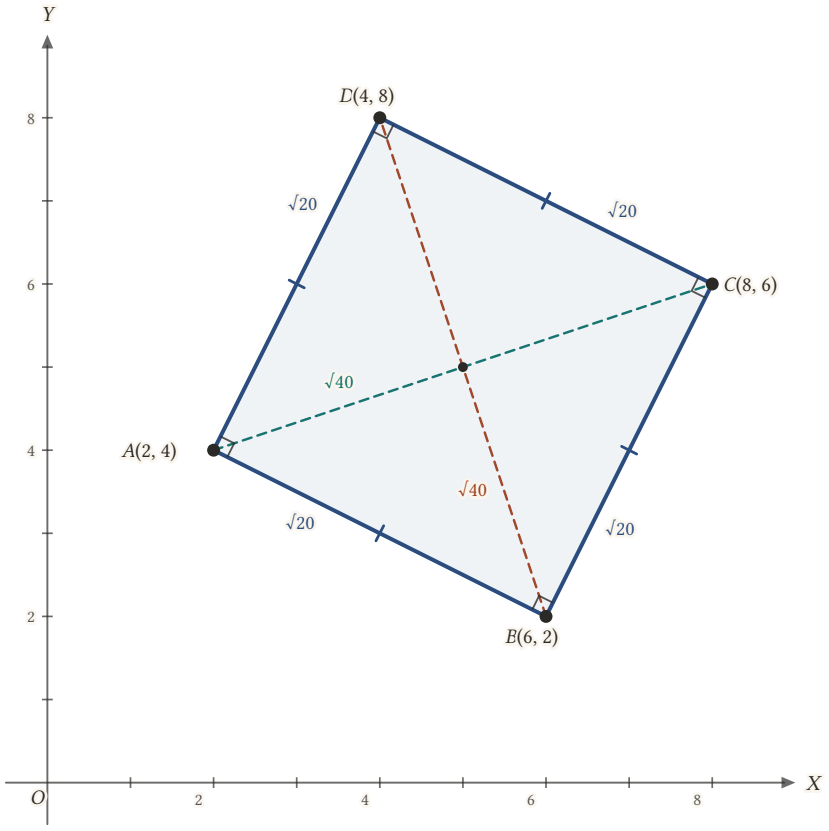
olduğundan

$$
\begin{aligned}
|\,AB\,|^2 + |\,BC\,|^2 &= 20+20 = 40 = |\,CA\,|^2 \quad \text{ve}\\
|\,CD\,|^2 + |\,DA\,|^2 &= 20+20 = 40 = |\,AC\,|^2\ .
\end{aligned}
$$

Yani ABC ve CDA üçgenleri ikizkenar dik üçgenlerdir ve $ABCD$ bir karedir. Öbür köşegenle de aynı sonuç çıkar:

$$
\begin{aligned}
|\,DB\,| &= \sqrt{(6-4)^2+(2-8)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40},\\
|\,BC\,|^2 + |\,CD\,|^2 &= 40 = |\,DB\,|^2 \quad \text{ve}\\
|\,DA\,|^2 + |\,AB\,|^2 &= 40 = |\,BD\,|^2,
\end{aligned}
$$

dolayısıyla BCD ve DAB üçgenleri de ikizkenar dik üçgenlerdir.



Şekil 1.35: Dört kenarı √20, köşegenleri √40 olan ve açıları dik olan $ABCD$ bir karedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 1.18 (Paralelkenar Dikdörtgen mi?). Köşeleri $A(-1,-5)$, $B(2,1)$, $C(1,5)$ ve $D(-2,-1)$ olan $ABCD$ paralelkenarı bir dikdörtgen midir? Neden?

Çözüm.
Dikdörtgen, bütün açıları dik olan paralelkenardır; bir paralelkenarda tek bir açının dik olması yeter. B açısına bakalım.
Uzaklıklarla. Kenar uzunluklarını daha önce bulmuştuk (bkz. Alıştırma 1.16): $|\,AB\,|^2 = 45$ ve $|\,BC\,|^2 = 17$. Köşegen:

$$|\,AC\,| = \sqrt{\big(\,1-(-1)\big)^2 + \big(\,5-(-5)\big)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104}.$$

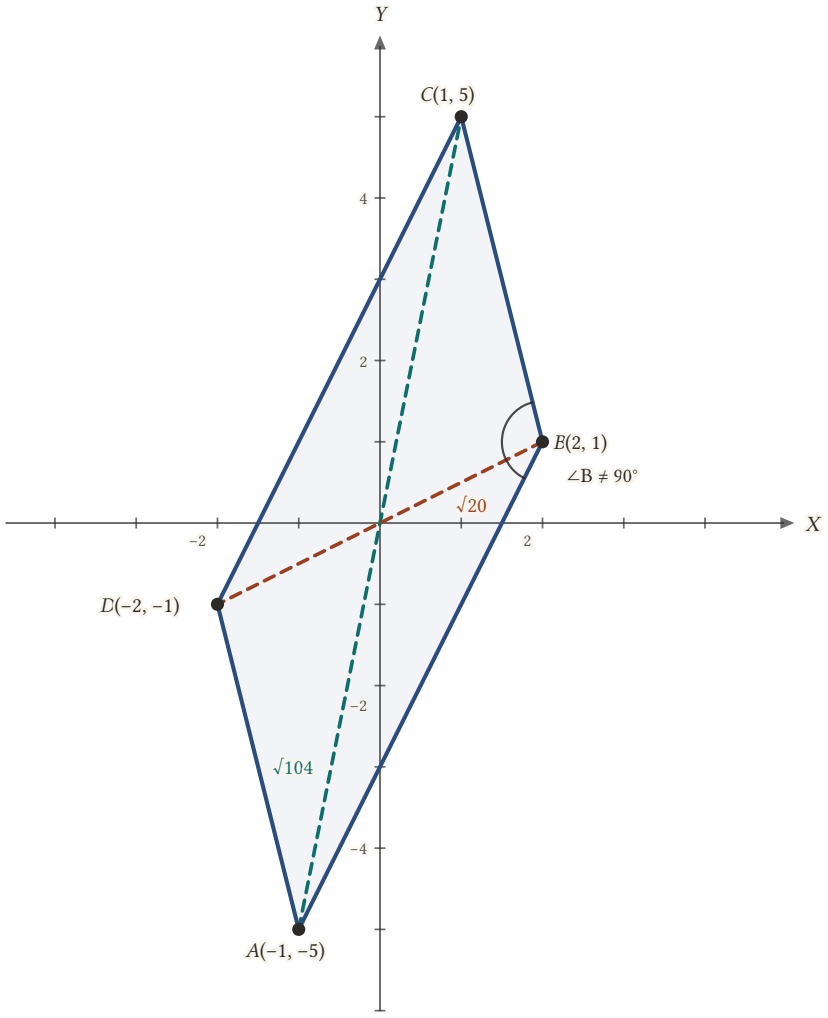
$$|\,AB\,|^2 + |\,BC\,|^2 = 45 + 17 = 62 \neq 104 = |\,AC\,|^2$$

olduğundan Pisagor bağıntısı sağlanmaz; B açısı dik değildir. Dolayısıyla $ABCD$ bir dikdörtgen değildir.
Eğimlerle. $m_{AB} = 2$ ve $m_{BC} = -4$ bulunmuştu; $m_{AB}\,m_{BC} = -8 \neq -1$ olduğundan AB ile BC dik değildir (diklik ölçütü için bkz. Alıştırma 1.13).
Köşegenlerle. Dikdörtgenin köşegenleri eşittir. Burada

$$|\,BD\,| = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} \neq \sqrt{104} = |\,AC\,|,$$

bu da aynı sonucu verir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 1.36: Köşegenler eşit değildir ($\sqrt{104} \neq \sqrt{20}$) ve B açısı dik değildir; $ABCD$ bir dikdörtgen değildir.

■

Alıştırma 1.19 (Orta Noktalarından Üçgenin Köşeleri: İkinci Üçgen). Kenarlarının orta noktaları $(3, 2)$, $(-1, -2)$ ve $(5, -4)$ olan $P_1P_2P_3$ üçgeninin köşelerinin koordinatlarını bulun.

Çözüm.
Köşeler $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ olsun ve orta noktalar sırasıyla P_1P_2, P_2P_3, P_1P_3 kenarlarına ait olsun. Orta nokta formülünden (bkz. Alıştırma 1.9) apsisler için

$$x_1 + x_2 = 6, \qquad x_2 + x_3 = -2, \qquad x_1 + x_3 = 10,$$

ordinatlar için

$$y_1 + y_2 = 4, \qquad y_2 + y_3 = -4, \qquad y_1 + y_3 = -8$$

elde ederiz.
Apsisler. Toplarsak

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = 6 - 2 + 10 = 14,$$

yani $x_1 + x_2 + x_3 = 7$. Buradan

$$x_3 = 7 - 6 = 1, \qquad x_1 = 7 - (-2) = 9, \qquad x_2 = 7 - 10 = -3.$$

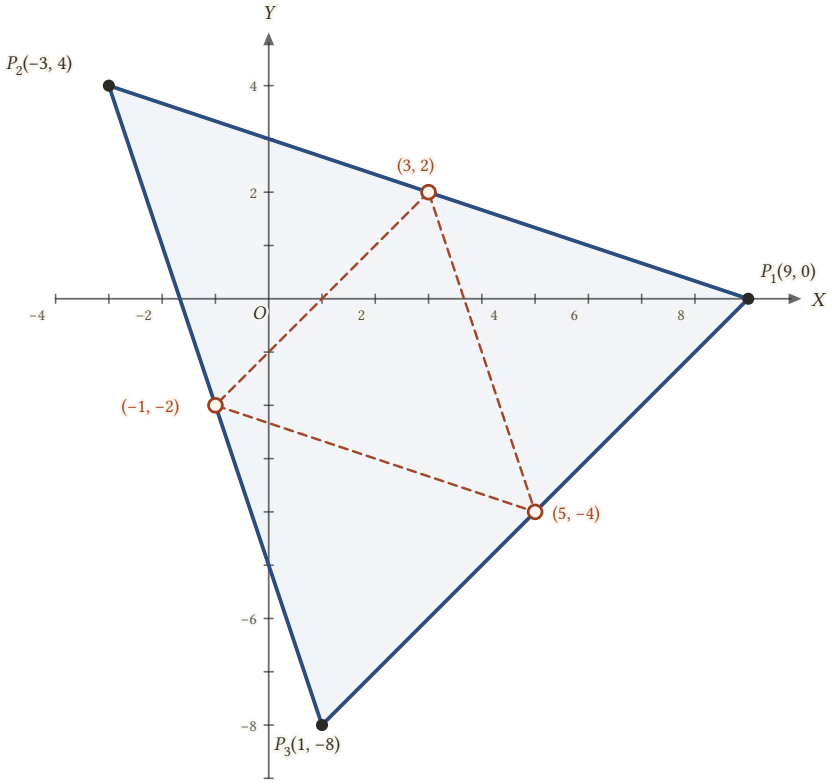
Ordinatlar. Toplarsak

$$2(y_1 + y_2 + y_3) = 4 - 4 - 8 = -8,$$

yani $y_1 + y_2 + y_3 = -4$. Buradan

$$y_3 = -4 - 4 = -8, \qquad y_1 = -4 - (-4) = 0, \qquad y_2 = -4 - (-8) = 4.$$

Köşeler $P_1(9, 0)$, $P_2(-3, 4)$ ve $P_3(1, -8)$'dir.
Denetim. P_1P_2'nin orta noktası $\left(\frac{9-3}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (3, 2)$, P_2P_3'ünkü $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{4-8}{2}\right) = (-1, -2)$, P_1P_3'ünkü $\left(\frac{9+1}{2}, \frac{0-8}{2}\right) = (5, -4)$.



Şekil 1.37: Kenar orta noktaları (3, 2), (−1, −2) ve (5, −4) olan üçgenin köşeleri $P_1(9, 0)$, $P_2(-3, 4)$ ve $P_3(1, -8)$'dir.

■

Bu bölümde düzlemin noktalarını koordinatlarla adlandırdık ve uzaklık formülüyle kenar uzunluklarını, dik açıları ve doğrusallığı hesapla tanımayı öğrendik. Alıştırmalarda kısaca kullandığımız orta nokta, ağırlık merkezi ve eğim kavramlarını bir sonraki bölümde, Bölme Oranı, Eğim ve Açı bölümünde, genel ve eksiksiz biçimde kuruyoruz.

 CC BY-NC-SA 4.0

2. Bölme Oranı, Eğim ve Açı

Önceki bölümde iki nokta arasındaki uzaklığı koordinatlarla hesaplamayı öğrendik (Dik Koordinatlar ve Uzaklık). Bu bölümde koordinatları üç yeni soru için kullanacağız: Bir doğru parçasını istenen oranda bölen nokta nerededir? Bir doğru ne kadar diktir? İki doğru birbirine göre hangi açıyla durur? Üç sorunun yanıtı da yalnızca toplama, çarpma ve bölme gerektiren kısa formüllerle verilecek.

2.1 Doğru Parçasını Verilen Oranda Bölme

Bir doğru parçasının orta noktası, parçayı iki eşit parçaya böler. Bu fikri genelleştirip parçayı $2:1$, $3:7$ gibi herhangi bir oranda bölen noktayı arayacağız. Nokta parçanın dışında da olabilir; bu durumu oranın işaretiyle ayırt edeceğiz.

Tanım 2.1 (Bölünme Noktası ve Bölme Oranı). $P_1(x_1, y_1)$ ile $P_2(x_2, y_2)$ düzlemde iki farklı nokta ve $P(x, y)$, P_1P_2 doğrusu üzerinde P_2'den farklı bir nokta olsun. P_1P_2 doğru parçası P_1'den P_2'ye yönlenmiş olarak düşünülür.

- P_1'den P'ye ve P'den P_2'ye yönlenmeler aynı yöndeyse $r = \dfrac{\mid P_1P \mid}{\mid PP_2 \mid}$,
- bu yönlenmeler zıt yöndeyse $r = -\dfrac{\mid P_1P \mid}{\mid PP_2 \mid}$,
- $P = P_1$ ise $r = 0$

sayısına P noktasının P_1P_2 doğru parçasını **bölme oranı**, P noktasına da P_1P_2 doğru parçasını r oranında bölen **bölünme noktası** denir.

Yani r'nin mutlak değeri, P'nin P_1'e olan uzaklığının P_2'ye olan uzaklığına oranıdır; işareti de P'nin parçanın içinde mi dışında mı olduğunu söyler. Örneğin $r = 2$ ise P, P_1 ile P_2 arasındadır ve P_1'e, P_2'ye olduğundan iki kat uzaktır.
Oranın işaretinin neyi söylediğini önce ayrıntılı görelim.

Önerme 2.1 (Bölme Oranının İşareti). *P, P_1P_2 doğru parçasını r oranında bölsün.*

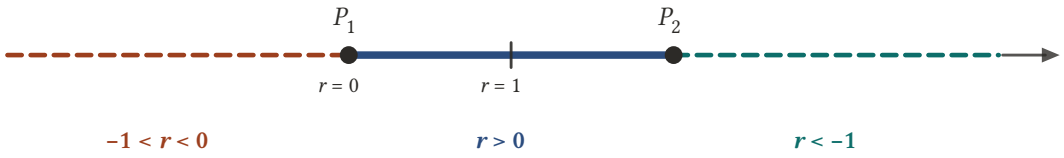
- *P, P_1 ile P_2 arasındaysa $r > 0$'dır.*
- *P, parçanın P_1 tarafındaki uzantısı üzerindeyse $-1 < r < 0$'dır.*
- *P, parçanın P_2 tarafındaki uzantısı üzerindeyse $r < -1$'dir.*

Özellikle hiçbir bölünme noktası için $r = -1$ olamaz.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: parçanın içi.*** *P, P_1 ile P_2 arasındaysa P_1'den P'ye ve P'den P_2'ye giderken aynı yönde ilerleriz. Tanıma göre $r = \mid P_1P \mid / \mid PP_2 \mid > 0$ olur.*
> ***Adım 2: parçanın dışı.*** *P parçanın dışındaysa, yani P_1'den ya da P_2'den uzatılarak elde edilen doğru parçası üzerindeyse, P_1'den P'ye ve P'den P_2'ye yönlenmeler zıt yönlüdür. Tanıma göre $r < 0$ olur.*
> ***Adım 3: P_1 tarafı.*** *P, P_1 tarafındaki uzantıdaysa P_1 noktası P ile P_2 arasında kalır. Bu yüzden*
>
> $$\mid PP_2 \mid = \mid PP_1 \mid + \mid P_1P_2 \mid > \mid P_1P \mid$$
>
> *ve $\mid r \mid = \mid P_1P \mid / \mid PP_2 \mid < 1$ olur. Adım 2 ile birlikte $-1 < r < 0$ bulunur.*
> ***Adım 4: P_2 tarafı.*** *P, P_2 tarafındaki uzantıdaysa P_2 noktası P_1 ile P arasında kalır. Bu yüzden*
>
> $$\mid P_1P \mid = \mid P_1P_2 \mid + \mid P_2P \mid > \mid PP_2 \mid$$
>
> *ve $\mid r \mid > 1$ olur. Adım 2 ile birlikte $r < -1$ bulunur.*
> ***Adım 5.*** *$P = P_1$ için tanım gereği $r = 0$'dır. Böylece doğru üzerindeki her bölünme noktası yukarıdaki durumlardan birine düşer ve hiçbirinde $r = -1$ çıkmaz. $r = -1$, $\mid P_1P \mid = \mid PP_2 \mid$ olacak biçimde par-*

 CC BY-NC-SA 4.0

çanın dışında bir nokta demek olurdu; böyle bir nokta ise P_1 ile P_2'ye eşit uzaklıkta olduğundan parçanın orta noktasıdır, yani dışarıda değildir.



Şekil 2.1: Bölme oranının işareti, bölünme noktasının P_1P_2 doğrusu üzerindeki yerine göre değişir: parçanın içinde $r > 0$, P_1 tarafındaki uzantıda $-1 < r < 0$, P_2 tarafındaki uzantıda $r < -1$. P_1 noktasında $r = 0$, orta noktada $r = 1$'dir; $r = -1$ değeri hiçbir noktaya karşılık gelmez.

■

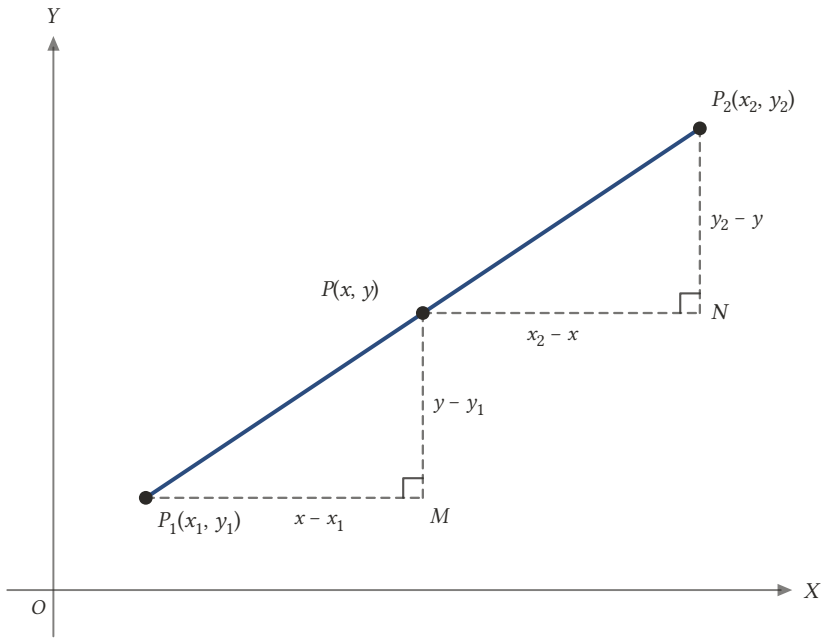
Şimdi bölünme noktasının koordinatlarını uç noktaların koordinatları ve r cinsinden bulalım.

Teorem 2.1 (Bölünme Noktasının Koordinatları). *$P(x, y)$ noktası, uç noktaları $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ olan doğru parçasını r oranında bölüyorsa*

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \qquad \text{ve} \qquad y = \frac{y_1 + ry_2}{1 + r}$$

olur.

İspat.
Önerme 2.1 gereği $r \neq -1$'dir; bu yüzden paydalar sıfır olmaz.
Adım 1: şekildeki durum. *Önce P'nin P_1 ile P_2 arasında olduğu ve $x_1 < x < x_2$, $y_1 < y < y_2$ sağlandığı durumu ele alalım. P_1'den geçen yatay doğru ile P'den geçen düşey doğru $M(x, y_1)$ noktasında, P'den geçen yatay doğru ile P_2'den geçen düşey doğru da $N(x_2, y)$ noktasında kesişsin. Böylece M ve N köşelerinde dik açılı P_1MP ve PNP_2 üçgenleri elde edilir.*



Şekil 2.2: P_1MP ve PNP_2 dik üçgenleri benzerdir; yatay kenarlarının oranı da düşey kenarlarının oranı da $|P_1P| / |PP_2| = r$ oranına eşittir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: benzerlik. *P_1M ile PN yatay olduğundan birbirine paraleldir; P_1P_2 doğrusu bu iki paraleli kestiği için P_1 ve P köşelerindeki açılar yöndeş açılardır ve eşittir. İki üçgenin de birer dik açısı olduğundan P_1MP ve PNP_2 üçgenleri benzerdir. Karşılıklı kenarların oranı eşit olduğundan*

$$\frac{|\ P_1M\ |}{|\ PN\ |} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{|\ P_1P\ |}{|\ PP_2\ |} = r$$

bulunur. Aynı benzerlikten düşey kenarlar için de

$$\frac{|\ MP\ |}{|\ NP_2\ |} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{|\ P_1P\ |}{|\ PP_2\ |} = r$$

elde edilir.
Adım 3: x'i çekmek. *İlk eşitlik $x - x_1 = r(x_2 - x)$ demektir. Terimleri düzenleyelim:*

$$x + rx = x_1 + rx_2 \quad \Rightarrow \quad x(1 + r) = x_1 + rx_2.$$

$1 + r \neq 0$ olduğundan her iki yanı $1 + r$'ye bölerek $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$ bulunur. İkinci eşitlikten aynı adımlarla $y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}$ elde edilir.
Adım 4: diğer konumlar. *Parça sola doğru ya da aşağı doğru ilerliyorsa, ya da P parçanın dışındaysa, aynı yardımcı dik üçgenler yine kurulur ve benzerlik bu kez uzunluklar için*

$$|\ x - x_1\ | = |\ r\ |\,|\ x_2 - x\ |, \qquad |\ y - y_1\ | = |\ r\ |\,|\ y_2 - y\ |$$

verir. P_1, P, P_2'den geçen düşey doğrular X-eksenini bu noktaların doğru üzerindeki sırasıyla keser; bu yüzden P parçanın içindeyse x sayısı x_1 ile x_2 arasındadır ve $x - x_1$ ile $x_2 - x$ aynı işaretlidir, dışındaysa zıt işaretlidir. Bu işaret Önerme 2.1 gereği r'nin işaretiyle aynı olduğundan yine $x - x_1 = r(x_2 - x)$ olur. Aynı akıl yürütme y için de geçerlidir. Parça yatay ya da düşeyse üçgenler bozulur, ama o zaman sabit kalan koordinatta eşitlik $0 = 0$ biçiminde kendiliğinden sağlanır, diğer koordinatta da uzaklıklar doğrudan koordinat farklarıdır. Her durumda Adım 3'teki hesap aynen işler.
■

Yani bölünme noktasının her koordinatı, uç noktaların karşılık gelen koordinatlarının 1 ve r ağırlıklı ortalamasıdır. En tanıdık özel durum orta noktadır.

Sonuç 2.1 (Orta Nokta Formülü). *Uç noktaları $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ olan doğru parçasının orta noktası*

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

noktasıdır.

İspat.
Orta nokta M, P_1 ile P_2 arasındadır ve $|\ P_1M\ | = |\ MP_2\ |$ sağlar. Tanıma göre bölme oranı $r = 1$'dir. Teorem 2.1 içinde $r = 1$ yazarsak

$$x = \frac{x_1 + 1 \cdot x_2}{1 + 1} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

bulunur.
■

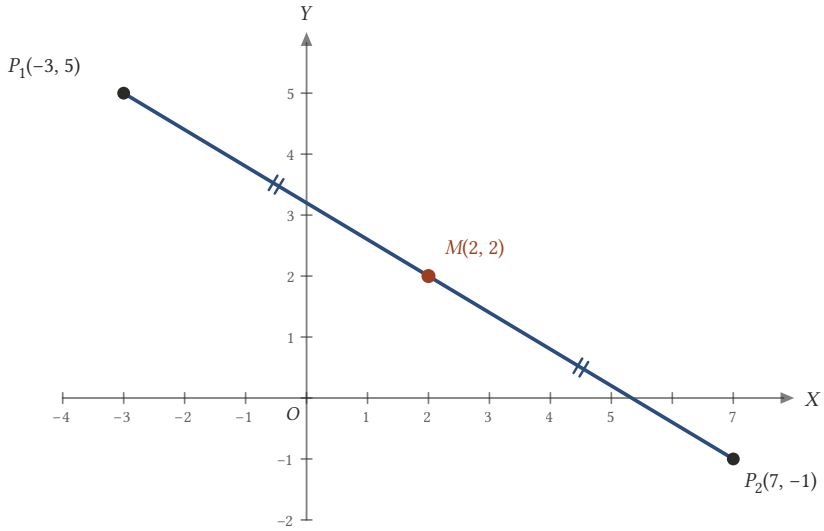
Örnek 2.1 (Bir Parçanın Orta Noktası). Uç noktaları $P_1(-3, 5)$ ve $P_2(7, -1)$ olan doğru parçasının orta noktasını bulunuz.

Çözüm.
Sonuç 2.1 ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x = \frac{-3+7}{2} = \frac{4}{2} = 2, \qquad y = \frac{5+(-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

bulunur. Orta nokta $M(2,2)$'dir.



Şekil 2.3: $P_1(-3, 5)$ ve $P_2(7, -1)$ uç noktalı parçanın orta noktası $M(2, 2)$; çift çentikler $|P_1M| = |MP_2|$ eşitliğini gösterir.

■

Orta nokta formülünü bölme formülüyle birleştirerek üçgenin ağırlık merkezinin koordinatlarını da bulabiliriz.

Tanım 2.2 (Kenarortay ve Ağırlık Merkezi). Bir üçgende bir köşeyi karşı kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçasına o köşeden çıkan **kenarortay** denir. Üçgenin üç kenarortayının ortak noktasına üçgenin **ağırlık merkezi** denir.

Yani her üçgenin üç kenarortayı vardır; bunların gerçekten tek bir noktada buluştuğunu aşağıdaki önerme koordinatlarla gösterir.

Önerme 2.2 (Ağırlık Merkezinin Koordinatları). *Köşeleri $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ve $P_3(x_3, y_3)$ olan üçgenin her kenarortayını köşeden itibaren 2 oranında bölen nokta, üç kenarortay için de aynı noktadır:*

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

Dolayısıyla kenarortaylar G noktasında kesişir ve G üçgenin ağırlık merkezidir.

İspat.
Adım 1: kenarortayın ucu. *P_1 köşesinden çıkan kenarortay, P_2P_3 kenarının orta noktasında biter. Sonuç 2.1 ile bu nokta*

$$M_1\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

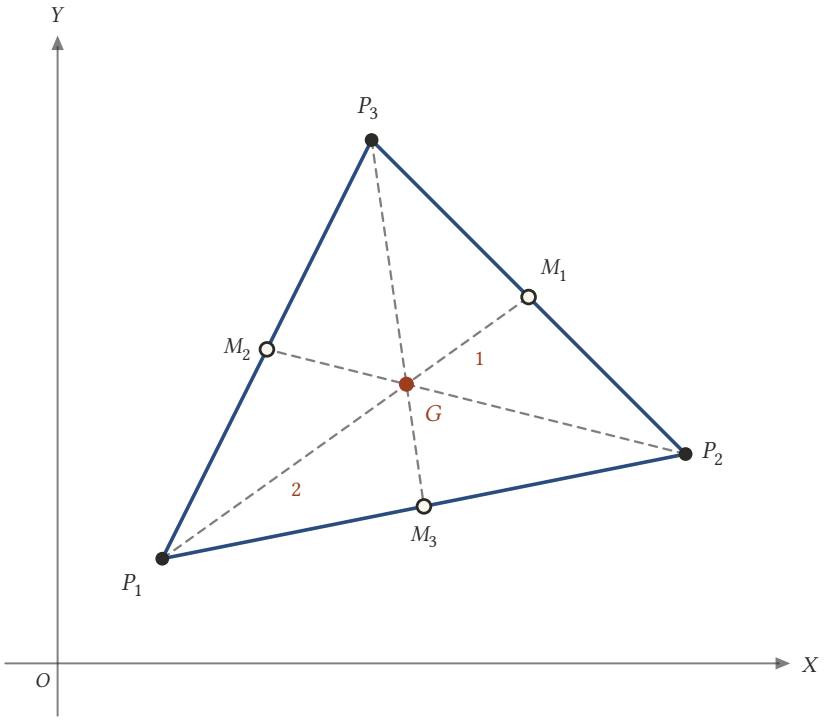
olur.
Adım 2: 2 oranında bölmek. *P_1M_1 parçasını $r = 2$ oranında bölen noktanın apsisi Teorem 2.1 ile*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x = \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_2+x_3}{2}}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

olur. Aynı hesap ordinat için $y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$ *verir.*

Adım 3: simetri. *Bulunan koordinatlar* P_1, P_2, P_3*'ün sırasından bağımsızdır: indisleri değiştirmek toplamları değiştirmez. Bu yüzden* P_2*'den ve* P_3*'ten çıkan kenarortayları* 2 *oranında bölen noktalar da aynı* G *noktasıdır.* G *üç kenarortayın üzerinde olduğundan kenarortaylar* G*'de kesişir.*



Şekil 2.4: Üç kenarortay P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 *aynı* G *noktasından geçer;* G *her kenarortayı köşeden itibaren* $2:1$ *oranında böler.*

■

Örnek 2.2 (Bir Üçgenin Ağırlık Merkezi). Köşeleri $A(2,1)$, $B(6,3)$ ve $C(1,8)$ olan üçgenin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm.
Kısa yol. Önerme 2.2 ile

$$G\left(\frac{2+6+1}{3}, \frac{1+3+8}{3}\right) = G\left(\frac{9}{3}, \frac{12}{3}\right) = G(3,4)$$

bulunur.
Kenarortay üzerinden denetim. BC kenarının orta noktası

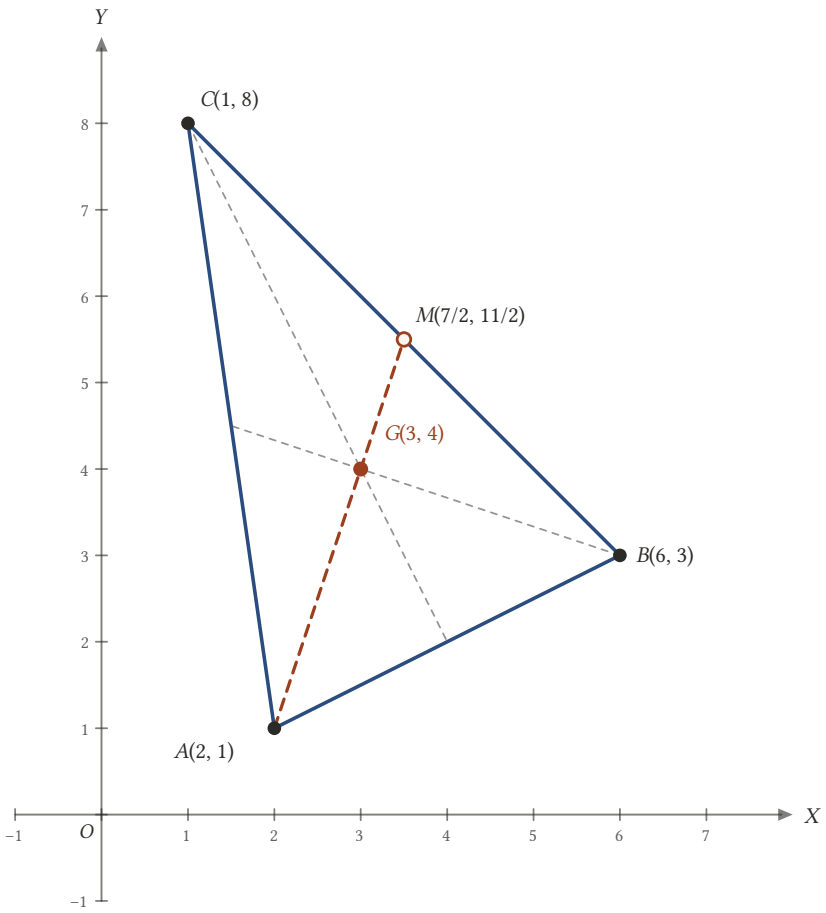
$$M\left(\frac{6+1}{2}, \frac{3+8}{2}\right) = M\left(\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

dir. AM kenarortayını $r = 2$ oranında bölen noktanın koordinatları

$$x = \frac{2 + 2 \cdot \frac{7}{2}}{3} = \frac{9}{3} = 3, \qquad y = \frac{1 + 2 \cdot \frac{11}{2}}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur; yine $G(3,4)$ çıkar.



Şekil 2.5: $A(2,1)$, $B(6,3)$, $C(1,8)$ üçgeninin ağırlık merkezi $G(3,4)$. Turuncu AM kenarortayı G tarafından $2:1$ oranında bölünür; diğer iki kenarortay da G'den geçer.

■

Aşağıdaki dört örnekte Teorem 2.1 doğrudan uygulanır; oranın işaretine göre noktanın parçanın içinde mi dışında mı olduğuna da dikkat edeceğiz.

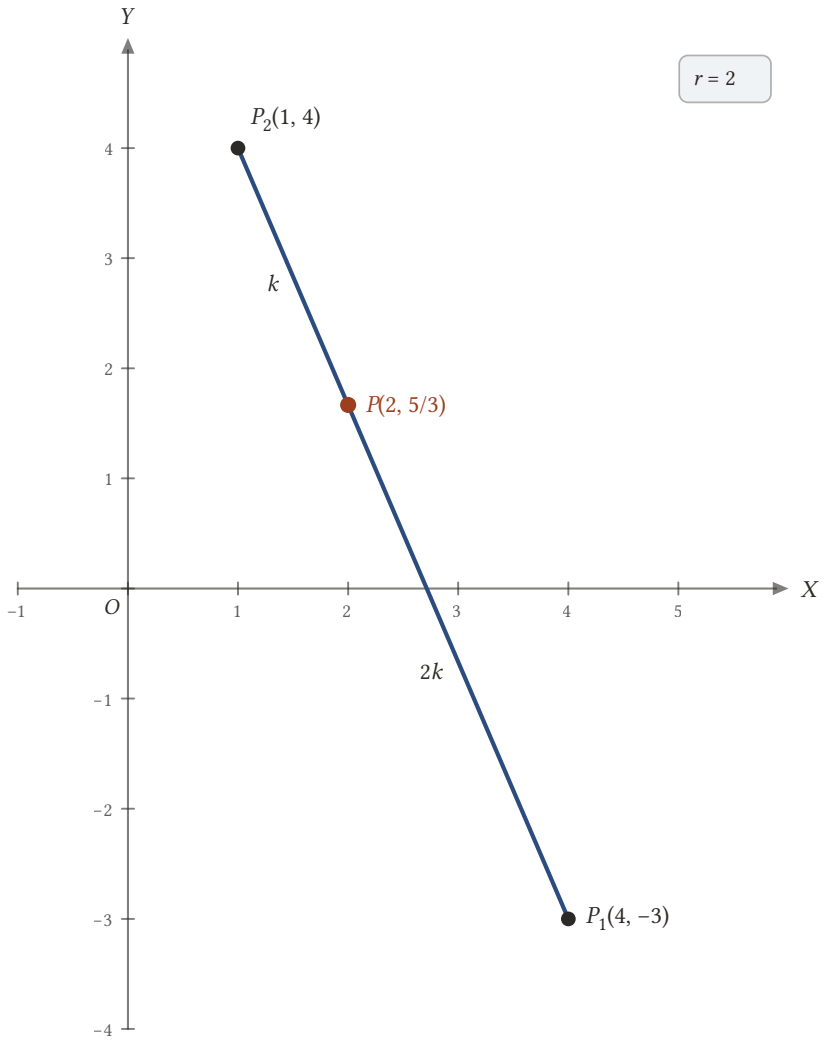
Örnek 2.3 (Parçanın İçinde Bir Bölünme Noktası). $P_1(4,-3)$ ve $P_2(1,4)$ uç noktalı doğru parçasını $r=2$ oranında bölen $P(x,y)$ noktasını bulunuz.

Çözüm.
Teorem 2.1 ile

$$x=\frac{4+2\cdot 1}{1+2}=\frac{6}{3}=2, \qquad y=\frac{-3+2\cdot 4}{1+2}=\frac{5}{3}$$

bulunur. Aranan nokta $P\left(2,\frac{5}{3}\right)$'tür. $r=2>0$ olduğundan P parçanın içindedir ve P_1'e, P_2'ye olduğundan iki kat uzaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.6: $P_1(4,-3)$ ve $P_2(1,4)$ uç noktalı parçayı $r=2$ oranında bölen nokta $P(2,5/3)$; $|P_1P|$, $|PP_2|$ uzunluğunun iki katıdır.

■

Örnek 2.4 (Parçanın Başlangıç Tarafında Bir Bölünme Noktası). $P_1(0,3)$ ve $P_2(7,4)$ uç noktalı doğru parçasını $r=-\frac{2}{7}$ oranında bölen $P(x,y)$ noktasını bulunuz.

Çözüm.
Önce payda: $1+r=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$. Teorem 2.1 ile

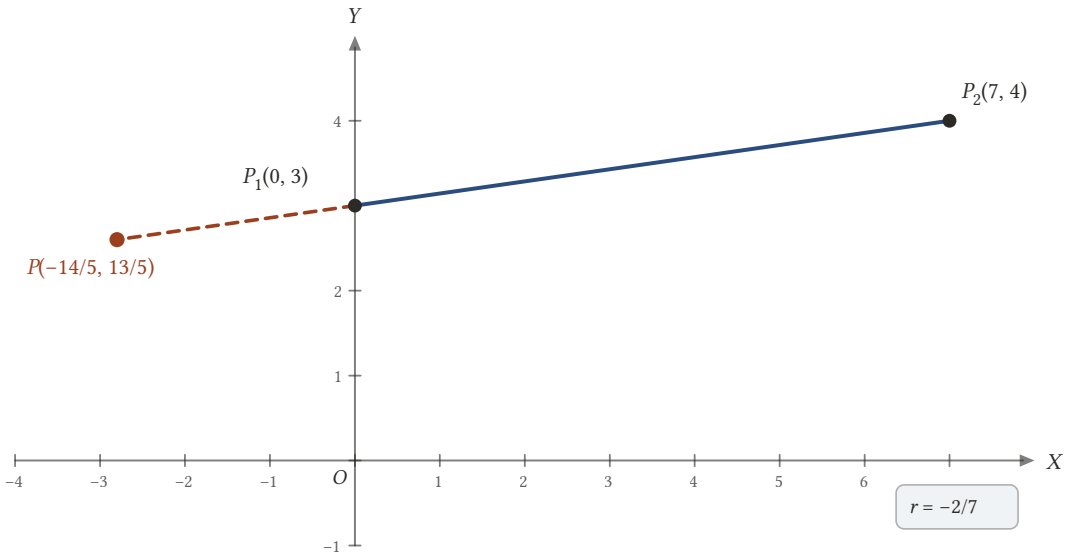
$$x=\frac{0+\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 7}{\frac{5}{7}}=\frac{-2}{\frac{5}{7}}=-\frac{14}{5}$$

ve

$$y=\frac{3+\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 4}{\frac{5}{7}}=\frac{\frac{13}{7}}{\frac{5}{7}}=\frac{13}{5}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Aranan nokta $P\left(-\frac{14}{5}, \frac{13}{5}\right)$'tir. $-1 < r < 0$ olduğundan Önerme 2.1 gereği P, parçanın P_1 tarafındaki uzantısı üzerindedir; gerçekten $x = -\frac{14}{5} < 0 = x_1$'dir.



Şekil 2.7: $r = -2/7$ için bölünme noktası $P(-14/5, 13/5)$, parçanın P_1 tarafındaki uzantısı (kesikli) üzerindedir.

■

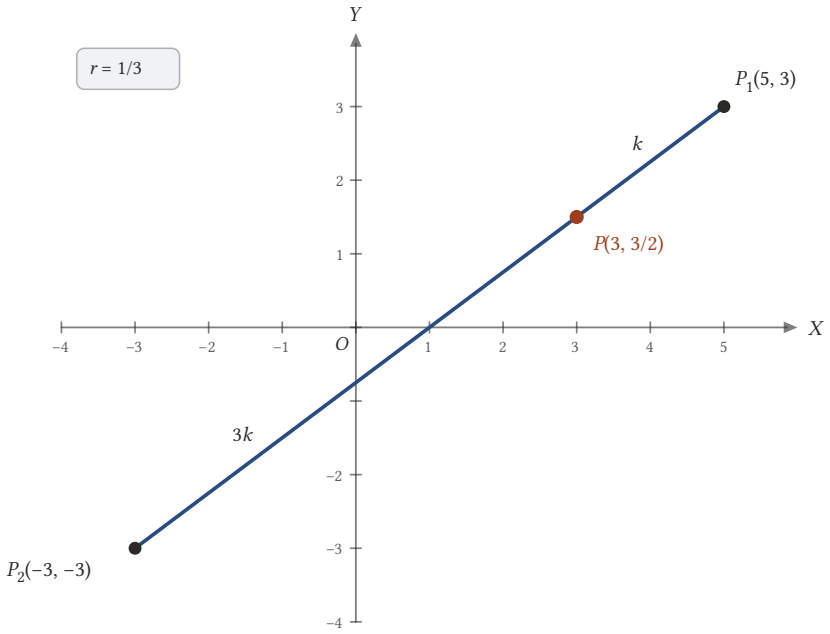
Örnek 2.5 (Oran Üçte Bir Olduğunda). $P_1(5, 3)$ ve $P_2(-3, -3)$ uç noktalı doğru parçasını $r = \frac{1}{3}$ oranında bölen $P(x, y)$ noktasını bulunuz.

Çözüm.
Payda $1 + r = \frac{4}{3}$'tür. Teorem 2.1 ile

$$x = \frac{5 + \frac{1}{3} \cdot (-3)}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{4}}{3} = 3, \qquad y = \frac{3 + \frac{1}{3} \cdot (-3)}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{2}{4}}{3} = \frac{3}{2}$$

bulunur. Aranan nokta $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$'dir. $r > 0$ olduğundan P parçanın içindedir ve P_2'ye, P_1'e olduğundan üç kat uzaktır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.8: $P_1(5, 3)$ ve $P_2(-3, -3)$ uç noktalı parçayı $r = 1/3$ oranında bölen nokta $P(3, 3/2)$; P, P_2'ye P_1'e olduğundan üç kat uzaktır.

■

Örnek 2.6 (Parçanın Bitiş Tarafında Bir Bölünme Noktası). $P_1(-5, 2)$ ve $P_2(1, 4)$ uç noktalı doğru parçasını $r = -\frac{5}{3}$ oranında bölen $P(x, y)$ noktasını bulunuz.

Çözüm.
Payda $1 + r = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$'tür. Teorem 2.1 ile

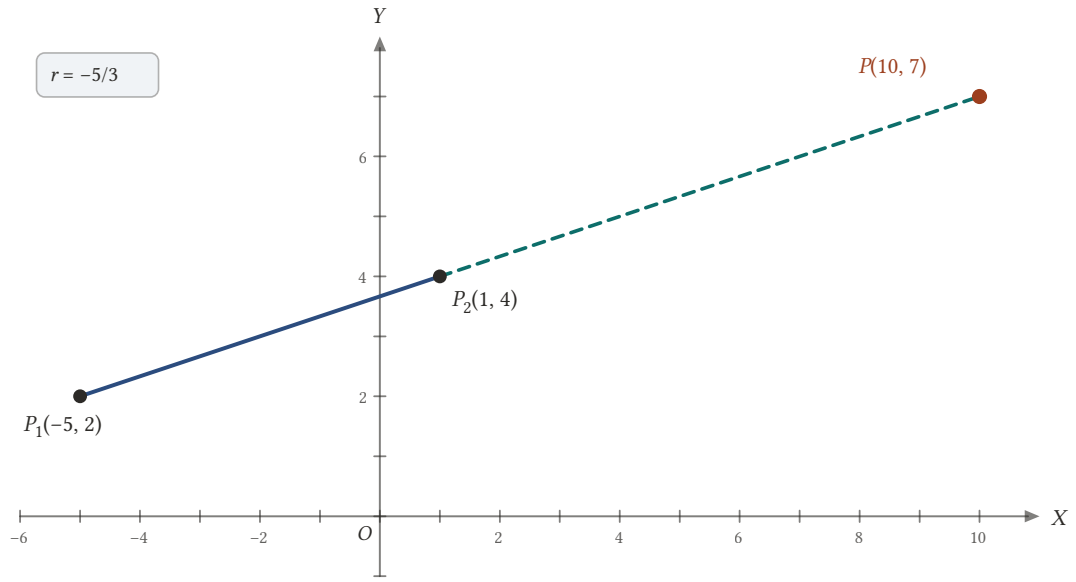
$$x = \frac{-5 + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{20}{3}}{-\frac{2}{3}} = 10$$

ve

$$y = \frac{2 + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 4}{-\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{14}{3}}{-\frac{2}{3}} = 7$$

bulunur. Aranan nokta $P(10, 7)$'dir. $r < -1$ olduğundan Önerme 2.1 gereği P, parçanın P_2 tarafındaki uzantısı üzerindedir; gerçekten $x = 10 > 1 = x_2$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.9: $r = -5/3$ için bölünme noktası $P(10, 7)$, parçanın P_2 tarafındaki uzantısı (kesikli) üzerindedir.

■

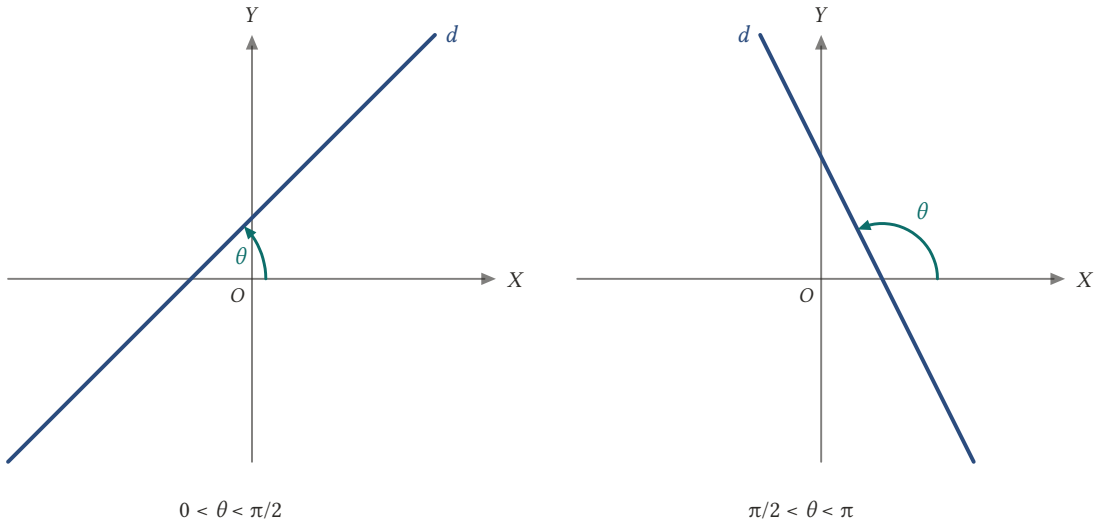
2.2 Eğim Açısı ve Eğim

Bir doğrunun ne kadar dik yükseldiğini ya da alçaldığını tek bir sayıyla ölçmek istiyoruz. Bunun için doğrunun X-ekseniyle yaptığı açıyı ve bu açının tanjantını kullanacağız. Açıları her zaman pozitif yönde, yani saat yönünün tersine ölçüyoruz (Dik Koordinatlar ve Uzaklık).

Tanım 2.3 (Eğim Açısı). Düzlemde bir d doğrusu verilsin. d'nin X-ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açıya, yani X-ekseninin pozitif yönünden başlayıp saat yönünün tersine d'ye kadar ölçülen $\theta \in [0, \pi)$ açısına d doğrusunun **eğim açısı** denir. X-eksenine paralel doğruların eğim açısı 0'dır.

Yani eğim açısı, doğrunun X-eksenine göre ne kadar döndüğünü söyler: sağa doğru yükselen doğrularda $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, sağa doğru alçalan doğrularda $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, düşey doğrularda $\theta = \frac{\pi}{2}$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.10: Eğim açısı θ, X-ekseninin pozitif yönünden doğruya saat yönünün tersine ölçülür. Solda sağa doğru yükselen doğru ($0 < \theta < \pi/2$), sağda sağa doğru alçalan doğru ($\pi/2 < \theta < \pi$).

Tanım 2.4 (Eğim). Eğim açısı $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ olan bir d doğrusu için $m = \tan\theta$ sayısına d doğrusunun **eğimi** denir. Düşey doğruların ($\theta = \frac{\pi}{2}$) eğimi tanımsızdır.

Yani eğim, doğrunun dikliğini ölçen sayıdır: yatay doğrunun eğimi $\tan 0 = 0$'dır, sağa doğru yükselen doğruların eğimi pozitif, alçalanlarınki negatiftir; doğru düşeye yaklaştıkça eğimin mutlak değeri büyür. tan fonksiyonu $[0, \pi)$ aralığında $\frac{\pi}{2}$ dışında bire bir olduğundan eğim, düşey olmayan bir doğrunun eğim açısını tek türlü belirler.
Eğimi hesaplamak için açıyı ölçmemiz gerekmez; doğru üzerindeki iki noktanın koordinatları yeterlidir.

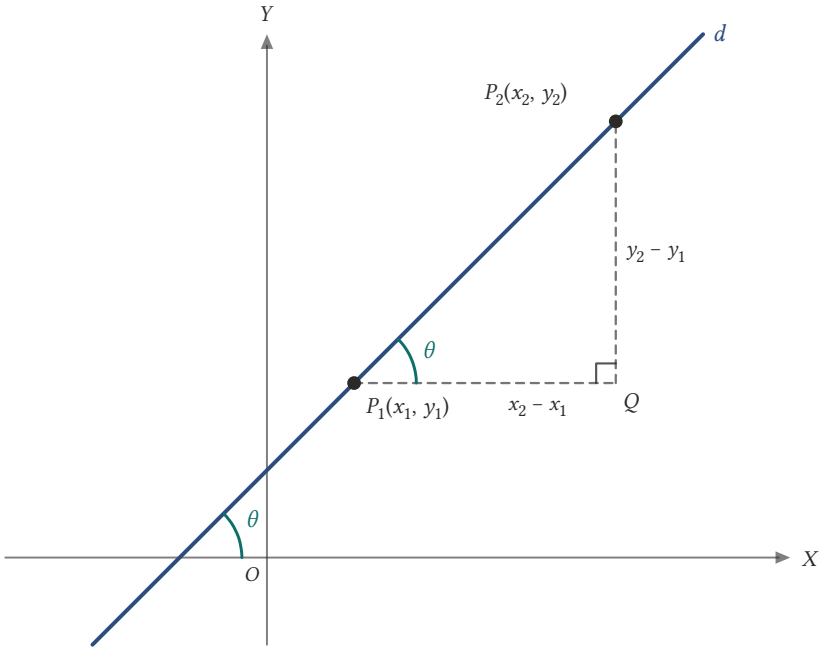
Teorem 2.2 (İki Noktası Verilen Doğrunun Eğimi). *$P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktalarından geçen, eğim açısı θ olan bir d doğrusu verilsin. $x_1 \neq x_2$ ise d'nin eğimi*

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

olur. $x_1 = x_2$ ise d düşeydir ve eğimi tanımsızdır.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: sıralama.*** *Noktaların adlarını değiştirmek kesrin hem payının hem paydasının işaretini değiştirir, kesri değiştirmez. Bu yüzden $x_1 < x_2$ olduğunu varsayabiliriz. $x_1 = x_2$ ise iki nokta aynı düşey doğru üzerindedir, $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve eğim tanımsızdır.*
> ***Adım 2: yardımcı dik üçgen.*** *P_1'den geçen yatay doğru ile P_2'den geçen düşey doğru $Q(x_2, y_1)$ noktasında kesişir. $\mid P_1Q \mid = x_2 - x_1 > 0$ ve $\mid QP_2 \mid = \mid y_2 - y_1 \mid$'dir. $y_1 = y_2$ ise d yataydır, $\theta = 0$ ve $m = 0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur. Bundan sonra $y_1 \neq y_2$ alalım; P_1QP_2 üçgeni Q köşesinde dik açılıdır.*
> ***Adım 3: dar eğim açısı.*** *$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ise doğru sağa doğru yükselir ve $y_2 > y_1$ olur. P_1Q, X-eksenine paralel olduğundan d'nin P_1Q ile yaptığı açı, X-ekseniyle yaptığı açıya yöndeş açıdır: P_1 köşesindeki açı θ'dır. Dik üçgende tanjant, karşı dik kenarın komşu dik kenara oranı olduğundan*
>
> $$\tan\theta = \frac{\mid QP_2 \mid}{\mid P_1Q \mid} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
>
> *bulunur.*

 CC BY-NC-SA 4.0



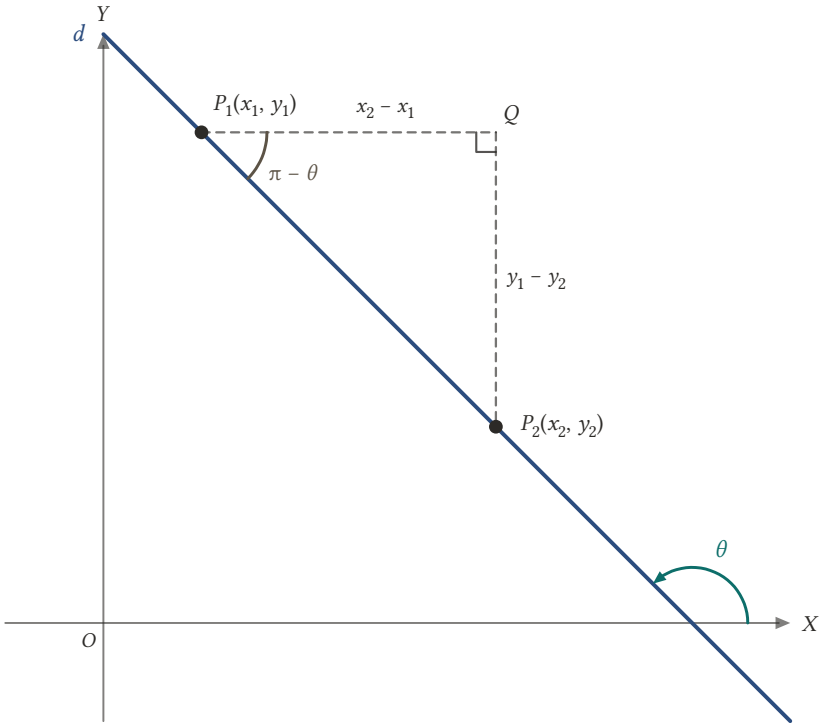
Şekil 2.11: Dar eğim açısında P_1QP_2 *dik üçgeninin* P_1 *köşesindeki açı* θ*'dır (yöndeş açı); bu yüzden tan* $\theta = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$.

Adım 4: geniş eğim açısı. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ *ise doğru sağa doğru alçalır ve* $y_2 < y_1$ *olur. Bu kez* P_1 *köşesindeki iç açı,* θ*'nın bütünleridir, yani* $\pi - \theta$*'dır. Dik üçgenden*

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{|\, QP_2 \,|}{|\, P_1Q \,|} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$$

bulunur. $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ *olduğundan her iki yan* -1 *ile çarpılırsa* $\tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *elde edilir.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.12: Geniş eğim açısında P_1QP_2 üçgeninin P_1 köşesindeki iç açı $\pi - \theta$'dır; $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ olduğundan formül yine aynı çıkar.

■

Yani eğim, "düşey değişimin yatay değişime oranıdır": doğru üzerinde sağa doğru 1 birim gidildiğinde yükseklik m birim değişir.

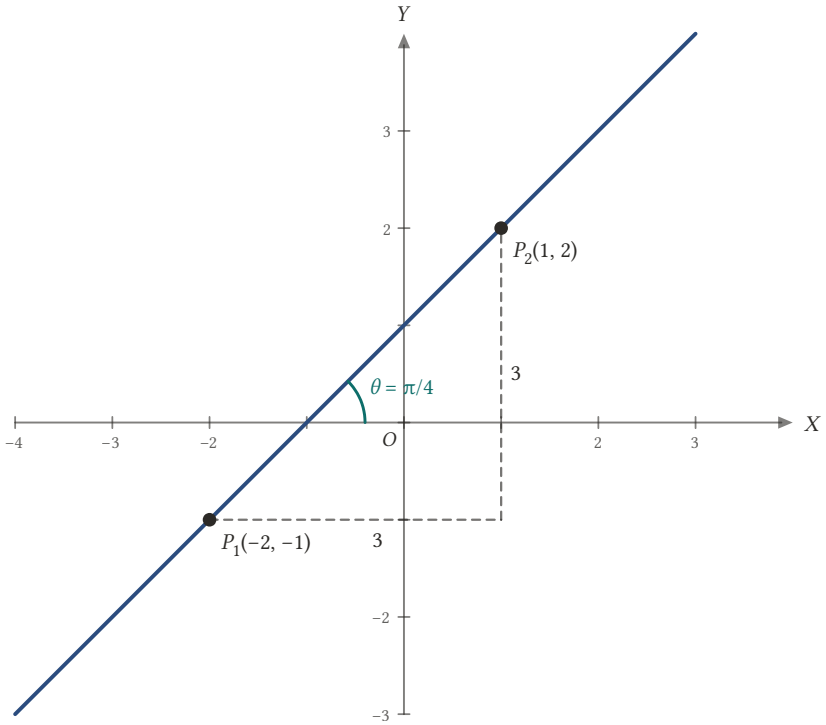
Örnek 2.7 (Sağa Doğru Yükselen Bir Doğru). $P_1(-2,-1)$ ve $P_2(1,2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini ve eğim açısını bulunuz.

Çözüm.
Teorem 2.2 ile

$$m = \frac{2-(-1)}{1-(-2)} = \frac{3}{3} = 1$$

bulunur. $\tan\theta = 1$ ve $\theta \in [0, \pi)$ olduğundan $\theta = \frac{\pi}{4}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.13: $P_1(-2, -1)$ ve $P_2(1, 2)$'den geçen doğruda yatay ve düşey değişim 3'er birimdir; eğim 1, eğim açısı $\pi/4$'tür.

■

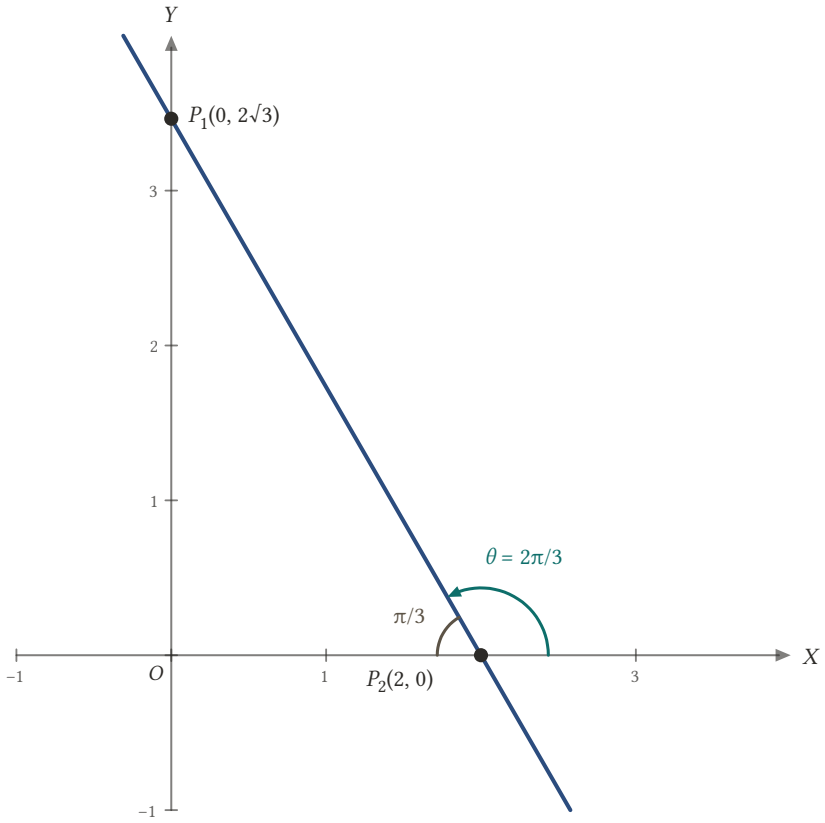
Örnek 2.8 (Sağa Doğru Alçalan Bir Doğru). $P_1(0, 2\sqrt{3})$ ve $P_2(2, 0)$ noktalarından geçen doğrunun eğimini ve eğim açısını bulunuz.

Çözüm.
Teorem 2.2 ile

$$m = \frac{0 - 2\sqrt{3}}{2 - 0} = -\sqrt{3}$$

bulunur. $\tan\theta = -\sqrt{3}$ negatif olduğundan θ geniş açıdır. $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ ve $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ olduğundan $\pi - \theta = \frac{\pi}{3}$, yani $\theta = \frac{2\pi}{3}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



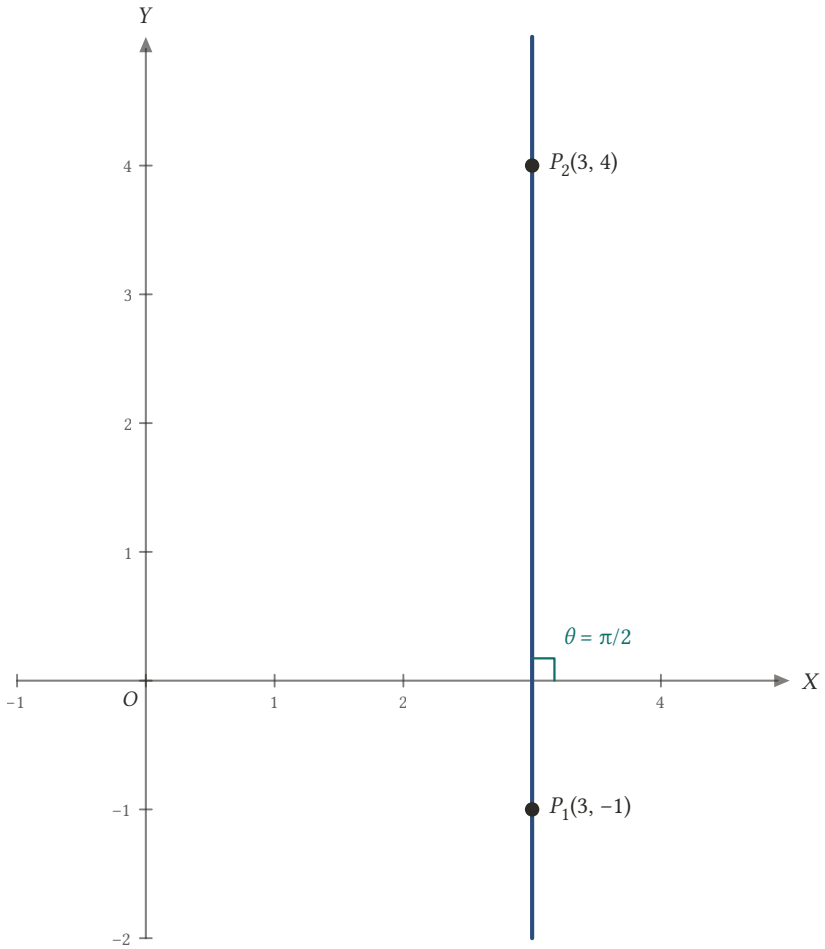
Şekil 2.14: $P_1(0, 2\sqrt{3})$ ve $P_2(2, 0)$'dan geçen doğrunun eğimi $-\sqrt{3}$'tür; doğru X-ekseninin negatif yönüyle $\pi/3$'lük açı yapar, eğim açısı $\theta = 2\pi/3$'tür.

■

Örnek 2.9 (Düşey Bir Doğru). $P_1(3, -1)$ ve $P_2(3, 4)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi hakkında ne söylenebilir?

Çözüm.
İki noktanın apsisi eşittir: $x_1 = x_2 = 3$. Kesrin paydası $x_2 - x_1 = 0$ olduğundan formül kullanılamaz. Teorem 2.2 gereği doğru düşeydir, eğim açısı $\theta = \frac{\pi}{2}$'dir ve eğimi tanımsızdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.15: $P_1(3, -1)$ ve $P_2(3, 4)$'ten geçen doğru düşeydir: eğim açısı $\pi/2$, eğimi tanımsızdır.

■

Eğim, üç noktanın aynı doğru üzerinde olup olmadığını anlamak için de kullanışlıdır. Önceki bölümde bu soruyu uzaklıklarla yanıtlamıştık (Dik Koordinatlar ve Uzaklık); eğimle yol daha kısadır.

Önerme 2.3 (Eğimle Doğrusallık Testi). *$A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ ve $C(x_C, y_C)$ farklı üç nokta ve $x_A \neq x_B$, $x_A \neq x_C$ olsun. Bu üç noktanın aynı doğru üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $m_{AB} = m_{AC}$ olmasıdır. Burada m_{AB}, AB doğrusunun, m_{AC} de AC doğrusunun eğimidir.*

İspat.
Gereklik. *A, B, C aynı bir d doğrusu üzerindeyse AB ve AC doğruları d'nin kendisidir. Teorem 2.2 gereği ikisinin eğimi de d'nin eğimine eşittir, yani $m_{AB} = m_{AC}$ olur.*
Yeterlik. *$m_{AB} = m_{AC}$ olsun. Eğim, düşey olmayan bir doğrunun eğim açısını tek türlü belirlediğinden AB ve AC doğrularının eğim açıları eşittir. Bu iki doğru X-eksenine göre aynı yönde durur ve ikisi de A noktasından geçer. Bir noktadan belirli bir yönde yalnız bir doğru geçtiğinden (paralellik aksiyomu) AB ile AC aynı doğrudur. Dolayısıyla C noktası AB doğrusu üzerindedir.*
■

Yani aynı noktadan geçen ve aynı eğime sahip iki doğru çakışır. Apsislerden biri x_A'ya eşitse test şöyle değişir: $x_A = x_B$ ise A ile B aynı düşey doğru üzerindedir ve üç noktanın doğrusal olması için $x_C = x_A$ olması gerekir ve yeter.

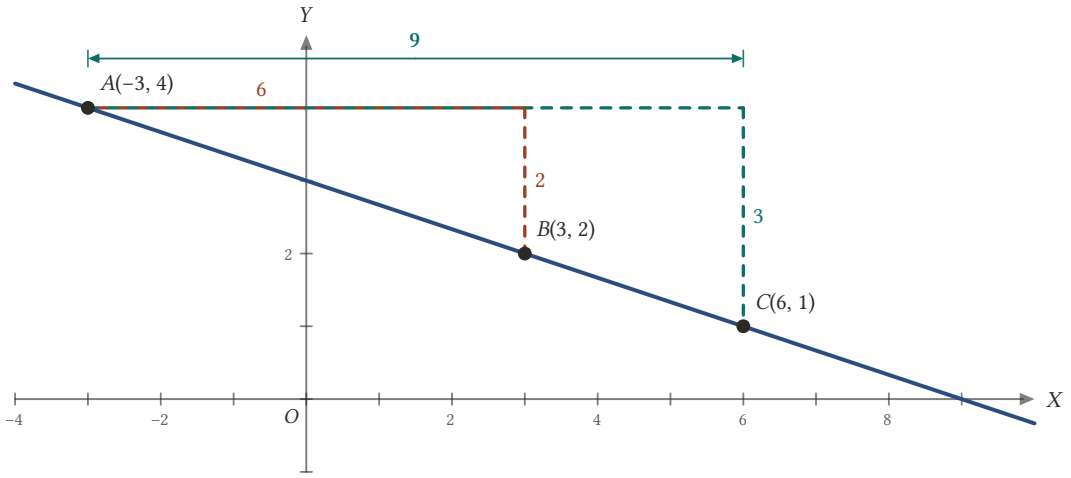
 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 2.10 (Eğimle Aynı Doğru Üzerinde Olmak). $A(-3,4)$, $B(3,2)$ ve $C(6,1)$ noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Teorem 2.2 ile

$$m_{AB} = \frac{2-4}{3-(-3)} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}, \qquad m_{AC} = \frac{1-4}{6-(-3)} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

bulunur. $m_{AB} = m_{AC}$ olduğundan Önerme 2.3 gereği A, B ve C aynı doğru üzerindedir.



Şekil 2.16: A'dan başlayan iki eğim üçgeni: turuncu üçgende düşey değişim / yatay değişim = 2/6, yeşil üçgende 3/9. Eğimler eşit (−1/3) olduğundan A, B, C aynı doğru üzerindedir.

■

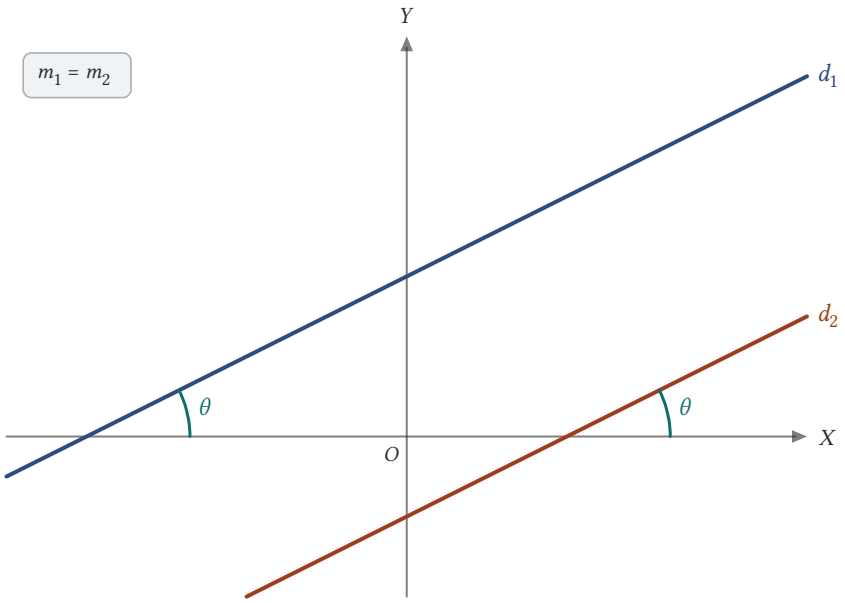
2.3 Paralel ve Dik Doğrular

İki doğrunun eğimleri, birbirlerine göre konumlarını da ele verir. Bu kesimde d_1 ve d_2 doğrularının eğimlerini sırasıyla m_1 ve m_2 ile göstereceğiz.

Tanım 2.5 (Paralel Doğrular). Düşey olmayan d_1 ve d_2 doğruları için $m_1 = m_2$ ise bu doğrulara **paralel doğrular** denir ve $d_1 \parallel d_2$ yazılır. İki düşey doğru da birbirine paraleldir.

Yani paralel doğrular X-ekseniyle aynı açıyı yapar. Bu tanıma göre çakışık doğrular da paralel sayılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

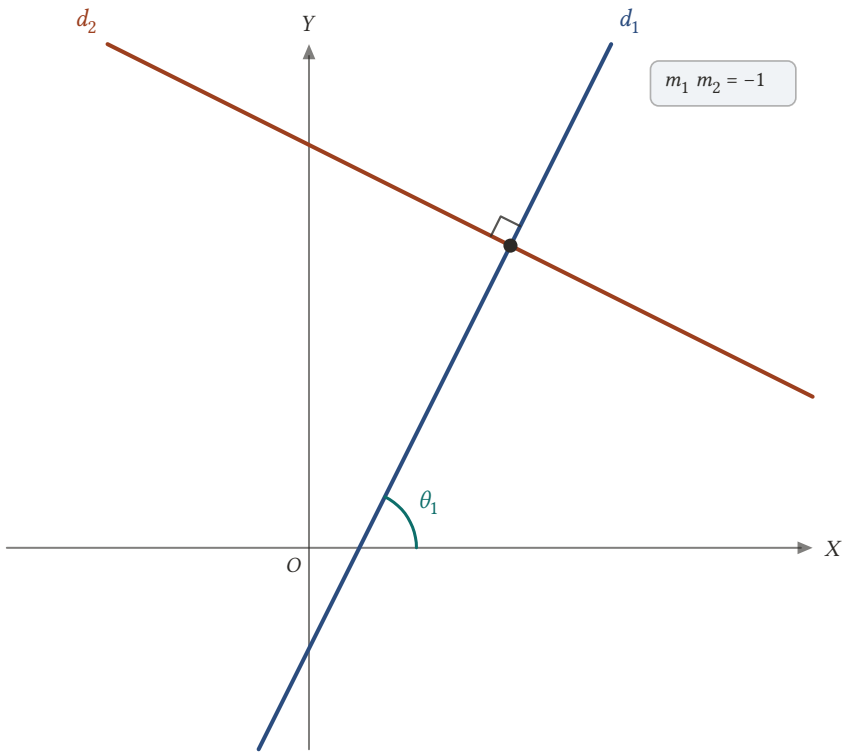


Şekil 2.17: Paralel d_1 ve d_2 doğruları X-ekseniyle aynı θ açısını yapar; bu yüzden eğimleri eşittir.

Tanım 2.6 (Dik Doğrular). Düşey olmayan d_1 ve d_2 doğruları için $m_1 = -\frac{1}{m_2}$, yani $m_1 m_2 = -1$ ise bu doğrulara **dik doğrular** denir ve $d_1 \perp d_2$ yazılır. Biri yatay, diğeri düşey olan iki doğru da birbirine diktir.

Yani dik doğruların eğimleri birbirinin ters işaretlisinin tersidir: eğimi 2 olan bir doğruya dik doğruların eğimi $-\frac{1}{2}$'dir. Bu iki tanımın gerçekten "aralarındaki açı 0" ve "aralarındaki açı $\frac{\pi}{2}$" anlamına geldiğini bölümün son kesiminde (Sonuç 2.2) göreceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.18: Dik d_1 (eğim 2) ve d_2 (eğim $-1/2$) doğruları (2, 3) noktasında dik açıyla kesişir; eğimlerinin çarpımı -1'dir.

Örnek 2.11 (Eğimle Dik Üçgen: Birinci Üçgen). Köşeleri $A(-4,-1)$, $B(3,2)$ ve $C(0,9)$ olan üçgenin dik üçgen olduğunu eğimlerden yararlanarak gösteriniz.

Çözüm.
Teorem 2.2 ile

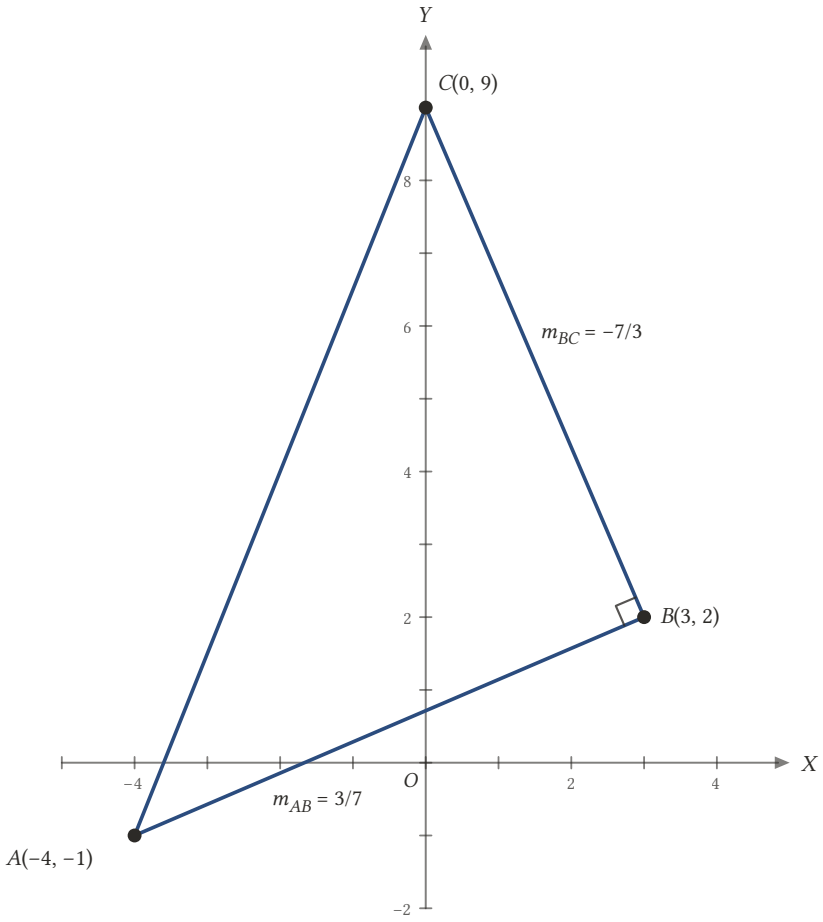
$$m_{AB} = \frac{2-(-1)}{3-(-4)} = \frac{3}{7}, \qquad m_{BC} = \frac{9-2}{0-3} = -\frac{7}{3}$$

bulunur. Buradan

$$m_{AB}\, m_{BC} = \frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) = -1$$

olur. Tanım 2.6 gereği $AB \perp BC$'dir; üçgen B köşesinde dik açılıdır. Önceki bölümde aynı sonuç kenar uzunlukları ve Pisagor bağıntısıyla elde edilmişti (Dik Koordinatlar ve Uzaklık).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.19: $A(-4,-1)$, $B(3,2)$, $C(0,9)$ üçgeninde $m_{AB} \cdot m_{BC} = -1$; üçgen B köşesinde dik açılıdır.

■

Örnek 2.12 (Eğimle Dik Üçgen: İkinci Üçgen). Köşeleri $A(-2,3)$, $B(0,4)$ ve $C(3,-2)$ olan üçgenin dik üçgen olduğunu eğimlerden yararlanarak gösteriniz.

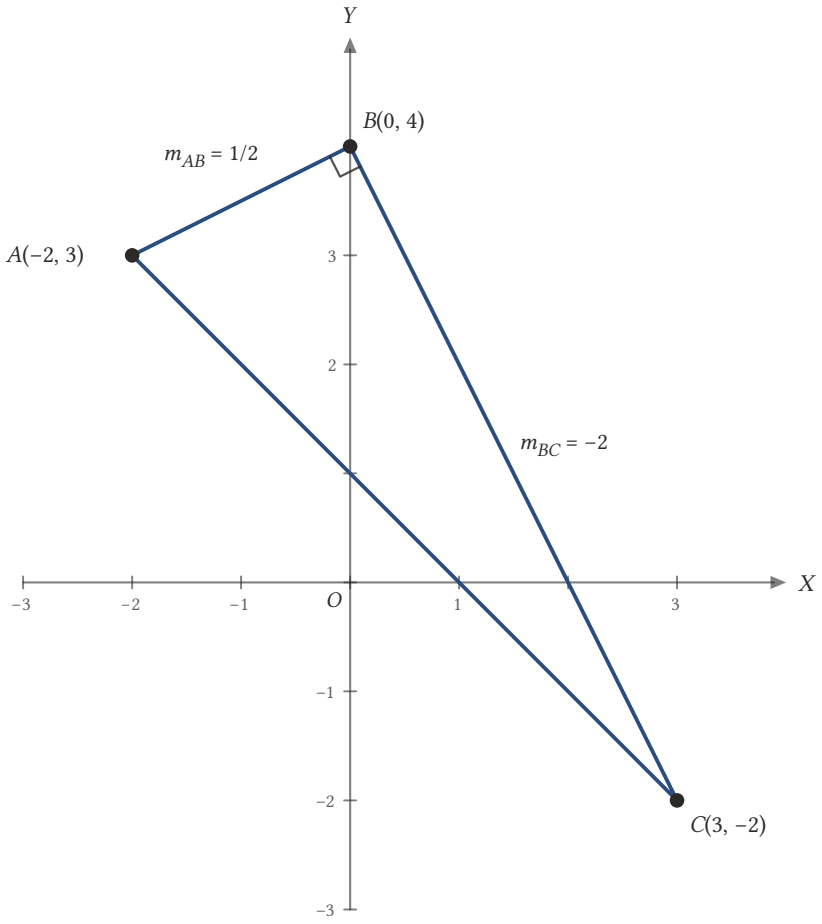
Çözüm.
Üç kenarın eğimlerini hesaplayalım:

$$m_{AB} = \frac{4-3}{0-(-2)} = \frac{1}{2}, \qquad m_{BC} = \frac{-2-4}{3-0} = -2,$$

$$m_{AC} = \frac{-2-3}{3-(-2)} = -1.$$

Çarpımlara bakalım: $m_{AB}\, m_{BC} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$ olduğundan Tanım 2.6 gereği $AB \perp BC$'dir. (Diğer çarpımlar $m_{AB}\, m_{AC} = -\frac{1}{2}$ ve $m_{BC}\, m_{AC} = 2$ olup -1'e eşit değildir; yani başka dik köşe yoktur.) Üçgen B köşesinde dik açılıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.20: $A(-2,3)$, $B(0,4)$, $C(3,-2)$ üçgeninde $m_{AB} \cdot m_{BC} = (1/2)(-2) = -1$; dik açı B köşesindedir.

■

Örnek 2.13 (Eğimle Paralelkenar). $A(0,0), B(4,1), C(5,4)$ ve $D(1,3)$ noktalarının bir paralelkenarın ardışık köşeleri olduğunu gösteriniz.

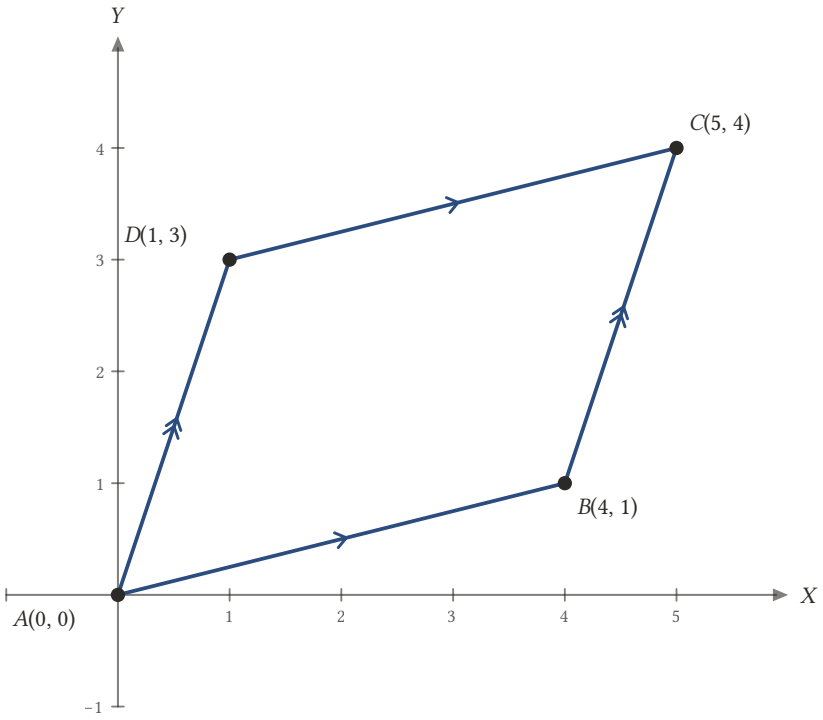
Çözüm.
Karşılıklı kenarların eğimlerini karşılaştıralım:

$$m_{AB} = \frac{1-0}{4-0} = \frac{1}{4}, \qquad m_{DC} = \frac{4-3}{5-1} = \frac{1}{4},$$

$$m_{BC} = \frac{4-1}{5-4} = 3, \qquad m_{AD} = \frac{3-0}{1-0} = 3.$$

$m_{AB} = m_{DC}$ ve $m_{BC} = m_{AD}$ olduğundan Tanım 2.5 gereği $AB \parallel DC$ ve $BC \parallel AD$'dir. Ayrıca $m_{AB} \neq m_{BC}$ olduğundan komşu kenarlar aynı doğru üzerinde değildir. Karşılıklı kenarları paralel olan bu dörtgen bir paralelkenardır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.21: *ABCD* dörtgeninde karşılıklı kenarların eğimleri eşittir: *AB* ve *DC* için 1/4 (tek ok), *BC* ve *AD* için 3 (çift ok). Dörtgen bir paralelkenardır.

■

Örnek 2.14 (Diklik Koşulundan Bilinmeyen Bulmak). $A(1,2)$ ve $B(3,k)$ noktalarından geçen doğru, $C(-1,0)$ ve $D(3,2)$ noktalarından geçen doğruya dik ise k kaçtır?

Çözüm.
Önce eğimler:

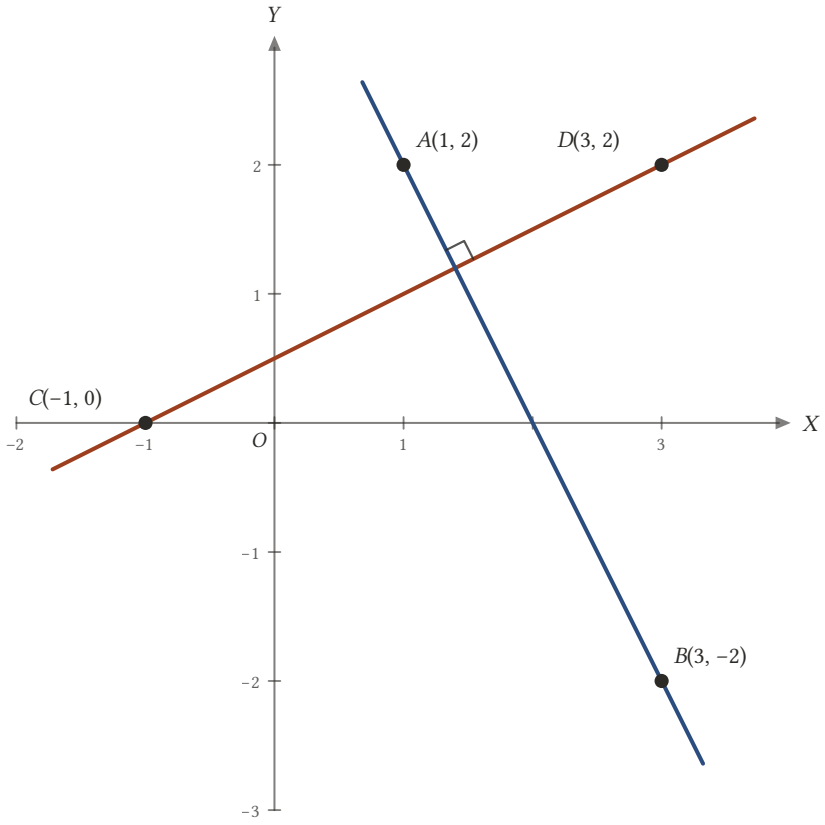
$$m_{CD} = \frac{2-0}{3-(-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad m_{AB} = \frac{k-2}{3-1} = \frac{k-2}{2}.$$

Tanım 2.6 gereği $m_{AB}\, m_{CD} = -1$ olmalıdır:

$$\frac{k-2}{2} \cdot \frac{1}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad k-2 = -4 \quad \Rightarrow \quad k = -2.$$

Denetim: $B(3,-2)$ için $m_{AB} = \frac{-2-2}{2} = -2$ ve $(-2)\cdot\frac{1}{2} = -1$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.22: $k = -2$ için AB doğrusu (eğim -2) CD doğrusuna (eğim $1/2$) diktir; iki doğru $(7/5, 6/5)$ noktasında kesişir.

■

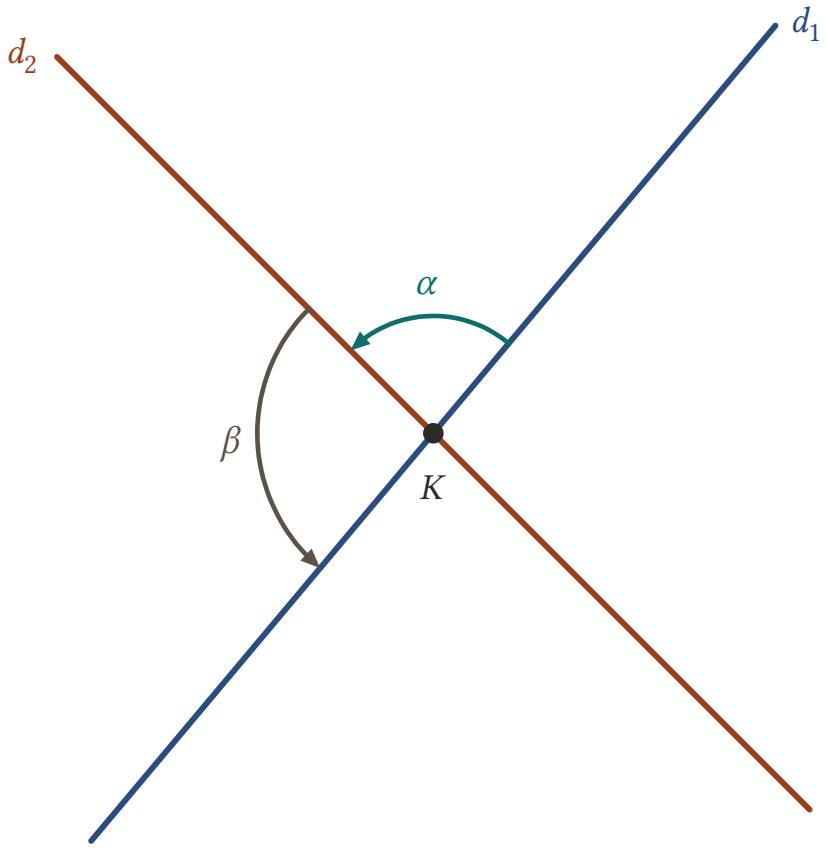
2.4 Kesişen İki Doğru Arasındaki Açı

İki doğru kesiştiğinde aralarında birbirini π'ye tamamlayan iki açı oluşur. Hangisinden söz ettiğimizi belirsiz bırakmamak için açıya bir yön veriyoruz.

Tanım 2.7 (Yönlenmiş Açı). Düzlemde d_1 ve d_2 doğruları verilsin. d_1 doğrusunu pozitif yönde (saat yönünün tersine) döndürerek d_2'ye paralel hâle getiren en küçük $\alpha \in [0, \pi)$ açısına **d_1 doğrusundan d_2 doğrusuna yönlenmiş açı** denir. Benzer şekilde d_2'yi pozitif yönde d_1'e paralel hâle getiren en küçük $\beta \in [0, \pi)$ açısına d_2 doğrusundan d_1 doğrusuna yönlenmiş açı denir.

Yani yönlenmiş açıda sıra önemlidir: d_1'den d_2'ye olan açı ile d_2'den d_1'e olan açı genellikle farklıdır. Doğrular kesişiyorsa kesişim noktasında iki açı yan yanadır ve $\alpha + \beta = \pi$ olur; doğrular paralelse $\alpha = \beta = 0$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



$$\alpha + \beta = \pi$$

Şekil 2.23: d_1'den d_2'ye yönlenmiş açı α, d_2'den d_1'e yönlenmiş açı β; ikisi de saat yönünün tersine ölçülür ve $\alpha + \beta = \pi$'dir.

Şimdi yönlenmiş açının tanjantını eğimler cinsinden bulalım.

Teorem 2.3 (İki Doğru Arasındaki Açının Tanjantı). *m_1 ve m_2 sırasıyla d_1 ve d_2 doğrularının eğimleri olsun. α, d_1 doğrusundan d_2 doğrusuna; β da d_2 doğrusundan d_1 doğrusuna yönlenmiş açı olsun. $1 + m_1 m_2 \neq 0$ ise*

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \qquad \text{ve} \qquad \tan\beta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

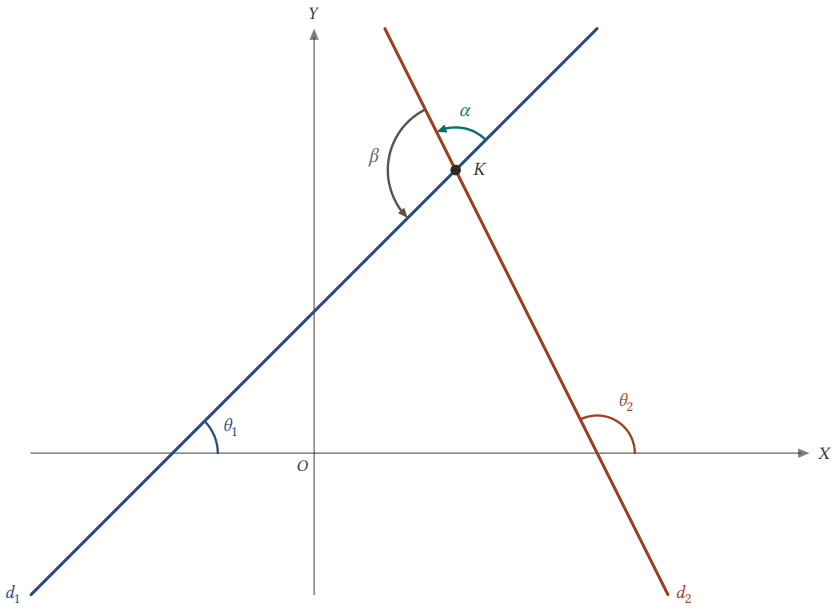
eşitlikleri geçerlidir. $1 + m_1 m_2 = 0$ ise $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$'dir.
Doğrulardan biri düşeyse şu eşitlikler geçerlidir: d_1 düşey ve $m_2 \neq 0$ ise $\tan\alpha = -\frac{1}{m_2}$; d_2 düşey ve $m_1 \neq 0$ ise $\tan\alpha = \frac{1}{m_1}$. Doğrulardan biri düşey, diğeri yatay ise $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$'dir. İki doğru da düşeyse $d_1 \parallel d_2$ ve $\alpha = 0$'dır.

> ***İspat.***
> *d_1 ve d_2'nin eğim açıları sırasıyla θ_1 ve θ_2 olsun.*
> ***Adım 1: açıların ilişkisi.** Bir doğruyu pozitif yönde φ kadar döndürmek, X-ekseniyle yaptığı açıyı da φ kadar artırır. d_1, α kadar döndürülünce d_2'ye paralel olduğundan $\theta_1 + \alpha$ açısı ya θ_2'ye ya da $\theta_2 + \pi$'ye eşittir. $\alpha \in [0, \pi)$ olduğundan*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\alpha = \begin{cases} \theta_2 - \theta_1, & \theta_1 \le \theta_2 \text{ ise,} \\ \pi + \theta_2 - \theta_1, & \theta_1 > \theta_2 \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur. Aşağıdaki şekildeki durumda ($\theta_1 < \theta_2$) bu, üçgenin dış açısının kendisine komşu olmayan iki iç açının toplamına eşit olmasından da görülür: $\theta_2 = \theta_1 + \alpha$. Tanjant fonksiyonunun periyodu π olduğundan her iki durumda da $\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1)$'dir. Doğrular kesişiyorsa $\beta = \pi - \alpha$, paralelse $\beta = \alpha = 0$ olduğundan, tanjantlar tanımlı olduğu sürece $\tan\beta = -\tan\alpha$ olur. Bu yüzden yalnız $\tan\alpha$'yı hesaplamak yeter.



Şekil 2.24: d_1 *ve* d_2 *doğrularının eğim açıları* θ_1, θ_2*; kesişim noktasındaki yönlenmiş açılar* α *ve* β*. Üçgenin dış açısı olarak* $\theta_2 = \theta_1 + \alpha$*'dır.*

Adım 2: iki doğru da düşey. *$\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ise iki doğru da düşeydir, Tanım 2.5 gereği $d_1 \parallel d_2$ ve $\alpha = 0$'dır.*
Adım 3: yalnız biri düşey. *$\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta_2 \neq \frac{\pi}{2}$ olsun. $m_2 = 0$ ise d_2 yataydır ve d_1'i $\frac{\pi}{2}$ döndürmek onu yatay yapar, yani $\alpha = \frac{\pi}{2}$'dir. $m_2 \neq 0$ ise $\sin\theta_2 \neq 0$ ve $\cos\theta_2 \neq 0$'dır; farkın sinüs ve kosinüs formülleri ile*

$$\begin{aligned} \tan\alpha = \tan\Big(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\Big) &= \frac{\sin(\theta_2 - \frac{\pi}{2})}{\cos(\theta_2 - \frac{\pi}{2})} \\ &= \frac{\sin\theta_2\cos\frac{\pi}{2} - \cos\theta_2\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta_2\cos\frac{\pi}{2} + \sin\theta_2\sin\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{-\cos\theta_2}{\sin\theta_2} = \frac{-1}{\tan\theta_2} = -\frac{1}{m_2} \end{aligned}$$

elde edilir; burada $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ve $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ kullanıldı. $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta_1 \neq \frac{\pi}{2}$, $m_1 \neq 0$ ise aynı hesap

$$\tan\alpha = \tan\Big(\frac{\pi}{2} - \theta_1\Big) = \frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} = \frac{1}{m_1}$$

verir. $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ve $m_1 = 0$ ise d_1 yataydır; onu $\frac{\pi}{2}$ döndürmek düşey yapar, yani $\alpha = \frac{\pi}{2}$'dir. Biri düşey, diğeri yatay olan bu iki durumda doğrular kesiştiğinden Adım 1 gereği $\beta = \pi - \alpha = \frac{\pi}{2}$'dir.
Adım 4: hiçbiri düşey değil. *$\theta_1 \neq \frac{\pi}{2}$ ve $\theta_2 \neq \frac{\pi}{2}$ olsun; o zaman $\cos\theta_1\cos\theta_2 \neq 0$'dır. Farkın kosinüsü*

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_2\sin\theta_1 = \cos\theta_1\cos\theta_2\,(1 + m_1 m_2)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

biçiminde yazılabilir. $1 + m_1 m_2 = 0$ *ise* $\cos(\theta_2 - \theta_1) = 0$ *olur;* $\alpha, \theta_2 - \theta_1$*'den* π*'nin bir katı kadar farklı olduğundan* $\cos\alpha = 0$*, yani* $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *ve* $\beta = \pi - \alpha = \frac{\pi}{2}$ *bulunur.* $1 + m_1 m_2 \neq 0$ *ise*

$$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\sin\theta_2 \cos\theta_1 - \cos\theta_2 \sin\theta_1}{\cos\theta_2 \cos\theta_1 + \sin\theta_2 \sin\theta_1}$$

olur. Pay ve paydayı $\cos\theta_1 \cos\theta_2 \neq 0$ *ile bölersek*

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} - \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}}{1 + \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} \cdot \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

elde edilir. Son olarak Adım 1'deki $\tan\beta = -\tan\alpha$ *eşitliği* $\tan\beta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ *verir.*

■

Yani iki doğru arasındaki yönlenmiş açıyı bulmak için açı ölçmeye gerek yoktur; iki eğim yeterlidir. Pay "ikinci eksi birinci" sırasıyla yazılır; sırayı değiştirmek α yerine β'yı verir.
$\tan\alpha$ bilindiğinde $\alpha \in [0, \pi)$ tek türlü belirlenir: $\tan\alpha = t$ için $t \geq 0$ ise $\alpha = \arctan t$, $t < 0$ ise $\alpha = \pi + \arctan t$ olur. Örneğin $\tan\alpha = -1$ ise $\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$'tür.
Teoremin önemli bir sonucu, paralellik ve diklik tanımlarının geometrik anlamını doğrulamasıdır.

Sonuç 2.2 (Paralellik ve Diklik Koşulları). *d_1 ve d_2 düşey olmayan, eğimleri m_1 ve m_2 olan iki doğru ve α, d_1'den d_2'ye yönlenmiş açı olsun.*

- $\alpha = 0$ *olması, yani doğruların aynı yönde durması için gerek ve yeter koşul* $m_1 = m_2$*'dir.*
- $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *olması, yani doğruların dik kesişmesi için gerek ve yeter koşul* $m_1 m_2 = -1$*'dir.*

İspat.
Paralellik. *Teorem 2.3 ispatının Adım 1'ine göre* $\alpha = 0$ *olması* $\theta_1 = \theta_2$ *demektir.* $\tan$ *fonksiyonu* $[0, \pi)$ *aralığında* $\frac{\pi}{2}$ *dışında bire bir olduğundan* $\theta_1 = \theta_2$ *olması* $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$*, yani* $m_1 = m_2$ *olmasıyla denktir.*
Diklik. $\alpha \in [0, \pi)$ *için* $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *olması* $\cos\alpha = 0$ *olmasıyla denktir.* α *ile* $\theta_2 - \theta_1$ *arasındaki fark* π*'nin bir katı olduğundan bu,* $\cos(\theta_2 - \theta_1) = 0$ *demektir. Teoremin ispatındaki Adım 4'e göre*

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \,(1 + m_1 m_2)$$

ve $\cos\theta_1 \cos\theta_2 \neq 0$ *olduğundan bu,* $1 + m_1 m_2 = 0$ *ile, yani* $m_1 m_2 = -1$ *ile denktir.*

■

Yani Tanım 2.5 ve Tanım 2.6 ile eğimler üzerinden verdiğimiz tanımlar, "aynı yönde durmak" ve "dik açıyla kesişmek" sezgisiyle tam olarak örtüşür.

Örnek 2.15 (İki Doğru Arasındaki Yönlenmiş Açılar). d_1 doğrusu $(0, 1)$ ve $(1, 3)$ noktalarından, d_2 doğrusu $(0, 4)$ ve $(1, 1)$ noktalarından geçiyor. d_1'den d_2'ye yönlenmiş α açısını ve d_2'den d_1'e yönlenmiş β açısını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: eğimler. Teorem 2.2 ile

$$m_1 = \frac{3 - 1}{1 - 0} = 2, \qquad m_2 = \frac{1 - 4}{1 - 0} = -3.$$

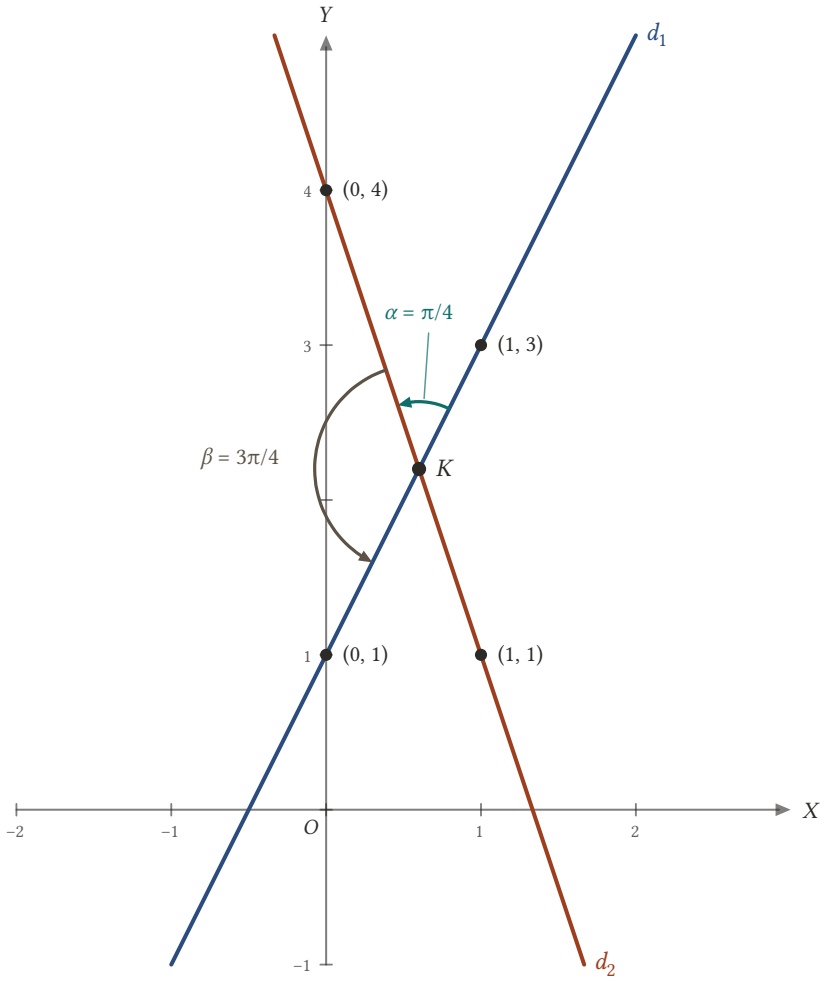
Adım 2: α. Formülün paydası $1 + m_1 m_2 = 1 - 6 = -5$ sıfırdan farklı olduğundan Teorem 2.3 ile

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - 2}{-5} = 1$$

ve $\alpha = \frac{\pi}{4}$ bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: β. $\tan\beta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \dfrac{5}{-5} = -1$ olduğundan $\beta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$'tür. Gerçekten $\alpha + \beta = \pi$'dir.



Şekil 2.25: d_1 (eğim 2) ve d_2 (eğim −3) doğruları $K(3/5, 11/5)$ noktasında kesişir; d_1'den d_2'ye yönlenmiş açı $\alpha = \pi/4$, ters yöndeki açı $\beta = 3\pi/4$'tür.

■

Örnek 2.16 (Düşey Bir Doğruyla Yapılan Açı). d_1 doğrusu $(2, 0)$ ve $(2, 5)$ noktalarından, d_2 doğrusu $O(0, 0)$ ve $(1, \sqrt{3})$ noktalarından geçiyor. d_1'den d_2'ye yönlenmiş α açısını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1. d_1 üzerindeki iki noktanın apsisleri eşit olduğundan d_1 düşeydir. d_2'nin eğimi

$$m_2 = \frac{\sqrt{3} - 0}{1 - 0} = \sqrt{3} \neq 0$$

dır.
Adım 2. Teorem 2.3 içindeki düşey doğru durumu ile

$$\tan\alpha = -\frac{1}{m_2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

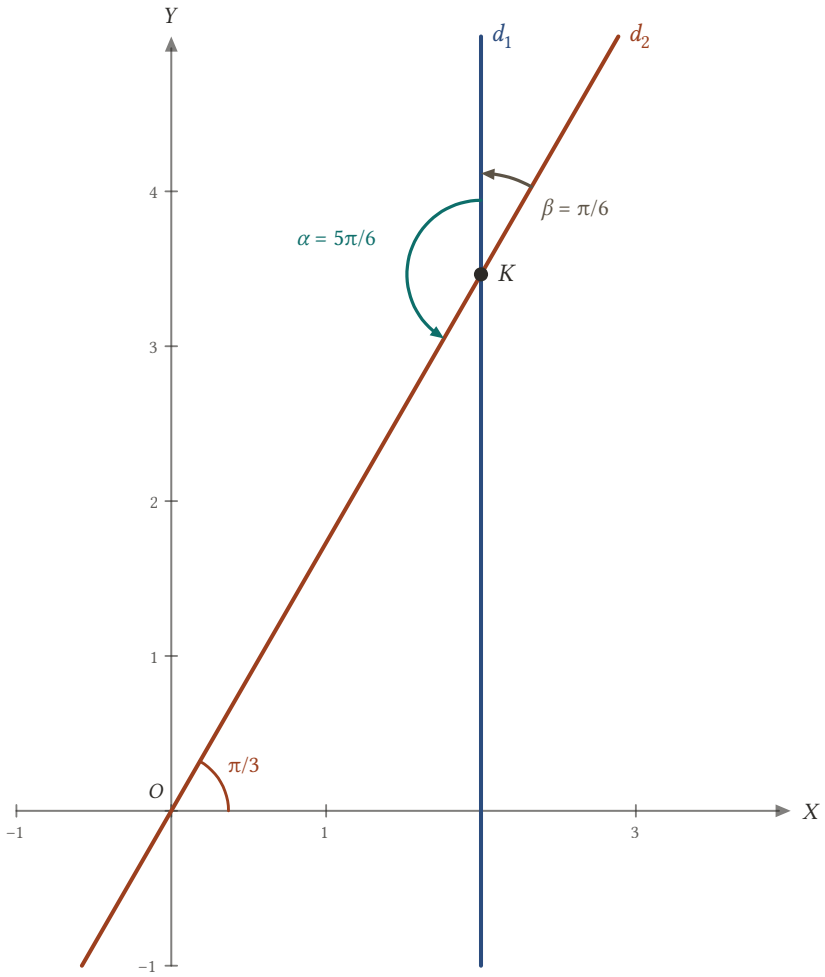
bulunur. Tanjant negatif olduğundan α geniş açıdır:

$$\alpha = \pi + \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

Denetim. Eğim açıları $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ve $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$'tür. $\theta_1 > \theta_2$ olduğundan

$$\alpha = \pi + \theta_2 - \theta_1 = \pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$

bulunur. d_2'den d_1'e yönlenmiş açı ise $\beta = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$'dır.



Şekil 2.26: Düşey d_1 ile eğimi $\sqrt{3}$ olan d_2 doğrusu: d_1'den d_2'ye yönlenmiş açı $\alpha = 5\pi/6$, d_2'den d_1'e yönlenmiş açı $\beta = \pi/6$'dır.

■

Bir üçgenin iç açılarını da aynı formülle bulabiliriz; tek incelik, her köşede açının hangi kenardan hangisine ölçüleceğidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımda üçgenin iç açıları

1. Üç kenarın eğimlerini Teorem 2.2 ile hesaplayın.
2. Kaba bir şekil çizip köşeleri saat yönünün tersine dolaşarak P, Q, R diye sıralayın. Bu sırada P köşesindeki iç açı, PQ doğrusundan PR doğrusuna yönlenmiş açıdır; Q ve R köşelerinde de aynı kural geçerlidir (QR'den QP'ye, RP'den RQ'ya).
3. Her açıyı Teorem 2.3 ile bulun; paydası sıfır çıkan köşedeki açı $\frac{\pi}{2}$'dir. Denetim için üç açının toplamının π olduğuna bakın: yön ters seçilirse her açının yerine π'ye tamamlayanı çıkar ve toplam 2π olur.

Örnek 2.17 (Bir Üçgenin İç Açıları). Köşeleri $A(5,-4)$, $B(1,-2)$ ve $C(3,2)$ olan ABC üçgeninin iç açılarını bulunuz.

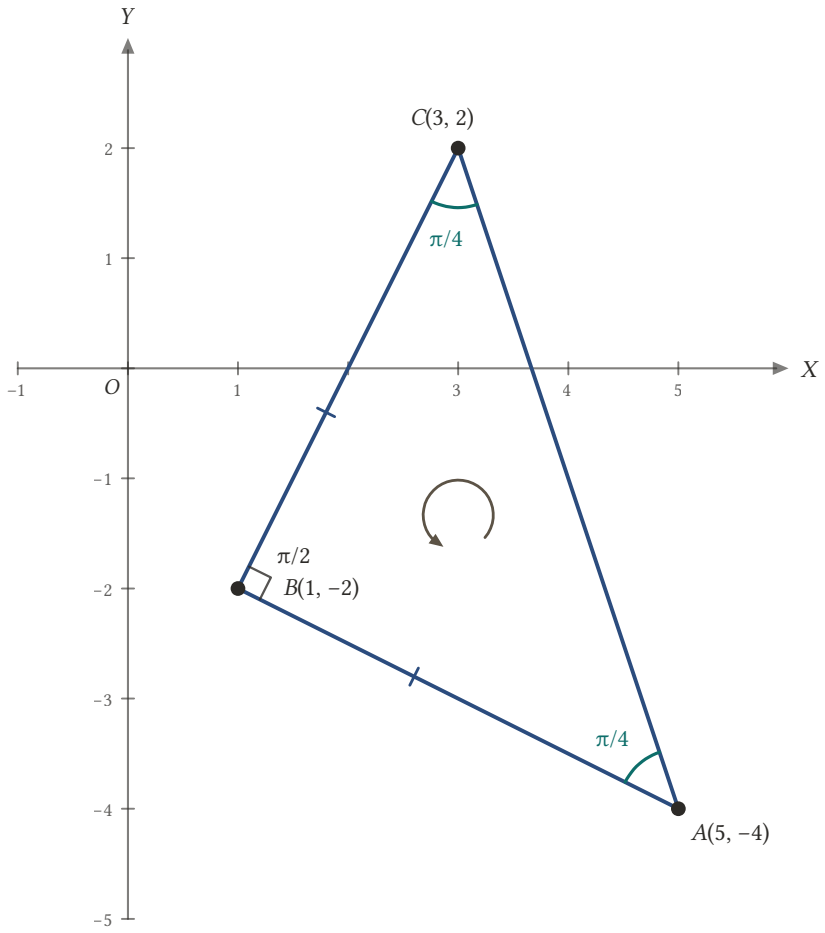
Çözüm.
Adım 1: eğimler.

$$m_{AB} = \frac{-2-(-4)}{1-5} = -\frac{1}{2}, \qquad m_{BC} = \frac{2-(-2)}{3-1} = 2,$$

$$m_{AC} = \frac{2-(-4)}{3-5} = -3.$$

Adım 2: yön. A sağ altta, C üstte, B solda durduğundan köşeler saat yönünün tersine A, C, B sırasıyla dolaşılır. Buna göre A'daki iç açı AC'den AB'ye, C'deki iç açı CB'den CA'ya, B'deki iç açı BA'dan BC'ye yönlenmiş açıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.27: $A(5,-4)$, $B(1,-2)$, $C(3,2)$ üçgeninin iç açıları: B'de $\pi/2$, A ve C'de $\pi/4$. Köşeler saat yönünün tersine A, C, B sırasıyla dolaşılır; çentikler $|AB| = |BC|$ eşitliğini gösterir.

Adım 3: A köşesi. Teorem 2.3 ile

$$\tan\hat{A} = \frac{m_{AB} - m_{AC}}{1 + m_{AB}\, m_{AC}} = \frac{-\frac{1}{2} - (-3)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-3)} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = 1$$

ve $\hat{A} = \frac{\pi}{4}$ bulunur.
Adım 4: B köşesi. Formülün paydası

$$1 + m_{AB}\, m_{BC} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 = 0$$

olduğundan Teorem 2.3 gereği $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$'dir; AB ile BC diktir.
Adım 5: C köşesi.

$$\tan\hat{C} = \frac{m_{AC} - m_{BC}}{1 + m_{AC}\, m_{BC}} = \frac{(-3) - 2}{1 + (-3) \cdot 2} = \frac{-5}{-5} = 1$$

ve $\hat{C} = \frac{\pi}{4}$ bulunur.
Adım 6: sonuç. $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi$ olduğundan yön doğru seçilmiştir. İki açı eşit olduğundan karşılarındaki kenarlar da eşittir: gerçekten $|\,AB\,| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ ve $|\,BC\,| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$'tir. ABC, $|\,AB\,| = |\,BC\,|$ olan bir ikizkenar dik üçgendir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

2.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar bölme formülünü tersten kullanmayı ve açı formülünden bilinmeyen bir eğim ya da koordinat bulmayı çalıştırır.

Alıştırma 2.1 (Bölünme Noktasından Uç Noktaya). Uç noktaları $P_1(6,8)$ ve $P_2(x_2,y_2)$ olan doğru parçasını $\dfrac{|\,P_1P\,|}{|\,PP_2\,|}=\dfrac{3}{7}$ olacak şekilde bölen nokta $P(9,2)$ ise P_2 noktasını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: kullanılacak bağıntı. Teorem 2.1 ispatındaki eşitlikler, $P(x,y)$ bölünme noktası için

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=r \qquad \text{ve} \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$

olduğunu söyler. Burada $x_1=6$, $y_1=8$, $x=9$, $y=2$ ve $r=\frac{3}{7}$'dir.
Adım 2: apsis.

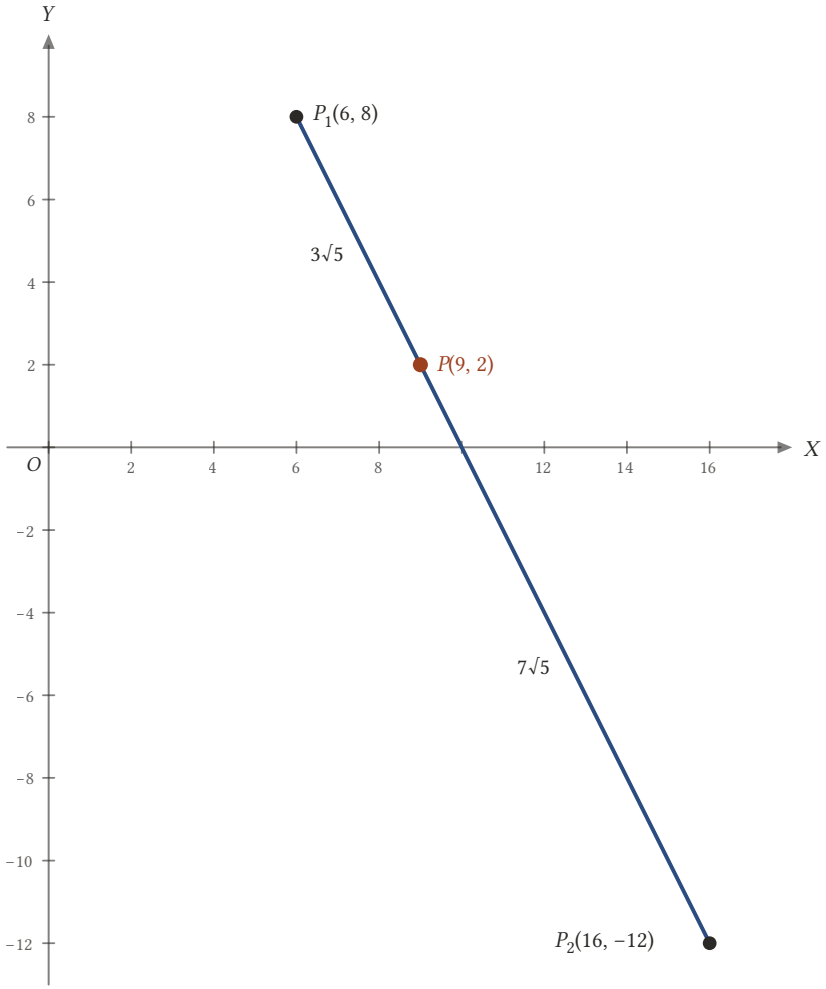
$$\frac{9-6}{x_2-9}=\frac{3}{7} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{x_2-9}=\frac{3}{7} \quad\Leftrightarrow\quad x_2-9=7$$

olup $x_2=16$ bulunur.
Adım 3: ordinat.

$$\frac{2-8}{y_2-2}=\frac{3}{7} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{-6}{y_2-2}=\frac{3}{7} \quad\Leftrightarrow\quad 3(y_2-2)=-42$$

olup $y_2-2=-14$, yani $y_2=-12$ bulunur.
Adım 4: denetim. $P_2(16,-12)$ için $|\,P_1P\,|=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$ ve $|\,PP_2\,|=\sqrt{7^2+14^2}=7\sqrt{5}$'tir; oran gerçekten $\frac{3}{7}$'dir ve P parçanın içindedir. Aranan nokta $P_2(16,-12)$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.28: $P_1(6, 8)$ ile $P_2(16, -12)$ arasındaki $P(9, 2)$ noktası parçayı $|P_1P| : |PP_2| = 3\sqrt{5} : 7\sqrt{5} = 3 : 7$ oranında böler.

■

Alıştırma 2.2 (Yönlenmiş Açıdan Bilinmeyen Ordinat). $A(-4, 5)$ ile $B(3, y)$ noktalarından geçen doğrudan, $C(-2, 4)$ ile $D(9, 1)$ noktalarından geçen doğruya yönlenmiş açı $\frac{3\pi}{4}$ ise y kaçtır?

Çözüm.
Adım 1: eğimler. Teorem 2.2 ile

$$m_{AB} = \frac{y-5}{3-(-4)} = \frac{y-5}{7}, \qquad m_{CD} = \frac{1-4}{9-(-2)} = -\frac{3}{11}.$$

Adım 2: denklem. AB'den CD'ye yönlenmiş açı $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ olduğundan Teorem 2.3 ile

$$\tan\frac{3\pi}{4} = \frac{m_{CD} - m_{AB}}{1 + m_{AB}\, m_{CD}} = \frac{-\frac{3}{11} - \frac{y-5}{7}}{1 + \left(-\frac{3}{11}\right)\frac{y-5}{7}} = -1$$

olmalıdır.
Adım 3: sadeleştirme. Pay ve paydayı 77 ile çarpalım. Pay $-21 - 11(y-5) = 34 - 11y$, payda $77 - 3(y-5) = 92 - 3y$ olur. Böylece

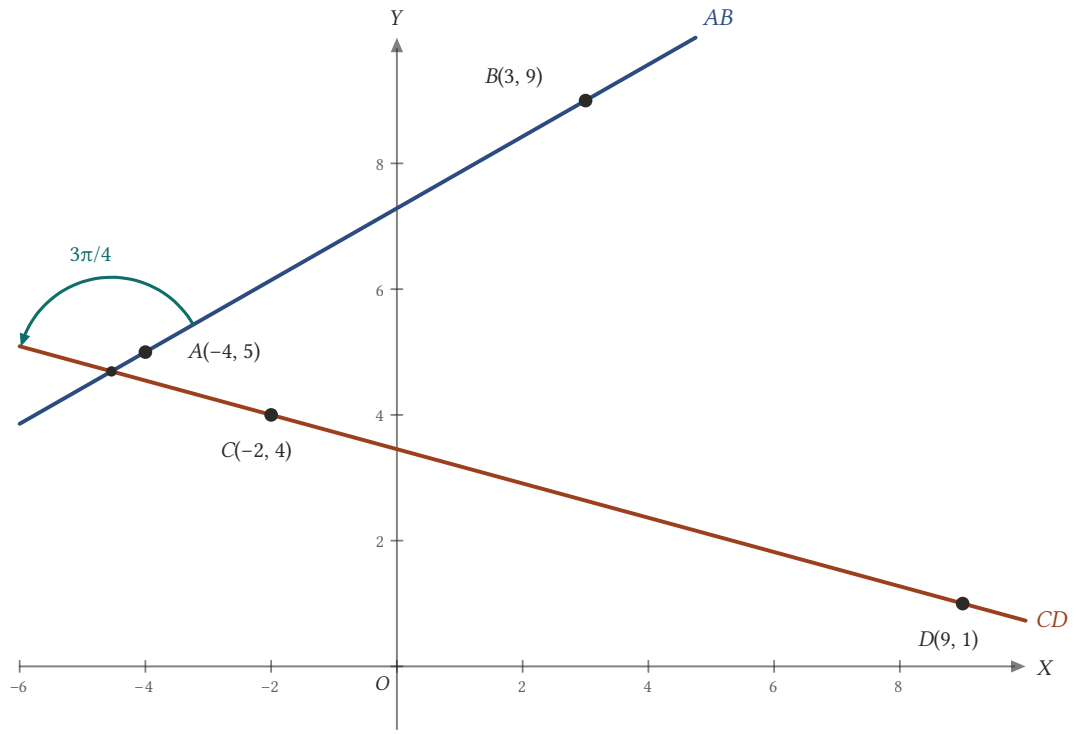
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{34-11y}{92-3y} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 34-11y = -92+3y \quad \Leftrightarrow \quad 126 = 14y$$

ve $y = 9$ bulunur. Bu değerde payda $92 - 27 = 65 \neq 0$'dır.
Adım 4: denetim. $y = 9$ için $m_{AB} = \frac{4}{7}$ ve

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{3}{11} - \frac{4}{7}}{1 - \frac{12}{77}} = \frac{-\frac{65}{77}}{\frac{65}{77}} = -1$$

olur; $\alpha \in [0, \pi)$ olduğundan $\alpha = \frac{3\pi}{4}$'tür. Aranan değer $y = 9$'dur.



Şekil 2.29: $A(-4, 5)$ ve $B(3, 9)$'dan geçen doğrudan $C(-2, 4)$ ve $D(9, 1)$'den geçen doğruya yönlenmiş açı $3\pi/4$'tür.

■

Alıştırma 2.3 (Yönlenmiş Açıdan Eğim). d_1 doğrusundan d_2 doğrusuna yönlenmiş açı $\frac{\pi}{3}$'tür. d_1'in eğimi 1 ise d_2'nin eğimini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: denklem. $m_1 = 1$ ve $\alpha = \frac{\pi}{3}$ için Teorem 2.3 ile

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{m_2 - 1}{1 + m_2}$$

olmalıdır. (d_2 düşey olsaydı $\tan\alpha = \frac{1}{m_1} = 1 \neq \sqrt{3}$ olurdu; bu yüzden d_2 düşey değildir.)
Adım 2: çözüm. İçler dışlar çarpımıyla

$$\sqrt{3} + \sqrt{3}\,m_2 = m_2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad m_2\left(\sqrt{3} - 1\right) = -1 - \sqrt{3}$$

ve

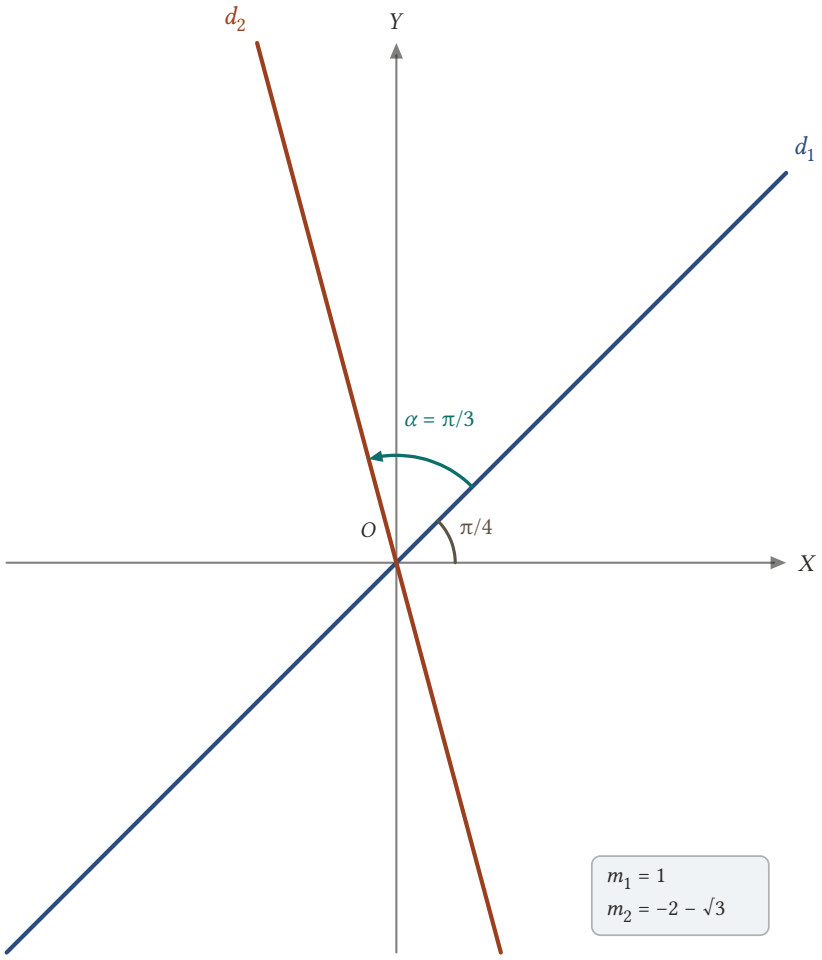
 CC BY-NC-SA 4.0

$$m_2 = -\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = -\frac{(1+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = -\frac{4+2\sqrt{3}}{2} = -2-\sqrt{3}$$

bulunur; ikinci eşitlikte pay ve payda $\sqrt{3}+1$ ile genişletildi.
Adım 3: denetim. d_1'in eğim açısı $\frac{\pi}{4}$'tür; d_2'ninki $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$ olmalıdır. Toplamın tanjantı formülüyle

$$\tan\frac{7\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$$

bulunur; sonuç doğrulanır. d_2'nin eğimi $-2-\sqrt{3}$'tür.



Şekil 2.30: Eğimi 1 olan d_1 doğrusu $\pi/3$ döndürülünce eğim açısı $\pi/4 + \pi/3 = 7\pi/12$ olan d_2 doğrusuna paralel olur; d_2'nin eğimi $-2-\sqrt{3}$'tür.

■

Alıştırma 2.4 (Belirli Açı Yapan Doğrunun Eğimi). $A(2,-1)$ ve $B(5,3)$ noktalarından geçen doğru ile $\frac{\pi}{4}$'lük açı yapan doğrunun eğimini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: verilen doğrunun eğimi.

$$m_{AB} = \frac{3-(-1)}{5-2} = \frac{4}{3}.$$

Aranan doğru d, eğimi m olsun. İki doğru arasında $\frac{\pi}{4}$'lük açı olması, iki yönlenmiş açıdan birinin $\frac{\pi}{4}$ (diğerinin $\frac{3\pi}{4}$) olması demektir. Bu yüzden iki durum vardır. (d düşey olsaydı AB'den d'ye yönlenmiş açının tanjantı $\frac{1}{m_{AB}} = \frac{3}{4}$ olurdu; bu ± 1 olmadığından d düşey değildir.)

Adım 2: AB'den d'ye olan açı $\frac{\pi}{4}$ ise. Teorem 2.3 ile

$$\frac{m - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}m} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad m - \frac{4}{3} = 1 + \frac{4}{3}m \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{4}{3}\right)m = 1 + \frac{4}{3}$$

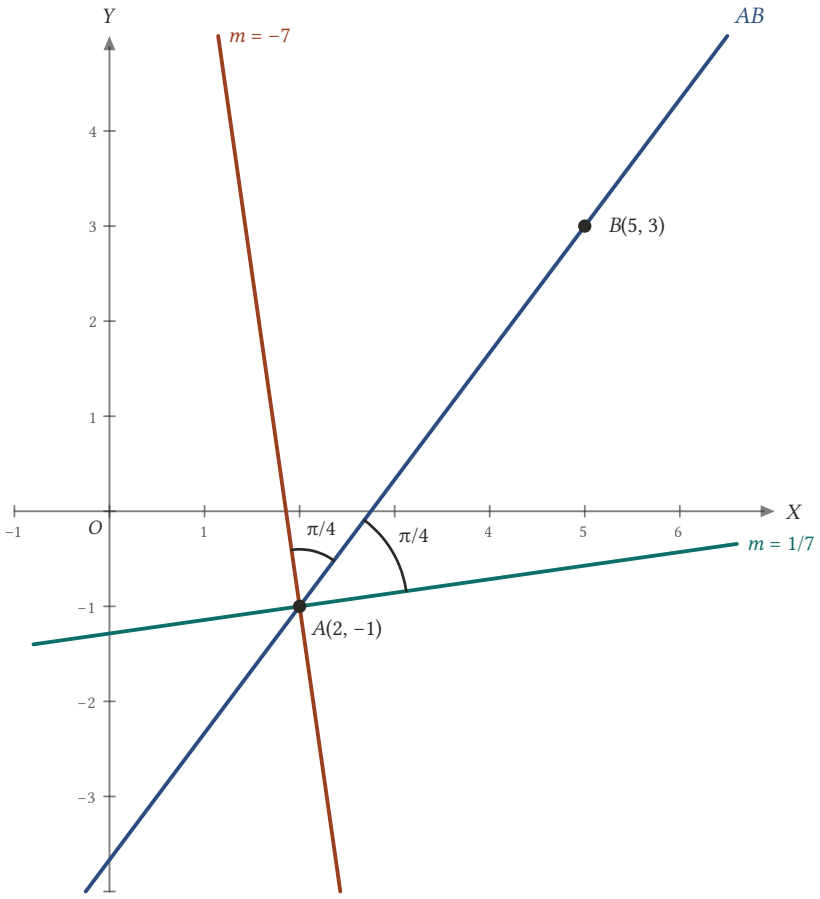
olup $-\frac{1}{3}m = \frac{7}{3}$, yani $m = -7$ bulunur. Payda $1 + \frac{4}{3}(-7) = -\frac{25}{3} \neq 0$'dır.

Adım 3: d'den AB'ye olan açı $\frac{\pi}{4}$ ise. Bu kez pay ters sırayla yazılır:

$$\frac{\frac{4}{3} - m}{1 + \frac{4}{3}m} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{3} - m = 1 + \frac{4}{3}m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} = \frac{7}{3}m$$

olup $m = \frac{1}{7}$ bulunur. Payda $1 + \frac{4}{21} = \frac{25}{21} \neq 0$'dır.

Adım 4: sonuç. AB ile $\frac{\pi}{4}$'lük açı yapan doğruların eğimi $m = -7$ ya da $m = \frac{1}{7}$'dir. İki çözüm doğrusu birbirine diktir: $(-7) \cdot \frac{1}{7} = -1$.



Şekil 2.31: AB doğrusuyla $\pi/4$'lük açı yapan iki yön vardır: eğimi -7 ve eğimi $1/7$ olan doğrular (burada A'dan geçecek biçimde çizildi). Bu iki doğru birbirine diktir.

■

Alıştırma 2.5 (Belirli Açı Yapan ve Bir Noktadan Geçen Doğru). $x - 3y + 6 = 0$ denklemini sağlayan noktaların oluşturduğu doğru ile $\frac{\pi}{4}$'lük açı yapan ve $Q(2, 5)$ noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Adım 1: verilen doğrunun eğimi. Bu denklemi sağlayan noktaların bir doğru oluşturduğu bir sonraki bölümde gösterilecek (Düzlemde Doğru Denklemleri); burada bunu kabul ediyoruz. Denklemi sağlayan iki nokta seçelim: $x = 0$ için $y = 2$, $x = 3$ için $y = 3$. Verilen doğru $(0, 2)$ ve $(3, 3)$ noktalarından geçtiğinden eğimi

$$m_0 = \frac{3-2}{3-0} = \frac{1}{3}$$

tür.
Adım 2: aranan eğim. Aranan doğru d, eğimi m olsun. Önceki alıştırmadaki gibi iki durum vardır. (d düşey olsaydı ilgili tanjant $\frac{1}{m_0} = 3 \neq \pm 1$ olurdu; bu yüzden d düşey değildir.) Verilen doğrudan d'ye olan açı $\frac{\pi}{4}$ ise

$$\frac{m - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}m} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad m - \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}m \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}m = \frac{4}{3}$$

ve $m = 2$ bulunur. d'den verilen doğruya olan açı $\frac{\pi}{4}$ ise

$$\frac{\frac{1}{3} - m}{1 + \frac{1}{3}m} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} - m = 1 + \frac{1}{3}m \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{4}{3}m = \frac{2}{3}$$

ve $m = -\frac{1}{2}$ bulunur. İki durumda da payda sıfırdan farklıdır ($\frac{5}{3}$ ve $\frac{5}{6}$).
Adım 3: doğrunun denklemi. d, $Q(2, 5)$'ten geçen ve eğimi m olan doğrudur. Q'dan farklı bir $R(x, y)$ noktası d üzerindeyse QR doğrusu d'nin kendisidir ve eğimi m'dir; tersine QR'nin eğimi m ise QR ile d aynı noktadan geçen aynı eğimli iki doğru olduğundan (Önerme 2.3) çakışır. Demek ki R'nin d üzerinde olması

$$\frac{y-5}{x-2} = m, \quad \text{yani} \quad y - 5 = m(x-2)$$

olmasıyla denktir; Q'nun kendisi de bu eşitliği sağlar. Bu biçimdeki denklemler bir sonraki bölümde sistemli olarak ele alınacak (Düzlemde Doğru Denklemleri).
Adım 4: iki çözüm. $m = 2$ için

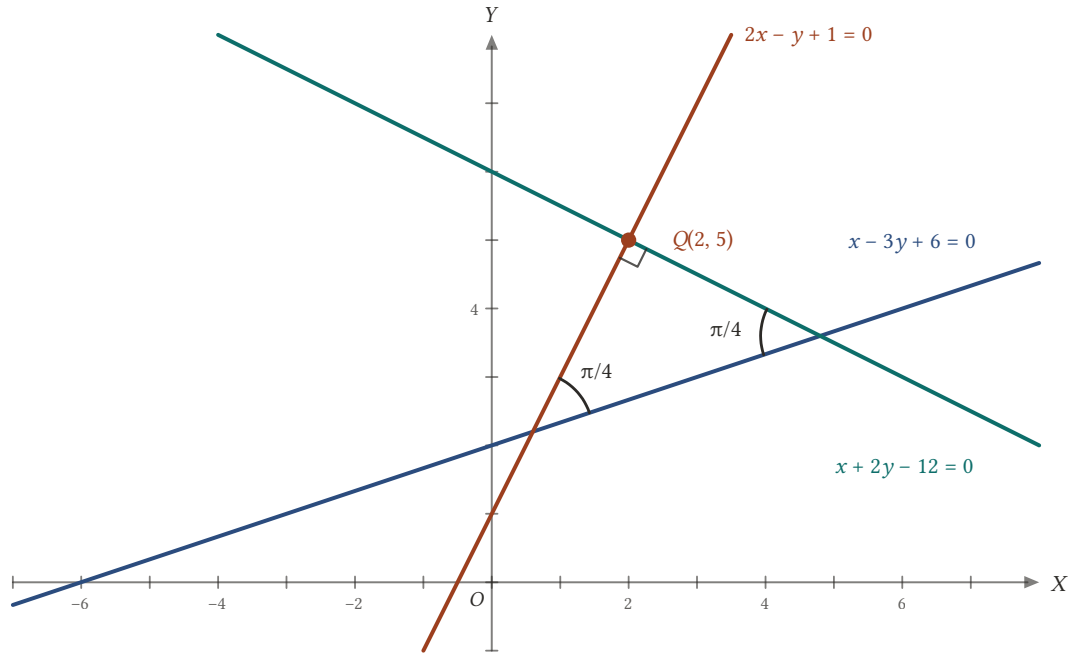
$$y - 5 = 2(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y + 1 = 0$$

bulunur. $m = -\frac{1}{2}$ için her iki yanı 2 ile çarparak

$$2(y-5) = -(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y - 12 = 0$$

bulunur. Aranan doğrular $2x - y + 1 = 0$ ve $x + 2y - 12 = 0$'dır; ikisi de $Q(2, 5)$'i sağlar ($4 - 5 + 1 = 0$ ve $2 + 10 - 12 = 0$) ve birbirine diktir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 2.32: $Q(2, 5)$'ten geçen ve $x - 3y + 6 = 0$ doğrusuyla $\pi/4$'lük açı yapan iki doğru: $2x - y + 1 = 0$ ve $x + 2y - 12 = 0$. İki çözüm doğrusu Q'da dik kesişir.

■

Bu bölümde bir doğrunun yönünü tek bir sayıyla, eğimle, ifade etmeyi öğrendik. Bir noktası ve eğimi bilinen doğrunun tüm noktalarını tek bir denklemle yazmak artık kısa bir adımdır; bir sonraki bölüm Düzlemde Doğru Denklemleri bu denklemle başlar.

 CC BY-NC-SA 4.0

3. Düzlemde Doğru Denklemleri

Önceki bölümde bir doğrunun eğimini, paralellik ve diklik koşullarını ve iki doğru arasındaki açıyı gördük (Bölme Oranı, Eğim ve Açı). Şimdi bir doğruyu tamamen belirleyen bilgileri, yani bir noktasını ve eğimini, iki noktasını ya da orijine uzaklığını, bir denkleme çevireceğiz. Bu denklemler elimizde olunca "şu nokta bu doğrunun üzerinde mi?", "şu nokta doğruya ne kadar uzak?" gibi geometrik soruları birkaç satırlık hesapla yanıtlayabileceğiz.

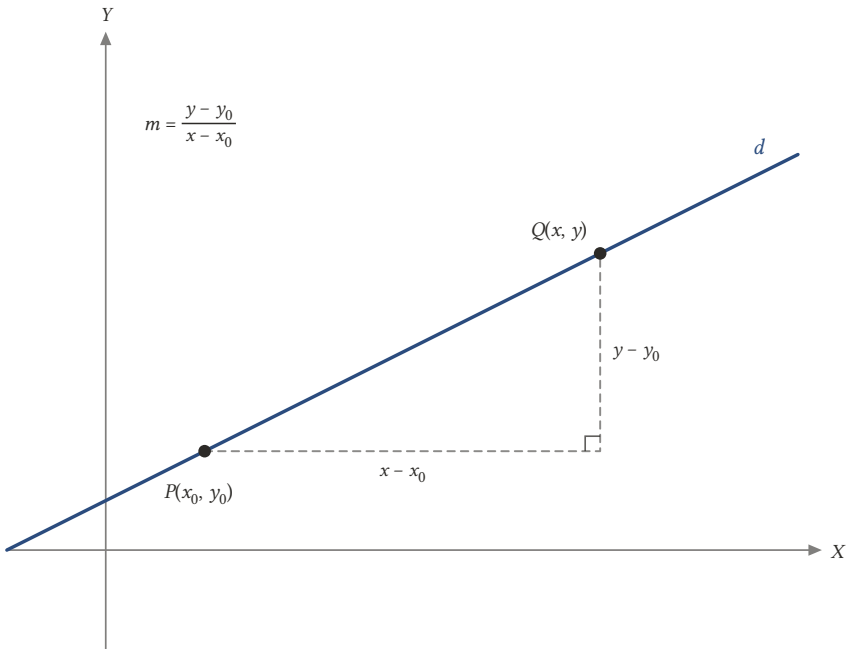
3.1 Bir Noktası ve Eğimi Verilen Doğru

Bir doğru, üzerindeki tek bir nokta ve eğimiyle tamamen belirlenir: noktadan başlayıp eğimin gösterdiği yönde ilerlemek doğrunun bütün noktalarını verir. Doğru üzerindeki rastgele bir $Q(x, y)$ noktasını $P(x_0, y_0)$ ile birleştiren parçanın eğimi de m olmalıdır; yani $x \neq x_0$ için $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = m$ olur. Paydadan kurtulunca aşağıdaki tanıma ulaşırız.

Tanım 3.1 (Bir noktası ve eğimi verilen doğrunun denklemi). Düzlemde $P(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan d doğrusunun denklemi

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

biçiminde tanımlanır.



Şekil 3.1: Nokta-eğim denklemi: d doğrusu üzerindeki her $Q(x, y)$ noktası için P'den Q'ya giden parçanın eğimi aynı m sayısıdır. Kesikli dik üçgenin kenarları $x - x_0$ ve $y - y_0$'dır.

Yani bir doğrunun denklemi, "bir (x, y) noktası bu doğrunun üzerindedir" demenin cebirsel yoludur: (x, y) denklemi sağlıyorsa noktası doğru üzerindedir, sağlamıyorsa değildir. $x = x_0$ alındığında denklem $y = y_0$ verir; demek ki P noktasının kendisi de denklemi sağlar.

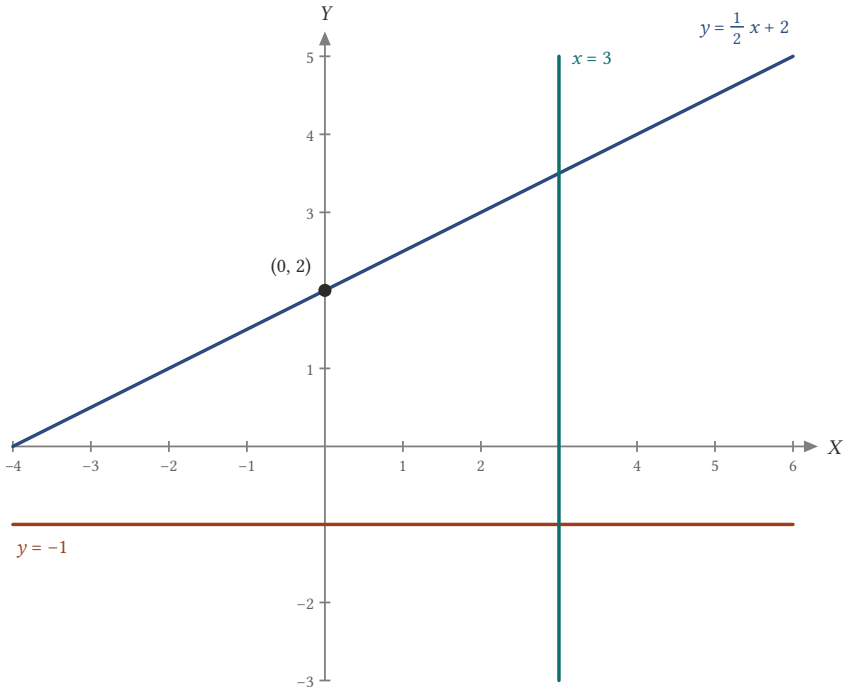
 CC BY-NC-SA 4.0

Tanımdaki denklemin iki kullanışlı özel hâli ve eğimi olmayan doğruların denklemi aşağıdaki sonuçta toplanmıştır.

Sonuç 3.1 (Eğim-kesen biçimi, yatay ve düşey doğrular). *a) Y-eksenini $(0, b)$ noktasında kesen ve eğimi m olan doğrunun denklemi $y = mx + b$'dir.*
b) X-eksenine paralel bir doğrunun denklemi, bir $b \in \mathbb{R}$ için $y = b$'dir.
c) Y-eksenine paralel bir doğrunun denklemi, bir $a \in \mathbb{R}$ için $x = a$'dır.

> ***İspat.***
> *a) Tanım 3.1 içinde $(x_0, y_0) = (0, b)$ yazılırsa $y - b = m(x - 0)$, yani $y = mx + b$ bulunur.*
> *b) X-eksenine paralel bir doğrunun eğimi 0'dır. Doğrunun Y-eksenini kestiği nokta $(0, b)$ ise (a) şıkkında $m = 0$ alınarak $y = b$ elde edilir.*
> *c) Y-eksenine paralel bir doğrunun eğimi tanımsızdır; bu yüzden Tanım 3.1 kullanılamaz. Böyle bir doğru X-eksenini bir $(a, 0)$ noktasında keser ve Y-eksenine paralel olduğu için bütün noktalarının apsisi a'dır. Tersine, apsisi a olan her nokta bu doğrunun üzerindedir. Dolayısıyla doğrunun noktaları tam olarak $x = a$ denklemini sağlayan noktalardır.*
> ■

Aşağıdaki şekilde her üç türden birer doğru görülüyor: eğimi $\frac{1}{2}$ olup Y-eksenini $(0, 2)$'de kesen $y = \frac{1}{2}x + 2$ doğrusu, yatay $y = -1$ doğrusu ve düşey $x = 3$ doğrusu.



Şekil 3.2: Üç tür doğru: eğimi 1/2 olup Y-eksenini (0, 2)'de kesen y = x/2 + 2 doğrusu, yatay y = −1 doğrusu ve düşey x = 3 doğrusu.

Örnek 3.1 (İki noktası verilen doğru). Dik koordinatları $P_1(2, -1)$ ve $P_2(-1, 3)$ olan noktalardan geçen doğrunun denklemini bulunuz.

> **Çözüm.**
> **Adım 1: Eğim.** P_1'den P_2'ye olan yönlü doğru parçasının eğimi
>
> $$m = \frac{3 - (-1)}{-1 - 2} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$
>
> olur. Yani x üç birim azalırken y dört birim artar; ya da aynı şey, x üç birim artarken y dört birim azalır.
> **Adım 2: P_1 noktasıyla denklem.** Tanım 3.1 içinde $(x_0, y_0) = (2, -1)$ alalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y-(-1)=-\frac{4}{3}(x-2).$$

Sağ taraf $-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$'tür; her iki yandan 1 çıkarınca daha kısa olarak

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$

bulunur.

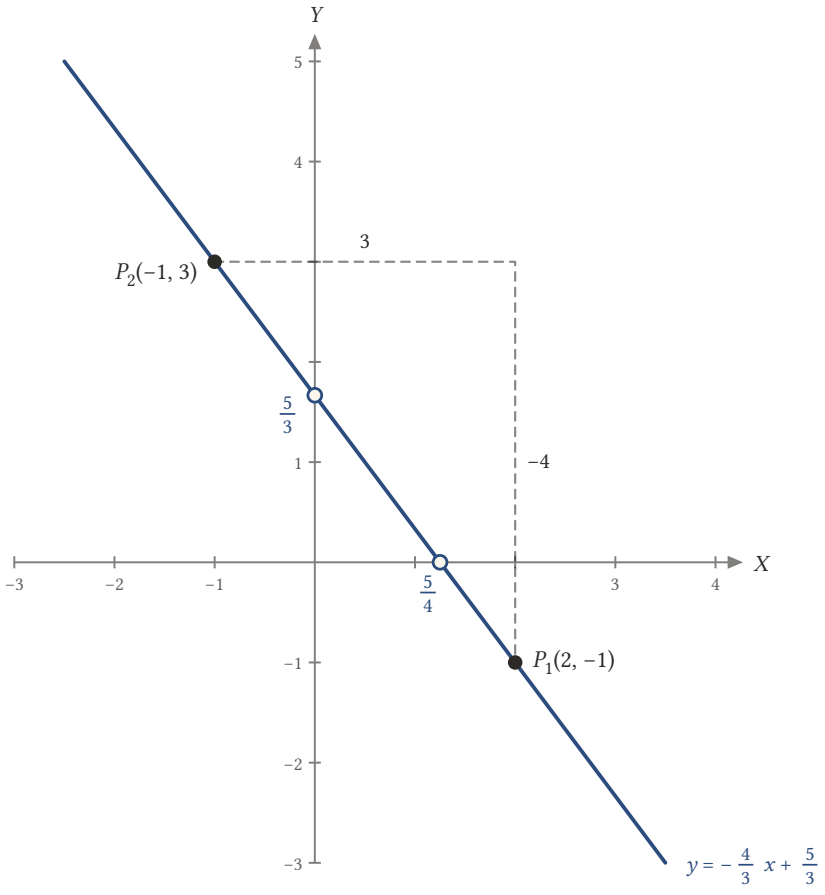
Adım 3: P_2 noktasıyla aynı sonuç. Bu kez $(x_0,y_0)=(-1,3)$ alalım:

$$y-3=-\frac{4}{3}\left(\,x-(-1)\,\right).$$

Sağ taraf $-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}$'tür; her iki yana $3=\frac{9}{3}$ ekleyince yine

$$y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$

elde edilir. Beklendiği gibi hangi noktanın kullanıldığı sonucu değiştirmez. Denklemde $y=0$ yazılırsa $x=\frac{5}{4}$, $x=0$ yazılırsa $y=\frac{5}{3}$ bulunur; doğru eksenleri $\left(\frac{5}{4},0\right)$ ve $\left(0,\frac{5}{3}\right)$ noktalarında keser.



Şekil 3.3: $P_1(2, -1)$ ve $P_2(-1, 3)$'ten geçen doğru. Eğim üçgeninde x 3 artarken y 4 azalır; doğru eksenleri (5/4, 0) ve (0, 5/3) noktalarında keser.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu örnekte izlediğimiz yol her iki nokta için işler: önce iki noktadan eğimi hesaplar, sonra noktalardan birini nokta-eğim denklemine koyarız. Bunu bir kez genel olarak yazalım.

Önerme 3.1 (İki noktası verilen doğrunun denklemi). *$P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ farklı iki nokta olsun.*
a) $x_1 \neq x_2$ ise P_1 ve P_2'den geçen doğrunun denklemi

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)$$

olur.
b) $x_1 = x_2$ ise bu doğrunun denklemi $x = x_1$'dir.

> ***İspat.***
> *a) $x_1 \neq x_2$ olduğundan doğrunun eğimi tanımlıdır ve $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$'dir (Bölme Oranı, Eğim ve Açı). Bu eğimi ve P_1 noktasını Tanım 3.1 içine koymak istenen denklemi verir. P_2 de bu denklemi sağlar, çünkü $x = x_2$ yazınca sağ taraf $y_2 - y_1$ olur.*
> *b) İki noktanın apsisleri eşitse onları birleştiren doğru Y-eksenine paraleldir ve Sonuç 3.1 (c) şıkkına göre denklemi $x = x_1$'dir.*
> ■

Bir doğrunun eksenleri kestiği noktalar biliniyorsa denklem özellikle simetrik bir biçim alır.

Önerme 3.2 (Eksenleri kestiği noktalar verilen doğru). *$a \neq 0$ ve $b \neq 0$ olmak üzere X-eksenini $(a, 0)$, Y-eksenini $(0, b)$ noktasında kesen doğrunun denklemi*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

olur.

> ***İspat.***
> *$a \neq 0$ olduğundan iki noktanın apsisleri farklıdır ve Önerme 3.1 (a) şıkkı kullanılabilir. Eğim*
>
> $$m = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$$
>
> *olur. $(0, b)$ noktası Y-ekseni üzerinde olduğu için Sonuç 3.1 (a) şıkkından denklem $y = -\dfrac{b}{a}x + b$ olarak yazılır. Her iki yanı $b \neq 0$ ile bölersek*
>
> $$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$
>
> *ve terimleri düzenleyince $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ bulunur.*
> ■

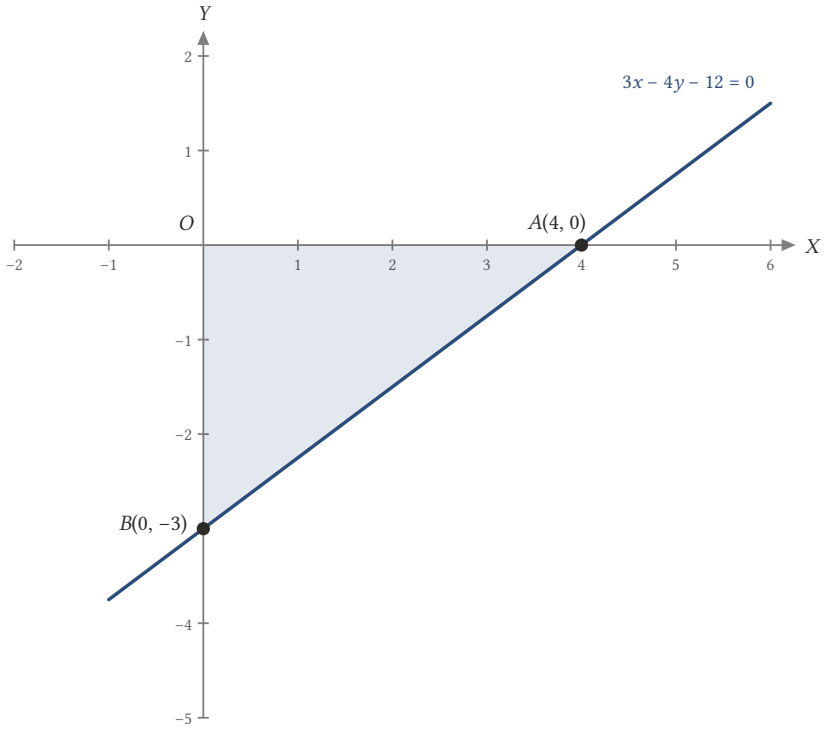
Yani paydalarda doğrudan eksen kesişimleri okunur: $x/a + y/b = 1$ denkleminde $y = 0$ yazınca $x = a$, $x = 0$ yazınca $y = b$ çıkar. Doğru orijinden geçiyorsa ($a = b = 0$) ya da bir eksene paralelse bu biçim kullanılamaz.

Örnek 3.2 (Eksen kesişimlerinden denklem). X-eksenini $A(4, 0)$, Y-eksenini $B(0, -3)$ noktasında kesen doğrunun denklemini ve eğimini bulunuz.

> **Çözüm.**
> **Adım 1: Denklem.** Önerme 3.2 içinde $a = 4$ ve $b = -3$ alınırsa
>
> $$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$$
>
> olur. Paydaları yok etmek için her iki yanı 12 ile çarpalım: $3x - 4y = 12$, yani
>
> $$3x - 4y - 12 = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: Eğim. Denklemi y'ye göre çözersek $4y = 3x - 12$, buradan $y = \frac{3}{4}x - 3$ bulunur. Demek ki eğim $m = \frac{3}{4}$'tür. Aynı sonuç ispattaki $m = -\frac{b}{a} = -\frac{-3}{4}$ formülünden de okunur.



Şekil 3.4: X-eksenini $A(4, 0)$, Y-eksenini $B(0, -3)$ noktasında kesen doğru: $x/4 - y/3 = 1$, yani $3x - 4y - 12 = 0$.

■

Örnek 3.3 (Bir doğru parçasının orta dikmesi). $P_1(7, 4)$ ve $P_2(-1, -2)$ uç noktalarına sahip doğru parçasına, orta noktasında dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Orta nokta. $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$'nin orta noktası $P_0(x_0, y_0)$ olsun. Orta nokta koordinatları uç noktaların koordinatlarının aritmetik ortalamasıdır (Bölme Oranı, Eğim ve Açı):

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3, \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1.$$

Böylece $P_0(3, 1)$ bulunur.
Adım 2: Parçanın eğimi. P_1P_2 doğru parçasının eğimi m olmak üzere

$$m = \frac{-2 - 4}{-1 - 7} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

olur.
Adım 3: Dik doğrunun eğimi. Aradığımız doğruya $\bar{d}$, eğimine $\bar{m}$ diyelim. İki doğrunun dik olması için eğimlerin çarpımı -1 olmalıdır: $m\bar{m} = -1$. Buradan

$$\bar{m} = -\frac{1}{m} = -\frac{4}{3}$$

çıkar.
Adım 4: Denklem. $\bar{d}$ doğrusu $P_0(3, 1)$'den geçer ve eğimi $-\frac{4}{3}$'tür. Tanım 3.1 ile

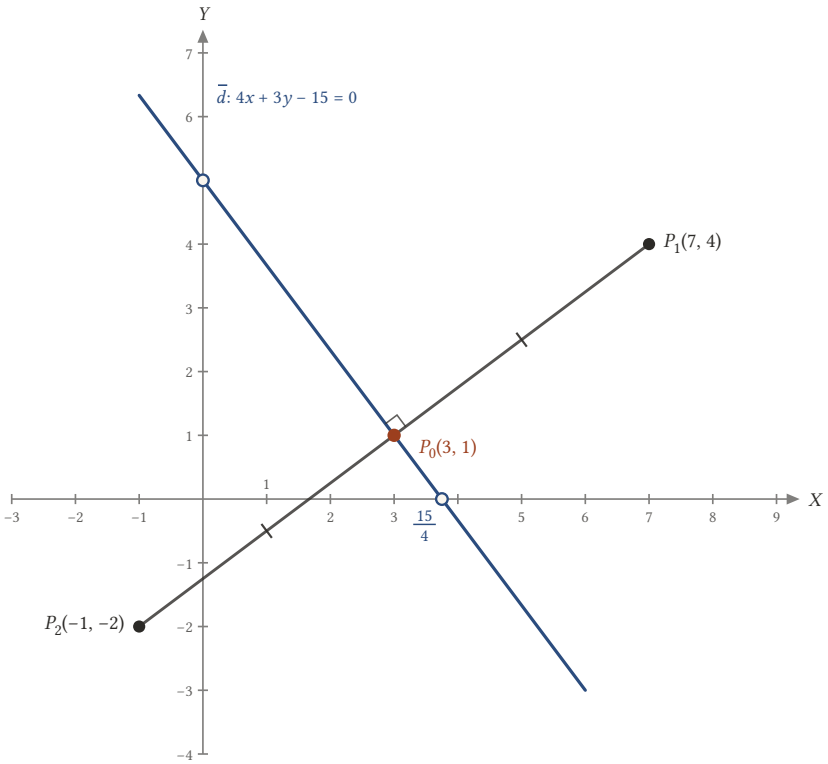
 CC BY-NC-SA 4.0

$$y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 3)$$

yazılır. Sağ taraf $-\frac{4}{3}x + 4$ olduğundan

$$y = -\frac{4}{3}x + 5$$

bulunur. Her iki yanı 3 ile çarpıp terimleri bir yana toplarsak aynı doğru $4x + 3y - 15 = 0$ olarak da yazılır.
Sağlama: $\bar{d}$ üzerindeki $(0, 5)$ noktasının P_1'e uzaklığının karesi $7^2 + 1^2 = 50$, P_2'ye uzaklığının karesi $1^2 + 7^2 = 50$'dir. Orta dikmenin her noktası parçanın iki ucuna eşit uzaklıktadır; sonuç bununla uyumludur.



Şekil 3.5: P_1P_2 parçasının orta dikmesi: $\bar{d}$ doğrusu orta nokta $P_0(3, 1)$'den geçer ve parçaya diktir. Eşitlik çentikleri iki yarının eşit olduğunu gösterir.

■

3.2 Bir Doğrunun Genel Denklemi

Şimdiye kadar gördüğümüz bütün biçimler ($y - y_0 = m(x - x_0)$, $y = mx + b$, $x = a$, $x/a + y/b = 1$) paydalar temizlenip terimler bir yana toplanınca aynı tipte bir denkleme dönüşür. Bu ortak biçime bir ad verelim.

Tanım 3.2 (Doğrunun genel denklemi). $A, B, C \in \mathbb{R}$ ve A ile B'nin ikisi birden sıfır olmamak üzere

$$d : Ax + By + C = 0$$

biçimindeki denkleme, düzlemdeki d doğrusunun **genel denklemi** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani genel denklem, doğruyu x ve y'ye göre birinci dereceden bir denklemle anlatır. $A = B = 0$ olsaydı denklem $C = 0$'a inerdi: $C \neq 0$ ise hiçbir nokta, $C = 0$ ise düzlemin bütün noktaları bu denklemi sağlardı; iki durumda da ortada bir doğru olmazdı.
Aşağıdaki önerme, her doğrunun bir genel denklemi olduğunu, her genel denklemin de gerçekten bir doğru belirttiğini ve eğimin katsayılardan nasıl okunduğunu söyler.

Önerme 3.3 (Genel denklem ve eğim). *a) Düzlemdeki her doğrunun bir genel denklemi vardır.*
b) A ile B'nin ikisi birden sıfır olmamak üzere $Ax + By + C = 0$ denklemini sağlayan noktalar bir doğru oluşturur. $B \neq 0$ ise bu doğrunun eğimi

$$m = -\frac{A}{B}$$

olur; $B = 0$ ise doğru Y-eksenine paraleldir ve eğimi tanımsızdır.

İspat.
a) Doğru Y-eksenine paralel değilse bir m eğimi ve üzerinde bir (x_0, y_0) noktası vardır. Tanım 3.1 denklemindeki terimleri bir yana toplarsak

$$mx - y + (y_0 - mx_0) = 0$$

olur; bu, $A = m$, $B = -1$, $C = y_0 - mx_0$ olan bir genel denklemdir. Doğru Y-eksenine paralelse Sonuç 3.1 (c) şıkkına göre denklemi $x = a$, yani $1 \cdot x + 0 \cdot y - a = 0$'dır.
b) $B \neq 0$ ise denklemi y'ye göre çözebiliriz:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Sonuç 3.1 (a) şıkkına göre bu, Y-eksenini $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ noktasında kesen ve eğimi $-\frac{A}{B}$ olan doğrunun denklemidir. $B = 0$ ise $A \neq 0$'dır ve denklem $x = -\frac{C}{A}$ olur; bu da Y-eksenine paralel bir doğrudur.
■

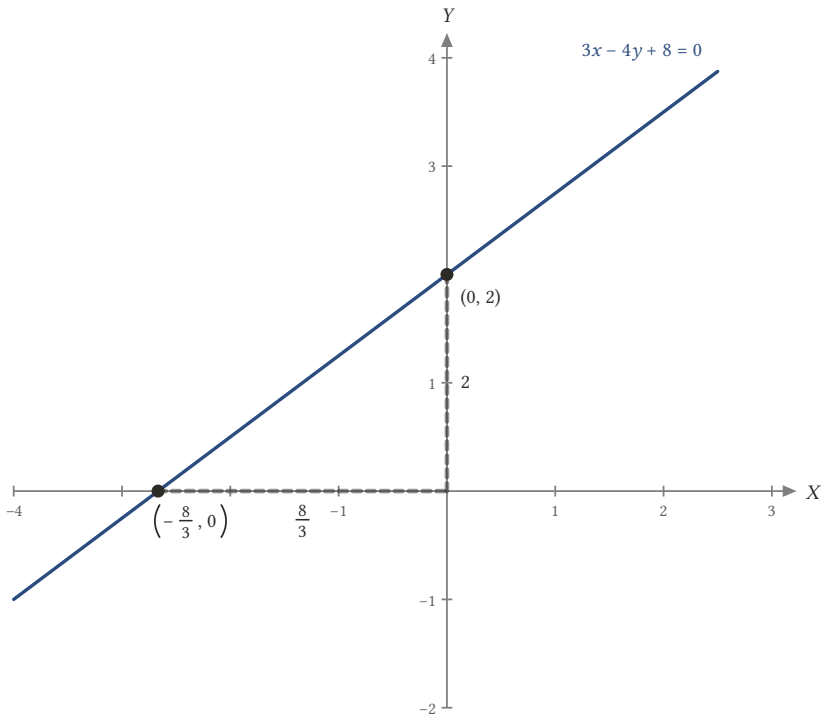
Örnek 3.4 (Genel denklemden eğim ve eksen kesişimleri). $d : 3x - 4y + 8 = 0$ doğrusunun eğimini ve eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Eğim. $A = 3$, $B = -4$, $C = 8$'dir. $B \neq 0$ olduğundan Önerme 3.3 ile

$$m = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

bulunur.
Adım 2: Eksen kesişimleri. $y = 0$ yazılırsa $3x + 8 = 0$, yani $x = -\frac{8}{3}$ olur; doğru X-eksenini $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$'da keser. $x = 0$ yazılırsa $-4y + 8 = 0$, yani $y = 2$ olur; doğru Y-eksenini $(0, 2)$'de keser.
Sağlama olarak eğimi bu iki noktadan hesaplayalım: $\frac{2-0}{0-(-8/3)} = \frac{2}{8/3} = \frac{3}{4}$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.6: $3x - 4y + 8 = 0$ doğrusu eksenleri $(-8/3, 0)$ ve $(0, 2)$'de keser; eğim üçgeninin kenarları 8/3 ve 2 olduğundan eğim $2 : 8/3 = 3/4$'tür.

■

Örnek 3.5 (Doğru üzerinde verilen uzaklıkta noktalar). $P_0(3, 2)$ noktasından geçen d doğrusunun eğimi $m = \frac{3}{4}$'tür. Bu doğru üzerinde, P_0'a 5 birim uzaklıkta olan iki noktayı bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Doğrunun denklemi. $P(x, y)$ doğru üzerinde, P_0'dan farklı bir nokta olsun. P_0P parçasının eğimi m olduğundan

$$\frac{y-2}{x-3} = \frac{3}{4}$$

olur. İçler dışlar çarpımıyla $4(y-2) = 3(x-3)$, yani $4y - 8 = 3x - 9$ ve buradan

$$4y - 3x + 1 = 0$$

genel denklemi elde edilir. Bu denklemi y'ye göre çözersek $y = \dfrac{3x-1}{4}$ bulunur; yani doğrunun her noktası $P\left(x, \dfrac{3x-1}{4}\right)$ biçimindedir.
Adım 2: Uzaklık koşulu. İki nokta arasındaki uzaklık formülüyle (Dik Koordinatlar ve Uzaklık)

$$\mid P_0P \mid = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + \left(\frac{3x-1}{4} - 2\right)^2} = 5$$

yazılır. Parantez içini sadeleştirelim:

$$\frac{3x-1}{4} - 2 = \frac{3x-1-8}{4} = \frac{3x-9}{4} = \frac{3(x-3)}{4}.$$

İki yanın karesini alırsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
(x-3)^2 + \frac{9}{16}(x-3)^2 &= 25 \\
\frac{16}{16}(x-3)^2 + \frac{9}{16}(x-3)^2 &= 25 \\
16(x-3)^2 + 9(x-3)^2 &= 25 \cdot 16 \\
25\,(x-3)^2 &= 25 \cdot 16 \\
(x-3)^2 &= 16
\end{aligned}
$$

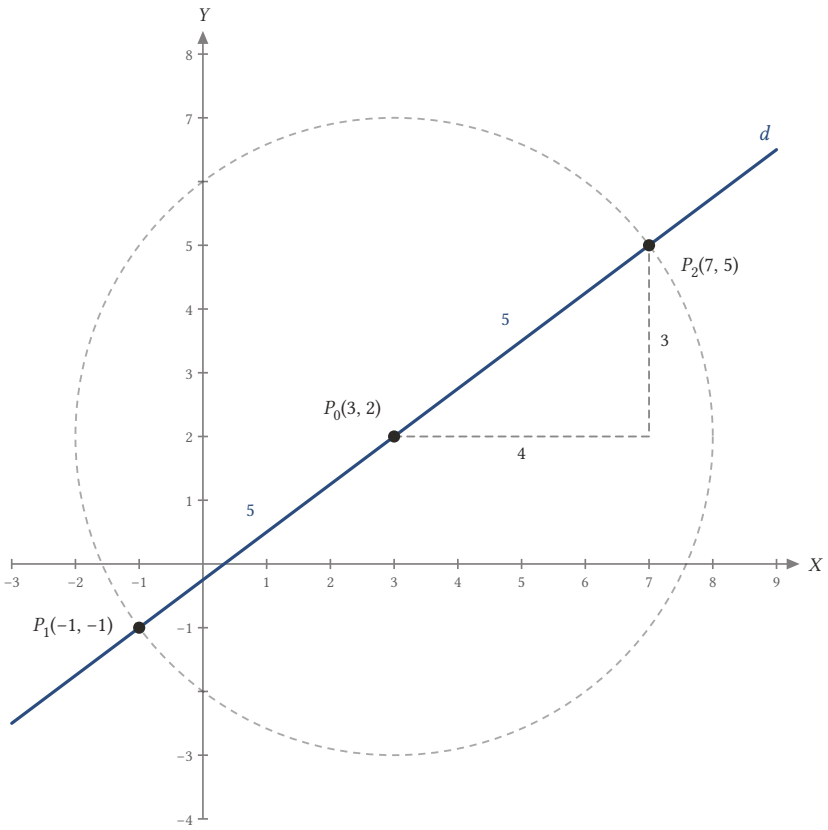
bulunur.

Adım 3: Noktalar. $(x-3)^2 = 16$ ise $x - 3 = \pm 4$, yani $x_1 = -1$ ve $x_2 = 7$'dir. Karşılık gelen ordinatlar $y = \frac{3x-1}{4}$'ten

$$y_1 = \frac{3(-1)-1}{4} = -1, \qquad y_2 = \frac{3 \cdot 7 - 1}{4} = 5$$

olur. Aranan noktalar $P_1(-1,-1)$ ve $P_2(7,5)$'tir.

Bu sonucu şöyle de görebiliriz: eğim $\frac{3}{4}$ olduğu için doğru üzerinde x yönünde 4 birim ilerleyince y yönünde 3 birim ilerlenir ve bu adımın uzunluğu $\sqrt{4^2+3^2} = 5$'tir. $P_0(3,2)$'den bir adım ileri $(7,5)$'e, bir adım geri $(-1,-1)$'e götürür.



Şekil 3.7: $P_0(3, 2)$'den geçen, eğimi 3/4 olan d doğrusu. Merkezi P_0, yarıçapı 5 olan çember doğruyu aranan $P_1(-1, -1)$ ve $P_2(7, 5)$ noktalarında keser; yatay 4, düşey 3 birimlik adımın uzunluğu 5'tir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

3.3 Bir Doğrunun Normal Denklemi

Bir doğruyu belirlemenin başka bir yolu, orijinden doğruya bakmaktır. Orijinden doğruya bir dikme indirelim ve bu dikmeye ℓ diyelim. Dikmenin uzunluğu, yani doğrunun orijine uzaklığı r, ve ℓ dikmesinin X-ekseninin pozitif yönüyle yaptığı pozitif yönlü (saat yönünün tersine ölçülen) açı ω biliniyorsa doğru tek türlü belirlenir: ℓ üzerinde orijinden r birim yürüyüp o noktada ℓ'ye dik olan doğruyu çizmek yeter. Bu iki sayıdan doğrunun denklemini çıkaralım.

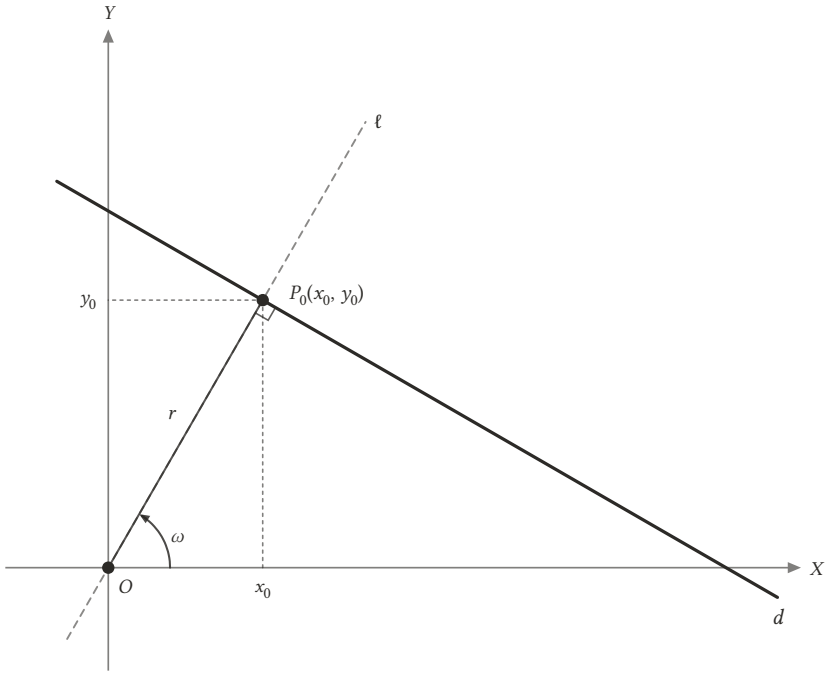
Önerme 3.4 (Orijine uzaklığı ve dikme açısı verilen doğru). *d doğrusunun orijine uzaklığı $r \geq 0$ ve orijinden d'ye çizilen ℓ dikmesinin X-ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açı ω olsun. Bu durumda d'nin denklemi*

$$x\cos\omega + y\sin\omega - r = 0$$

olur.

İspat.
Adım 1: Dikmenin ayağı. *Dikmenin d üzerindeki ayağı $P_0(x_0, y_0)$ olsun. P_0, ℓ ışını üzerinde orijinden r uzaklıktadır. Açısı ω olan bir ışın üzerinde orijinden r uzaklıktaki noktanın koordinatları dik üçgenden okunur:*

$$x_0 = r\cos\omega, \qquad y_0 = r\sin\omega.$$



Şekil 3.8: Normal denklemin kuruluşu: orijinden d*'ye inen dikme ℓ doğrusu üzerindedir, uzunluğu* r*,* X*-ekseniyle yaptığı açı* ω*'dır. Dikmenin ayağı* P_o *= (*r *cos* ω*,* r *sin* ω*) noktasıdır.*

Adım 2: Genel durum. *ω, $\frac{\pi}{2}$'nin bir katı olmasın; o zaman $\sin\omega \neq 0$ ve $\cos\omega \neq 0$'dır. ℓ doğrusunun eğim açısı $\omega < \pi$ ise ω, $\omega \geq \pi$ ise $\omega - \pi$'dir. $\tan$ fonksiyonunun periyodu π olduğundan her iki durumda da ℓ'nin eğimi $m_\ell = \tan\omega$'dır. $d \perp \ell$ olduğundan eğimlerin çarpımı -1 olmalıdır:*

$$m_d = -\frac{1}{m_\ell} = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega} = -\cot\omega.$$

d, $P_0(r\cos\omega, r\sin\omega)$'dan geçer ve eğimi $-\cot\omega$'dır. Tanım 3.1 ile

$$y - r\sin\omega = -\cot\omega\,(x - r\cos\omega)$$

yazılır. Her iki yanı $\sin\omega \neq 0$ ile çarpalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y\sin\omega - r\sin^2\omega = -x\cos\omega + r\cos^2\omega.$$

Terimleri sol yana toplarsak

$$x\cos\omega + y\sin\omega - r(\sin^2\omega + \cos^2\omega) = 0$$

olur; $\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$ *olduğundan istenen* $x\cos\omega + y\sin\omega - r = 0$ *denklemi çıkar.*
Adım 3: Özel durumlar. $\cos\omega = 0$ *ise* $\sin\omega = \pm 1$*'dir;* ℓ *düşeydir,* d *ise yataydır ve* $P_0(0, \pm r)$*'den geçer. Denklemi* $y = \pm r$*, yani* $y\sin\omega = r$*'dir ve bu da* $x\cos\omega + y\sin\omega - r = 0$ *ile aynıdır.* $\sin\omega = 0$ *ise* $\cos\omega = \pm 1$*'dir;* d *düşeydir,* $P_0(\pm r, 0)$*'dan geçer, denklemi* $x = \pm r$*, yani* $x\cos\omega = r$*'dir ve yine aynı biçime ulaşılır.*
■

Bu önerme bir doğrunun özel bir denklemini verdiği için ona bir ad veriyoruz.

Tanım 3.3 (Doğrunun normal denklemi). d doğrusunun orijine uzaklığı $r \geq 0$ ve orijinden d'ye çizilen ℓ dikmesinin X-ekseniyle yaptığı pozitif yönlü açı $\omega \in [0, 2\pi)$ olmak üzere

$$x\cos\omega + y\sin\omega - r = 0$$

denklemine d doğrusunun **normal denklemi** denir.

Yani normal denklem, genel denklemin özel bir yazılışıdır: x ve y'nin katsayıları bir açının kosinüsü ve sinüsüdür (dolayısıyla kareleri toplamı 1'dir) ve sabit terim, orijine uzaklığın eksi işaretlisidir. Katsayılara bakan biri doğrunun orijine ne kadar uzak olduğunu ve orijinden hangi yönde durduğunu hemen okur. Doğru orijinden geçiyorsa ($r = 0$) dikmenin yönü tek değildir, ω ile $\omega + \pi$ aynı doğruyu verir; bu durumda hangi açının seçileceği aşağıda Sonuç 3.2 ile belirlenecek.
Elimizde bir genel denklem varsa normal denklemi bulmak için iki denklemin katsayıları arasındaki ilişkiyi bilmemiz gerekir. Önce, aynı doğrunun iki genel denkleminin nasıl ilişkili olduğunu görelim.

Lemma 3.1 (Aynı doğrunun genel denklemleri orantılıdır). $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *ve* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ *iki genel denklem olsun. Bu iki denklem aynı doğruyu gösterir ancak ve ancak*

$$A_2 = kA_1, \qquad B_2 = kB_1, \qquad C_2 = kC_1$$

olacak biçimde bir $k \neq 0$ *sayısı varsa.*

İspat.
Orantılıysa aynı doğru. $k \neq 0$ *olduğundan ikinci denklem, birincinin* k *ile çarpılmışıdır:* (x, y) *birinciyi sağlıyorsa ikinciyi de sağlar; ikinciyi sağlıyorsa* k*'ya bölerek birinciyi de sağladığını görürüz.*
Aynı doğruysa orantılı. *İki denklem aynı* d *doğrusunu göstersin.*
$B_1 \neq 0$ *olsun. O zaman her* x *için birinci denklemi sağlayan tam bir* y *vardır; yani* d *üzerinde apsisleri farklı noktalar bulunur.* $B_2 = 0$ *olsaydı ikinci denklemi sağlayan bütün noktaların apsisi* $-C_2/A_2$ *olurdu; bu imkânsız olduğundan* $B_2 \neq 0$*'dır. İki denklemi* y*'ye göre çözelim:*

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}, \qquad y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}.$$

d*'nin apsisi* 0 *olan noktası iki denklemi de sağladığından* $\dfrac{C_1}{B_1} = \dfrac{C_2}{B_2}$ *olur. Apsisi* 1 *olan noktası da iki denklemi sağladığından ve sabit terimler eşit olduğundan* $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2}$ *çıkar. Şimdi* $k = \dfrac{B_2}{B_1} \neq 0$ *alırsak* $B_2 = kB_1$*,* $A_2 = kA_1$ *ve* $C_2 = kC_1$ *olur.*
$B_1 = 0$ *olsun. O zaman* $A_1 \neq 0$*'dır ve* d*,* $x = -C_1/A_1$ *düşey doğrusudur. Yukarıdaki gerekçenin tersine,* $B_2 \neq 0$ *olsaydı* d *üzerinde apsisleri farklı noktalar olurdu; demek ki* $B_2 = 0$ *ve* $A_2 \neq 0$*'dır. İkinci denklem de* $x = -C_2/A_2$ *doğrusudur ve aynı doğru olduklarından* $\dfrac{C_1}{A_1} = \dfrac{C_2}{A_2}$ *olur.* $k = \dfrac{A_2}{A_1} \neq 0$ *alırsak* $A_2 = kA_1$*,* $B_2 = 0 = kB_1$ *ve* $C_2 = kC_1$ *bulunur.*
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu lemmayı bir doğrunun genel denklemine ve normal denklemine uygulayınca normal denklemi genel denklemden hesaplamanın yolu çıkar.

Önerme 3.5 (Genel denklemden normal denkleme). *$Ax + By + C = 0$ ve $x\cos\omega + y\sin\omega - r = 0$ aynı doğrunun, sırasıyla, genel ve normal denklemleri olsun. O zaman bir $k \neq 0$ için*

$$\cos\omega = kA, \qquad \sin\omega = kB, \qquad -r = kC$$

olur ve

$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

dir. Buna göre doğrunun normal denklemi, genel denklemin k ile çarpılmasıyla elde edilir:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,y \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

burada üç işaretin üçü de k'nın işaretidir.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: Orantı.*** *İki denklem aynı doğruyu gösterdiğinden Lemma 3.1 ile $\cos\omega = kA$, $\sin\omega = kB$ ve $-r = kC$ olacak biçimde bir $k \neq 0$ vardır. Başka bir deyişle genel ve normal denklemin katsayıları ya eşittir ($k = 1$) ya da orantılıdır.*
> ***Adım 2: k'nın büyüklüğü.*** *Temel trigonometrik özdeşlikten*
>
> $$\begin{aligned} 1 &= \cos^2\omega + \sin^2\omega \\ &= k^2A^2 + k^2B^2 = k^2\left(A^2 + B^2\right) \end{aligned}$$
>
> *bulunur. $A^2 + B^2 > 0$ olduğundan $k^2 = \dfrac{1}{A^2 + B^2}$, yani $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$'dir.*
> ***Adım 3: Normal denklem.*** *$\cos\omega = kA$, $\sin\omega = kB$, $-r = kC$ eşitliklerini normal denklemde yerine yazınca $kAx + kBy + kC = 0$ elde edilir; k'nın değeri konunca yukarıdaki denklem çıkar.*
> ■

Önermedeki $\pm$ işaretinden hangisinin seçileceği keyfî değildir; normal denklemde $r \geq 0$ olmak zorundadır.

Sonuç 3.2 (Çarpanın işareti). *Önerme 3.5 içindeki k çarpanının işareti şöyle seçilir:*
a) $C \neq 0$ ise k'nın işareti C'nin işaretinin tersidir.
b) $C = 0$ ise k'nın işareti B'nin işaretiyle aynı alınır; $B = 0$ da ise A'nın işaretiyle aynı alınır.

> ***İspat.***
> *a) $C \neq 0$ ise $(0, 0)$ noktası $Ax + By + C = 0$ denklemini sağlamaz; doğru orijinden geçmez ve $r > 0$'dır. $r = -kC > 0$ olması için k ile C'nin işaretleri zıt olmalıdır.*
> *b) $C = 0$ ise $r = -kC = 0$ olur ve doğru orijinden geçer. Bu durumda k'nın iki işareti de $r = 0$ verir ve iki seçim birbirine π kadar farklı iki açıya karşılık gelir; biri seçilmelidir. k'yı B ile aynı işaretli seçmek $\sin\omega = kB > 0$, yani $\omega \in (0, \pi)$ demektir. $B = 0$ ise $\sin\omega = 0$'dır; k'yı A ile aynı işaretli seçmek $\cos\omega = kA > 0$, yani $\omega = 0$ demektir. Böylece orijinden geçen her doğru için tek bir normal denklem sabitlenmiş olur.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Normal denklemi üç adımda bulmak

1. Genel denklemden A, B, C'yi oku ve $\sqrt{A^2+B^2}$'yi hesapla.
2. $k = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ çarpanının işaretini Sonuç 3.2 ile seç.
3. Genel denklemi k ile çarp. Sonra $r = -kC$, $\cos\omega = kA$, $\sin\omega = kB$'den r'yi ve ω'yı oku; ω'nın bölgesini $\cos\omega$ ile $\sin\omega$'nın işaretleri belirler.

Örnek 3.6 (Yatay bir doğrunun normal denklemi). $4y - 7 = 0$ doğrusunun normal denklemini, r uzaklığını ve ω açısını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Katsayılar. $A = 0$, $B = 4$, $C = -7$'dir ve $\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{0+4^2} = 4$ olur.
Adım 2: İşaret. $C < 0$ olduğundan $k > 0$ olmalıdır:

$$k = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{4}.$$

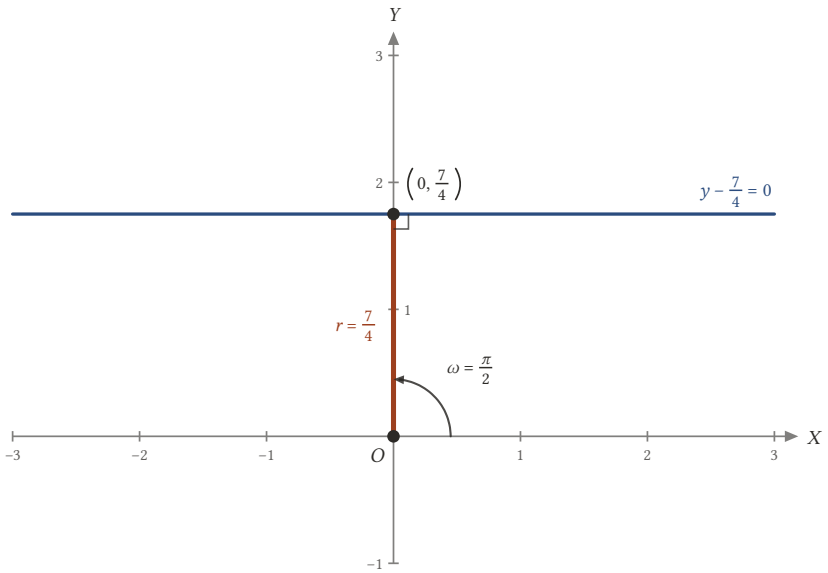
Adım 3: Normal denklem. $\cos\omega = kA = 0$, $\sin\omega = kB = 1$ ve $-r = kC = -\frac{7}{4}$ olduğundan normal denklem

$$x\cdot 0 + y\cdot 1 - \frac{7}{4} = 0, \qquad \text{yani} \qquad y - \frac{7}{4} = 0$$

olur.
Adım 4: r ve ω. $r = -kC = -\frac{1}{4}(-7) = \frac{7}{4}$'tür. Ayrıca

$$\left.\begin{aligned}\cos\omega &= 0\\ \sin\omega &= 1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \omega = \frac{\pi}{2}$$

bulunur. Gerçekten $y = \frac{7}{4}$ yatay doğrusuna orijinden inen dikme Y-ekseninin pozitif yarısı üzerindedir ve uzunluğu $\frac{7}{4}$'tür.



Şekil 3.9: $4y - 7 = 0$ doğrusuna orijinden inen dikme Y-ekseninin pozitif yarısı üzerindedir: $r = 7/4$, $\omega = \pi/2$.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 3.7 (Dikmesi üçüncü bölgede olan doğru). $3x + 4y + 10 = 0$ doğrusunun normal denklemini, r uzaklığını ve ω açısını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Katsayılar. $A = 3$, $B = 4$, $C = 10$'dur ve $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ olur.
Adım 2: İşaret. $C > 0$ olduğundan $k < 0$ olmalıdır: $k = -\frac{1}{5}$.
Adım 3: Normal denklem. Genel denklemi $-\frac{1}{5}$ ile çarparsak

$$-\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0$$

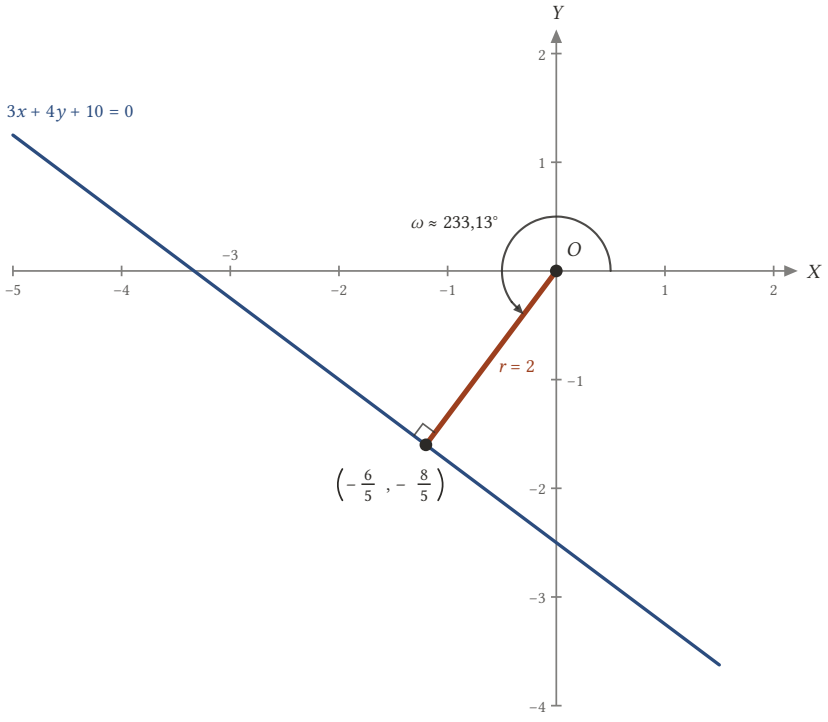
bulunur.
Adım 4: r ve ω. $r = -kC = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2$'dir. $\cos\omega = -\frac{3}{5}$ ve $\sin\omega = -\frac{4}{5}$ ikisi de negatif olduğundan ω üçüncü bölgededir. $\tan\omega = \frac{4}{3}$ olduğundan

$$\omega = \pi + \arctan\frac{4}{3} \approx 233{,}13^\circ$$

olur. Dikmenin ayağı $\big(\, r\cos\omega, r\sin\omega \,\big) = \big(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\big)$ noktasıdır; gerçekten

$$3\left(-\frac{6}{5}\right) + 4\left(-\frac{8}{5}\right) + 10 = -\frac{18}{5} - \frac{32}{5} + 10 = 0$$

olduğundan bu nokta doğru üzerindedir.



Şekil 3.10: $3x + 4y + 10 = 0$ doğrusu: dikmenin ayağı $(-6/5, -8/5)$ üçüncü bölgededir, $r = 2$ ve $\omega = \pi + \arctan(4/3) \approx 233{,}13^\circ$.

■

3.4 Bir Noktanın Doğruya Uzaklığı

Normal denklemin asıl gücü, bir noktanın doğruya uzaklığını tek bir formülle vermesidir. Önce ne ölçtüğümüzü açıkça söyleyelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 3.4 (Bir noktanın doğruya uzaklığı). P bir nokta, d bir doğru ve H, P'den d'ye çizilen dikmenin ayağı olsun. $\mid PH \mid$ uzunluğuna P noktasının d doğrusuna **uzaklığı** denir. $P \in d$ ise $H = P$ ve uzaklık 0'dır.

Yani bir noktanın doğruya uzaklığı, noktayı doğruya bağlayan en kısa yolun uzunluğudur. Gerçekten Q, d üzerinde H'den farklı bir nokta ise PHQ dik üçgeninde Pisagor teoremiyle $\mid PQ \mid^2 = \mid PH \mid^2 + \mid HQ \mid^2 > \mid PH \mid^2$ olur.
İki paralel doğru arasındaki uzaklık da aynı biçimde, birinden ötekine çizilen dikmenin uzunluğudur; bu uzunluk dikmenin nereden çizildiğine bağlı değildir, çünkü iki dikme ile iki paralel doğru bir dikdörtgen oluşturur.

Teorem 3.1 (Bir noktanın doğruya uzaklığı). *$d : x\cos\omega + y\sin\omega - r = 0$ bir doğrunun normal denklemi ve $P(x_0, y_0)$ bir nokta olsun. P'nin d doğrusuna uzaklığı*

$$\mid x_0\cos\omega + y_0\sin\omega - r \mid$$

dir.

İspat.
Adım 1: Dikme üzerinde bir ölçek. *ℓ, orijinden d'ye çizilen dikmeyi taşıyan doğru olsun. Her $u \in \mathbb{R}$ için $Q_u = (u\cos\omega, u\sin\omega)$ noktası ℓ üzerindedir: $u \geq 0$ iken ω yönündeki ışın üzerinde, $u < 0$ iken ters ışın üzerinde, orijinden $\mid u \mid$ uzaklıktadır. İki nokta arası uzaklık formülüyle*

$$\begin{aligned} \mid Q_uQ_v \mid^2 &= (u-v)^2\cos^2\omega + (u-v)^2\sin^2\omega \\ &= (u-v)^2 \end{aligned}$$

olur; yani $\mid Q_uQ_v \mid = \mid u - v \mid$'dir.
Adım 2: d'ye paralel doğruların denklemi. *Q_u noktasından geçen ve ℓ'ye dik olan doğrunun denklemi*

$$x\cos\omega + y\sin\omega - u = 0$$

dir. Bunun gerekçesi Önerme 3.4 ispatının aynısıdır: orada r yerine u yazılınca $r \geq 0$ varsayımı hiçbir adımda kullanılmaz. Özel olarak d, ℓ'yi Q_r noktasında keser.
Adım 3: P'den geçen paralel. *P'den geçen ve d'ye paralel olan doğru $\bar{d}$ olsun. $\bar{d}$ de ℓ'ye diktir; ℓ'yi bir Q_u noktasında keser ve Adım 2'ye göre denklemi $x\cos\omega + y\sin\omega - u = 0$'dır. $P \in \bar{d}$ bu denklemi sağladığından*

$$u = x_0\cos\omega + y_0\sin\omega$$

bulunur.
Adım 4: Uzaklık. *P'den d'ye çizilen dikme ℓ'ye paraleldir ve d ile $\bar{d}$ arasında kalır. $d \parallel \bar{d}$ olduğundan P'nin d'ye uzaklığı, d ile $\bar{d}$ arasındaki uzaklığa eşittir; bu da ikisini dik kesen ℓ üzerindeki Q_rQ_u parçasının uzunluğudur. Adım 1'den*

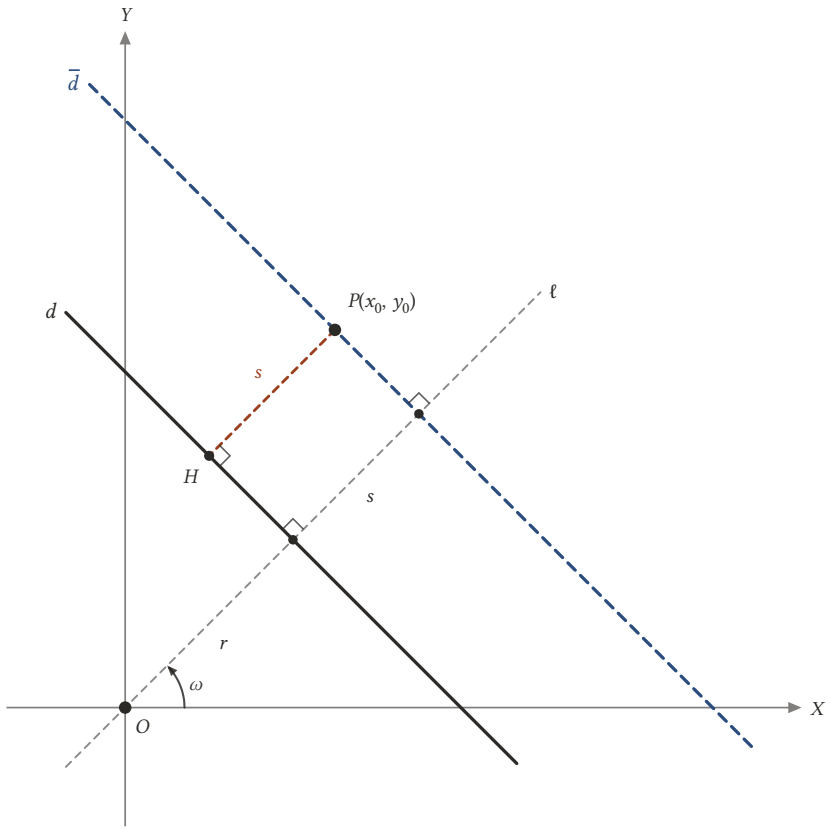
$$\mid Q_rQ_u \mid = \mid u - r \mid = \mid x_0\cos\omega + y_0\sin\omega - r \mid$$

elde edilir. $P \in d$ ise $u = r$ olur ve formül beklendiği gibi 0 verir.
Adım 5: İki tipik konum. *Aşağıdaki iki konum, formülün geometrik anlamını gösterir.*
Birinci konumda P, doğrunun orijinle karşı tarafındadır. d ile $\bar{d}$ arasındaki uzaklık $s > 0$ olsun; bu, P'nin d'ye uzaklığıdır. $\bar{d}$, ℓ'yi d'nin ötesinde, Q_{r+s} noktasında keser ve normal denklemi $x\cos\omega + y\sin\omega - (r+s) = 0$ biçimindedir. P bu denklemi sağladığından $x_0\cos\omega + y_0\sin\omega - (r+s) = 0$ ve buradan

$$s = x_0\cos\omega + y_0\sin\omega - r$$

bulunur. Bundan sonra da s harfini genel olarak bu ifade için kullanalım; birinci konumda s pozitiftir ve uzaklığın kendisidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.11: Birinci konum: P, d*'nin orijinle karşı tarafındadır.* P*'den geçen paralel* $\bar{\mathrm{d}}$*,* ℓ *dikmesini* $\mathrm{Q}_{\mathrm{r+s}}$*'de keser;* P*'nin* d*'ye uzaklığı iki paralel arasındaki* s *uzaklığıdır.*

İkinci konumda P, orijinle aynı taraftadır ve orijinin de ötesindedir. d'nin orijine göre simetriği $\bar{\bar{d}}$ ile gösterilsin; bu doğru ℓ'yi Q_{-r} noktasında keser ve denklemi

$$\bar{\bar{d}} : -x\cos\omega - y\sin\omega - r = 0$$

olarak yazılabilir. $\bar{d}$ ile $\bar{\bar{d}}$ arasındaki uzaklık t olsun. $\bar{d}$, ℓ'yi $Q_{-(r+t)}$ noktasında keser ve denklemi

$$\bar{d} : -x\cos\omega - y\sin\omega - (r+t) = 0$$

dir. $P \in \bar{d}$ bu denklemi sağladığından $-x_0\cos\omega - y_0\sin\omega - (r+t) = 0$, yani

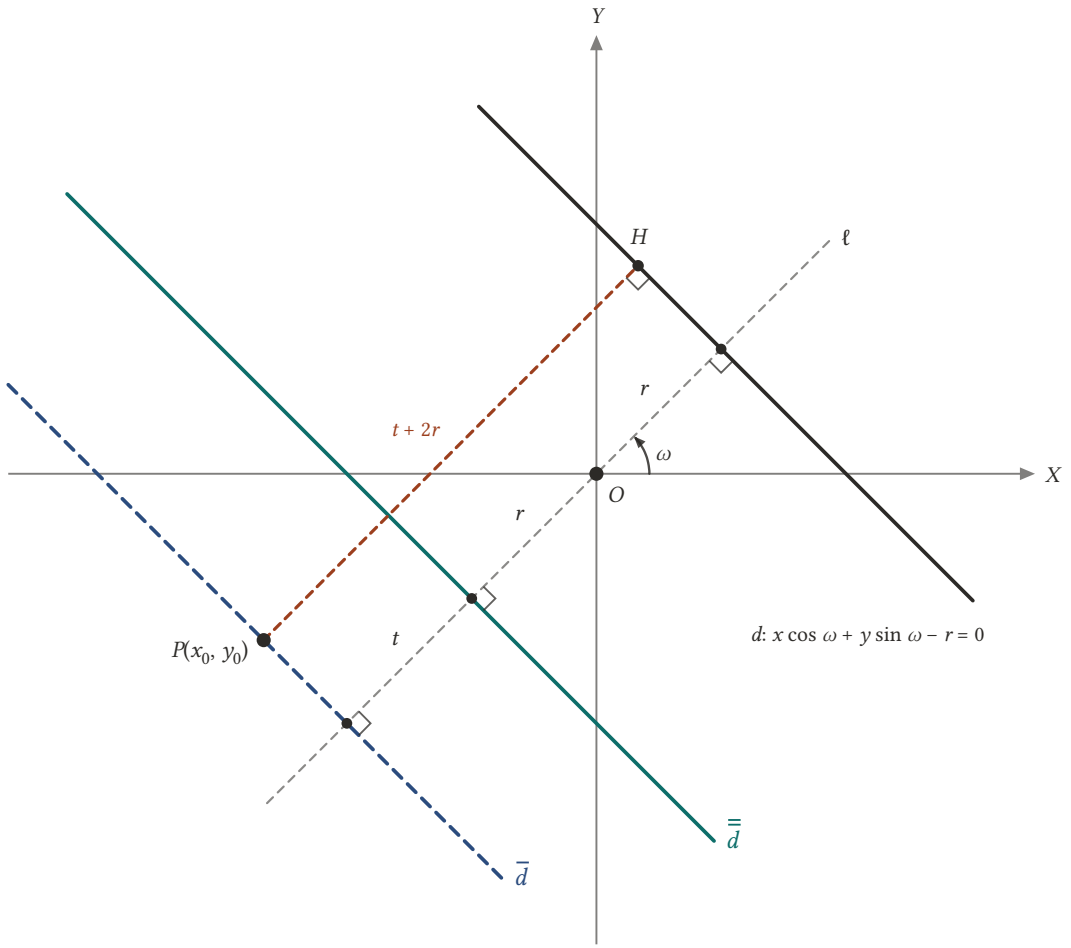
$$t = -x_0\cos\omega - y_0\sin\omega - r$$

bulunur. P'nin d'ye uzaklığı $t + 2r$ olduğundan bu uzaklık

$$t + 2r = -x_0\cos\omega - y_0\sin\omega + r = -s$$

olur. Bu konumda $s < 0$'dır ve uzaklık yine $|\ s\ |$'ye eşittir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.12: İkinci konum: P *orijinle aynı taraftadır ve orijinin ötesindedir. Yeşil doğru* d *'nin orijine göre simetriğidir;* P *'den geçen paralel* d̄ *ondan* t *kadar ötededir ve* P *'nin* d *'ye uzaklığı* t + 2r *'dir.*

■

İspattaki $s = x_0 \cos\omega + y_0 \sin\omega - r$ sayısının mutlak değeri uzaklığı verir; işareti de noktanın doğrunun hangi tarafında olduğunu söyler. Dikmenin ayağı da bu sayıyla yazılır:

$$H = \left(x_0 - s\cos\omega, y_0 - s\sin\omega \right).$$

Gerçekten P'den d'ye çizilen dikme ℓ'ye paraleldir, yani $(\cos\omega, \sin\omega)$ doğrultusundadır; bu nokta da d'yi sağlar, çünkü $x_0\cos\omega + y_0\sin\omega = s + r$ olduğundan

$$\begin{aligned}&(x_0 - s\cos\omega)\cos\omega + (y_0 - s\sin\omega)\sin\omega - r \\ &\quad = (s+r) - s(\cos^2\omega + \sin^2\omega) - r = 0\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 3.3 (Uzaklığın işareti). *$d : x\cos\omega + y\sin\omega - r = 0$ doğrusu orijinden geçmesin ($r > 0$) ve $P(x_0, y_0)$ için $s = x_0\cos\omega + y_0\sin\omega - r$ olsun.*
a) $s > 0$ ise P ile orijin d'nin farklı taraflarındadır.
b) $s < 0$ ise P ile orijin d'nin aynı tarafındadır.
c) $s = 0$ ise P, d üzerindedir.

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

$f(x,y) = x\cos\omega + y\sin\omega - r$ diyelim. OP parçasının noktaları $\lambda \in [0,1]$ için $(\lambda x_0, \lambda y_0)$'dır ve bu noktalarda

$$f(\lambda x_0, \lambda y_0) = \lambda\,(s + r) - r$$

olur. Bu ifade $\lambda = 0$'da $-r < 0$, $\lambda = 1$'de s değerini alan birinci dereceden bir fonksiyondur. $s > 0$ ise arada bir $\lambda \in (0,1)$ için sıfır olur; yani OP parçası d'yi keser ve P ile O farklı taraflardadır. $s < 0$ ise ifade $[0,1]$ boyunca negatif kalır; OP parçası d'yi kesmez ve P ile O aynı taraftadır. $s = 0$ ise P denklemi sağlar, yani d üzerindedir.

■

Formülü doğrudan genel denklemle de yazabiliriz; böylece normal denklemi açıkça yazmak gerekmez.

Sonuç 3.4 (Genel denklemle uzaklık formülü). *$P(x_0, y_0)$ noktasının $d : Ax + By + C = 0$ doğrusuna uzaklığı*

$$\frac{\mid Ax_0 + By_0 + C \mid}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

dir.

İspat.
Önerme 3.5 ile d'nin normal denklemi $kAx + kBy + kC = 0$'dır; burada $\cos\omega = kA$, $\sin\omega = kB$, $-r = kC$ ve $\mid k \mid = \dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$'dir. Teorem 3.1 ile uzaklık

$$\begin{aligned}\mid x_0\cos\omega + y_0\sin\omega - r \mid &= \mid k \mid \mid Ax_0 + By_0 + C \mid \\ &= \frac{\mid Ax_0 + By_0 + C \mid}{\sqrt{A^2+B^2}}\end{aligned}$$

olur.

■

Örnek 3.8 (Bir noktanın doğruya uzaklığını hesaplamak). $P(-2,-3)$ noktasının $8x + 15y - 24 = 0$ doğrusuna uzaklığını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Normal denklemin çarpanı. $A = 8$, $B = 15$, $C = -24$'tür. $C < 0$ olduğundan $k > 0$ olmalıdır:

$$k = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{8^2+15^2}} = \frac{1}{\sqrt{289}} = \frac{1}{17}.$$

Doğrunun normal denklemi $\frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y - \frac{24}{17} = 0$'dır.
Adım 2: s değeri. $x_0 = -2$ ve $y_0 = -3$ olduğundan

$$\begin{aligned}s &= \frac{8x_0 + 15y_0 - 24}{17} \\ &= \frac{8(-2) + 15(-3) - 24}{17} \\ &= \frac{-16 - 45 - 24}{17} = \frac{-85}{17} = -5\end{aligned}$$

bulunur.
Adım 3: Yorum. $s < 0$ olduğundan Sonuç 3.3 ile $(-2,-3)$ noktası ve orijin doğrunun aynı tarafındadır. İstenen uzaklık

$$\mid s \mid = \mid -5 \mid = 5$$

 CC BY-NC-SA 4.0

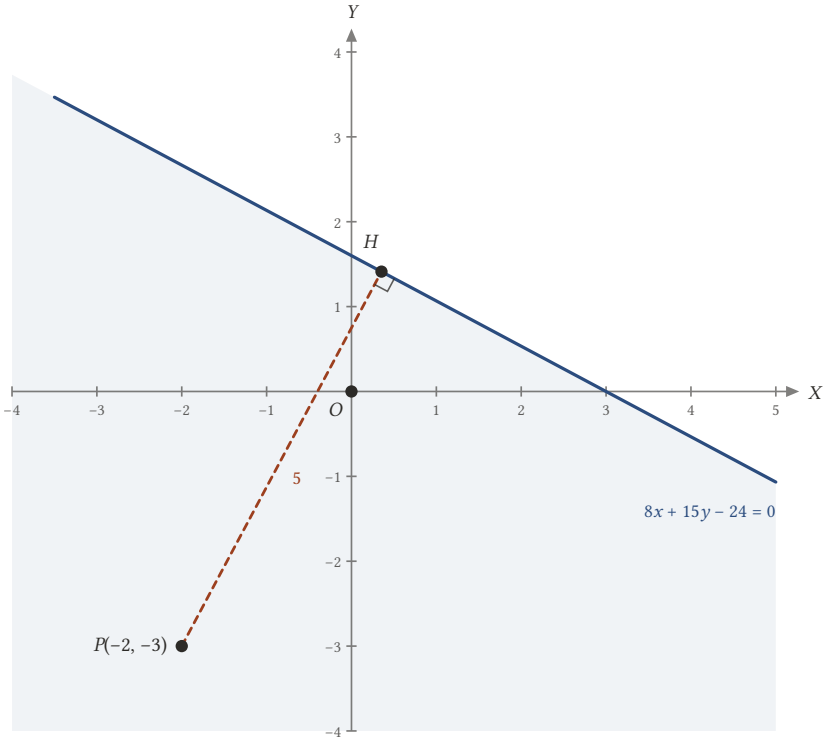
olur. Dikmenin ayağı $H = P - s(\cos\omega, \sin\omega)$ ile bulunur:

$$H = (-2,-3) - (-5)\left(\frac{8}{17}, \frac{15}{17}\right)$$
$$= \left(\frac{6}{17}, \frac{24}{17}\right).$$

Sağlama: $8 \cdot \frac{6}{17} + 15 \cdot \frac{24}{17} = \frac{48+360}{17} = 24$ olduğundan H doğru üzerindedir ve

$$|\,PH\,|^2 = \left(\frac{40}{17}\right)^2 + \left(\frac{75}{17}\right)^2 = \frac{7225}{289} = 25$$

olur.



Şekil 3.13: $P(-2,-3)$ noktasının $8x + 15y - 24 = 0$ doğrusuna uzaklığı $|PH| = 5$'tir. Taralı yarı düzlem doğrunun orijin tarafıdır; $s = -5 < 0$ olduğundan P de bu taraftadır.

■

3.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorular bölümdeki bütün denklem biçimlerini ve uzaklık formülünü çalıştırır. Her sorunun çözümü kendi kutusunun içindedir.

Alıştırma 3.1 (Normal denklem: x + y + 8 = 0). $x + y + 8 = 0$ doğrusunun normal denklemini, r uzaklığını ve ω açısını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Katsayılar. $A = 1$, $B = 1$, $C = 8$'dir ve $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{2}$ olur.
Adım 2: İşaret. $C > 0$ olduğundan Sonuç 3.2 ile $k < 0$'dır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$k = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

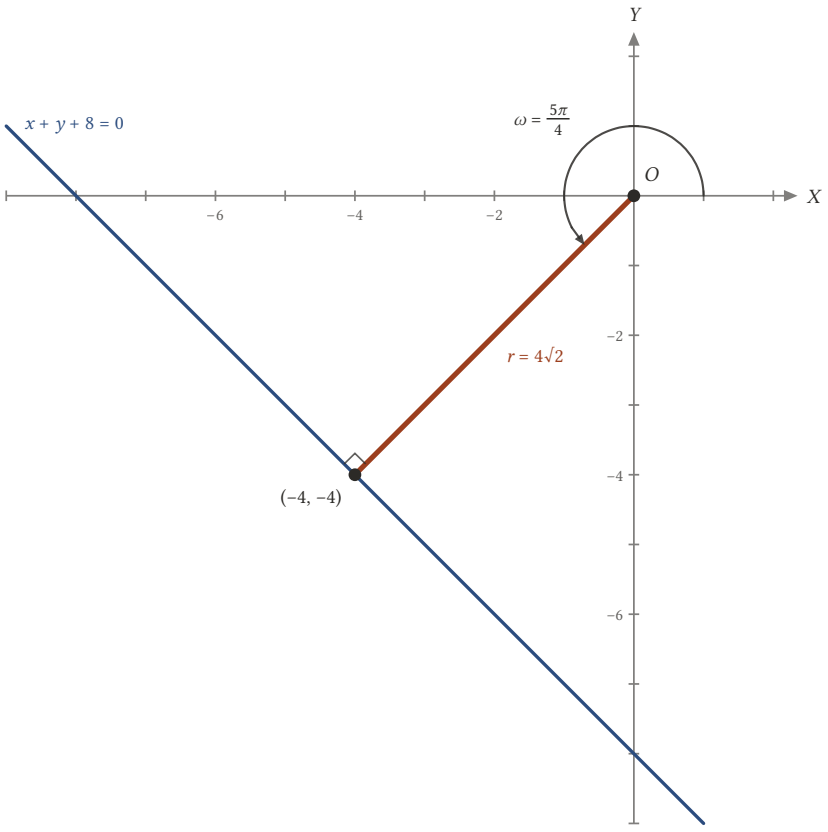
Adım 3: Normal denklem. Genel denklemi k ile çarparsak $kC = -\frac{8}{\sqrt{2}} = -4\sqrt{2}$ olduğundan

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}\,y - 4\sqrt{2} = 0$$

bulunur.
Adım 4: r ve ω. $r = -kC = 4\sqrt{2}$'dir. $\cos\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve $\sin\omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ikisi de negatif olduğundan ω üçüncü bölgededir ve

$$\omega = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

olur. Dikmenin ayağı $\big(\, r\cos\omega, r\sin\omega \,\big) = (-4,-4)$'tür; gerçekten $-4-4+8=0$'dır.



Şekil 3.14: $x + y + 8 = 0$ doğrusuna orijinden inen dikmenin ayağı $(-4, -4)$'tür: $r = 4\sqrt{2}$, $\omega = 5\pi/4$.

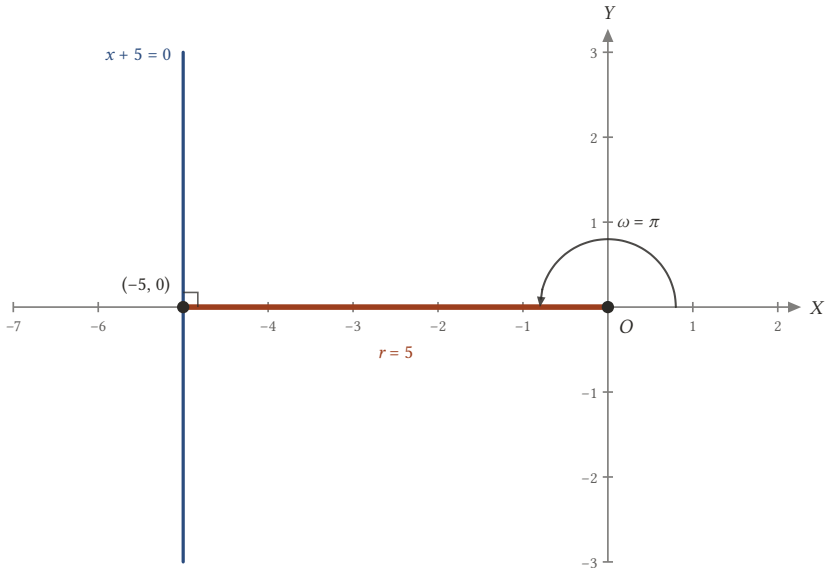
■

Alıştırma 3.2 (Normal denklem: x + 5 = 0). $x + 5 = 0$ doğrusunun normal denklemini, r uzaklığını ve ω açısını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Katsayılar. $A = 1$, $B = 0$, $C = 5$'tir ve $\sqrt{A^2 + B^2} = 1$ olur.
Adım 2: İşaret. $C > 0$ olduğundan $k < 0$, yani $k = -1$'dir.
Adım 3: Normal denklem. Genel denklemi -1 ile çarparsak

$$-x - 5 = 0$$

bulunur. Bu, $x\cos\omega + y\sin\omega - r = 0$ biçimindedir: $\cos\omega = -1$, $\sin\omega = 0$, $r = 5$.
Adım 4: r ve ω. $r = -kC = 5$'tir. $\cos\omega = -1$ ve $\sin\omega = 0$ olduğundan $\omega = \pi$ olur. Gerçekten $x = -5$ düşey doğrusuna orijinden inen dikme X-ekseninin negatif yarısı üzerindedir, ayağı $(-5, 0)$'dır ve uzunluğu 5'tir.



Şekil 3.15: $x + 5 = 0$ düşey doğrusuna orijinden inen dikme X-ekseninin negatif yarısı üzerindedir: ayağı $(-5, 0)$, $r = 5$, $\omega = \pi$.

■

Alıştırma 3.3 (Normal denklem: kök üç x + y − 9 = 0). $\sqrt{3}\,x + y - 9 = 0$ doğrusunun normal denklemini, r uzaklığını ve ω açısını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Katsayılar. $A = \sqrt{3}$, $B = 1$, $C = -9$'dur ve $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$ olur.
Adım 2: İşaret. $C < 0$ olduğundan $k > 0$, yani $k = \frac{1}{2}$'dir.
Adım 3: Normal denklem. Genel denklemi $\frac{1}{2}$ ile çarparsak

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y - \frac{9}{2} = 0$$

bulunur.
Adım 4: r ve ω. $r = -kC = \frac{9}{2}$'dir. $\cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\sin\omega = \frac{1}{2}$ ikisi de pozitif olduğundan ω birinci bölgededir ve

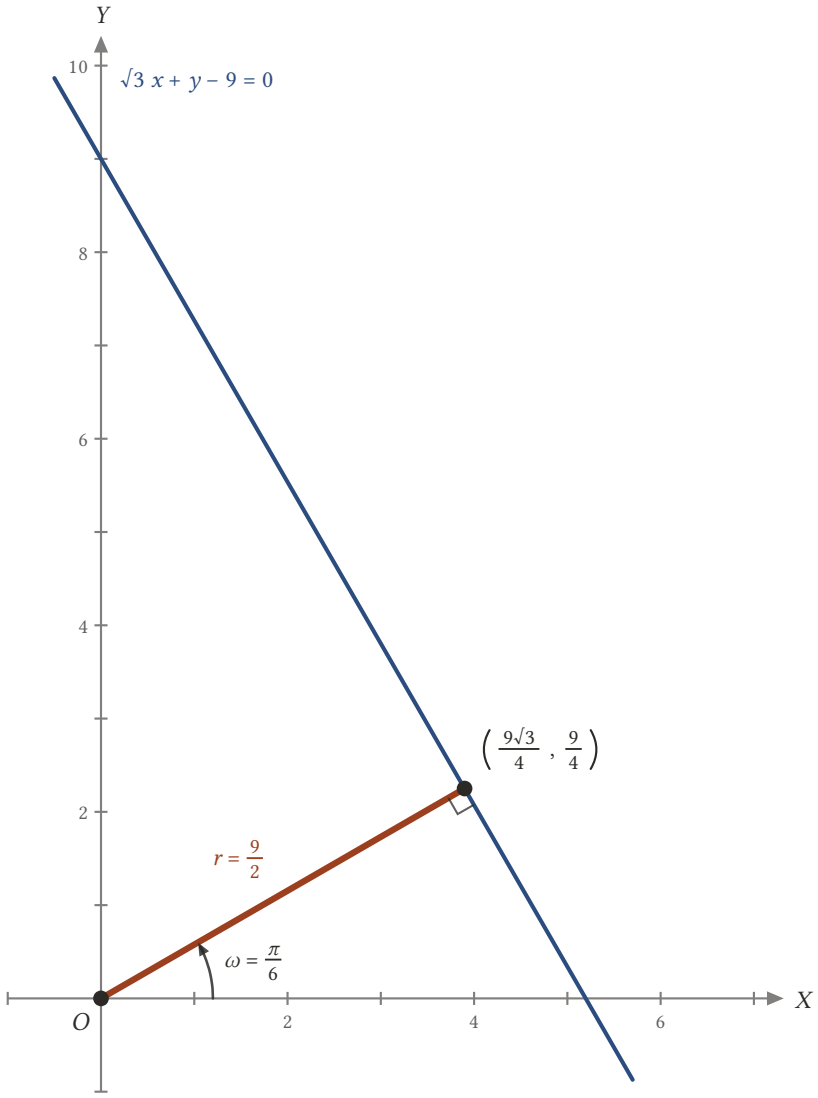
$$\omega = \frac{\pi}{6}$$

olur. Dikmenin ayağı $\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{9\sqrt{3}}{4}, \frac{9}{4}\right)$'tür; gerçekten

$$\sqrt{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9}{4} - 9 = \frac{27}{4} + \frac{9}{4} - 9 = 0$$

olduğundan bu nokta doğru üzerindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.16: $\sqrt{3}x + y - 9 = 0$ doğrusuna orijinden inen dikmenin ayağı $(9\sqrt{3}/4,\ 9/4)$'tür: $r = 9/2$, $\omega = \pi/6$.

■

Alıştırma 3.4 (Orijinden geçen doğrunun normal denklemi). $3x - 4y = 0$ doğrusunun normal denklemini, r uzaklığını ve ω açısını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Katsayılar. $A = 3$, $B = -4$, $C = 0$'dır ve $\sqrt{A^2 + B^2} = 5$ olur.
Adım 2: İşaret. $C = 0$ olduğundan Sonuç 3.2 (b) şıkkına göre k, B ile aynı işaretlidir. $B < 0$ olduğundan $k = -\frac{1}{5}$'tir.
Adım 3: Normal denklem. Genel denklemi $-\frac{1}{5}$ ile çarparsak

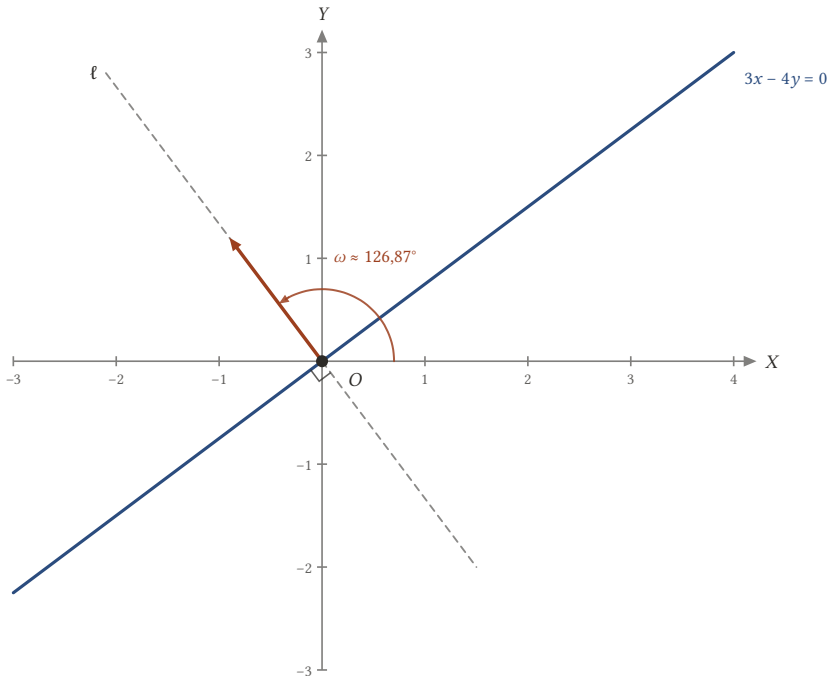
$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 0$$

bulunur.
Adım 4: r ve ω. $r = -kC = 0$'dır; doğru orijinden geçer. $\cos\omega = -\frac{3}{5} < 0$ ve $\sin\omega = \frac{4}{5} > 0$ olduğundan ω ikinci bölgededir. $\tan\omega = -\frac{4}{3}$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\omega = \pi - \arctan\frac{4}{3} \approx 126{,}87^\circ$$

olur. Burada ℓ, orijinden geçen ve doğruya dik olan doğrudur; seçilen işaret, ℓ'nin üst yarı düzlemdeki ışınını almak demektir.



Şekil 3.17: Orijinden geçen $3x - 4y = 0$ doğrusu ($r = 0$). ℓ doğruya dik olan doğrudur; seçilen işaret onun üst yarı düzlemdeki ışınını verir: $\omega \approx 126{,}87^\circ$.

■

Alıştırma 3.5 (Uzaklık: P(−1, 7) ve 6x − 8y + 5 = 0). $P(-1, 7)$ noktasının $6x - 8y + 5 = 0$ doğrusuna uzaklığını bulunuz. Nokta ile orijin doğrunun aynı tarafında mıdır?

Çözüm.
Adım 1: Normal denklem. $A = 6$, $B = -8$, $C = 5$'tir ve $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$ olur. $C > 0$ olduğundan $k < 0$, yani $k = -\frac{1}{10}$'dur. Normal denklem

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{2} = 0$$

olur; burada $\cos\omega = -\frac{3}{5}$, $\sin\omega = \frac{4}{5}$, $r = \frac{1}{2}$'dir.
Adım 2: s değeri. $x_0 = -1$, $y_0 = 7$ için

$$\begin{aligned} s &= -\frac{3}{5}(-1) + \frac{4}{5}\cdot 7 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{5} + \frac{28}{5} - \frac{1}{2} = \frac{31}{5} - \frac{1}{2} = \frac{57}{10} \end{aligned}$$

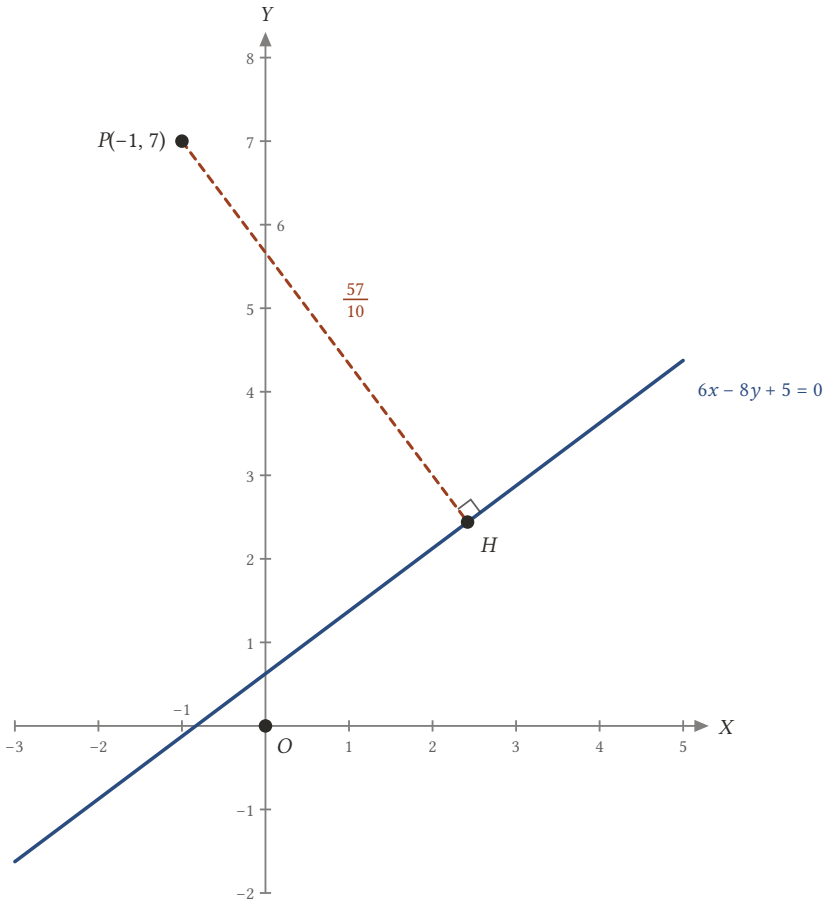
bulunur.
Adım 3: Yorum. Uzaklık $|\,s\,| = \frac{57}{10} = 5{,}7$'dir. $s > 0$ olduğundan Sonuç 3.3 ile P ile orijin doğrunun farklı taraflarındadır.
Sağlama olarak Sonuç 3.4 formülünü kullanalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{|\,6(-1)-8\cdot 7+5\,|}{10}=\frac{|\,-57\,|}{10}=\frac{57}{10}.$$

Dikmenin ayağı $H = P - s(\cos\omega, \sin\omega)$ ile bulunur:

$$H=(-1,7)-\frac{57}{10}\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{121}{50},\frac{61}{25}\right).$$



Şekil 3.18: $P(-1, 7)$ noktasının $6x - 8y + 5 = 0$ doğrusuna uzaklığı $|PH| = 57/10$'dur; $s > 0$ olduğundan P ile orijin doğrunun farklı taraflarındadır.

■

Alıştırma 3.6 (Verilen doğruya paralel doğru). $(2,-3)$ noktasından geçen ve $3x-2y+5=0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Eğim. Önerme 3.3 ile verilen doğrunun eğimi $m=-\frac{3}{-2}=\frac{3}{2}$'dir. Paralel doğruların eğimleri eşit olduğundan aranan doğrunun eğimi de $\frac{3}{2}$'dir.
Adım 2: Denklem. Tanım 3.1 ile

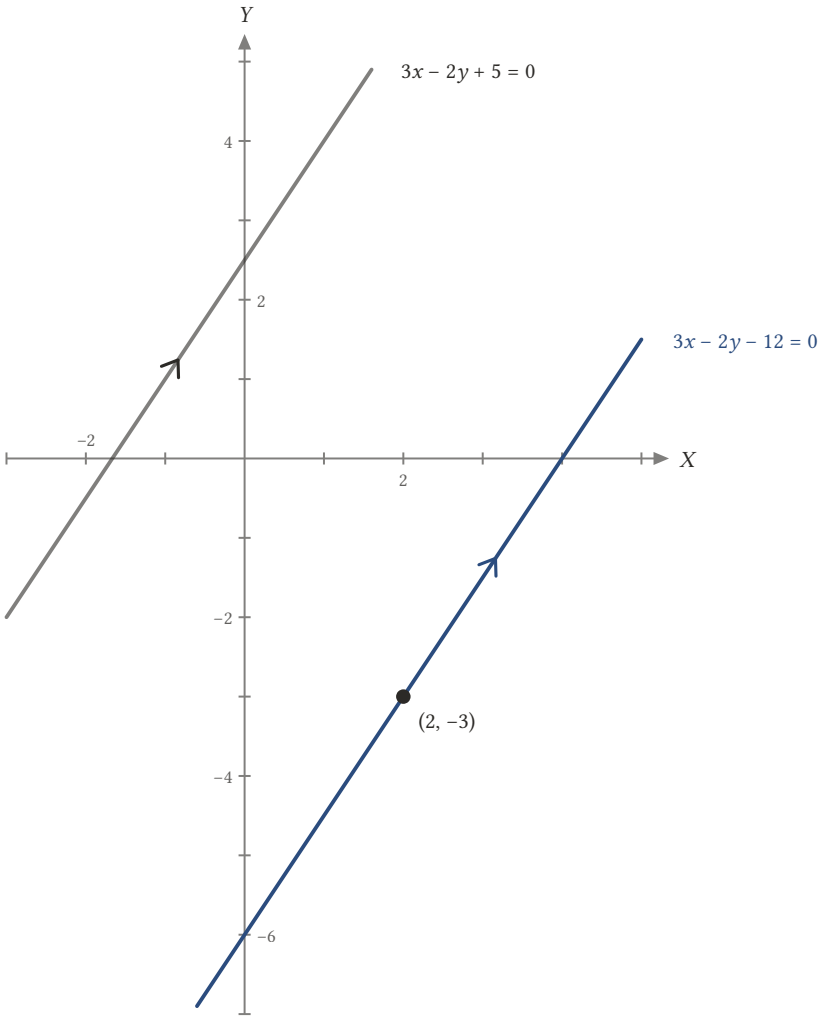
$$y-(-3)=\frac{3}{2}(x-2)$$

yazılır. Her iki yanı 2 ile çarparsak $2y+6=3x-6$, yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$3x - 2y - 12 = 0$$

bulunur.
Aynı sonuca daha kısa yoldan da ulaşılır: $3x - 2y + 5 = 0$'a paralel her doğrunun genel denklemi, eğimi değiştirmeyen $3x - 2y + C = 0$ biçimindedir. $(2, -3)$ bu denklemi sağlamalıdır: $6 + 6 + C = 0$, yani $C = -12$.



Şekil 3.19: (2, −3)'ten geçen ve 3x − 2y + 5 = 0'a paralel olan doğru 3x − 2y − 12 = 0'dır; iki doğrunun eğimi de 3/2'dir.

■

Alıştırma 3.7 (Verilen doğruya dik doğru). $(-1, 4)$ noktasından geçen ve $2x + 5y - 1 = 0$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Eğimler. Verilen doğrunun eğimi $m = -\frac{2}{5}$'tir. Dik doğruların eğimlerinin çarpımı -1 olduğundan aranan doğrunun eğimi

$$\bar{m} = -\frac{1}{m} = \frac{5}{2}$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

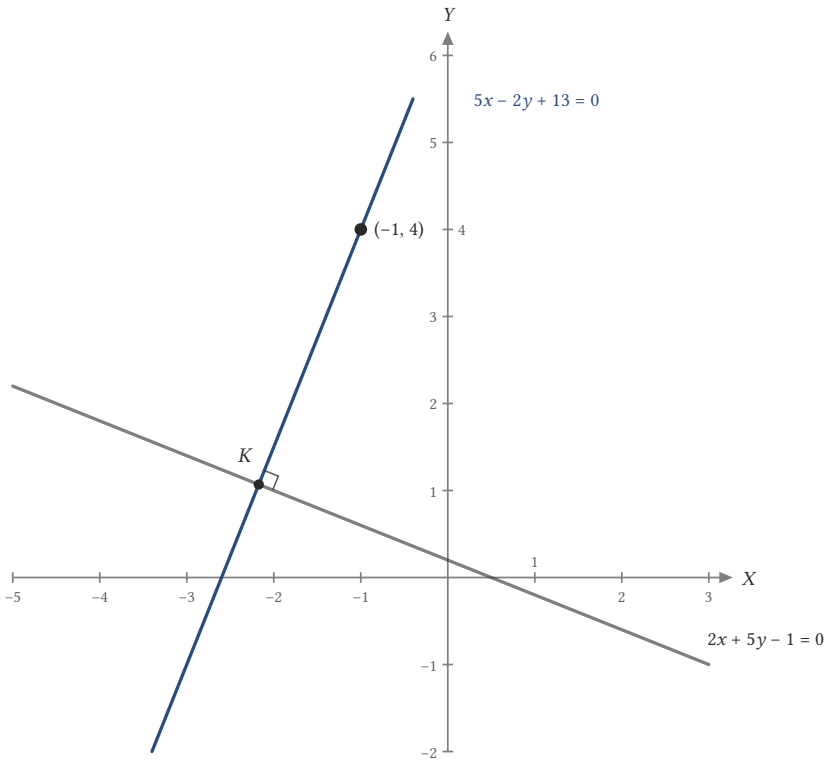
Adım 2: Denklem. Tanım 3.1 ile

$$y - 4 = \frac{5}{2}\left(\, x - (-1) \,\right)$$

yazılır. Her iki yanı 2 ile çarparsak $2y - 8 = 5x + 5$, yani

$$5x - 2y + 13 = 0$$

bulunur. Sağlama: $5(-1) - 2 \cdot 4 + 13 = 0$.
İki doğrunun kesiştiği nokta, $2x + 5y = 1$ ve $5x - 2y = -13$ denklemlerinin ortak çözümü olan $K\left(-\frac{63}{29}, \frac{31}{29}\right)$'dur.



Şekil 3.20: (−1, 4)'ten geçen ve 2x + 5y − 1 = 0'a dik olan doğru 5x − 2y + 13 = 0'dır; iki doğru K(−63/29, 31/29) noktasında dik kesişir.

■

Alıştırma 3.8 (Eksenlerden eşit parçalar ayıran doğru). $(2, 3)$ noktasından geçen ve eksenlerin pozitif yarılarından eşit uzunlukta parçalar ayıran doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Biçim. Doğru eksenleri $(a, 0)$ ve $(0, a)$ noktalarında kessin; burada $a > 0$'dır. Önerme 3.2 ile denklem

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$$

olur.
Adım 2: Noktayı yerleştirmek. $(2, 3)$ bu denklemi sağlamalıdır:

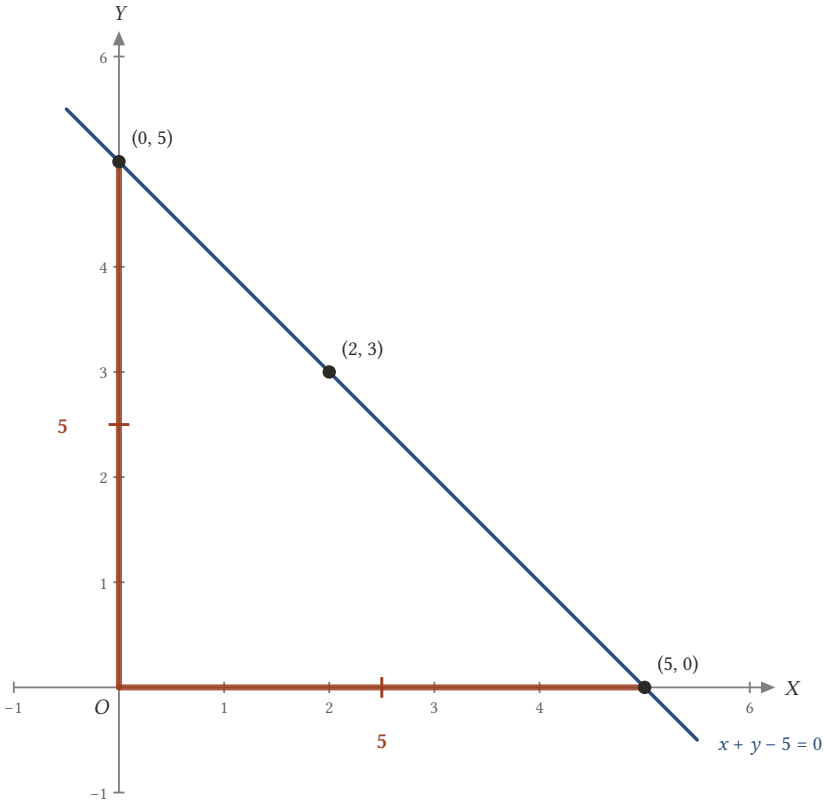
$$\frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow \frac{5}{a} = 1 \Rightarrow a = 5.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: Denklem. $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$, yani

$$x + y - 5 = 0$$

bulunur. Doğru eksenleri $(5, 0)$ ve $(0, 5)$'te keser; ikisi de orijinden 5 birim uzaktadır.



Şekil 3.21: (2, 3)'ten geçen ve eksenlerin pozitif yarılarından eşit parçalar ayıran doğru $x + y - 5 = 0$'dır; iki parçanın uzunluğu da 5'tir.

■

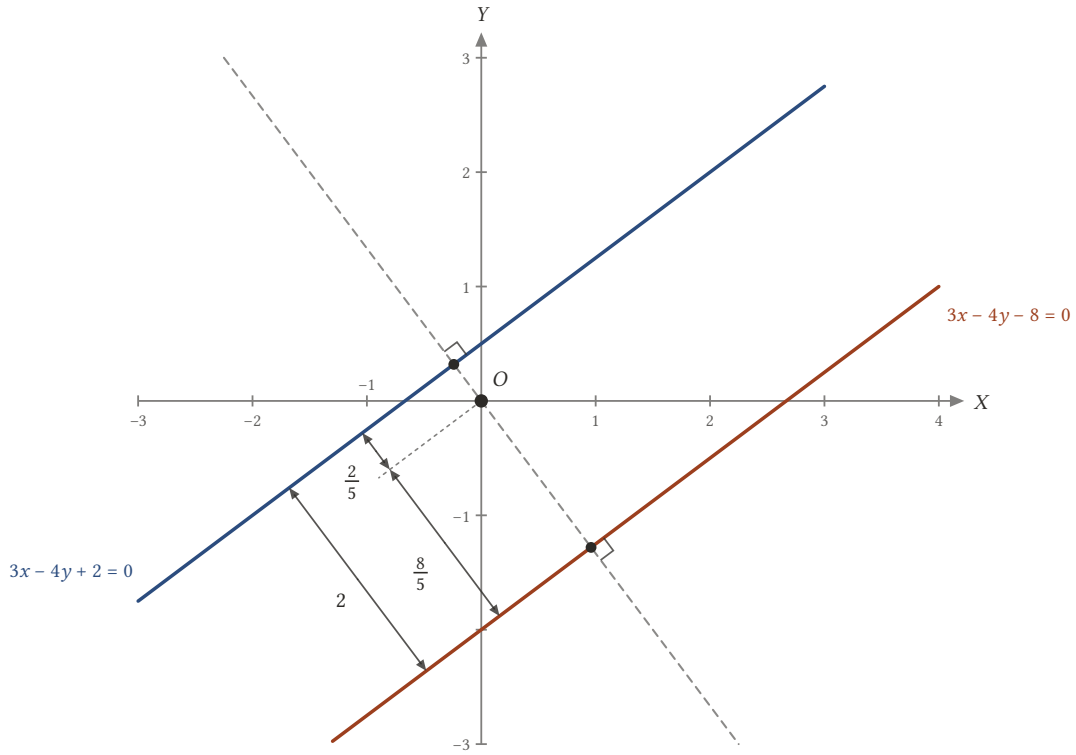
Alıştırma 3.9 (İki paralel doğru arasındaki uzaklık). $3x - 4y + 2 = 0$ ve $3x - 4y - 8 = 0$ doğruları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Paralellik. İki doğrunun eğimi de $\frac{3}{4}$'tür ve sabit terimleri farklı olduğundan çakışmazlar; paraleldirler. Aralarındaki uzaklık, birinin herhangi bir noktasının ötekine uzaklığıdır.
Adım 2: Birinci doğrudan bir nokta. $3x - 4y + 2 = 0$ denkleminde $x = 0$ yazılırsa $y = \frac{1}{2}$ çıkar; $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ birinci doğrunun noktasıdır.
Adım 3: Uzaklık. Sonuç 3.4 ile bu noktanın ikinci doğruya uzaklığı

$$\frac{\left|3 \cdot 0 - 4 \cdot \frac{1}{2} - 8\right|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-10|}{5} = 2$$

bulunur.
Aynı sonucu normal denklemlerle de görebiliriz. Birinci doğruda $C = 2 > 0$ olduğundan $k = -\frac{1}{5}$ ve normal denklem $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{2}{5} = 0$'dır; $r_1 = \frac{2}{5}$. İkincide $C = -8 < 0$ olduğundan $k = \frac{1}{5}$ ve normal denklem $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} = 0$'dır; $r_2 = \frac{8}{5}$. İki dikmenin yönleri ($\cos\omega$ ve $\sin\omega$ değerleri) birbirinin tersidir; yani doğrular orijinin iki yanındadır ve aralarındaki uzaklık $r_1 + r_2 = \frac{2}{5} + \frac{8}{5} = 2$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 3.22: Paralel $3x - 4y + 2 = 0$ ve $3x - 4y - 8 = 0$ doğruları orijinin iki yanındadır: orijine uzaklıkları 2/5 ve 8/5, aralarındaki uzaklık 2/5 + 8/5 = 2'dir. Ölçüler, ortak dikme doğrultusunda çizilmiştir.

■

Alıştırma 3.10 (Üçgenin yüksekliği ve alanı). Köşeleri $A(1,1)$, $B(5,4)$, $C(2,6)$ olan üçgende C köşesinden AB kenarına inen yüksekliğin uzunluğunu ve üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: AB doğrusu. Eğim $\dfrac{4-1}{5-1} = \dfrac{3}{4}$'tür. Tanım 3.1 ile $y - 1 = \frac{3}{4}(x-1)$ yazılır; 4 ile çarpınca $4y - 4 = 3x - 3$, yani

$$AB : 3x - 4y + 1 = 0$$

bulunur. Sağlama: $3 \cdot 5 - 4 \cdot 4 + 1 = 0$.
Adım 2: Yükseklik. Yükseklik, $C(2,6)$ noktasının AB doğrusuna uzaklığıdır. Sonuç 3.4 ile

$$h = \frac{|\, 3 \cdot 2 - 4 \cdot 6 + 1 \,|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|\, -17 \,|}{5} = \frac{17}{5}$$

olur. AB'nin normal denklemi $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{1}{5} = 0$ olduğundan C için $s = \frac{17}{5}$ ve $(\cos\omega, \sin\omega) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$'tir. Yüksekliğin ayağı

$$D = (2,6) - \frac{17}{5}\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{101}{25}, \frac{82}{25}\right)$$

noktasıdır.
Adım 3: Taban ve alan. Taban uzunluğu

$$|\, AB \,| = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. Alan

$$\frac{1}{2} \mid AB \mid h = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{17}{5} = \frac{17}{2}$$

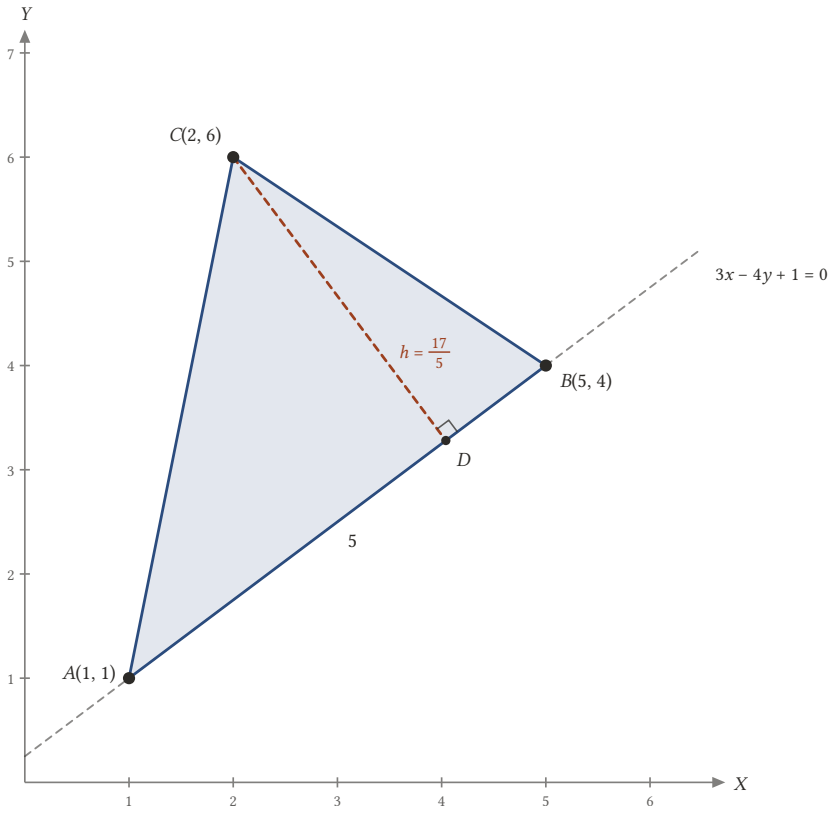
bulunur.
Sağlama olarak tabanı AC alalım. AC'nin eğimi $\dfrac{6-1}{2-1} = 5$'tir; $y - 1 = 5(x-1)$, yani $AC : 5x - y - 4 = 0$ olur. $B(5,4)$'ün bu doğruya uzaklığı

$$\frac{\mid 5 \cdot 5 - 4 - 4 \mid}{\sqrt{5^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{26}}$$

ve $\mid AC \mid = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ olduğundan alan yine

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} \cdot \frac{17}{\sqrt{26}} = \frac{17}{2}$$

çıkar.



Şekil 3.23: $A(1,1)$, $B(5,4)$, $C(2,6)$ üçgeninde C'den AB'ye inen yükseklik $h = 17/5$'tir; taban $|AB| = 5$ olduğundan alan $17/2$'dir.

■

Bu bölümde düzlemde bir doğruyu bir noktası ve eğimi, iki noktası, eksen kesişimleri, genel denklemi ve normal denklemiyle anlattık; normal denklemden de bir noktanın doğruya uzaklığını çıkardık. Sıradaki bölümde doğrudan sonra düzlemin en temel eğrisine, Çember'e geçiyoruz; orada da merkezden uzaklık fikri ve bu bölümdeki uzaklık formülü sık sık işimize yarayacak.

 CC BY-NC-SA 4.0

4. Çember

Şimdiye kadar düzlemde noktaları, uzaklıkları ve doğruları koordinatlarla ifade ettik. Bu bölümde ilk eğrimize geçiyoruz: çember. Çember geometrinin en eski ve en tanıdık eğrisidir; analitik geometride ise iki nokta arasındaki uzaklık formülünün doğrudan bir sonucu olarak ikinci dereceden bir denklemle karşımıza çıkar. Bu denklemi kurduktan sonra verilen bir denklemin çember olup olmadığını anlamayı, çemberi farklı koşullardan belirlemeyi ve bir çemberin bir doğruyla ya da başka bir çemberle nasıl kesişebileceğini inceleyeceğiz.

4.1 Çemberin Tanımı ve Standart Denklemi

Bir pergelin sivri ucunu bir noktaya batırıp kalemli ucunu çevirdiğimizde çizilen eğrinin her noktası, sivri uçtan aynı uzaklıktadır. Çemberin tanımı bu gözlemi kesin bir dille söyler.

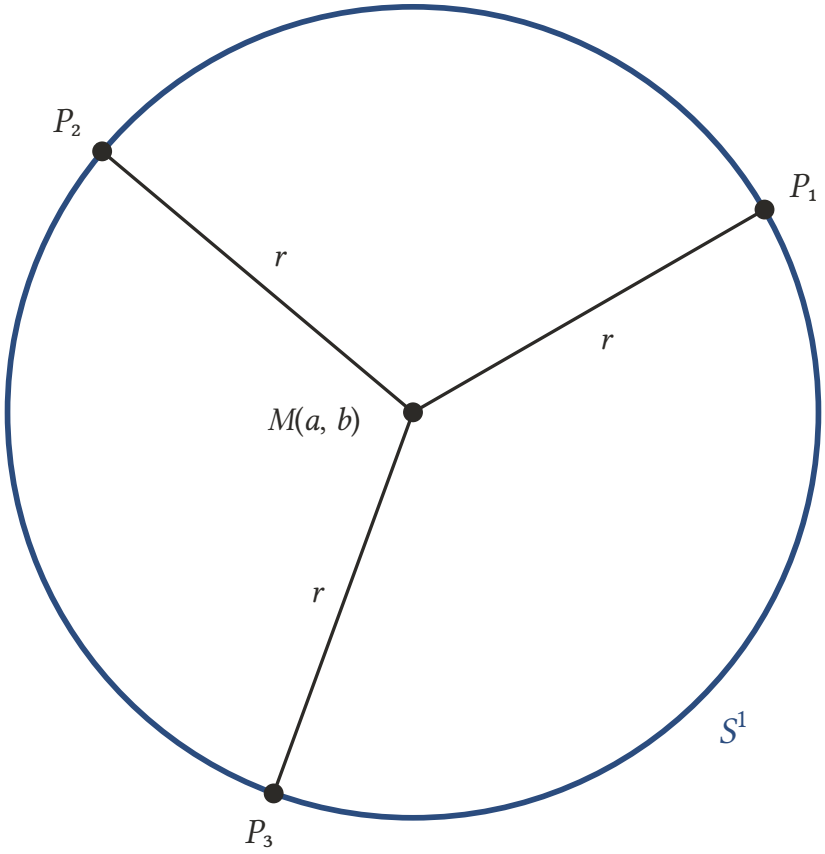
Tanım 4.1 (Çember). Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine **çember** denir. Bu sabit noktaya çemberin **merkezi**, sabit uzaklığa da çemberin **yarıçapı** denir.
Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı $r \in \mathbb{R}^+$ olan çember

$$S^1 = \{\, P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\ PM\ | = r \,\}$$

kümesidir.

Yani çember, merkezden tam r birim uzakta duran noktaların hepsinden oluşur; merkezin kendisi çembere ait değildir. Yarıçapın pozitif olduğunu varsayıyoruz, çünkü $r = 0$ olsaydı küme yalnız M noktasından ibaret olurdu. Çemberi S^1 ile göstereceğiz; aynı anda iki çemberle çalışırken S^1_1 ve S^1_2 yazacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.1: Merkezi M, yarıçapı r olan S^1 çemberi. Çemberin her noktası merkezden aynı r uzaklığındadır.

Tanımdaki $\mid PM \mid = r$ koşulunu koordinatlarla yazmak için iki nokta arasındaki uzaklık formülünü (Dik Koordinatlar ve Uzaklık) kullanırız.

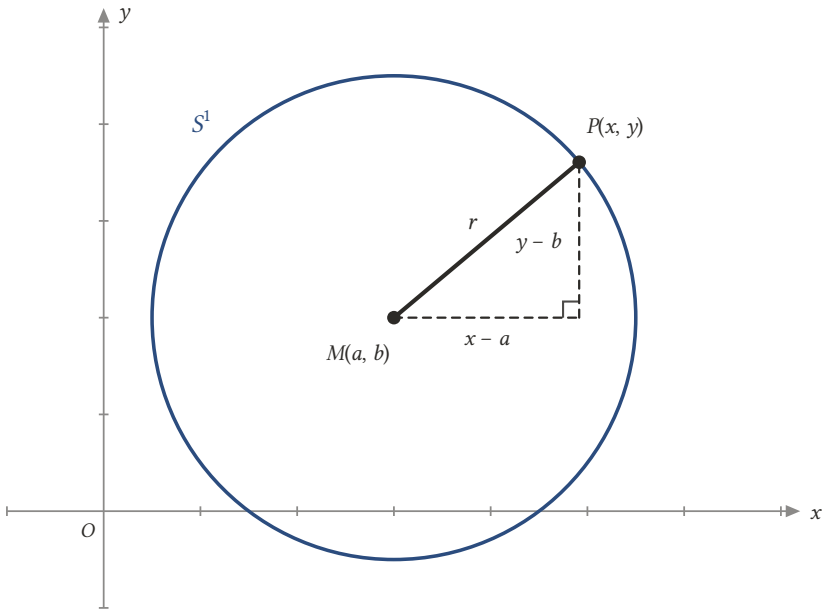
Teorem 4.1 (Çemberin denklemi). *Merkezi $M(a,b)$ ve yarıçapı $r > 0$ olan S^1 çemberi verilsin. Bir $P(x,y)$ noktasının S^1 üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşul*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

olmasıdır.

> ***İspat.***
> *$P(x,y)$ ile $M(a,b)$ arasındaki uzaklık*
>
> $$\mid PM \mid = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$
>
> *dir. Burada $\mid x-a \mid$ ve $\mid y-b \mid$, hipotenüsü PM olan dik üçgenin dik kenarlarıdır. Buna göre $P \in S^1$ olması*
>
> $$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$
>
> *eşitliği demektir.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.2: P(x, y) *ile* M(a, b) *arasındaki uzaklık, dik kenarları* |x − a| *ve* |y − b| *olan dik üçgenin hipotenüsüdür;* P *çember üzerindeyse bu uzaklık* r *'dir.*

Bu eşitliğin iki yanı da negatif olmayan sayılardır. Negatif olmayan u ve v sayıları için $u = v \Leftrightarrow u^2 = v^2$ olduğundan, karesini almak çözüm kazandırmaz ya da kaybettirmez:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

■

Tanım 4.2 (Standart denklem). Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r olan çember için

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

denklemine çemberin **standart denklemi** (merkez–yarıçap denklemi) denir.

Yani standart denklemi gören biri merkezi ve yarıçapı hemen okur: parantezlerde x ve y'den çıkarılan sayılar merkezin koordinatları, sağ taraf ise yarıçapın karesidir. İşaretlere dikkat etmek gerekir: $(x+2)^2 = \big(x-(-2)\big)^2$ olduğundan $x+2$ gördüğümüzde merkezin apsisi -2'dir.

Sonuç 4.1 (Merkezi orijinde olan çember). *Merkezi $O(0,0)$ ve yarıçapı r olan çemberin denklemi $x^2 + y^2 = r^2$'dir.*

Gerçekten, standart denklemde $a = b = 0$ yazmak yeterlidir.

Örnek 4.1 (Merkezi ve yarıçapı verilen çember). Merkezi $M(-2, 5)$ ve yarıçapı 3 olan çemberin standart denklemini yazın ve denklemi açarak parantezsiz biçimde verin.

Çözüm.
Standart denklemde $a = -2$, $b = 5$ ve $r = 3$ yazalım:

$$\big(x-(-2)\big)^2 + (y-5)^2 = 3^2, \qquad \text{yani} \qquad (x+2)^2 + (y-5)^2 = 9.$$

Kareleri açalım: $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ ve $(y-5)^2 = y^2 - 10y + 25$. Buna göre

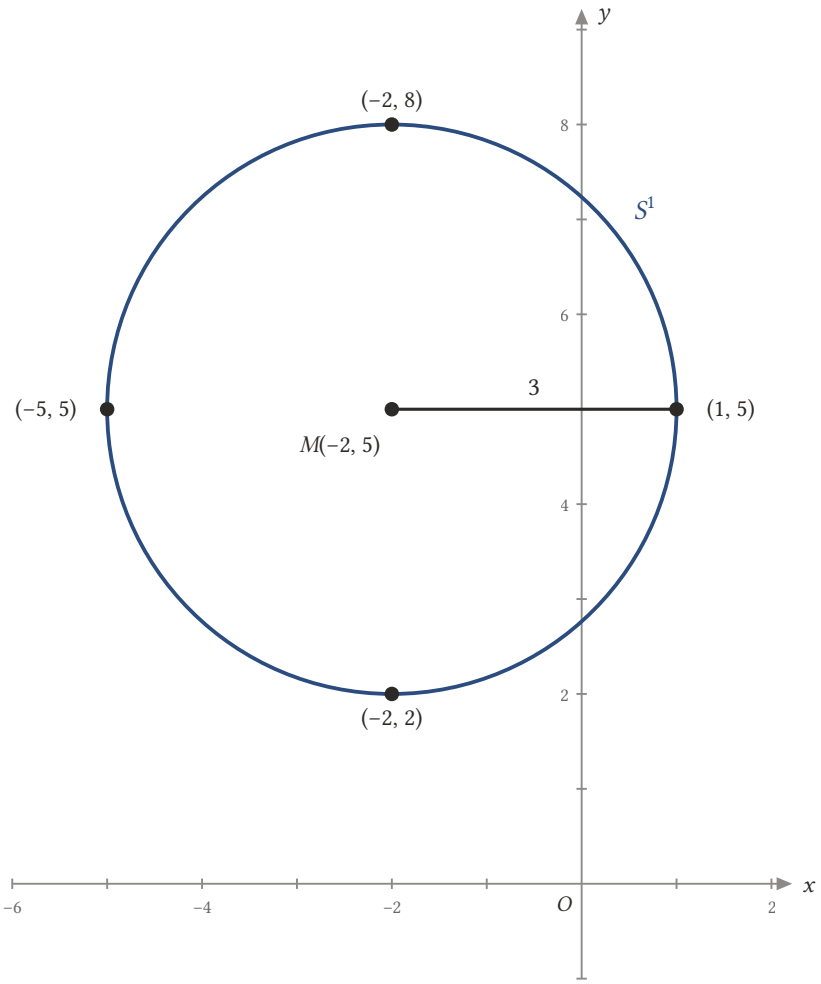
 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 9$$

ve sabitleri sol tarafta toplayınca $4 + 25 - 9 = 20$ olduğundan

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$$

elde edilir. Merkezden sağa, sola, yukarı ve aşağı 3 birim gidildiğinde çemberin $(1, 5)$, $(-5, 5)$, $(-2, 8)$ ve $(-2, 2)$ noktalarına ulaşılır; örneğin $(1, 5)$ için $1 + 25 + 4 - 50 + 20 = 0$ olduğu kolayca denetlenir.



Şekil 4.3: Merkezi $M(-2, 5)$, yarıçapı 3 olan çember: $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 9$. Merkezden dört yöne 3 birim gidilerek çemberin dört noktası bulunur.

■

4.2 Çemberin Genel Denklemi

Standart denklemi açınca ne tür bir denklem elde edildiğine bakalım; bu, karşımıza parantezsiz yazılmış bir denklem çıktığında onun bir çember olup olmadığını anlamamızı sağlayacak. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ denklemindeki kareler açılırsa

$$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

bulunur. Burada $D = -2a$, $E = -2b$ ve $F = a^2 + b^2 - r^2$ dersek her çemberin denklemi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

biçiminde yazılabilir. Bu denklemde x^2 ile y^2'nin katsayıları eşittir (ikisi de 1) ve xy'li terim yoktur.

Tanım 4.3 (Genel denklem). Bir çemberin denklemi $D, E, F \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

biçiminde yazıldığında bu yazılışa çemberin **genel denklemi** denir.

Yani genel denklem, standart denklemin kareleri açılmış ve bütün terimleri bir tarafa toplanmış hâlidir. Ne var ki bu biçimdeki her denklem bir çember belirtmez; örneğin $x^2 + y^2 + 1 = 0$ denklemini hiçbir nokta sağlamaz. Hangi durumda çember elde edildiğini aşağıdaki teorem söyler.

Teorem 4.2 (Genel denklemin çember belirtme koşulu). *$D, E, F \in \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

denklemi verilsin.

- *$D^2 + E^2 - 4F > 0$ ise (1), merkezi $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ve yarıçapı $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ olan çemberin denklemidir.*
- *$D^2 + E^2 - 4F = 0$ ise (1)'i yalnız $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ noktası sağlar.*
- *$D^2 + E^2 - 4F < 0$ ise (1)'i sağlayan hiçbir nokta yoktur.*

İspat.
x'li terimleri ve y'li terimleri ayrı ayrı tam kareye tamamlayalım. Bunun için (1)'in iki yanına $\frac{D^2}{4}$ ve $\frac{E^2}{4}$ ekleyip F'yi sağa geçirelim:

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F.$$

Soldaki ilk üç terim $\left(x + \frac{D}{2}\right)^2$, sonraki üç terim $\left(y + \frac{E}{2}\right)^2$'dir. Sağ taraf da tek kesirde toplanırsa (1) denklemi

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

denklemine denktir. $N\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ dersek sol taraf, $P(x, y)$ noktasının N'ye uzaklığının karesi $|\,PN\,|^2$'dir. Şimdi sağ tarafın işaretine bakalım.

- *Sağ taraf pozitifse, yani $D^2 + E^2 - 4F > 0$ ise, denklem $|\,PN\,| = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ demektir. Bu, merkezi N ve yarıçapı $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ olan çemberin standart denklemidir.*
- *Sağ taraf sıfırsa $|\,PN\,|^2 = 0$, yani $P = N$ olmalıdır. Denklemi yalnız N noktası sağlar.*
- *Sağ taraf negatifse, negatif olmayan $|\,PN\,|^2$ ona eşit olamaz. Denklemin hiçbir çözümü yoktur.*

■

Yani genel denklemden merkezi okumak için x'in ve y'nin katsayılarının yarısını alıp işaretini değiştirmek yeterlidir; yarıçapı bulmadan önce ise $D^2 + E^2 - 4F$'nin pozitif olduğunu denetlemek gerekir. Bir çemberin genel denkleminde bu sayı her zaman pozitiftir: $D = -2a$, $E = -2b$, $F = a^2 + b^2 - r^2$ için $D^2 + E^2 - 4F = 4r^2$ olur.

Genel denklemden merkez ve yarıçap 3 adımda

1. x^2 ile y^2'nin katsayıları 1 değilse (çemberde bu katsayılar eşittir) denklemi bu katsayıya bölün.
2. x'li ve y'li terimleri ayrı ayrı tam kareye tamamlayın: $x^2 + Dx = \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \frac{D^2}{4}$.
3. Sabitleri sağda toplayın. Sağ taraf pozitifse merkezi ve yarıçapı okuyun; sıfırsa denklem tek bir nokta, negatifse boş küme belirtir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 4.2 (Genel denklemden merkez ve yarıçap). $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ denkleminin bir çember belirttiğini gösterin; merkezini ve yarıçapını bulun.

Çözüm.
x^2 ile y^2'nin katsayıları zaten 1'dir. Tam kareye tamamlayalım:

$$x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9, \qquad y^2 + 8y = (y+4)^2 - 16.$$

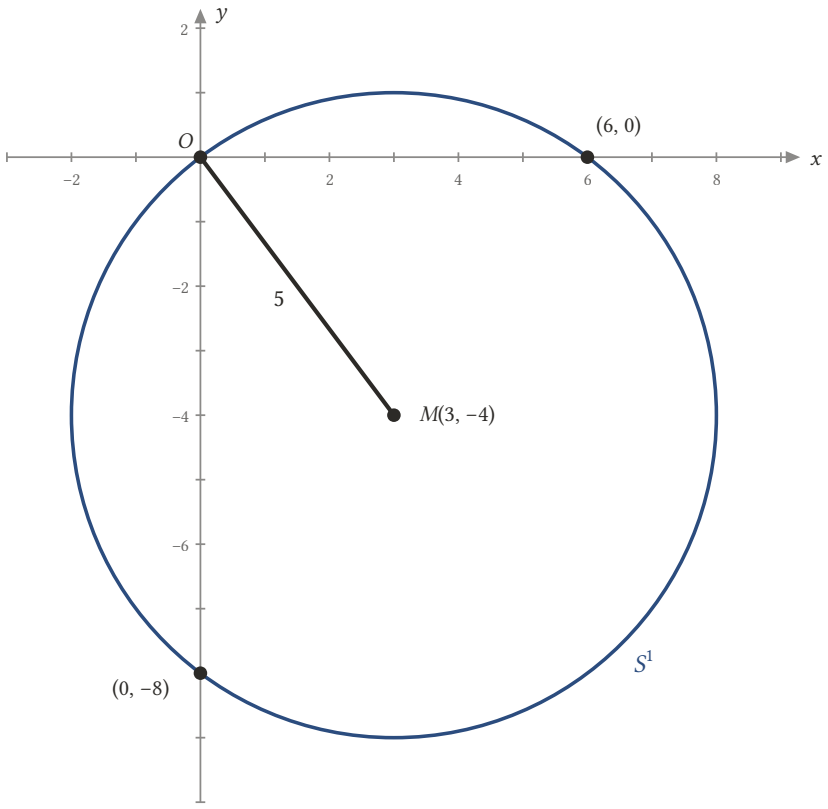
Bunları denklemde yerine yazarsak

$$(x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$$

bulunur. Sağ taraf pozitif olduğundan denklem bir çember belirtir: merkezi $M(3,-4)$, yarıçapı $r = \sqrt{25} = 5$'tir.
Aynı sonucu Teorem 4.2 ile de bulabiliriz: $D = -6, E = 8, F = 0$ için merkez $\left(-\frac{-6}{2}, -\frac{8}{2}\right) = (3,-4)$ ve

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 64 - 0} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

$F = 0$ olduğundan $(0,0)$ noktası denklemi sağlar, yani çember orijinden geçer. Eksenlerle kesişimleri de kolayca bulunur: $y = 0$ için $x^2 - 6x = 0$, yani $x = 0$ ya da $x = 6$; $x = 0$ için $y^2 + 8y = 0$, yani $y = 0$ ya da $y = -8$.



Şekil 4.4: $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ çemberinin merkezi $M(3,-4)$, yarıçapı 5'tir. $F = 0$ olduğundan çember orijinden geçer; eksenleri $(6,0)$ ve $(0,-8)$ noktalarında da keser.

■

Örnek 4.3 (Kare terimlerinin katsayısı bir olmayan denklem). $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 11 = 0$ denkleminin bir çember belirttiğini gösterin; merkezini ve yarıçapını bulun.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
x^2 ile y^2'nin katsayıları eşit ve 4'tür. Denklemi 4'e bölelim:

$$x^2 + y^2 - x + 2y - \frac{11}{4} = 0.$$

Şimdi tam kareye tamamlayalım: $x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ve $y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$. Yerine yazınca

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{11}{4} = 4$$

bulunur. Sağ taraf pozitif olduğundan denklem, merkezi $M\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ ve yarıçapı $r = 2$ olan çemberi belirtir.
Denetim için Teorem 4.2 kullanalım: bölünmüş denklemde $D = -1$, $E = 2$, $F = -\frac{11}{4}$ olduğundan $D^2 + E^2 - 4F = 1 + 4 + 11 = 16$ ve $r = \frac{1}{2}\sqrt{16} = 2$'dir. Katsayılar 4'e bölünmeden formül uygulansaydı yanlış sonuç çıkardı; bu yüzden ilk adım atlanmamalıdır.
■

Örnek 4.4 (Tek bir noktaya indirgenen denklem). $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$ denkleminin belirttiği kümeyi bulun.

Çözüm.
Tam kareye tamamlayalım: $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ ve $y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$. Buna göre

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$$

olur. İki karenin toplamı ancak ikisi birden sıfırsa sıfırdır; bu da $x = 2$ ve $y = -1$ demektir. Denklemi yalnız $(2, -1)$ noktası sağlar, dolayısıyla denklem bir çember belirtmez.
Teorem 4.2 ile de aynı sonuç çıkar: $D = -4$, $E = 2$, $F = 5$ için $D^2 + E^2 - 4F = 16 + 4 - 20 = 0$ olduğundan denklem tek bir noktaya, $\left(-\frac{-4}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (2, -1)$ noktasına indirgenir.
■

4.3 Koşullardan Çember Denklemi Kurmak

Standart denklemde üç bilinmeyen vardır (a, b ve r); genel denklemde de üç bilinmeyen (D, E ve F) bulunur. Bu yüzden bir çemberi belirlemek için genellikle birbirinden bağımsız üç koşul gerekir: merkez (iki koşul) ve çember üzerindeki bir nokta, ya da çember üzerindeki üç nokta gibi. Aşağıdaki örneklerde verilen koşulları bu bilinmeyenler için denklemlere çeviriyoruz. Önce çemberin iki özel doğru parçasını adlandıralım.

Tanım 4.4 (Kiriş ve çap). Uç noktaları bir çemberin üzerinde bulunan doğru parçasına çemberin bir **kirişi** denir. Çemberin merkezinden geçen kirişe **çap** denir.

Yani çap, çemberin en uzun kirişidir. AB bir çap ise $|\,MA\,| = |\,MB\,| = r$ ve M, AB doğru parçası üzerindedir; bu yüzden M, AB'nin orta noktasıdır ve çapın uzunluğu $|\,AB\,| = 2r$'dir. Herhangi bir AB kirişi için üçgen eşitsizliğinden $|\,AB\,| \le |\,AM\,| + |\,MB\,| = 2r$ olur; eşitlik yalnız M, AB doğru parçası üzerindeyken, yani AB bir çap iken sağlanır. Çapın en uzun kiriş olması bundandır.

Örnek 4.5 (Çapının uçları verilen çember). Bir çapı, uç noktaları $A(5, -1)$ ve $B(-3, 7)$ olan doğru parçası olan çemberin denklemini bulun.

Çözüm.
Çemberin merkezi $M(a, b)$ olsun. Merkez, çapın orta noktası olduğundan orta nokta formülüyle (Bölme Oranı, Eğim ve Açı)

$$a = \frac{5 + (-3)}{2} = 1, \qquad b = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

ve $M(1, 3)$ bulunur. Dolayısıyla çemberin denklemi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(x-1)^2+(y-3)^2=r^2$$

biçimindedir. $A(5,-1)$ noktası çember üzerinde olduğundan bu denklemi sağlar:

$$r^2=(5-1)^2+(-1-3)^2=16+16=32,$$

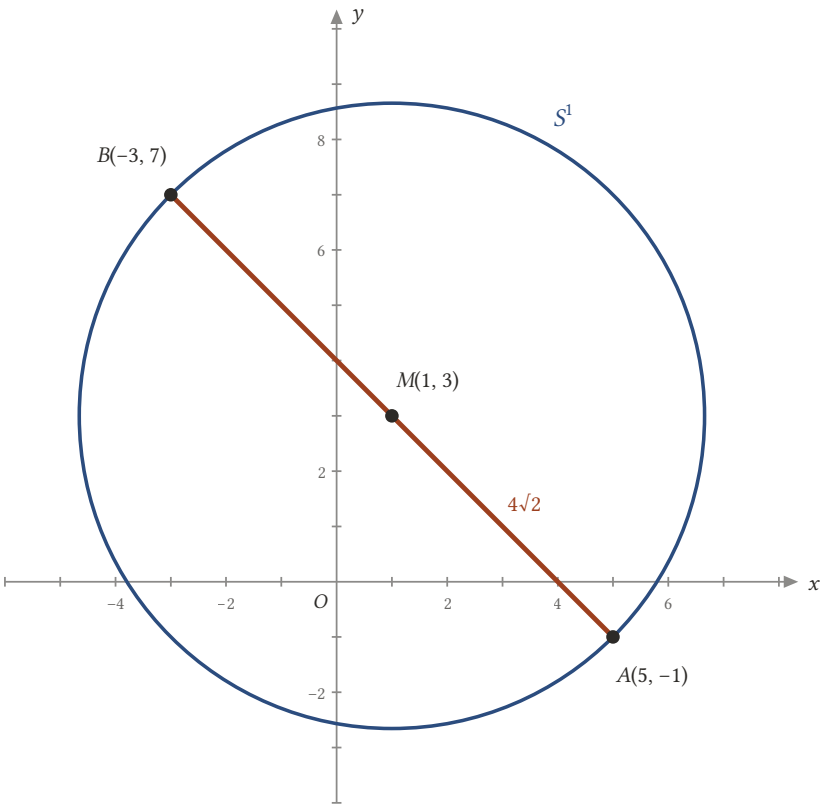
yani $r=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$'dir. Aynı sonucu $\mid AB \mid=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$ uzunluğunun yarısı olarak da buluruz. Böylece çemberin denklemi

$$(x-1)^2+(y-3)^2=32$$

olur. Kareler açılırsa $x^2-2x+1+y^2-6y+9=32$, yani

$$x^2+y^2-2x-6y-22=0$$

elde edilir. Denetim: $B(-3,7)$ için $(-3-1)^2+(7-3)^2$ toplamı $16+16=32$ olduğundan B de çember üzerindedir.



Şekil 4.5: Çapın orta noktası merkezdir: $M(1,3)$. Yarıçap $|MA| = 4\sqrt{2}$ olduğundan çemberin denklemi $(x-1)^2+(y-3)^2=32$'dir.

■

Örnek 4.6 (Merkezi bir doğru üzerinde olan çember). Merkezi $x-3y-11=0$ doğrusu üzerinde bulunan ve $A(2,3)$ ile $B(-1,1)$ noktalarından geçen çemberin denklemini bulun.

Çözüm.
Çemberin merkezi $M(a,b)$ olsun. A ve B çember üzerinde olduğundan ikisinin de merkeze uzaklığı yarıçapa eşittir: $\mid MA \mid=\mid MB \mid$. Kareleri eşitleyelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(a-2)^2+(b-3)^2=(a+1)^2+(b-1)^2.$$

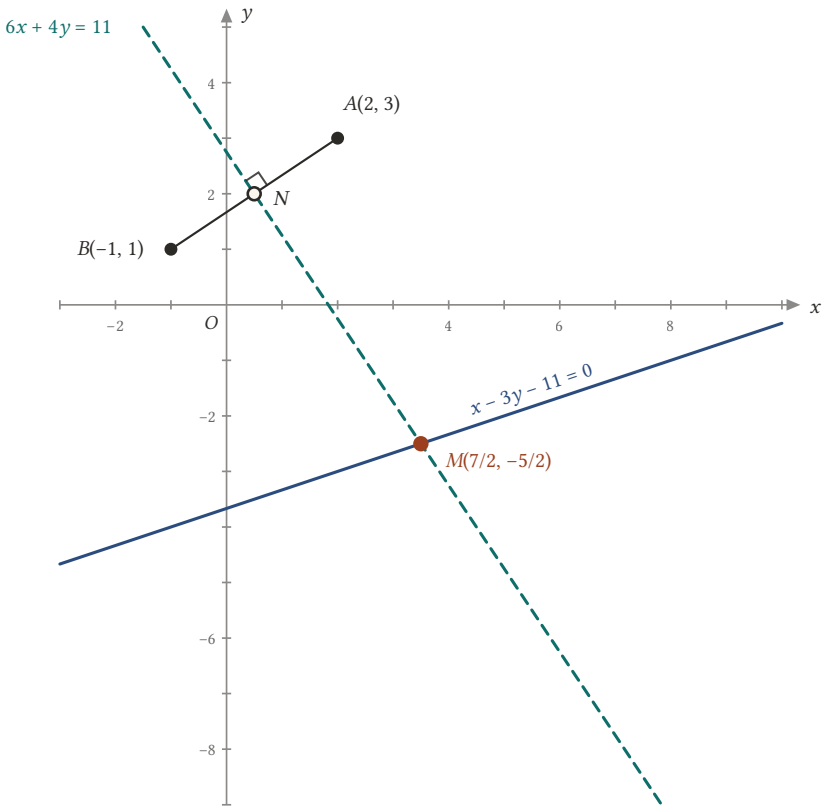
Kareler açılırsa

$$a^2-4a+4+b^2-6b+9=a^2+2a+1+b^2-2b+1$$

olur. a^2 ve b^2 iki yanda da bulunduğundan sadeleşir ve $-4a-6b+13=2a-2b+2$ kalır; buradan

$$6a+4b=11 \tag{2}$$

bulunur. Bu denklemin geometrik anlamı açıktır: A ile B'ye eşit uzaklıktaki noktalar, AB doğru parçasının orta noktasından geçen ve AB'ye dik olan doğruyu oluşturur. Gerçekten AB'nin orta noktası $\left(\frac{1}{2},2\right)$ için $6\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 2=11$'dir; AB'nin eğimi $\frac{1-3}{-1-2}=\frac{2}{3}$, (2) doğrusunun eğimi $-\frac{3}{2}$'dir ve bu eğimlerin çarpımı -1'dir.



Şekil 4.6: A ile B'ye eşit uzaklıktaki noktalar, AB'nin orta noktası N'den geçen dik doğru $6x+4y=11$'dir. Merkez hem bu doğru hem de $x-3y-11=0$ doğrusu üzerinde olduğundan ikisinin kesişimidir.

Öte yandan merkez $x-3y-11=0$ doğrusu üzerinde olduğundan koordinatları bu denklemi sağlar:

$$a-3b=11. \tag{3}$$

(3)'ten $a=11+3b$ yazıp (2)'de yerine koyalım: $6(11+3b)+4b=11$, yani $66+22b=11$ ve $b=-\frac{5}{2}$. O hâlde $a=11+3\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{2}$ ve merkez $M\left(\frac{7}{2},-\frac{5}{2}\right)$'dir. Çemberin denklemi

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=r^2$$

biçimindedir. $B(-1,1)$ noktası bu denklemi sağladığından

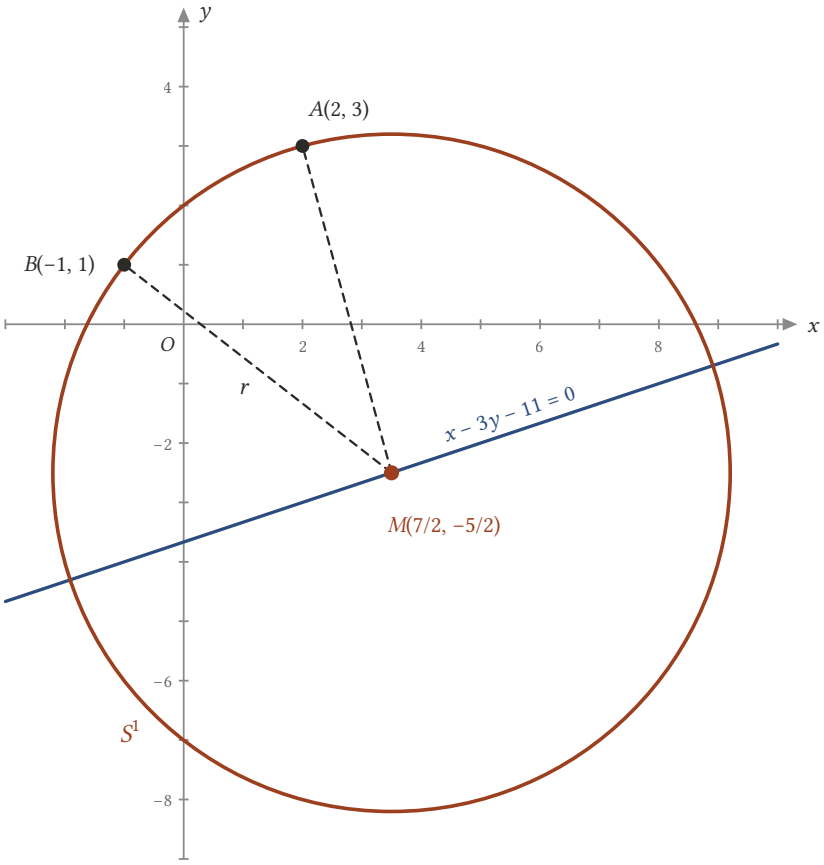
$$r^2=\left(-1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(1+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{81}{4}+\frac{49}{4}=\frac{130}{4}=\frac{65}{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Böylece çemberin denklemi

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$$

olur. Kareler açılırsa $\frac{49}{4}+\frac{25}{4}-\frac{130}{4}=-14$ olduğundan genel denklem $x^2+y^2-7x+5y-14=0$'dır. Denetim: $A(2,3)$ için $4+9-14+15-14=0$ ve $B(-1,1)$ için $1+1+7+5-14=0$.



Şekil 4.7: Merkezi $M(7/2,\,-5/2)$ ve yarıçapı $\sqrt{(65/2)}$ olan çember A ile B'den geçer; merkezi $x-3y-11=0$ doğrusu üzerindedir.

■

4.4 Bir Doğru ile Bir Çemberin Durumu

Bir doğru ile bir çemberin ortak noktalarını bulmak, iki denklemi birlikte çözmek demektir. Geometrik olarak üç durumla karşılaşırız: doğru çemberi iki noktada keser, çembere tek noktada dokunur ya da çemberle hiç buluşmaz. Önce ilk iki durumu adlandıralım.

Tanım 4.5 (Kesen doğru). Bir çemberle iki farklı ortak noktası olan doğruya çemberin bir **keseni** denir.

Yani kesen doğru çemberin içinden geçer; iki ortak nokta arasındaki parçası bir kiriştir.

Tanım 4.6 (Teğet doğru). Bir çemberle tek bir ortak noktası olan doğruya çemberin bir **teğeti**, bu ortak noktaya da **değme noktası** denir.

Yani teğet doğru çembere tek bir noktada dokunur ama onu kesip içine girmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç durumdan hangisinin gerçekleştiğini merkezin doğruya uzaklığı belirler. Bir noktanın doğruya uzaklığını normal denklemle hesaplamıştık (Düzlemde Doğru Denklemleri): $Ax + By + C = 0$ doğrusu $k = \mp\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ile normal denkleme getirildiğinde $P(x_0, y_0)$ noktasının doğruya uzaklığı

$$\mid k\,(Ax_0 + By_0 + C) \mid = \frac{\mid Ax_0 + By_0 + C \mid}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

olur. $y = mx + n$ doğrusu $mx - y + n = 0$ biçiminde yazılırsa $A = m$, $B = -1$, $C = n$ olur.

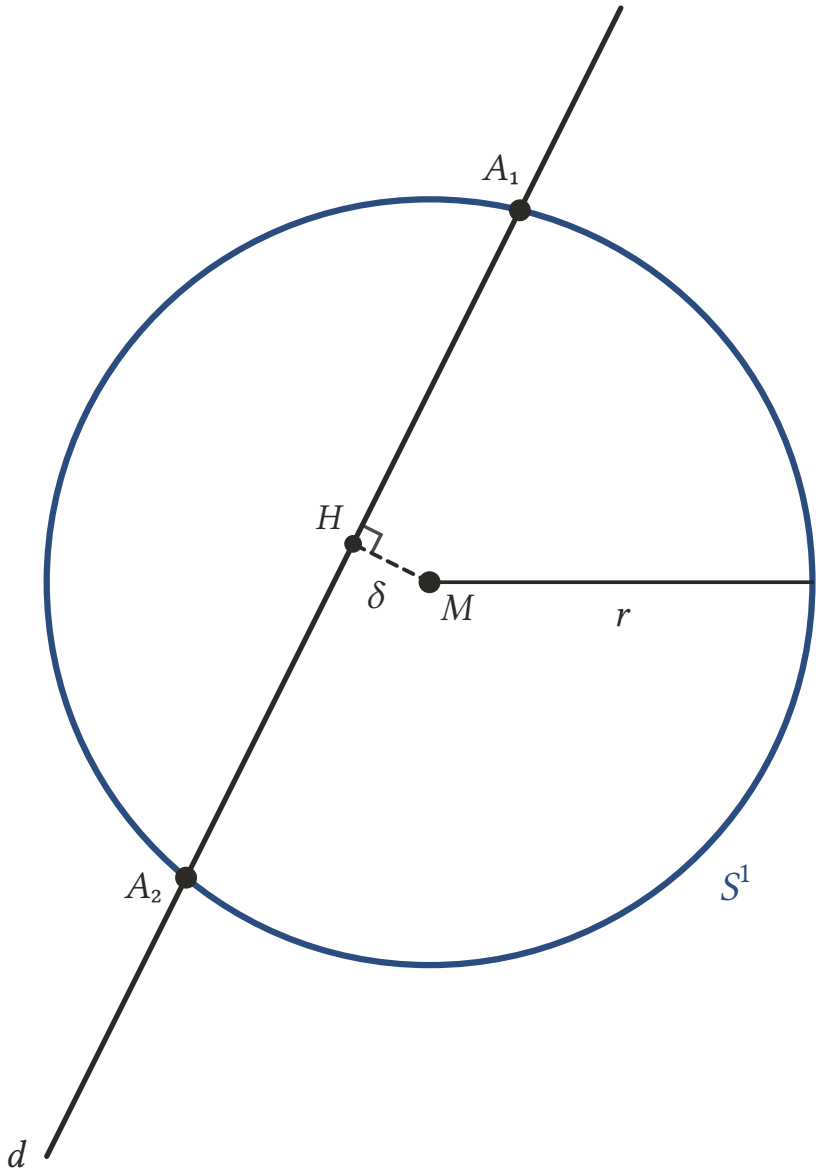
Teorem 4.3 (Doğru ile çemberin ortak noktaları). *Merkezi $M(a, b)$ ve yarıçapı r olan bir S^1 çemberi ile bir d doğrusu verilsin ve δ, M'nin d'ye uzaklığı olsun. Buna göre $d : y = mx + n$ ise*

$$\delta = \frac{\mid ma - b + n \mid}{\sqrt{1 + m^2}},$$

$d : x = p$ ise $\delta = \mid p - a \mid$ olmak üzere:

- *$\delta < r$ ise $S^1 \cap d = \{A_1, A_2\}$ iki noktalıdır, yani d bir kesendir;*
- *$\delta = r$ ise $S^1 \cap d = \{T\}$ tek noktalıdır, yani d bir teğettir;*
- *$\delta > r$ ise $S^1 \cap d = \varnothing$ olur.*

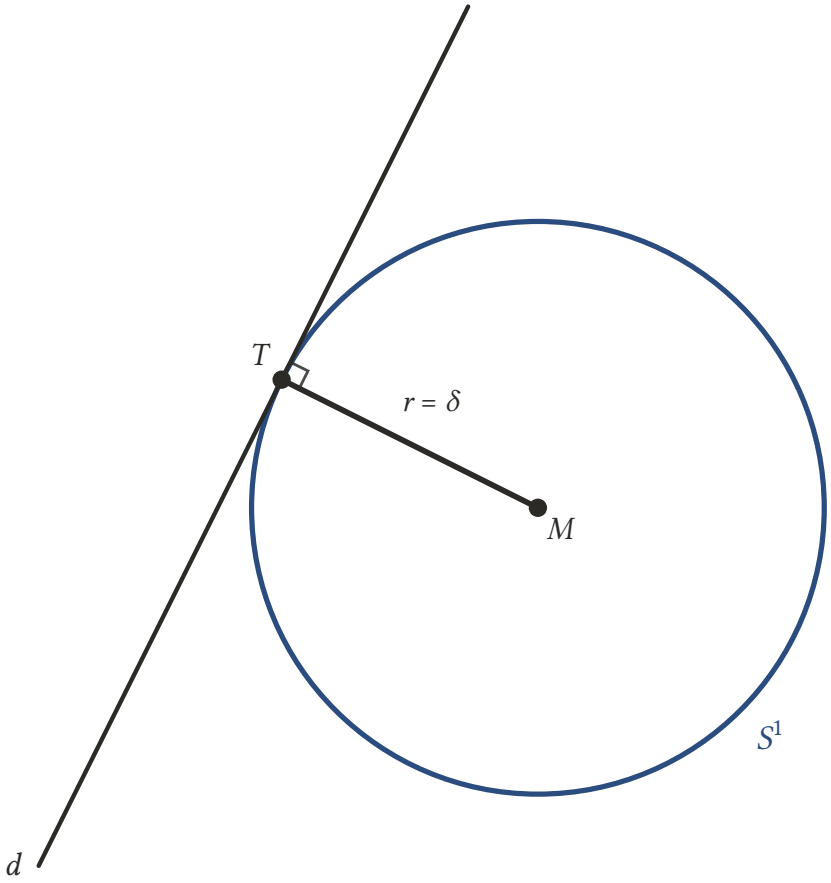
 CC BY-NC-SA 4.0



$$S^1 \cap d = \{A_1, A_2\}$$

Şekil 4.8: $\delta <$ r: merkezin doğruya uzaklığı yarıçaptan küçükse doğru çemberi iki noktada keser.

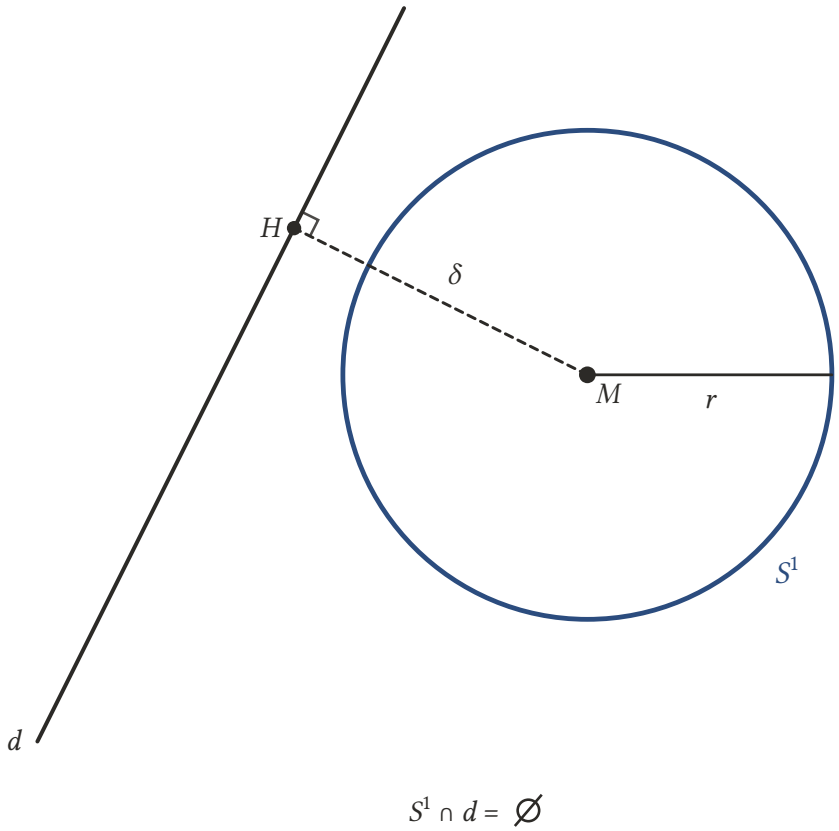
 CC BY-NC-SA 4.0



$$S^1 \cap d = \{T\}$$

Şekil 4.9: δ = r: uzaklık yarıçapa eşitse doğru çembere tek bir T *noktasında dokunur.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.10: $\delta > r$: uzaklık yarıçaptan büyükse doğru ile çemberin ortak noktası yoktur.

İspat.
Adım 1: Soruyu bir denkleme çevirmek. *Önce d düşey olmasın, yani $d : y = mx + n$ olsun. d'nin noktaları $(x, mx + n)$ biçimindedir ve farklı x değerleri farklı noktalar verir. Böyle bir noktanın S^1 üzerinde olması, standart denklemi sağlaması demektir:*

$$(x - a)^2 + (mx + n - b)^2 = r^2.$$

Dolayısıyla $S^1 \cap d$'nin eleman sayısı, bu denklemin farklı reel köklerinin sayısına eşittir.
Adım 2: İkinci dereceden denklem. *Kısaca $c = n - b$ yazalım. Kareler açılıp terimler toplanırsa*

$$(1 + m^2)\, x^2 + 2(mc - a)\, x + (a^2 + c^2 - r^2) = 0$$

bulunur. Baş katsayı $1 + m^2 > 0$ olduğundan bu gerçekten ikinci dereceden bir denklemdir. Kök sayısını diskriminantın dörtte biri belirler:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{4} &= (mc - a)^2 - (1 + m^2)(a^2 + c^2 - r^2) \\ &= m^2c^2 - 2amc + a^2 - a^2 - c^2 + r^2 - m^2a^2 - m^2c^2 + m^2r^2 \\ &= (1 + m^2)\, r^2 - (ma + c)^2.\end{aligned}$$

Adım 3: Uzaklıkla ilişki. *$ma + c = ma - b + n$ olduğundan $(ma + c)^2 = (1 + m^2)\, \delta^2$'dir. Buna göre*

$$\frac{\Delta}{4} = (1 + m^2)\, (r^2 - \delta^2)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

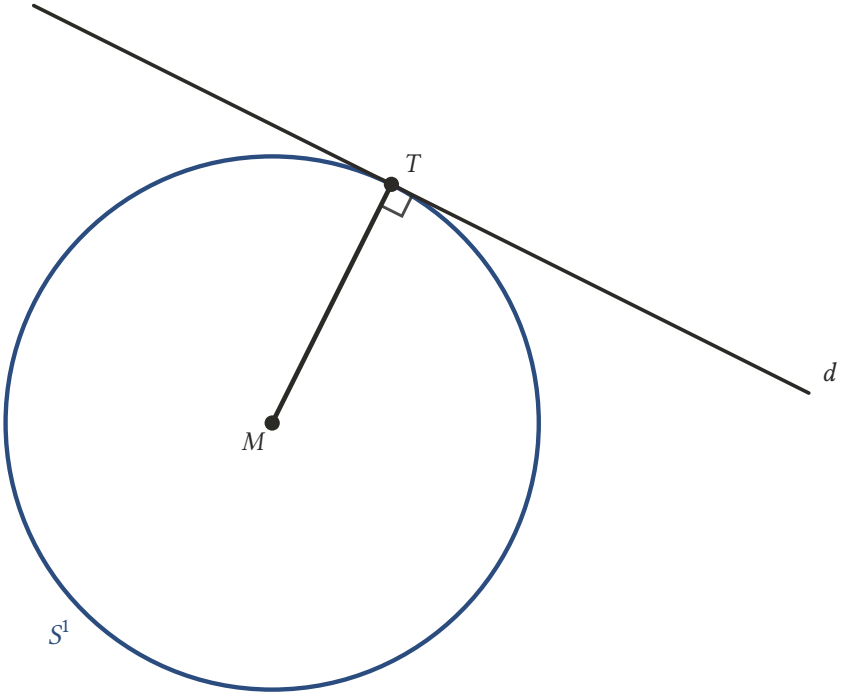
olur. $1+m^2>0$ ve $r,\delta\geq 0$ olduğundan Δ'nın işareti $r-\delta$'nın işaretiyle aynıdır. $\delta<r$ ise $\Delta>0$ ve iki farklı kök, $\delta=r$ ise $\Delta=0$ ve tek (çift) kök, $\delta>r$ ise $\Delta<0$ ve hiç reel kök yoktur. Adım 1'e göre bu, sırasıyla iki, bir ve sıfır ortak nokta demektir.

Düşey doğrular. *$y=mx+n$ biçiminde yazılamayan $x=p$ doğruları için de sonuç aynıdır. Bu doğrunun noktaları (p,y) biçimindedir ve standart denklem $(y-b)^2=r^2-(p-a)^2$ olur. M'nin $x=p$ doğrusuna uzaklığı $\delta=\mid p-a\mid$ olduğundan sağ taraf $r^2-\delta^2$'dir. Bu denklemin $\delta<r$ iken iki, $\delta=r$ iken bir, $\delta>r$ iken sıfır çözümü vardır.*

■

Teğet durumunda ispattan bir bilgi daha çıkar: değme noktası, merkezden doğruya inilen dikmenin ayağıdır. Bunu eğimlerle doğrulayalım.

Sonuç 4.2 (Teğet, değme noktasındaki yarıçapa diktir). *Merkezi M olan bir çemberin T noktasındaki teğeti, MT yarıçapına diktir.*



Şekil 4.11: Teğet d*, değme noktası* T*'deki* MT *yarıçapına diktir.*

İspat.

Önce d teğetinin $y=mx+n$ biçiminde olduğunu varsayalım. Teoremin (Teorem 4.3) ispatındaki denklem bu durumda çift köklüdür ve kök

$$x_T=-\frac{mc-a}{1+m^2}=\frac{a-m(n-b)}{1+m^2}$$

dir. Kısaca $w=ma-b+n$ yazalım. Doğrudan hesapla

$$x_T-a=\frac{-m\,w}{1+m^2},\qquad y_T-b=mx_T+n-b=\frac{w}{1+m^2}$$

bulunur. Teğet durumunda $\delta=r$ olduğundan $\mid w\mid=\sqrt{1+m^2}\,r>0$, yani $w\neq 0$'dır.

- *$m\neq 0$ ise MT'nin eğimi $\dfrac{y_T-b}{x_T-a}=-\dfrac{1}{m}$'dir. Bu eğim ile d'nin eğimi m'nin çarpımı -1 olduğundan MT ile d diktir (Bölme Oranı, Eğim ve Açı).*

 CC BY-NC-SA 4.0

- $m = 0$ *ise* $x_T = a$ *olur;* MT *düşeydir,* d *ise yataydır ve yine diktirler.*

Son olarak teğet düşey bir $x = p$ *doğrusuysa, aynı ispatın son adımına göre tek çözüm* $y = b$*'dir, yani* $T(p, b)$*'dir. Bu durumda* MT *yatay, teğet düşeydir; yine diktirler.*

■

Örnek 4.7 (Teğet olan doğru ve değme noktası). $3x + 4y - 25 = 0$ doğrusunun $x^2 + y^2 = 25$ çemberine göre durumunu belirleyin; teğetse değme noktasını bulun.

Çözüm.
Çemberin merkezi $O(0, 0)$, yarıçapı $r = 5$'tir (Sonuç 4.1). Merkezin doğruya uzaklığı

$$\delta = \frac{|\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 25\ |}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

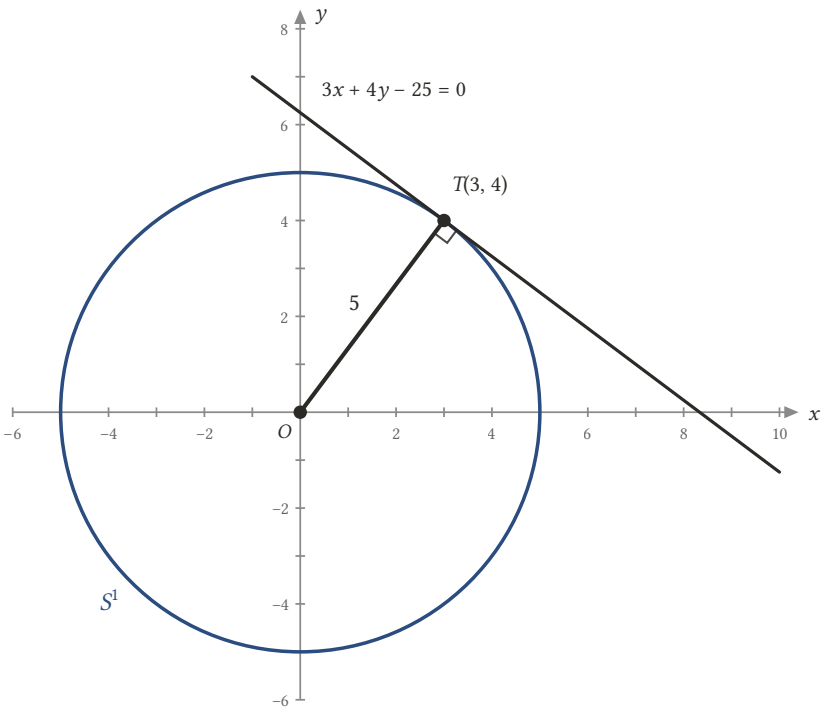
olduğundan $\delta = r$'dir; Teorem 4.3 gereğince doğru çembere teğettir.
Değme noktasını bulmak için iki denklemi birlikte çözelim. Doğrudan $y = \frac{25-3x}{4}$ çekilip çember denkleminde yerine yazılırsa

$$x^2 + \frac{(25 - 3x)^2}{16} = 25$$

olur. İki yanı 16 ile çarpalım: $16x^2 + 625 - 150x + 9x^2 = 400$, yani

$$25x^2 - 150x + 225 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0.$$

Çift kök $x = 3$'tür ve $y = \frac{25-9}{4} = 4$ bulunur. Değme noktası $T(3, 4)$'tür. Sonuç 4.2 ile uyumu da görelim: OT'nin eğimi $\frac{4}{3}$, doğrunun eğimi $-\frac{3}{4}$'tür ve çarpımları -1'dir.



Şekil 4.12: $3x + 4y - 25 = 0$ doğrusu $x^2 + y^2 = 25$ çemberine $T(3, 4)$ noktasında teğettir; OT yarıçapı teğete diktir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 4.8 (Çemberle buluşmayan doğru). $x + y + 3 = 0$ doğrusunun $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ çemberine göre durumunu belirleyin.

Çözüm.
Önce çemberin merkezini ve yarıçapını bulalım: $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ ve $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$ olduğundan denklem

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

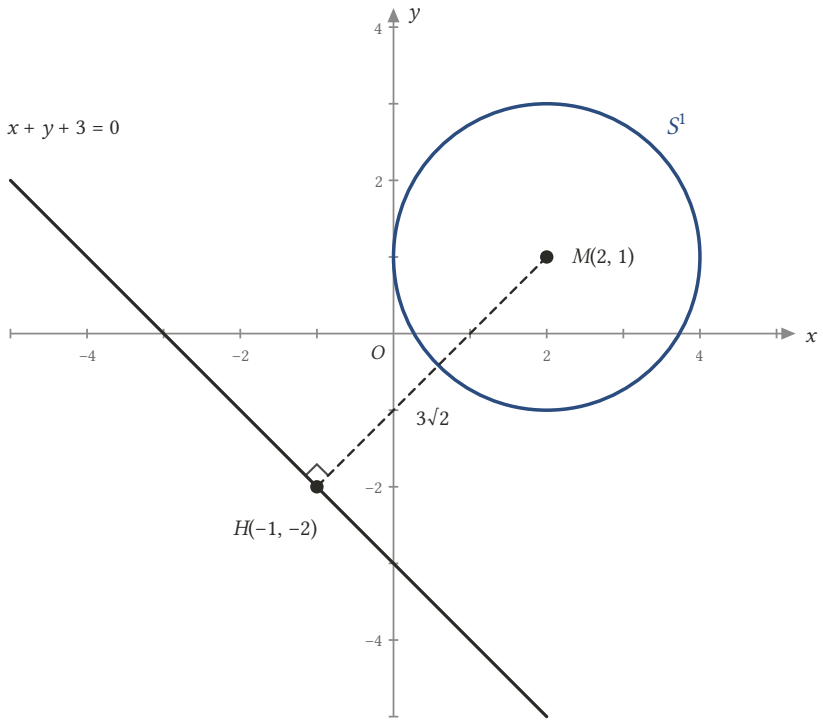
biçimine gelir. Merkez $M(2,1)$, yarıçap $r = 2$'dir. Merkezin doğruya uzaklığı

$$\delta = \frac{|\,2+1+3\,|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \approx 4{,}24$$

olduğundan $\delta > r$'dir; Teorem 4.3 gereğince doğru ile çemberin ortak noktası yoktur. Merkezden doğruya inilen dikme $(2+t, 1+t)$ noktalarından oluşur; $t = -3$ için doğruyu $H(-1,-2)$ noktasında keser.
Aynı sonucu cebirle de görelim: $y = -x - 3$ çember denkleminde yerine yazılırsa

$$x^2 + (x+3)^2 - 4x + 2(x+3) + 1 = 2x^2 + 4x + 16 = 0$$

ve $x^2 + 2x + 8 = 0$ bulunur. Diskriminant $4 - 32 = -28 < 0$ olduğundan reel çözüm yoktur.



Şekil 4.13: Merkez $M(2,1)$'in $x + y + 3 = 0$ doğrusuna uzaklığı $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$'tür; bu, yarıçap 2'den büyük olduğundan doğru çemberle buluşmaz.

■

4.5 İki Çemberin Durumu

İki çemberin ortak noktalarında da üç durum ortaya çıkar: çemberler iki noktada kesişir, tek noktada dokunur ya da hiç buluşmaz. Hangi durumun gerçekleştiğini bu kez merkezler arasındaki uzaklık ile yarıçaplar belirler.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 4.7 (Kesişen çemberler). İki farklı ortak noktası olan iki çembere **kesişen çemberler** denir.

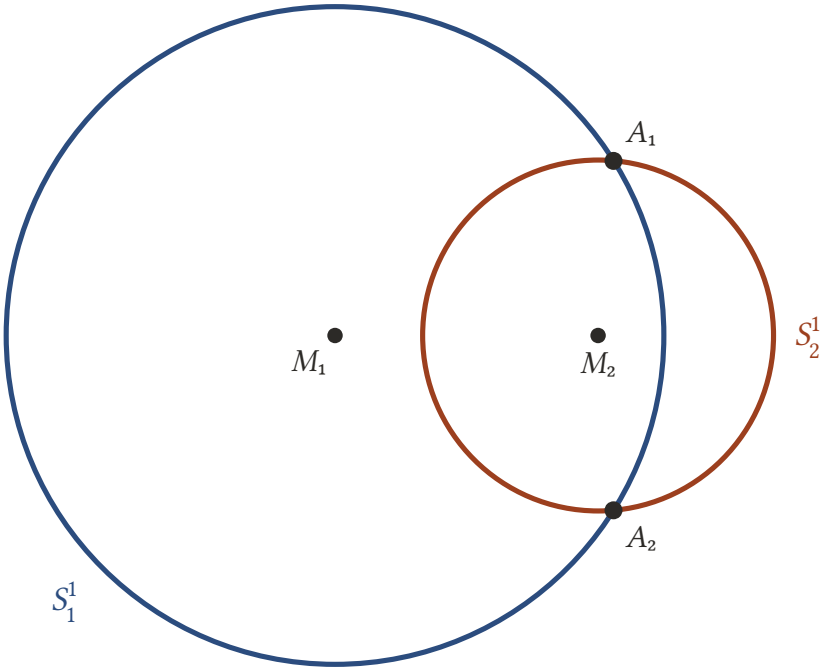
Yani kesişen çemberlerden her biri, diğerini iki noktada keserek onun içine girip çıkar.

Tanım 4.8 (Teğet çemberler). Tek bir ortak noktası olan iki çembere **teğet çemberler**, bu ortak noktaya da **değme noktası** denir.

Yani teğet çemberler birbirine tek bir noktada dokunur.

Teorem 4.4 (İki çemberin ortak noktaları). *Merkezi M_1, yarıçapı r_1 olan S_1^1 çemberi ile merkezi M_2, yarıçapı r_2 olan S_2^1 çemberi birbirinden farklı olsun.*

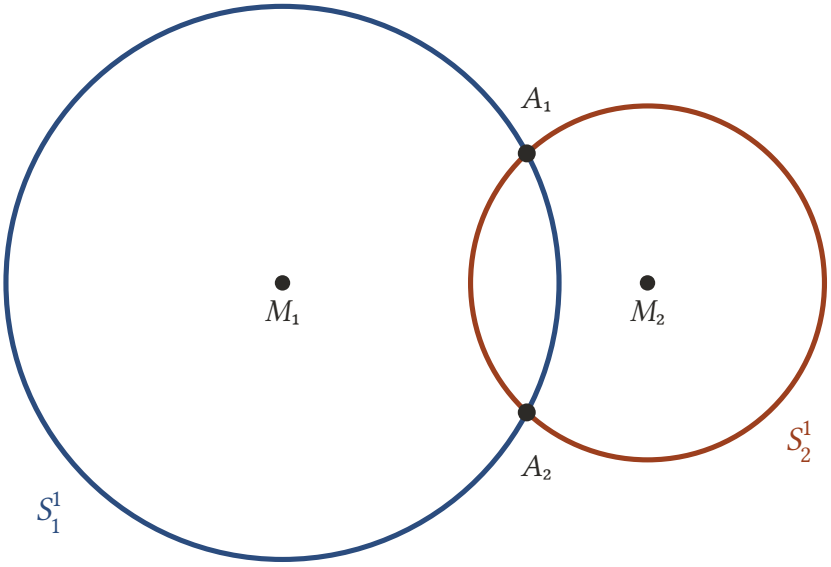
- $|\, r_1 - r_2 \,| < |\, M_1M_2 \,| < r_1 + r_2$ *ise* $S_1^1 \cap S_2^1 = \{A_1, A_2\}$ *iki noktalıdır;*
- $|\, M_1M_2 \,| = r_1 + r_2$ *ya da* $|\, M_1M_2 \,| = |\, r_1 - r_2 \,|$ *ise* $S_1^1 \cap S_2^1 = \{T\}$ *tek noktalıdır;*
- $|\, M_1M_2 \,| > r_1 + r_2$ *ya da* $|\, M_1M_2 \,| < |\, r_1 - r_2 \,|$ *ise* $S_1^1 \cap S_2^1 = \varnothing$ *olur.*



$$S_1^1 \cap S_2^1 = \{A_1, A_2\}$$

Şekil 4.14: $|r_1 - r_2| < |M_1M_2| < r_1 + r_2$*: çemberler iki noktada kesişir. Burada küçük çemberin merkezi büyük çemberin içindedir.*

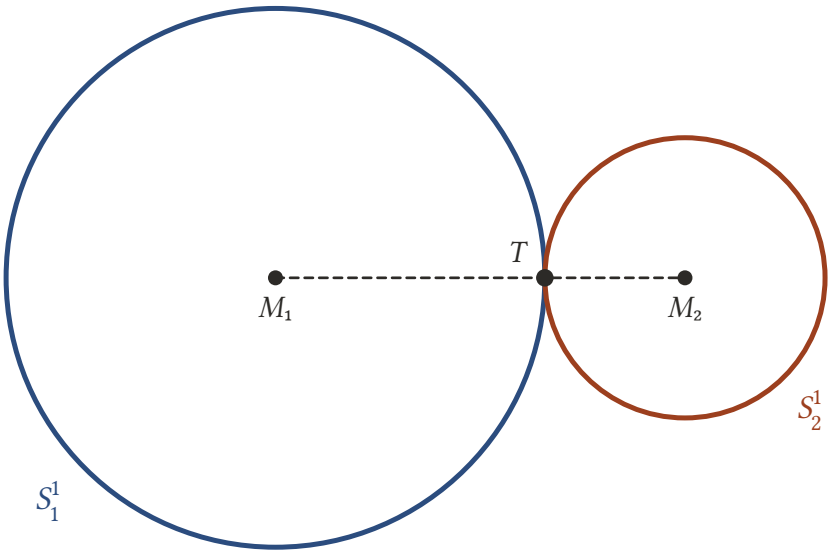
 CC BY-NC-SA 4.0



$$S_1^1 \cap S_2^1 = \{A_1, A_2\}$$

Şekil 4.15: Aynı durum, küçük çemberin merkezi büyük çemberin dışındayken: yine $|r_1 - r_2| < |M_1M_2| < r_1 + r_2$ ve iki ortak nokta vardır.

dıştan teğet

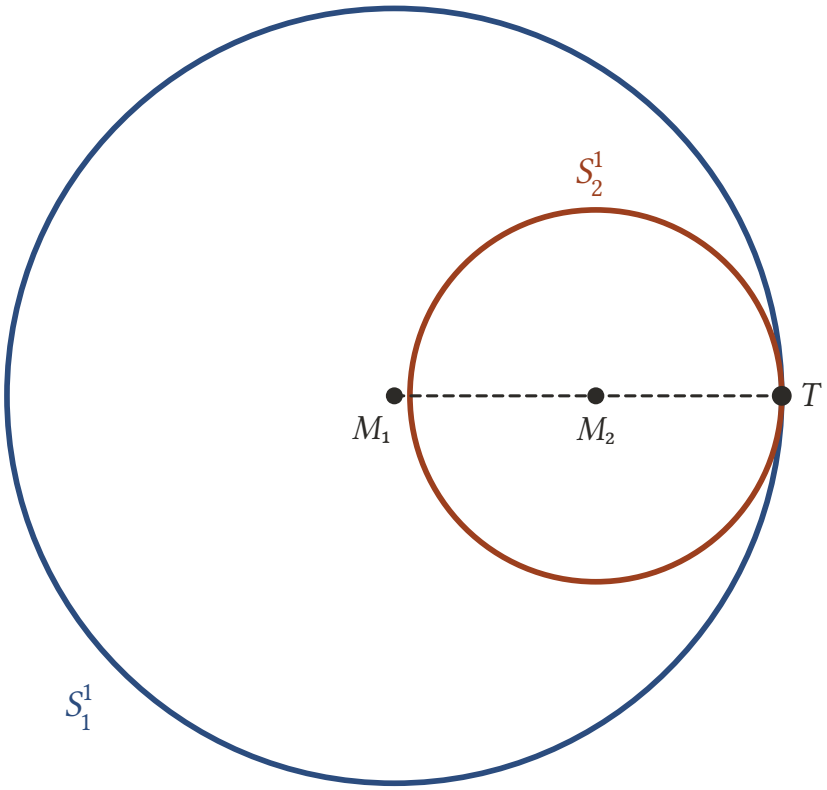


$$S_1^1 \cap S_2^1 = \{T\}$$

Şekil 4.16: $|M_1M_2| = r_1 + r_2$: çemberler dıştan teğettir; T merkezleri birleştiren doğru parçası üzerindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

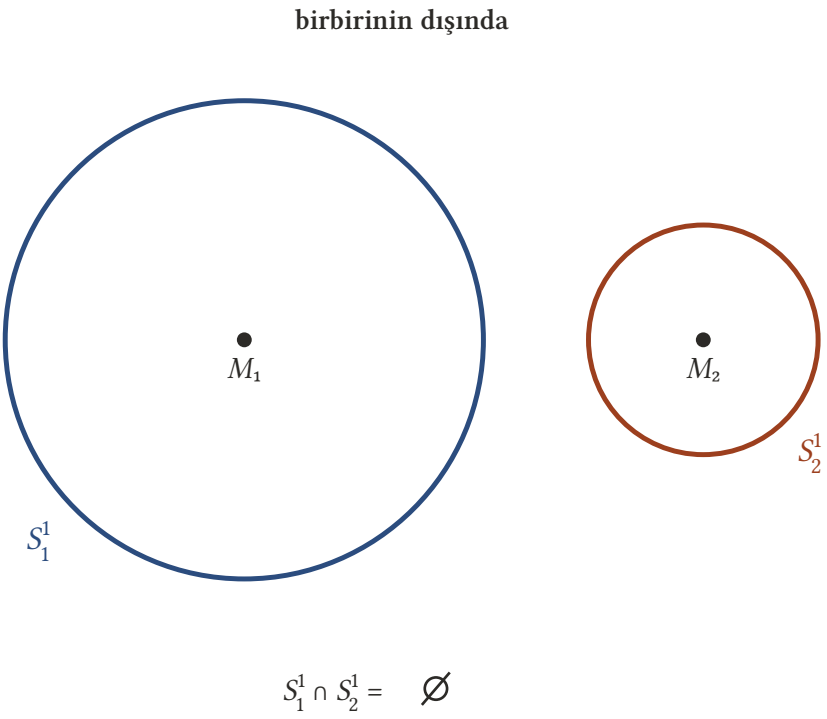
içten teğet



$$S_1^1 \cap S_2^1 = \{T\}$$

Şekil 4.17: $|M_1M_2| = |r_1 - r_2|$*: küçük çember büyüğün içinde kalarak ona* T *noktasında dokunur.*

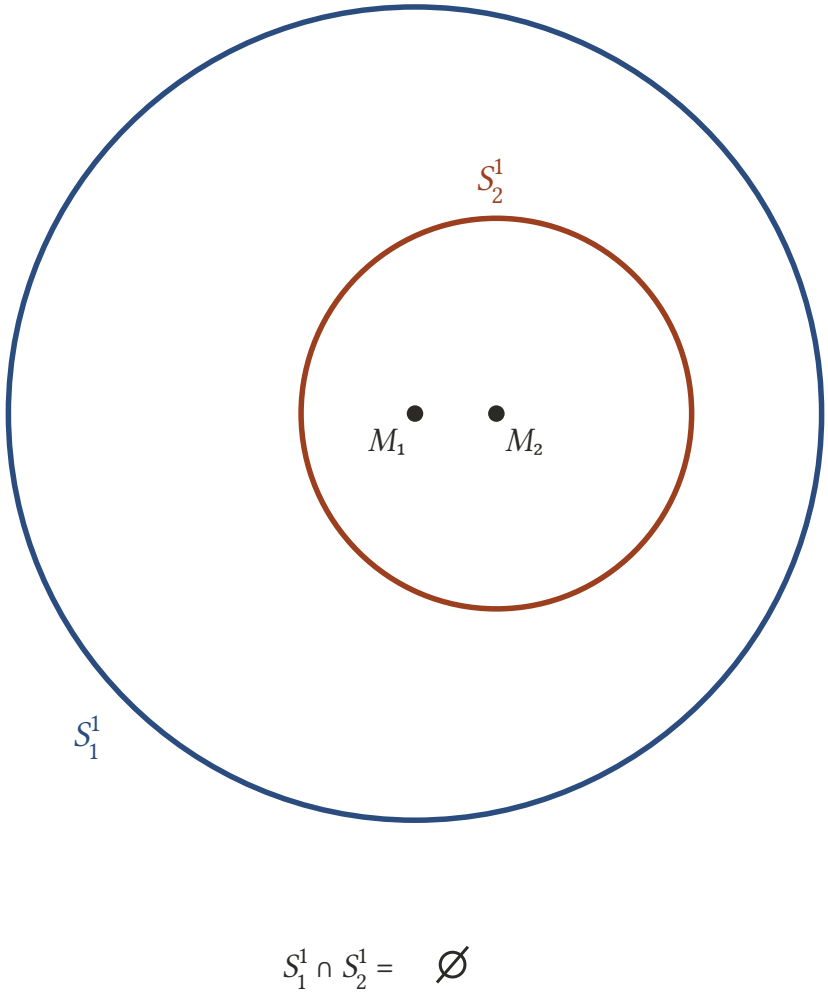
 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.18: $|M_1M_2| > r_1 + r_2$: çemberler birbirinin dışında kalır, ortak noktaları yoktur.

 CC BY-NC-SA 4.0

biri diğerinin içinde



Şekil 4.19: $|M_1M_2| < |r_1 - r_2|$: küçük çember büyüğün içinde kalır ve ona dokunmaz.

İspat.
Kısaca $u = \mid M_1M_2 \mid$ yazalım ve $M_1(a_1, b_1)$, $M_2(a_2, b_2)$ olsun.
Eş merkezli çemberler. *$u = 0$ ise $M_1 = M_2$'dir ve çemberler farklı olduğundan $r_1 \neq r_2$'dir. Ortak bir P noktası olsaydı $\mid PM_1 \mid$ hem r_1'e hem r_2'ye eşit olurdu; bu olanaksızdır. Demek ki kesişim boştur. Bu durumda $u = 0 < \mid r_1 - r_2 \mid$ olduğundan sonuç üçüncü maddeye uyar.*
Adım 1: Kesişimi bir doğruyla çemberin kesişimine indirmek. *Bundan sonra $u > 0$ olsun. Çemberlerin denklemleri*

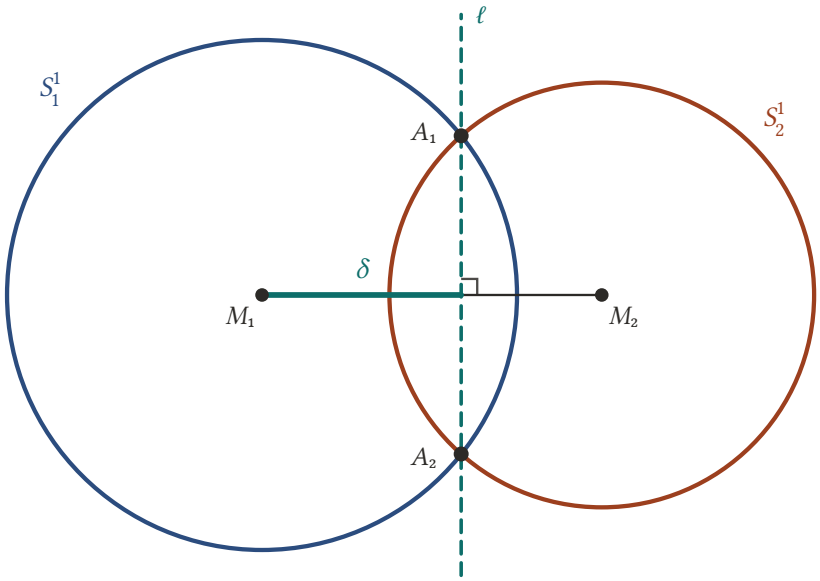
$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = 0, \qquad (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 = 0$$

dır. Bir nokta iki denklemi birden sağlıyorsa birincisini ve ikisinin farkını sağlar; tersine, birinciyi ve farkı sağlıyorsa ikinciyi de sağlar. Fark alınınca x^2 ve y^2 sadeleşir ve

$$\ell : 2(a_2 - a_1)\, x + 2(b_2 - b_1)\, y + (a_1^2 + b_1^2 - r_1^2) - (a_2^2 + b_2^2 - r_2^2) = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

kalır. $u > 0$ olduğundan $a_2 - a_1$ ile $b_2 - b_1$ birlikte sıfır olamaz; yani ℓ bir doğrudur. Böylece $S_1^1 \cap S_2^1 = S_1^1 \cap \ell$ olur ve Teorem 4.3 gereğince ortak nokta sayısını M_1'in ℓ'ye uzaklığı δ ile r_1'in karşılaştırılması belirler.



Şekil 4.20: İki çemberin denklemlerinin farkı, merkezleri birleştiren doğruya dik bir ℓ doğrusudur; ortak noktalar S^1_1 ile ℓ'nin ortak noktalarıdır. Sayılarını M_1'in ℓ'ye uzaklığı δ belirler.

Adım 2: Uzaklığı hesaplamak. *ℓ'nin sol tarafında $x = a_1$, $y = b_1$ yazalım:*

$$\begin{aligned} &2(a_2 - a_1)a_1 + 2(b_2 - b_1)b_1 + a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + r_2^2 \\ &\quad = -\left[\,(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2\,\right] - r_1^2 + r_2^2 = -(u^2 + r_1^2 - r_2^2). \end{aligned}$$

x ile y'nin katsayılarının kareleri toplamının karekökü $\sqrt{4(a_2 - a_1)^2 + 4(b_2 - b_1)^2} = 2u$'dur. Dolayısıyla

$$\delta = \frac{|\, u^2 + r_1^2 - r_2^2 \,|}{2u}$$

bulunur.
Adım 3: Karşılaştırma. *$\delta < r_1$ koşulu $|\, u^2 + r_1^2 - r_2^2 \,| < 2ur_1$, yani*

$$-2ur_1 < u^2 + r_1^2 - r_2^2 < 2ur_1$$

demektir. Soldaki eşitsizlik $(u + r_1)^2 > r_2^2$'ye, yani $u > r_2 - r_1$'e denktir. Sağdaki eşitsizlik $(u - r_1)^2 < r_2^2$'ye, yani $|\, u - r_1 \,| < r_2$'ye, o da $r_1 - r_2 < u < r_1 + r_2$'ye denktir. İkisi birlikte $|\, r_1 - r_2 \,| < u < r_1 + r_2$ koşulunu verir. Bu durumda kesişim iki noktalıdır.
$\delta = r_1$ olması, bu iki eşitsizlikten birinin eşitlik olması demektir (ikisi birden eşitlik olamaz, çünkü o zaman $2ur_1 = -2ur_1$, yani $ur_1 = 0$ olurdu). Soldaki eşitlik $u = r_2 - r_1$'i, sağdaki eşitlik $u = r_1 + r_2$ ya da $u = r_1 - r_2$'yi verir. Yani $\delta = r_1$ tam olarak $u = r_1 + r_2$ ya da $u = |\, r_1 - r_2 \,|$ olduğunda sağlanır ve kesişim tek noktalıdır.
Geriye kalan durumlarda, yani $u > r_1 + r_2$ ya da $u < |\, r_1 - r_2 \,|$ iken $\delta > r_1$'dir ve kesişim boştur.
■

İspattaki ℓ doğrusunun normal vektörü $(a_2 - a_1, b_2 - b_1)$ olduğundan ℓ her zaman merkezleri birleştiren doğruya diktir. Kesişen çemberlerde ℓ, iki çemberin ortak kirişi A_1A_2'yi taşıyan doğrudur; teğet çemberlerde ise değme noktasındaki ortak teğettir. Teğet çemberleri de iki türe ayırırız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 4.9 (Dıştan ve içten teğet çemberler). Merkezleri M_1, M_2 ve yarıçapları r_1, r_2 olan iki teğet çemberde $|\,M_1M_2\,| = r_1 + r_2$ ise çemberlere **dıştan teğet**, $|\,M_1M_2\,| = |\,r_1 - r_2\,|$ ise **içten teğet** denir.

Yani dıştan teğet çemberler birbirinin dışında kalarak dokunur; içten teğet çemberlerde küçük çember büyüğün içinde kalarak ona dokunur. Her iki durumda da T değme noktası merkezleri birleştiren doğru üzerindedir. Gerçekten ortak teğet ℓ hem M_1M_2'ye diktir hem de T'de S_1^1'e teğettir; Sonuç 4.2 gereğince M_1T de ℓ'ye diktir. M_1'den geçip ℓ'ye dik olan tek bir doğru bulunduğundan M_1T ile M_1M_2 aynı doğrudur.

Örnek 4.9 (Kesişen iki çemberin ortak noktaları). $x^2 + y^2 = 25$ ve $x^2 + y^2 - 12x + 23 = 0$ çemberlerinin durumunu belirleyin; varsa ortak noktalarını bulun.

Çözüm.
Birinci çemberin merkezi $M_1 = O(0,0)$, yarıçapı $r_1 = 5$'tir. İkinci denklemde $x^2 - 12x = (x-6)^2 - 36$ olduğundan

$$(x-6)^2 + y^2 = 36 - 23 = 13$$

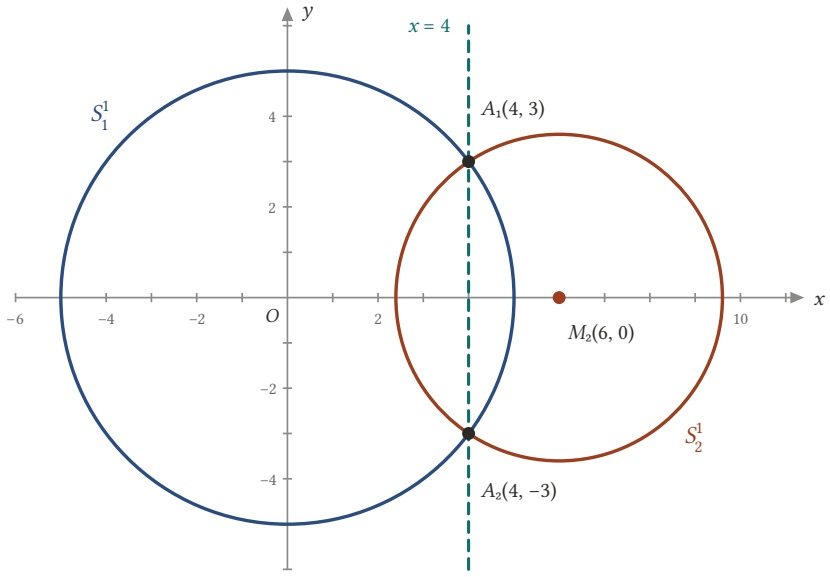
bulunur; merkez $M_2(6,0)$, yarıçap $r_2 = \sqrt{13} \approx 3{,}61$'dir. Merkezler arası uzaklık $|\,M_1M_2\,| = 6$'dır. $\sqrt{13} < 5$ olduğundan $|\,r_1 - r_2\,| = 5 - \sqrt{13} < 6$; ayrıca $\sqrt{13} > 1$ olduğundan $6 < 5 + \sqrt{13}$'tür. O hâlde

$$|\,r_1 - r_2\,| < |\,M_1M_2\,| < r_1 + r_2$$

sağlanır; Teorem 4.4 gereğince çemberler iki noktada kesişir.
Ortak noktaları bulmak için denklemleri $x^2 + y^2 - 25 = 0$ ve $x^2 + y^2 - 12x + 23 = 0$ biçiminde yazıp birinciden ikinciyi çıkaralım:

$$-25 - (-12x + 23) = 12x - 48 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4.$$

Bu, ortak kirişin doğrusudur. $x = 4$ birinci denklemde yazılırsa $y^2 = 25 - 16 = 9$, yani $y = \pm 3$ bulunur. Ortak noktalar $A_1(4,3)$ ve $A_2(4,-3)$'tür. Denetim: $(4-6)^2 + (\pm 3)^2 = 4 + 9 = 13$.



Şekil 4.21: $x^2 + y^2 = 25$ ile $(x-6)^2 + y^2 = 13$ çemberleri $A_1(4, 3)$ ve $A_2(4, -3)$ noktalarında kesişir; ortak kiriş $x = 4$ doğrusu üzerindedir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 4.10 (Dıştan teğet iki çember). $x^2+y^2=4$ ve $(x-3)^2+(y-4)^2=9$ çemberlerinin durumunu belirleyin; teğetseler değme noktasını bulun.

Çözüm.
Birinci çemberin merkezi $M_1=O(0,0)$, yarıçapı $r_1=2$; ikincinin merkezi $M_2(3,4)$, yarıçapı $r_2=3$'tür. Merkezler arası uzaklık

$$|\,M_1M_2\,|=\sqrt{3^2+4^2}=5=r_1+r_2$$

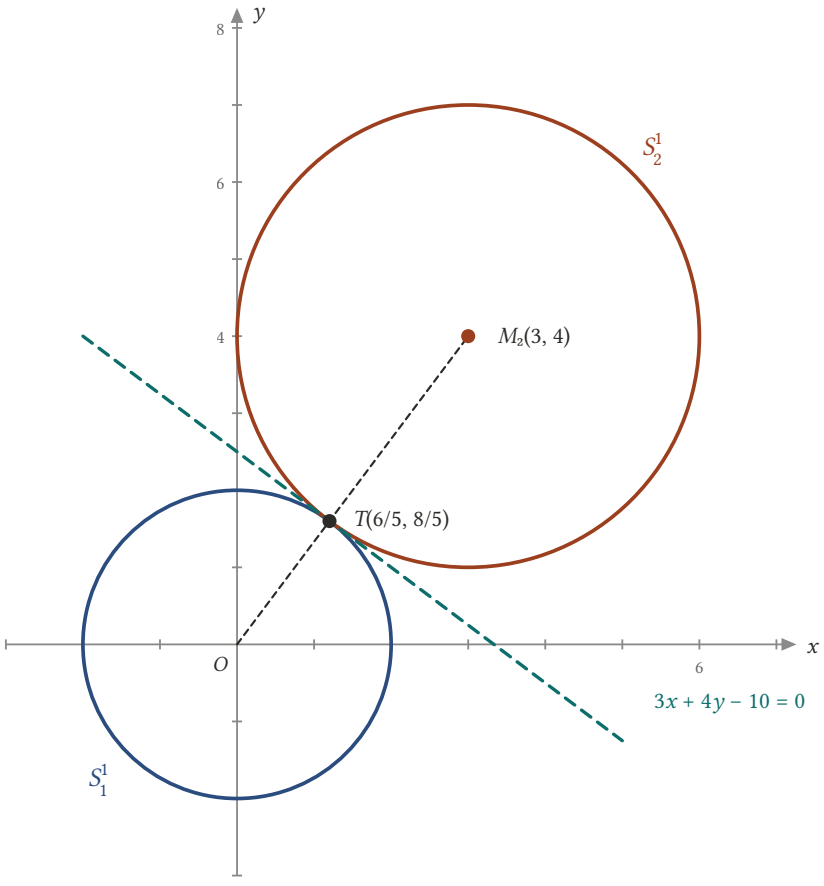
olduğundan Teorem 4.4 gereğince çemberler tek noktada kesişir; Tanım 4.9 anlamında dıştan teğettirler. Değme noktasını bulmak için ikinci denklemi açalım: $x^2+y^2-6x-8y+16=0$. Birinci denklemden ($x^2+y^2-4=0$) bunu çıkarırsak

$$6x+8y-20=0, \qquad \text{yani} \qquad 3x+4y-10=0$$

bulunur. Buradan $y=\frac{10-3x}{4}$ çekip $x^2+y^2=4$'te yerine yazalım ve iki yanı 16 ile çarpalım:

$$16x^2+(10-3x)^2=64 \quad\Rightarrow\quad 25x^2-60x+36=(5x-6)^2=0.$$

Çift kök $x=\frac{6}{5}$'tir ve $y=\frac{10-18/5}{4}=\frac{8}{5}$ bulunur. Değme noktası $T\left(\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$'tir. Bu nokta M_1M_2 doğru parçası üzerindedir: M_1'den M_2'ye giden yolun $\frac{2}{5}$'inde, yani $\left(\frac{2}{5}\cdot 3,\frac{2}{5}\cdot 4\right)$ noktasındadır. $3x+4y-10=0$ doğrusu da iki çemberin T'deki ortak teğetidir; örneğin O'nun bu doğruya uzaklığı $\frac{10}{5}=2=r_1$'dir.



Şekil 4.22: $x^2+y^2=4$ ile $(x-3)^2+(y-4)^2=9$ çemberleri dıştan teğettir. Değme noktası $T(6/5, 8/5)$ merkezleri birleştiren parça üzerindedir; ortak teğet $3x+4y-10=0$'dır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

4.6 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar bölümdeki yöntemlerin hepsini kullanır: tam kareye tamamlama, koşullardan denklem kurma ve doğru ile çemberin ortak noktalarını bulma.

Alıştırma 4.1 (Bir çember belirtir mi). $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 6 = 0$ denklemi bir çember belirtir mi? Nedenini açıklayın.

Çözüm.
Tam kareye tamamlayalım: $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ve $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$. Denklem

$$\begin{aligned} 0 &= (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + 6 \\ &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + 1 \end{aligned}$$

biçimine gelir, yani $(x-1)^2 + (y+2)^2 = -1$ olmalıdır. Sol taraf iki karenin toplamı olduğundan hiçbir zaman negatif olamaz. Dolayısıyla denklemi sağlayan nokta yoktur ve denklem bir çember belirtmez.
Teorem 4.2 ile: $D = -2$, $E = 4$, $F = 6$ için $D^2 + E^2 - 4F = 4 + 16 - 24$, yani $-4 < 0$ olduğundan denklemin belirttiği küme boştur.
■

Alıştırma 4.2 (Merkezi ve bir noktası verilen çember). Merkezi $M(2, 3)$ olan ve $P(5, -1)$ noktasından geçen çemberin denklemini bulun.

Çözüm.
Merkezi $(2, 3)$ ve yarıçapı r olan çemberin denklemi

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

dir. $P(5, -1)$ bu denklemi sağlayacağından

$$r^2 = (5-2)^2 + (-1-3)^2 = 9 + 16 = 25$$

ve $r = 5$ bulunur. Yarıçap, MP parçasının uzunluğudur; dik kenarları 3 ve 4 olan dik üçgenin hipotenüsü olarak da görülebilir. Böylece çemberin denklemi

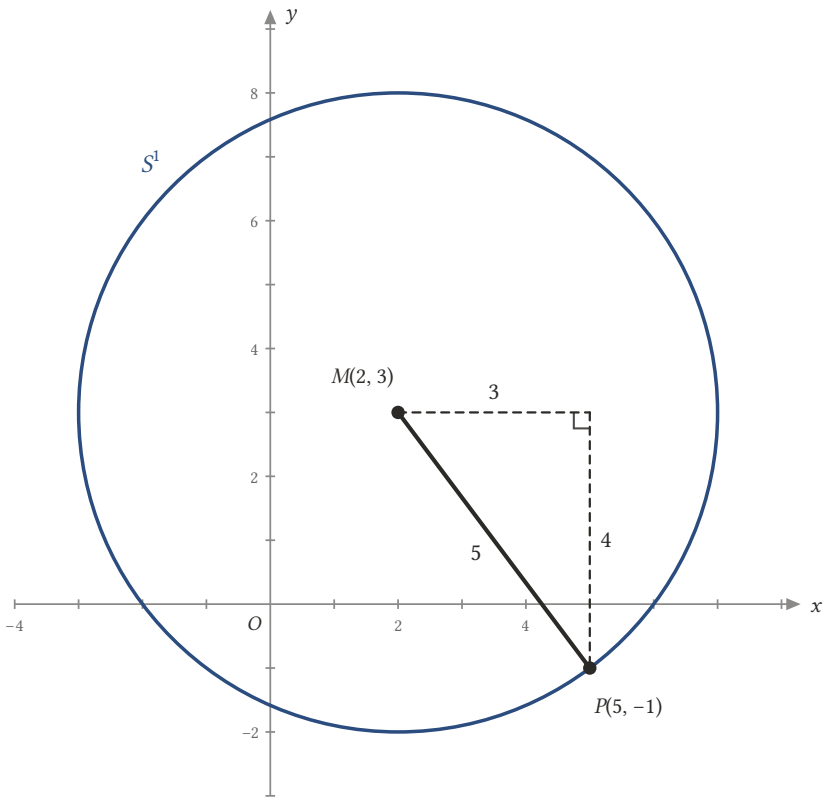
$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

olur. Kareler açılırsa $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 25$, yani

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

elde edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 4.23: Yarıçap $|MP|$, dik kenarları 3 ve 4 olan dik üçgenin hipotenüsüdür: $r = 5$.

■

Alıştırma 4.3 (Üç noktadan geçen çember). $A(5,3)$, $B(6,2)$ ve $C(3,-1)$ noktalarından geçen çemberin denklemini bulun.

Çözüm.
Çemberin genel denklemi $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ üç bilinmeyen sabit içerir. Üç noktanın her biri denklemi sağlamalıdır; koordinatları yerine yazınca üç denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} 25 + 9 + 5D + 3E + F &= 0, \\ 36 + 4 + 6D + 2E + F &= 0, \\ 9 + 1 + 3D - E + F &= 0. \end{aligned}$$

Sabitleri sağa geçirelim:

$$5D + 3E + F = -34, \tag{4}$$

$$6D + 2E + F = -40, \tag{5}$$

$$3D - E + F = -10. \tag{6}$$

(4)'ten (5)'i çıkarınca F yok olur:

$$-D + E = 6. \tag{7}$$

(5)'ten (6)'yı çıkarınca $3D + 3E = -30$, yani

$$D + E = -10 \tag{8}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

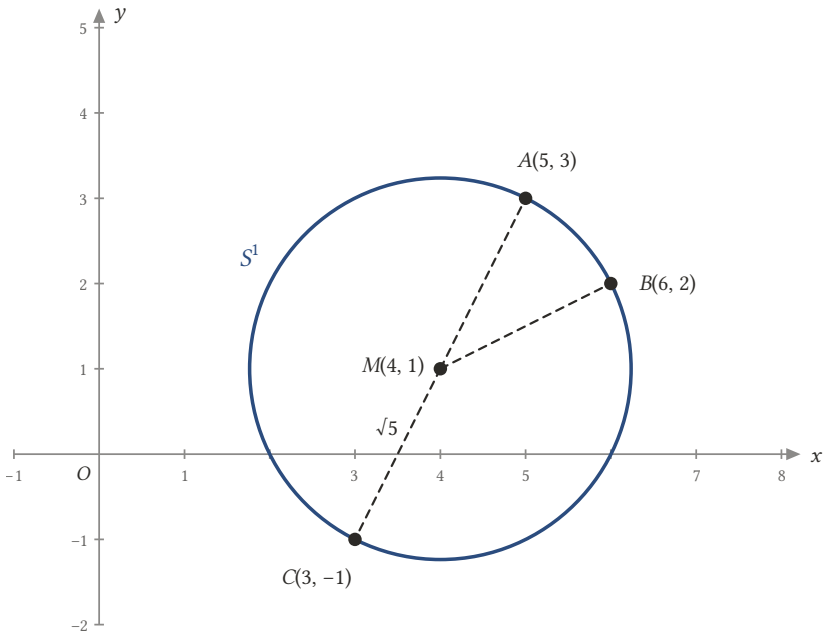
bulunur. (7) ile (8) taraf tarafa toplanırsa $2E = -4$, yani $E = -2$; (8)'den de $D = -8$ çıkar. Son olarak (4)'ten

$$F = -34 - 5(-8) - 3(-2) = -34 + 40 + 6 = 12$$

bulunur. Çemberin denklemi

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

dır. Teorem 4.2 gereğince merkezi $M(4,1)$, yarıçapı $\frac{1}{2}\sqrt{64+4-48} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}$'tir. Denetim: $|\,MA\,|^2 = 1+4$, $|\,MB\,|^2 = 4+1$ ve $|\,MC\,|^2 = 1+4$; üçü de 5'e eşittir.



Şekil 4.24: $A(5,3)$, $B(6,2)$ ve $C(3,-1)$ noktalarından geçen çemberin merkezi $M(4,1)$, yarıçapı $\sqrt{5}$'tir.

■

Alıştırma 4.4 (Bir doğruya teğet olan orijin merkezli çember). Merkezi başlangıç noktası olan ve $-4y + 3x + 10 = 0$ doğrusuna teğet olan çemberin denklemini bulun.

Çözüm.
Çember bu doğruya teğet olduğundan Teorem 4.3 gereğince yarıçapı, merkez $O(0,0)$'ın doğruya uzaklığına eşittir. Bu uzaklığı doğrunun normal denkleminden okuyalım.
Doğru $3x - 4y + 10 = 0$ biçiminde yazılırsa $A = 3$, $B = -4$ ve $C = 10$'dur. $C > 0$ olduğundan $k < 0$ seçilmelidir. $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{9+16} = 5$ olduğundan

$$k = -\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{1}{5}$$

bulunur. Denklemi k ile çarparsak normal denklem

$$\frac{3}{-5}x + \frac{-4}{-5}y + \frac{10}{-5} = 0, \qquad \text{yani} \qquad -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$$

olur. Normal denklem $x\cos\omega + y\sin\omega - r = 0$ biçiminde olduğundan $\cos\omega = -\frac{3}{5}$, $\sin\omega = \frac{4}{5}$ ve orijinin doğruya uzaklığı $r = 2$'dir. Aynı sayıyı uzaklık formülüyle de buluruz:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left|\frac{-3\cdot 0+4\cdot 0-10}{5}\right| = 2.$$

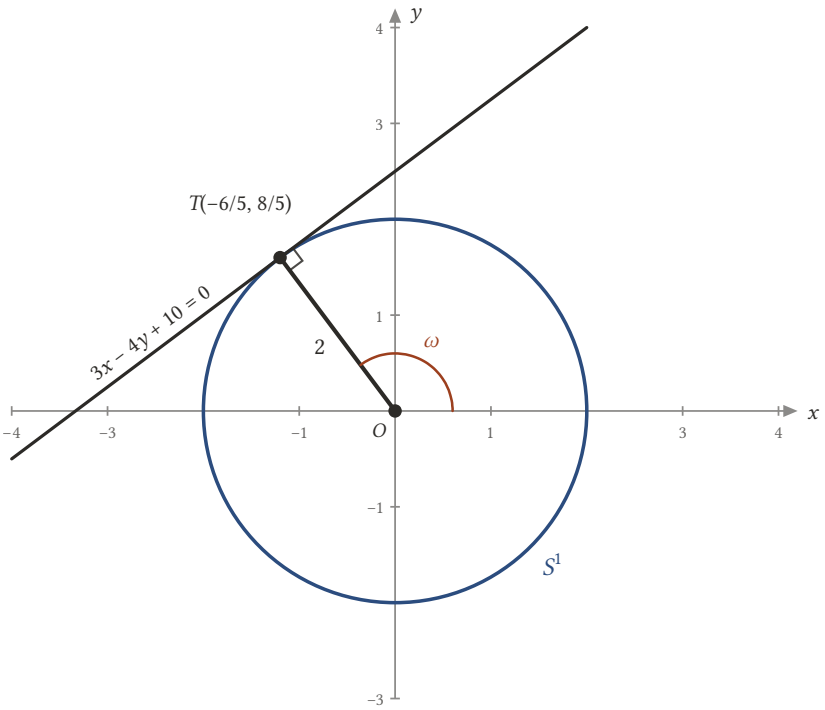
O hâlde yarıçap 2'dir ve Sonuç 4.1 gereğince çemberin denklemi

$$x^2+y^2=4$$

olur. Değme noktası, orijinden doğruya inilen dikmenin ayağıdır: $T=(r\cos\omega, r\sin\omega)=\left(-\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)$. Gerçekten

$$3\left(-\frac{6}{5}\right)-4\cdot\frac{8}{5}+10=\frac{-18-32+50}{5}=0$$

olduğundan T doğru üzerindedir; $\frac{36}{25}+\frac{64}{25}=4$ olduğundan da çember üzerindedir.



Şekil 4.25: Orijinin $3x-4y+10=0$ doğrusuna uzaklığı 2'dir; merkezi orijin olan ve bu doğruya teğet çember $x^2+y^2=4$, değme noktası $T(-6/5, 8/5)$'tir.

■

Alıştırma 4.5 (Doğru ile çemberin ortak noktaları). Dik koordinatlardaki denklemi $y=2x+3$ olan doğru ile denklemi $x^2+y^2=9$ olan çemberin varsa ortak noktalarını bulun.

Çözüm.
Önce ortak nokta olup olmadığına bakalım. Çemberin merkezi $O(0,0)$, yarıçapı 3'tür; doğru $2x-y+3=0$ biçiminde yazılırsa merkezin doğruya uzaklığı

$$\delta=\frac{|\,2\cdot 0-0+3\,|}{\sqrt{4+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}<3$$

olduğundan Teorem 4.3 gereğince iki ortak nokta vardır.
Bu noktaları bulmak için çember denkleminde y yerine $2x+3$ yazalım:

$$x^2 + (2x+3)^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x^2 + 12x + 9 = 9.$$

Buradan

$$5x^2 + 12x = x(5x+12) = 0$$

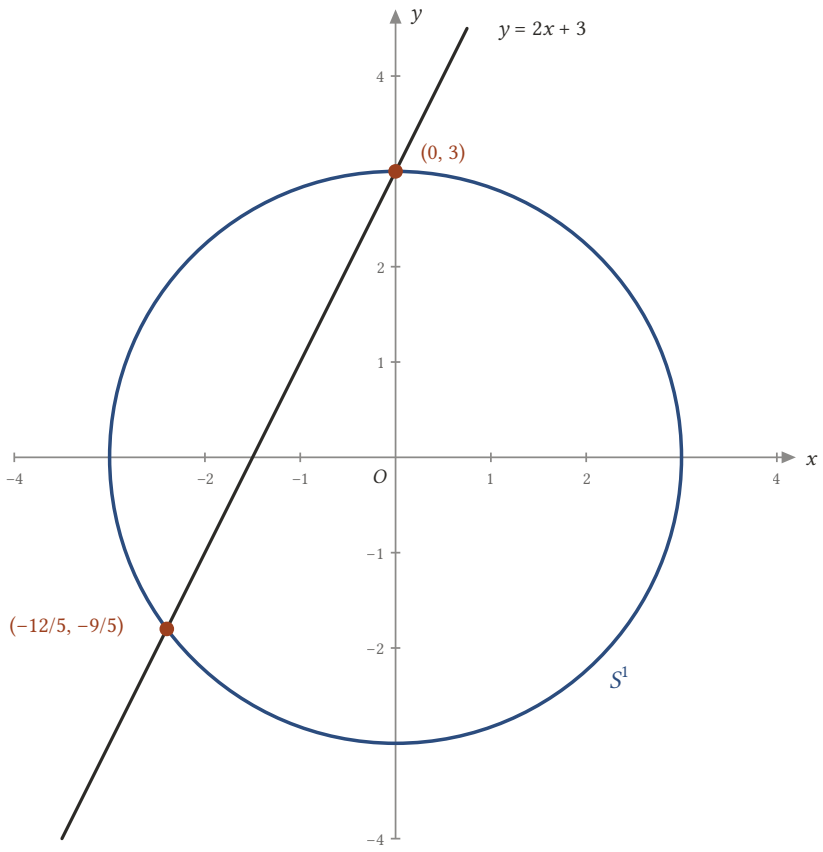
elde edilir. Bu denklemin kökleri $x_1 = 0$ ve $x_2 = -\frac{12}{5}$'tir. Doğru denkleminden

$$x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 3, \qquad x_2 = -\frac{12}{5} \Rightarrow y_2 = -\frac{24}{5} + 3 = -\frac{9}{5}$$

bulunur. O hâlde ortak noktalar

$$(x_1, y_1) = (0, 3) \qquad \text{ve} \qquad (x_2, y_2) = \left(-\frac{12}{5}, -\frac{9}{5}\right)$$

dir. Denetim: $\frac{144}{25} + \frac{81}{25} = \frac{225}{25} = 9$.



Şekil 4.26: $y = 2x + 3$ doğrusu $x^2 + y^2 = 9$ çemberini $(0, 3)$ ve $(-12/5, -9/5)$ noktalarında keser.

■

Çemberle birlikte düzlemde dik koordinatlarla yapılan temel işleri tamamladık. Sıradaki bölümde eksenlerin dik olmak zorunda olmadığı eğik koordinatlara ve bir noktayı uzaklık ile açı yardımıyla belirleyen kutupsal koordinatlara geçiyoruz: Paralel ve Kutupsal Koordinatlar.

 CC BY-NC-SA 4.0

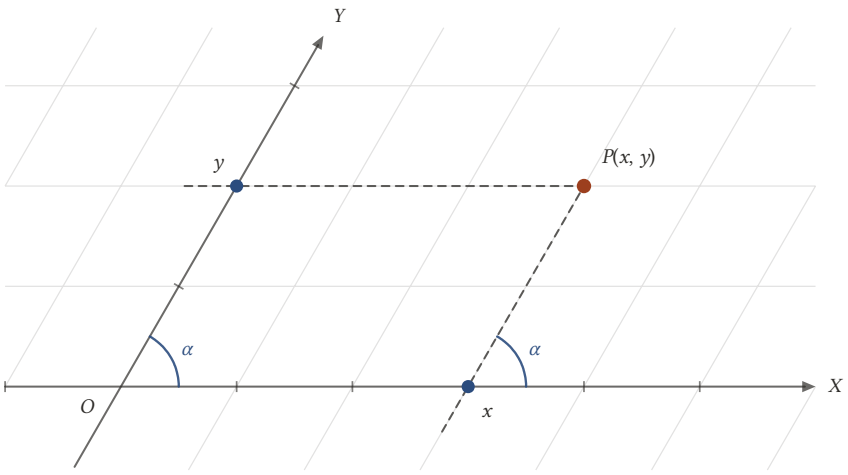
5. Paralel ve Kutupsal Koordinatlar

Dik koordinat sisteminde (Dik Koordinatlar ve Uzaklık) bir noktanın adresini, birbirine dik iki sayı doğrusu yardımıyla yazdık. Bu bölümde aynı düzleme iki farklı gözle bakacağız.
İlki eksenlerin dik olma şartını bırakır: iki eksen herhangi bir açıyla kesişebilir. Böyle kurulan paralel koordinat sistemi, dik sistemin bazı özelliklerini korur, bazılarını kaybeder. Hangilerinin korunduğunu görmek, dik sistemde neyi "bedava" aldığımızı da ortaya koyar. İkincisi, bir noktayı "başlangıçtan ne kadar uzakta ve hangi yönde?" sorularının yanıtıyla tarif eden kutupsal koordinat sistemidir. Başlangıç noktası etrafında dönen ya da ona göre simetrik olan eğriler bu sistemde çok daha sade denklemlere sahiptir.

5.1 Paralel koordinat sistemi

Dik koordinat sistemini kurarken iki sayı doğrusunu dik kesiştirmiştik. Aynı kurguyu dik olmayan iki eksenle de yapabiliriz. Tek fark, noktadan eksenlere dikme indirmek yerine eksenlere paralel doğrular çizmektir.

Tanım 5.1 (Paralel koordinat sistemi). Düzlemde bir O noktasında kesişen iki doğru alalım ve her birini, başlangıç noktası O olan bir sayı doğrusu gibi yönlendirelim. Bunlara X-ekseni ve Y-ekseni diyelim. Pozitif X yönünden pozitif Y yönüne olan açı α olsun ($0 < \alpha < \pi$).
Düzlemin bir P noktasından Y-eksenine paralel çizilen doğru X-eksenini x sayısının noktasında, X-eksenine paralel çizilen doğru da Y-eksenini y sayısının noktasında kessin. (x, y) ikilisine P'nin **paralel koordinatları** ya da **Descartes koordinatları** denir ve $P(x, y)$ yazılır. Bu biçimde kurulan koordinat sistemine **paralel koordinat sistemi** ya da **eğik koordinat sistemi** denir.



Şekil 5.1: Paralel koordinat sistemi: eksenler arasındaki açı α. P'den eksenlere paralel çizilen kesikli doğrular X-eksenini x'te, Y-eksenini y'de keser; P'nin koordinatları (x, y) olur. Soluk ızgara çizgileri de eksenlere paraleldir.

Yani x ve y, P'den eksenlere paralel çizilen doğruların eksenlerden ayırdığı parçaların işaretli uzunluklarıdır. Dik sistemde bu paraleller eksenlere dik olduğundan, aynı sayılar dik izdüşümlerle elde edilir.

Önerme 5.1 (Paralel koordinatlar bire bir eşleme kurar). *Paralel koordinat sistemiyle donatılmış düzlemde her P noktasına (x, y) paralel koordinatlarını karşılık getiren eşleme, düzlemin noktaları ile $\mathbb{R}^2$ arasında bire bir ve örten bir eşlemedir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Önce eşlemenin iyi tanımlı olduğunu, sonra bire bir ve örten olduğunu gösterelim.
İyi tanımlılık. *Bir P noktasından Y-eksenine paralel tek bir doğru geçer (paralellik aksiyomu). Eksenler kesiştiği için bu doğru X-eksenine paralel değildir, dolayısıyla X-eksenini tam bir noktada keser. Bu nokta X sayı doğrusunun tek bir x sayısına karşılık gelir. Aynı gerekçeyle y de tek türlü belirlidir.*
Bire birlik. *P ve P' aynı (x, y) ikilisine sahip olsun. O zaman ikisi de X-ekseninin x noktasından geçen ve Y-eksenine paralel olan d_x doğrusu üzerindedir. İkisi de Y-ekseninin y noktasından geçen ve X-eksenine paralel olan d_y doğrusu üzerindedir. d_x ile d_y farklı eksenlere paralel olduklarından paralel değildir ve tek bir noktada kesişir. Bu yüzden $P = P'$ olur.*
Örtenlik. *$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verilsin. Yukarıdaki d_x ve d_y doğruları tek bir P noktasında kesişir. P'den Y-eksenine paralel olan tek doğru d_x'tir ve X-eksenini x'te keser. X-eksenine paralel olan tek doğru d_y'dir ve Y-eksenini y'de keser. Demek ki P'nin paralel koordinatları (x, y)'dir.* ■

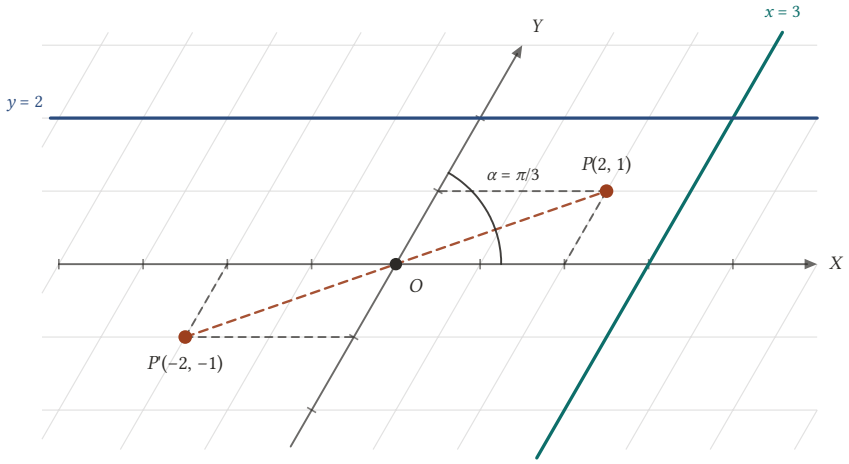
Özel olarak $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ise eksenler diktir. O zaman eksenlere çizilen paraleller, eksenlere inilen dikmelerle çakışır ve paralel koordinat sistemi dik koordinat sistemine dönüşür. Yani dik koordinat sistemi, paralel koordinat sisteminin $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ olan özel hâlidir.

5.1.1 Dik koordinat sistemiyle benzerlikler ve farklılıklar

Eksenler eğildiğinde dik sistemin bazı özellikleri olduğu gibi kalır. Önce bunları toplayalım, sonra neyin bozulduğuna bakalım.

Önerme 5.2 (Dik sistemle ortak özellikler). *Paralel koordinat sisteminde de şunlar doğrudur:*

- *(x, y) ve $(-x, -y)$ noktaları O'ya göre simetriktir.*
- *X-ekseninin denklemi $y = 0$, Y-ekseninin denklemi $x = 0$'dır.*
- *$a, b \in \mathbb{R}$ için $x = a$ denklemi Y-eksenine paralel bir doğruyu, $y = b$ denklemi X-eksenine paralel bir doğruyu belirtir.*



Şekil 5.2: α = π/3 olan eğik sistemde P(2, 1) ile P'(−2, −1) noktaları O'ya göre simetriktir (kesikli paralelkenarlar). x = 3 doğrusu Y-eksenine, y = 2 doğrusu X-eksenine paraleldir.

İspat.
Üçüncü maddeden başlayıp ilk ikisini ondan çıkaracağız.
Eksenlere paralel doğrular. *Bir P noktasının birinci koordinatı a ise, tanım gereği P'den Y-eksenine çizilen paralel X-eksenini a noktasında keser. Yani P, X-ekseninin a noktasından geçen ve Y-eksenine paralel olan d_a doğrusunun üzerindedir. Tersine d_a üzerindeki her noktadan Y-eksenine çizilen paralel d_a'nın kendisidir ve X-eksenini a'da keser. Böylece $x = a$ denklemini sağlayan noktalar tam olarak d_a doğrusunu oluşturur. $y = b$ için gerekçe aynıdır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Eksenlerin denklemleri. *$a = 0$ için d_0, O'dan geçen ve Y-eksenine paralel olan doğrudur. Bu da Y-ekseninin kendisidir, yani Y-ekseninin denklemi $x = 0$'dır. Aynı biçimde X-ekseninin denklemi $y = 0$'dır.*
O'ya göre simetri. *$P(x, y)$ verilsin. A, X-ekseninin x noktası, B de Y-ekseninin y noktası olsun. PA doğrusu Y-eksenine, PB doğrusu X-eksenine paralel olduğundan $OAPB$ bir paralelkenardır. P bir eksen üzerindeyse bu paralelkenar bir doğru parçasına dönüşür, ama aşağıdaki gerekçe yine geçerlidir.*
O merkezli nokta simetrisi her Q noktasını, O orta nokta olacak biçimde bir Q' noktasına götürür. Bu dönüşüm uzaklıkları korur, her doğruyu kendisine paralel bir doğruya götürür ve O'dan geçen her doğruyu kendisine götürür. Dolayısıyla X-ekseni kendisine gider ve A, X-ekseninin $-x$ noktasına gider. Aynı biçimde B, Y-ekseninin $-y$ noktasına gider. $OAPB$ paralelkenarının görüntüsü, kenarları yine eksenlere paralel olan ve köşeleri O, $-x$, P', $-y$ olan bir paralelkenardır. Demek ki P'nin simetriği P''nün paralel koordinatları $(-x, -y)$'dir. ■

Farklılık eksenlere göre simetride ortaya çıkar. Dik sistemde (x, y) ile $(-x, y)$ noktaları Y-eksenine göre simetriktir. Paralel sistemde ise (x, y) noktasının Y-eksenine göre simetriği genel olarak $(-x, y)$ değildir. Bunun nedeni, Y-eksenine göre yansımanın X-eksenini kendisine götürmemesidir: X-ekseni ancak Y-eksenine dikse aynada kendisiyle çakışır. Bu yüzden simetrik nokta önce geometrik olarak bulunur, sonra koordinatları paralel izdüşümlerle okunur.

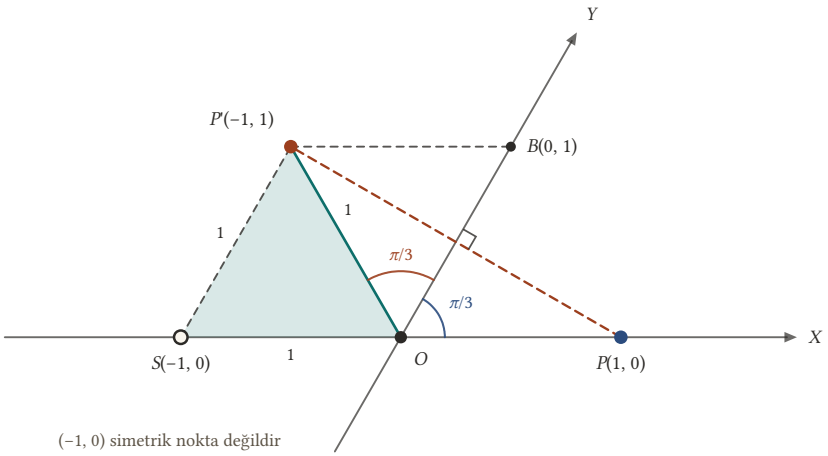
Örnek 5.1 (Eğik sistemde Y-eksenine göre simetri). Eksenleri arasındaki açı $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ olan bir paralel koordinat sisteminde $P(1, 0)$ noktasının Y-eksenine göre simetriğinin paralel koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
P', P'nin Y-eksenine göre simetriği olsun. Yani Y-ekseni PP' doğru parçasının orta dikmesidir.
Simetriğin yeri. O aynanın üzerinde olduğundan yansıma O'ya olan uzaklığı korur: $|\,OP'\,| = |\,OP\,| = 1$. Yansıma aynayla yapılan açıyı da korur. OP yarı doğrusu (pozitif X yönü) Y-ekseniyle $\dfrac{\pi}{3}$ açı yapar. Öyleyse OP' yarı doğrusu da Y-ekseninin öbür yanında onunla $\dfrac{\pi}{3}$ açı yapar. Böylece pozitif X yönünden OP''ye olan açı $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ olur.
Birinci koordinat. P''den Y-eksenine paralel çizilen doğru X-eksenini S noktasında kessin. OSP' üçgeninin açılarına bakalım:

- O'daki açı, OP' ile negatif X yönü arasındaki açıdır: $\pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$.
- S'deki açı, SO yönü (pozitif X) ile SP' yönü (pozitif Y'ye paralel) arasındadır. Paralel doğruların yöndeş açıları eşit olduğundan bu açı $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$'tür.
- Üçüncü açı da $\pi - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ olur.

Üçgen eşkenardır ve kenarları $|\,OP'\,| = 1$'e eşittir. S, O'nun negatif tarafında olduğundan birinci koordinat $x = -1$'dir.
İkinci koordinat. P''den X-eksenine paralel çizilen doğru Y-eksenini B'de kessin. $OSP'B$ bir paralelkenar olduğundan $|\,OB\,| = |\,SP'\,| = 1$'dir. B pozitif tarafta olduğundan $y = 1$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.3: $\alpha = \pi/3$ olan eğik sistemde Y-eksenine göre yansıma. $P(1,0)$'ın simetriği $P(-1,1)$'dir; OSP eşkenar üçgendir ve $OSPB$ bir paralelkenardır.

Buna göre $P(1,0)$'ın Y-eksenine göre simetriği $P'(-1,1)$'dir. $(-1,0)$ noktası ise yalnızca S'dir: X-ekseni üzerinde durur ve P'nin simetriği değildir. ■

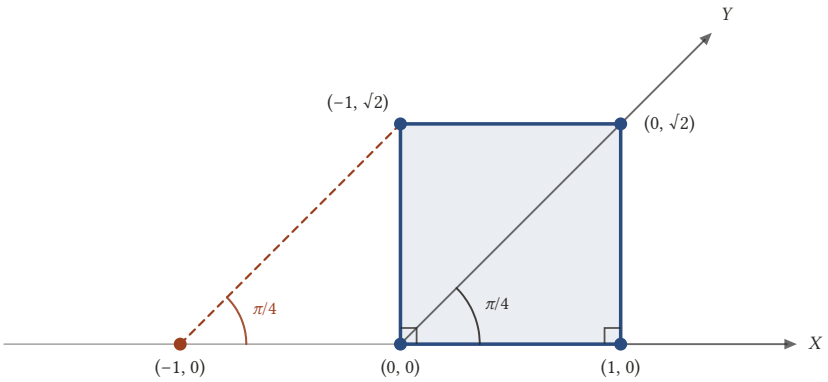
Örnek 5.2 (Eğik sistemde karenin dördüncü köşesi). Eksenleri arasındaki açı $\dfrac{\pi}{4}$ olan bir paralel koordinat sisteminde, üç köşesi $(0,0)$, $(1,0)$ ve $(0,\sqrt{2})$ olan bir karenin dördüncü köşesinin paralel koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Köşelere $O(0,0)$, $A(1,0)$ ve $B(0,\sqrt{2})$ diyelim. Dikkat: B, Y-ekseni üzerindedir ve O'ya uzaklığı $\sqrt{2}$'dir.
Karenin biçimi. OAB üçgeninde $|\,OA\,| = 1$, $|\,OB\,| = \sqrt{2}$ ve aradaki açı $\dfrac{\pi}{4}$'tür. Kosinüs teoreminden

$$|\,AB\,|^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1 + 2 - 2 = 1$$

bulunur, yani $|\,AB\,| = 1$'dir. Ayrıca $|\,OA\,|^2 + |\,AB\,|^2 = 1 + 1 = 2 = |\,OB\,|^2$ olduğundan, Pisagor teoreminin karşıtı gereği A'daki açı diktir. Demek ki O, A, B kenar uzunluğu 1 olan bir karenin ardışık üç köşesidir ve OB bu karenin köşegenidir. Dördüncü köşe C için OC kenarı AB'ye paralel ve eşittir, CB kenarı da OA'ya yani X-eksenine paraleldir. AB, X-eksenine dik olduğundan OC de X-eksenine diktir.
İkinci koordinat. C'den X-eksenine çizilen paralel CB doğrusudur ve Y-eksenini B'de keser. Öyleyse $y = \sqrt{2}$'dir.
Birinci koordinat. C'den Y-eksenine çizilen paralel X-eksenini S'de kessin. OSC üçgeninde O'daki açı diktir, çünkü OC, X-eksenine diktir. S'deki açı ise SC, Y-eksenine paralel olduğundan $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$'tür. Üçgen ikizkenar dik üçgendir ve $|\,OS\,| = |\,OC\,| = 1$ olur. S, O'nun solunda kaldığından $x = -1$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.4: $\alpha = \pi/4$ olan eğik sistemde kenarı 1 olan kare. Köşelerin yanındaki sayılar paralel koordinatlardır; C'den Y-eksenine çizilen paralel X-eksenini $(-1, 0)$'da keser.

Buna göre karenin dördüncü köşesi $C(-1, \sqrt{2})$'dir. ■

5.2 Kutupsal koordinat sistemi

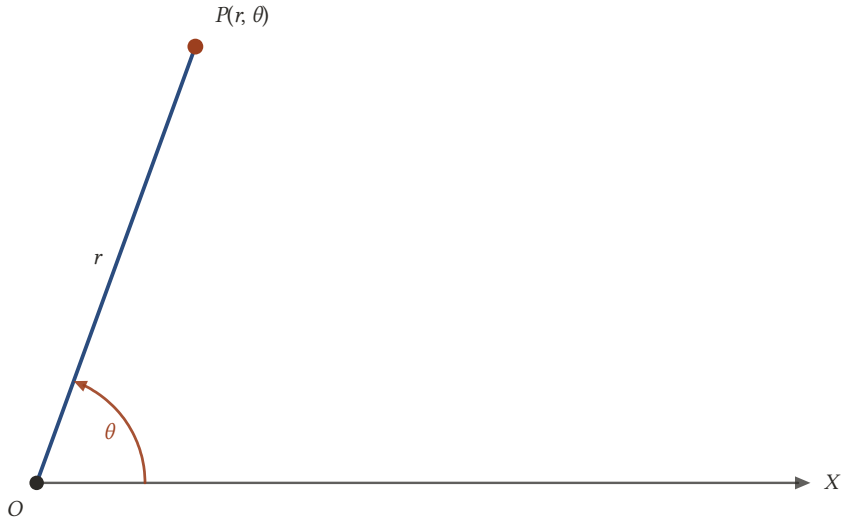
Bir noktayı iki eksen yerine tek bir yarı doğru ve bir açıyla da tarif edebiliriz: "başlangıç noktasından r birim uzakta, şu yönde". Bu fikir kutupsal koordinat sistemine götürür.

Tanım 5.2 (Kutup noktası ve kutupsal eksen). Düzlemde bir O başlangıç noktası seçelim ve O'dan çıkan yönlendirilmiş bir OX yarı doğrusu çizelim. O'dan X'e doğru olan yönü pozitif yön kabul eden bu yarı doğruya **kutupsal eksen**, O noktasına da **kutup noktası** denir.

Yani kutupsal sistemde bir sayı doğrusu yerine yalnızca bir başlangıç noktası ve açıları ölçmeye başlayacağımız bir "sıfır yönü" vardır.
Şimdi P, kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış düzlemde O'dan farklı bir nokta olsun. $r = |\,OP\,|$ diyelim; $r > 0$'dır. θ da OX yarı doğrusundan OP yarı doğrusuna saat yönünün tersine (pozitif yönde) ölçülen açı olsun; $\theta \in [0, 2\pi)$. P noktası (r, θ) ikilisini tek türlü belirler. Tersine $r > 0$ ve θ verildiğinde, OX'i O etrafında pozitif yönde θ kadar döndürüp elde edilen yarı doğru üzerinde O'dan r uzaklıktaki noktayı işaretleyerek P hemen bulunur.

Tanım 5.3 (Kutupsal koordinatlar). P noktasının konumunu belirten, yukarıdaki gibi tanımlanan (r, θ) sıralı ikilisine P'nin **kutupsal koordinatları**, θ'ya da P'nin **kutupsal açısı** denir ve $P(r, \theta)$ yazılır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.5: Kutupsal koordinatlar: $r = |OP|$ kutuptan uzaklık, θ de kutupsal eksenden OP'ye saat yönünün tersine ölçülen açıdır.

Yani r noktanın kutuptan uzaklığı, θ da noktanın kutuptan bakıldığında göründüğü yöndür.
Kutup noktasının kendisi $r = 0$ ile tek başına belirlenir. θ burada bir yön belirtmez: $(0, \theta)$ ikililerinin her biri, hangi θ alınırsa alınsın, kutup noktasının koordinatları olarak düşünülebilir.
Açıyı $[0, 2\pi)$ dışında da yazmak bazen işe yarar. θ ile $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) aynı yarı doğruyu verir. Negatif bir açı saat yönünde ölçülür. Örneğin $\left(5, -\frac{2\pi}{3}\right)$ ile $\left(5, \frac{4\pi}{3}\right)$ aynı noktadır.

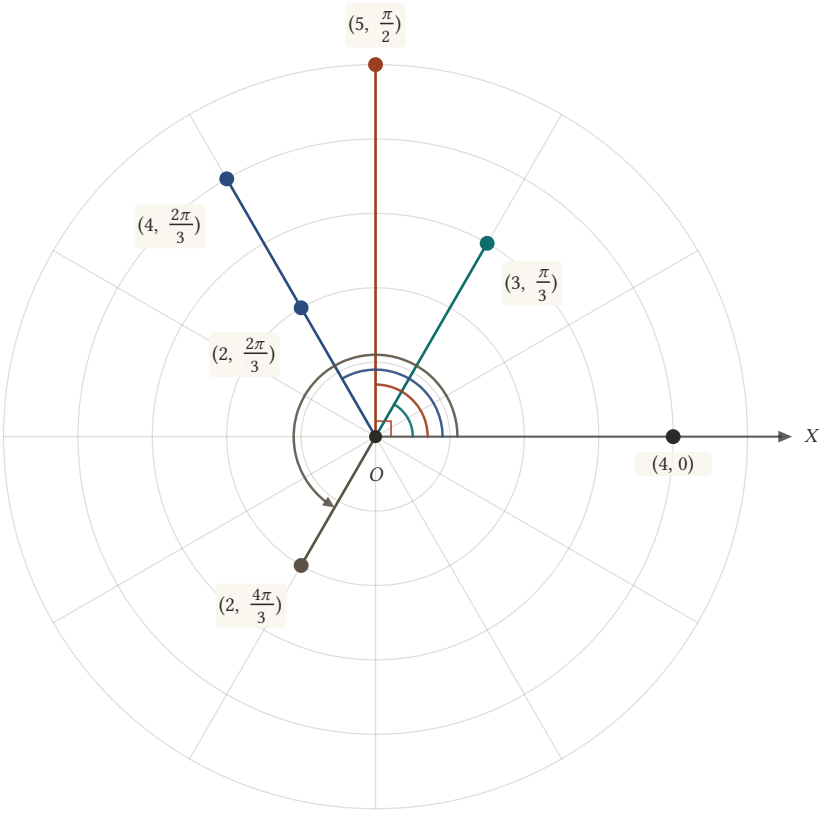
Örnek 5.3 (Kutupsal koordinatları verilen noktaları çizmek). Kutupsal koordinatları $(4, 0)$, $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ ve $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ olan noktaları kutupsal düzlemde gösteriniz.

Çözüm.
Her nokta için aynı iki adımı izleriz: önce kutupsal ekseni pozitif yönde θ kadar döndürüp bir yarı doğru çizeriz, sonra bu yarı doğru üzerinde O'dan r birim ölçeriz.

- $(4, 0)$: açı 0 olduğundan nokta kutupsal eksenin kendisi üzerinde, O'dan 4 birim uzaktadır.
- $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$: kutupsal eksenle $60°$ yapan yarı doğru üzerinde 3 birim.
- $\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$: kutupsal eksene dik, yukarı doğru yarı doğru üzerinde 5 birim.
- $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ ve $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$: ikisi de $120°$'lik aynı yarı doğru üzerindedir; biri 2, öbürü 4 birim uzaktadır.
- $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$: $240°$'lik yarı doğru üzerinde 2 birim.

Bir gözlem: $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ ile $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$ kutupsal eksenin taşıyıcı doğrusuna göre simetriktir, çünkü $\frac{4\pi}{3} = 2\pi - \frac{2\pi}{3}$'tür. Yani ikinci açı, birincinin saat yönünde ölçülmüş hâlidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.6: Altı noktanın kutupsal düzlemdeki yeri. Soluk çemberler $r = 1, \ldots, 5$; soluk ışınlar her $\pi/6$'da bir. O'daki renkli yaylar her noktanın kutupsal açısını gösterir.

■

5.2.1 Dik ve kutupsal koordinatlar arasındaki ilişki

Aynı düzleme hem dik hem kutupsal sistem yerleştirirsek, bir noktanın iki adresi arasında gidip gelebiliriz. Bunun için dik sistemin başlangıç noktasını kutup noktası, pozitif X-eksenini de kutupsal eksen olarak seçelim.

Önerme 5.3 (Dik ve kutupsal koordinatlar arasında geçiş). *$P \neq O$ noktasının dik koordinatları (x, y), kutupsal koordinatları (r, θ) olsun ($r > 0$). Kutupsal koordinatlardan dik koordinatlara geçiş*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

denklemleriyle, dik koordinatlardan kutupsal koordinatlara geçiş de

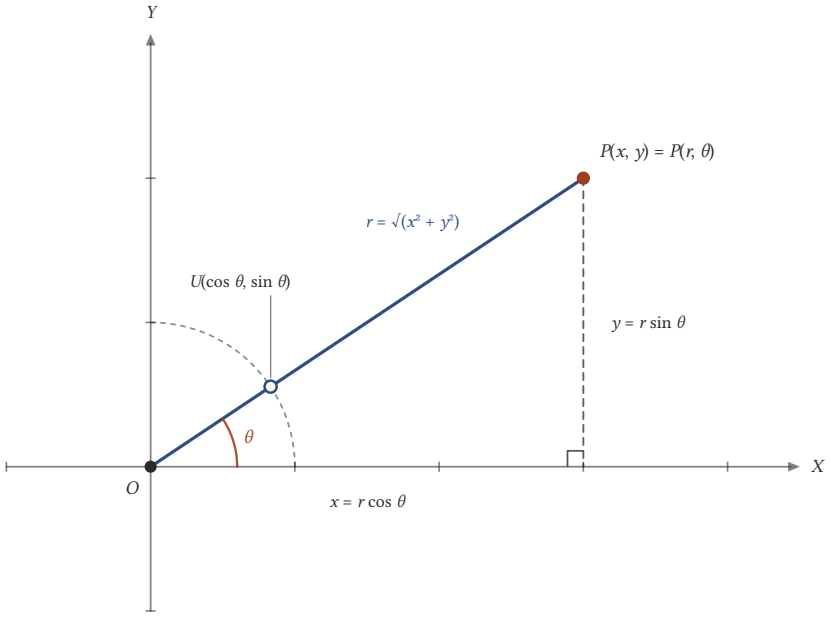
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

denklemleriyle yapılır. Özel olarak $x \neq 0$ ise $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$'tir.

İspat.
$r = |\,OP\,|$ olduğundan $O(0,0)$ ile $P(x,y)$ arasındaki uzaklık formülü (Dik Koordinatlar ve Uzaklık) $r = \sqrt{x^2+y^2}$ verir.
OP yarı doğrusu üzerinde O'ya uzaklığı 1 olan noktaya U diyelim. P'den ve U'dan X-eksenine inilen dikmelerin ayakları H ve H' olsun. OHP ve $OH'U$ dik üçgenlerinin O'daki açısı ortak, H ve H''deki açıları dik olduğundan bu üçgenler benzerdir. Benzerlik oranı $\dfrac{|\,OU\,|}{|\,OP\,|} = \dfrac{1}{r}$'dir. Bu yüzden

 CC BY-NC-SA 4.0

U'nun koordinatlarının mutlak değerleri $\frac{|x|}{r}$ ve $\frac{|y|}{r}$'dir. U ile P aynı yarı doğru üzerinde, yani aynı bölgede olduğundan işaretler de aynıdır: $U = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$. ($P$ bir eksen üzerindeyse üçgenler bozulur, ama bu durumda U'nun koordinatları doğrudan okunur ve aynı sonuç çıkar.)



Şekil 5.7: Dik ve kutupsal koordinatlar: OHP *dik üçgeninden* x = r *cos* θ, y = r *sin* θ. *Birim çember üzerindeki* U *noktası (cos* θ, *sin* θ*)'dır.*

Öte yandan U, birim çemberin pozitif X yönünden θ açısıyla ulaşılan noktasıdır. Sinüs ve kosinüsün birim çember tanımı gereği $U = (\cos\theta, \sin\theta)$'dır. İki ifadeyi karşılaştırırsak $\cos\theta = \frac{x}{r}$ ve $\sin\theta = \frac{y}{r}$ bulunur. Bunlar $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ ile aynıdır. $x \neq 0$ ise taraf tarafa bölerek $\tan\theta = \frac{y}{x}$ elde edilir. ■

Dikten kutupsala geçiş çoğu kez kısaca $\theta = \arctan\frac{y}{x}$ diye yazılır. Ancak arctan yalnızca $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında değer alır ve (x, y) ile $(-x, -y)$ için aynı sonucu verir. Bu yüzden açıyı seçerken noktanın bulunduğu bölgeye bakmak gerekir.

Kutupsal koordinatları üç adımda bulmak

1. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ hesaplanır.
2. (x, y) noktasının hangi bölgede olduğuna bakılır.
3. $\tan\theta = \frac{y}{x}$ eşitliğini sağlayan ve o bölgeye düşen $\theta \in [0, 2\pi)$ seçilir. $x = 0$ ise $y > 0$ için $\theta = \frac{\pi}{2}$, $y < 0$ için $\theta = \frac{3\pi}{2}$ alınır.

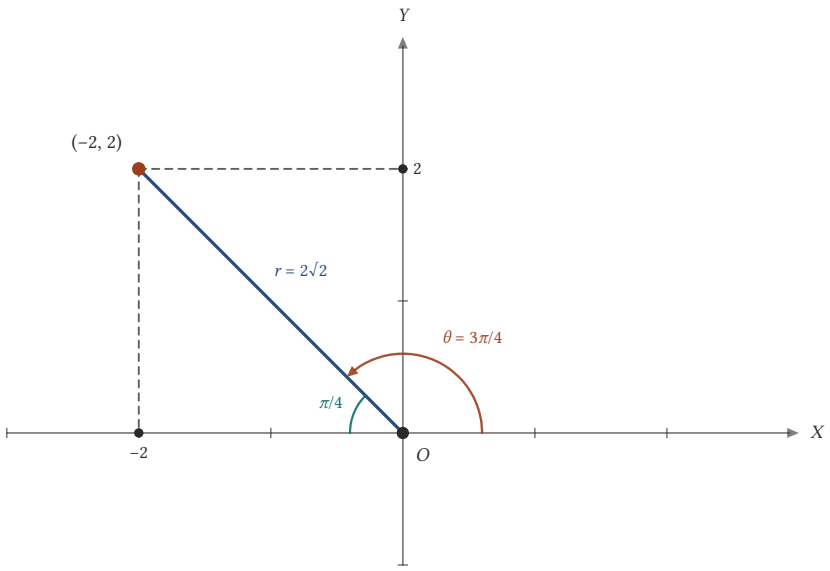
Örnek 5.4 (Dik koordinatlardan kutupsal koordinatlara). Dik koordinatları $(-2, 2)$ olan noktanın kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Üç adımı uygulayalım.

1. $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, yani $r = 2\sqrt{2}$.
2. $x = -2 < 0$ ve $y = 2 > 0$ olduğundan nokta ikinci bölgededir, yani $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ olmalıdır.
3. $\tan\theta = \frac{2}{-2} = -1$'dir. Tanjantı -1 olan açılar $\frac{3\pi}{4}$ ve $\frac{7\pi}{4}$'tür; ikinci bölgedeki $\theta = \frac{3\pi}{4}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kontrol: $r\cos\theta = 2\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2$ ve $r\sin\theta = 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2$'dir.



Şekil 5.8: $(-2,\,2)$ noktası ikinci bölgededir: $r = 2\sqrt{2}$ ve $\theta = 3\pi/4$. OP negatif X yönüyle $\pi/4$ açı yapar.

Buna göre noktanın kutupsal koordinatları $\left(2\sqrt{2},\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$'tür. Aynı soruda $\arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$ sonucunu olduğu gibi alsaydık dördüncü bölgedeki $(2,-2)$ noktasını bulurduk. ■

Örnek 5.5 (Kutupsal koordinatlardan dik koordinatlara). Kutupsal koordinatları $\left(4,\,\dfrac{2\pi}{3}\right)$ olan noktanın dik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
$\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ ve $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan

$$x = 4\cos\frac{2\pi}{3} = -2, \qquad y = 4\sin\frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3}$$

bulunur. Noktanın dik koordinatları $(-2, 2\sqrt{3})$'tür. Kontrol olarak $(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 4 + 12 = 16$ bulunur; bu da r^2'ye eşittir. ■

Bir eğriyi kutupsal koordinatlarla anlatırken bir noktanın birden çok kutupsal ikilisi olduğunu hesaba katmamız gerekir. Bu yüzden kutupsal denklemi şöyle tanımlarız.

Tanım 5.4 (Kutupsal denklem). $F(r,\theta) = 0$ bir denklem olsun. Kutupsal ikililerinden en az biri bu denklemi sağlayan noktaların kümesine denklemin **grafiği** denir. Bir eğri bu biçimde bir denklemin grafiği ise $F(r,\theta) = 0$ denklemine o eğrinin **kutupsal denklemi** denir.

Yani bir noktanın eğri üzerinde olması için bütün adreslerinin değil, adreslerinden birinin denklemi sağlaması yeter. Örneğin kutup noktası $(0,\theta)$ ikililerinden biri denklemi sağlıyorsa eğrinin üzerindedir. Dik denklemden kutupsal denkleme geçmek için $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ yazmak yeterlidir.

Örnek 5.6 (Bir doğrunun kutupsal denklemi). Dik koordinatlardaki denklemi $y = \sqrt{3}\,x + 2$ olan doğrunun kutupsal koordinatlardaki denklemini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

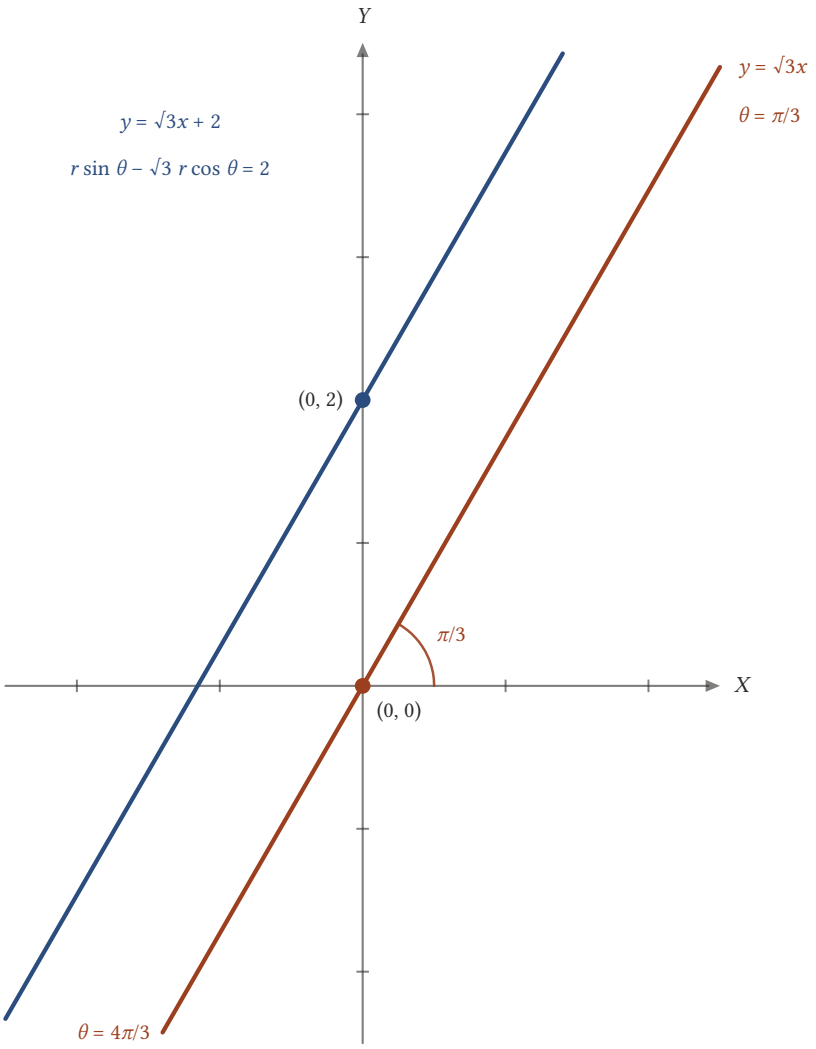
Çözüm.
Denklemde $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ yazarsak

$$r\sin\theta = \sqrt{3}\,r\cos\theta + 2$$

bulunur. r içeren terimleri bir tarafa toplarsak $r(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta) = 2$ olur. Doğru O'dan geçmediği için bu doğrunun hiçbir noktasında $\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ sıfır olamaz; sıfır olsaydı sol taraf 0 olurdu. Öyleyse bölebiliriz:

$$r = \frac{2}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}.$$

Karşılaştırma için O'dan geçen paralel doğruya bakalım: $y = \sqrt{3}\,x$ doğrusu, kutupsal eksenle $\tan\theta = \sqrt{3}$ açısı yapan doğrudur. Bu doğrunun üst yarısı $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, alt yarısı $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$ yarı doğrusudur. Kutuptan geçen doğruların kutupsal denklemi bu kadar basittir: sabit bir açı. Kutuptan geçmeyen doğruların genel kutupsal denklemini bölümün sonunda çıkaracağız.



Şekil 5.9: Paralel iki doğru: $y = \sqrt{3}x + 2$ kutuptan geçmez, kutupsal denklemi $r\sin\theta - \sqrt{3}\,r\cos\theta = 2$'dir. Kutuptan geçen $y = \sqrt{3}x$ doğrusu ise $\theta = \pi/3$ ve $\theta = 4\pi/3$ yarı doğrularının birleşimidir.

Buna göre aranan kutupsal denklem $r\sin\theta - \sqrt{3}\,r\cos\theta = 2$, yani $r = \dfrac{2}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$'dir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

5.2.2 İki nokta arasındaki uzaklık ve üçgenin alanı

Dik koordinatlarda uzaklığı Pisagor teoremiyle bulmuştuk. Kutupsal koordinatlarda ise elimizde iki uzunluk (r_1, r_2) ve aralarındaki açı vardır; bu durumda doğal araç kosinüs teoremidir.

Teorem 5.1 (Kutupsal koordinatlarda iki nokta arasındaki uzaklık). *Kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış düzlemde $P_1(r_1, \theta_1)$ ve $P_2(r_2, \theta_2)$ noktaları arasındaki uzaklık*

$$| P_1P_2 | = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

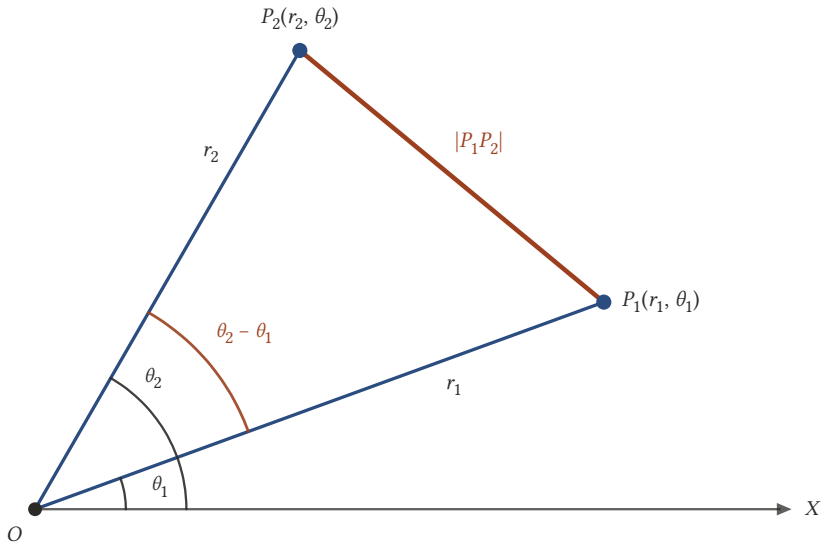
formülüyle verilir.

İspat.
γ, OP_1 ile OP_2 yarı doğruları arasındaki açı olsun; $0 \leq \gamma \leq \pi$. Kutupsal açılar kutupsal eksenden ölçüldüğü için γ, $| \theta_2 - \theta_1 |$'in kendisi ya da 2π'ye tümleyenidir (açıların 2π katı kadar kaydırılması da sonucu değiştirmez). Kosinüs çift ve 2π periyotlu olduğundan her durumda

$$\cos\gamma = \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

olur.
P_1OP_2 bir üçgen ise kosinüs teoremi $| P_1P_2 |^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\gamma$ verir. $\cos\gamma$ yerine $\cos(\theta_2 - \theta_1)$ yazıp karekök alırsak formül çıkar.
Üçgen oluşmayan durumlarda da formül geçerlidir:

- *$\gamma = 0$ ise noktalar aynı yarı doğru üzerindedir, $| P_1P_2 | = | r_1 - r_2 |$'dir ve formül $r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 = (r_1 - r_2)^2$ verir.*
- *$\gamma = \pi$ ise noktalar O'nun iki yanındadır, $| P_1P_2 | = r_1 + r_2$'dir ve formül $(r_1 + r_2)^2$ verir.*
- *Noktalardan biri kutup ise, örneğin $r_1 = 0$, formül r_2^2 verir.*



Şekil 5.10: Kutupsal koordinatlarda uzaklık: P_1OP_2 üçgeninde kenarlar r_1, r_2 ve aradaki açının kosinüsü $\cos(\theta_2 - \theta_1)$'dir; $|P_1P_2|$ kosinüs teoremiyle bulunur.

■

Örnek 5.7 (Kutupsal uzaklığın bir uygulaması). Kutupsal koordinatları $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ ve $\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ olan noktalar arasındaki uzaklığı bulunuz.

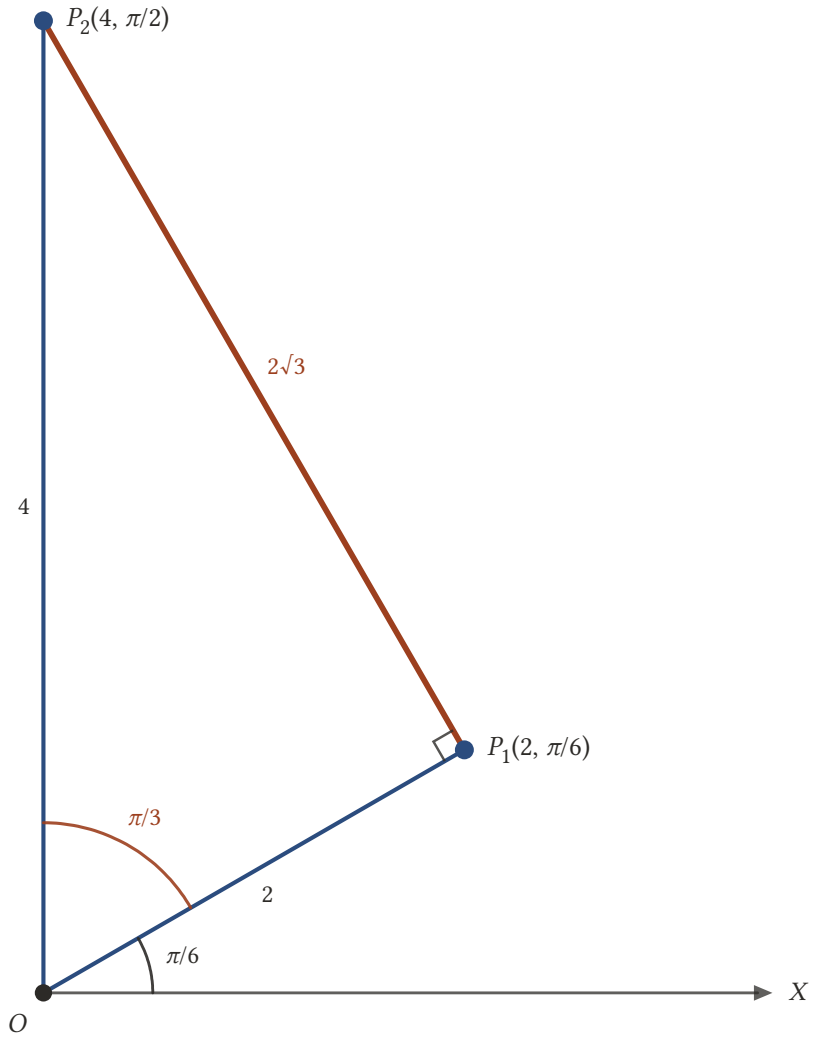
Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

$r_1 = 2, \theta_1 = \dfrac{\pi}{6}, r_2 = 4, \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}$ alalım. $\theta_2 - \theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$ ve $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ olduğundan

$$| P_1P_2 |^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 + 16 - 8 = 12$$

bulunur. Buradan $| P_1P_2 | = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ olur.
Dik koordinatlarla kontrol edelim. Noktalar $\left(2\cos\dfrac{\pi}{6}, 2\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = (\sqrt{3}, 1)$ ve $(0, 4)$'tür. Uzaklığın karesi $(\sqrt{3})^2 + (1-4)^2 = 12$'dir; sonuç aynıdır. Ayrıca $| OP_1 |^2 + | P_1P_2 |^2 = 4 + 12$ toplamı $16 = | OP_2 |^2$'ye eşit olduğundan üçgen P_1'de dik açılıdır.



Şekil 5.11: $P_1(2, \pi/6)$ ile $P_2(4, \pi/2)$ arasındaki açı $\pi/3$'tür ve uzaklık $2\sqrt{3}$ çıkar; üçgen P_1'de dik açılıdır.

■

Teorem 5.2 (Kutupsal koordinatlarda üçgenin alanı). *Kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış düzlemde köşeleri $O(0,0)$, $P_1(r_1, \theta_1)$ ve $P_2(r_2, \theta_2)$ olan üçgenin alanı*

$$\mathcal{A}(P_1OP_2) = \frac{1}{2} r_1 r_2 |\sin(\theta_2 - \theta_1)|$$

 CC BY-NC-SA 4.0

formülüyle verilir. Özel olarak $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$ *ise alan* $\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$*'dir.*

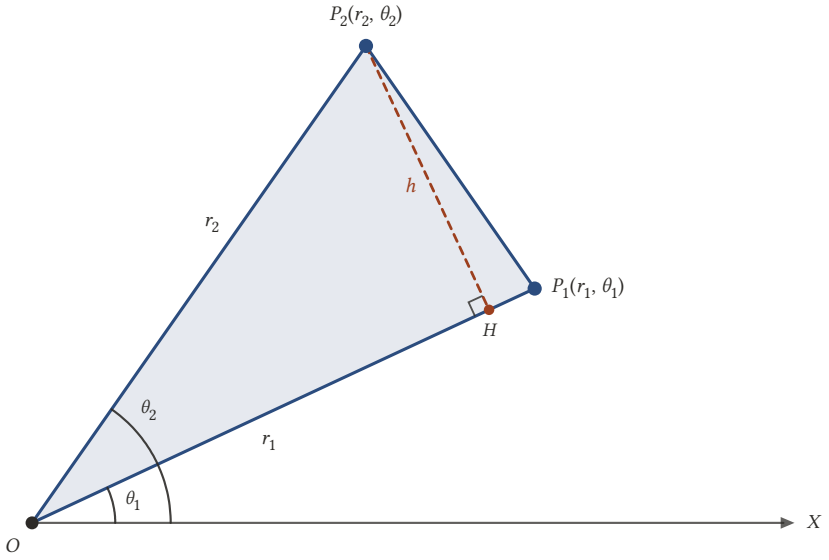
İspat.
γ yine OP_1 ile OP_2 arasındaki açı olsun. P_1OP_2 bir üçgen olduğundan, yani O, P_1, P_2 doğrudaş olmadığından, $\gamma \in (0, \pi)$*'dir.* γ*,* $|\ \theta_2 - \theta_1\ |$ *ya da* $2\pi - |\ \theta_2 - \theta_1\ |$ *olduğundan (yine* 2π *katlarını gözardı ederek)* $\sin\gamma = |\sin(\theta_2 - \theta_1)|$*'dir;* $\sin\gamma > 0$ *olduğu için mutlak değer gerekir.*
P_2'den OP_1 doğrusuna inilen dikmenin ayağı H, dikmenin uzunluğu h olsun. OHP_2 dik üçgeninde hipotenüs $|\ OP_2\ | = r_2$*'dir. γ dar açıysa O'daki açı γ'dır. γ geniş açıysa H, O'nun öbür yanına düşer ve O'daki açı* $\pi - \gamma$ *olur. Her iki durumda da o açının sinüsü* $\sin\gamma$ *olduğundan*

$$h = r_2 \sin\gamma$$

bulunur. $\gamma = \frac{\pi}{2}$ *ise $H = O$ olur ve doğrudan* $h = |\ OP_2\ | = r_2 = r_2 \sin\gamma$*'dır. Taban* $|\ OP_1\ | = r_1$ *alınırsa*

$$\mathcal{A}(P_1OP_2) = \frac{1}{2} |\ OP_1\ | h = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin\gamma = \frac{1}{2} r_1 r_2 |\sin(\theta_2 - \theta_1)|$$

elde edilir. $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi$ *ise* $\sin(\theta_2 - \theta_1) > 0$ *olduğundan mutlak değer kalkar.*



Şekil 5.12: Kutupsal koordinatlarda üçgenin alanı: taban $|OP_1| = r_1$*, yükseklik* $h = r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$*.*

■

Örnek 5.8 (Kutupsal üçgen alanının bir uygulaması). Köşeleri kutupsal koordinatlarla $O(0,0)$, $P_1\left(4, \frac{\pi}{6}\right)$ ve $P_2\left(6, \frac{2\pi}{3}\right)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm.
$\theta_2 - \theta_1 = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\sin(\theta_2 - \theta_1) = 1$'dir ve

$$\mathcal{A}(P_1OP_2) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 = 12$$

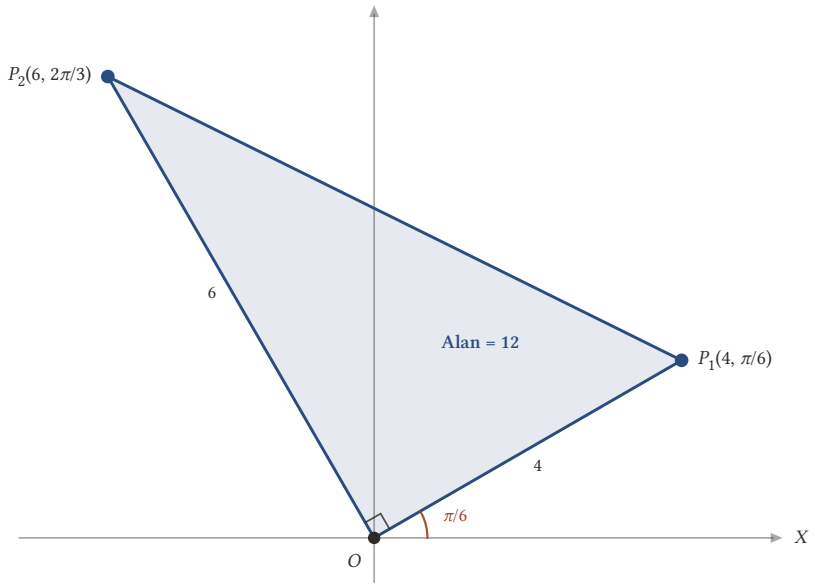
bulunur. Açı dik olduğundan bu, dik kenarları 4 ve 6 olan dik üçgenin alanıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Dik koordinatlarla kontrol edelim. $P_1 = (2\sqrt{3}, 2)$ ve $P_2 = (-3, 3\sqrt{3})$'tür. OP_1'in eğimi $\dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, OP_2'nin eğimi $\dfrac{3\sqrt{3}}{-3} = -\sqrt{3}$'tür. Eğimlerin çarpımı -1 olduğundan (Bölme Oranı, Eğim ve Açı) bu kenarlar diktir. Uzunlukları

$$| OP_1 | = \sqrt{12 + 4} = 4, \qquad | OP_2 | = \sqrt{9 + 27} = 6$$

olduğundan dik üçgenin alanı (Dik Koordinatlar ve Uzaklık) $\dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$'dir.



Şekil 5.13: O, $P_1(4, \pi/6)$, $P_2(6, 2\pi/3)$ üçgeni: açılar farkı $\pi/2$ olduğundan üçgen O'da dik açılıdır ve alanı 12'dir.

■

5.3 Kutupsal koordinatlarda doğru denklemi

Kutuptan geçen doğruların kutupsal denkleminin sabit bir açı olduğunu gördük: O'dan geçen ve kutupsal eksenle θ_0 açısı yapan doğru, $\theta = \theta_0$ ve $\theta = \theta_0 + \pi$ yarı doğrularının birleşimidir. Şimdi kutuptan geçmeyen bir doğruyu ele alalım. Böyle bir doğruyu belirlemenin en doğal yolu, kutuptan doğruya inilen dikmenin ayağını bilmektir.

Teorem 5.3 (Kutupsal doğru denklemi). *Kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış düzlemde d, kutup noktasından geçmeyen bir doğru olsun. O'dan d'ye inilen dikmenin ayağı $Q(q, \omega)$ olsun; $q = | OQ | > 0$. O zaman $P(r, \theta)$ noktası için*

$$P \in d \Leftrightarrow r\cos(\theta - \omega) = q$$

olur.

İspat.
$P = Q$ ise $r = q$, $\theta = \omega$ olur ve eşitlik $q\cos 0 = q$ biçiminde sağlanır. Bundan sonra $P \neq Q$ olsun.
Doğru üzerinde olmanın Pisagor ile ifadesi. *$P \in d$ olması, QP'nin OQ'ya dik olmasıyla, yani OQP üçgeninin Q'da dik açılı olmasıyla denktir. Pisagor teoremi ve karşıtı gereği bu da*

$$| OP |^2 = | OQ |^2 + | QP |^2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

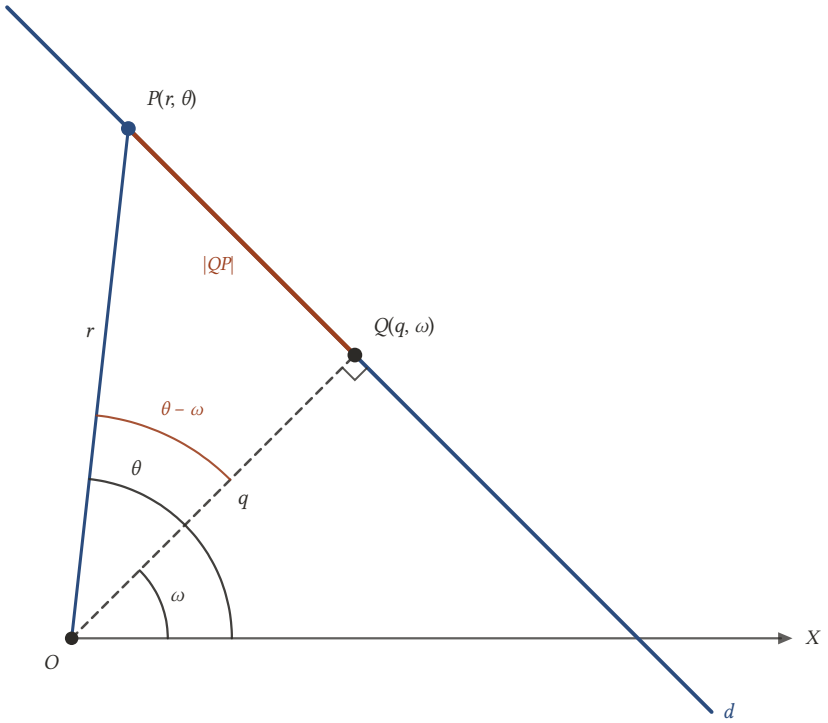
eşitliğine denktir. ($P = O$ olsaydı sol taraf 0, sağ taraf $2q^2 > 0$ olurdu; yani eşitlik O için zaten sağlanmaz.)
Uzaklığın kutupsal ifadesi. *Teorem 5.1 ile $Q(q, \omega)$ ve $P(r, \theta)$ arasındaki uzaklığın karesi*

$$| QP |^2 = q^2 + r^2 - 2qr\cos(\theta - \omega)$$

olur. Ayrıca $| OP | = r$ ve $| OQ | = q$'dur.
Birleştirme. *Bunları Pisagor eşitliğinde yerine yazarsak*

$$r^2 = q^2 + q^2 + r^2 - 2qr\cos(\theta - \omega)$$

buluruz. r^2'ler sadeleşir ve $2q^2 = 2qr\cos(\theta - \omega)$ kalır. $q > 0$ olduğundan $2q$'ya bölebiliriz: $q = r\cos(\theta - \omega)$. Adımların hepsi denklik olduğundan $P \in d \Leftrightarrow r\cos(\theta - \omega) = q$'dur.



Şekil 5.14: Kutupsal doğru denklemi: Q(q, ω) *kutuptan* d*'ye inilen dikmenin ayağıdır.* OQP *üçgeni* Q*'da dik açılı olduğundan* r *cos*(θ − ω) = q *olur.*

■

Yani kutuptan geçmeyen bir doğru, kutuptan ona inilen dikmenin ayağı ile tamamen belirlenir: q doğrunun kutba uzaklığı, ω da dikmenin yönüdür. Bu biçime bir ad verelim.

Tanım 5.5 (Kutupsal normal denklem). Kutuptan geçmeyen bir d doğrusu için kutuptan d'ye inilen dikmenin ayağı $Q(q, \omega)$ ise $r\cos(\theta - \omega) = q$ denklemine d'nin **kutupsal normal denklemi** denir.

Yani kutupsal normal denklem, doğrunun kutba uzaklığını ve kutuptan doğruya bakış yönünü doğrudan okutan denklemdir. Kosinüs farkını açıp $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ yazarsak

$$x\cos\omega + y\sin\omega = q$$

çıkar; bu, dik koordinatlardaki normal denklemin (Düzlemde Doğru Denklemleri) ta kendisidir.

Sonuç 5.1 (Kutupsal doğru denkleminin genel biçimi). *Kutuptan geçmeyen her doğrunun kutupsal denklemi*

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \frac{1}{r}, \qquad (A,B) \neq (0,0)$$

biçiminde yazılabilir. Tersine $(A,B) \neq (0,0)$ *olmak üzere her böyle denklem, kutuptan geçmeyen bir doğrunun denklemidir. Bu doğru için kutuptan inilen dikmenin ayağı* $Q(q,\omega)$*,*

$$q = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\omega = qA, \qquad \sin\omega = qB$$

eşitlikleriyle bulunur.

İspat.
Denklemi bu biçime getirmek. *d kutuptan geçmeyen bir doğru,* $Q(q,\omega)$ *da kutuptan d'ye inilen dikmenin ayağı olsun. Teorem 5.3 gereği d'nin denklemi* $q = r\cos(\theta-\omega)$*'dır. d'nin noktalarında* $r > 0$ *olduğundan iki tarafı qr'ye bölebiliriz:*

$$\frac{1}{q}\cos(\theta-\omega) = \frac{1}{r}.$$

Kosinüs farkı formülüyle

$$\cos(\theta-\omega) = \cos\omega\cos\theta + \sin\omega\sin\theta$$

olduğundan

$$\frac{1}{q}\cos\omega\cos\theta + \frac{1}{q}\sin\omega\sin\theta = \frac{1}{r}$$

yazılabilir. $A = \frac{1}{q}\cos\omega$ *ve* $B = \frac{1}{q}\sin\omega$ *dersek denklem* $A\cos\theta + B\sin\theta = \frac{1}{r}$ *olur.* $q > 0$ *ve* $(\cos\omega, \sin\omega) \neq (0,0)$ *olduğundan* $(A,B) \neq (0,0)$*'dır.*
q ile ω'yı A ve B'den geri okumak. $\cos\omega = qA$ *ve* $\sin\omega = qB$ *olduğundan*

$$1 = \cos^2\omega + \sin^2\omega = q^2(A^2+B^2)$$

bulunur. Buradan $q^2 = \frac{1}{A^2+B^2}$*,* $q > 0$ *olduğundan da* $q = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ *çıkar.*
Karşıt. $(A,B) \neq (0,0)$ *verilsin ve* $q = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} > 0$ *diyelim.* $(qA)^2 + (qB)^2 = 1$ *olduğundan* $\cos\omega = qA$ *ve* $\sin\omega = qB$ *olacak biçimde bir* $\omega \in [0, 2\pi)$ *vardır. O zaman* $A = \frac{1}{q}\cos\omega$*,* $B = \frac{1}{q}\sin\omega$ *olur. Yukarıdaki hesabı geriye doğru izlersek denklem* $r\cos(\theta-\omega) = q$ *biçimini alır. Teorem 5.3 gereği bu,* $Q(q,\omega)$*'dan geçen ve OQ'ya dik olan doğrunun denklemidir.* $|\,OQ\,| = q > 0$ *olduğundan bu doğru kutuptan geçmez.* ■

Böylece $A\cos\theta + B\sin\theta = \frac{1}{r}$ biçiminde verilen bir doğruyu çizmek kolaydır: $Q(q,\omega)$ noktası $\cos\omega = qA$, $\sin\omega = qB$ eşitliklerinden bulunur, sonra Q'dan geçen ve OQ doğru parçasına dik olan doğru çizilir. A ya da B sıfır olduğunda Q noktası özellikle kolay okunur.

Önerme 5.4 (Kutupsal doğru denkleminde özel durumlar). $A\cos\theta + B\sin\theta = \frac{1}{r}$ *doğrusu için kutuptan inilen dikmenin ayağı* $Q(q,\omega)$ *şöyledir:*

- $A = 0$ *ve* $B > 0$ *ise* $Q = \left(\frac{1}{B}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $A = 0$ *ve* $B < 0$ *ise* $Q = \left(-\frac{1}{B}, \frac{3\pi}{2}\right)$.
- $A > 0$ *ve* $B = 0$ *ise* $Q = \left(\frac{1}{A}, 0\right)$.
- $A < 0$ *ve* $B = 0$ *ise* $Q = \left(-\frac{1}{A}, \pi\right)$.

İlk iki durumda doğru kutupsal eksene paraleldir, son iki durumda kutupsal eksene diktir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.

Dört durumda da Sonuç 5.1 içindeki $q = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\cos\omega = qA$, $\sin\omega = qB$ *eşitliklerini kullanıyoruz.* $\sqrt{t^2} = |\,t\,|$ *olduğunu hatırlayalım.*

$\boldsymbol{A = 0,\ B > 0.}$ $q = \dfrac{1}{\sqrt{B^2}} = \dfrac{1}{|\,B\,|} = \dfrac{1}{B}$*'dir.* $\cos\omega = q \cdot 0 = 0$ *ve* $\sin\omega = \dfrac{1}{B} \cdot B = 1$*'dir;* $[0, 2\pi)$*'de bunu sağlayan tek açı* $\omega = \dfrac{\pi}{2}$*'dir. Öyleyse* $Q = \left(\dfrac{1}{B}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

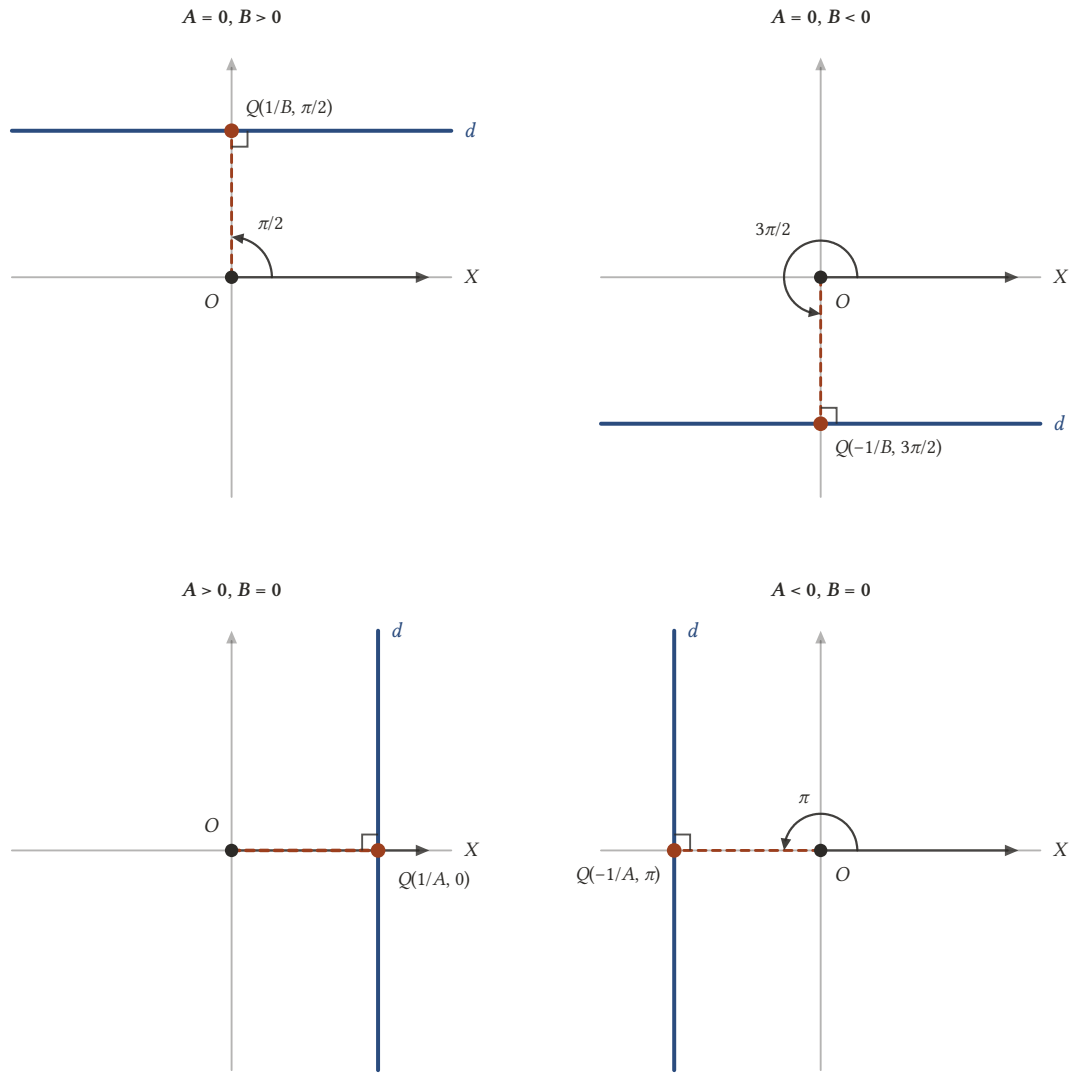
$\boldsymbol{A = 0,\ B < 0.}$ $q = \dfrac{1}{|\,B\,|} = -\dfrac{1}{B}$*'dir.* $\cos\omega = 0$ *ve* $\sin\omega = -\dfrac{1}{B} \cdot B = -1$*'dir; buradan* $\omega = \dfrac{3\pi}{2}$ *ve* $Q = \left(-\dfrac{1}{B}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ *çıkar.*

$\boldsymbol{A > 0, B = 0.}$ $q = \dfrac{1}{|\,A\,|} = \dfrac{1}{A}$*'dır.* $\cos\omega = \dfrac{1}{A} \cdot A = 1$ *ve* $\sin\omega = q \cdot 0 = 0$*'dır; buradan* $\omega = 0$ *ve* $Q = \left(\dfrac{1}{A}, 0\right)$ *çıkar.*

$\boldsymbol{A < 0, B = 0.}$ $q = \dfrac{1}{|\,A\,|} = -\dfrac{1}{A}$*'dır.* $\cos\omega = -\dfrac{1}{A} \cdot A = -1$ *ve* $\sin\omega = 0$*'dır; buradan* $\omega = \pi$ *ve* $Q = \left(-\dfrac{1}{A}, \pi\right)$ *çıkar.*

İlk iki durumda OQ *kutupsal eksene diktir (*$\omega = \dfrac{\pi}{2}$ *ya da* $\dfrac{3\pi}{2}$*), dolayısıyla* OQ*'ya dik olan doğru kutupsal eksene paraleldir. Son iki durumda* OQ *kutupsal eksenin taşıyıcı doğrusu üzerindedir, dolayısıyla doğru kutupsal eksene diktir.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.15: A $\cos\theta$ + B $\sin\theta$ = 1/r *doğrusunun dört özel durumu (örneklerde* |A| *ya da* |B| = 1/2*). Üst sıradaki* (A = 0) *doğrular kutupsal eksene paralel, alt sıradaki* (B = 0) *doğrular kutupsal eksene diktir.*

■

Kutupsal denklemi verilen bir doğruyu üç adımda çizmek

1. Denklem $A\cos\theta + B\sin\theta = \dfrac{1}{r}$ biçimine getirilir ve A, B okunur.
2. $q = \dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ hesaplanır; ω, $\cos\omega = qA$ ve $\sin\omega = qB$ eşitliklerinden bulunur.
3. $Q(q,\omega)$ işaretlenir ve Q'dan geçen, OQ'ya dik doğru çizilir.

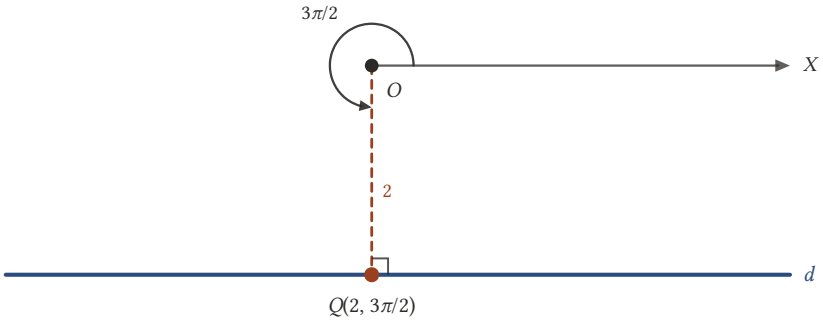
Örnek 5.9 (Kutupsal eksene paralel bir doğrunun çizimi). Kutupsal denklemi $d : r\sin\theta = -2$ olan d doğrusunu kutupsal düzlemde gösteriniz.

Çözüm.
Üç adımı uygulayalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

1. İki tarafı $-2r$'ye bölersek $-\frac{1}{2}\sin\theta = \frac{1}{r}$ olur. Bu, $A = 0$ ve $B = -\frac{1}{2}$ ile genel biçimdir.
2. $A = 0$ ve $B < 0$ olduğundan Önerme 5.4 gereği $q = -\frac{1}{B} = 2$ ve $\omega = \frac{3\pi}{2}$'dir.
3. $Q\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$ noktası kutbun 2 birim "altındadır". d, bu noktadan geçen ve OQ'ya dik olan, yani kutupsal eksene paralel olan doğrudur.

Dik koordinatlarla bakarsak $r\sin\theta = y$ olduğundan d, $y = -2$ doğrusudur; çizim bununla uyumludur.



Şekil 5.16: $r\sin\theta = -2$ doğrusu: kutuptan inilen dikmenin ayağı $Q(2, 3\pi/2)$'dir ve doğru kutupsal eksene paraleldir.

■

Örnek 5.10 (Kutupsal eksene dik bir doğrunun denklemi). Kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış bir düzlemde $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ noktasından geçen ve OX'e dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm.
Doğruya d, verilen noktaya $K\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ diyelim. $P(r, \theta)$ de d üzerinde herhangi bir nokta olsun.
Doğrunun kutba uzaklığı. d, OX'e dik olduğundan kutuptan d'ye inilen dikme OX üzerindedir; ayağı H olsun. OHK dik üçgeninde $|\,OK\,| = 2$ ve O'daki açı $\frac{\pi}{6}$'dır. Buradan

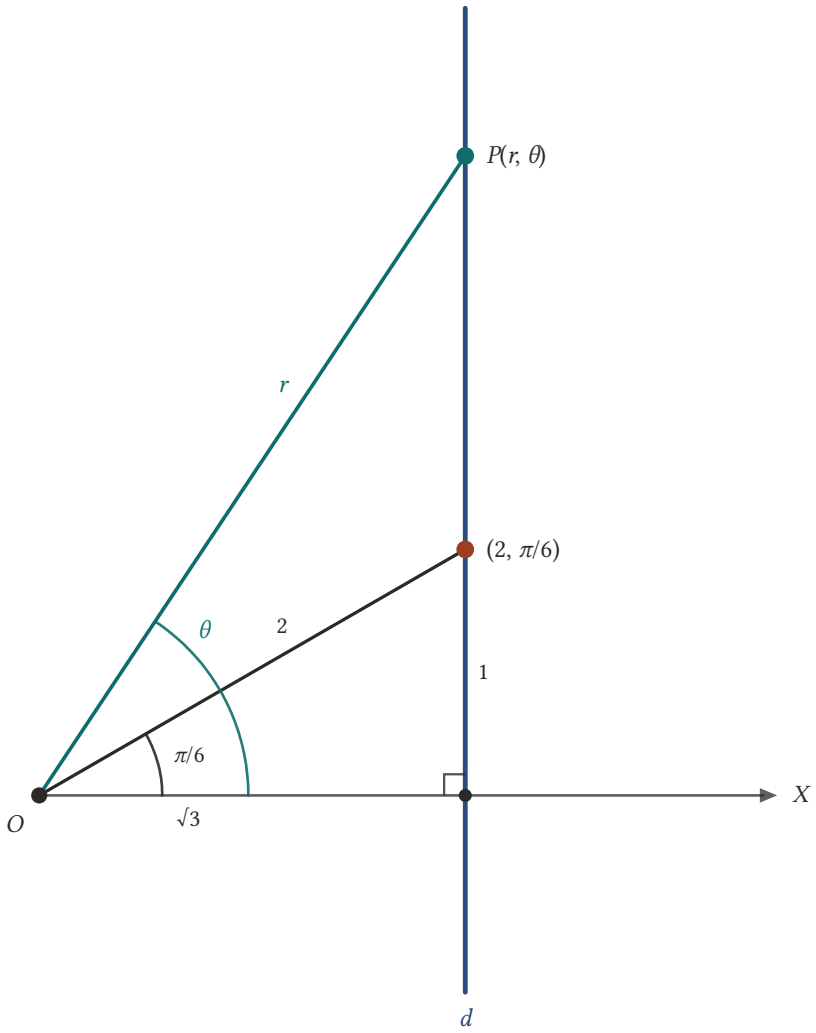
$$|\,OH\,| = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \qquad |\,HK\,| = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1$$

bulunur.
Denklem. OHP dik üçgeninde hipotenüs $|\,OP\,| = r$, O'daki açı θ'dır. Komşu dik kenar $|\,OH\,| = r\cos\theta$ olduğundan

$$r\cos\theta = \sqrt{3}$$

elde edilir. Aynı sonuç Teorem 5.3 ile de çıkar: $Q = H$ olduğundan $q = \sqrt{3}$ ve $\omega = 0$'dır, denklem $r\cos(\theta - 0) = \sqrt{3}$ olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.17: $(2, \pi/6)$ noktasından geçen ve OX'e dik d doğrusu: OHK dik üçgeninden $|OH| = \sqrt{3}$, OHP dik üçgeninden $r\cos\theta = \sqrt{3}$.

■

Örnek 5.11 (Bir doğrunun dikme ayağını bulmak). Dik koordinatlardaki denklemi $y = \sqrt{3}\,x + 2$ olan doğru için kutuptan inilen dikmenin ayağı $Q(q, \omega)$'yı bulunuz ve doğrunun kutupsal normal denklemini yazınız.

Çözüm.
Bu doğrunun kutupsal denklemini $r(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta) = 2$ olarak bulmuştuk (bkz. Örnek 5.6). İki tarafı $2r$'ye bölersek

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{1}{r}$$

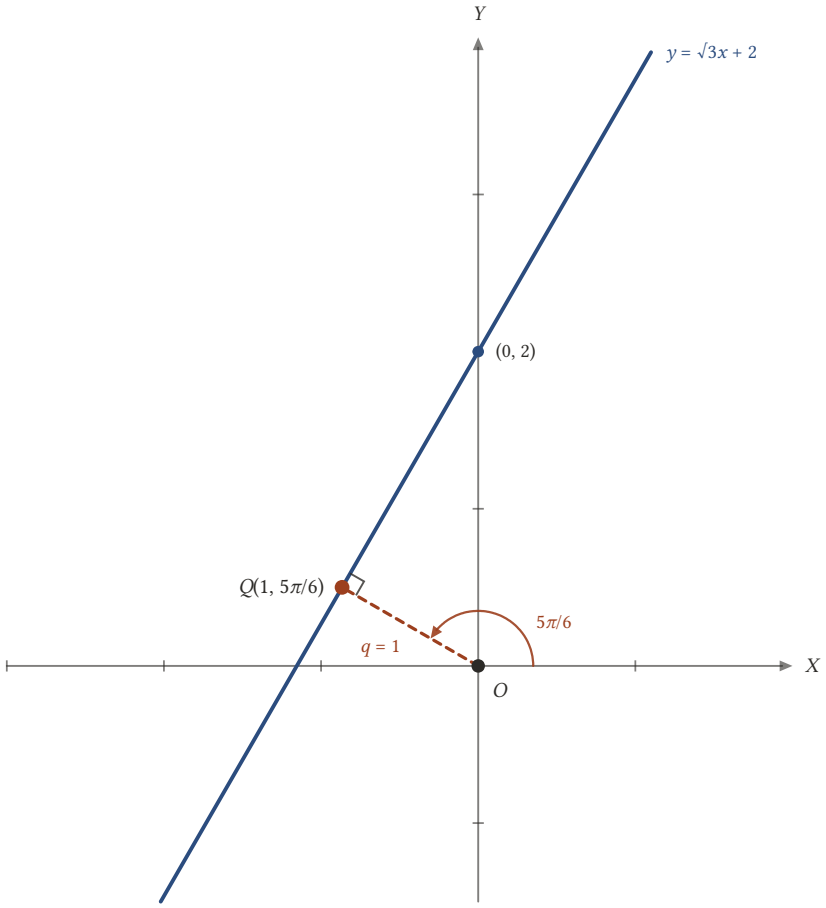
olur. Genel biçimle karşılaştırırsak $A = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $B = \dfrac{1}{2}$'dir.
$A^2 + B^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$ olduğundan $q = 1$'dir. $\cos\omega = qA = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\sin\omega = qB = \dfrac{1}{2}$ eşitliklerini sağlayan açı ikinci bölgededir: $\omega = \dfrac{5\pi}{6}$. Buna göre $Q\left(1, \dfrac{5\pi}{6}\right)$ ve doğrunun kutupsal normal denklemi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$r\cos\left(\theta - \frac{5\pi}{6}\right) = 1$$

olur.

Kontrol: Q'nun dik koordinatları $\left(\cos\frac{5\pi}{6}, \sin\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$'dir ve $\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 = \frac{1}{2}$ olduğundan Q doğru üzerindedir. O'nun doğruya uzaklığı da $\frac{|\,2\,|}{\sqrt{3+1}} = 1 = q$'dur.



Şekil 5.18: $y = \sqrt{3}x + 2$ doğrusu için kutuptan inilen dikmenin ayağı $Q(1, 5\pi/6)$; normal denklem $r\cos(\theta - 5\pi/6) = 1$.

■

5.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorularda paralel koordinatlarda doğru ve uzaklık, kutupsal koordinatlarda uzaklık, çember ve doğru denklemleri ile iki sistem arasında dönüşüm alıştırılıyor.

Alıştırma 5.1 (Eğik sistemde başlangıçtan geçen doğrular). Paralel koordinat sistemiyle donatılmış bir düzlemde, başlangıç noktasından geçen ve Y-ekseninden farklı olan her doğrunun denkleminin bir $m \in \mathbb{R}$ için $y = mx$ biçiminde olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
d, O'dan geçen ve Y-ekseninden farklı bir doğru olsun. (Y-ekseninin denklemi Önerme 5.2 gereği $x = 0$'dır.) d üzerinde O'dan farklı bir $P(x_1, y_1)$ noktası seçelim. Önerme 5.2 gereği birinci koordinatı 0 olan

 CC BY-NC-SA 4.0

noktalar tam olarak Y-eksenini oluşturur. P, Y-ekseni üzerinde olsaydı $d = OP$ doğrusu Y-ekseni olurdu. Demek ki $x_1 \neq 0$'dır ve $m = \dfrac{y_1}{x_1}$ tanımlanabilir.

***d*'nin her noktası $y = mx$'i sağlar.** $R(x, y)$, d üzerinde herhangi bir nokta olsun. $R = O$ ise $0 = m \cdot 0$ sağlanır. $y_1 = 0$ ise P ve dolayısıyla d, X-ekseni olur ve d'nin her noktası $y = 0 = 0 \cdot x$'i sağlar. Bundan sonra $R \neq O$ ve $y_1 \neq 0$ olsun.

P'den ve R'den Y-eksenine çizilen paraleller X-eksenini $P'(x_1, 0)$ ve $R'(x, 0)$ noktalarında kessin. $P'P$ ve $R'R$ doğruları, ikisi de Y-eksenine paralel olduğu için birbirine paraleldir. $OP'P$ ve $OR'R$ üçgenlerinde O'daki açılar ya ortaktır ya da ters açılardır. P' ve R''deki açılar da paralel doğruların oluşturduğu yöndeş ya da iç ters açılar olarak eşittir. Bu yüzden üçgenler benzerdir:

$$\frac{|\,OR'\,|}{|\,OP'\,|} = \frac{|\,R'R\,|}{|\,P'P\,|}, \quad \text{yani} \quad \frac{|\,x\,|}{|\,x_1\,|} = \frac{|\,y\,|}{|\,y_1\,|}.$$

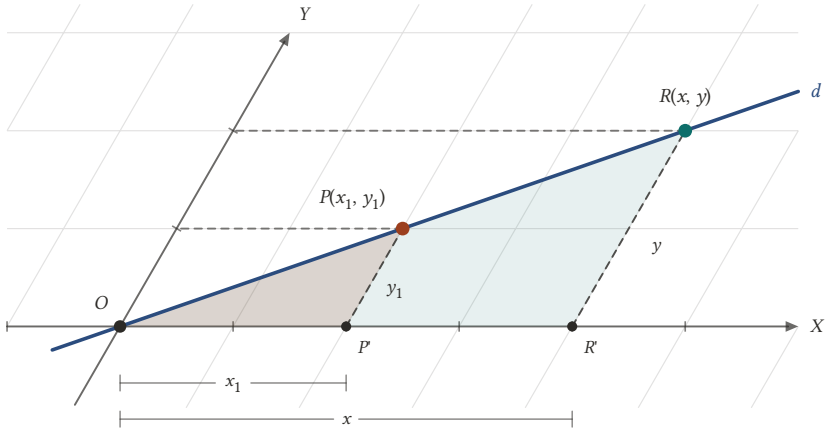
İşaretleri belirleyelim. R, OP yarı doğrusu üzerindeyse R' ile P' O'nun aynı yanındadır ve $R'R$ ile $P'P$ aynı yöne bakar. Bu durumda x ile x_1, y ile y_1 aynı işaretlidir. R, O'nun öbür yanındaysa her iki çift de ters işaretlidir. Her iki durumda $\dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1}$ olur. Buradan

$$y = \frac{y_1}{x_1}\, x = mx$$

bulunur.

***y = mx*'i sağlayan her nokta *d* üzerindedir.** (x, mx) noktasını ele alalım. X-ekseninin x noktasından Y-eksenine paralel çizilen doğru, d bu doğruya paralel olmadığından d'yi tek bir R noktasında keser. R'nin birinci koordinatı x'tir. Yukarıda gösterdiğimiz gibi ikinci koordinatı mx'tir. Demek ki (x, mx) noktası R'dir ve d üzerindedir.

Böylece d'nin denklemi $y = mx$'tir. Her $m \in \mathbb{R}$ için $y = mx$ denklemi de O ile $(1, m)$ noktasından geçen doğrunun denklemidir.



Şekil 5.19: Eğik sistemde başlangıçtan geçen *d* doğrusu: *OP'P* ve *OR'R* üçgenleri benzer olduğundan $x/x_1 = y/y_1$, yani $y = mx$.

■

Alıştırma 5.2 (Eğik sistemde iki nokta arasındaki uzaklık). Eksenleri arasındaki açı α olan bir paralel koordinat sisteminde $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık formülünü çıkarınız.

Çözüm.
$a = x_2 - x_1$ ve $b = y_2 - y_1$ diyelim. Göstereceğimiz formül şudur:

$$|\,P_1P_2\,|^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yardımcı nokta. Paralel koordinatları (x_2, y_1) olan noktaya R diyelim. Önerme 5.2 gereği P_1 ile R, X-eksenine paralel olan $y = y_1$ doğrusu üzerindedir. R ile P_2 de Y-eksenine paralel olan $x = x_2$ doğrusu üzerindedir. P_1 ve R'den Y-eksenine çizilen paraleller X-eksenini x_1 ve x_2 noktalarında keser ve bir paralelkenar oluşturur. Paralelkenarın karşılıklı kenarları eşit olduğundan $|\,P_1R\,| = |\,x_2 - x_1\,| = |\,a\,|$ olur. Aynı gerekçeyle $|\,RP_2\,| = |\,b\,|$'dir.
Özel durumlar. $a = 0$ ise P_1 ile P_2 aynı $x = x_1$ doğrusu üzerindedir ve $|\,P_1P_2\,| = |\,b\,|$ olur. $b = 0$ ise $|\,P_1P_2\,| = |\,a\,|$ olur. İki durumda da $ab = 0$ olduğundan formül doğrudur.
Genel durum. $a \neq 0$ ve $b \neq 0$ ise P_1RP_2 bir üçgendir. R'deki açıyı bulalım. R'den P_1'e giden yarı doğru, $a > 0$ ise negatif X yönüne, $a < 0$ ise pozitif X yönüne paraleldir. R'den P_2'ye giden yarı doğru, $b > 0$ ise pozitif Y yönüne, $b < 0$ ise negatif Y yönüne paraleldir. Pozitif X ile pozitif Y yönleri arasındaki açı α'dır. Yönlerden yalnızca biri ters çevrilirse açı $\pi - \alpha$ olur, ikisi birden ters çevrilirse yine α olur.

- $ab > 0$ ise (a ile b aynı işaretli) yönlerden tam biri ters çevrilmiştir: $a, b > 0$ iken negatif X ile pozitif Y, $a, b < 0$ iken pozitif X ile negatif Y. R'deki açı $\pi - \alpha$'dır. Kosinüs teoreminden

$$|\,P_1P_2\,|^2 = a^2 + b^2 - 2\,|\,a\,|\,|\,b\,|\cos(\pi - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

  çıkar, çünkü $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ ve $|\,a\,|\,|\,b\,| = ab$'dir.
- $ab < 0$ ise ya iki yön de pozitif ($a < 0 < b$) ya da iki yön de negatiftir ($b < 0 < a$). R'deki açı α'dır. Kosinüs teoreminden

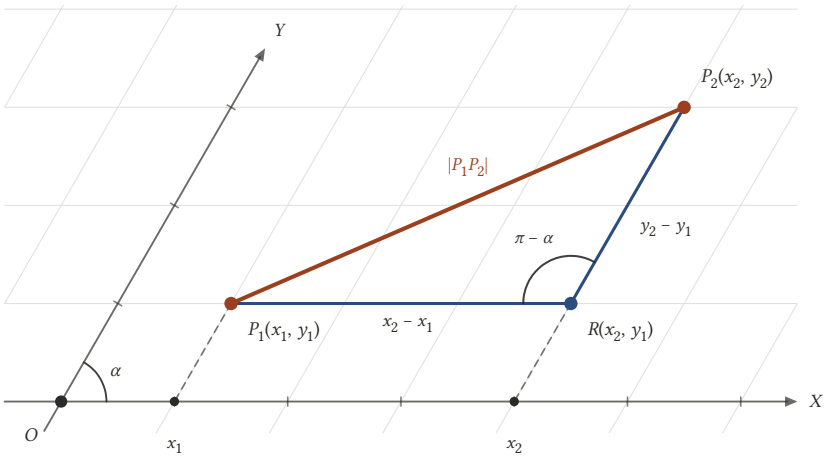
$$|\,P_1P_2\,|^2 = a^2 + b^2 - 2\,|\,a\,|\,|\,b\,|\cos\alpha = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$$

  çıkar, çünkü $|\,a\,|\,|\,b\,| = -ab$'dir.

Her durumda

$$|\,P_1P_2\,| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\alpha}$$

bulunur. $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ için $\cos\alpha = 0$ olur ve dik koordinatlardaki uzaklık formülü geri gelir.



Şekil 5.20: Eğik sistemde uzaklık: P_1RP_2 üçgeninin kenarları $|x_2 - x_1|$ ve $|y_2 - y_1|$, R'deki açı $\pi - \alpha$'dır; kosinüs teoremi uzaklığı verir.

Bir kontrol: karenin dördüncü köşesini bulduğumuz sistemde (bkz. Örnek 5.2) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$'tür. $O(0,0)$ ile $C(-1, \sqrt{2})$ arasındaki uzaklığın karesi

$$(-1)^2 + (\sqrt{2})^2 + 2(-1)(\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + 2 - 2 = 1$$

olur. Bu, karenin kenar uzunluğudur. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 5.3 (Kutupsal uzaklık: açıları 15 derece farklı iki nokta). Kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış bir düzlemde $\left(6, \frac{\pi}{2}\right)$ ve $\left(8, \frac{5\pi}{12}\right)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
Teorem 5.1 ile çalışacağız. $r_1 = 6, \theta_1 = \frac{\pi}{2}, r_2 = 8, \theta_2 = \frac{5\pi}{12}$ alalım. $\theta_2 - \theta_1 = \frac{5\pi}{12} - \frac{6\pi}{12} = -\frac{\pi}{12}$'dir ve kosinüs çift olduğundan $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$'dir.
$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ olduğundan kosinüs farkı formülüyle

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

bulunur. Buna göre

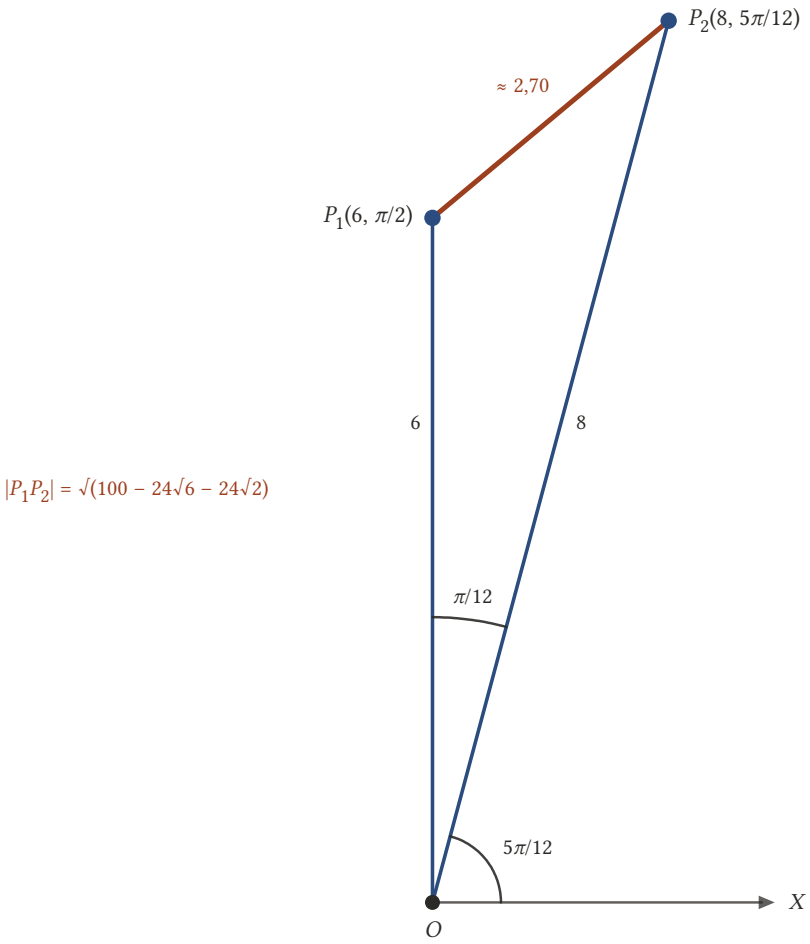
$$\begin{aligned} |\, P_1P_2 \,|^2 &= 6^2 + 8^2 - 2\cdot 6\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ &= 100 - 24(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 100 - 24\sqrt{6} - 24\sqrt{2} \end{aligned}$$

ve

$$|\, P_1P_2 \,| = \sqrt{100 - 24\sqrt{6} - 24\sqrt{2}} \approx 2{,}70$$

olur. Noktalar kutupsal eksenle yalnızca $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$ farklı açı yapan iki yarı doğru üzerinde olduğundan uzaklığın küçük çıkması beklenen bir sonuçtur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.21: $(6,\ \pi/2)$ ve $(8,\ 5\pi/12)$ noktaları kutuptan $\pi/12 = 15°$ farklı yönlerde görünür; aralarındaki uzaklık yaklaşık 2,70'tir.

■

Alıştırma 5.4 (Kutupsal uzaklık: açıları 45 derece farklı iki nokta). Kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış bir düzlemde $\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ ve $\left(8, \frac{\pi}{2}\right)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm.

Teorem 5.1 ile $r_1 = 5, \theta_1 = \frac{\pi}{4}, r_2 = 8, \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ alalım. $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{4}$ ve $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan

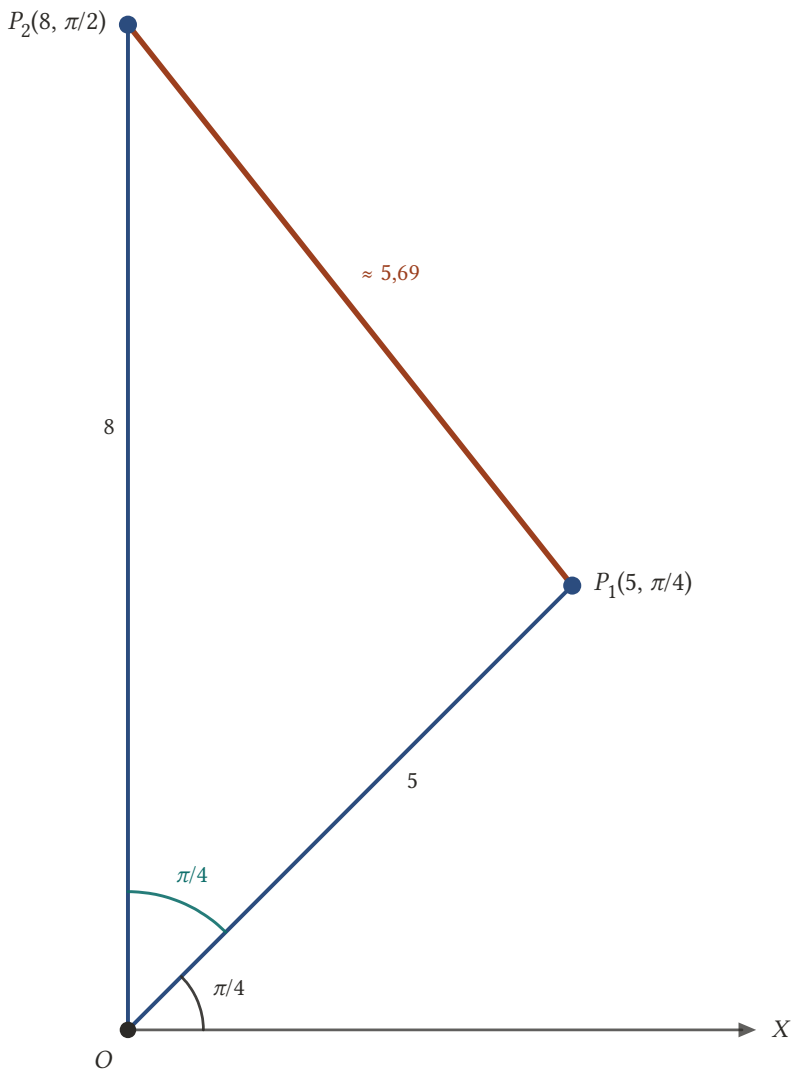
$$| P_1P_2 |^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 25 + 64 - 40\sqrt{2} = 89 - 40\sqrt{2}$$

bulunur. Buradan

$$| P_1P_2 | = \sqrt{89 - 40\sqrt{2}} \approx 5{,}69$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.22: $(5,\ \pi/4)$ ile $(8,\ \pi/2)$ arasındaki açı $\pi/4$'tür; uzaklık $\sqrt{(89 - 40\sqrt{2})} \approx 5{,}69$.

■

Alıştırma 5.5 (Kutupsal uzaklık: negatif açılı nokta). Kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış bir düzlemde $\left(5, -\frac{2\pi}{3}\right)$ ve $\left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
Birinci noktanın açısı negatiftir: $\left(5, -\frac{2\pi}{3}\right)$, kutupsal eksenden saat yönünde $\frac{2\pi}{3}$ dönülerek bulunan noktadır ve $\left(5, \frac{4\pi}{3}\right)$ ile aynıdır. Uzaklık formülü açıların yalnızca farkının kosinüsünü kullandığından negatif açıyla doğrudan çalışabiliriz.
$r_1 = 5, \theta_1 = -\frac{2\pi}{3}, r_2 = 4, \theta_2 = \frac{5\pi}{6}$ alalım.

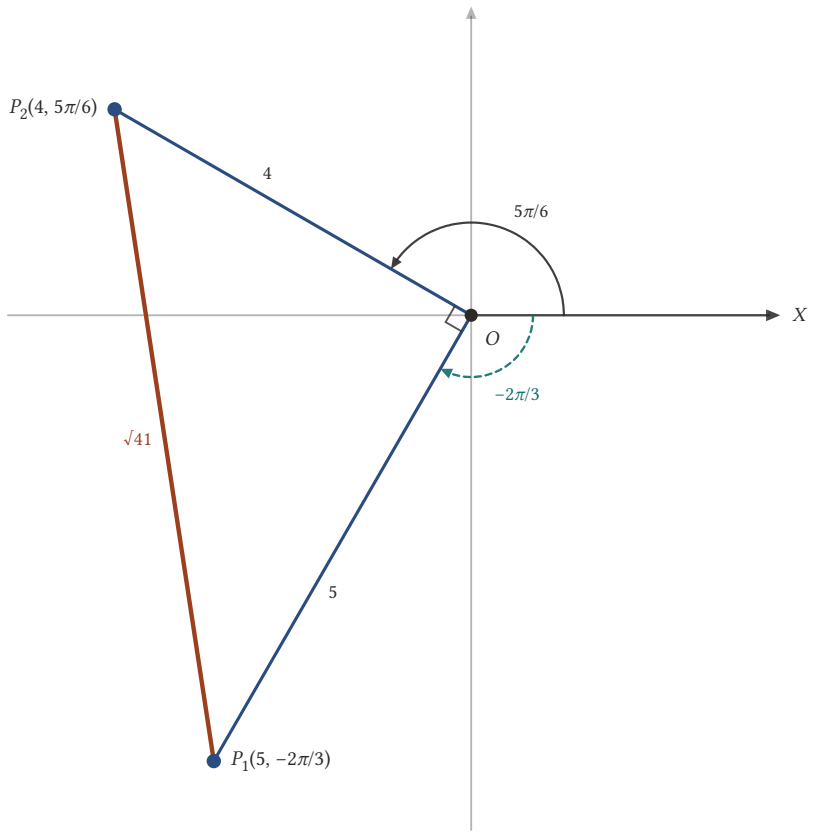
$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$$

ve $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$| P_1P_2 | = \sqrt{5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 0} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

bulunur. Kosinüs sıfır çıktığı için OP_1 ile OP_2 birbirine diktir ve sonuç, dik kenarları 5 ile 4 olan bir dik üçgenin hipotenüsüdür.



Şekil 5.23: $(5, -2\pi/3)$ saat yönünde ölçülen açıyla bulunur. İki yarıçap arasındaki açı $3\pi/2 - \pi = \pi/2$ olduğundan uzaklık $\sqrt{(25 + 16)} = \sqrt{41}$'dir.

■

Alıştırma 5.6 (Kutupsal koordinatlarda çember denklemi). Kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış bir düzlemde $P_1(r_1, \theta_1)$ merkezli ve a yarıçaplı çemberin denklemini bulunuz.

Çözüm.
$P(r, \theta)$ çember üzerinde herhangi bir nokta olsun. Çemberin tanımı gereği (Çember) P çember üzerindedir ancak ve ancak $| PP_1 | = a$ ise, yani $| PP_1 |^2 = a^2$ ise.
$| PP_1 |^2$'yi Teorem 5.1 ile yazarsak, bu da POP_1 üçgeninde kosinüs teoremini uygulamak demektir,

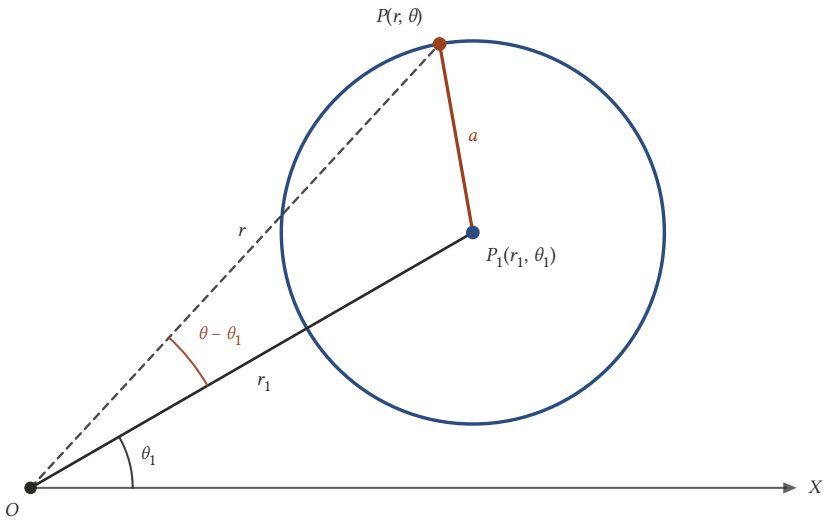
$$| PP_1 |^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1)$$

olur. Dolayısıyla çemberin kutupsal denklemi

$$r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) = a^2$$

bulunur.
İki özel durum formülü sınar. Merkez kutupsa, yani $r_1 = 0$ ise denklem $r^2 = a^2$, yani $r = a$ olur. Çember kutuptan geçiyorsa, yani $a = r_1$ ise denklem $r^2 = 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1)$ olur. Bunu $r = 0$ (kutup) ve $r = 2r_1 \cos(\theta - \theta_1)$ sağlar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.24: $P_1(r_1, \theta_1)$ merkezli, a yarıçaplı çember: POP_1 üçgeninde kosinüs teoremi çemberin kutupsal denklemini verir.

■

Alıştırma 5.7 (Kutupsal denklemden dik denkleme). Kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış bir düzlemde verilen $r^2 - 2r(\cos\theta - \sin\theta) - 7 = 0$ denklemini dik koordinat sisteminde yazınız ve belirttiği eğriyi tanıyınız.

Çözüm.
Parantezi açarsak denklem $r^2 - 2r\cos\theta + 2r\sin\theta - 7 = 0$ olur. Önerme 5.3 gereği

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad r\cos\theta = x, \qquad r\sin\theta = y$$

yazabiliriz. Kutup noktası ($r = 0$) denklemi sağlamadığından ($-7 \neq 0$) bu yerine koymalar denklemin çözümlerini değiştirmez. Böylece

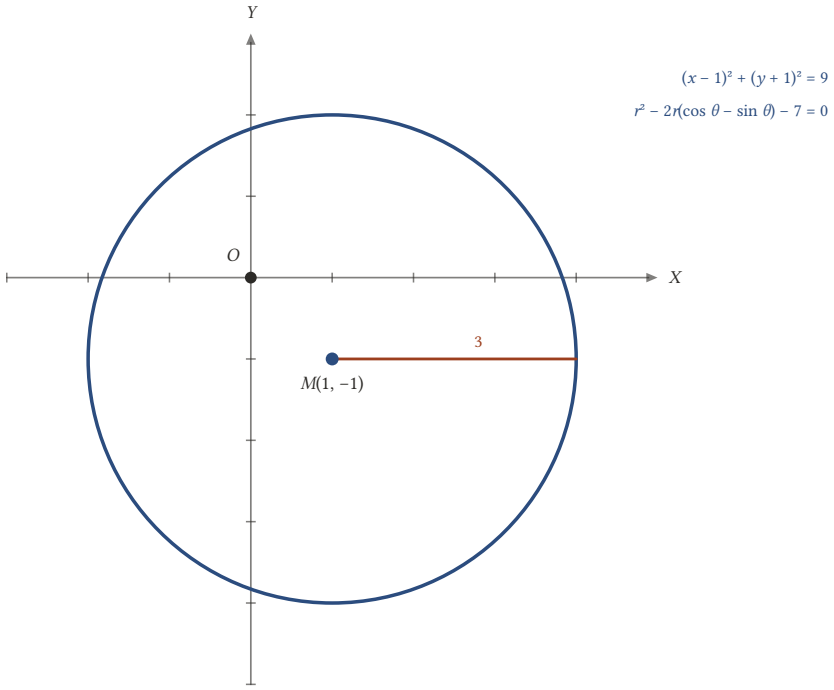
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$$

bulunur. Tam kareye tamamlayalım: $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ ve $y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1$ olduğundan

$$(x-1)^2 - 1 + (y+1)^2 - 1 - 7 = 0, \quad \text{yani} \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$$

olur. Bu, merkezi $M(1, -1)$ ve yarıçapı 3 olan çemberin (Çember) denklemidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.25: $r^2 - 2r(\cos\theta - \sin\theta) - 7 = 0$ eğrisi, merkezi $M(1,-1)$ ve yarıçapı 3 olan çemberdir; kutup çemberin içinde kalır.

■

Alıştırma 5.8 (Bir noktası ve eğim açısı verilen doğru). Kutupsal koordinat sistemiyle donatılmış bir düzlemde $P_0\left(4, \dfrac{\pi}{6}\right)$ noktasından geçen ve kutupsal eksenle $\dfrac{5\pi}{6}$'lık açı yapan doğrunun denklemini bulunuz.

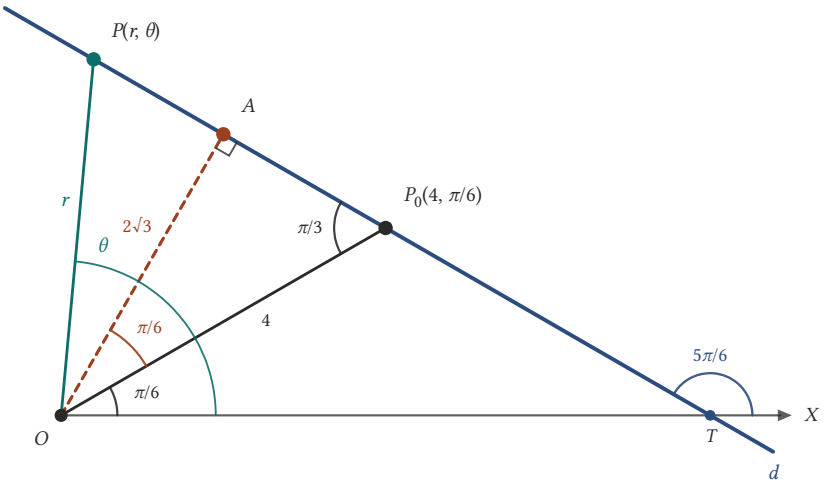
Çözüm.
Doğruya d diyelim; $P(r,\theta)$ de d üzerinde herhangi bir nokta olsun. d kutuptan geçmez, çünkü O'dan P_0'a giden yön $\dfrac{\pi}{6}$, d'nin yönü ise $\dfrac{5\pi}{6}$'dır. Planımız kutupsal doğru denklemini (bkz. Teorem 5.3) kullanmak: kutuptan d'ye inilen dikmenin ayağı $A(q,\omega)$'yı bulacağız.
Dikmenin yönü ω. d, kutupsal eksenin taşıyıcı doğrusunu bir T noktasında kessin. d ile kutupsal eksen arasındaki açı $\dfrac{5\pi}{6}$ olduğundan OTA üçgeninin T'deki iç açısı $\pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$'dır. A'daki açı diktir. Dolayısıyla O'daki açı $\pi - \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$'tür. Yani $\omega = \dfrac{\pi}{3}$'tür.
Uzaklık $q = |\,OA\,|$. OAP_0 dik üçgeninde $|\,OP_0\,| = 4$'tür. O'daki açı $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$, P_0'daki açı da $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$'tür. P_0'daki açının karşısındaki kenar OA olduğundan

$$|\,OA\,| = 4\sin\frac{\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

bulunur.
Denklem. OAP dik üçgeninde hipotenüs $|\,OP\,| = r$, O'daki açı θ ile $\dfrac{\pi}{3}$ arasındaki farktır. Komşu dik kenar $|\,OA\,| = r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ olduğundan (kosinüs çift olduğundan farkın işareti önemsizdir)

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$$

elde edilir. Bu, kutupsal doğru denkleminin (bkz. Teorem 5.3) $q = 2\sqrt{3}$ ve $\omega = \dfrac{\pi}{3}$ için verdiği denklemdir.
Kontrol: $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, $r = 4$ için $4\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ olduğundan P_0 denklemi sağlar. Dik koordinatlarda denklem $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 2\sqrt{3}$, yani $x + \sqrt{3}\,y = 4\sqrt{3}$ olur. Eğimi $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{5\pi}{6}$'dır.



Şekil 5.26: $P_0(4, \pi/6)$'dan geçen ve kutupsal eksenle $5\pi/6$ açı yapan d doğrusu. Kutuptan inilen dikmenin ayağı $A(2\sqrt{3}, \pi/3)$; denklem $r\cos(\theta - \pi/3) = 2\sqrt{3}$.

■

Alıştırma 5.9 (Bir yarıçapa dik doğru). $P_0\left(4, \dfrac{2\pi}{3}\right)$ ve $O(0,0)$ noktalarını birleştiren doğruya dik olan ve P_0 noktasından geçen doğrunun kutupsal denklemini bulunuz.

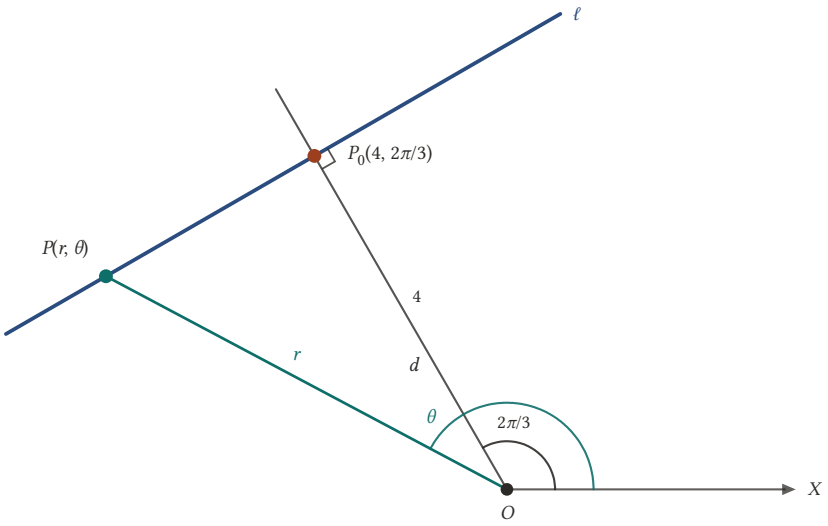
Çözüm.
O ile P_0'ı birleştiren doğruya d, d'ye P_0'da dik olan doğruya ℓ diyelim. $P(r,\theta)$, ℓ üzerinde herhangi bir nokta olsun.
ℓ, OP_0'a P_0'da dik olduğundan kutuptan ℓ'ye inilen dikmenin ayağı P_0'ın kendisidir. $|\,OP_0\,| = 4 > 0$ olduğundan ℓ kutuptan geçmez. OP_0P üçgeni P_0'da dik açılıdır. Hipotenüs $|\,OP\,| = r$ ve O'daki açı θ ile $\dfrac{2\pi}{3}$ arasındaki fark olduğundan komşu dik kenar

$$|\,OP_0\,| = r\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

olur. Böylece ℓ'nin denklemi

$$r\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) = 4$$

bulunur. Bu, kutupsal doğru denkleminde (bkz. Teorem 5.3) $q = 4$ ve $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$ almaktır.
Kontrol: Kosinüs farkını açarsak $-\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 4$, yani $-x + \sqrt{3}\,y = 8$ olur. P_0'ın dik koordinatları $(-2, 2\sqrt{3})$'tür ve $2 + \sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 2 + 6 = 8$ sağlanır.



Şekil 5.27: OP_0'a P_0'da dik olan ℓ doğrusu. Kutuptan ℓ'ye inilen dikmenin ayağı P_0'ın kendisidir; denklem $r\cos(\theta - 2\pi/3) = 4$.

■

Alıştırma 5.10 (Kardioidin dik koordinatlarda denklemi). $r = 1 - \cos\theta$ denklemini dik koordinatlarda yazınız.

Çözüm.
$\cos\theta$'yı x ve r cinsinden yazmak için iki tarafı r ile çarpalım:

$$r^2 = r - r\cos\theta.$$

Bu çarpma yalnızca kutup noktasını ($r = 0$) ekleyebilir. Ama kutup zaten eğrinin üzerindedir, çünkü $\theta = 0$ için $r = 1 - 1 = 0$'dır. Yani denklem değişmez.
Şimdi $r^2 = x^2 + y^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $r\cos\theta = x$ yazarsak

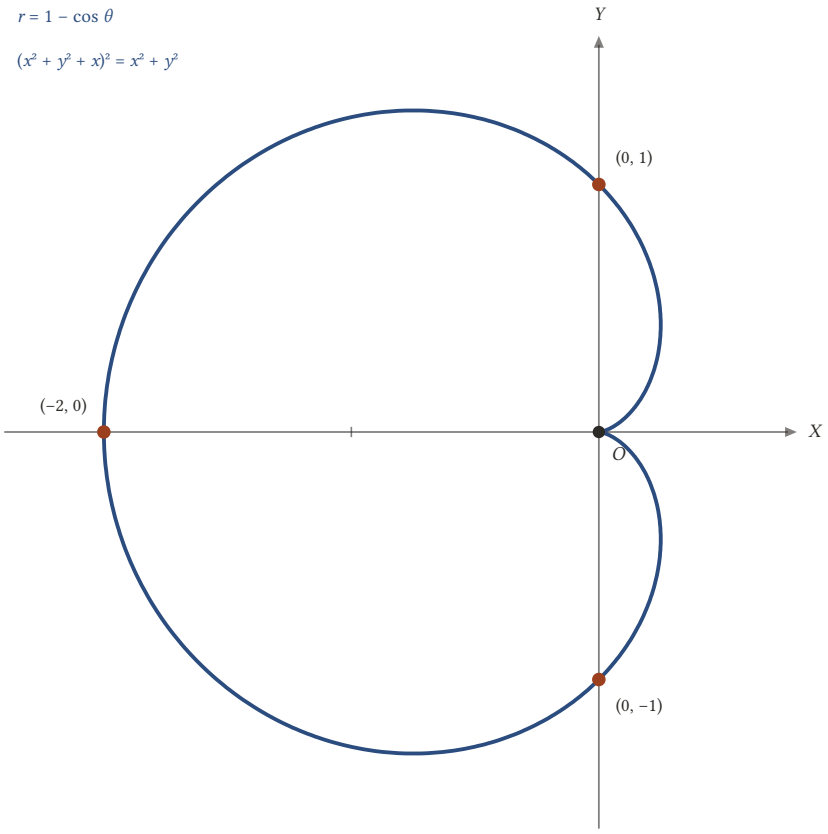
$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x, \quad \text{yani} \quad x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} + x = 0$$

bulunur.
Kökten de kurtulabiliriz. Denklemi $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ diye yazıp kare alırsak

$$(x^2 + y^2 + x)^2 = x^2 + y^2$$

olur. Kare alma yalnızca $x^2 + y^2 + x = -\sqrt{x^2 + y^2}$ olan noktaları ekleyebilir. Kutupsal olarak bu $r^2 + r\cos\theta = -r$, yani $r(r + 1 + \cos\theta) = 0$ demektir. $r + 1 + \cos\theta = 0$ olması için $r = -(1 + \cos\theta) \le 0$ gerekir, bu da yalnızca $r = 0$ ile olur. Kutup zaten eğrinin üzerinde olduğundan bu biçim de eşdeğerdir. Bu eğriye, kalbe benzeyen biçimi nedeniyle **kardioid** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.28: $r = 1 - \cos\theta$ kardioidi. Eğri kutupta sivri bir uç yapar ve sola doğru açılır; dik koordinatlardaki denklemi $(x^2 + y^2 + x)^2 = x^2 + y^2$'dir.

■

Alıştırma 5.11 (Lemniskatın dik koordinatlarda denklemi). $r^2 = 9\cos 2\theta$ denklemini dik koordinatlarda yazınız.

Çözüm.
Çift açı formülüyle $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$'dır. Denklemin iki tarafını r^2 ile çarpalım:

$$r^4 = 9(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) = 9\big((r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2\big).$$

Bu çarpma yalnızca kutbu ekleyebilir. Kutup zaten eğri üzerindedir, çünkü $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ için $r^2 = 9\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$'dır.
$r^4 = (x^2+y^2)^2$, $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ yazarsak

$$(x^2+y^2)^2 = 9(x^2 - y^2), \quad \text{yani} \quad (x^2+y^2)^2 - 9(x^2-y^2) = 0$$

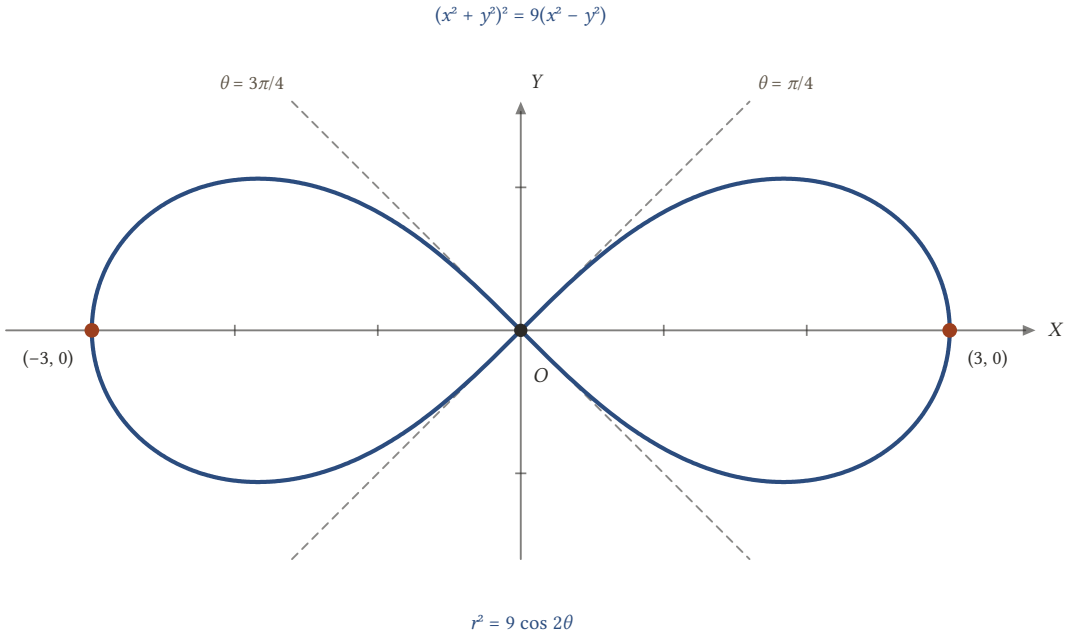
bulunur.
Aynı sonuca $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ ile de ulaşılır:

$$x^2 + y^2 = 9\left(1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{9x^2 - 9y^2}{x^2+y^2}$$

olur ve iki taraf x^2+y^2 ile çarpılınca aynı denklem çıkar.

 CC BY-NC-SA 4.0

Eğri yalnızca $\cos 2\theta \geq 0$ olan yönlerde, yani kutupsal eksenle en çok $\dfrac{\pi}{4}$ açı yapan yönlerde ve bunların ters yönlerinde bulunur. $\theta = 0$ ve $\theta = \pi$ için $r = 3$'tür. Bu sekiz biçimli eğriye **Bernoulli lemniskatı** denir.



Şekil 5.29: $r^2 = 9 \cos 2\theta$ Bernoulli lemniskatı. Eğri yalnız kutupsal eksenle en çok $\pi/4$ açı yapan yönlerde ve bunların ters yönlerinde bulunur.

■

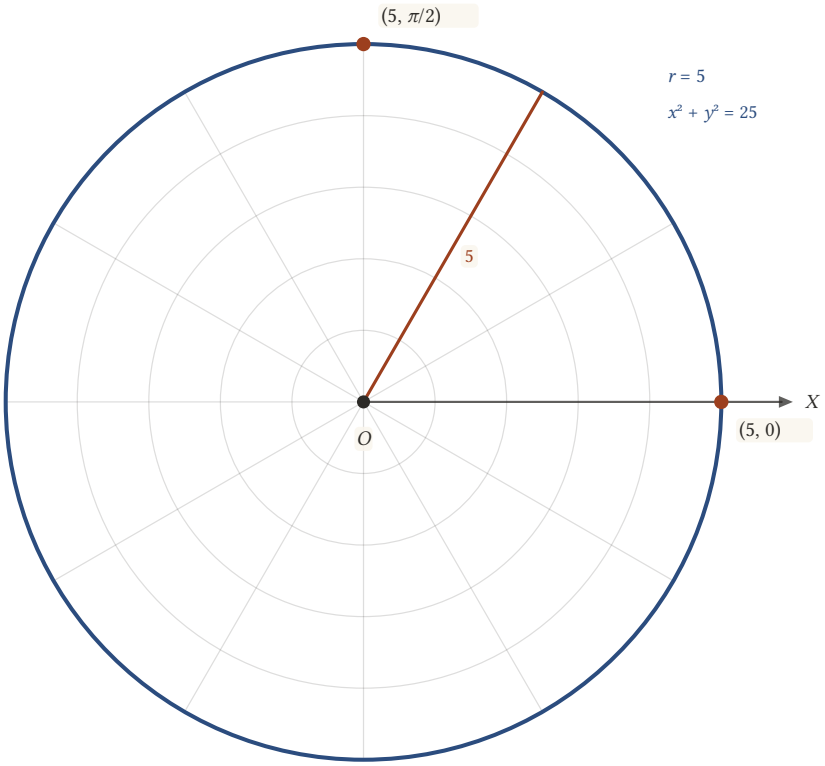
Alıştırma 5.12 (Başlangıç merkezli çemberin kutupsal denklemi). O merkezli ve 5 yarıçaplı çemberin kutupsal denklemini bulunuz.

Çözüm.
Çemberin dik koordinatlardaki denklemi $x^2 + y^2 = 25$'tir (Çember). $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ yazarsak

$$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = 25 \Leftrightarrow r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 25 \Leftrightarrow r^2 = 25$$

bulunur. $r \geq 0$ olduğundan bu, $r = 5$ demektir. Çemberin kutupsal denklemi $r = 5$'tir.
Aynı sonuç, kutupsal çember denkleminde (bkz. Alıştırma 5.6) $r_1 = 0$, $a = 5$ alınarak da elde edilir. Kutupsal koordinatların gücü burada açıkça görülüyor: kutup merkezli bir çember, "kutba uzaklık sabittir" cümlesinin ta kendisidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.30: Kutup merkezli, 5 yarıçaplı çember: kutupsal denklemi $r = 5$, dik denklemi $x^2 + y^2 = 25$.

■

Alıştırma 5.13 (Bir elipsin kutupsal denklemi). $9x^2 + 16y^2 = 144$ denklemiyle verilen elipsin kutupsal denklemini bulunuz.

Çözüm.
$x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ yazarsak

$$9r^2\cos^2\theta + 16r^2\sin^2\theta = 144, \quad \text{yani} \quad r^2(9\cos^2\theta + 16\sin^2\theta) = 144$$

bulunur. $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ yazarsak parantez $9 - 9\sin^2\theta + 16\sin^2\theta$, yani $9 + 7\sin^2\theta$ olur:

$$r^2(9 + 7\sin^2\theta) = 144.$$

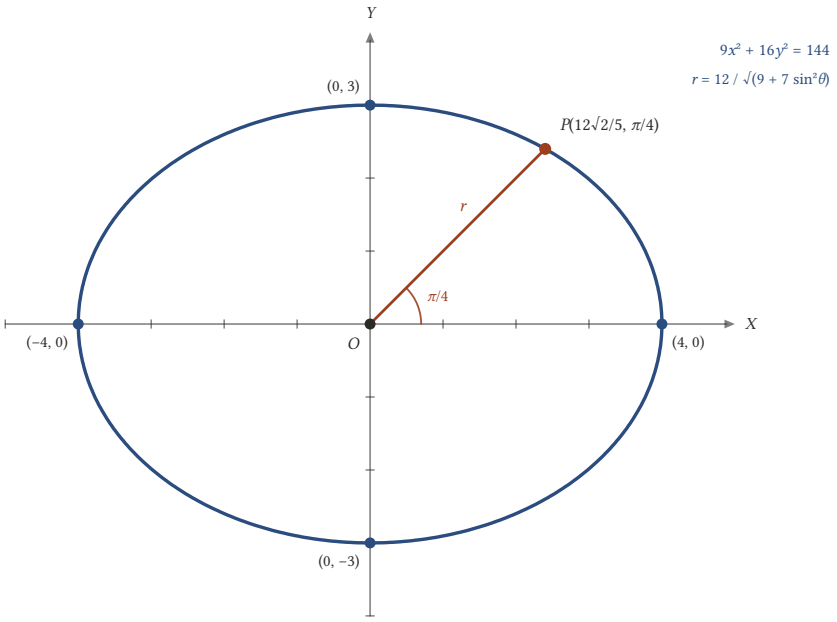
$9 + 7\sin^2\theta \geq 9 > 0$ olduğundan bölebiliriz. $r \geq 0$ olduğundan pozitif karekökü alırız:

$$r = \frac{12}{\sqrt{9 + 7\sin^2\theta}}.$$

Kontrol edelim:

- $\theta = 0$ için $r = \dfrac{12}{3} = 4$ bulunur; bu, elipsin $(4, 0)$ noktasıdır.
- $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ için $r = \dfrac{12}{\sqrt{16}} = 3$ bulunur; bu da $(0, 3)$ noktasıdır.
- $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ için $\sin^2\theta = \dfrac{1}{2}$ ve $r = \dfrac{12}{\sqrt{25/2}} = \dfrac{12\sqrt{2}}{5}$ olur. Bu noktanın dik koordinatları $\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$'tir ve $(9 + 16) \cdot \dfrac{144}{25} = 144$ sağlanır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.31: $9x^2 + 16y^2 = 144$ elipsi ve $\theta = \pi/4$ yönündeki kutupsal yarıçap: $r = 12\sqrt{2}/5$, yani $P = (12/5, 12/5)$.

■

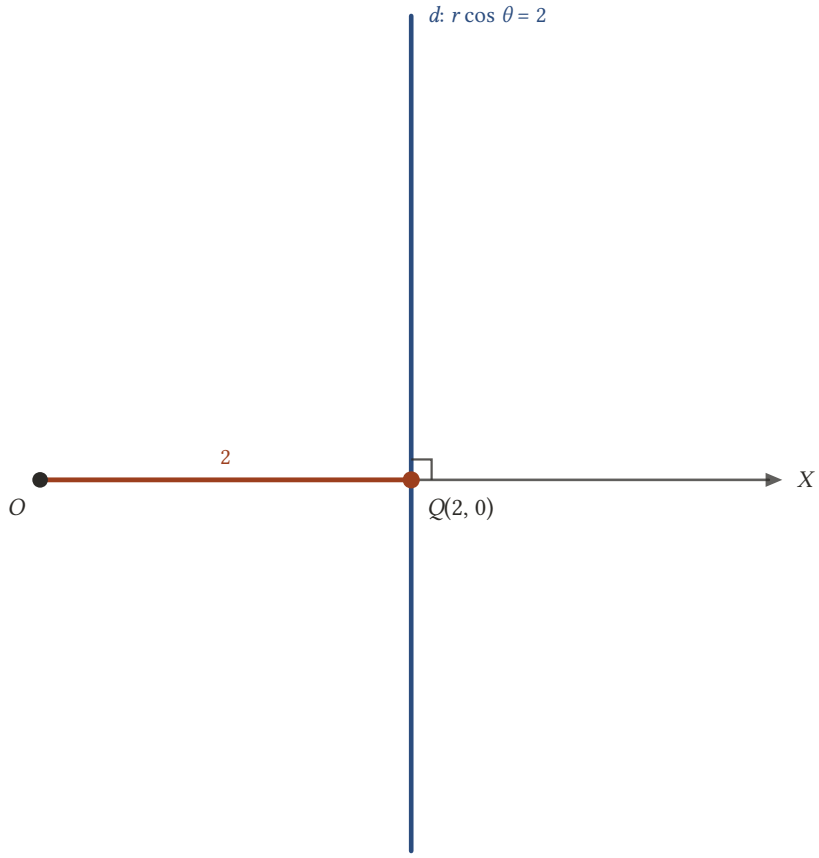
Alıştırma 5.14 (Kutupsal denklemi verilen doğruyu çizmek). Kutupsal koordinatlardaki denklemi $r\cos\theta = 2$ olan doğruyu çiziniz.

Çözüm.
Doğruya d diyelim. Kutupsal denklemi verilen bir doğruyu çizmek için üç adımı uygulayalım.

1. İki tarafı $2r$'ye bölersek $\frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{r}$ olur. Genel biçimle karşılaştırırsak $A = \frac{1}{2}$ ve $B = 0$'dır.
2. $A > 0$ ve $B = 0$ olduğundan Önerme 5.4 gereği $q = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{1/2} = 2$ ve $\omega = 0$'dır.
3. Demek ki d, $Q(2, 0)$ noktasından geçer ve OQ'ya, yani kutupsal eksene diktir.

Dik koordinatlarda $r\cos\theta = x$ olduğundan d, $x = 2$ doğrusudur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 5.32: $r\cos\theta = 2$ doğrusu: kutuptan inilen dikmenin ayağı $Q(2, 0)$'dır ve doğru kutupsal eksene diktir, yani $x = 2$.

■

Düzlemde bir noktanın adresini artık üç farklı yolla yazabiliyoruz: dik, paralel ve kutupsal koordinatlarla. Sıradaki bölümde bir boyut yukarı çıkacak ve aynı fikirleri üç boyutlu uzaya taşıyacağız: Uzayda Dik Koordinat Sistemi.

 CC BY-NC-SA 4.0

6. Uzayda Dik Koordinat Sistemi

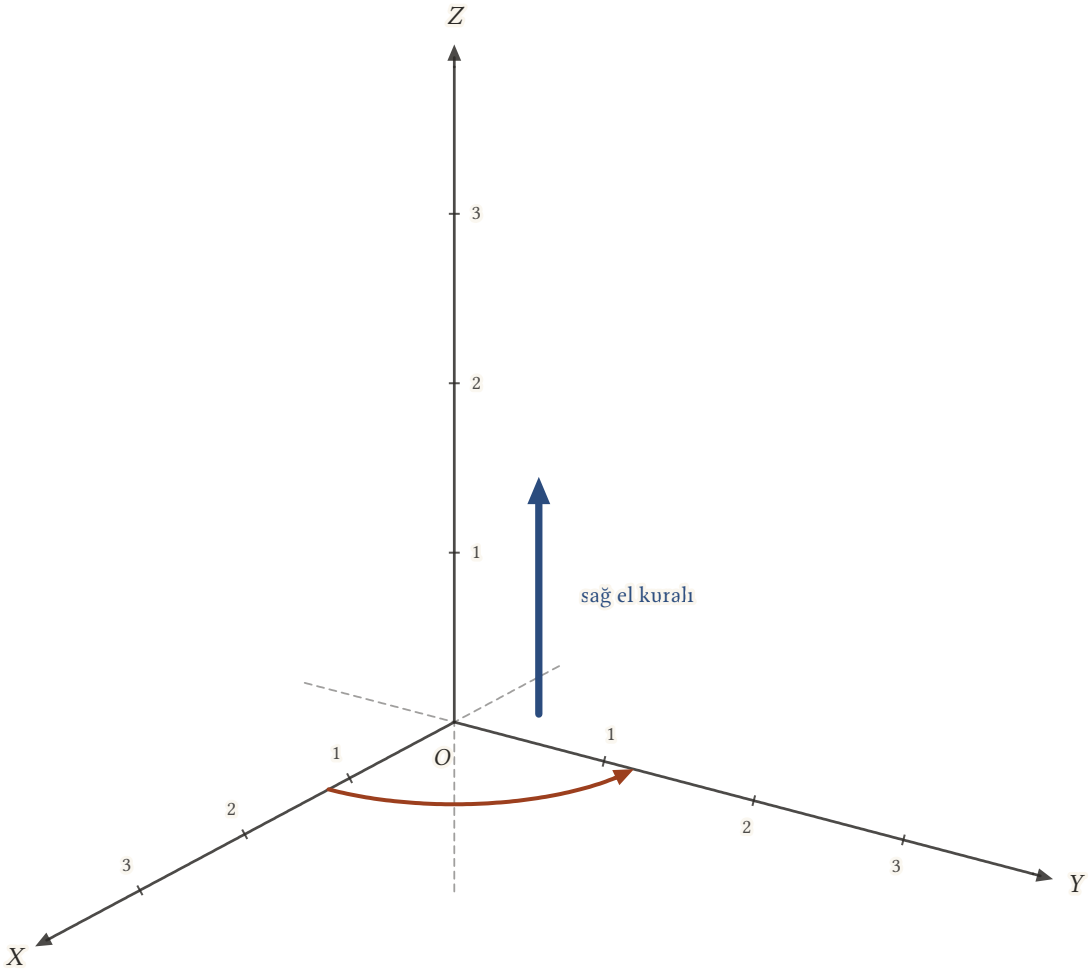
Düzlemde bir noktayı iki sayıyla, apsisi ve ordinatıyla belirlemeyi Dik Koordinatlar ve Uzaklık bölümünde gördük. İçinde yaşadığımız evren ise üç boyutludur: bir odadaki bir lambanın yerini söylemek için "duvardan ne kadar uzakta, öbür duvardan ne kadar uzakta ve yerden ne kadar yukarıda" diye üç ayrı sayı vermemiz gerekir. Bu bölümde düzlemdeki fikri bir boyut yukarı taşıyacağız: uzaya üç eksen yerleştirip her noktaya bir sayı üçlüsü karşılık getireceğiz, sonra da iki nokta arasındaki uzaklığı ve bunun ilk doğal uygulaması olan küreyi inceleyeceğiz.

6.1 Eksenler ve koordinat düzlemleri

Üç boyutlu evrene **reel uzay** ya da kısaca **uzay** diyeceğiz. Uzayda bir O noktası seçelim ve bu noktada birbirini dik kesen üç doğru alalım. Bu üç doğrunun her birini, hepsinde aynı birim uzunluğu kullanarak, bir sayı doğrusuna çevirelim; O noktası üçünde de 0 sayısına karşılık gelsin. Bu doğrulara X-, Y- ve Z-ekseni diyeceğiz.

Geriye eksenlerin pozitif yönlerini seçmek kalıyor. Bunu **sağ el kuralına** göre yaparız: sağ elimizin dört parmağını pozitif X-ekseninden pozitif Y-eksenine doğru (aradaki dik açıyı tarayarak) kıvırdığımızda başparmağımız pozitif Z-eksenini gösterir. Parmaklarla söylersek: sağ elin başparmağı pozitif X-eksenini, işaret parmağı pozitif Y-eksenini gösterirken avuca dik açılan orta parmak pozitif Z-eksenini gösterir. Şekillerde genellikle Z-ekseni yukarıyı, Y-ekseni sağı, X-ekseni de okuyucuya doğru (sol aşağıyı) gösterecek biçimde çizilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



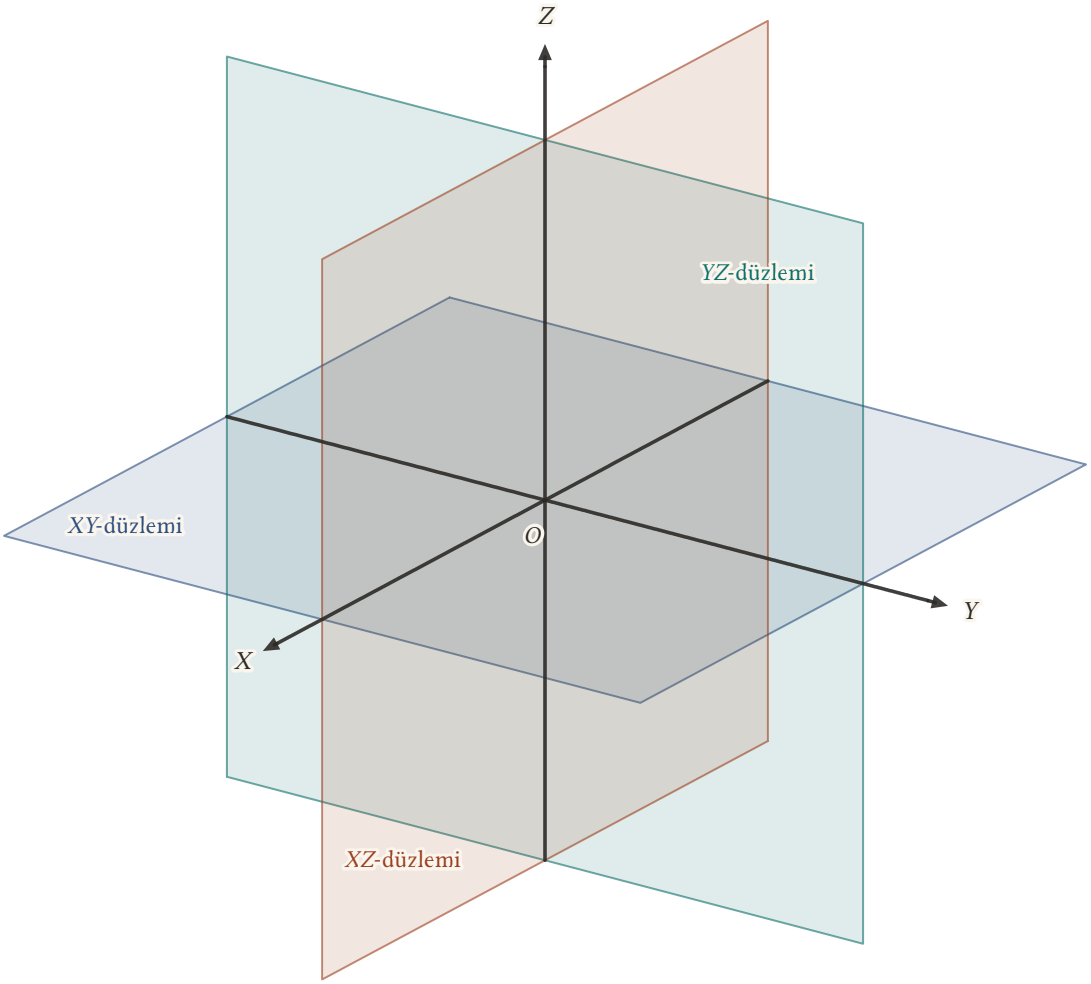
Şekil 6.1: Sağ el kuralına göre yönlendirilmiş eksenler: X-ekseni okuyucuya doğru (sol aşağı), Y-ekseni sağa, Z-ekseni yukarı. Pozitif X-ekseninden pozitif Y-eksenine kıvrılan parmaklar (turuncu ok) başparmağı pozitif Z-ekseni yönüne (mavi ok) getirir. Eksenlerin negatif kısımları kesiklidir.

Böylece uzayı üç eksenle donattık. İkişer ikişer alınan eksenler, uzayda üç özel düzlem belirler.

Tanım 6.1 (Koordinat düzlemleri). Uzayda X- ve Y-eksenlerini içeren düzleme $\boldsymbol{XY}$**-düzlemi**, Y- ve Z-eksenlerini içeren düzleme $\boldsymbol{YZ}$**-düzlemi**, X- ve Z-eksenlerini içeren düzleme de $\boldsymbol{XZ}$**-düzlemi** denir. Bu üç düzlemin her birine bir **koordinat düzlemi** denir.

Yani koordinat düzlemleri, eksenlerin ikişer ikişer "gerdiği" düzlemlerdir. Üçü de O noktasından geçer ve ikişer ikişer birbirine diktir: odanın zemini ile iki komşu duvarı gibi düşünebilirsiniz. XY-düzlemi ile YZ-düzleminin ortak doğrusu Y-ekseni, XY-düzlemi ile XZ-düzleminin ortak doğrusu X-ekseni, YZ-düzlemi ile XZ-düzleminin ortak doğrusu da Z-eksenidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.2: Üç koordinat düzlemi: XY-düzlemi ($z = 0$, mavi), YZ-düzlemi ($x = 0$, yeşil) ve XZ-düzlemi ($y = 0$, turuncu). İkişer ikişer kesişme doğruları koordinat eksenleridir; düzlemlerin yalnız -3 ile 3 arasındaki parçaları çizilmiştir.

6.2 Bir noktanın koordinatları

Şimdi eksenlerle donatılmış uzayda rastgele bir P noktası alalım ve ona üç sayıyı nasıl eşleyeceğimizi görelim.

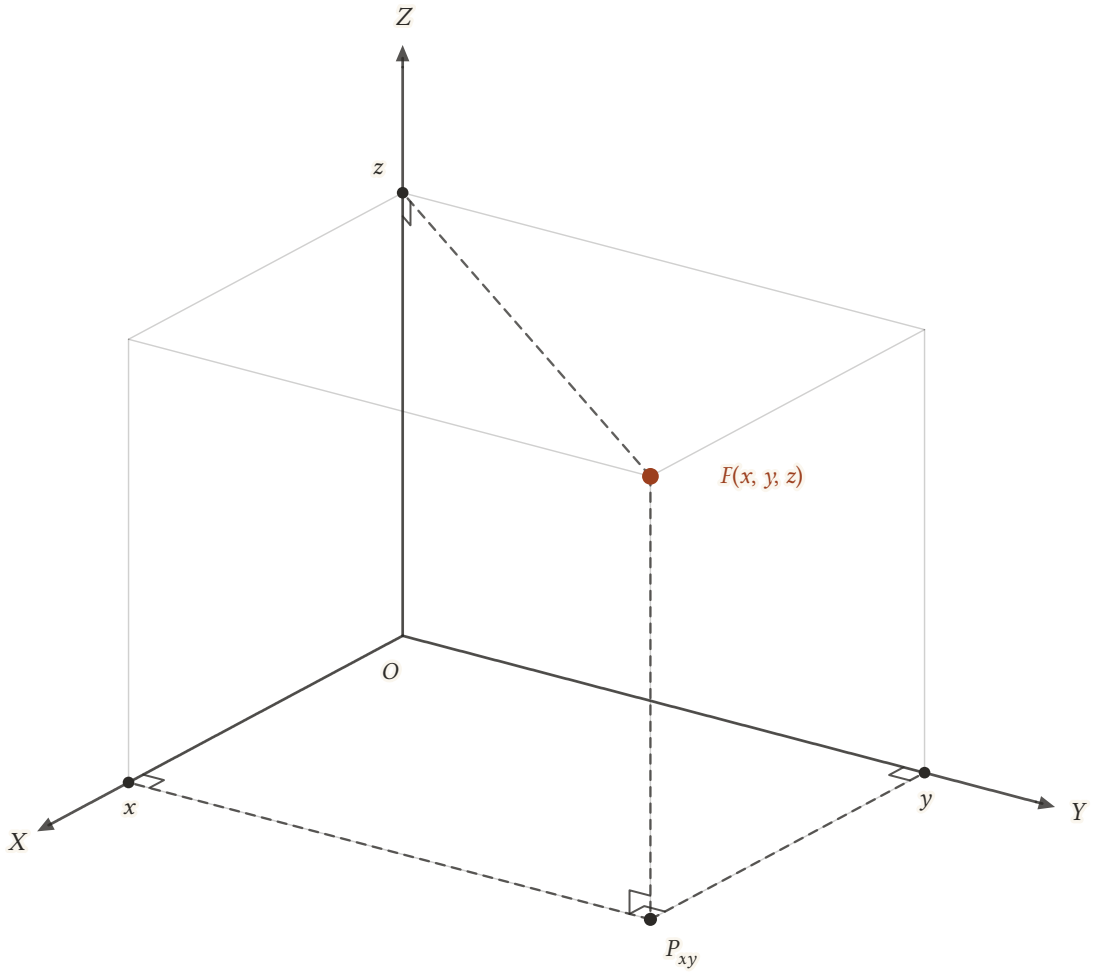
- P'den XY-düzlemine bir dikme indirelim; dikmenin düzlemi kestiği noktaya P_{xy} diyelim.
- P_{xy} noktasından X- ve Y-eksenlerine dikmeler indirelim; bu dikmelerin eksenleri kestiği noktalar, eksenler üzerinde sırasıyla x ve y sayılarına karşılık gelsin.
- Son olarak P'den Z-eksenine bir dikme indirelim; dikmenin ekseni kestiği nokta Z-ekseni üzerinde z sayısına karşılık gelsin.

P noktasına (x, y, z) sıralı üçlüsünü eşleriz.
Bu işlem tersine de çalışır. Bir (x, y, z) reel sayı üçlüsü verilmiş olsun. X-, Y- ve Z-eksenleri üzerinde sırasıyla x, y ve z sayılarına karşılık gelen noktaları işaretleyelim. XY-düzleminde, x noktasından X-eksenine ve y noktasından Y-eksenine dik doğrular çizelim; bu iki doğru bir noktada kesişir ve bu nokta P_{xy}'dir. Son olarak P_{xy}'den geçip XY-düzlemine dik olan doğru ile z noktasından geçip Z-eksenine dik olan düzlem tek bir noktada kesişir; bu nokta P'dir.
Her nokta tek bir üçlü, her üçlü de tek bir nokta belirlediğinden, uzayın noktaları ile

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

kümesinin elemanları arasında birebir ve örten bir eşleme kurulmuş olur.



Şekil 6.3: P noktasının koordinatları: P'den XY-düzlemine inilen dikmenin ayağı P_{xy}'dir; P_{xy}'den eksenlere inilen dikmeler x ve y'yi, P'den Z-eksenine inilen dikme z'yi verir.

Tanım 6.2 (Dik koordinatlar). Bir P noktasının belirttiği $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sıralı üçlüsüne P'nin **dik koordinatları** ya da **kartezyen koordinatları** denir ve bu durum $P = P(x, y, z)$ ya da kısaca $P = (x, y, z)$ biçiminde yazılır.

Yani uzayda bir noktayı vermek ile bir reel sayı üçlüsü vermek aynı şeydir; bundan sonra ikisini birbirinin yerine kullanacağız.

Tanım 6.3 (Apsis, ordinat ve kot). $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ noktası için x sayısına P'nin **apsisi**, y sayısına P'nin **ordinatı**, z sayısına da P'nin **kotu** denir.

Yani apsis ve ordinat düzlemdeki anlamlarını korur; üçüncü koordinat olan kot, noktanın XY-düzleminin ne kadar "üstünde" (kot pozitifse) ya da "altında" (kot negatifse) olduğunu söyler.

Tanım 6.4 (Uzayda dik koordinat sistemi). X-, Y- ve Z-eksenlerinin her birine bir **koordinat ekseni** denir. Bu üç eksene, O başlangıç noktasıyla birlikte, **dik koordinat sistemi** ya da **kartezyen koordinat sistemi** denir. Başlangıç noktası $O = (0, 0, 0)$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani bir dik koordinat sistemi; ortak bir başlangıç noktası, ortak bir birim ve ikişer ikişer dik üç yönlü eksenden oluşur.

> **i** Not
>
> Aksi söylenmedikçe, dik koordinat sistemindeki eksenlerin sağ el kuralına göre yönlendirildiğini varsayacağız.

Koordinat düzlemleri uzayı sekiz parçaya böler; düzlemdeki dört bölgenin uzaydaki karşılığı budur.

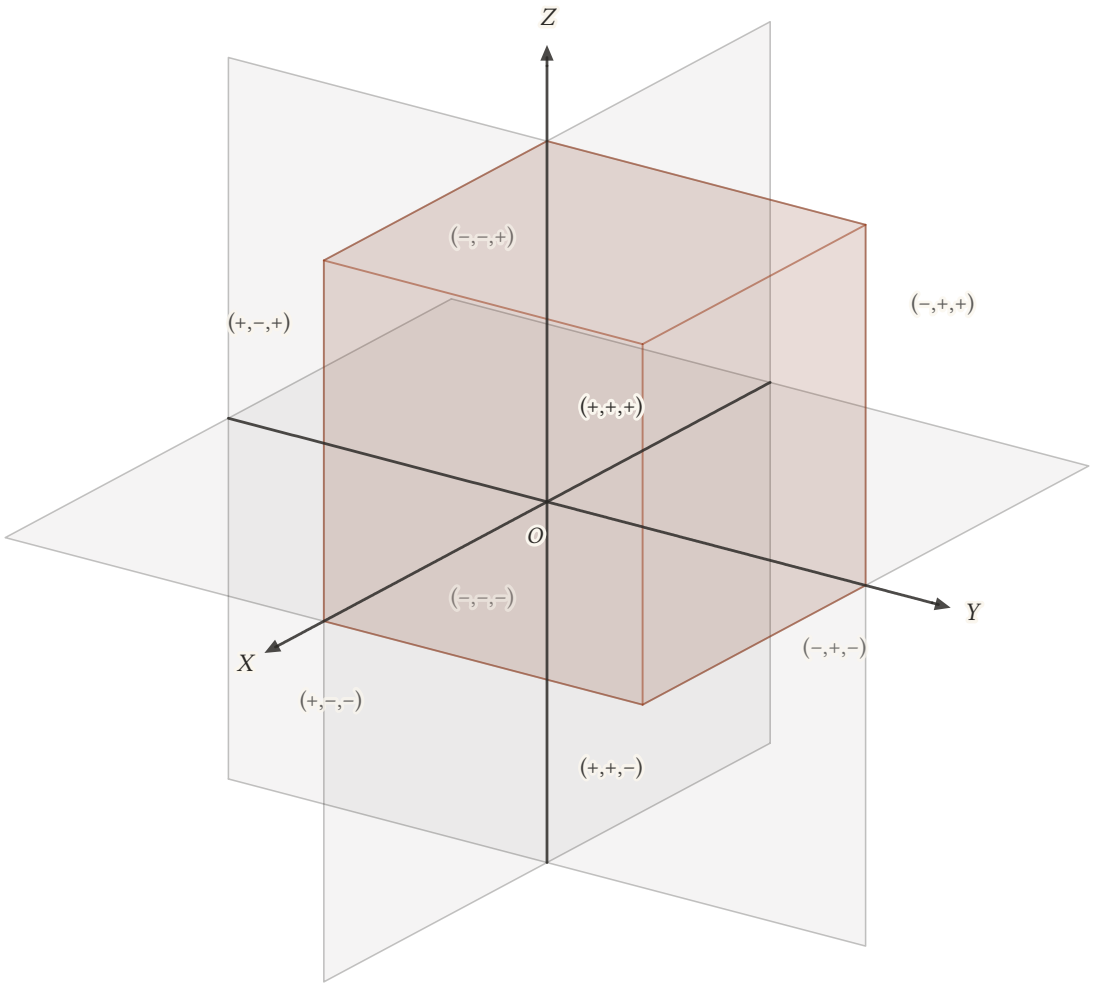
Tanım 6.5 (Uzayda bölgeler). Üç koordinat düzlemi, uzayın bu düzlemler üzerinde olmayan noktalarını sekiz parçaya ayırır; bu parçaların her birine bir **bölge** denir. Apsisi, ordinatı ve kotu pozitif olan noktaların oluşturduğu bölgeye **birinci bölge** denir. Diğer bölgeler, içlerindeki noktaların koordinatlarının işaretleriyle anılır: örneğin $(-,+,-)$ bölgesi, $x<0$, $y>0$, $z<0$ olan noktalardan oluşur.

Yani bir noktanın hangi bölgede olduğunu anlamak için üç koordinatının işaretine bakmak yeter. Sekiz bölge, sekiz işaret üçlüsüne karşılık gelir:

Kot	Bölgeler (apsis, ordinat, kot işaretleri)
$z>0$ (yukarıdaki dört bölge)	$(+,+,+)$, $(-,+,+)$, $(-,-,+)$, $(+,-,+)$
$z<0$ (aşağıdaki dört bölge)	$(+,+,-)$, $(-,+,-)$, $(-,-,-)$, $(+,-,-)$

Koordinatlarından en az biri sıfır olan bir nokta hiçbir bölgeye ait değildir; bir koordinat düzleminin üzerindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.4: Koordinat düzlemleri uzayı sekiz bölgeye ayırır; her bölge, içindeki noktaların koordinat işaretleriyle anılır. Turuncu kutu birinci bölgenin (+,+,+) bir parçasıdır; arkada kalan bölgelerin etiketleri daha soluktur.

Kuruluştan hemen çıkan bir gözlem şudur: $P(x, y, z)$ noktasından XY-düzlemine inilen dikmenin ayağı $P_{xy} = (x, y, 0)$ noktasıdır, çünkü dikme boyunca yalnız kot değişir. Aynı nedenle P'den YZ-düzlemine inilen dikmenin ayağı $(0, y, z)$, XZ-düzlemine inilen dikmenin ayağı $(x, 0, z)$ noktasıdır; eksenlere inilen dikmelerin ayakları da $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ ve $(0, 0, z)$ noktalarıdır.

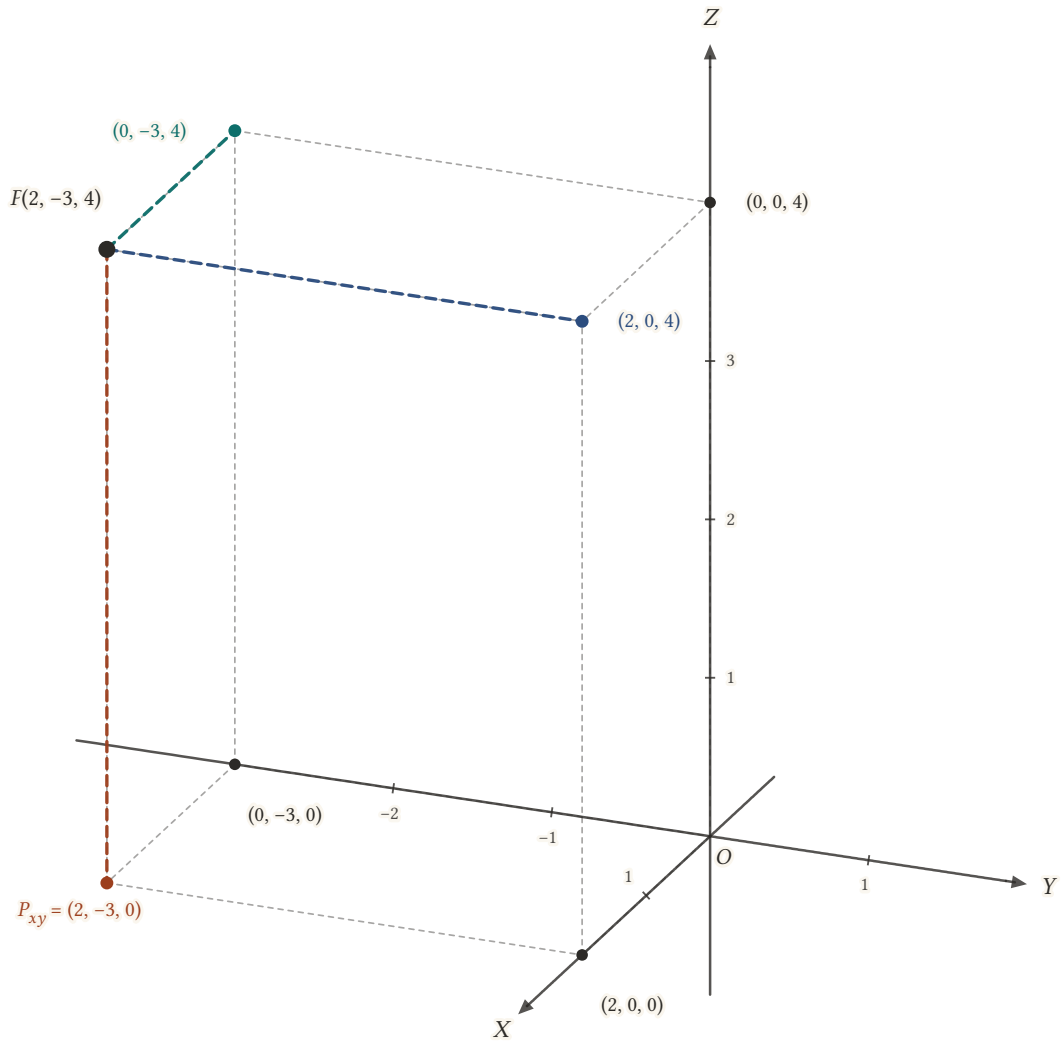
Örnek 6.1 (Bir noktadan düzlemlere ve eksenlere inilen dikmeler). $P(2, -3, 4)$ noktasını bir dik koordinat sisteminde gösteriniz ve P'den koordinat düzlemlerine ve koordinat eksenlerine inilen dikmelerin ayaklarını bulunuz.

Çözüm.
Noktayı yerleştirmek için kuruluşu adım adım izleyelim. Apsis 2 olduğundan X-ekseninde 2'ye, ordinat -3 olduğundan Y-ekseninin negatif kısmında -3'e gideriz. XY-düzleminde bu iki noktadan eksenlere dik çizilen doğrular $P_{xy} = (2, -3, 0)$ noktasında kesişir. Kot 4 olduğundan P, P_{xy}'nin 4 birim yukarısındadır.
Dikme ayakları, yukarıdaki gözleme göre ilgili koordinatları sıfırlayarak bulunur:

- XY-düzlemine: $(2, -3, 0)$; YZ-düzlemine: $(0, -3, 4)$; XZ-düzlemine: $(2, 0, 4)$.
- X-eksenine: $(2, 0, 0)$; Y-eksenine: $(0, -3, 0)$; Z-eksenine: $(0, 0, 4)$.

Ayrıca apsis pozitif, ordinat negatif, kot pozitif olduğundan P noktası $(+, -, +)$ bölgesindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.5: $P(2, -3, 4)$ noktası ve kenarları eksenlere paralel prizma. Renkli kesikli çizgiler P'den XY-, YZ- ve XZ-düzlemlerine inilen dikmelerdir; eksenler üzerindeki üç nokta, eksenlere inilen dikmelerin ayaklarıdır.

■

Örnek 6.2 (İşaret koşuluyla verilen nokta kümesi). $\{(x, y, z) \mid xy < 0, z > 0\}$ kümesi hangi bölgelerden oluşur?

Çözüm.
$xy < 0$ olması, x ile y'nin sıfırdan farklı ve ters işaretli olması demektir: ya $x > 0$ ve $y < 0$, ya da $x < 0$ ve $y > 0$. Buna $z > 0$ koşulunu eklersek işaret üçlüsü ya $(+, -, +)$ ya da $(-, +, +)$ olur. Dolayısıyla küme, $(+, -, +)$ ve $(-, +, +)$ bölgelerinin birleşimidir. Koordinat düzlemleri üzerindeki noktalar kümeye girmez, çünkü onlarda x, y ya da z sıfırdır ve koşullardan biri bozulur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

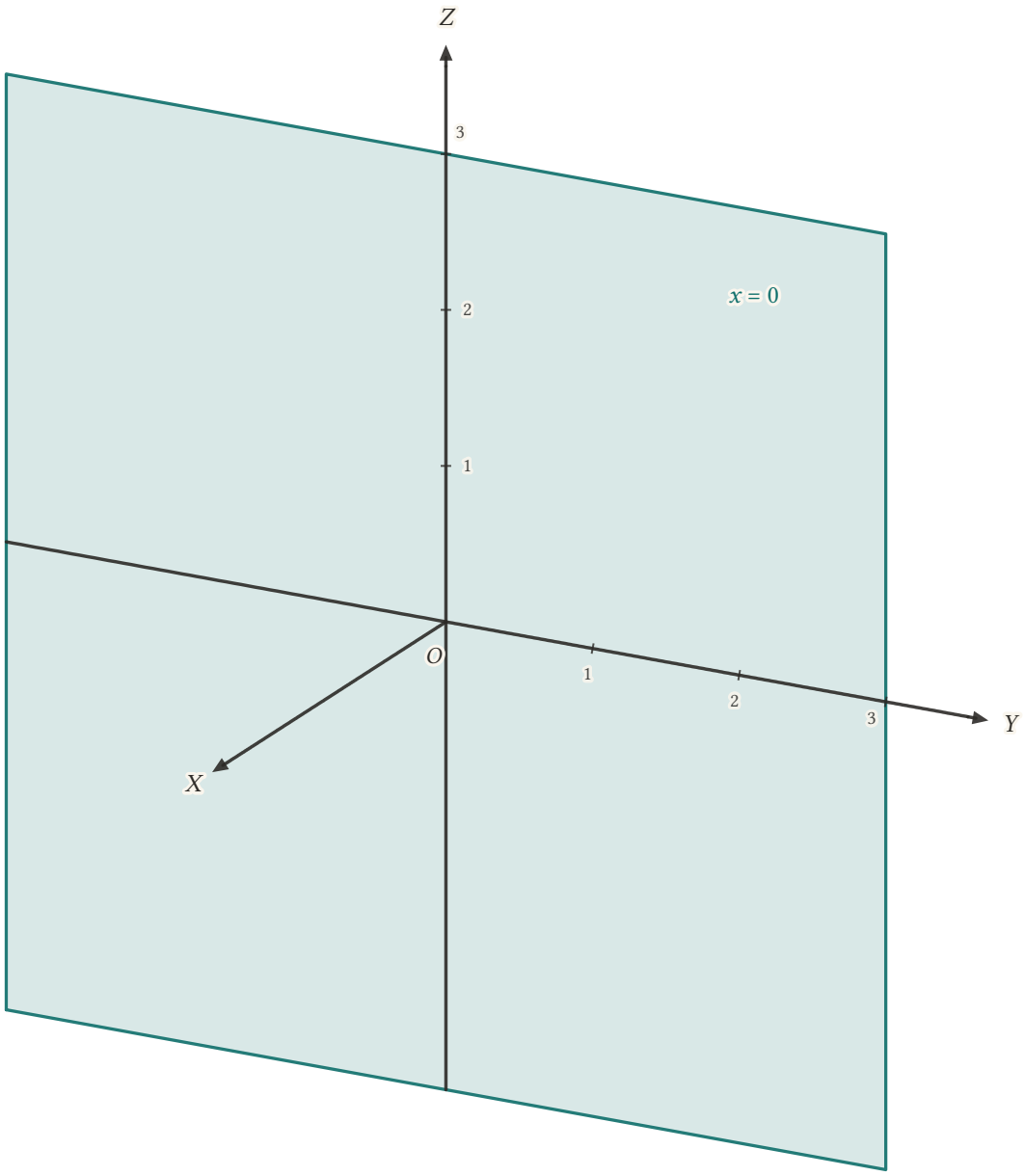
6.3 Denklemlerle verilen nokta kümeleri

Düzlemde olduğu gibi uzayda da koordinatlar üzerine konan koşullar nokta kümeleri belirler. Uzayda ilk bakışta şaşırtıcı olan şudur: tek bir denklem genellikle bir doğru değil bir **düzlem** ya da bir **yüzey** belirler, çünkü serbest kalan iki koordinat vardır. Aşağıdaki beş örnekte bunu görelim.

Örnek 6.3 (x = 0 koşulunun belirttiği küme). $\{(x, y, z) \mid x = 0, y, z \in \mathbb{R}\}$ kümesini bir dik koordinat sistemi çizerek açıklayınız.

> **Çözüm.**
> Kümenin elemanları apsisi sıfır olan noktalardır:
>
> $$\{(x, y, z) \mid x = 0, y, z \in \mathbb{R}\} = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$
>
> Ordinat ve kot tamamen serbesttir, yalnız apsis sıfıra sabitlenmiştir. Apsisi sıfır olan noktalar tam olarak Y- ve Z-eksenlerinin gerdiği düzlemin noktalarıdır. Dolayısıyla bu küme YZ-koordinat düzlemidir; uzayda $x = 0$ denklemi bu düzlemi belirtir. Düzlem sınırsız olduğundan şekilde yalnız bir parçası gösterilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



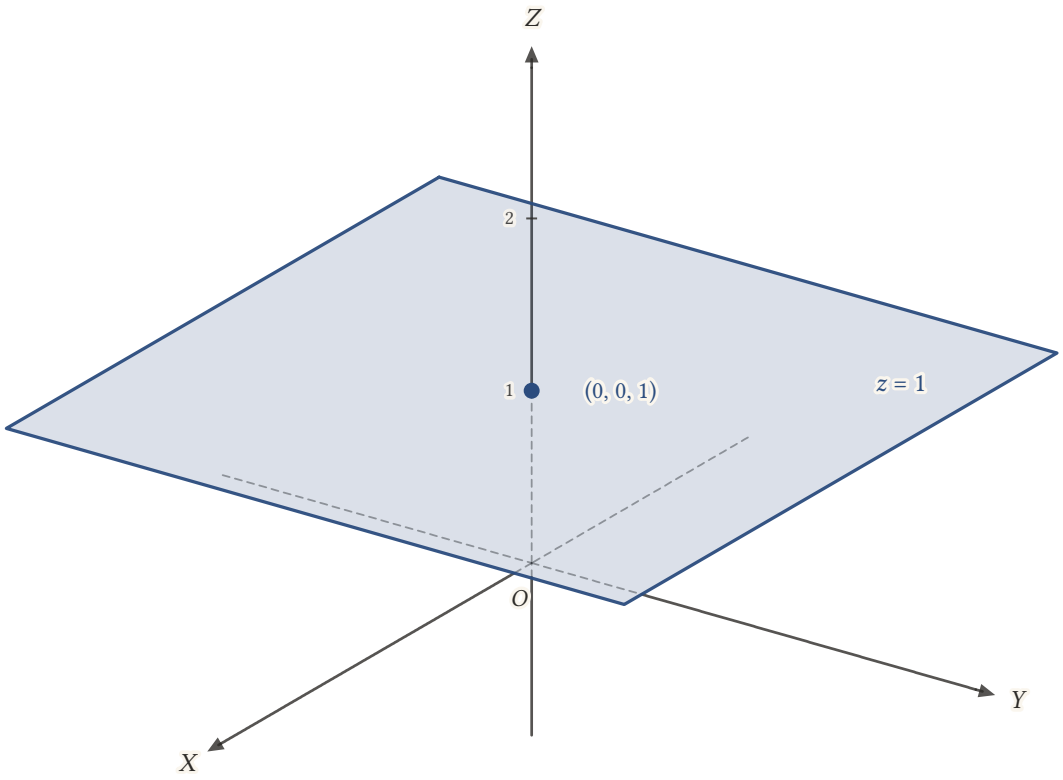
Şekil 6.6: $x = 0$ denklemini sağlayan noktalar YZ-koordinat düzlemini oluşturur; düzlemin $-3 \le y \le 3$, $-3 \le z \le 3$ karesiyle sınırlı parçası çizilmiştir. Pozitif X-ekseni düzlemden okuyucuya doğru çıkar.

■

Örnek 6.4 (Kotu 1 olan noktalar). $\{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ kümesini bir dik koordinat sistemi çizerek açıklayınız.

Çözüm.
Kümenin elemanları, apsisi ve ordinatı serbest, kotu ise 1 olan noktalardır; yani uzayda $z = 1$ denklemini sağlayan noktalardır. Bu noktaların hepsi XY-düzleminin 1 birim yukarısındadır. Dolayısıyla küme, $(0, 0, 1)$ noktasından geçen ve XY-koordinat düzlemine paralel olan düzlemdir. Şekilde bu düzlemin bir parçası gösterilmiştir.

 CC BY-NC-SA 4.0



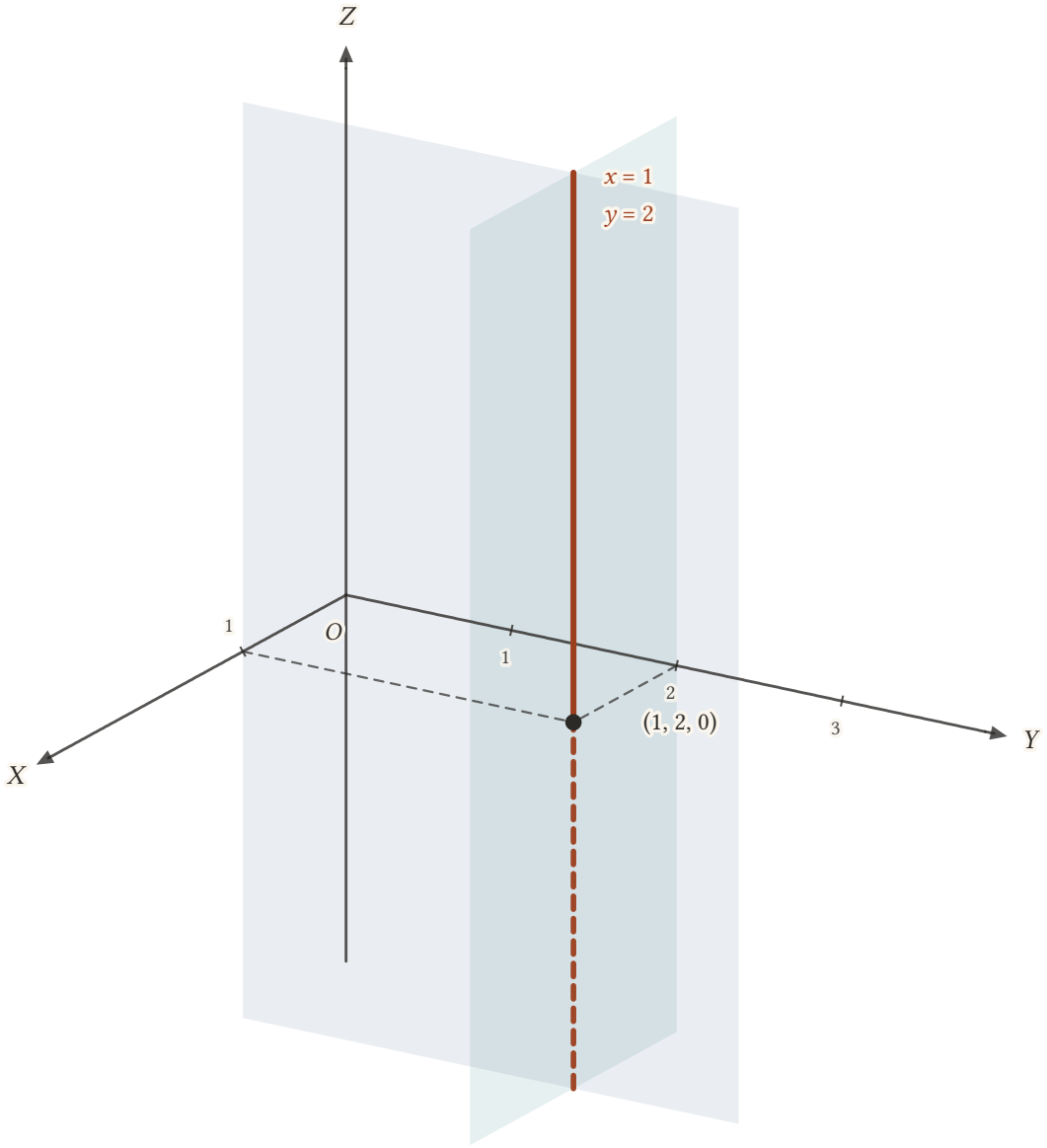
Şekil 6.7: $z = 1$ düzlemi: XY-düzleminin 1 birim yukarısında ve ona paralel. Z-ekseni düzlemi $(0, 0, 1)$ noktasında deler; düzlemin arkasında kalan eksen parçaları kesikli ve soluktur.

■

Örnek 6.5 (Apsisi 1, ordinatı 2 olan noktalar). $\{(x, y, z) \mid x = 1, y = 2, z \in \mathbb{R}\}$ kümesini bir dik koordinat sistemi çizerek açıklayınız.

Çözüm.
Bu kez iki koordinat sabittir, yalnız kot serbesttir. Küme, $x = 1$ düzlemi ile $y = 2$ düzleminin ortak noktalarından oluşur; bu iki düzlem paralel olmadığından (biri YZ-, öteki XZ-düzlemine paraleldir) ortak noktaları bir doğrudur. Kot 0 alınınca $(1, 2, 0)$ noktası elde edilir, kot değiştikçe nokta bu noktanın tam üstünde ya da altında yer değiştirir. Dolayısıyla küme, XY-düzlemindeki $(1, 2, 0)$ noktasından geçen ve Z-eksenine paralel olan doğrudur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.8: $x = 1$, $y = 2$ koşullarını sağlayan noktalar, $(1, 2, 0)$ noktasından geçen ve Z-eksenine paralel olan doğruyu oluşturur. Soluk mavi ve yeşil parçalar $x = 1$ ve $y = 2$ düzlemleridir; doğru bu iki düzlemin kesişimidir. Doğrunun XY-düzleminin altındaki kısmı kesiklidir.

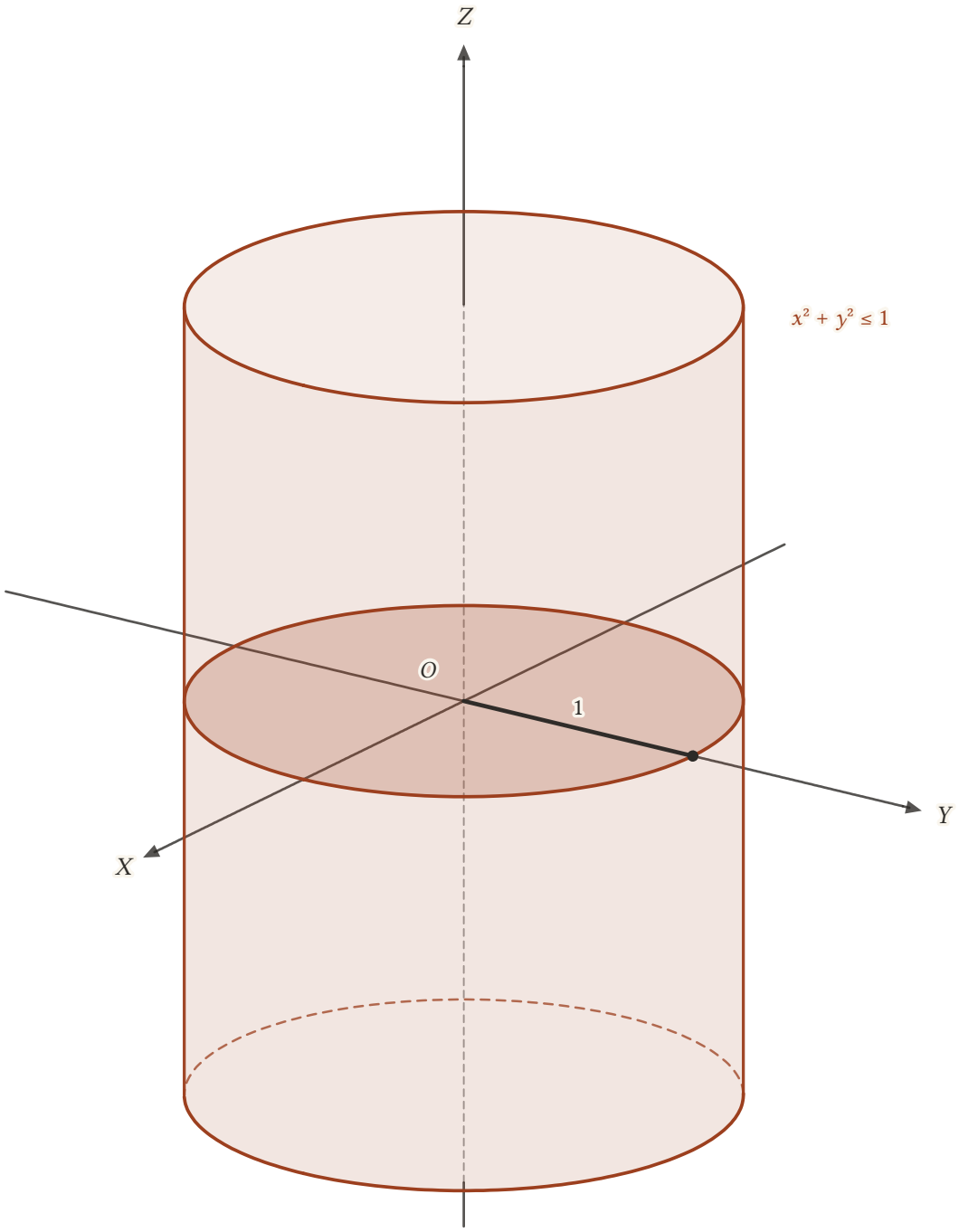
■

Örnek 6.6 (Dolu silindir). $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x, y, z \in \mathbb{R}\}$ kümesini bir dik koordinat sistemi çizerek açıklayınız.

Çözüm.
Koşul kotu hiç içermediği için z serbesttir; koşul yalnız (x, y) ikilisini kısıtlar. Önce XY-düzlemine bakalım: $z = 0$ alındığında $x^2 + y^2 \leq 1$ koşulu, merkezi O ve yarıçapı 1 olan çemberin üzerindeki ve içindeki noktaları, yani bir daireyi verir (bkz. Çember). Kot z ne olursa olsun koşul aynı kaldığından, bu daire her z yüksekliğinde tekrarlanır; başka bir deyişle daire Z-ekseni boyunca yukarı ve aşağı sınırsızca kaydırılır.
Dolayısıyla küme, simetri ekseni Z-ekseni olan ve yarıçapı 1 olan dik dairesel silindir yüzeyi ile bu silindirin iç noktalarından oluşur. $x^2 + y^2 = 1$ eşitliğini sağlayan noktalar silindirin yüzeyini, $x^2 +$

 CC BY-NC-SA 4.0

$y^2 < 1$ eşitsizliğini sağlayanlar içini oluşturur. Silindir sınırsız olduğundan şekilde $-1{,}5 \leq z \leq 1{,}5$ arasındaki parçası gösterilmiştir.



Şekil 6.9: $x^2 + y^2 \leq 1$ kümesi: Z-ekseni çevresindeki, yarıçapı 1 olan dolu silindir ($-1{,}5 \leq z \leq 1{,}5$ parçası). Koyu taralı daire XY-düzlemindeki kesittir; aynı daire her yükseklikte tekrarlanır.

■

Örnek 6.7 (Birim küp). Aşağıdaki kümeyi bir dik koordinat sistemi çizerek açıklayınız:

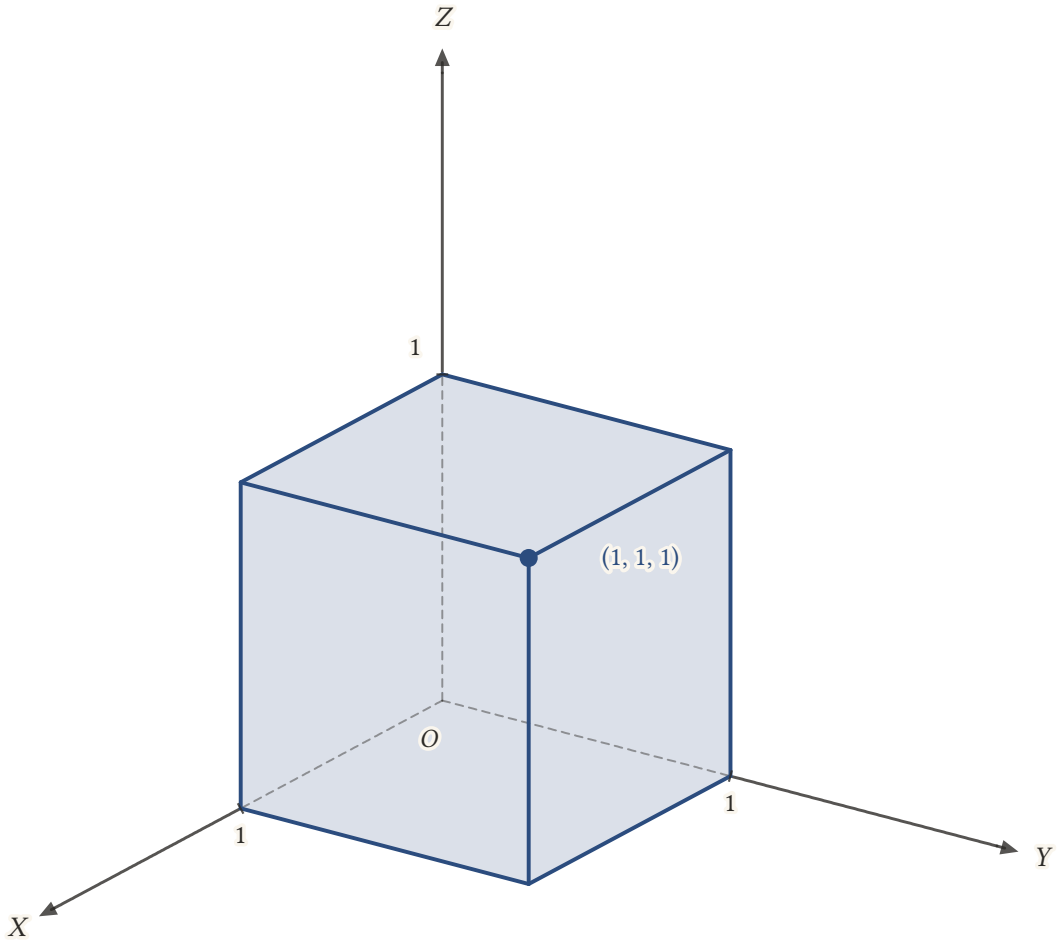
$$\{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Üç koordinat da birbirinden bağımsız olarak $[0,1]$ aralığında değişir. $0 \le x \le 1$ koşulu, $x = 0$ (YZ-düzlemi) ile $x = 1$ düzlemi arasındaki dilimi verir; y ve z için olan koşullar da benzer iki dilim verir. Küme bu üç dilimin kesişimidir: her ayrıtı 1 birim olan ve bütün noktaları birinci bölgede ya da onun sınırında bulunan bir küp.
Küpün sekiz köşesi, koordinatların her birine 0 ya da 1 değeri verilerek elde edilir:

$$(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1),$$
$$(1,1,0),\ (1,0,1),\ (0,1,1),\ (1,1,1).$$

Küpün O'da buluşan üç ayrıtı koordinat eksenleri üzerindedir ve üç yüzü koordinat düzlemlerinin üzerindedir. Dolayısıyla küme, bu küpün yüzeyindeki ve içindeki noktaların hepsinden oluşur.



Şekil 6.10: Birim küp: $0 \le x, y, z \le 1$. O'da buluşan üç ayrıtı eksenler üzerindedir ve arkada kaldıkları için kesiklidir; görünen üç yüz $x = 1$, $y = 1$ ve $z = 1$ yüzleridir.

■

6.4 İki nokta arasındaki uzaklık

Düzlemde iki nokta arasındaki uzaklığı, iki noktayı birleştiren doğru parçasını hipotenüs kabul eden bir dik üçgende Pisagor teoremi kullanarak bulmuştuk (bkz. Dik Koordinatlar ve Uzaklık). Uzayda aynı fikri iki kez uygulayacağız: önce yatay bir düzlemde, sonra dikey doğrultuda.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 6.1 (Uzayda iki nokta arasındaki uzaklık). *Uzayda bir dik koordinat sisteminde $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ noktaları arasındaki uzaklık*

$$| P_1P_2 | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

formülüyle verilir.

İspat.
Yardımcı olarak $Q = (x_2, y_2, z_1)$ noktasını alalım: Q'nun apsisi ve ordinatı P_2'ninki, kotu ise P_1'inkidir. Birinci adım: $| P_1Q |$ uzunluğu. *P_1 ile Q'nun XY-düzlemine inilen dikmelerinin ayakları $P_1' = (x_1, y_1, 0)$ ve $Q' = (x_2, y_2, 0)$ noktalarıdır. Bu iki nokta XY-düzlemindedir ve bu düzlemde koordinatları (x_1, y_1) ile (x_2, y_2)'dir; düzlemdeki uzaklık formülüne göre*

$$| P_1'Q' | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

P_1P_1' ve QQ' doğru parçaları XY-düzlemine diktir, dolayısıyla birbirine paraleldir; ikisinin de uzunluğu $| z_1 |$'dir ve ikisi de düzlemin aynı tarafındadır (çünkü P_1 ile Q'nun kotu aynıdır). O hâlde $P_1QQ'P_1'$ dörtgeni bir dikdörtgendir ($z_1 = 0$ ise $P_1 = P_1'$, $Q = Q'$ olur ve söylenecek bir şey kalmaz). Dikdörtgenin karşılıklı kenarları eşit olduğundan

$$| P_1Q | = | P_1'Q' | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

İkinci adım: $| QP_2 |$ uzunluğu. *Q ile P_2'nin apsisleri ve ordinatları aynıdır; ikisi de Q' noktasından geçip XY-düzlemine dik olan doğrunun, yani Z-eksenine paralel olan doğrunun üzerindedir. Bu doğru üzerinde noktaların yerini yalnız kot belirler ve birim, Z-eksenindeki birimle aynıdır. Dolayısıyla*

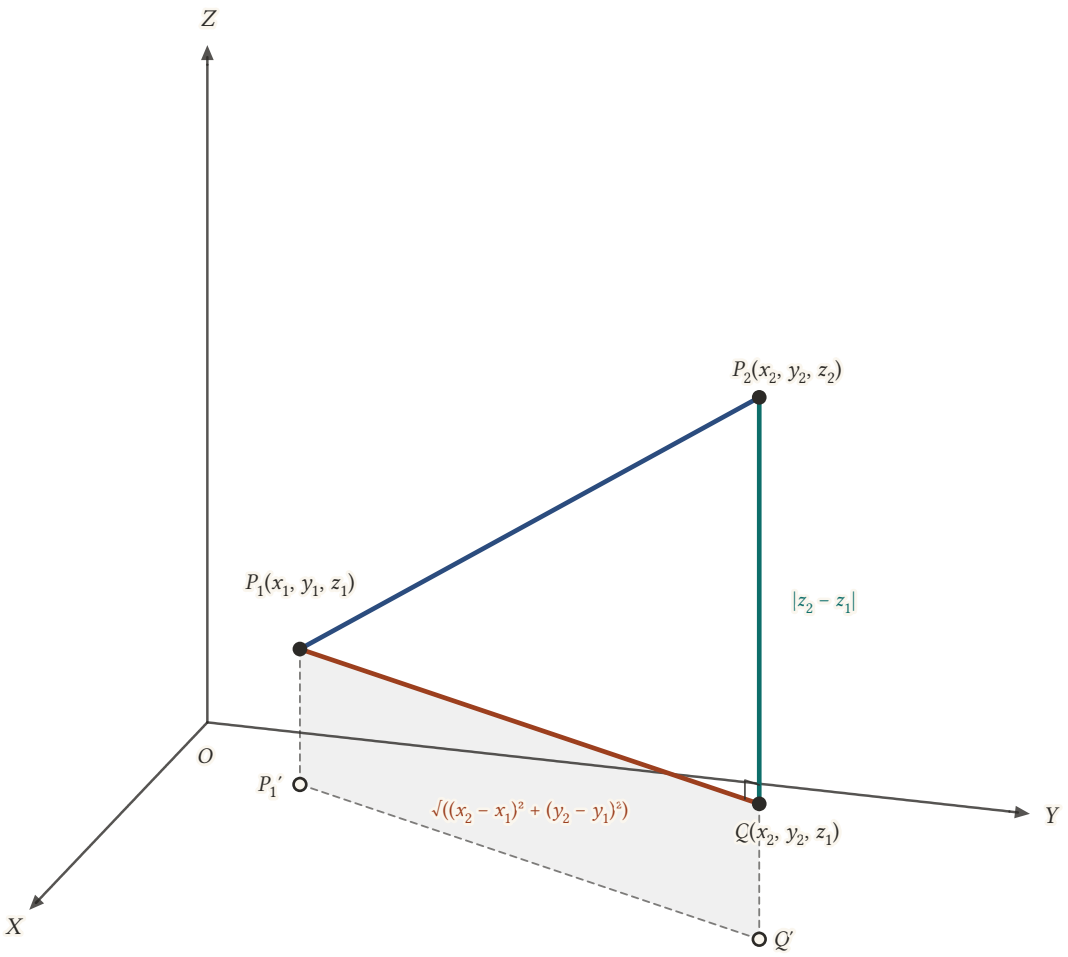
$$| QP_2 | = | z_2 - z_1 | .$$

Üçüncü adım: dik üçgen. *P_1Q doğru parçası, $z = z_1$ yatay düzleminde yatar; QP_2 doğrusu ise XY-düzlemine, dolayısıyla ona paralel olan $z = z_1$ düzlemine diktir. Bir düzleme dik olan doğru, o düzlemde kendi ayağından geçen her doğruya diktir; bu yüzden $P_1Q \perp QP_2$ olur ve P_1QP_2 üçgeni Q köşesinde diktir. Pisagor teoremiyle*

$$\begin{aligned} | P_1P_2 |^2 &= | P_1Q |^2 + | QP_2 |^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \end{aligned}$$

bulunur. Üçgenin bozulduğu durumlarda da eşitlik geçerlidir: $P_1 = Q$ ise ($x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$) $| P_1P_2 | = | QP_2 | = | z_2 - z_1 |$ olur; $Q = P_2$ ise ($z_1 = z_2$) $| P_1P_2 | = | P_1Q |$ olur ve her iki durumda da formüldeki fazladan terim sıfırdır. Uzunluk negatif olmadığından her iki yanın karekökünü alarak istenen formüle ulaşırız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.11: Uzaklık formülünün ispatı: Q *yardımcı noktasıyla* P_1QP_2 *üçgeni* Q*'da diktir. Yatay kenar* P_1Q *(turuncu),* XY*-düzlemindeki* $P_1'Q'$ *ile aynı uzunluktadır; düşey kenar* QP_2 *(yeşil) kotların farkıdır; hipotenüs* P_1P_2 *(mavi) aranan uzaklıktır.*

■

Formül düzlemdekinin doğal uzantısıdır: köklü ifadenin içine üçüncü koordinatların farkının karesi eklenir. Özel olarak $P_1 = O$ alınırsa, $P(x, y, z)$ noktasının başlangıç noktasına uzaklığı

$$| OP | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

olur.

Örnek 6.8 (İki nokta arasındaki uzaklığın hesabı). $P_1(1, 2, 3)$ ve $P_2(3, -1, 9)$ noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
Koordinat farkları $x_2 - x_1 = 3 - 1 = 2$, $y_2 - y_1 = -1 - 2 = -3$ ve $z_2 - z_1 = 9 - 3 = 6$'dır. Teorem 6.1 ile

$$| P_1P_2 | = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

bulunur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

6.5 Küre

Düzlemde sabit bir noktaya sabit uzaklıktaki noktalar bir çember oluşturuyordu. Aynı soruyu uzayda sorduğumuzda uzaklık formülü bizi doğrudan küreye götürür.

Örnek 6.9 (Bir noktaya sabit uzaklıktaki noktalar). Uzayda bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasına uzaklığı sabit ve $r \in \mathbb{R}^+$ birim olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

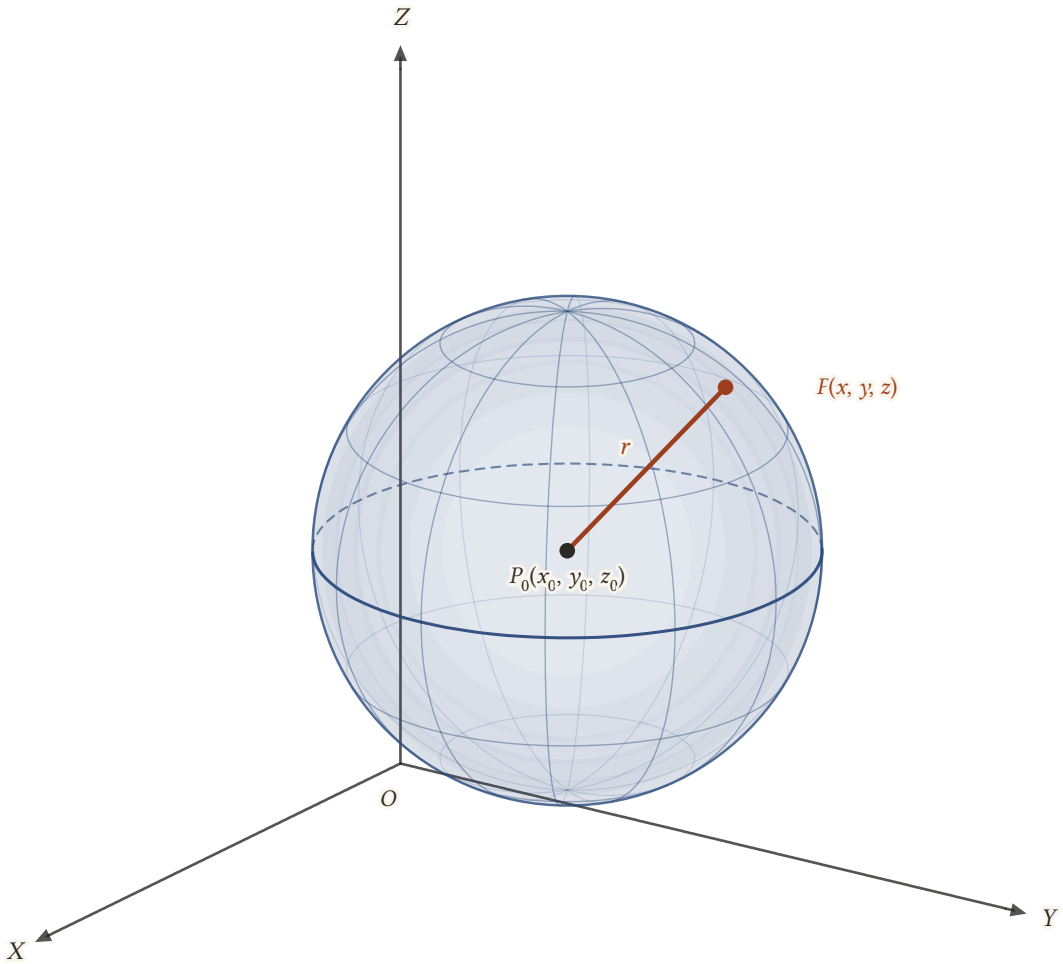
Çözüm.
Aranan kümeye ait rastgele bir nokta $P(x, y, z)$ olsun. Teorem 6.1 ile

$$\begin{aligned} \mid P_0P \mid = r &\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = r \\ &\Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2 \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci denklik iki yanın karesi alınarak elde edilir ve iki yönde de geçerlidir, çünkü hem kök hem r negatif olmayan sayılardır. Buna göre aranan geometrik yer

$$\{P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2\}$$

kümesidir. Bu küme, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ merkezli ve r yarıçaplı küre yüzeyidir.



Şekil 6.12: P_0 noktasına uzaklığı r olan P noktaları, merkezi P_0 ve yarıçapı r olan küreyi oluşturur. Koyu çember kürenin ekvatorudur; arkada kalan yarısı kesiklidir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu geometrik yere bir ad verelim.

Tanım 6.6 (Küre). Uzayda sabit bir $M(a,b,c)$ noktasına uzaklığı sabit bir $r>0$ sayısına eşit olan noktaların kümesine **küre** (küre yüzeyi) denir. M noktasına kürenin **merkezi**, r sayısına kürenin **yarıçapı** denir. Merkezi $M(a,b,c)$ ve yarıçapı r olan kürenin denklemi

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

biçimindedir.

Yani bir nokta, merkeze uzaklığı tam olarak r ise küre üzerindedir; kürenin denklemi, bu uzaklığın karesinin r^2 olduğunu söyler. Çember denklemine üçüncü bir kare terim eklenmiş gibidir.

Örnek 6.10 (İkizkenar dik üçgen). Uzayda bir dik koordinat sisteminde $A(-2,5,8)$, $B(-6,7,4)$ ve $C(-3,4,4)$ noktalarının bir ikizkenar dik üçgenin köşeleri olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Üç kenarın uzunluğunun karesini Teorem 6.1 ile hesaplayalım:

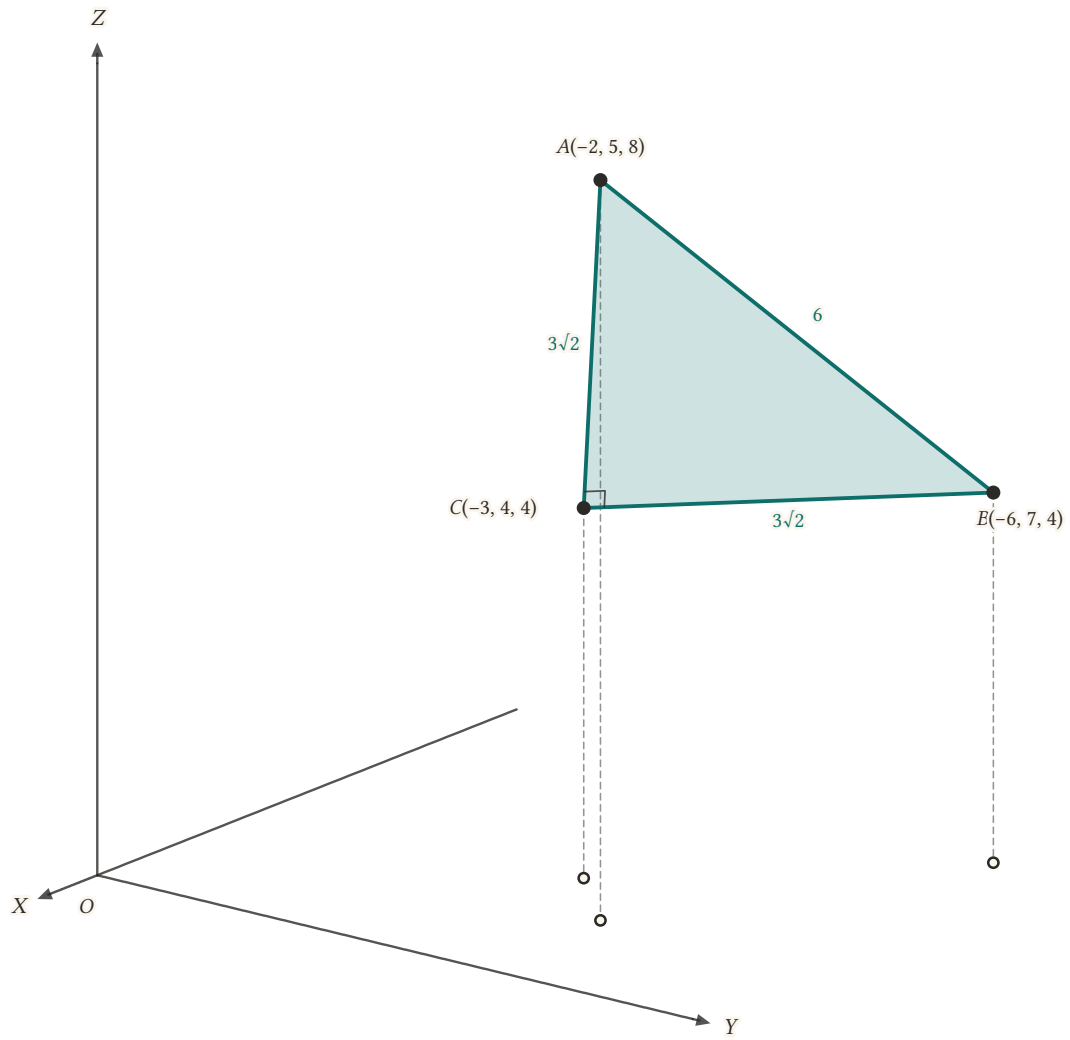
$$\begin{aligned}
|\,AB\,|^2 &= (-6-(-2))^2+(7-5)^2+(4-8)^2\\
&= 16+4+16=36,\\
|\,BC\,|^2 &= (-3-(-6))^2+(4-7)^2+(4-4)^2\\
&= 9+9+0=18,\\
|\,CA\,|^2 &= (-2-(-3))^2+(5-4)^2+(8-4)^2\\
&= 1+1+16=18.
\end{aligned}$$

Buradan $|\,AB\,|=6$ ve $|\,BC\,|=|\,CA\,|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ çıkar.
Önce üç noktanın bir üçgen belirttiğini, yani aynı doğru üzerinde olmadığını görelim. Üç nokta bir doğru üzerinde olsaydı, en uzun kenar öbür ikisinin toplamına eşit olurdu. Oysa $|\,BC\,|+|\,CA\,|=6\sqrt{2}\approx 8{,}49$ ve bu sayı $|\,AB\,|=6$'dan büyüktür. Demek ki A, B, C bir üçgenin köşeleridir.
Üç nokta her zaman bir düzlem üzerinde bulunduğundan bu üçgene düzlem geometrisini uygulayabiliriz.

$$|\,BC\,|^2+|\,CA\,|^2=18+18=36=|\,AB\,|^2$$

olduğundan Pisagor teoreminin karşıtına göre üçgen, AB kenarının karşısındaki C köşesinde diktir. Ayrıca $|\,BC\,|=|\,CA\,|$ olduğundan dik kenarlar eşittir. Dolayısıyla ABC bir ikizkenar dik üçgendir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.13: $A(-2,5,8)$, $B(-6,7,4)$, $C(-3,4,4)$ üçgeni: $|BC| = |CA| = 3\sqrt{2}$ ve $|AB| = 6$ olduğundan C köşesinde dik ikizkenar üçgendir. Kesikli çizgiler köşelerden XY-düzlemine inen dikmelerdir.

■

Örnek 6.11 (Aynı küre üzerindeki dört nokta). $A(3,2,2)$, $B(-1,1,3)$, $C(0,5,6)$ ve $D(2,1,2)$ noktalarının merkezi $M(1,3,4)$ olan bir kürenin üzerinde olduğunu gösteriniz ve bu kürenin yarıçapını bulunuz.

Çözüm.
Dört noktanın $M(1,3,4)$ merkezine uzaklıkları eşitse, bu noktalar merkezi M olan ve yarıçapı bu ortak uzaklık olan kürenin üzerindedir. Uzaklıkları Teorem 6.1 ile hesaplayalım:

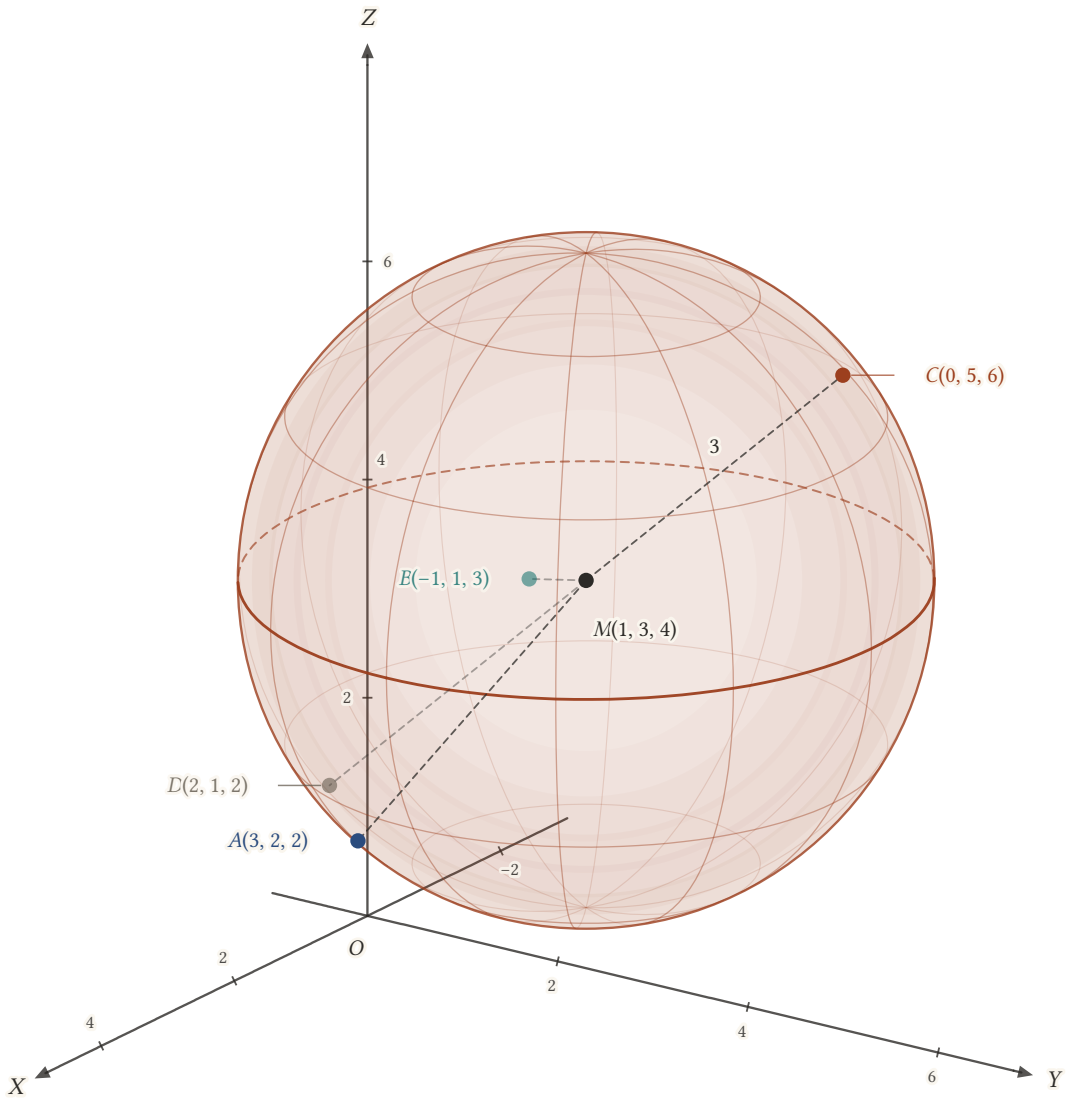
$$
\begin{aligned}
|\,AM\,| &= \sqrt{(1-3)^2+(3-2)^2+(4-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3,\\
|\,BM\,| &= \sqrt{(1-(-1))^2+(3-1)^2+(4-3)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3,\\
|\,CM\,| &= \sqrt{(1-0)^2+(3-5)^2+(4-6)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3,\\
|\,DM\,| &= \sqrt{(1-2)^2+(3-1)^2+(4-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3.
\end{aligned}
$$

$|\,AM\,| = |\,BM\,| = |\,CM\,| = |\,DM\,| = 3$ olduğundan A, B, C ve D noktaları, merkezi $M(1,3,4)$ ve yarıçapı $r = 3$ olan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=9$$

küresinin üzerindedir.



Şekil 6.14: A, B, C, D noktalarının her biri $M(1,3,4)$ merkezine 3 birim uzaklıktadır; dördü de yarıçapı 3 olan küre üzerindedir. Kürenin arka yüzündeki noktalar (B ve D) daha soluk çizilmiştir.

■

Kürenin denklemindeki kareleri açarsak, çemberde olduğu gibi, katsayıları daha az belirgin bir biçim elde ederiz. Tersine, böyle açılmış bir denklem verildiğinde merkezi ve yarıçapı bulmak için kareleri yeniden tamamlarız.

Önerme 6.1 (Genel biçimdeki küre denklemi). *D, E, F, G reel sayılar olmak üzere*

$$x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$$

denklemini sağlayan noktaların kümesi, $k=D^2+E^2+F^2-4G$ olmak üzere,

- *$k>0$ ise merkezi $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2},-\frac{F}{2}\right)$ ve yarıçapı $r=\frac{\sqrt{k}}{2}$ olan küredir;*
- *$k=0$ ise yalnız $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2},-\frac{F}{2}\right)$ noktasından oluşur;*

 CC BY-NC-SA 4.0

- *$k < 0$ ise boş kümedir.*

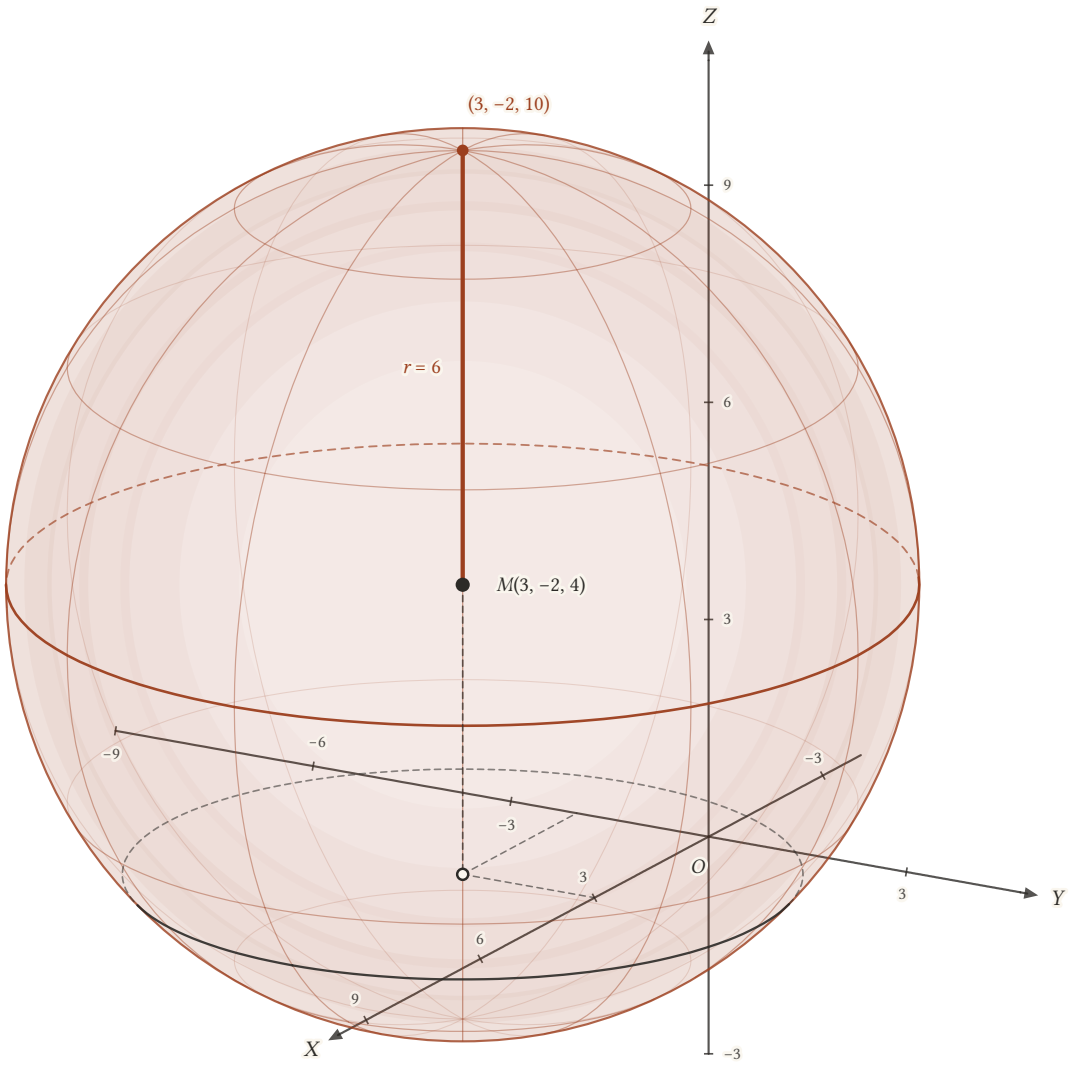
> ***İspat.***
> *Her değişken için kareyi tamamlayalım. Örneğin x için*
>
> $$x^2 + Dx = \left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \frac{D^2}{4}$$
>
> *ve y, z için de benzer eşitlikler vardır. Bunları denklemde yerine yazıp sabitleri sağ tarafa toplarsak denklem*
>
> $$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{F}{2}\right)^2 = \frac{k}{4}$$
>
> *biçimini alır. Sol taraf, $P(x, y, z)$ noktasının $N\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}, -\frac{F}{2}\right)$ noktasına uzaklığının karesi, yani $\mid NP \mid^2$'dir.*
>
> - *$k > 0$ ise denklem $\mid NP \mid^2 = \left(\frac{\sqrt{k}}{2}\right)^2$, yani $\mid NP \mid = \frac{\sqrt{k}}{2}$ demektir; Tanım 6.6 gereği bu, merkezi N ve yarıçapı $\frac{\sqrt{k}}{2}$ olan küredir.*
> - *$k = 0$ ise $\mid NP \mid = 0$, yani $P = N$ olmalıdır; küme tek noktadır.*
> - *$k < 0$ ise negatif olmayan $\mid NP \mid^2$ sayısı negatif bir sayıya eşit olamaz; denklemi sağlayan nokta yoktur.*
>
> ■

Kuralı ezberlemek yerine her örnekte kareleri doğrudan tamamlamak çoğu zaman daha kolaydır; aşağıdaki iki örnekte böyle yapacağız.

Örnek 6.12 (Denklemi verilen kürenin merkezi ve yarıçapı). Denklemi $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z = 7$ olan kürenin merkezinin koordinatlarını ve yarıçapını bulunuz.

> **Çözüm.**
> Terimleri değişkenlere göre gruplayalım ve her grubu tam kareye tamamlayalım. $x^2 - 6x$ ifadesine $\left(\frac{-6}{2}\right)^2 = 9$, $y^2 + 4y$ ifadesine $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$, $z^2 - 8z$ ifadesine $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$ ekleriz; denklem bozulmasın diye aynı sayıları sağ tarafa da ekleriz:
>
> $$\begin{aligned}(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 8z + 16)\\ = 7 + 9 + 4 + 16 = 36.\end{aligned}$$
>
> Parantezler tam kare olduğundan denklem
>
> $$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 36 = 6^2$$
>
> biçiminde yazılır. Tanım 6.6 ile karşılaştırırsak kürenin merkezi $(3, -2, 4)$ ve yarıçapı $r = 6$'dır.
> Aynı sonuç Önerme 6.1 ile de bulunur: $D = -6$, $E = 4$, $F = -8$, $G = -7$ için $k = 36 + 16 + 64 + 28 = 144$ ve $r = \frac{\sqrt{144}}{2} = 6$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.15: Merkezi $M(3, -2, 4)$ ve yarıçapı 6 olan küre. Kürenin en üst noktası $(3, -2, 10)$'dur; küre $z = -2$'ye kadar indiğinden XY-düzlemini, merkezi $(3, -2, 0)$ ve yarıçapı $\sqrt{20}$ olan çember boyunca keser (siyah çember).

■

Örnek 6.13 (Küre belirtmeyen bir denklem). Aşağıdaki denklemi sağlayan noktaların kümesini bulunuz:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z + 20 = 0.$$

Çözüm.
Kareleri tamamlayalım: $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$ ve $z^2 + 6z = (z+3)^2 - 9$. Bunları denklemde yerine yazarsak

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 - 1 - 4 - 9 + 20 = 0$$

yani

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = -6$$

 CC BY-NC-SA 4.0

elde edilir. Sol taraf üç karenin toplamı olduğundan hiçbir zaman negatif olamaz; sağ taraf ise -6'dır. Dolayısıyla denklemi sağlayan hiçbir nokta yoktur ve küme $\varnothing$'dir. Bu denklem, görünüşü küre denklemine benzese de bir küre belirtmez. Nitekim Önerme 6.1 ile de aynı sonuç çıkar: $D=-2$, $E=4$, $F=6$, $G=20$ için $k=4+16+36-80=-24<0$ olur.
■

6.6 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda uzaklık formülünü ve küre denklemini kullanacağız.

Alıştırma 6.1 (Uzaklıklar oranı sabit olan noktalar). $P_1(2,-3,4)$ noktasına uzaklığı, $P_2(-1,2,-2)$ noktasına uzaklığının 2 katı olan noktaların geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm.
$P(x,y,z)$, istenen geometrik yere ait bir nokta olsun. Koşul $\mid PP_1 \mid = 2 \mid PP_2 \mid$'dir. İki taraf da negatif olmadığından bu eşitlik, karelerinin eşitliğine denktir: $\mid PP_1 \mid^2 = 4 \mid PP_2 \mid^2$. Teorem 6.1 ile

$$\begin{aligned}(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2 \\ = 4\left[\,(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2\,\right]\end{aligned}$$

yazılır. Şimdi iki tarafı ayrı ayrı açalım. Sol taraf

$$\begin{aligned}(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)+(z^2-8z+16) \\ = x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+29,\end{aligned}$$

sağ taraf ise

$$\begin{aligned}4\left[\,(x^2+2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2+4z+4)\,\right] \\ = 4x^2+4y^2+4z^2+8x-16y+16z+36\end{aligned}$$

olur. Bütün terimleri sağ tarafa toplarsak

$$3x^2+3y^2+3z^2+12x-22y+24z+7=0$$

ve 3'e bölersek

$$x^2+y^2+z^2+4x-\frac{22}{3}y+8z+\frac{7}{3}=0$$

elde edilir. Kareleri tamamlayalım:

$$\begin{aligned}x^2+4x &= (x+2)^2-4,\\ y^2-\frac{22}{3}y &= \left(y-\frac{11}{3}\right)^2-\frac{121}{9},\\ z^2+8z &= (z+4)^2-16.\end{aligned}$$

Bunları yerine yazıp sabitleri sağ tarafa geçirirsek

$$(x+2)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+(z+4)^2=4+\frac{121}{9}+16-\frac{7}{3}$$

bulunur. Sağ tarafı paydası 9 olacak biçimde toplarsak

$$\frac{36+121+144-21}{9}=\frac{280}{9}$$

olur. Dolayısıyla aranan geometrik yerin denklemi

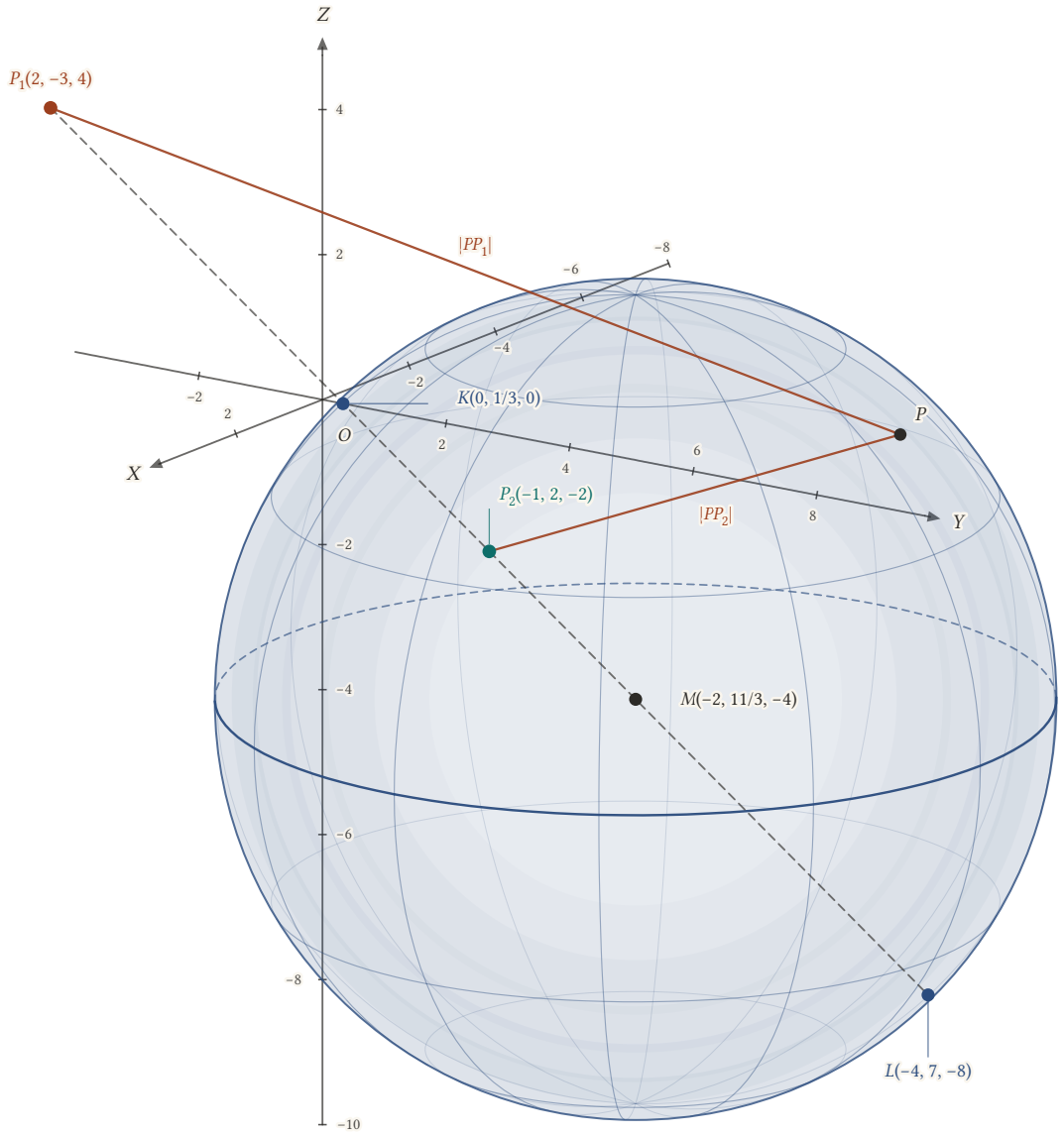
$$(x+2)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2+(z+4)^2=\frac{280}{9}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dir. Tanım 6.6 gereği bu, merkezi $M\left(-2, \frac{11}{3}, -4\right)$ ve yarıçapı

$$r = \sqrt{\frac{280}{9}} = \frac{\sqrt{4 \cdot 70}}{3} = \frac{2\sqrt{70}}{3} \approx 5{,}58$$

olan bir küredir.
Sonucu bir noktayla denetleyelim. P_1P_2 doğru parçası üzerindeki $K\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$ noktası için $\mid KP_1 \mid^2 = 4 + \frac{100}{9} + 16 = \frac{280}{9}$ ve $\mid KP_2 \mid^2 = 1 + \frac{25}{9} + 4 = \frac{70}{9}$ olduğundan $\mid KP_1 \mid = 2 \mid KP_2 \mid$ sağlanır. K'yi küre denkleminde yerine yazarsak $4 + \frac{100}{9} + 16 = \frac{280}{9}$ bulunur; yani K gerçekten kürenin üzerindedir.



Şekil 6.16: P_1'e uzaklığı P_2'ye uzaklığının 2 katı olan noktalar, merkezi $M(-2, 11/3, -4)$ ve yarıçapı $2\sqrt{70}/3 \approx 5{,}58$ olan küreyi oluşturur. P_1P_2 doğrusu M'den geçer ve küreyi K ile L noktalarında keser; küre üzerindeki her P için $|PP_1| = 2|PP_2|$.

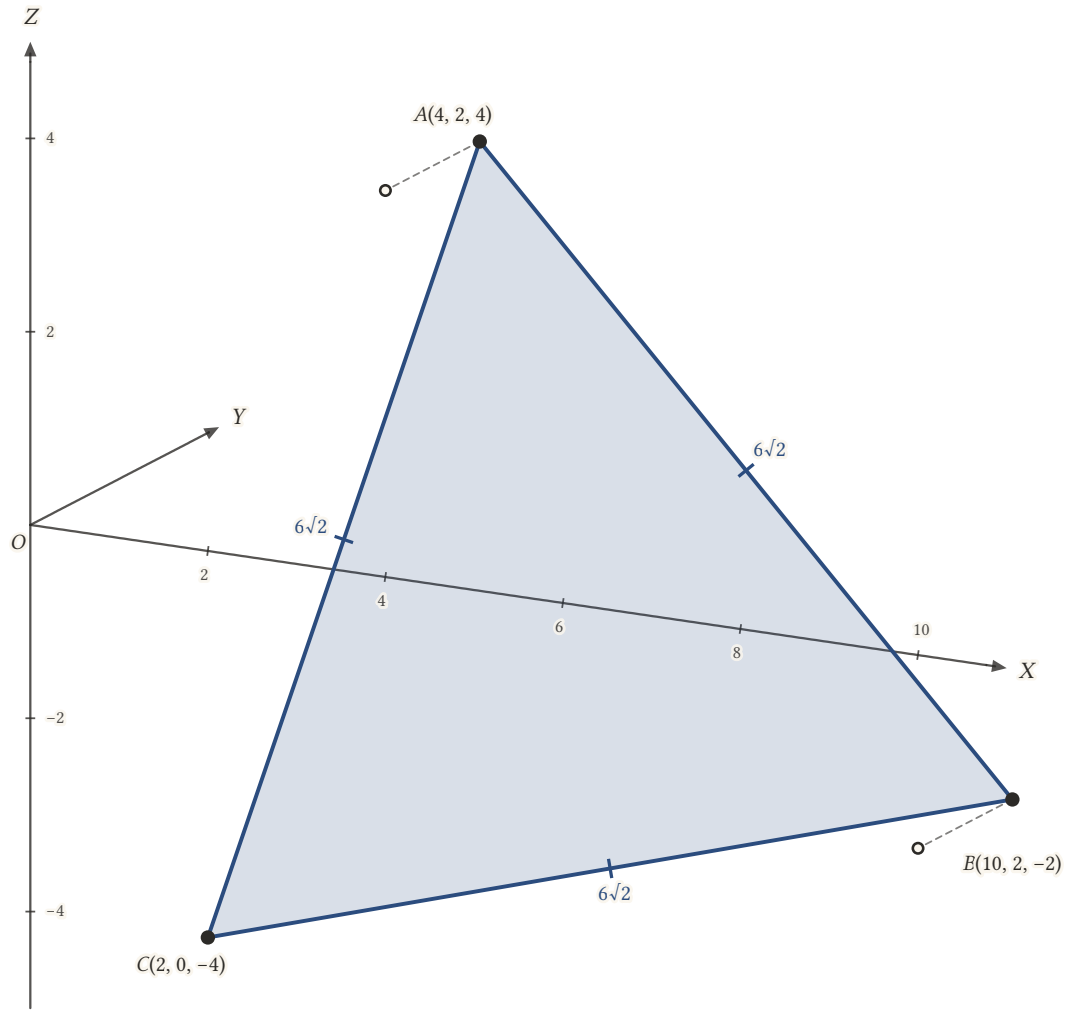
■

Alıştırma 6.2 (Eşkenar üçgen). $A(4, 2, 4)$, $B(10, 2, -2)$ ve $C(2, 0, -4)$ noktalarının bir eşkenar üçgenin köşeleri olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Kenar uzunluklarının karelerini Teorem 6.1 ile hesaplayalım:

$$\begin{aligned} |\,AB\,|^2 &= (10-4)^2+(2-2)^2+(-2-4)^2 \\ &= 36+0+36 = 72, \\ |\,BC\,|^2 &= (2-10)^2+(0-2)^2+(-4-(-2))^2 \\ &= 64+4+4 = 72, \\ |\,CA\,|^2 &= (4-2)^2+(2-0)^2+(4-(-4))^2 \\ &= 4+4+64 = 72. \end{aligned}$$

Buna göre $|\,AB\,| = |\,BC\,| = |\,CA\,| = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$'dir. Üç nokta bir doğru üzerinde değildir, çünkü öyle olsaydı en uzun kenar öbür ikisinin toplamına eşit olurdu; oysa $6\sqrt{2}+6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \neq 6\sqrt{2}$. Dolayısıyla A, B, C bir üçgenin köşeleridir ve üç kenarı eşit olduğundan bu üçgen eşkenardır.



Şekil 6.17: $A(4,\,2,\,4)$, $B(10,\,2,\,-2)$, $C(2,\,0,\,-4)$ üçgeninin üç kenarı da $6\sqrt{2}$ uzunluğundadır; kenarlardaki çentikler bu eşitliği gösterir. Kesikli çizgiler A ve B'den XZ-düzlemine inen dikmelerdir (C bu düzlemdedir).

■

Alıştırma 6.3 (Dikdörtgen). $A(2,-1,0)$, $B(0,-1,-1)$, $C(1,1,-3)$ ve $D(3,1,-2)$ noktalarının bir dikdörtgenin köşeleri olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Uzayda yalnız kenar uzunluklarına bakmak yetmez: dört nokta aynı düzlemde olmayabilir ve o zaman ortada bir dörtgen yoktur. Bu yüzden önce dört noktanın bir düzlemde bir paralelkenar oluşturduğunu, sonra bir açısının dik olduğunu göstereceğiz.
Kenarlar ve köşegenler. Teorem 6.1 ile

$$\begin{aligned} \mid AB \mid^2 &= (0-2)^2+(-1+1)^2+(-1-0)^2 = 5,\\ \mid BC \mid^2 &= (1-0)^2+(1+1)^2+(-3+1)^2 = 9,\\ \mid CD \mid^2 &= (3-1)^2+(1-1)^2+(-2+3)^2 = 5,\\ \mid DA \mid^2 &= (2-3)^2+(-1-1)^2+(0+2)^2 = 9 \end{aligned}$$

ve köşegenler için

$$\begin{aligned} \mid AC \mid^2 &= (1-2)^2+(1+1)^2+(-3-0)^2 = 14,\\ \mid BD \mid^2 &= (3-0)^2+(1+1)^2+(-2+1)^2 = 14 \end{aligned}$$

bulunur. Yani $\mid AB \mid = \mid CD \mid = \sqrt{5}$, $\mid BC \mid = \mid DA \mid = 3$ ve $\mid AC \mid = \mid BD \mid = \sqrt{14}$'tür.
Köşegenlerin ortak orta noktası. $N\left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$ noktasını alalım. Bu noktanın dört köşeye uzaklıklarının kareleri

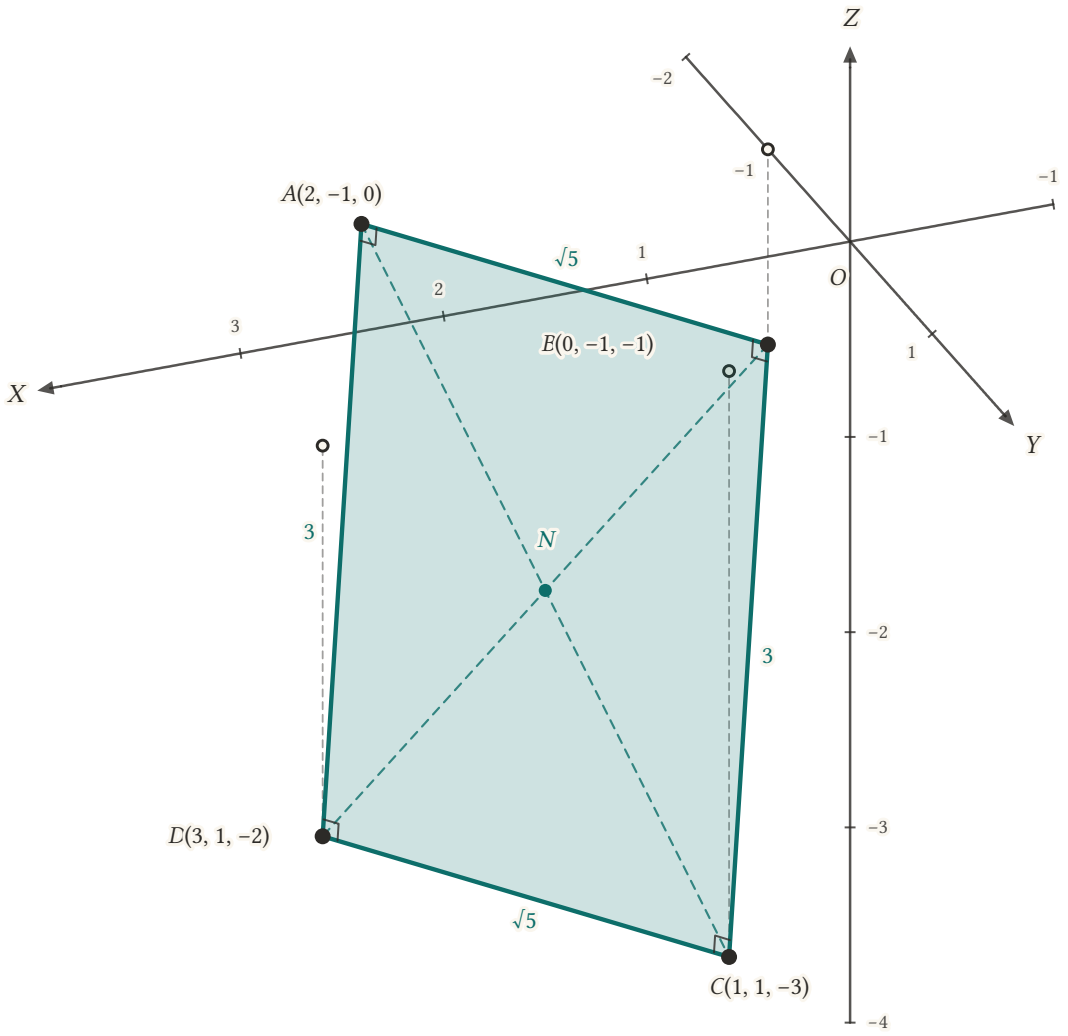
$$\begin{aligned} \mid NA \mid^2 &= \left(2-\frac{3}{2}\right)^2+(-1-0)^2+\left(0+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2},\\ \mid NB \mid^2 &= \left(0-\frac{3}{2}\right)^2+(-1-0)^2+\left(-1+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2},\\ \mid NC \mid^2 &= \left(1-\frac{3}{2}\right)^2+(1-0)^2+\left(-3+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2},\\ \mid ND \mid^2 &= \left(3-\frac{3}{2}\right)^2+(1-0)^2+\left(-2+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

olduğundan dört uzaklık da $\sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$'dir. Buradan $\mid NA \mid + \mid NC \mid = \sqrt{14} = \mid AC \mid$ çıkar. Bir noktanın iki noktaya uzaklıklarının toplamı o iki nokta arasındaki uzaklığa eşitse, nokta bu iki noktayı birleştiren doğru parçası üzerindedir (aksi hâlde A, N, C bir üçgen oluşturur ve üçgen eşitsizliği kesin olurdu). Dolayısıyla N, AC köşegeninin üzerindedir ve $\mid NA \mid = \mid NC \mid$ olduğundan onun orta noktasıdır. Aynı gerekçeyle $\mid NB \mid + \mid ND \mid = \sqrt{14} = \mid BD \mid$ ve $\mid NB \mid = \mid ND \mid$ olduğundan N, BD köşegeninin de orta noktasıdır.
Düzlemsellik ve paralelkenar. $\sqrt{5}+3 > \sqrt{14}$ olduğundan A, B, C bir doğru üzerinde değildir; dolayısıyla AC ile BD farklı iki doğrudur ve N noktasında kesişirler. Kesişen iki doğru bir düzlem belirttiğinden A, B, C, D noktalarının dördü de bu düzlemdedir. Bu düzlemde $ABCD$ dörtgeninin köşegenleri birbirini ortaladığından $ABCD$ bir paralelkenardır.
Dik açı. ABC üçgeninde

$$\mid AB \mid^2 + \mid BC \mid^2 = 5+9 = 14 = \mid AC \mid^2$$

olduğundan Pisagor teoreminin karşıtına göre B köşesindeki açı diktir. Bir açısı dik olan paralelkenar dikdörtgendir. Dolayısıyla A, B, C, D noktaları bir dikdörtgenin köşeleridir. (Köşegenlerin eşit olması, $\mid AC \mid = \mid BD \mid = \sqrt{14}$, de bunu doğrular: köşegenleri eşit olan paralelkenar dikdörtgendir.)

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 6.18: $A(2,-1,0)$, $B(0,-1,-1)$, $C(1,1,-3)$, $D(3,1,-2)$ dikdörtgeni: karşılıklı kenarlar $\sqrt{5}$ ve 3, köşegenler $\sqrt{14}$ uzunluğundadır ve ortak orta noktaları $N(3/2,0,-3/2)$'dir. Kesikli dikey çizgiler köşelerden XY-düzlemine iner.

■

Alıştırma 6.4 (Aynı yönlü ve aynı uzunlukta parçalar). Uzayda bir dik koordinat sisteminde $A(1,-2,3)$, $B(1,7,4)$ ve $C(-2,3,0)$ noktaları verilsin. $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ aynı vektör olacak biçimde D noktasını bulunuz.

Çözüm.
Vektörleri ayrıntısıyla Vektörler bölümünde inceleyeceğiz; burada yalnız şu kadarını kullanıyoruz: $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$'nin aynı vektör olması, A'dan B'ye giderken koordinatlarda oluşan değişimin C'den D'ye giderken oluşan değişimle aynı olması demektir. $A(a_1,a_2,a_3)$'ten $B(b_1,b_2,b_3)$'e giderken oluşan değişimi $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$ üçlüsüyle yazarız.
$D=(d_1,d_2,d_3)$ olsun. Buna göre

$$\overrightarrow{AB}=(1-1,7-(-2),4-3)=(0,9,1)$$

ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\overrightarrow{CD} = (d_1 - (-2), d_2 - 3, d_3 - 0) = (d_1 + 2, d_2 - 3, d_3)$$

olur. İki üçlünün eşit olması, karşılıklı bileşenlerinin eşit olmasıdır:

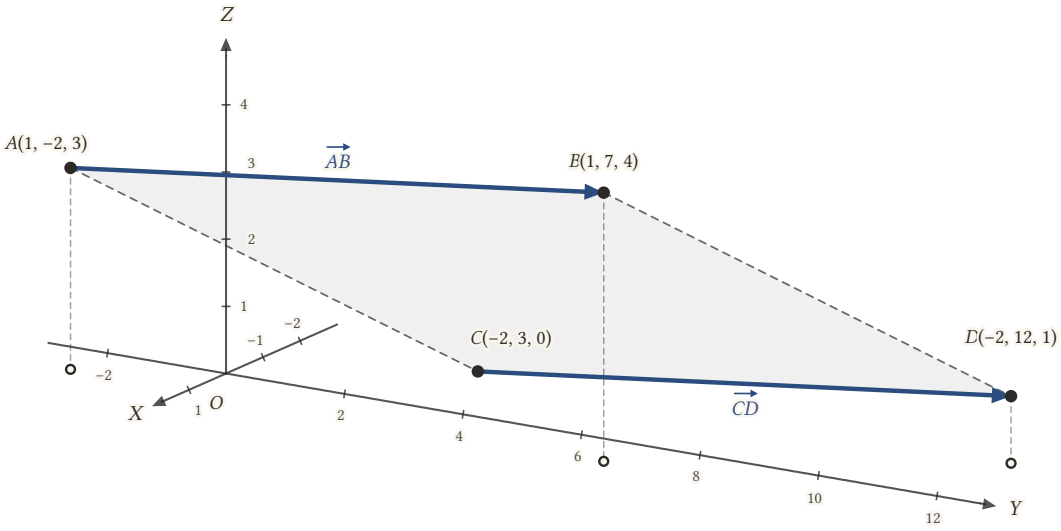
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow d_1 + 2 = 0, \quad d_2 - 3 = 9, \quad d_3 = 1.$$

Buradan $d_1 = -2$, $d_2 = 12$ ve $d_3 = 1$, yani $D = (-2, 12, 1)$ bulunur.
Denetleyelim:

$$\overrightarrow{CD} = (-2 + 2, 12 - 3, 1 - 0) = (0, 9, 1) = \overrightarrow{AB}.$$

Ayrıca iki parçanın uzunlukları da eşittir:

$$| AB | = | CD | = \sqrt{0 + 81 + 1} = \sqrt{82}.$$



Şekil 6.19: A'dan B'ye ve C'den D'ye giden oklar aynı $(0, 9, 1)$ koordinat değişimini taşır: paraleldir ve uzunlukları $\sqrt{82}$'dir. $ABDC$ bir paralelkenardır.

■

Uzayda noktaları sayı üçlüleriyle adlandırmayı, iki nokta arasındaki uzaklığı ölçmeyi ve bu ölçümle küre gibi bir yüzeyin denklemini yazmayı öğrendik. Son alıştırmada kullandığımız "koordinat değişimi" fikri, uzayda doğru ve düzlemleri incelemenin temel aracıdır; bir sonraki bölüm olan Vektörler bu fikri ayrıntılı biçimde kurar.

 CC BY-NC-SA 4.0

7. Vektörler

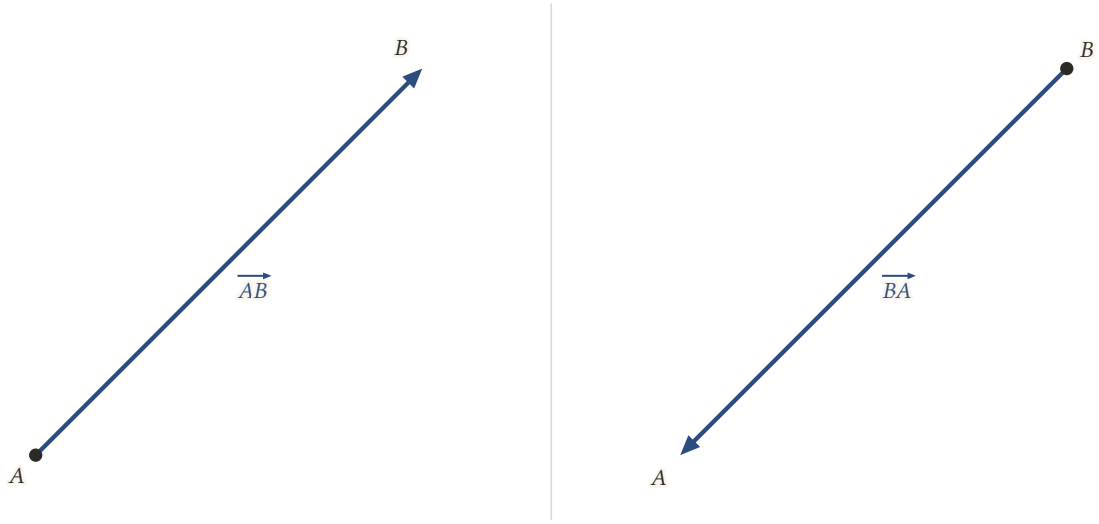
Hız, kuvvet ya da bir yerden bir yere yer değiştirme gibi nicelikleri tek bir sayıyla anlatamayız: "5 birim" demek yetmez, "hangi yöne?" sorusunun da yanıtı gerekir. Vektör, büyüklük ile yönü tek bir nesnede birleştirir. Bu bölümde vektörü önce geometrik olarak, oklar yardımıyla kuracağız; sonra uzayın dik koordinat sistemini kullanarak her vektörü üç sayıyla yazacağız. Böylece vektörlerle toplama, çıkarma ve bir sayıyla çarpma gibi işlemleri koordinatlar üzerinden yapabileceğiz. Bölümün sonunda lineer bağımlılık ve baz kavramlarıyla uzayın neden "üç boyutlu" olduğunu kesin bir dille ifade edeceğiz.
Uzayda noktaların koordinatlarını ve iki nokta arasındaki uzaklığı Uzayda Dik Koordinat Sistemi bölümünde görmüştük; burada bu araçları doğrudan kullanacağız.

7.1 Yönlü Doğru Parçaları

Bir oku düşünelim: bir kuyruğu, bir de ucu vardır. Vektör kavramının ilk adımı, doğru parçalarına böyle bir yön kazandırmaktır.

Tanım 7.1 (Yönlü doğru parçası). A ve B, düzlemde ya da uzayda birbirinden farklı iki nokta olsun. A'dan başlayıp B'de biten, yani A'dan B'ye yönlendirilmiş doğru parçasına **yönlü doğru parçası** denir ve $\overrightarrow{AB}$ ile gösterilir. A'ya başlangıç noktası, B'ye bitiş noktası denir.

Yani $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{BA}$ aynı doğru parçası üzerinde durur ama farklı nesnelerdir: $\overrightarrow{AB}$'nin oku B'yi, $\overrightarrow{BA}$'nın oku A'yı gösterir.

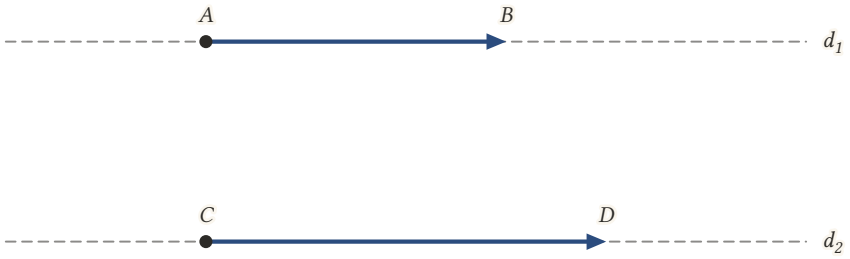


Şekil 7.1: Aynı doğru parçası üzerinde iki farklı yönlü doğru parçası: solda ok B'yi, sağda A'yı gösterir.

Tanım 7.2 (Aynı doğrultulu yönlü doğru parçaları). $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğru parçalarının üzerinde bulundukları d_1 ve d_2 doğruları paralelse (ya da çakışıksa), bu iki yönlü doğru parçasına **aynı doğrultulu** denir.

Yani doğrultu, okun üzerinde durduğu doğrunun "eğimini" anlatır; okun hangi tarafı gösterdiği bu tanıma girmez. $d_1 \parallel d_2$ ise $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ aynı doğrultuludur.

 CC BY-NC-SA 4.0

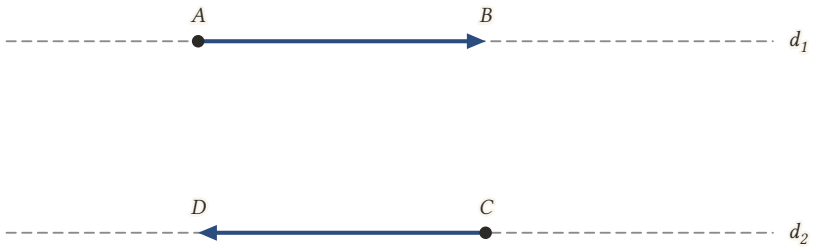


Şekil 7.2: $d_1 \parallel d_2$ olduğundan AB ve CD yönlü doğru parçaları aynı doğrultuludur.

Aynı doğrultudaki iki okun gösterdiği taraf aynıysa bu yönlü doğru parçalarına **aynı yönlü**, zıt taraflarsa **zıt (ters) yönlü** deriz.

i Doğrultu ile yön aynı şey değildir

İki yönlü doğru parçasının doğrultuları aynı olduğu hâlde yönleri farklı olabilir. Buna karşılık iki yönlü doğru parçası aynı yönlüyse, aynı doğrultulu olmaları zaten gereklidir: yön karşılaştırması ancak paralel doğrular üzerindeki oklar arasında yapılır. Aşağıdaki şekilde $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ aynı doğrultuludur ama ters yönlüdür.



Şekil 7.3: AB ile CD aynı doğrultulu ama ters yönlüdür: biri sağı, öteki solu gösterir.

7.2 Vektör Kavramı

Bir kuvveti anlatırken okun nereden başladığı çoğu zaman önemsizdir; önemli olan okun yönü ve uzunluğudur. Bu sezgiyi, yönü ve uzunluğu aynı olan okları "aynı" saymak için bir bağıntı kurarak kesinleştireceğiz.
Bundan sonra uzunluğu sıfır olan $\overrightarrow{AA}$ biçimindeki "yozlaşmış" yönlü doğru parçalarını da kümeye katıyoruz; bunların belirli bir yönü yoktur ve hepsini birbirine denk sayıyoruz.

Tanım 7.3 (Yön ve uzunluk bağıntısı). Yönlü doğru parçaları kümesinde $\sim$ bağıntısı şöyle tanımlanır:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \{\overrightarrow{AB} \text{ ile } \overrightarrow{CD} \text{ aynı yönlü}, \\ |AB| = |CD|.$$

Yani iki ok, aynı tarafı gösteriyor ve boyları eşitse $\sim$ bağıntısındadır; başlangıç noktalarının nerede olduğuna bakılmaz.

Önerme 7.1 (Yön ve uzunluk bağıntısı bir denklik bağıntısıdır). *$\sim$ bağıntısı yönlü doğru parçaları kümesinde bir denklik bağıntısıdır:*

- ***(i)*** $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ *(yansıma),*
- ***(ii)*** $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ *(simetri),*
- ***(iii)*** $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ *ve* $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ *(geçişme).*

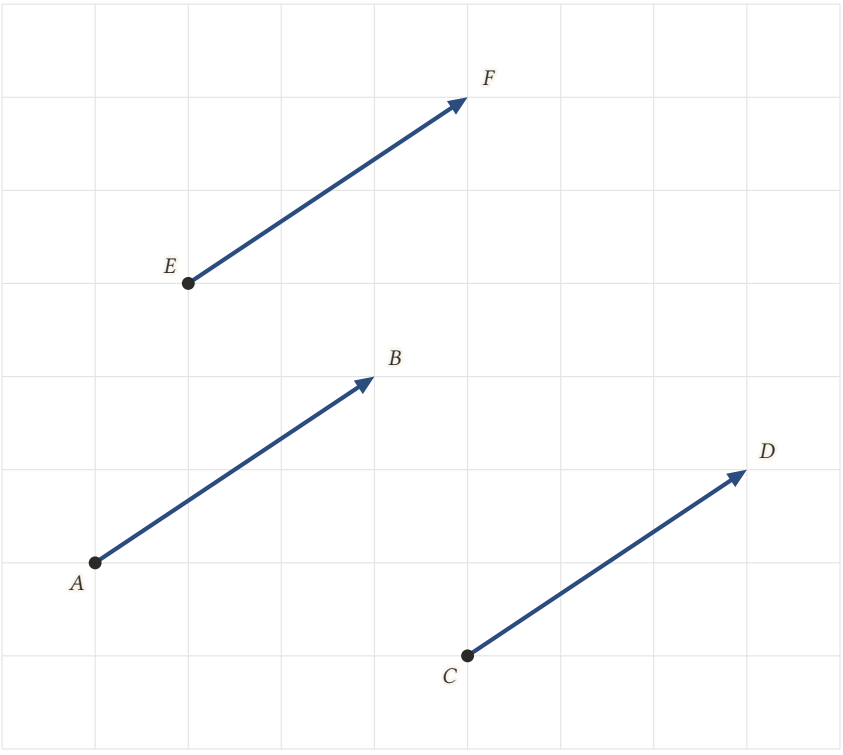
 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$\sim$ bağıntısı iki koşulun birlikte sağlanmasıdır: aynı yönlü olmak ve uzunlukların eşit olması. Her iki koşulun da yansıyan, simetrik ve geçişken olduğunu göstermek yeter.
Yansıma. *Bir ok kendisiyle aynı tarafı gösterir ve $|\,AB\,| = |\,AB\,|$ olur. Böylece $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$.*
Simetri. *$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ile aynı tarafı gösteriyorsa $\overrightarrow{CD}$ de $\overrightarrow{AB}$ ile aynı tarafı gösterir. Ayrıca $|\,AB\,| = |\,CD\,|$ ise $|\,CD\,| = |\,AB\,|$ olur. Böylece $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$.*
Geçişme. *$\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ aynı yönlü, $\overrightarrow{CD}$ ile $\overrightarrow{EF}$ aynı yönlü olsun. Üç okun doğrultusu aynıdır ve $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{EF}$ ikisi de $\overrightarrow{CD}$'nin gösterdiği tarafı gösterir; dolayısıyla birbirleriyle aynı yönlüdür. Uzunluklar için de $|\,AB\,| = |\,CD\,|$ ve $|\,CD\,| = |\,EF\,|$ eşitliklerinden $|\,AB\,| = |\,EF\,|$ çıkar. Böylece $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.*
Yozlaşmış parçalar için üç özellik de doğrudan sağlanır, çünkü hepsi birbirine denktir ve yozlaşmamış hiçbir parçaya denk değildir (uzunlukları farklıdır).
■

Bir kümede tanımlı her denklik bağıntısı, o kümeyi birbirini kesmeyen **denklik sınıflarına** ayırır: her eleman tam bir sınıfa düşer ve aynı sınıftaki elemanlar birbirine denktir. Vektörü tam olarak bu sınıflar üzerinden tanımlayacağız.

Tanım 7.4 (Vektör). $\sim$ denklik bağıntısının yönlü doğru parçaları kümesinde belirlediği denklik sınıflarının her birine bir **vektör** denir. Bir sınıfın içindeki her yönlü doğru parçasına o vektörün bir **temsilcisi** denir.

Yani bir vektör tek bir ok değil, yönü ve uzunluğu aynı olan bütün okların oluşturduğu ailedir. Bu ailenin herhangi bir üyesini çizmek, vektörü çizmek demektir. Aşağıdaki üç ok aynı vektörün üç temsilcisidir.



Şekil 7.4: Aynı vektörün üç temsilcisi: *AB*, *CD* ve *EF* okları aynı yönde ve aynı uzunluktadır; her biri sağa 3, yukarı 2 birim gider.

Tanım 7.5 (Sıfır vektörü). A herhangi bir nokta olmak üzere, $\overrightarrow{AA}$ ile temsil edilen vektöre **sıfır vektörü** denir ve 0 ile gösterilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani sıfır vektörü, uzunluğu sıfır olan "okların" sınıfıdır; $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, ... hepsi aynı vektörü, 0'ı temsil eder.
Bu tanımların vardığı sonuç şudur: bir vektörü belirleyen şey, temsilcisinin başlangıç ve bitiş noktaları değil, **yönü ve uzunluğudur**.

7.3 Vektörlerin Koordinatları

Vektörleri hesaplarda kullanabilmek için onları sayılarla ifade etmemiz gerekir. Bunun için dik koordinat sistemiyle donatılmış uzaydan noktalar alacağız.
$A(a_1, a_2, a_3)$ ve $B(b_1, b_2, b_3)$ uzayda iki nokta olsun. $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasını

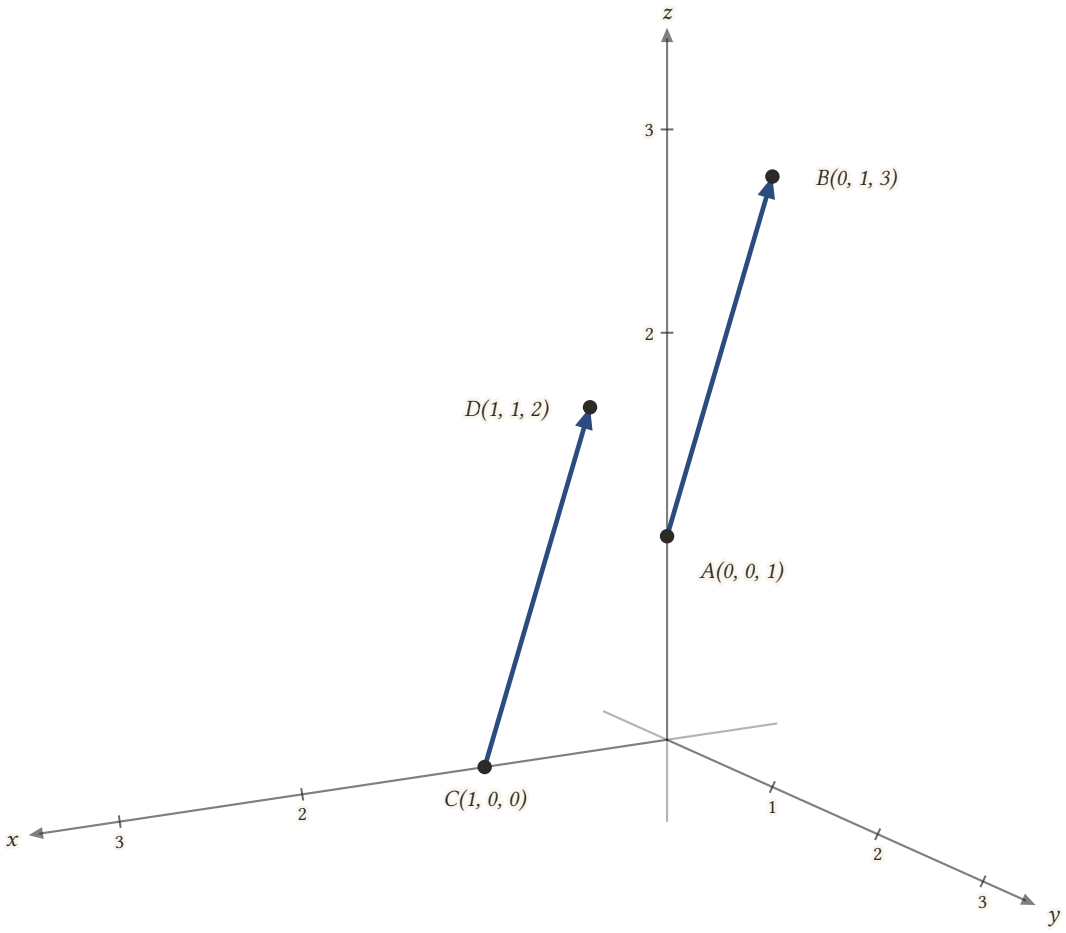
$$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

sıralı üçlüsüyle eşleyelim; bu üçlü, A'dan B'ye giderken her koordinatta ne kadar ilerlediğimizi söyler. Bu eşleme bire bir değildir: birçok farklı yönlü doğru parçası aynı üçlüye karşılık gelebilir.

Örnek 7.1 (Aynı üçlüye giden iki yönlü doğru parçası). $A(0,0,1), B(0,1,3), C(1,0,0)$ ve $D(1,1,2)$ noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{CD}$ yönlü doğru parçalarının aynı $(0,1,2)$ üçlüsüyle eşlendiğini gösterin.

> **Çözüm.**
> Bitiş noktasının koordinatlarından başlangıç noktasınınkileri çıkaralım:
>
> $$\overrightarrow{AB} \mapsto (0-0, 1-0, 3-1) = (0,1,2),$$
> $$\overrightarrow{CD} \mapsto (1-1, 1-0, 2-0) = (0,1,2).$$
>
> Başlangıç noktaları farklı olduğu hâlde iki yönlü doğru parçası da $(0,1,2)$'ye gider. Şekilde görüldüğü gibi bu iki ok paraleldir, aynı yönlüdür ve boyları eşittir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.5: *AB* ve *CD* yönlü doğru parçaları paralel, aynı yönlü ve eşit uzunluktadır; ikisi de (0, 1, 2) üçlüsüne gider.

■

Bu gözlem, koordinat farklarının eşitliğine dayanan ikinci bir bağıntı kurmayı önerir.

Tanım 7.6 (Koordinat farkı bağıntısı). $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ ve $D(d_1, d_2, d_3)$ olmak üzere

$$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow b_i - a_i = d_i - c_i, \quad i = 1, 2, 3$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya **koordinat farkı bağıntısı** diyelim.

Yani iki yönlü doğru parçası, bitiş ile başlangıç noktalarının koordinat farkları tek tek eşitse $\approx$ bağıntısındadır.

Önerme 7.2 (Koordinat farkı bağıntısı bir denklik bağıntısıdır). *$\approx$ bağıntısı yönlü doğru parçaları kümesinde bir denklik bağıntısıdır.*

İspat.
Aşağıda her eşitlik $i = 1, 2, 3$ için ayrı ayrı yazılmıştır; her adımda yalnız reel sayıların eşitliğinin özellikleri kullanılır.
Yansıma. *$b_i - a_i = b_i - a_i$ her zaman doğrudur. Böylece $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{AB}$.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Simetri. *$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ ise $b_i - a_i = d_i - c_i$ olur. Eşitliğin iki yanını yer değiştirirsek $d_i - c_i = b_i - a_i$, yani $\overrightarrow{CD} \approx \overrightarrow{AB}$ elde edilir.*
Geçişme. *$E(e_1, e_2, e_3)$ ve $F(f_1, f_2, f_3)$ olmak üzere $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ ve $\overrightarrow{CD} \approx \overrightarrow{EF}$ olsun. O zaman*

$$b_i - a_i = d_i - c_i \quad \text{ve} \quad d_i - c_i = f_i - e_i$$

olur. Buradan $b_i - a_i = f_i - e_i$, yani $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{EF}$ çıkar.
■

Tanım 7.7 (Vektör (koordinat tanımı)). $\approx$ denklik bağıntısının belirlediği denklik sınıflarının her birine bir **vektör** denir. $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ ise bu iki yönlü doğru parçası aynı vektörü temsil eder.

Yani artık "aynı vektör" demek, "koordinat farkları aynı" demektir. Bu tanım Tanım 7.4 ile aynı sınıfları verir. Bunu görmek için her noktayı aynı (t_1, t_2, t_3) kadar kaydıran **ötelemeyi** kullanalım: öteleme A'yı $(a_i + t_i)$'ye, B'yi $(b_i + t_i)$'ye götürür ve $(b_i + t_i) - (a_i + t_i) = b_i - a_i$ olduğundan koordinat farklarını korur. Ötelemenin her oku kendisine paralel, aynı yönlü ve aynı boylu bir oka taşıdığını, ayrıca bir noktadan başlayan, yönü ve boyu verilmiş tek bir ok bulunduğunu geometrik gerçekler olarak kabul ediyoruz.

- $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ olsun (iki ok aynı doğru üzerinde değilse $ABDC$ bir paralelkenardır). A'yı C'ye götüren öteleme $\overrightarrow{AB}$'yi C'den başlayan, aynı yönlü ve aynı boylu bir oka taşır; böyle tek ok $\overrightarrow{CD}$ olduğundan B'yi D'ye götürür. Öteleme koordinat farklarını koruduğundan $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ olur.
- $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ olsun. Koordinat farkları aynı olduğundan uzaklık formülü $|\ AB\ | = |\ CD\ |$ verir. $t_i = c_i - a_i$ ötelemesi A'yı C'ye, B'yi de $b_i + c_i - a_i = d_i$ koordinatlı D'ye götürür; demek ki $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$'nin ötelenmişidir ve onunla paralel ve aynı yönlüdür. Böylece $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Bundan sonra hesaplarda koordinat tanımını kullanacağız.

Tanım 7.8 (Bir vektörün koordinatları). $A(a_1, a_2, a_3)$ ve $B(b_1, b_2, b_3)$ noktaları için $\overrightarrow{AB}$ vektörü

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

üçlüsüyle temsil edilir. $b_i - a_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sayılarına $\overrightarrow{AB}$ vektörünün **koordinatları** denir.

Yani bir vektörün koordinatlarını bulmak için "bitiş eksi başlangıç" hesabı yapılır. Aynı vektörü temsil eden bütün yönlü doğru parçaları aynı koordinatları verir.

Örnek 7.2 (Sıfır vektörünün temsilcileri). $A(a_1, a_2, a_3)$, $X(x_1, x_2, x_3)$ ve $Y(y_1, y_2, y_3)$ uzayda üç nokta olsun. $\overrightarrow{AA}$ ile $\overrightarrow{XY}$'nin aynı vektörü temsil etmesi için $X = Y$ olması gerektiğini gösterin.

Çözüm.
İki yönlü doğru parçasının aynı vektörü temsil etmesi, koordinat farklarının eşit olması demektir:

$$\overrightarrow{AA} \approx \overrightarrow{XY} \Leftrightarrow a_i - a_i = y_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Sol taraf her i için 0'dır. Demek ki $y_i - x_i = 0$, yani $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ ve $x_3 = y_3$ olmalıdır. Bu da $X = Y$ demektir. Sonuç olarak sıfır vektörünün temsilcileri yalnızca $\overrightarrow{XX}$ biçimindeki yönlü doğru parçalarıdır.
■

Örnek 7.3 (Aynı vektörü temsil edecek noktayı bulmak). $A(1, 2, 3)$, $B(6, 4, 2)$ ve $D(1, 0, -2)$ noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$ aynı vektörü temsil edecek biçimde C noktasını bulun.

Çözüm.
$C(c_1, c_2, c_3)$ diyelim. $\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{CD}$'nin aynı vektörü temsil etmesi $\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD}$ demektir; yani koordinat farkları tek tek eşit olmalıdır:

 CC BY-NC-SA 4.0

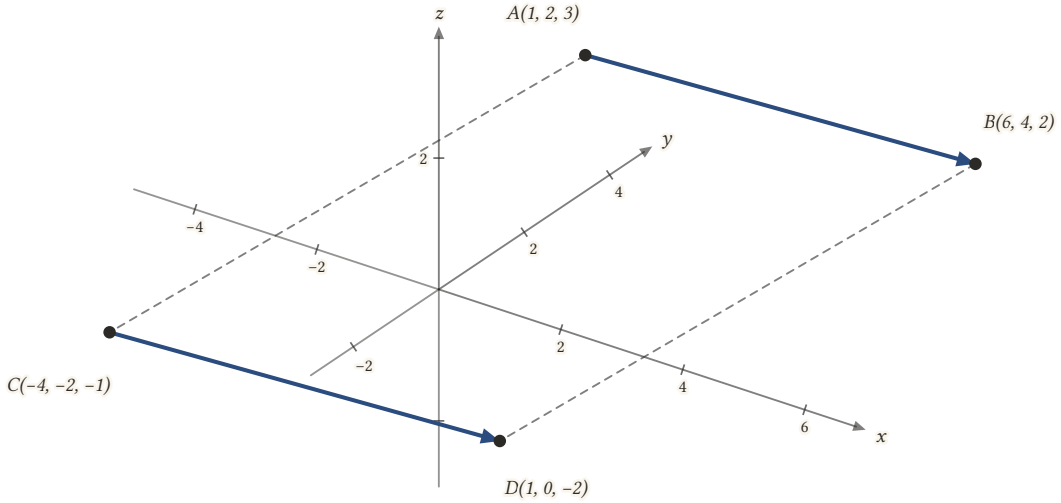
$$6-1=1-c_1,$$
$$4-2=0-c_2,$$
$$2-3=-2-c_3.$$

Birinci denklemden $5=1-c_1$, yani $c_1=-4$. İkinciden $2=-c_2$, yani $c_2=-2$. Üçüncüden $-1=-2-c_3$, yani $c_3=-1$. Buna göre

$$C=C(-4,-2,-1)$$

olmalıdır. Kontrol edelim: $\overrightarrow{AB}=(5,2,-1)$ ve

$$\overrightarrow{CD}=\big(\ 1-(-4),0-(-2),-2-(-1)\ \big)=(5,2,-1).$$



Şekil 7.6: *AB* ile *CD* aynı vektörü temsil ettiğinden *ABDC* bir paralelkenardır; kesikli kenarlar *AC* ve *BD*'dir.

■

Uzayda başlangıç noktası O özel bir rol oynar: her vektörün O'dan başlayan tek bir temsilcisi vardır.

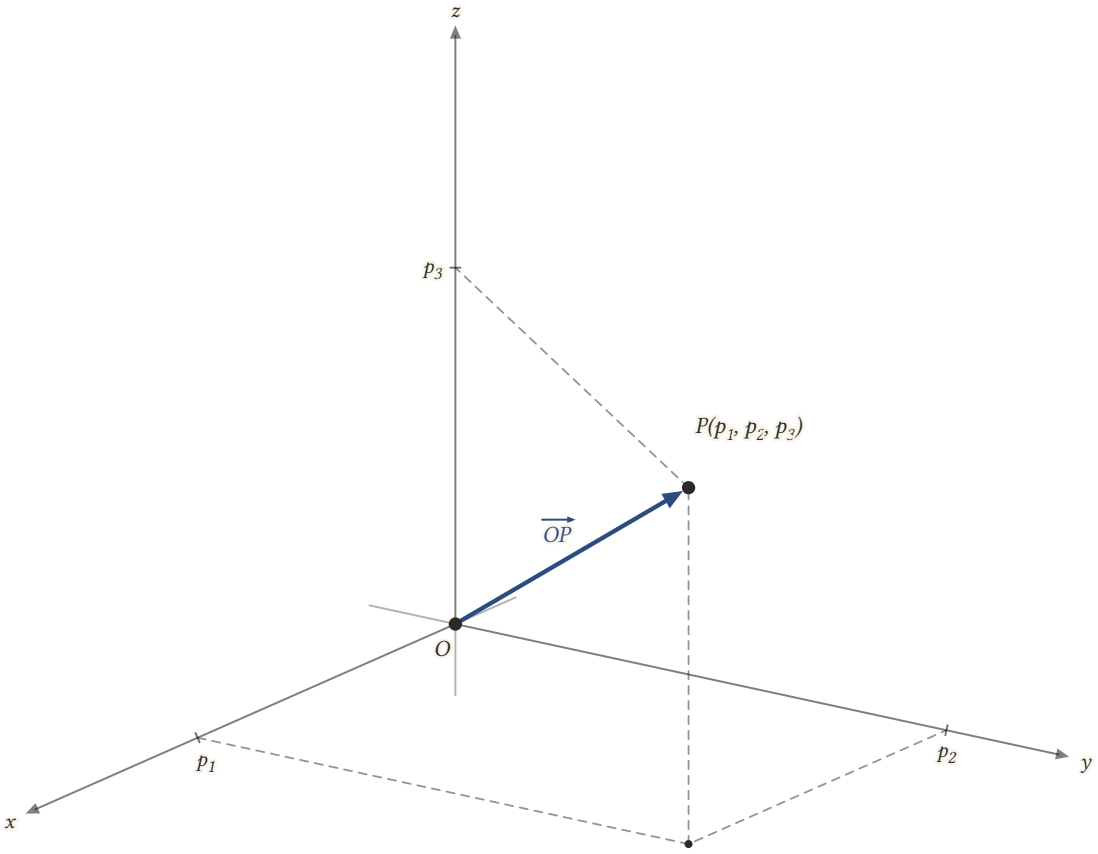
Tanım 7.9 (Konum vektörü). $\mathbb{R}^3$'te $O=O(0,0,0)$ başlangıç noktası ve $P=P(p_1,p_2,p_3)$ herhangi bir nokta olsun.

$$\overrightarrow{OP}=(p_1-0,p_2-0,p_3-0)=(p_1,p_2,p_3)$$

vektörüne P noktasının **konum vektörü** (yer vektörü) denir.

Yani bir noktanın konum vektörü, başlangıç noktasından o noktaya çizilen oktur ve koordinatları noktanın koordinatlarıyla aynıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.7: P noktasının konum vektörü, başlangıç noktasından P'ye çizilen oktur; kesikli çizgiler P'nin koordinatlarını eksenler üzerinde okutur.

$\mathbb{R}^3$'te bir P noktası ile onun $\overrightarrow{OP}$ konum vektörü aynı koordinatlara sahip olduğundan, noktalar ile vektörler arasında doğal bir eşleme vardır.

Önerme 7.3 (Noktalar ile vektörler arasındaki eşleme). *$\mathbb{R}^3$'teki bütün noktaların kümesinden bütün vektörlerin kümesine giden*

$$P \mapsto \overrightarrow{OP}$$

eşlemesi bire bir ve örtendir.

> ***İspat.***
> ***Bire bir.*** *$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$ olsun. Konum vektörlerinin koordinatları noktaların koordinatlarıdır; demek ki P ile Q'nun karşılıklı koordinatları eşittir ve $P = Q$ olur.*
> ***Örten.*** *(u_1, u_2, u_3) koordinatlı herhangi bir vektör verilsin. $P(u_1, u_2, u_3)$ noktasını alırsak $\overrightarrow{OP} = (u_1, u_2, u_3)$ olur. Böylece her vektör bir noktanın konum vektörüdür.*
> ■

Başlangıç ve bitiş noktalarını belirtmemiz gerekmediğinde vektörleri $a, b, c, \ldots, u, v, w, \ldots$ gibi küçük harflerle göstereceğiz. Koordinatları (u_1, u_2, u_3) olan vektörü kısaca $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ diye yazacağız; burada $\mathbb{R}^3$, noktaların olduğu kadar vektörlerin de kümesini anlatır.

7.4 Bir Vektörün Uzunluğu

Vektörün iki belirleyicisinden biri uzunluğudur. Bir temsilcinin uçları arasındaki uzaklığı ölçerek bu uzunluğu koordinatlarla hesaplayabiliriz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 7.10 (Bir vektörün uzunluğu). $\mathbb{R}^3$'te bir yönlü doğru parçasının başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki uzaklığa, temsil ettiği vektörün **uzunluğu** (boyu, büyüklüğü, normu) denir. u vektörünün uzunluğu $\parallel u \parallel$ ile gösterilir.

Yani $A(a_1, a_2, a_3)$ ve $B(b_1, b_2, b_3)$ için uzaydaki uzaklık formülü

$$\text{parallel}\overrightarrow{AB}\text{parallel} = \mid AB \mid = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(b_i - a_i)^2}$$

verir; açık yazılışı

$$\text{parallel}\overrightarrow{AB}\text{parallel} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

biçimindedir. Aynı vektörün bütün temsilcileri aynı koordinat farklarını verdiğinden bu sayı temsilci seçimine bağlı değildir.
Bazı kitaplarda vektörün uzunluğu $\mid u \mid$ ile de gösterilir. Biz $\mid AB \mid$ gösterimini iki nokta arasındaki uzaklık, $\parallel u \parallel$ gösterimini vektörün uzunluğu için kullanacağız.
Koordinatları $u = (u_1, u_2, u_3)$ olan bir vektörün temsilcisi $\overrightarrow{OP}$, $P(u_1, u_2, u_3)$ alınırsa

$$\parallel u \parallel = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \Big(\sum_{i=1}^{3} u_i^2\Big)^{1/2}$$

bulunur.

Önerme 7.4 (Uzunluğu sıfır olan tek vektör). *Her $u \in \mathbb{R}^3$ için $\parallel u \parallel \geq 0$'dır ve*

$$\parallel u \parallel = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

İspat.
Karekök negatif olmayan bir sayı olduğundan $\parallel u \parallel \geq 0$'dır. Eşitlik durumunu adım adım inceleyelim:

$$\begin{aligned}\parallel u \parallel = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 0\\ &\Leftrightarrow u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0\\ &\Leftrightarrow u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0\\ &\Leftrightarrow u = 0.\end{aligned}$$

İkinci adımda, bir sayının kareköküne ancak sayı 0 ise 0 olduğunu kullandık. Üçüncü adımda, negatif olmayan üç sayının ($u_i^2 \geq 0$) toplamının ancak üçü de 0 ise 0 olduğunu kullandık.
■

Örnek 7.4 (Uzunluğu verilen vektörleri bulmak). $x \in \mathbb{R}$ ve $u = \big(-3x, \sqrt{2}\,x, \sqrt{5x^2+4}\,\big)$ olmak üzere $\parallel u \parallel = 2\sqrt{17}$ koşulunu sağlayan vektörleri bulun.

Çözüm.
Uzunluk pozitif olduğundan, eşitliğin iki yanının karesini almak denk bir koşul verir:

$$\parallel u \parallel = 2\sqrt{17} \Leftrightarrow \parallel u \parallel^2 = 68.$$

Uzunluk formülünü yazalım:

$$\begin{aligned}\parallel u \parallel^2 &= (-3x)^2 + (\sqrt{2}\,x)^2 + (\sqrt{5x^2+4})^2\\ &= 9x^2 + 2x^2 + 5x^2 + 4\\ &= 16x^2 + 4.\end{aligned}$$

Buna göre $16x^2 + 4 = 68$, yani $16x^2 = 64$ ve $x^2 = 4$ olur. Buradan $x = -2$ ya da $x = 2$ bulunur. ($5x^2 + 4 > 0$ olduğundan üçüncü koordinat her x için tanımlıdır.)

 CC BY-NC-SA 4.0

$x = -2$ ve $x = 2$ değerlerini koordinatlarda yerine koyalım ($\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$):

$$x = -2: \quad u' = \left(6, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{6} \right),$$
$$x = 2: \quad u'' = \left(-6, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{6} \right).$$

İstenen vektörler bu u' ve u'' vektörleridir. Kontrol: iki vektör için de koordinatların kareleri toplamı $36 + 8 + 24 = 68$'dir.
■

7.5 Vektör Cebri

Vektörleri koordinatlarıyla yazabildiğimize göre, onlarla sayılar gibi hesap yapabiliriz. Bu kesimde eşitlik, toplama ve bir sayıyla çarpma işlemlerini tanımlayıp temel özelliklerini göreceğiz.

7.5.1 İki Vektörün Eşitliği

Eşitlik, vektörlerle yapılan her hesabın temelidir; koordinatlar üzerinden çok basit bir biçim alır.

Tanım 7.11 (İki vektörün eşitliği). $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ olsun.

$$u = v \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow u_i = v_i, i = 1, 2, 3.$$

Yani iki vektörün eşit olması, temsilcilerinin aynı denklik sınıfında bulunması demektir. Geometrik olarak bu, iki vektörün yönlerinin aynı ve uzunluklarının eşit olmasıdır.

Örnek 7.5 (Bir yönlü doğru parçasının verilen vektörü temsil etmesi). $A(x, x+1, x-1)$ ve $B(2x, y, z)$ noktaları veriliyor. $\overrightarrow{AB}$'nin $u = (1, -4, 3)$ vektörünün bir temsilcisi olması için x, y, z ne olmalıdır?

Çözüm.
Önce $\overrightarrow{AB}$'nin koordinatlarını "bitiş eksi başlangıç" ile bulalım:

$$\overrightarrow{AB} = \left(2x - x, y - (x+1), z - (x-1) \right)$$
$$= (x, y - x - 1, z - x + 1).$$

$\overrightarrow{AB} = u$ olması koordinatların tek tek eşit olması demektir:

$$x = 1, \qquad y - x - 1 = -4, \qquad z - x + 1 = 3.$$

Birinci denklem $x = 1$ verir. Bunu ikincide yerine koyarsak $y - 2 = -4$, yani $y = -2$. Üçüncüde yerine koyarsak $z = 3$ bulunur. Sonuç: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$; bu durumda $A(1, 2, 0)$ ve $B(2, -2, 3)$ olur.
■

7.5.2 İki Vektörün Toplamı

İki yer değiştirmeyi art arda yapmak tek bir yer değiştirmeye denktir. Vektörlerin toplamı bu fikrin koordinatlardaki karşılığıdır.

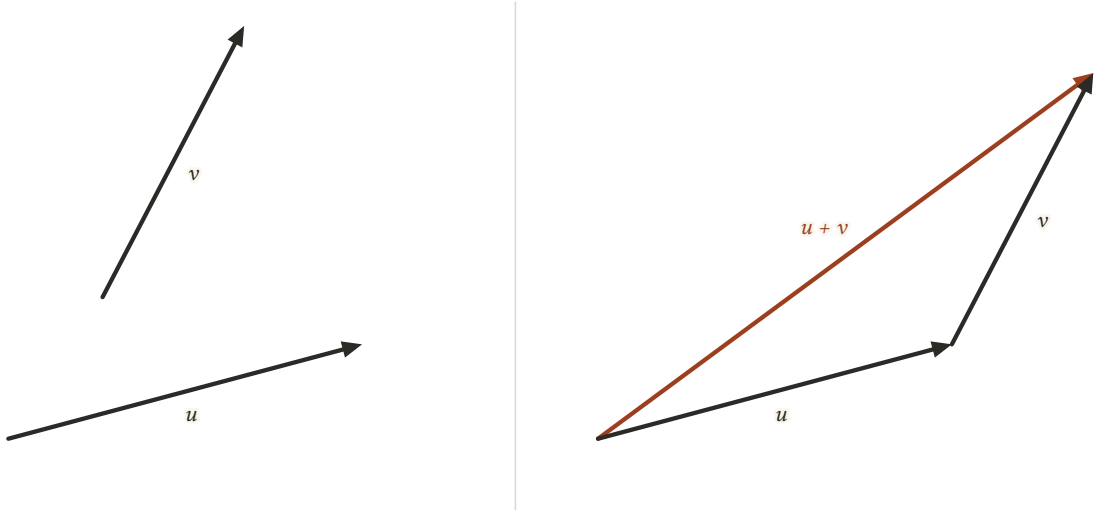
Tanım 7.12 (Vektörlerin toplamı). $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ olsun.

$$+ : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(u, v) \mapsto u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

biçiminde tanımlanan işleme **vektörlerin toplama işlemi** denir.

Yani vektörler karşılıklı koordinatları toplanarak toplanır. Geometrik olarak $u + v$'yi bulmak için v'nin temsilcisini u'nun bittiği yerden başlatırız; u'nun başlangıcından v'nin ucuna giden ok $u + v$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

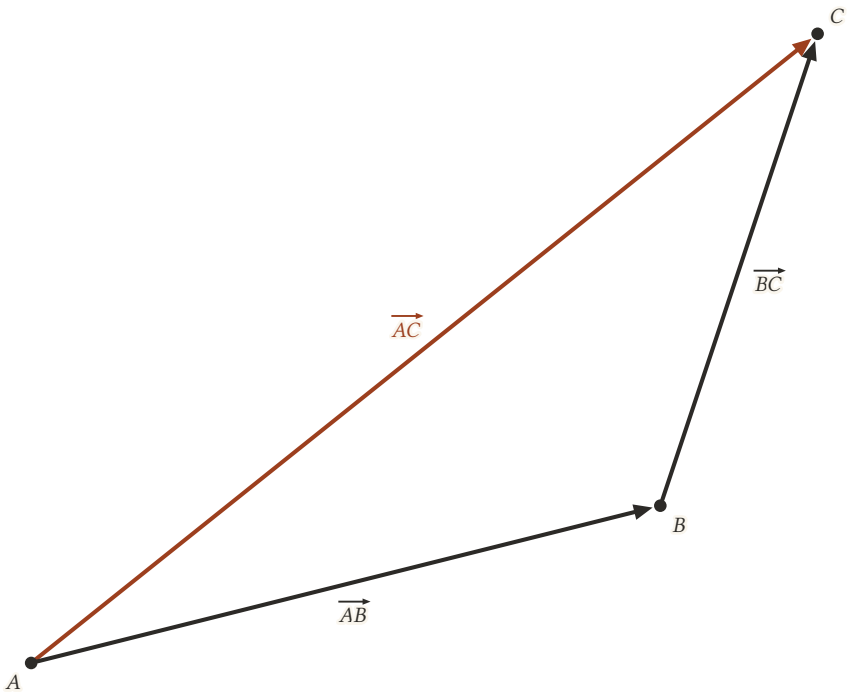


Şekil 7.8: Solda u ve v; sağda v, u'nun ucundan başlatılmıştır ve u'nun başlangıcından v'nin ucuna giden ok $u + v$'dir.

Bu geometrik kural, noktalarla yazıldığında çok kullanışlı bir eşitliğe dönüşür.

Önerme 7.5 (Üçgen kuralı). *Uzayda herhangi A, B, C noktaları için*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



Şekil 7.9: Üçgen kuralı: A *'dan* B *'ye, oradan* C *'ye gitmek, doğrudan* A *'dan* C *'ye gitmekle aynı yer değiştirmedir.*

> ***İspat.***
> *$A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ olsun. Toplamayı koordinat koordinat yaparsak, her $i = 1, 2, 3$ için*

 CC BY-NC-SA 4.0

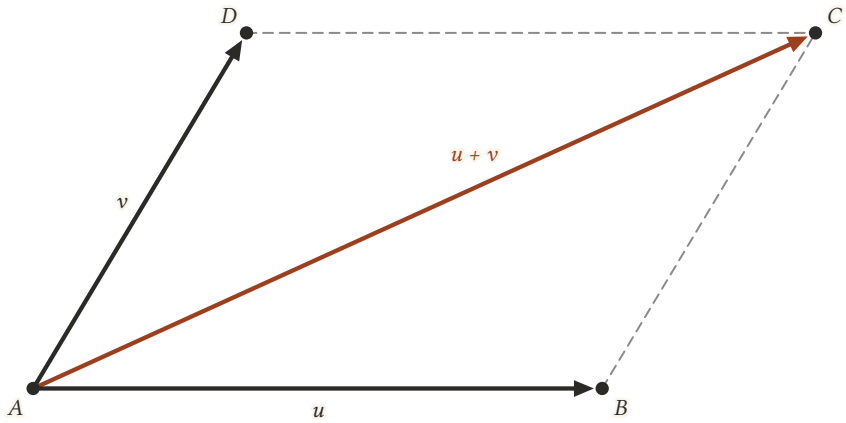
$$(b_i - a_i) + (c_i - b_i) = c_i - a_i$$

olur, çünkü b_i terimleri birbirini götürür. Sağ taraf $\overrightarrow{AC}$'nin i. koordinatıdır. Böylece $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
■

Önerme 7.6 (Paralelkenar kuralı). *$ABCD$ bir paralelkenar, $u = \overrightarrow{AB}$ ve $v = \overrightarrow{AD}$ olsun. O zaman*

$$u + v = \overrightarrow{AC}$$

olur; yani iki vektörün toplamı, bu vektörlerin ortak başlangıç noktasından çizilen temsilcileri üzerine kurulan paralelkenarın köşegenidir.



Şekil 7.10: Paralelkenar kuralı: u *ve* v *ortak* A *noktasından çizilince toplamları, üzerlerine kurulan paralelkenarın* AC *köşegenidir.*

İspat.
Paralelkenarda karşılıklı kenarlar paralel ve eşit uzunluktadır; ayrıca $\overrightarrow{AD}$ ile $\overrightarrow{BC}$ aynı tarafı gösterir. Demek ki bu iki yönlü doğru parçası aynı vektörü temsil eder: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = v$. Üçgen kuralından (Önerme 7.5)

$$u + v = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

■

Örnek 7.6 (Toplam eşitliğinden bilinmeyenleri bulmak). $u = (-x, 2x + 1, x^3 + y - 1)$, $v = (-3, 1, 5)$ ve $w = \left(2x, \sqrt{3}\, y, z \right)$ vektörleri veriliyor. $u + v = w$ ise x, y, z ne olmalıdır?

Çözüm.
Önce toplamı koordinat koordinat hesaplayalım:

$$u + v = \left(-x - 3, 2x + 2, x^3 + y + 4 \right).$$

$u + v = w$ eşitliği üç denklem verir:

$$-x - 3 = 2x, \qquad 2x + 2 = \sqrt{3}\, y, \qquad x^3 + y + 4 = z.$$

Birinci denklemden $3x = -3$, yani $x = -1$. İkincide yerine koyarsak $2(-1) + 2 = 0 = \sqrt{3}\, y$, yani $y = 0$. Üçüncüde yerine koyarsak $z = (-1)^3 + 0 + 4 = 3$. Sonuç: $x = -1$, $y = 0$, $z = 3$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

7.5.3 Bir Vektörün Skalerle Çarpımı

Bir oku iki katına uzatmak ya da ters çevirmek, vektörü bir sayıyla çarpmaktır. Vektörlerle birlikte kullanılan reel sayılara **skaler** denir.

Tanım 7.13 (Skalerle çarpma). $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan işleme bir vektörün **skalerle çarpımı** denir.

Yani vektörü bir skalerle çarpmak, her koordinatı o skalerle çarpmaktır. $\lambda \cdot u$ yerine kısaca λu yazarız.

Önerme 7.7 (Skalerle çarpımın uzunluğu). *Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $u \in \mathbb{R}^3$ için*

$$\| \lambda u \| = | \lambda | \| u \| .$$

İspat.
Uzunluk formülünü $\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$ vektörüne uygulayalım:

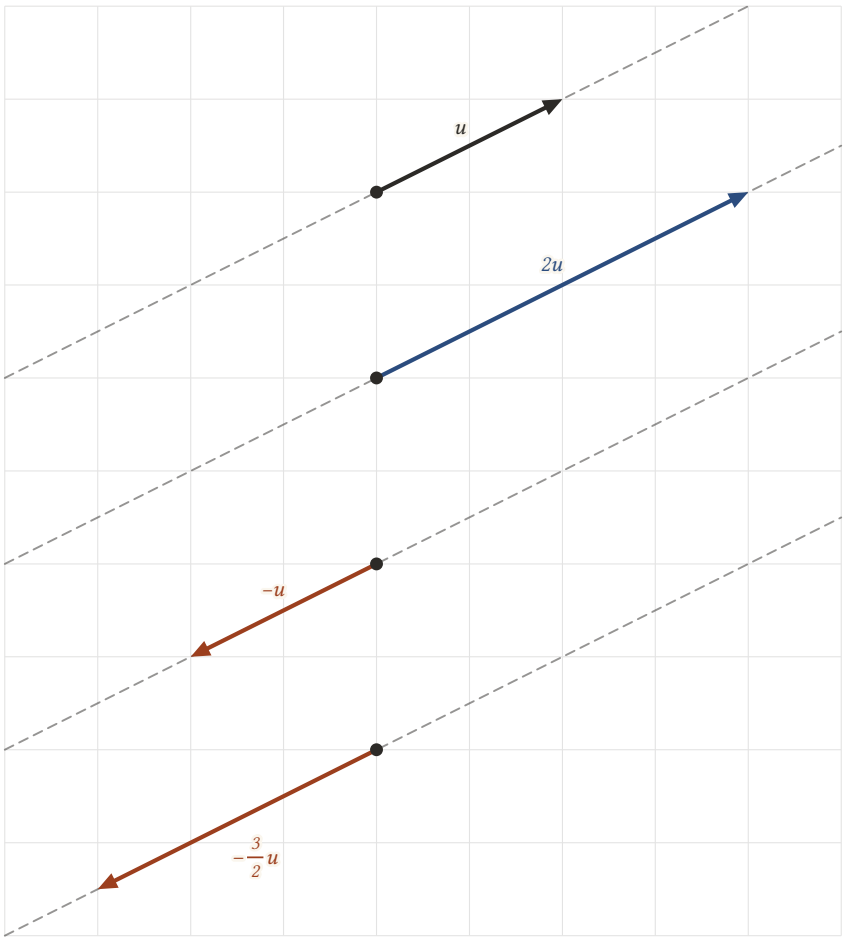
$$\begin{aligned} \| \lambda u \| &= \sqrt{(\lambda u_1)^2 + (\lambda u_2)^2 + (\lambda u_3)^2} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)} \\ &= \sqrt{\lambda^2}\, \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \\ &= | \lambda | \| u \| . \end{aligned}$$

İkinci adımda λ^2 ortak çarpan olarak dışarı alındı; üçüncü adımda negatif olmayan iki sayının çarpımının karekökü, kareköklerin çarpımına ayrıldı; son adımda $\sqrt{\lambda^2} = | \lambda |$ kullanıldı.
■

Önerme 7.8 (Skalerle çarpımın yönü). *$u \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ olsun. λu ile u aynı doğrultudadır ve*

- *$\lambda > 0$ ise λu ile u aynı yönlüdür,*
- *$\lambda < 0$ ise λu ile u zıt yönlüdür.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.11: u = *(2, 1) ve katları kendi paralel doğruları üzerinde: pozitif katlar* u *ile aynı yönü (sağı), negatif katlar ters yönü (solu) gösterir.*

İspat.
u'nun temsilcisi $\overrightarrow{AB}$ *olsun; koordinatlarda* $b_i = a_i + u_i$. *λu'nun A'dan başlayan temsilcisinin bitiş noktası* B', *koordinatları* $a_i + \lambda u_i$ *olan noktadır. Uzaklık formülüyle üç uzaklığı hesaplayalım.* B' *ile A'nın koordinat farkları* λu_i, B' *ile B'ninkiler* $(\lambda - 1)\, u_i$ *olduğundan Önerme 7.7 ile*

$$| AB' | = | \lambda | \, | AB |, \qquad | BB' | = | \lambda - 1 | \, | AB |$$

bulunur. Bir de şu geometrik gerçeği kabul ediyoruz: üç nokta için $| PQ | + | QR | = | PR |$ *ise* Q, PR *doğru parçasının üzerindedir. λ'nın değerine göre üç durum vardır.*
$0 < \lambda \leq 1$ *ise*

$$| AB' | + | B'B | = \lambda \, | AB | + (1 - \lambda) \, | AB | = | AB | .$$

Demek ki B', AB *doğru parçasının üzerindedir (*$\lambda = 1$ *ise* $B' = B$*).*
$\lambda > 1$ *ise*

$$| AB | + | BB' | = | AB | + (\lambda - 1) \, | AB | = \lambda \, | AB | = | AB' | .$$

Demek ki B, AB' *doğru parçasının üzerindedir.*
$\lambda < 0$ *ise*

$$| B'A | + | AB | = -\lambda \, | AB | + | AB | = (1 - \lambda) \, | AB | = | B'B | .$$

Demek ki A, $B'B$ *doğru parçasının üzerindedir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Her durumda A, B, B' aynı doğru üzerindedir; yani λu ile u aynı doğrultudadır. İlk iki durumda ($\lambda > 0$) B ile B', A'nın aynı tarafındadır: iki ok da A'dan çıkıp B'den geçen ışın üzerindedir ve aynı tarafı gösterir. Üçüncü durumda ($\lambda < 0$) A, B' ile B'nin arasındadır: iki ok A'dan zıt taraflara gider, yani zıt yönlüdür.
■

Buna göre bir vektörü sıfırdan farklı bir skalerle çarpmak onun doğrultusunu değiştirmez; yalnız uzunluğunu $|\lambda|$ katına getirir ve $\lambda < 0$ ise yönünü ters çevirir.

7.5.4 Ters Vektör, Fark ve Paralel Vektörler

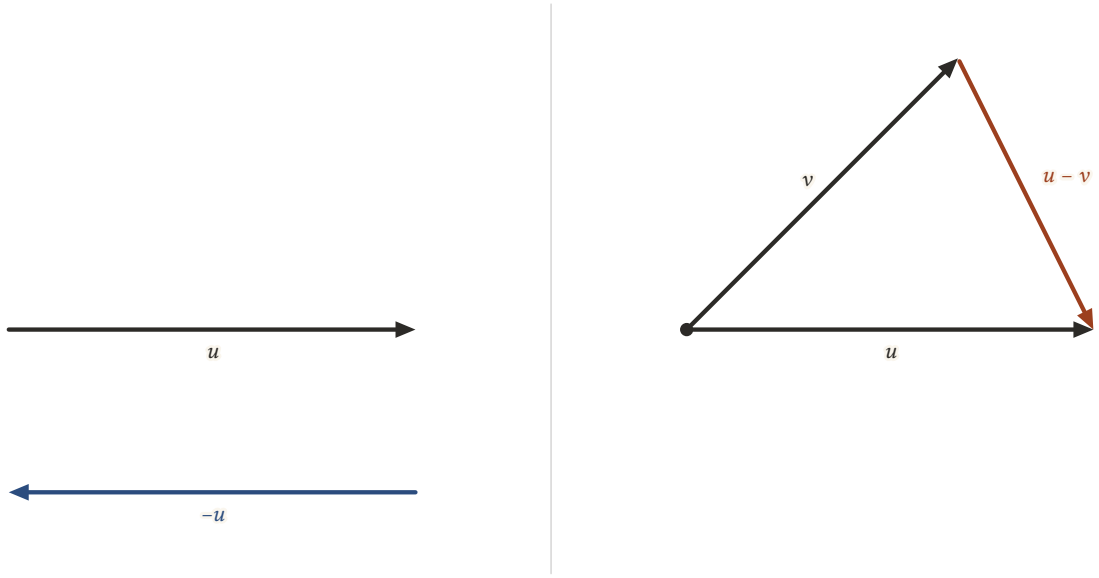
Skalerle çarpma sayesinde bir vektörün tersini ve iki vektörün farkını da tanımlayabiliriz.

Tanım 7.14 (Ters vektör ve iki vektörün farkı). $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v \in \mathbb{R}^3$ olsun.

$$-u = (-1)\,u = (-u_1, -u_2, -u_3)$$

vektörüne u'nun **ters vektörü**, $u + (-v)$ vektörüne de u ile v'nin **farkı** denir ve $u - v$ ile gösterilir.

Yani $-u$, u ile aynı uzunlukta fakat zıt yönlüdür (Önerme 7.7 ve Önerme 7.8 ile $\lambda = -1$). u ile v aynı noktadan başlatılırsa $u - v$, v'nin ucundan u'nun ucuna giden oktur, çünkü $v + (u - v) = u$'dur: iki yanın i. koordinatları $v_i + (u_i - v_i) = u_i$ biçiminde eşittir. Üçgen kuralına (Önerme 7.5) göre v'nin ucundan başlatılan $u - v$ okunun ucu, u'nun ucudur.



Şekil 7.12: Solda u ile ters vektörü $-u$: aynı uzunlukta, zıt yönlü. Sağda u ve v aynı noktadan çizilince $u - v$, v'nin ucundan u'nun ucuna giden oktur.

Önerme 7.9 (Skalerle çarpmanın özel değerleri). *Her $u \in \mathbb{R}^3$ için*

$$1\,u = u, \qquad 0\,u = 0, \qquad (-1)\,u = -u.$$

İspat.
Skalerle çarpmanın tanımını koordinatlara uygulayalım:

$$1\,u = (1 \cdot u_1, 1 \cdot u_2, 1 \cdot u_3) = (u_1, u_2, u_3) = u,$$
$$0\,u = (0 \cdot u_1, 0 \cdot u_2, 0 \cdot u_3) = (0, 0, 0) = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Üçüncü eşitlik $-u$'nun tanımıdır (Tanım 7.14).
■

Örnek 7.7 (Bir lineer ifadeyi hesaplamak). $u = (1, -2, 3)$ ve $v = (-3, 4, -1)$ vektörleri veriliyor. $-3u + 4v$ vektörünü bulun.

Çözüm.
Önce her vektörü kendi skaleriyle çarpıp sonra koordinat koordinat toplayalım:

$$\begin{aligned} -3u + 4v &= -3\,(1, -2, 3) + 4\,(-3, 4, -1) \\ &= (-3, 6, -9) + (-12, 16, -4) \\ &= (-15, 22, -13). \end{aligned}$$

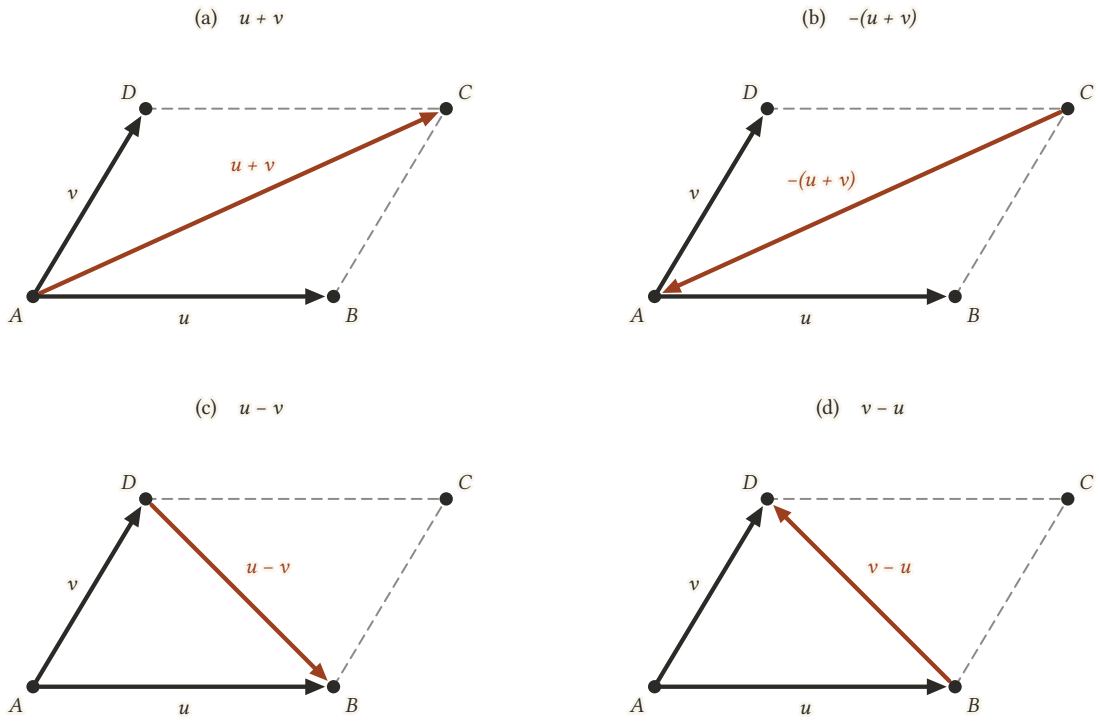
■

Toplam ile fark, aynı paralelkenarın iki köşegenini verir.

Önerme 7.10 (Paralelkenarın köşegen vektörleri). *u ve v vektörlerinin ortak bir A noktasından çizilen temsilcileri üzerine $ABCD$ paralelkenarı kurulsun: $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AD}$. O zaman*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= u + v, \quad \overrightarrow{CA} = -(u + v), \\ \overrightarrow{DB} &= u - v, \quad \overrightarrow{BD} = -(u - v). \end{aligned}$$

Yani $\pm(u + v)$ ve $\pm(u - v)$ vektörleri, u ile v üzerine kurulan paralelkenarın köşegen vektörleridir.



Şekil 7.13: u *ve* v *üzerine kurulan paralelkenarın köşegen vektörleri: (a)* AC = u + v, *(b)* CA = −(u + v), *(c)* DB = u − v, *(d)* BD = v − u.

İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

Paralelkenar kuralından (Önerme 7.6) $\overrightarrow{AC} = u + v$'dir. Bir yönlü doğru parçasının ters çevrilmesi koordinatların işaretini değiştirir: $\overrightarrow{CA}$'nın koordinatları $a_i - c_i = -(c_i - a_i)$ olduğundan $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(u + v)$'dir.
$A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$ olsun; $u_i = b_i - a_i$ ve $v_i = d_i - a_i$'dir. $\overrightarrow{DB}$'nin i. koordinatı

$$b_i - d_i = (b_i - a_i) - (d_i - a_i) = u_i - v_i$$

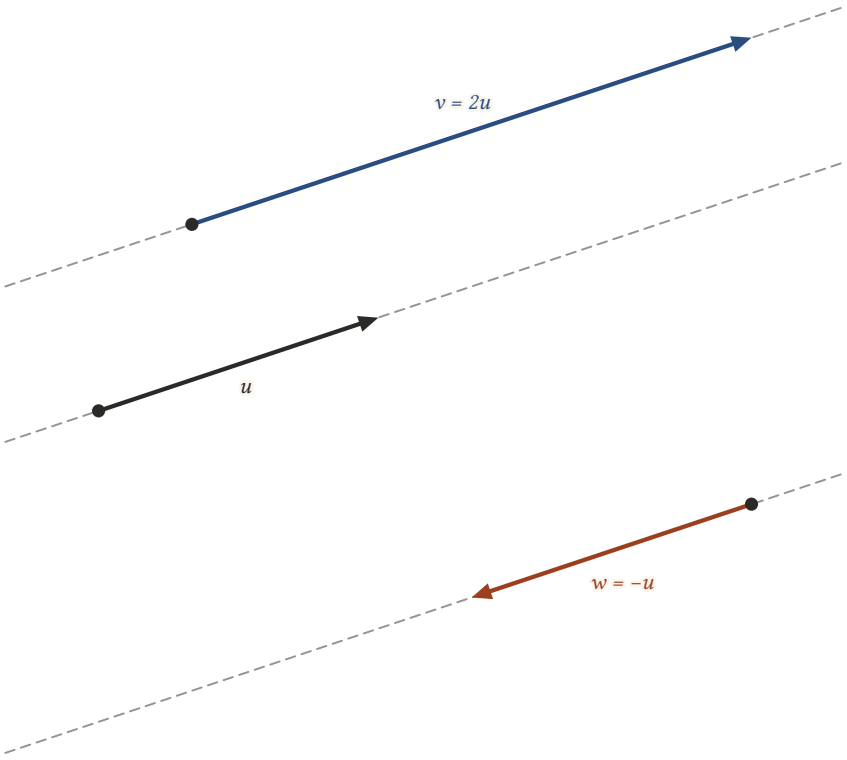
olduğundan $\overrightarrow{DB} = u - v$ bulunur. Yine ters çevirmeyle $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DB} = -(u - v)$ elde edilir; koordinatlarda bu, $v - u$ vektörüdür.
■

Skalerle çarpma, paralellik kavramına da cebirsel bir karşılık verir.

Tanım 7.15 (Paralel vektörler). $u \neq 0$ ve $v \neq 0$ olsun. $v = \lambda u$ olacak biçimde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ varsa u ile v'ye **paralel vektörler** denir ve $u \parallel v$ yazılır:

$$u \parallel v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : v_i = \lambda u_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Yani iki vektörün paralel olması için gerek ve yeter koşul, karşılıklı koordinatlarının orantılı olmasıdır. Geometrik olarak u ile $v = \lambda u$ aynı doğru üzerinde ya da paralel doğrular üzerinde çizilen yönlü doğru parçalarıyla temsil edilebilir (Önerme 7.8); tersine, paralel doğrular üzerindeki iki okun uzunlukları oranı $|\lambda|$ ve yön karşılaştırması λ'nın işaretini verir (Önerme 7.11). $u, v \neq 0$ olduğundan buradaki λ sıfırdan farklıdır. Bu yüzden paralellik simetriktir: $u \parallel v \Leftrightarrow v \parallel u$, çünkü $v = \lambda u$ ve $\lambda \neq 0$ ise $u = \frac{1}{\lambda} v$'dir.



Şekil 7.14: u, $v = 2u$ ve $w = -u$ paralel doğrular üzerindedir; v ile u aynı yönlü, w ile u zıt yönlüdür.

Skalerle çarpımın yönü üzerine önerme (Önerme 7.8), λu'nun u ile aynı doğrultulu olduğunu söyler. Bunun tersi de doğrudur: u ile aynı doğrultulu her vektör, u'nun bir skaler katıdır.

Önerme 7.11 (Aynı doğrultulu vektör bir skaler kattır). *$u \neq 0$ olsun ve x vektörü u ile aynı doğrultulu olsun.*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\|x\|}{\|u\|}, & x \text{ ile } u \text{ aynı yönlüyse,} \\ -\frac{\|x\|}{\|u\|}, & x \text{ ile } u \text{ zıt yönlüyse} \end{cases}$$

alınırsa ($x = 0$ için $\alpha = 0$) $x = \alpha u$ olur.

> ***İspat.***
> *$x = 0$ ise $\alpha = 0$ ve $0\,u = 0 = x$'tir (Önerme 7.9). $x \neq 0$ olsun; o zaman $\alpha \neq 0$'dır.*
> ***Uzunluk.*** *Önerme 7.7 ile*
>
> $$\| \alpha u \| = | \alpha | \, \| u \| = \frac{\| x \|}{\| u \|} \, \| u \| = \| x \| .$$
>
> ***Yön.*** *x ile u aynı yönlüyse $\alpha > 0$'dır ve Önerme 7.8 gereği αu da u ile aynı yönlüdür; demek ki αu ile x aynı yönlüdür. x ile u zıt yönlüyse $\alpha < 0$'dır ve αu da u ile zıt yönlüdür; aynı doğrultuda u'nun gösterdiği tarafın tersini gösteren iki ok aynı tarafı gösterir, yani αu ile x yine aynı yönlüdür.*
> *Yönü ve uzunluğu aynı olan iki ok $\sim$ bağıntısındadır (Tanım 7.3), yani aynı vektörü temsil eder. Böylece $x = \alpha u$.*
> ■

Örnek 7.8 (Paralel iki vektör). $u = (-1, 0, 2)$ ve $v = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right)$ vektörlerinin paralel olduğunu gösterin.

> **Çözüm.**
> Karşılıklı koordinatları oranlayalım. u'nun koordinatlarını $\frac{1}{3}$ ile çarparsak
>
> $$\frac{1}{3} u = \left(\frac{1}{3} \cdot (-1), \frac{1}{3} \cdot 0, \frac{1}{3} \cdot 2 \right) = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) = v$$
>
> bulunur. Demek ki $v = \frac{1}{3} u$'dur; $\lambda = \frac{1}{3}$ ile koşul sağlanır ve $u \parallel v$'dir. $\lambda > 0$ olduğundan iki vektör aynı yönlüdür ve v'nin uzunluğu u'nunkinin üçte biridir.
> ■

7.5.5 Toplama ve Skalerle Çarpmanın Özellikleri

Vektör işlemleri, koordinatlar üzerinden reel sayıların işlemlerine indirgendiği için onların bilinen özelliklerini miras alır.

Teorem 7.1 (Toplama ve skalerle çarpmanın özellikleri). *$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, $0 = (0, 0, 0)$ sıfır vektörü ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olsun. Aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

- ***(i)*** *$u + v = v + u$ (değişme özelliği).*
- ***(ii)*** *$(u + v) + w = u + (v + w)$ (birleşme özelliği).*
- ***(iii)*** *$u + 0 = 0 + u = u$'dur ve 0 bu kuralı sağlayan tek vektördür.*
- ***(iv)*** *$u + (-u) = (-u) + u = 0$'dır ve her u için $-u$ bu özelliği taşıyan tek vektördür.*
- ***(v)*** *$\lambda_1(\lambda_2 u) = (\lambda_1 \lambda_2)\, u$.*
- ***(vi)*** *$(\lambda_1 + \lambda_2)\, u = \lambda_1 u + \lambda_2 u$.*
- ***(vii)*** *$\lambda_1(u + v) = \lambda_1 u + \lambda_1 v$.*
- ***(viii)*** *$1\, u = u$.*

> ***İspat.***
> *Her özellikte iki vektörün eşitliğini göstermek, karşılıklı koordinatların eşitliğini göstermek demektir (Tanım 7.11). Aşağıda $i = 1, 2, 3$ için i. koordinatlara bakıyoruz ve reel sayıların özelliklerini kullanıyoruz.*
> ***(i)*** *$u + v$'nin i. koordinatı $u_i + v_i$, $v + u$'nunki $v_i + u_i$'dir. Reel sayılarda toplama değişmeli olduğundan $u_i + v_i = v_i + u_i$.*
> ***(ii)*** *Sol tarafın i. koordinatı $(u_i + v_i) + w_i$, sağ tarafınki $u_i + (v_i + w_i)$'dir. Reel sayılarda toplama birleşmeli olduğundan bu ikisi eşittir.*

(iii) *$u + 0$'ın i. koordinatı $u_i + 0 = u_i$'dir; (i) gereği $0 + u = u + 0$'dır. Teklik için bir $z = (z_1, z_2, z_3)$ vektörü bir u için $u + z = u$ koşulunu sağlasın. Koordinatlarda $u_i + z_i = u_i$ olur; iki yandan u_i çıkarılırsa $z_i = 0$, yani $z = 0$ bulunur.*
(iv) *$u + (-u)$'nun i. koordinatı $u_i + (-u_i) = 0$'dır; (i) gereği $(-u) + u$ da 0'dır. Teklik için $u + y = 0$ olsun. Koordinatlarda $u_i + y_i = 0$, yani $y_i = -u_i$ olur; demek ki $y = -u$.*
(v) *Sol tarafın i. koordinatı $\lambda_1(\lambda_2 u_i)$, sağ tarafınki $(\lambda_1\lambda_2)\, u_i$'dir. Reel sayılarda çarpma birleşmeli olduğundan eşittirler.*
(vi) *Sol tarafın i. koordinatı $(\lambda_1 + \lambda_2)\, u_i$'dir. Reel sayılarda çarpmanın toplama üzerine dağılmasıyla bu $\lambda_1 u_i + \lambda_2 u_i$'ye, yani sağ tarafın i. koordinatına eşittir.*
(vii) *Sol tarafın i. koordinatı $\lambda_1(u_i + v_i)$'dir. Yine dağılma özelliğiyle $\lambda_1 u_i + \lambda_1 v_i$ olur; bu da sağ tarafın i. koordinatıdır.*
(viii) *Bu eşitlik Önerme 7.9 içinde gösterildi:* $1 \cdot u_i = u_i$.
■

Örnek 7.9 (Skalerle çarpımın tersi). Bir u vektörü ve bir α skaleri için

$$-(\alpha u) = (-\alpha)\, u = \alpha\, (-u)$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
Vektör işlemlerinin (iv) özelliğine (Teorem 7.1) göre αu'ya eklendiğinde 0 veren tek vektör $-(\alpha u)$'dur. O hâlde $(-\alpha)u$ ve $\alpha(-u)$'nun da αu'ya eklendiğinde 0 verdiğini göstermek yeter.
Özellik (vi) ile $0\, u = 0$ eşitliğini (Önerme 7.9) kullanırsak

$$\alpha u + (-\alpha)\, u = \big(\ \alpha + (-\alpha)\ \big)\, u = 0\, u = 0.$$

Özellik (vii), (iv) ve $\alpha\, 0 = (\alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot 0) = 0$ eşitliğini kullanırsak

$$\alpha u + \alpha(-u) = \alpha\ \big(\ u + (-u)\ \big) = \alpha\, 0 = 0.$$

Böylece $(-\alpha)u$ ve $\alpha(-u)$ vektörlerinin ikisi de αu'nun toplamaya göre tersidir. Ters tek olduğundan ikisi de $-(\alpha u)$'ya eşittir.
■

7.5.6 Birim Vektör

Çoğu zaman bir vektörün yalnız yönüyle ilgileniriz. Yönü temsil etmenin en temiz yolu, o yönde uzunluğu 1 olan vektörü kullanmaktır.

Tanım 7.16 (Birim vektör). Uzunluğu 1 birim olan bir vektöre **birim vektör** denir.

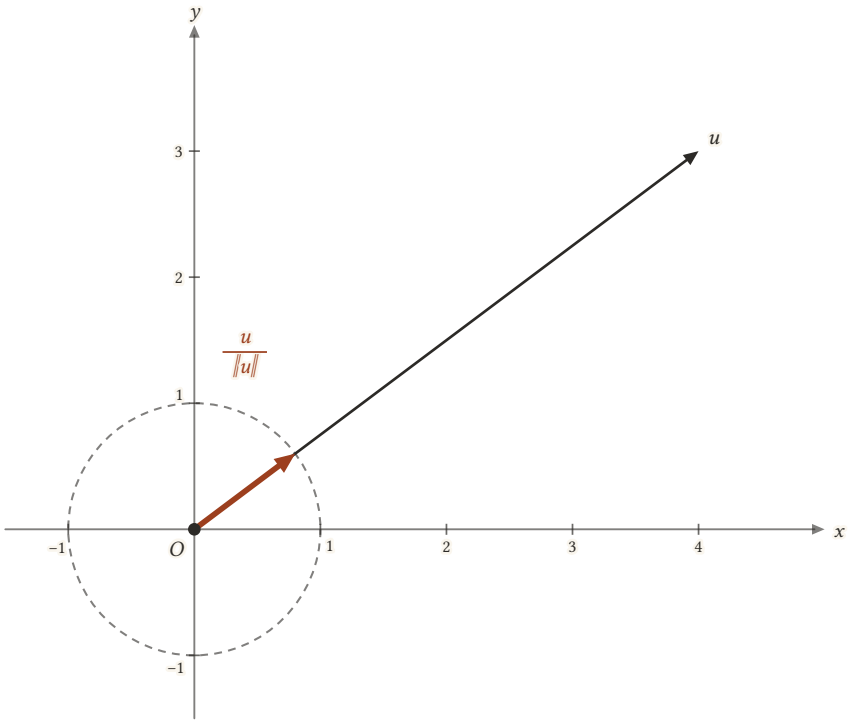
Yani e birim vektörse $\| e \| = 1$'dir. Sıfırdan farklı her vektör, kendi uzunluğuna bölünerek aynı yönde bir birim vektöre dönüştürülebilir.

Önerme 7.12 (Bir vektörü birimleştirmek). *$u \neq 0$ ise*

$$\frac{1}{\| u \|}\, u = \frac{u}{\| u \|}$$

vektörü, u ile aynı yönlü bir birim vektördür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 7.15: u = *(4, 3) ve aynı ışın üzerindeki birim vektör* u/‖u‖ = *(0,8; 0,6); birim vektörün ucu birim çemberin üzerindedir.*

İspat.
$u \neq 0$ *olduğundan Önerme 7.4 gereği* $\| u \| > 0$*'dır; bu yüzden* $\lambda = \dfrac{1}{\| u \|}$ *tanımlı ve pozitiftir. Önerme 7.7 ile*

$$\text{parallel}\ \frac{1}{\| u \|}\ \text{parallel} = \frac{1}{\| u \|} \| u \| = 1$$

olur. $\lambda > 0$ *olduğundan, Önerme 7.8 gereği bu vektör* u *ile aynı yönlüdür.*
■

Örnek 7.10 (Bir vektörü birim hâle getirmek). $u = \left(2, 3, 2\sqrt{3} \right)$ vektörünü birim hâle getirin.

Çözüm.
Önce uzunluğu hesaplayalım:

$$\| u \| = \sqrt{2^2 + 3^2 + \left(2\sqrt{3} \right)^2} = \sqrt{4 + 9 + 12} = \sqrt{25} = 5.$$

Buna göre (Önerme 7.12) u yönündeki birim vektör

$$\frac{u}{\| u \|} = \frac{1}{5} \left(2, 3, 2\sqrt{3} \right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2\sqrt{3}}{5} \right)$$

olur. Kontrol: $\frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{12}{25} = 1$.
■

Koordinat eksenlerinin pozitif yönlerindeki birim vektörler özel bir öneme sahiptir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 7.17 (Eksenlerin birim vektörleri). x, y ve z koordinat eksenleri üzerinde pozitif yönde alınan birim vektörler sırasıyla

$$e_1 = (1,0,0), \qquad e_2 = (0,1,0), \qquad e_3 = (0,0,1)$$

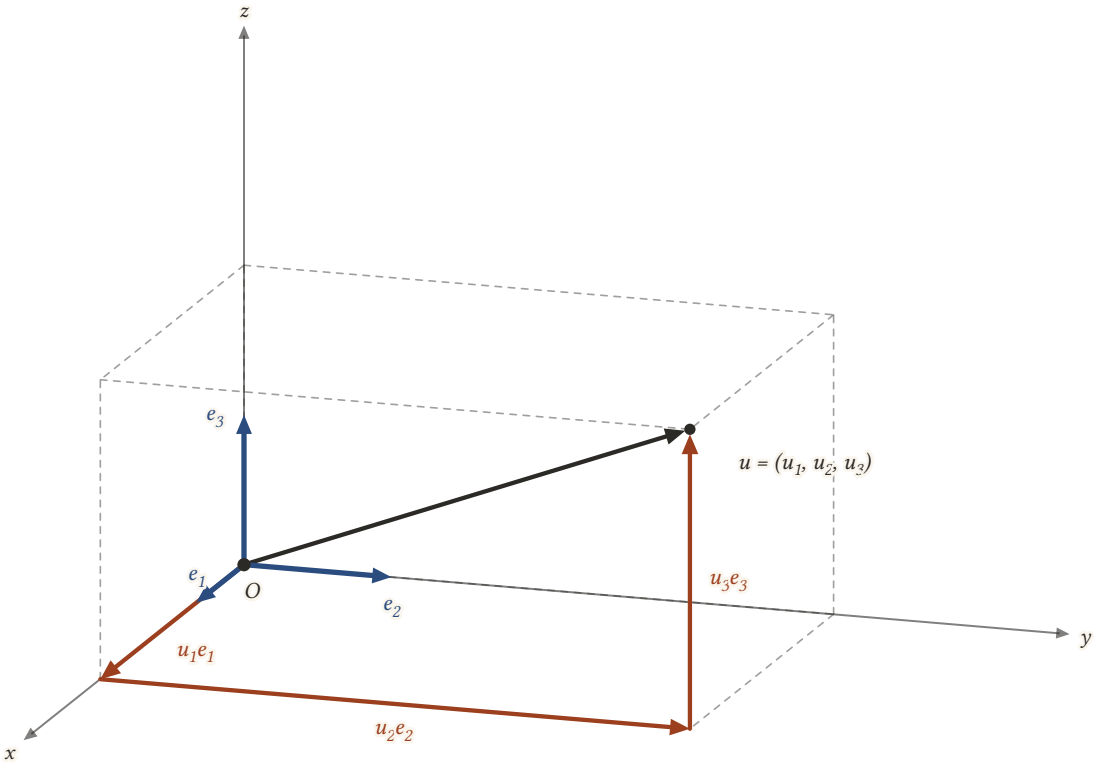
ile gösterilir.

Yani e_1, e_2 ve e_3 başlangıç noktasından çıkıp eksenler boyunca birer birim ilerleyen oklardır. Her vektör bu üç vektör cinsinden yazılabilir.

Önerme 7.13 (Bir vektörün eksen birim vektörleri cinsinden yazılışı). *Her $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörü*

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$$

biçiminde yazılabilir ve bu yazılış tektir: $u = ae_1 + be_2 + ce_3$ ise $a = u_1$, $b = u_2$, $c = u_3$'tür.



Şekil 7.16: $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3)$*, eksenler boyunca uç uca eklenen* $\mathrm{u}_1\mathrm{e}_1$, $\mathrm{u}_2\mathrm{e}_2$ *ve* $\mathrm{u}_3\mathrm{e}_3$ *oklarının toplamıdır.*

İspat.
Skalerle çarpma ve toplama tanımlarını sağdan sola uygulayalım:

$$\begin{aligned} u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3 &= u_1(1,0,0) + u_2(0,1,0) + u_3(0,0,1) \\ &= (u_1,0,0) + (0,u_2,0) + (0,0,u_3) \\ &= (u_1,u_2,u_3) = u. \end{aligned}$$

Teklik için $u = ae_1 + be_2 + ce_3$ olsun. Aynı hesapla sağ taraf (a,b,c)'dir. İki vektörün eşitliğinden (Tanım 7.11) $a = u_1$, $b = u_2$, $c = u_3$ çıkar.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani $\mathbb{R}^3$'teki her vektör, e_1, e_2 ve e_3'ün birer skalerle (tam olarak kendi koordinatlarıyla) çarpımlarının toplamı olarak tek türlü belirlidir.

7.6 Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık

Bir önceki önermede her vektörü e_1, e_2, e_3 cinsinden yazdık. Peki başka vektör takımları da bu işi görebilir mi, ve bir takımda "fazladan" vektör olup olmadığını nasıl anlarız? Bu soruların dili lineer bağımlılıktır.

Tanım 7.18 (Lineer toplam). $u_1, u_2, ..., u_k \in \mathbb{R}^3$ vektörleri ve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ skalerleri verilsin.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_k u_k$$

vektörüne $u_1, ..., u_k$ vektörlerinin bir **lineer toplamı** (lineer birleşimi) denir.

Yani lineer toplam, vektörleri birer skalerle çarpıp toplamaktan elde edilen her vektördür. Örneğin Önerme 7.13, her vektörün e_1, e_2, e_3'ün bir lineer toplamı olduğunu söyler.

Tanım 7.19 (Lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık). $u_1, u_2, ..., u_k \in \mathbb{R}^3$ vektörleri verilsin.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_k u_k = 0$$

olacak biçimde **hepsi birden sıfır olmayan** $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ varsa bu vektörlere **lineer bağımlı** denir. Aksi hâlde, yani

$$\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_k u_k = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$$

ise bu vektörlere **lineer bağımsız** denir. Birbirinden farklı vektörlerden oluşan sonlu bir $S = \{u_1, ..., u_k\}$ kümesi için de, elemanları lineer bağımlıysa (bağımsızsa) S'ye lineer bağımlı (bağımsız) denir.

Yani vektörler lineer bağımlıysa, aralarından en az biri ötekiler cinsinden yazılabilir: katsayısı sıfır olmayan bir λ_j için eşitliği λ_j'ye bölüp o vektörü yalnız bırakırız. Lineer bağımsızlık ise "sıfır vektörünü elde etmenin tek yolu bütün katsayıları sıfır almaktır" demektir; takımda gereksiz vektör yoktur.

> Lineer bağımlılığı üç adımda araştırmak
>
> 1. $\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_k u_k = 0$ eşitliğini koordinatlarla yazın.
> 2. Karşılıklı koordinatları eşitleyerek $\lambda_1, ..., \lambda_k$ bilinmeyenli homojen denklem sistemini kurun.
> 3. Sistemin yalnız $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$ çözümü varsa vektörler lineer bağımsızdır; sıfırdan farklı bir çözüm bulunursa lineer bağımlıdır.

Örnek 7.11 (Eksen birim vektörlerinin bağımsızlığı). $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ ve $e_3 = (0,0,1)$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterin.

Çözüm.
Reçeteyi izleyelim:
$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ eşitliğini koordinatlarla yazalım:

$$\begin{aligned} &\lambda_1(1,0,0) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Sıfır vektörünü veren tek katsayı seçimi hepsinin sıfır olmasıdır. Buna göre e_1, e_2 ve e_3 lineer bağımsızdır.
■

Örnek 7.12 (Lineer bağımlı üç vektör). $u = (4,0,-2)$, $v = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$ ve $w = (2,0,-1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadığını araştırın.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1. $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ eşitliğini koordinatlarla yazalım:

$$\lambda_1(4,0,-2) + \lambda_2\left(1,0,-\frac{1}{2}\right) + \lambda_3(2,0,-1) = (0,0,0).$$

Adım 2. Karşılıklı koordinatları eşitleyelim:

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0, \\ 0\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0, \\ -2\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Adım 3. İkinci denklem her zaman sağlanır. Üçüncü denklem, birincinin $-\frac{1}{2}$ ile çarpılmışıdır; yani sistem aslında tek bir denkleme iner:

$$4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0.$$

Üç bilinmeyenli tek denklemin sıfırdan farklı çözümleri vardır. Örneğin $r \neq 0$ olmak üzere $\lambda_1 = r$, $\lambda_2 = 2r$ seçersek $4r + 2r + 2\lambda_3 = 0$, yani $\lambda_3 = -3r$ bulunur. Demek ki verilen vektörler lineer bağımlıdır ve her $r \neq 0$ için

$$ru + 2rv - 3rw = 0 \Leftrightarrow u + 2v - 3w = 0$$

olur. Kontrol edelim:

$$u + 2v - 3w = (4 + 2 - 6, 0, -2 - 1 + 3) = (0,0,0).$$

Bu vektörlerin bağımlılığı geometrik olarak da açıktır: $u = 2w$ ve $v = \frac{1}{2}w$ olduğundan üçü de aynı doğrultudadır.
■

Önerme 7.14 (Sıfır vektörü içeren takımlar bağımlıdır). *0 vektörü her vektörle lineer bağımlıdır. Daha genel olarak, içinde 0 bulunan her vektör takımı lineer bağımlıdır.*

İspat.
$u_1 = 0$ olsun ve $u_2, \ldots, u_k$ keyfi vektörler olsun. $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$ seçelim. Önerme 7.9 gereği

$$1 \cdot 0 + 0\,u_2 + \ldots + 0\,u_k = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

olur ve katsayılardan biri ($\lambda_1 = 1$) sıfırdan farklıdır. Demek ki takım lineer bağımlıdır. $k = 2$ alınırsa 0'ın her u_2 vektörüyle lineer bağımlı olduğu elde edilir.
■

7.6.1 İki ve Üç Vektörün Geometrik Yorumu

Lineer bağımlılık cebirsel bir tanımdır, ama uzayda çok somut bir anlamı vardır: iki vektör için "paralel olmak", üç vektör için "aynı düzleme yatmak".

Sonuç 7.1 (İki vektörün bağımlılığı ve paralellik). *$u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $u \parallel v$ olmasıdır.*

İspat.
Bağımlıysa paraleldir. *u ile v lineer bağımlı olsun. O zaman $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ olmak üzere*

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$$

vardır. Burada $\lambda_1 \neq 0$'dır: $\lambda_1 = 0$ olsaydı $\lambda_2 \neq 0$ ve $\lambda_2 v = 0$ olur, iki yan λ_2'ye bölünerek $v = 0$ bulunurdu; oysa $v \neq 0$. Aynı nedenle $\lambda_2 \neq 0$ da olmalıdır, yoksa $\lambda_1 u = 0$'dan $u = 0$ çıkardı. Eşitliği λ_1'e bölüp düzenlersek

 CC BY-NC-SA 4.0

$$u = \lambda v, \qquad \lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \neq 0$$

olur. Böylece $v \parallel u$, paralelliğin simetrisinden de $u \parallel v$'dir (Tanım 7.15).
Paralelse bağımlıdır. *$u \parallel v$ olsun. Paralellik simetrik olduğundan $v \parallel u$'dur; o zaman $u = \lambda v$ olacak biçimde bir $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ vardır. Buradan*

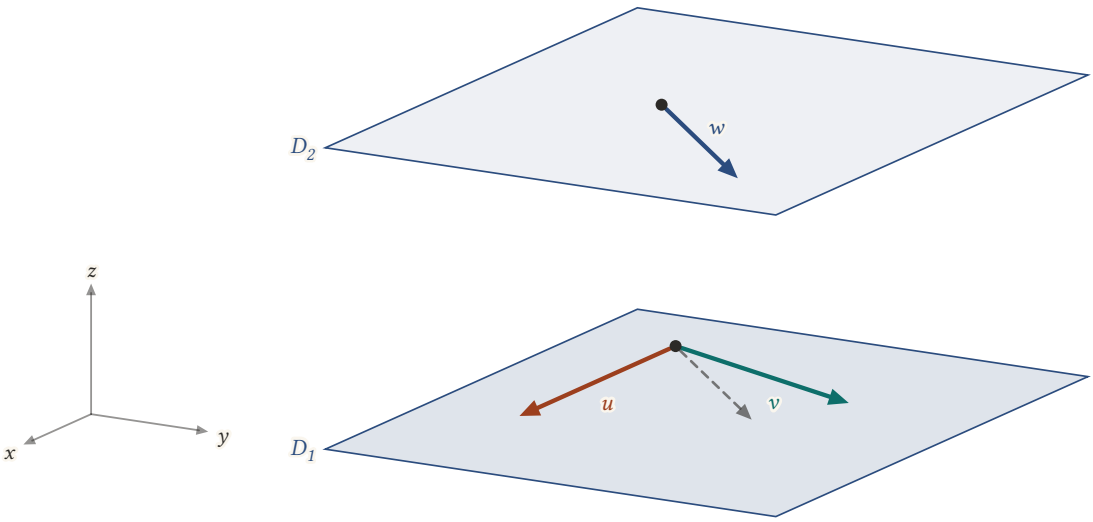
$$1 \cdot u + (-\lambda)\, v = 0$$

elde edilir. u'nun katsayısı $1 \neq 0$ olduğundan u ile v lineer bağımlıdır.
■

Üç vektör için benzer yorumu vermeden önce "aynı düzleme yatmak" kavramını adlandıralım.

Tanım 7.20 (Düzlemdeş vektörler). Ortak bir başlangıç noktasından çizilen temsilcileri aynı düzlemde kalan vektörlere **düzlemdeş** vektörler denir.

Yani düzlemdeş vektörlerin temsilcileri ortak bir noktadan çizilmek zorunda değildir: keyfi yerlerde çizilen temsilciler aynı düzlemde ya da birbirine paralel düzlemlerde bulunur.



Şekil 7.17: Düzlemdeş vektörler: u ile v alt düzlemde, w ona paralel üst düzlemde çizilmiştir. w'nun ortak başlangıç noktasından çizilen kopyası (kesikli) da alt düzlemde kalır.

Sonuç 7.2 (Üç vektörün bağımlılığı ve düzlemdeşlik). *$u, v, w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul u, v, w'nin düzlemdeş olmasıdır; yani temsilcilerinin aynı düzlemde ya da paralel düzlemlerde bulunmasıdır.*

İspat.
Temsilcileri ortak bir O noktasından çizelim; düzlemdeşlik, bu okların bir düzlemde kalmasıdır.
Bağımlıysa düzlemdeştir. *u, v, w lineer bağımlı olsun. O zaman $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ olmak üzere $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ vardır. Vektörlerin adlarını gerekirse değiştirerek $\lambda_1 \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. Eşitliği λ_1'e bölüp düzenlersek*

$$u = av + bw, \qquad a = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad b = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$$

olur. av ve bw'nin O'dan başlayan temsilcileri, O'dan geçen ve v ile w'yu içeren bir $\mathfrak{D}$ düzleminde kalır (v ile w paralelse bu temsilciler bir doğru üzerindedir ve o doğruyu içeren herhangi bir düzlem işimizi görür). Terimlerden biri sıfırsa ya da $av \parallel bw$ ise toplam bu iki okun ortak doğrusu üzerinde, dolayısıyla yine

 CC BY-NC-SA 4.0

$\mathfrak{D}$'dedir: örneğin $av = \mu\, bw$ ise $u = (\mu + 1)\, bw$ olur (Önerme 7.8). Aksi hâlde paralelkenar kuralına göre (Önerme 7.6) $u = av + bw$, bu iki ok üzerine kurulan paralelkenarın köşegenidir ve yine $\mathfrak{D}$'dedir. Demek ki u, v, w düzlemdeştir.

Düzlemdeşse bağımlıdır. *u, v, w'nin O'dan çizilen temsilcileri bir $\mathfrak{D}$ düzleminde kalsın. İki durum vardır.*

Durum 1: vektörlerden ikisi paralel. *Örneğin $u \parallel v$ olsun. Paralellik simetrik olduğundan (Tanım 7.15) $u = \lambda v$ olacak biçimde bir $\lambda \neq 0$ vardır. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\lambda$, $\lambda_3 = 0$ seçilirse*

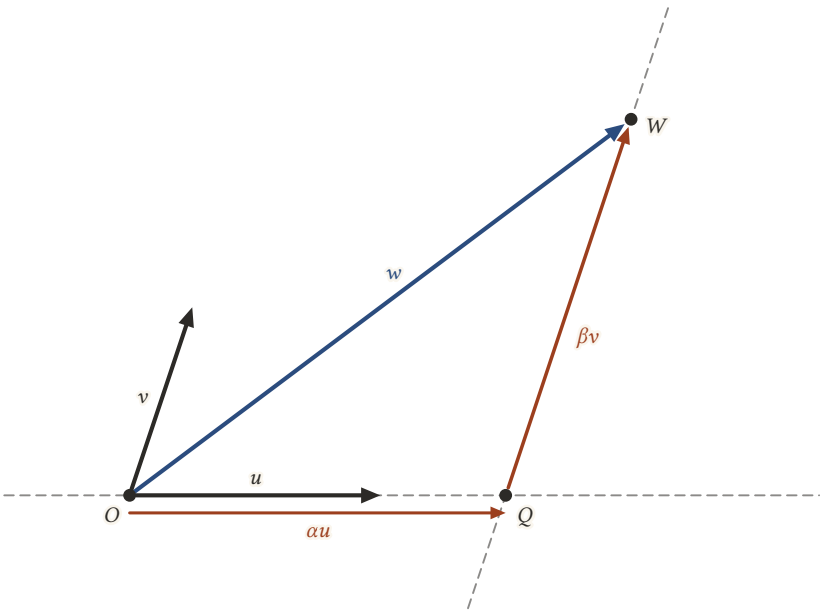
$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = u - \lambda v + 0\, w = 0$$

olur ve $\lambda_1 \neq 0$ olduğundan u, v, w lineer bağımlıdır. Başka iki vektörün paralel olduğu durum aynı biçimde ele alınır.

Durum 2: hiçbir ikisi paralel değil. *w'nin ucu W olsun, yani $w = \overrightarrow{OW}$. W'den geçip v'ye paralel olan doğruyu çizelim. Bu doğru ile O'dan geçen u doğrusu aynı $\mathfrak{D}$ düzlemindedir ve $u \nparallel v$ olduğundan paralel değildir; o hâlde tek bir Q noktasında kesişirler. $\overrightarrow{OQ}$, u doğrusu üzerinde olduğundan u ile aynı doğrultuludur ve Önerme 7.11 gereği bir α için $\overrightarrow{OQ} = \alpha u$'dur. $\overrightarrow{QW}$ de v'ye paralel doğru üzerinde olduğundan aynı önerme gereği bir β için $\overrightarrow{QW} = \beta v$'dir. Üçgen kuralından*

$$w = \overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QW} = \alpha u + \beta v$$

bulunur. Buradan $\alpha u + \beta v + (-1)\, w = 0$ elde edilir. w'nun katsayısı $-1 \neq 0$ olduğundan u, v, w lineer bağımlıdır.



Şekil 7.18: W*'den* v*'ye paralel çizilen doğru,* u *doğrusunu* Q*'da keser; böylece* w = αu + βv *olur.*

■

7.7 Baz ve Boyut

Her vektörü e_1, e_2, e_3 cinsinden tek türlü yazabildiğimizi gördük. Bu özelliği taşıyan vektör takımlarına baz denir; her bazın tam üç vektörden oluşması, uzayın üç boyutlu olmasının kesin anlamıdır.

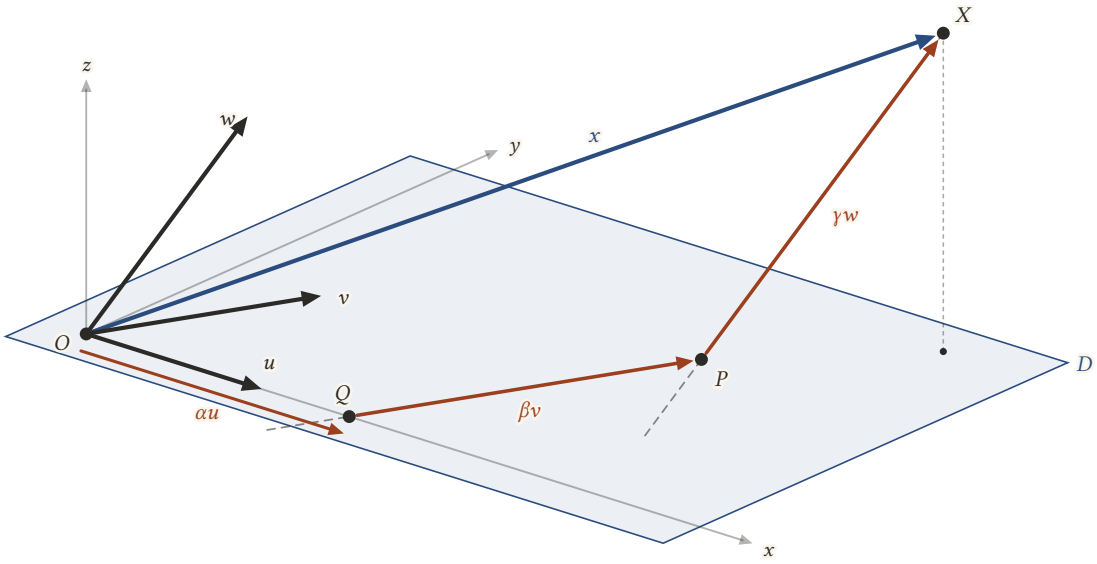
Tanım 7.21 (Baz). Boş olmayan sonlu bir $S \subset \mathbb{R}^3$ kümesi aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa S'ye $\mathbb{R}^3$'te bir **baz** (taban) denir:

- $\mathbb{R}^3$'teki her vektör, S'deki vektörlerin bir lineer toplamı olarak yazılabilir;
- S lineer bağımsızdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani baz, uzaydaki bütün vektörleri üretmeye yeten ama hiç gereksiz eleman içermeyen bir vektör takımıdır.

Teorem 7.2 (Bazlar tam olarak üç vektörlüdür). *$\mathbb{R}^3$'teki lineer bağımsız her üç vektör bir baz oluşturur. Tersine, $\mathbb{R}^3$'teki her baz lineer bağımsız üç vektörden oluşur.*



Şekil 7.19: X'ten w'ya paralel çizilen doğru u ile v'nin düzlemini P'de, P'den v'ye paralel çizilen doğru u doğrusunu Q'da keser; böylece x = αu + βv + γw olur.

İspat.
Lineer bağımsız üç vektör bir bazdır. *u, v, w lineer bağımsız olsun. Bağımsızlık koşulu zaten sağlandığından, her x vektörünün u, v, w'nin bir lineer toplamı olduğunu göstermek yeter.*
Önce üç gözlem yapalım. Vektörlerin hiçbiri 0 değildir (Önerme 7.14). Hiçbir ikisi paralel değildir: örneğin $u = \lambda v$ olsaydı $u - \lambda v + 0\,w = 0$ sıfırdan farklı bir katsayıyla sağlanırdı. Üçü düzlemdeş değildir (Sonuç 7.2).
Şimdi u, v, w, x'in temsilcilerini ortak bir O noktasından çizelim ve $x = \overrightarrow{OX}$ diyelim. u ile v paralel olmadığından, O'dan geçen ve u ile v'yi içeren tek bir $\mathfrak{D}$ düzlemi vardır. w bu düzleme paralel değildir (yoksa u, v, w düzlemdeş olurdu); bu yüzden X'ten geçip w'ya paralel olan doğru $\mathfrak{D}$'yi tek bir P noktasında keser. $\overrightarrow{PX}$ bu doğru üzerinde olduğundan w ile aynı doğrultuludur ve Önerme 7.11 gereği bir γ için $\overrightarrow{PX} = \gamma w$'dur ($P = X$ ise $\gamma = 0$).
$\overrightarrow{OP}$ ise $\mathfrak{D}$ düzlemindedir. P'den geçip v'ye paralel olan doğru, u doğrusunu tek bir Q noktasında keser (ikisi de $\mathfrak{D}$'de ve paralel değiller). Üç vektörün düzlemdeşliği üzerine verilen sonucun (Sonuç 7.2) ispatındaki gibi, Önerme 7.11 gereği $\overrightarrow{OQ} = \alpha u$ ve $\overrightarrow{QP} = \beta v$ olacak biçimde α, β vardır. Üçgen kuralını iki kez uygularsak

$$x = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PX} = \alpha u + \beta v + \gamma w$$

bulunur. Böylece $\{u, v, w\}$ bir bazdır.
Her baz lineer bağımsız üç vektörden oluşur. *S bir baz olsun.*
S en az üç vektör içerir. S'de bir ya da iki vektör olduğunu varsayalım. Bu vektörlerin bütün lineer toplamları, O'dan çizildiğinde, O'dan geçen ve S'nin vektörlerini içeren bir $\mathfrak{D}$ düzleminde kalır (paralelkenar kuralı). e_1, e_2, e_3'ün üçü birden $\mathfrak{D}$'de olamaz; olsalardı düzlemdeş olurlar ve Sonuç 7.2 gereği lineer bağımlı olurlardı, oysa bağımsız oldukları gösterilmişti (Örnek 7.11). $\mathfrak{D}$'de olmayan e_j, S'nin vektörlerinin bir lineer toplamı olarak yazılamaz; bu da bazın birinci koşuluna aykırıdır.
S en çok üç vektör içerir. S'de birbirinden farklı dört vektör s_1, s_2, s_3, s_4 bulunduğunu varsayalım. s_1, s_2, s_3 lineer bağımsızdır: $\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \lambda_3 s_3 = 0$ ise buna $0\,s_4$ ekleyerek S'nin elemanları arasında bir bağıntı elde ederiz ve S bağımsız olduğundan $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ olur. Öyleyse ilk kısım gereği $\{s_1, s_2, s_3\}$ bir bazdır ve $s_4 = as_1 + bs_2 + cs_3$ yazılabilir. Buradan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$as_1 + bs_2 + cs_3 + (-1)\, s_4 = 0$$

çıkar; s_4'ün katsayısı $-1 \neq 0$ olduğundan S lineer bağımlıdır. Bu, bazın ikinci koşuluna aykırıdır. Demek ki S tam üç vektörden oluşur ve bu üç vektör, bazın tanımı gereği lineer bağımsızdır.
■

Tanım 7.22 (Boyut). Bir bazdaki vektörlerin sayısına **boyut** denir.

Yani $\mathbb{R}^3$'ün boyutu 3'tür. Bu tanımın anlamlı olması, farklı bazların farklı sayıda vektör içerememesine bağlıdır; Teorem 7.2 tam olarak bunu güvence altına alır: $\mathbb{R}^3$'ün her bazında üç vektör vardır.

Sonuç 7.3 (Dört ya da daha çok vektör bağımlıdır). *$\mathbb{R}^3$'teki dört ya da daha çok sayıda vektör lineer bağımlıdır.*

İspat.
$u_1, u_2, ..., u_k$ vektörleri verilsin ve $k \geq 4$ olsun. İki durum vardır.
u_1, u_2, u_3 lineer bağımlıysa, hepsi birden sıfır olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ile $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ vardır. Kalan vektörlerin katsayılarını 0 alırsak bütün takım için sıfırdan farklı katsayılı bir bağıntı elde ederiz.
u_1, u_2, u_3 lineer bağımsızsa, Teorem 7.2 gereği bir baz oluştururlar. O hâlde $u_4 = au_1 + bu_2 + cu_3$ yazılabilir ve

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + (-1)\, u_4 + 0\, u_5 + ... + 0\, u_k = 0$$

olur. u_4'ün katsayısı $-1 \neq 0$ olduğundan takım lineer bağımlıdır.
■

Eksen birim vektörleri, en çok kullanılan bazı oluşturur.

Önerme 7.15 (Eksen birim vektörleri bir bazdır). *$\{e_1, e_2, e_3\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$'ün bir bazıdır.*

İspat.
e_1, e_2, e_3'ün lineer bağımsız olduğunu gördük (Örnek 7.11). Önerme 7.13 de her vektörün bu üç vektörün bir lineer toplamı olduğunu söyler. Bazın iki koşulu da sağlanır. (Aynı sonuç, lineer bağımsız üç vektör olmalarından Teorem 7.2 ile de çıkar.)
■

Bu bazın vektörleri ayrıca birim vektördür, $\| e_1 \| = \| e_2 \| = \| e_3 \| = 1$. Üstelik her biri bir koordinat ekseni üzerinde durur ve koordinat eksenleri birbirine dik olduğundan bu üç vektörü ikişer ikişer dik sayarız: $e_1 \perp e_2$, $e_1 \perp e_3$, $e_2 \perp e_3$. Vektörleri birim uzunlukta olan ve birbirine dik doğrular üzerinde duran bir baza **ortonormal baz** denir. Vektörlerin dikliğini koordinatlarla ifade etmeyi İç Çarpım bölümünde öğreneceğiz.

Tanım 7.23 (Standart baz). Vektörleri birim uzunlukta olan ve koordinat eksenleri birbirine dik olduğundan ikişer ikişer dik olan, yani ortonormal bir baz olan $\{e_1, e_2, e_3\}$ kümesine $\mathbb{R}^3$'ün **standart bazı** denir.

Yani bir vektörün "koordinatları" dediğimiz sayılar, onun standart baz cinsinden yazılışındaki katsayılardır:

$$u = (u_1, u_2, u_3) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3.$$

7.8 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar, üçgen kuralını, lineer toplamları ve lineer bağımsızlık testini çalıştırır.

Alıştırma 7.1 (Yönlü doğru parçalarıyla birleşme özdeşliği). Uzayda herhangi A, B, C, D noktaları için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$$

özdeşliğini doğrulayın.

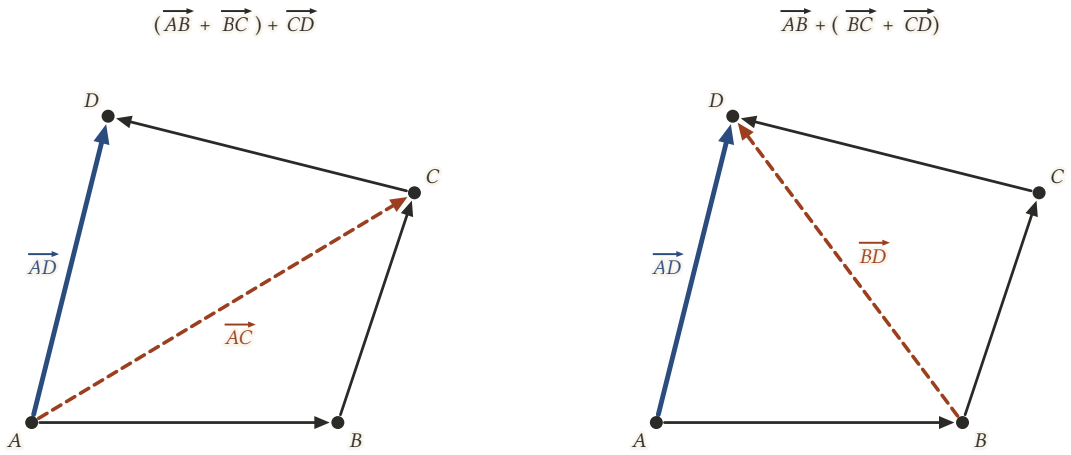
Çözüm.
İki tarafı ayrı ayrı üçgen kuralıyla (Önerme 7.5) sadeleştirelim.
Sol taraf. Parantezin içi $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$'dir. O hâlde

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

Sağ taraf. Parantezin içi $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$'dir. O hâlde

$$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

İki taraf da $\overrightarrow{AD}$'ye eşit olduğundan özdeşlik doğrudur. Bu, vektör işlemlerinin birleşme özelliğinin (Teorem 7.1) $u=\overrightarrow{AB}$, $v=\overrightarrow{BC}$, $w=\overrightarrow{CD}$ için geometrik görünümüdür: hangi iki oku önce birleştirirsek birleştirelim, A'dan D'ye varırız.



Şekil 7.20: Solda önce AB ile BC birleştirilip AC, sağda önce BC ile CD birleştirilip BD bulunur; iki yol da A'dan D'ye varır.

■

Alıştırma 7.2 (Ağırlık merkezine giden vektörlerin toplamı). Bir ABC üçgeninin ağırlık merkezi G olsun.

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$$

olduğunu gösterin.

Çözüm.
BC kenarının orta noktası M olsun. Ağırlık merkezi, kenarortayları köşeden itibaren $2:1$ oranında böler (Önerme 2.2; orada düzlemde gösterildi, üçgen bir düzlemde yattığından uzayda da geçerlidir); yani G, AM kenarortayı üzerindedir ve $|AG|=2|GM|$'dir.
Adım 1: $\overrightarrow{GA}$'yı $\overrightarrow{GM}$ cinsinden yazalım. $\overrightarrow{GA}$ ile $\overrightarrow{GM}$ aynı doğru üzerindedir ve G noktası A ile M'nin arasında olduğundan zıt yönlüdür. Uzunluklar oranı $\|\overrightarrow{GA}\|/\|\overrightarrow{GM}\|=2$ olduğundan Önerme 7.11 gereği

$$\overrightarrow{GA}=-2\,\overrightarrow{GM}.$$

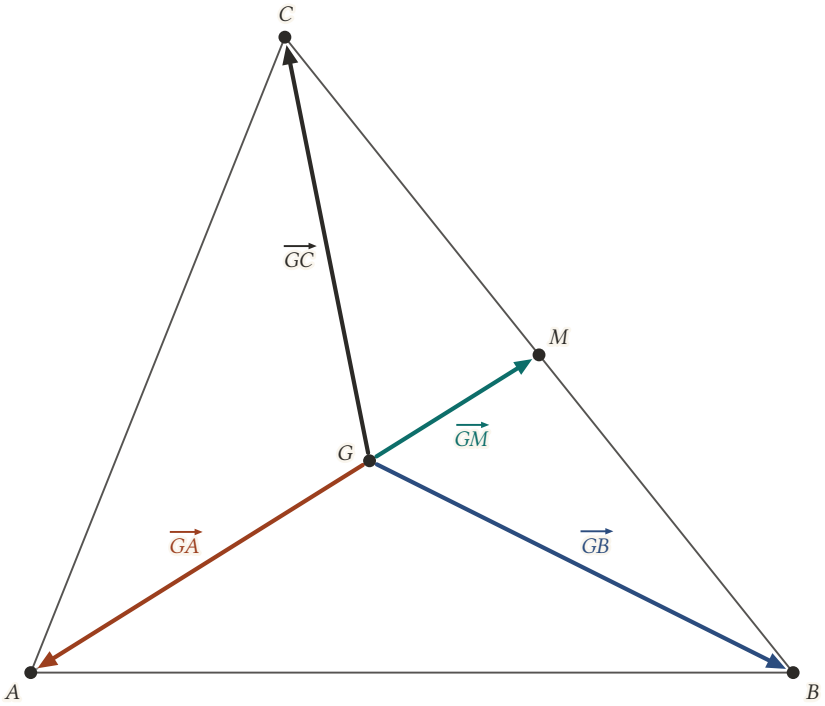
 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$'yi hesaplayalım. Üçgen kuralından $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}$ ve $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC}$'dir. M, BC'nin orta noktası olduğundan $\overrightarrow{MB}$ ile $\overrightarrow{MC}$ eşit uzunlukta ve zıt yönlüdür: $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MB}$. Buna göre

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\,\overrightarrow{GM}+\left(\,\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MB}\,\right)=2\,\overrightarrow{GM}.$$

Adım 3: Toplayalım.

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-2\,\overrightarrow{GM}+2\,\overrightarrow{GM}=0.$$



Şekil 7.21: G ağırlık merkezinden köşelere giden vektörler; M, BC'nin orta noktasıdır ve $GA = -2\,GM$, $GB + GC = 2\,GM$ olur.

■

Alıştırma 7.3 (Bir vektörü verilen vektörlerin lineer toplamı olarak yazmak). $\mathbb{R}^3$'te $(1,0,0)$ vektörünü $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ ve $(1,1,0)$ vektörlerinin bir lineer toplamı olarak yazın.

Çözüm.
$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(1,0,1)+\lambda_3(1,1,0)=(1,0,0)$$

olacak biçimde katsayılar arıyoruz. Sol tarafı açalım:

$$\begin{aligned}&(0,\lambda_1,\lambda_1)+(\lambda_2,0,\lambda_2)+(\lambda_3,\lambda_3,0)\\&=(\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2).\end{aligned}$$

Karşılıklı koordinatları eşitleyelim:

$$\begin{aligned}\lambda_2+\lambda_3&=1,\,(1)\\\lambda_1+\lambda_3&=0,\,(2)\\\lambda_1+\lambda_2&=0.\,(3)\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç denklemi taraf tarafa toplarsak $2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=1$, yani

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\frac{1}{2} \qquad (4)$$

bulunur. Şimdi (4)'ten sırayla (1), (2), (3)'ü çıkaralım:

- (4) – (1): $\lambda_1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$,
- (4) – (2): $\lambda_2=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$,
- (4) – (3): $\lambda_3=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

Böylece

$$(1,0,0)=-\frac{1}{2}(0,1,1)+\frac{1}{2}(1,0,1)+\frac{1}{2}(1,1,0)$$

yazılabilir. Kontrol için sağ tarafı koordinat koordinat toplayalım:

$$\left(\,0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0\,\right)=(1,0,0).$$

■

Alıştırma 7.4 (İki vektörün lineer bağımsızlığı). $\mathbb{R}^3$'te $(-1,1,0)$ ve $(0,1,2)$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterin.

Çözüm.
$\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ olmak üzere sıfır vektörünü veren lineer toplamı yazalım:

$$\lambda_1(-1,1,0)+\lambda_2(0,1,2)=(0,0,0).$$

Sol tarafı açıp koordinat koordinat toplarsak

$$\begin{aligned}&(-\lambda_1,\lambda_1,0)+(0,\lambda_2,2\lambda_2)\\&\quad=(-\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2,2\lambda_2)=(0,0,0)\end{aligned}$$

bulunur.
Birinci koordinattan $\lambda_1=0$, üçüncü koordinattan $\lambda_2=0$ bulunur; ikinci koordinat da bu değerlerle sağlanır. Sıfır vektörünü veren tek seçim $\lambda_1=\lambda_2=0$ olduğundan verilen vektörler lineer bağımsızdır. Bu sonucu Sonuç 7.1 ile de görebiliriz: $(0,1,2)=\lambda(-1,1,0)$ olsaydı birinci koordinattan $\lambda=0$, ikinci koordinattan $\lambda=1$ çıkardı; bu çelişki, vektörlerin paralel olmadığını gösterir.
■

Alıştırma 7.5 (Üç vektörün lineer bağımsızlığı). $\mathbb{R}^3$'te $(0,1,1)$, $(0,2,1)$ ve $(1,5,3)$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterin.

Çözüm.
$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lambda_1(0,1,1)+\lambda_2(0,2,1)+\lambda_3(1,5,3)=(0,0,0)$$

olsun. Sol taraf koordinat koordinat toplanırsa

$$\left(\,\lambda_3,\lambda_1+2\lambda_2+5\lambda_3,\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3\,\right)=(0,0,0)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\lambda_3&=0,\\ \lambda_1+2\lambda_2+5\lambda_3&=0,\\ \lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3&=0\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

sistemi elde edilir. Birinci denklem $\lambda_3 = 0$ verir. Bunu yerine koyarsak $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ kalır. Bu iki denklemi taraf tarafa çıkarırsak $\lambda_2 = 0$, sonra $\lambda_1 = 0$ bulunur. Tek çözüm $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ olduğundan verilen vektörler lineer bağımsızdır; Teorem 7.2 gereği bir baz da oluştururlar.
■

Alıştırma 7.6 (Negatif eksen birim vektörleriyle yazılış). $\mathbb{R}^3$'teki her vektörün $(-1,0,0)$, $(0,-1,0)$ ve $(0,0,-1)$ vektörlerinin bir lineer toplamı olarak yazılabileceğini gösterin.

Çözüm.
$u = (u_1, u_2, u_3)$ keyfi bir vektör olsun. u'nun verilen vektörlerin bir lineer toplamı olarak yazılması,

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) = \lambda_1(-1,0,0) + \lambda_2(0,-1,0)\\ +\lambda_3(0,0,-1)\end{aligned}$$

olacak biçimde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reel sayılarının var olması demektir. Sağ taraf $(-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3)$'tür; karşılıklı koordinatları eşitlersek

$$u_1 = -\lambda_1, \qquad u_2 = -\lambda_2, \qquad u_3 = -\lambda_3,$$

yani $\lambda_1 = -u_1$, $\lambda_2 = -u_2$, $\lambda_3 = -u_3$ bulunur. Bu sayılar her u için vardır; dolayısıyla

$$u = -u_1(-1,0,0) - u_2(0,-1,0) - u_3(0,0,-1)$$

yazılabilir. Aslında verilen vektörler $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$'tür ve bu eşitlik $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ yazılışının (Önerme 7.13) işaretleri yeniden düzenlenmiş hâlidir.
■

Bu bölümde vektörlerle toplama ve skalerle çarpma yapmayı, lineer bağımsızlığı ve bazı öğrendik. Ancak henüz iki vektör arasındaki açıyı ya da dikliği ölçen bir aracımız yok. Bir sonraki bölüm İç Çarpım, iki vektörden bir sayı üreten bu işlemi tanıtarak uzunluk, açı ve diklik kavramlarını aynı çatı altında toplayacak.

 CC BY-NC-SA 4.0

8. İç Çarpım

Vektörleri toplamayı, bir sayıyla çarpmayı ve lineer bağımsızlığı Vektörler bölümünde gördük. Ama bu işlemlerin hiçbiri bize bir vektörün ne kadar uzun olduğunu ya da iki vektörün birbiriyle hangi açıyı yaptığını doğrudan söylemez. Bu bölümde iki vektörden tek bir sayı üreten yeni bir işlem tanımlayacağız: **iç çarpım**. Bu tek sayı; uzunluğu, açıyı, dikliği ve bir vektörün başka bir vektör üzerindeki gölgesini, yani dik izdüşümünü hesaplamamızı sağlayacak.
Bölüm boyunca $u = (u_1, u_2, u_3)$ vektörünün uzunluğunu (normunu)

$$\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

ile gösteriyoruz. Mutlak değer çizgilerini $| \langle u, v \rangle |$ gibi sayılara ayırarak iki gösterimin karışmasını önlüyoruz.

8.1 İç çarpımın tanımı

İç çarpımın tanımı çok basittir: iki vektörün aynı sıradaki bileşenleri çarpılır ve bu çarpımlar toplanır.

Tanım 8.1 (İç çarpım). $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbb{R}^3$'te iki vektör olsun.

$$\begin{aligned} \langle\, , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{R}^3$ üzerinde **iç çarpım fonksiyonu**, $\langle u, v \rangle$ sayısına da u ile v vektörlerinin **iç çarpımı** denir.

Yani iç çarpım iki vektör alır ve bir **sayı** verir; sonuç bir vektör değildir. Örneğin $\langle (1,2,3), (4,5,6) \rangle = 4 + 10 + 18 = 32$ olur.
İlk örneklerimizde aynı dört vektörü kullanacağız.

Örnek 8.1 (Sıfır vektörüyle iç çarpım). $u = (0,0,0)$ ve $v = (1,0,0)$ olsun. $\langle u, v \rangle$ iç çarpımını hesaplayınız.

> **Çözüm.**
> Bileşenleri sırayla çarpıp topluyoruz:
>
> $$\langle u, v \rangle = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$
>
> Bütün bileşenleri sıfır olduğu için sıfır vektörünün her vektörle iç çarpımı 0'dır.
> ■

Örnek 8.2 (Negatif çıkan iç çarpım). $v = (1,0,0)$ ve $w = \left(-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ olsun. $\langle v, w \rangle$ iç çarpımını hesaplayınız.

> **Çözüm.**
>
> $$\langle v, w \rangle = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1.$$
>
> Görüldüğü gibi iç çarpım negatif de olabilir; bu işaretin geometrik anlamını birazdan göreceğiz.
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 8.3 (Köklü bileşenlerle iç çarpım). $v = (1,0,0)$ ve $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1\right)$ olsun. $\langle v, x\rangle$ iç çarpımını hesaplayınız.

Çözüm.

$$\langle v, x\rangle = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Örnek 8.4 (Sıfır çıkan iç çarpım). $w = \left(-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1\right)$ olsun. $\langle w, x\rangle$ iç çarpımını hesaplayınız.

Çözüm.

$$\langle w, x\rangle = (-1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

İki vektör de sıfırdan farklı olduğu hâlde iç çarpımları 0 çıktı. Bunun "iki vektör birbirine diktir" demek olduğunu açı konusunda göreceğiz.
■

Standart baz vektörlerinin birbiriyle iç çarpımları, bölümün sonunda doğrultman kosinüslerini hesaplarken işimize yarayacak.

Örnek 8.5 (Standart baz vektörlerinin iç çarpımları). $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ ve $e_3 = (0,0,1)$ olsun. $i, j \in \{1,2,3\}$ için $\langle e_i, e_j\rangle$ değerlerini bulunuz.

Çözüm.
Önce bir vektörün kendisiyle iç çarpımına bakalım:

$$\langle e_1, e_1\rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1,$$

ve aynı biçimde $\langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 1$ bulunur.
Farklı iki baz vektöründe ise 1'lerin yeri çakışmaz; her terimde çarpanlardan biri 0'dır:

$$\langle e_1, e_2\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0,$$

ve aynı biçimde $\langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = 0$ olur. İç çarpım simetrik olduğundan (birazdan göreceğiz) sıra değişince sonuç değişmez. Özetle

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Bu, Vektörler bölümünde söylenen "$\{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal bir bazdır" ifadesinin iç çarpım diliyle yazılışıdır: her baz vektörünün uzunluğu 1'dir ve farklı ikisinin iç çarpımı 0'dır; bunun diklik demek olduğunu birazdan göreceğiz.
■

8.2 İç çarpımın özellikleri

İç çarpımla hesap yaparken sürekli bileşenlere inmek zorunda kalmamak için birkaç temel kurala ihtiyacımız var. Bu kurallar, sıradan sayılarla çarpma yaparken kullandığımız değişme ve dağılma özelliklerine çok benzer.

Önerme 8.1 (İç çarpımın özellikleri). *$u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olsun. İç çarpım fonksiyonu şu özelliklere sahiptir:*
i) ***Simetri:*** $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.
ii) ***Bilineerlik:***

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\langle \lambda_1 u + \lambda_2 v, w\rangle = \lambda_1\langle u, w\rangle + \lambda_2\langle v, w\rangle,$$
$$\langle u, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1\langle u, v\rangle + \lambda_2\langle u, w\rangle.$$

iii) ***Pozitif tanımlılık:*** $\langle u, u\rangle = \| u \|^2 \geq 0$ *ve* $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

İspat.
$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ *yazalım.*
i) Reel sayılarda çarpma değişmeli olduğundan

$$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \langle v, u\rangle.$$

ii) $\lambda_1 u + \lambda_2 v$ *vektörünün k'inci bileşeni* $\lambda_1 u_k + \lambda_2 v_k$ *olduğundan*

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 u + \lambda_2 v, w\rangle &= \sum_{k=1}^{3} (\lambda_1 u_k + \lambda_2 v_k)\, w_k \\ &= \lambda_1 \sum_{k=1}^{3} u_k w_k + \lambda_2 \sum_{k=1}^{3} v_k w_k \\ &= \lambda_1\langle u, w\rangle + \lambda_2\langle v, w\rangle\end{aligned}$$

bulunur; ikinci satırda reel sayılarda dağılma özelliğini kullandık. İkinci eşitlik, birincinin ve simetrinin sonucudur:

$$\begin{aligned}\langle u, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle &= \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle \\ &= \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle \\ &= \lambda_1\langle u, v\rangle + \lambda_2\langle u, w\rangle.\end{aligned}$$

iii) Tanımdan

$$\langle u, u\rangle = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \| u \|^2$$

olur. Kareler negatif olmadığından bu toplam 0*'dan küçük olamaz. Negatif olmayan üç sayının toplamı ancak üçü birden* 0 *ise* 0*'dır; yani* $\langle u, u\rangle = 0$ *olması* $u_1 = u_2 = u_3 = 0$*, başka bir deyişle* $u = 0$ *olması demektir. Tersine* $u = 0$ *ise* $\langle u, u\rangle = 0$ *olduğu açıktır.*
■

Yani iç çarpımı sıradan bir çarpma gibi açabiliriz: parantezler dağıtılır, sayılar dışarı alınır, sıra önemsizdir. Örneğin

$$\begin{aligned}\langle u + v, u + v\rangle &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= \| u \|^2 + 2\langle u, v\rangle + \| v \|^2\end{aligned}$$

olur; bu açılımı bölüm boyunca defalarca kullanacağız. Ayrıca iii) özelliğinden her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\| \lambda u \|^2 = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \lambda^2\langle u, u\rangle, \qquad \text{yani} \qquad \| \lambda u \| = | \lambda | \, \| u \|$$

elde ederiz.

8.3 Cauchy–Schwarz ve üçgen eşitsizlikleri

İki vektörün iç çarpımı ne kadar büyük olabilir? Aşağıdaki eşitsizlik, iç çarpımın mutlak değerinin uzunlukların çarpımını hiçbir zaman aşamayacağını söyler. Açıyı tanımlamamızı mümkün kılan da bu eşitsizlik olacak.

Teorem 8.1 (Cauchy–Schwarz eşitsizliği). $u, v \in \mathbb{R}^3$ *olsun. O zaman*

$$| \langle u, v\rangle | \leq \| u \| \, \| v \|$$

 CC BY-NC-SA 4.0

eşitsizliği geçerlidir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter koşul, u ile v vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

İspat.
$u = 0$ durumu. *Bu durumda iki taraf da 0'dır ve eşitlik sağlanır. Öte yandan $1 \cdot u + 0 \cdot v = 0$ sıfırdan farklı katsayılı bir lineer bağıntı olduğundan u ile v lineer bağımlıdır. Yani teorem bu durumda doğrudur.*
$u \neq 0$ durumu. *Rastgele bir $\lambda \in \mathbb{R}$ alalım. Pozitif tanımlılıktan ve bilineerlikten*

$$\begin{aligned} 0 \leq \| \lambda u + v \|^2 &= \langle \lambda u + v, \lambda u + v \rangle \\ &= \langle \lambda u, \lambda u \rangle + \langle \lambda u, v \rangle + \langle v, \lambda u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \lambda^2 \langle u, u \rangle + 2\lambda \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \| u \|^2 \lambda^2 + 2\langle u, v \rangle \lambda + \| v \|^2 \end{aligned} \tag{1}$$

yazılabilir. Sağ taraf λ'ya göre ikinci dereceden bir polinomdur ve baş katsayısı $\| u \|^2 > 0$'dır. Bu polinomun farklı iki reel kökü olsaydı, kökler arasında negatif değer alırdı; oysa (1)'e göre hiçbir λ için negatif değildir. O hâlde diskriminantı pozitif olamaz:

$$\begin{aligned} \Delta = 4\langle u, v \rangle^2 - 4 \| u \|^2 \| v \|^2 \leq 0 &\Rightarrow \langle u, v \rangle^2 \leq \| u \|^2 \| v \|^2 \\ &\Rightarrow | \langle u, v \rangle | \leq \| u \| \| v \| . \end{aligned}$$

Son adımda iki tarafın da negatif olmayan sayıların karesi olduğunu kullanarak karekök aldık.
Şimdi eşitlik durumunu inceleyelim ($u \neq 0$ olmaya devam ediyor).
($\Rightarrow$) $| \langle u, v \rangle | = \| u \| \| v \|$ olsun. O zaman $\Delta = 0$ olur ve (1)'deki polinomun

$$\lambda_0 = -\frac{\langle u, v \rangle}{\| u \|^2}$$

çift katlı kökü vardır. $\lambda = \lambda_0$ için (1)'den $\| \lambda_0 u + v \|^2 = 0$ çıkar; pozitif tanımlılıktan $\lambda_0 u + v = 0$, yani $v = -\lambda_0 u$ bulunur. Bu, $\lambda_0 u + 1 \cdot v = 0$ lineer bağıntısıdır; v'nin katsayısı $1 \neq 0$ olduğundan u ile v lineer bağımlıdır.
($\Leftarrow$) u ile v lineer bağımlı olsun: hepsi sıfır olmayan α, β için $\alpha u + \beta v = 0$. Burada $\beta = 0$ olsaydı $\alpha \neq 0$ ve $\alpha u = 0$ olur, bu da $u = 0$ demek olurdu; o hâlde $\beta \neq 0$'dır ve $\lambda = -\alpha/\beta$ ile $v = \lambda u$ yazılabilir. Bu durumda

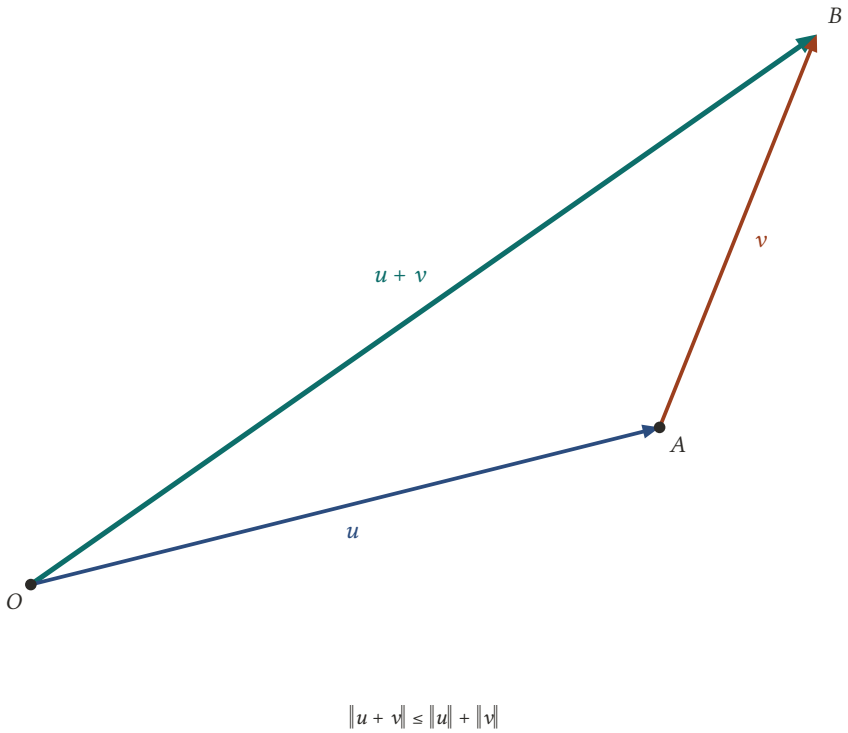
$$\begin{aligned} | \langle u, v \rangle | = | \langle u, \lambda u \rangle | &= | \lambda | \| u \|^2 \\ &= \| u \| \cdot \left(| \lambda | \| u \| \right) = \| u \| \| \lambda u \| = \| u \| \| v \| \end{aligned}$$

elde edilir.
■

Cauchy–Schwarz eşitsizliğinden, uzunluklar için iki kullanışlı eşitsizlik çıkar. Birincisi, geometrideki "üçgenin bir kenarı diğer iki kenarın toplamından uzun olamaz" kuralının vektör biçimidir.

Sonuç 8.1 (Üçgen eşitsizlikleri). *$u, v \in \mathbb{R}^3$ olsun. O zaman*
i) $\| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$,
ii) $\big| \| u \| - \| v \| \big| \leq \| u - v \|$
eşitsizlikleri geçerlidir.
Birinci eşitsizlikte u, v ve $u + v$ bir üçgenin kenarlarıdır: $u + v$ kenarının uzunluğu, öteki iki kenarın uzunlukları toplamını aşamaz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.1: u *ile* v *uç uca eklenince* u + v *üçgenin üçüncü kenarı olur. Bu kenarın uzunluğu öteki iki kenarın uzunlukları toplamını aşamaz:* ‖u + v‖ ≤ ‖u‖ + ‖v‖.

İspat.
i) İç çarpımın özelliklerinden

$$\begin{aligned} \| u+v \|^2 &= \langle u+v, u+v \rangle \\ &= \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle \\ &= \| u \|^2 + 2\langle u,v \rangle + \| v \|^2 \\ &\leq \| u \|^2 + 2 \mid \langle u,v \rangle \mid + \| v \|^2 \\ &\leq \| u \|^2 + 2 \| u \| \| v \| + \| v \|^2 \\ &= \left(\| u \| + \| v \| \right)^2 \end{aligned}$$

yazılabilir. Dördüncü satırda her sayının mutlak değerinden büyük olamayacağını ($\langle u,v \rangle \leq \mid \langle u,v \rangle \mid$)*, beşinci satırda Cauchy–Schwarz eşitsizliğini (Teorem 8.1) kullandık.* $\| u+v \|$ *ve* $\| u \| + \| v \|$ *negatif olmayan sayılar olduğundan karekök alarak*

$$\| u+v \| \leq \| u \| + \| v \|$$

elde edilir.
ii) Bu kez $-\langle u,v \rangle \geq - \mid \langle u,v \rangle \mid$ *ve (yine Cauchy–Schwarz eşitsizliğinden)* $- \mid \langle u,v \rangle \mid \geq - \| u \| \| v \|$ *olduğunu kullanıyoruz:*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\| u-v \|^2 &= \langle u-v, u-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \| u \|^2 - 2\langle u,v\rangle + \| v \|^2 \\ &\geq \| u \|^2 - 2\,|\,\langle u,v\rangle\,| + \| v \|^2 \\ &\geq \| u \|^2 - 2\,\| u \|\,\| v \| + \| v \|^2 \\ &= (\,\| u \| - \| v \|\,)^2.\end{aligned}$$

Sağdaki sayı $|\,\| u \| - \| v \|\,|^2$*'ye eşittir.* $\| u-v \|$ *ve* $|\,\| u \| - \| v \|\,|$ *negatif olmadığından karekök alarak*

$$|\,\| u \| - \| v \|\,| \leq \| u-v \|$$

elde edilir.
■

Örnek 8.6 (Eşitsizlikleri sayılarla sınamak). $u=(1,2,2)$ ve $v=(3,0,4)$ vektörleri için Cauchy–Schwarz eşitsizliğini ve iki üçgen eşitsizliğini sayılarla doğrulayınız.

Çözüm.
Önce gerekli sayıları hesaplayalım:

$$\langle u,v\rangle = 1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 2\cdot 4 = 11,$$

$$\| u \| = \sqrt{1+4+4} = 3, \qquad \| v \| = \sqrt{9+0+16} = 5.$$

Cauchy–Schwarz: $|\,\langle u,v\rangle\,| = 11 \leq 15 = \| u \|\,\| v \|$. Eşitlik yoktur; gerçekten de u ile v birbirinin katı değildir (v'nin ikinci bileşeni 0 iken u'nunki 2'dir).
Üçgen eşitsizliği: $u+v=(4,2,6)$ olduğundan

$$\| u+v \| = \sqrt{16+4+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \approx 7{,}48$$

ve bu sayı $\| u \| + \| v \| = 8$'den küçüktür.
İkinci eşitsizlik: $u-v=(-2,2,-2)$ olduğundan

$$\| u-v \| = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$$

ve bu sayı $|\,\| u \| - \| v \|\,| = |\,3-5\,| = 2$'den büyüktür.
■

8.4 İki vektör arasındaki açı

Düzlem geometrisinden bir üçgenin kenar uzunlukları ile açıları arasındaki bağı biliyoruz: Kosinüs Teoremi. Şimdi bu teoremi vektörlere uygulayarak açıyı iç çarpımla ifade edeceğiz.

Tanım 8.2 (İki vektör arasındaki açı). $u,v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ olsun. Bu iki vektörü aynı O başlangıç noktasından çizelim: $u=\overrightarrow{OA}$ ve $v=\overrightarrow{OB}$. $\widehat{AOB}$ açısının ölçüsüne u ile v **arasındaki açı** denir ve $\measuredangle(u,v)$ ile gösterilir. Bu açı her zaman

$$0 \leq \measuredangle(u,v) \leq \pi$$

aralığındadır.

Yani iki vektörü "kuyruk kuyruğa" koyup aralarında kalan küçük açıyı ölçüyoruz. Aynı yönlü iki vektör arasındaki açı 0, zıt yönlü iki vektör arasındaki açı π'dir. Açının tanımında u ile v'nin rolleri simetrik olduğundan $\measuredangle(u,v) = \measuredangle(v,u)$ olur.

 CC BY-NC-SA 4.0

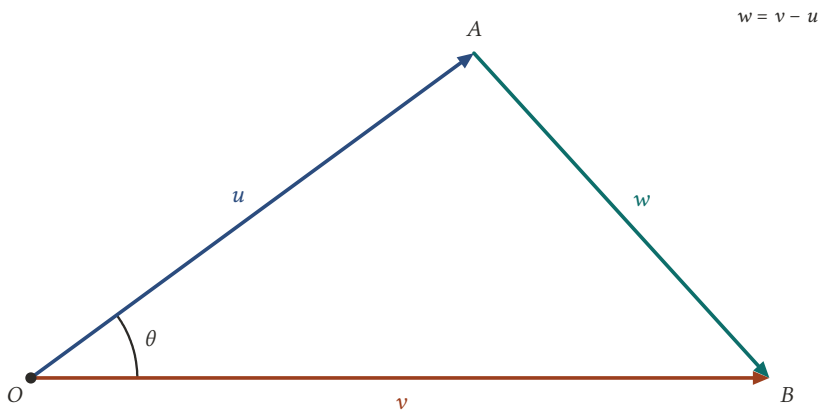
Teorem 8.2 (Açının kosinüsü). *$u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ve $\theta = \measuredangle(u, v)$ olsun. O zaman*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|} \qquad \text{ve dolayısıyla} \qquad \theta = \arccos\left(\frac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|}\right)$$

olur.

İspat.
$u = \overrightarrow{OA}$ ve $v = \overrightarrow{OB}$ olacak biçimde vektörleri O'dan çizelim ve $w = \overrightarrow{AB}$ diyelim. O'dan A'ya, oradan da B'ye gitmek, doğrudan O'dan B'ye gitmekle aynıdır:

$$u + w = v, \qquad \text{dolayısıyla} \qquad w = v - u.$$



Şekil 8.2: u *ile* v *aynı* O *noktasından çizilir;* A*'dan* B*'ye giden üçüncü kenar* w = v − u *olur.* O *köşesindeki açı* θ*'dır ve Kosinüs Teoremi bu üçgene uygulanır.*

u ile v lineer bağımsız ise *O, A, B bir doğru üzerinde değildir ve OAB bir üçgendir; bu üçgenin O köşesindeki açısı θ'dır. Kosinüs Teoremi, OAB üçgeninde*

$$|\, AB \,|^2 = |\, OA \,|^2 + |\, OB \,|^2 - 2\,|\, OA \,|\,|\, OB \,|\cos\widehat{AOB}$$

olduğunu söyler. Burada $|\, OA \,| = \| u \|$, $|\, OB \,| = \| v \|$, $|\, AB \,| = \| w \|$ ve $\widehat{AOB} = \theta$ olduğundan

$$\| w \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2 - 2 \| u \| \| v \| \cos\theta$$

olur. Öte yandan $w = v - u$ olduğundan iç çarpımın özellikleriyle

$$\| w \|^2 = \langle v - u, v - u\rangle = \| v \|^2 - 2\langle u, v\rangle + \| u \|^2$$

bulunur. İki ifadeyi eşitlersek

$$\| v \|^2 - 2\langle u, v\rangle + \| u \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2 - 2 \| u \| \| v \| \cos\theta$$

elde ederiz. Her iki taraftan $\| u \|^2 + \| v \|^2$ çıkarılıp $-2 \| u \| \| v \| \neq 0$ sayısına bölünürse

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|}$$

bulunur.
u ile v lineer bağımlı ise *üçgen oluşmaz, ama formülü doğrudan sınayabiliriz. İki vektör de sıfırdan farklı olduğundan bir $\lambda \neq 0$ için $v = \lambda u$ olur ve*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|} = \frac{\lambda \| u \|^2}{\| u \| \cdot |\lambda| \| u \|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}$$

çıkar. $\lambda > 0$ *ise* v*,* u *ile aynı yönlüdür,* $\theta = 0$ *ve oran* $1 = \cos 0$*'dır.* $\lambda < 0$ *ise* v*,* u *ile zıt yönlüdür,* $\theta = \pi$ *ve oran* $-1 = \cos \pi$*'dir. Formül bu durumda da doğrudur.*

Son olarak $\theta \in [0, \pi]$ *ve kosinüs fonksiyonu bu aralıkta birebir olduğundan* $\theta = \arccos\left(\dfrac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|}\right)$ *yazılabilir.*

■

Formülü $\langle u, v\rangle = \| u \| \| v \| \cos\theta$ biçiminde de yazabiliriz. Bu yazılış, Cauchy–Schwarz eşitsizliğine geometrik bir açıklama getirir: $|\cos\theta| \leq 1$ olduğundan

$$|\langle u, v\rangle| = \| u \| \| v \| |\cos\theta| \leq \| u \| \| v \|$$

olur. Tersinden bakarsak Cauchy–Schwarz eşitsizliği, $\dfrac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|}$ oranının her zaman $[-1, 1]$ aralığında kaldığını, yani arccos'un her zaman tanımlı olduğunu garanti eder.

Örnek 8.7 (İç çarpımı sıfır olan iki vektörün açısı). $w = \left(-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ve $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1\right)$ vektörleri arasındaki $\measuredangle(w, x)$ açısını bulunuz.

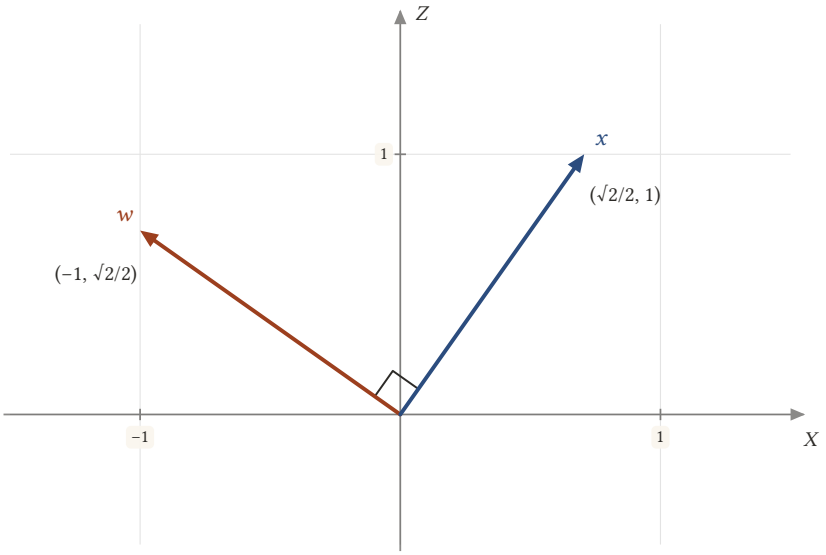
Çözüm.
$\langle w, x\rangle = 0$ olduğunu daha önce bulmuştuk (bkz. Örnek 8.4). İki vektör de sıfırdan farklı olduğundan (ikisinin de uzunluğu $\sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$'dir) açı formülü

$$\cos\measuredangle(w, x) = \frac{0}{\| w \| \| x \|} = 0$$

verir. $[0, \pi]$ aralığında kosinüsü 0 olan tek açı $\frac{\pi}{2}$'dir; dolayısıyla

$$\measuredangle(w, x) = \frac{\pi}{2}.$$

İki vektörün de ikinci bileşeni 0 olduğundan ikisi de XZ-düzleminde yatar; bu düzlemde çizildiklerinde dik oldukları açıkça görülür.



Şekil 8.3: w ile x'in ikinci bileşeni 0 olduğundan ikisi de XZ-düzleminde yatar. Bu düzlemde çizildiklerinde aralarındaki açının dik olduğu görülür.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 8.8 (Dar açı yapan iki vektör). $u = (1, 1, 0)$ ve $v = (1, 0, 1)$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm.
İç çarpım ve uzunluklar:

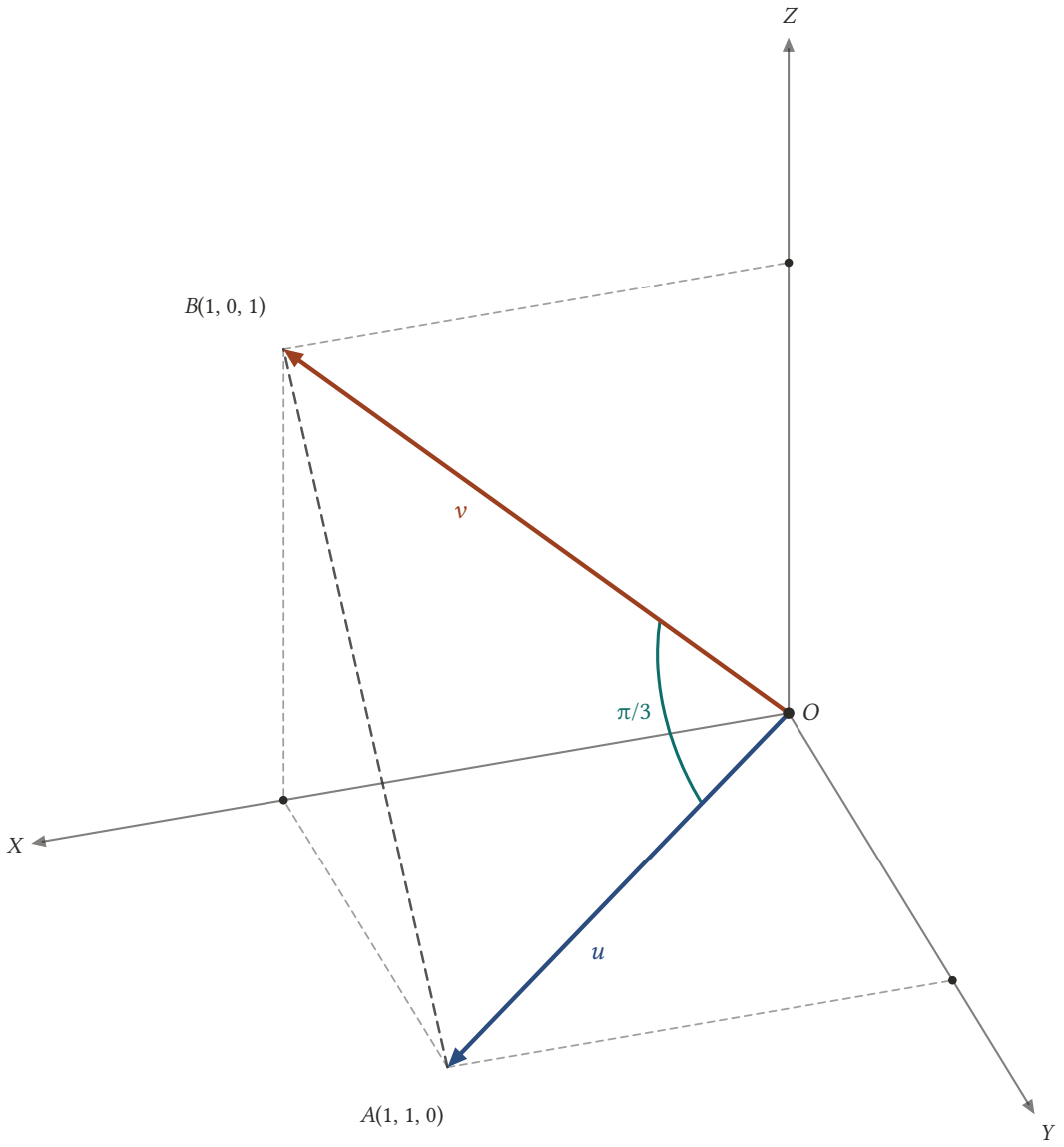
$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 1, \qquad \| u \| = \| v \| = \sqrt{2}.$$

Açı formülünden

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle(u, v) = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Bu sonucun geometrik bir anlamı da var: u, v ve $v - u = (0, -1, 1)$ vektörlerinin üçünün de uzunluğu $\sqrt{2}$'dir. Yani u ile v'nin uçları ve başlangıç noktası bir eşkenar üçgenin köşeleridir ve eşkenar üçgenin her açısı $\frac{\pi}{3}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.4: $u = (1, 1, 0)$ ve $v = (1, 0, 1)$ başlangıç noktasından çizilir. O, A, B noktaları kenar uzunluğu $\sqrt{2}$ olan bir eşkenar üçgenin köşeleridir; bu yüzden u ile v arasındaki açı $\pi/3$'tür.

■

Örnek 8.9 (Geniş açı yapan iki vektör). $u = (1, 0, 0)$ ve $v = (-1, 1, 0)$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm.

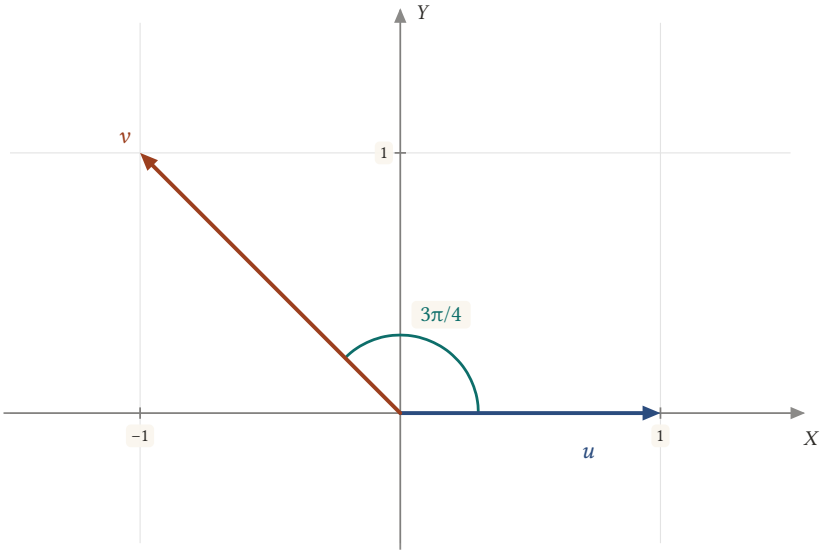
$$\langle u, v\rangle = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -1, \qquad \| u \| = 1, \qquad \| v \| = \sqrt{2}.$$

Buradan

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{-1}{1 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle(u, v) = \frac{3\pi}{4}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. İç çarpım negatif çıktığında açının geniş olduğuna dikkat edin; bu gözlemi bir sonraki kısımda genel olarak kanıtlayacağız.



Şekil 8.5: $u = (1, 0, 0)$ ve $v = (-1, 1, 0)$ vektörleri XY-düzleminde yatar. Aralarındaki açı $3\pi/4$'tür; iç çarpımları negatif, açı geniştir.

■

8.5 Diklik ve iç çarpımın işareti

Açı formülünde paydadaki $\| u \| \| v \|$ her zaman pozitiftir; bu yüzden $\cos\theta$'nın işaretini tek başına iç çarpım belirler. Böylece iki vektörün dik mi, dar açılı mı, geniş açılı mı olduğunu açıyı hesaplamadan, yalnız iç çarpımın işaretine bakarak söyleyebiliriz.

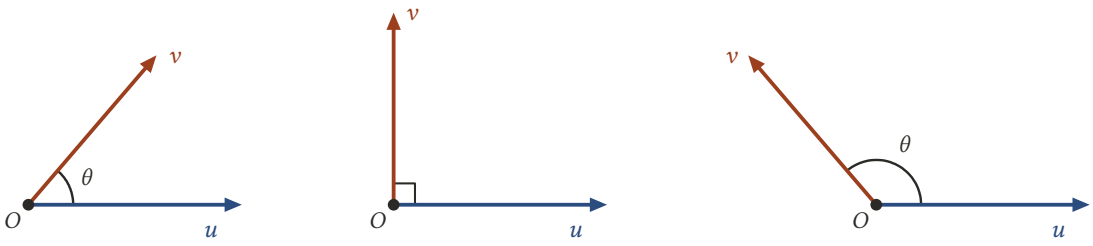
Tanım 8.3 (Dik vektörler). Sıfırdan farklı $u, v \in \mathbb{R}^3$ vektörleri için $\measuredangle(u, v) = \frac{\pi}{2}$ ise u ile v'ye **dik** vektörler denir ve $u \perp v$ yazılır. Ayrıca sıfır vektörünü her vektöre dik kabul ederiz.

Yani iki vektör, aynı noktadan çizildiklerinde aralarında dik açı oluşuyorsa diktir. Sıfır vektörü için yaptığımız anlaşma, aşağıdaki "$\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v$" kuralının istisnasız her vektör için geçerli olmasını sağlar.

Önerme 8.2 (İç çarpımın işareti ve açı). *$u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ve $\theta = \measuredangle(u, v)$ olsun.*
i) $\langle u, v\rangle > 0 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2})$, yani açı dardır (ya da 0'dır).
ii) $\langle u, v\rangle < 0 \Leftrightarrow \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$, yani açı geniştir (ya da π'dir).
iii) $\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow u \perp v$.
iv) $|\cos\theta| = 1 \Leftrightarrow \theta \in \{0, \pi\} \Leftrightarrow u$ ile v lineer bağımlıdır.
Ayrıca sıfır vektörünün her vektörle iç çarpımı 0 olduğundan, iii) şıkkı her $u, v \in \mathbb{R}^3$ için şu biçimde geçerlidir:

$$\langle u, v\rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



$\langle u, v\rangle > 0$ (dar açı) $\langle u, v\rangle = 0$ (dik) $\langle u, v\rangle < 0$ (geniş açı)

Şekil 8.6: İç çarpımın işareti açıyı belirler: pozitifse açı dar, sıfırsa dik, negatifse geniştir.

İspat.
Açının kosinüsü teoremine (Teorem 8.2) göre $\langle u, v\rangle = \| u \| \| v \| \cos\theta$ *ve* $\| u \| \| v \| > 0$ *olduğundan* $\langle u, v\rangle$ *ile* $\cos\theta$ *aynı işaretlidir. Kosinüs fonksiyonu* $[0, \pi]$ *aralığında* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ *üzerinde pozitif,* $\frac{\pi}{2}$*'de sıfır,* $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ *üzerinde negatiftir. Bu üç durum birbirini dışladığı ve* $[0, \pi]$*'yi tamamen örttüğü için i), ii) ve iii)'teki denklikler çıkar; iii)'teki son denklik diklik tanımıdır.*

iv) $[0, \pi]$ *aralığında* $\cos\theta = 1$ *yalnız* $\theta = 0$*'da,* $\cos\theta = -1$ *yalnız* $\theta = \pi$*'de olur; bu ilk denkliği verir. Öte yandan*

$$|\cos\theta| = 1 \Leftrightarrow |\langle u, v\rangle| = \| u \| \| v \|$$

olur ve Cauchy–Schwarz eşitsizliğindeki eşitlik durumu (Teorem 8.1) bunun u *ile* v*'nin lineer bağımlı olmasına denk olduğunu söyler.*

Son olarak $u = 0$ *ya da* $v = 0$ *ise hem* $\langle u, v\rangle = 0$ *hem de (anlaşmamız gereği)* $u \perp v$ *doğrudur; iki vektör de sıfırdan farklıysa denklik iii)'ün kendisidir.*
■

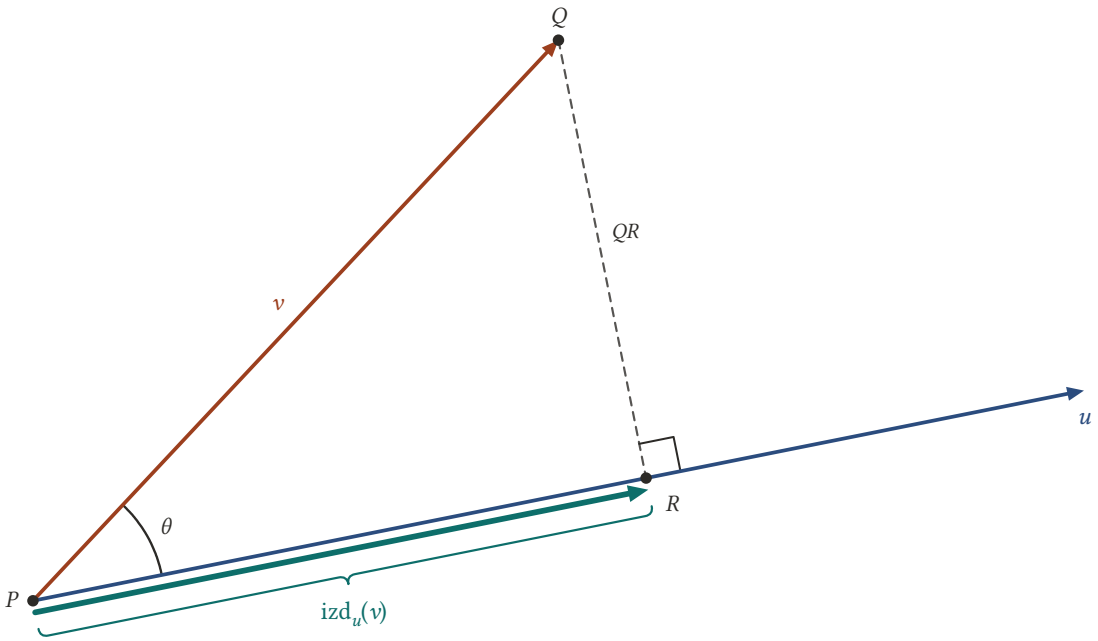
Yani iv) şıkkı şunu söyler: sıfırdan farklı iki vektör ancak ve ancak aynı ya da zıt yönlü, yani birbirine paralel olduklarında lineer bağımlıdır ve bu durumda Cauchy–Schwarz eşitsizliği eşitliğe dönüşür.

8.6 Dik izdüşüm

Bir vektörün başka bir vektör doğrultusunda "ne kadar" ilerlediğini ölçmek, fizikte (bir kuvvetin yol boyunca yaptığı iş) ve geometride (bir noktanın doğruya uzaklığı) sık karşımıza çıkar. Bunun aracı dik izdüşümdür: v vektörünün ucundan u doğrultusuna bir dikme indirir, dikmenin ayağına kadar olan parçayı alırız.

Tanım 8.4 (Dik izdüşüm). $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ve $v \in \mathbb{R}^3$ olsun. $v = \overrightarrow{PQ}$ olacak biçimde vektörü bir P noktasından çizelim ve Q'dan, P'den geçen ve u'ya paralel olan doğruya dikme indirelim; dikmenin ayağı R olsun. Q bu doğrunun üzerindeyse $R = Q$ alınır. $\overrightarrow{PR}$ vektörüne v'nin u **üzerine dik izdüşümü** denir ve $\text{izd}_u(v)$ ile gösterilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.7: P'den çizilen v'nin ucu Q'dan u doğrultusuna dikme inilir; dikmenin ayağı R'dir. P'den R'ye giden vektör v'nin u üzerine dik izdüşümü $\text{izd}_u(v)$'dir.

Yani $\text{izd}_u(v)$, v'nin u doğrultusundaki gölgesidir: u'ya paraleldir ve v'den geriye kalan $\overrightarrow{QR} = \text{izd}_u(v) - v$ parçası u'ya diktir. Bu iki koşul izdüşümü tamamen belirler.

Teorem 8.3 (Dik izdüşüm formülü). *$u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ve $v \in \mathbb{R}^3$ olsun. O zaman*

$$\text{izd}_u(v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}\, u$$

olur.

İspat.
$\text{izd}_u(v)$ vektörü u doğrultusundaki doğru üzerinde yattığından bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\text{izd}_u(v) = \lambda u$$

yazılabilir. Şekilde P'den Q'ya, oradan R'ye gitmek P'den R'ye gitmekle aynıdır:

$$v + \overrightarrow{QR} = \text{izd}_u(v), \qquad \text{yani} \qquad \overrightarrow{QR} = \text{izd}_u(v) - v.$$

$\overrightarrow{QR}$ dikme olduğundan u'ya diktir; iç çarpımın işaretine ilişkin önermeye (Önerme 8.2) göre $\langle \overrightarrow{QR}, u\rangle = 0$ olur. Bilineerliği kullanarak

$$\begin{aligned} \langle \text{izd}_u(v) - v, u\rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle \lambda u, u\rangle - \langle v, u\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda\langle u, u\rangle = \langle u, v\rangle \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} \end{aligned}$$

bulunur. Son adımda $u \neq 0$ olduğundan $\langle u, u\rangle > 0$ sayısına bölebildik. Bu λ değeri yerine yazılınca formül elde edilir. Denklikler iki yönlü olduğu için u'ya paralel olup farkı u'ya dik kılan vektör yalnız budur.
■

Formüldeki katsayıya ayrı bir ad veriyoruz.

Tanım 8.5 (Bir yöndeki bileşen). $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ve $v \in \mathbb{R}^3$ olsun.

$$\text{bil}_u(v) = \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} = \frac{\langle u, v\rangle}{\| u \|^2}$$

sayısına v vektörünün u **yönündeki bileşeni** denir.

Yani bileşen, izdüşümün u'nun kaç katı olduğunu söyleyen sayıdır:

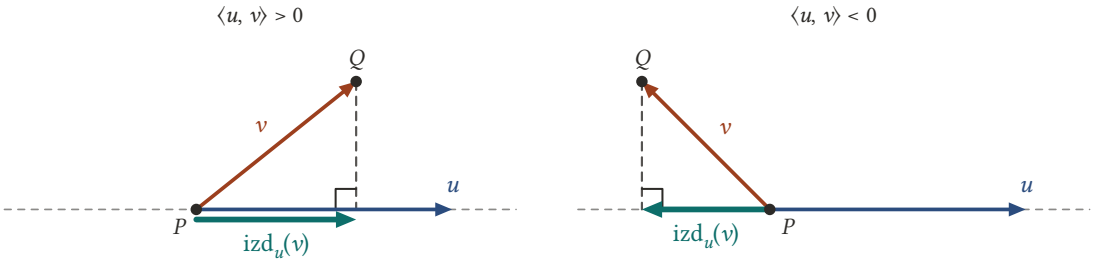
$$\text{izd}_u(v) = \text{bil}_u(v) \cdot u.$$

$v \neq 0$ ve $\theta = \measuredangle(u, v)$ ise izdüşümün uzunluğu da

$$\| \text{izd}_u(v) \| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\| u \|^2} \| u \| = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\| u \|} = \| v \| \, |\cos\theta|$$

olur. Bu, şekildeki PRQ dik üçgeninde "komşu dik kenar = hipotenüs × kosinüs" kuralıdır.

Önerme 8.3 (İzdüşümün yönü). *$u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ve $v \in \mathbb{R}^3$ olsun.*
i) $\langle u, v\rangle > 0$ ise $\text{izd}_u(v)$ ile u aynı yönlüdür.
ii) $\langle u, v\rangle < 0$ ise $\text{izd}_u(v)$ ile u zıt yönlüdür.
iii) $\langle u, v\rangle = 0$ ise $\text{izd}_u(v) = 0$'dır.



Şekil 8.8: Solda ⟨u, v⟩ > 0: izdüşüm u ile aynı yönlüdür. Sağda ⟨u, v⟩ < 0: izdüşüm u ile zıt yönlüdür.

İspat.
$\text{izd}_u(v) = \text{bil}_u(v) \cdot u$ *ve* $\text{bil}_u(v) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\| u \|^2}$*'dir. Payda pozitif olduğundan* $\text{bil}_u(v)$ *sayısı* $\langle u, v\rangle$ *ile aynı işaretlidir. Bir vektörü pozitif bir sayıyla çarpmak yönünü korur, negatif bir sayıyla çarpmak yönünü tersine çevirir,* 0 *ile çarpmak sıfır vektörünü verir. Üç şık buradan çıkar.*
■

İzdüşüm hesabı her seferinde aynı üç adımdan oluşur.

Dik izdüşümü üç adımda bulmak

1. $\langle u, v\rangle$ iç çarpımını hesapla. Sonuç 0 ise izdüşüm sıfır vektörüdür; dur.
2. $\langle u, u\rangle = \| u \|^2$ sayısını hesapla ve $\text{bil}_u(v) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle}$ oranını sadeleştir.
3. $\text{izd}_u(v) = \text{bil}_u(v) \cdot u$ vektörünü bileşen bileşen yaz. İstersen $v - \text{izd}_u(v)$ farkının u ile iç çarpımının 0 çıktığını sınayarak sonucu denetle.

Örnek 8.10 (Dik iki vektörde izdüşüm). $v = (1, 3, 1)$ vektörünün $u = (-1, 1, -2)$ vektörü üzerine dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

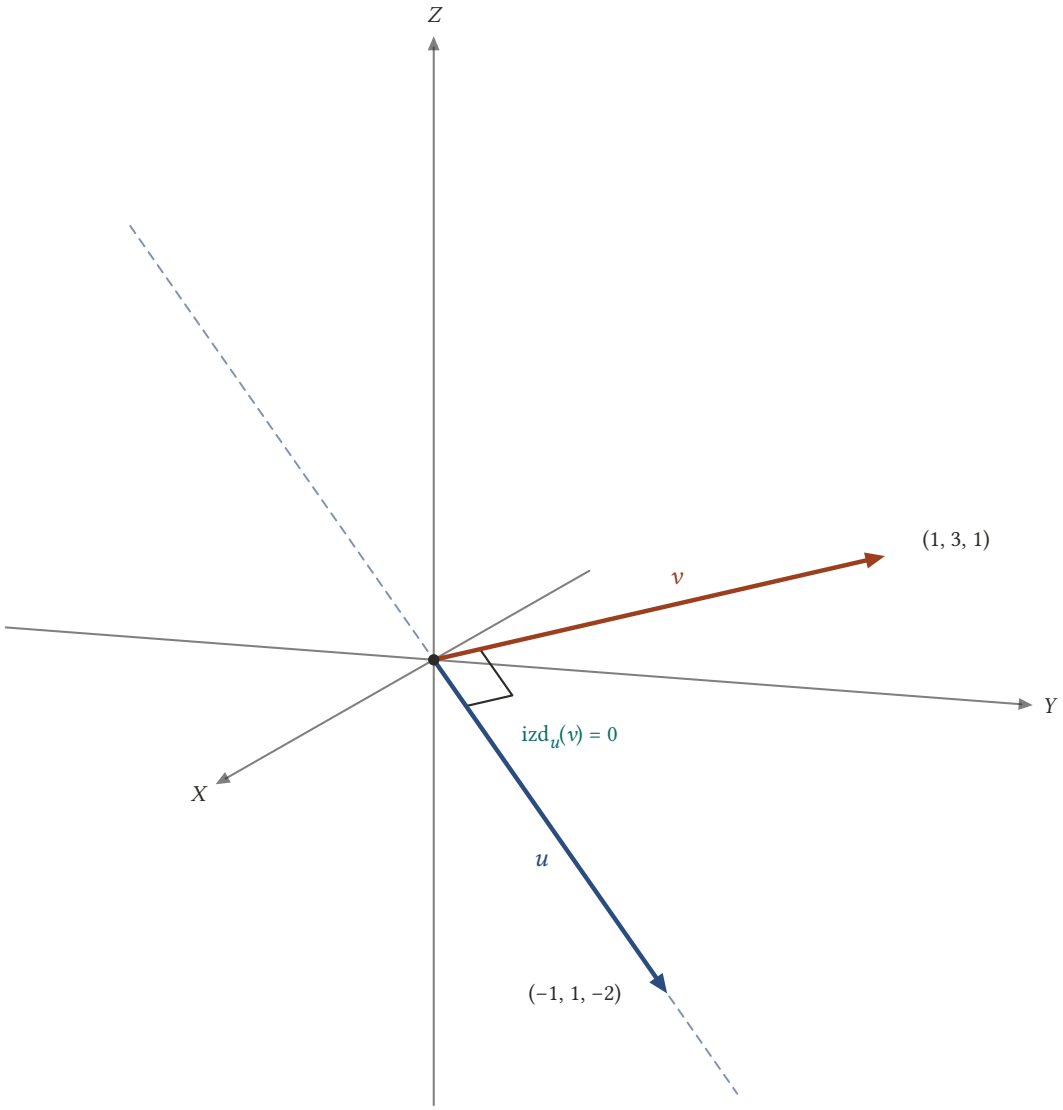
İlk adımda iç çarpımı hesaplıyoruz:

$$\langle u, v\rangle = (-1)\cdot 1 + 1\cdot 3 + (-2)\cdot 1 = -1 + 3 - 2 = 0.$$

Buradan $\text{bil}_u(v) = 0$ ve dolayısıyla

$$\text{izd}_u(v) = 0 \cdot u = (0,0,0)$$

bulunur. $\langle u, v\rangle = 0$ olduğu için v, u'ya diktir; ucundan u doğrultusuna indirilen dikmenin ayağı başlangıç noktasının kendisidir.



Şekil 8.9: $v = (1, 3, 1)$, $u = (-1, 1, -2)$ doğrultusuna diktir. v'nin ucundan u doğrultusuna inen dikmenin ayağı başlangıç noktasıdır; izdüşüm sıfır vektörüdür.

■

Örnek 8.11 (Zıt yönlü izdüşüm). $v = (-4, 1, 2)$ vektörünün $u = (2, -1, 3)$ vektörü üzerine dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

İç çarpım:

$$\langle u, v\rangle = 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 1 + 3\cdot 2 = -8 - 1 + 6 = -3 < 0.$$

u'nun uzunluğunun karesi:

$$\| u \|^2 = \langle u, u\rangle = 4 + 1 + 9 = 14.$$

Buradan

$$\mathrm{bil}_u(v) = -\frac{3}{14}$$

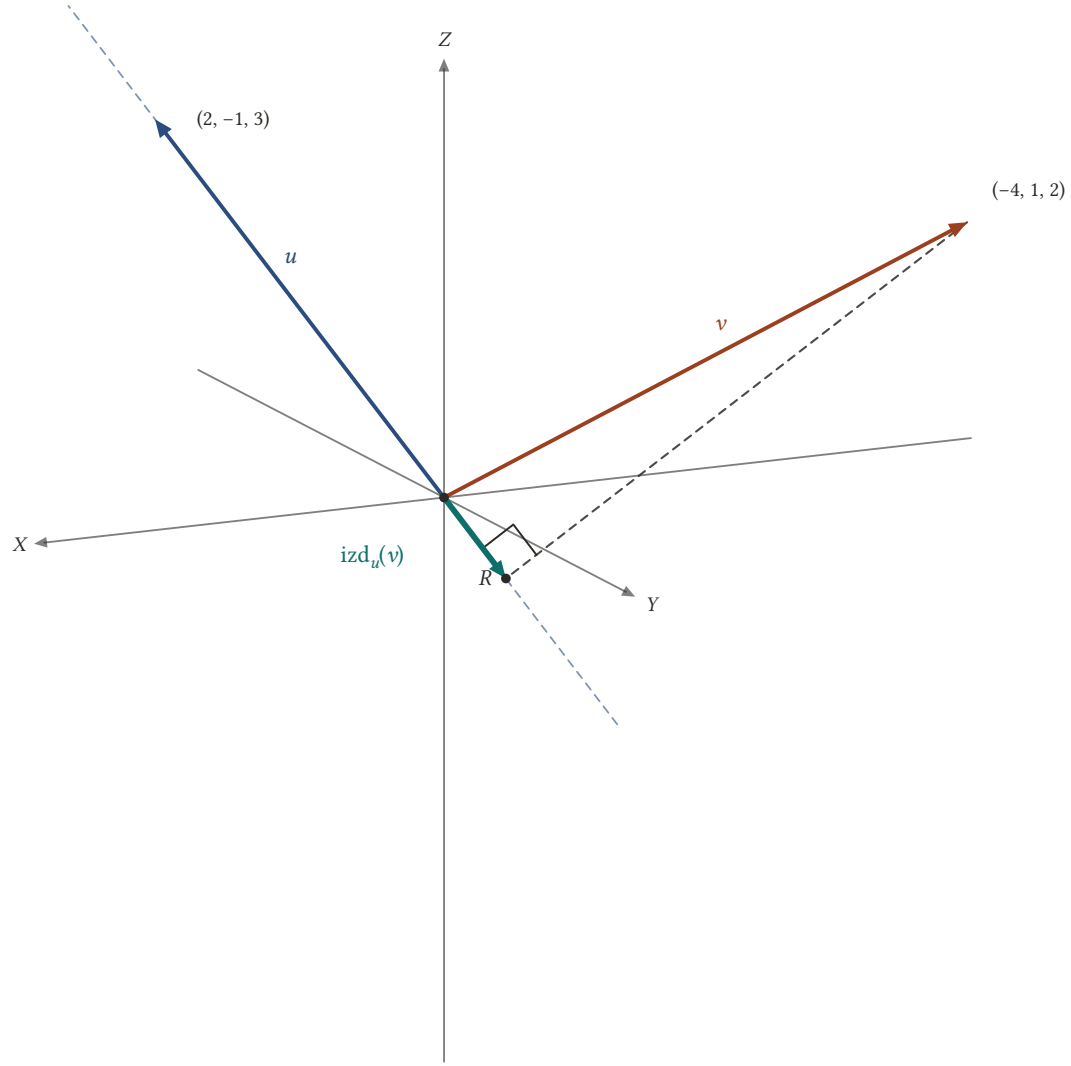
ve

$$\mathrm{izd}_u(v) = -\frac{3}{14}\,(2, -1, 3) = \left(-\frac{3}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{9}{14}\right)$$

elde edilir. $\langle u, v\rangle < 0$ olduğundan izdüşüm u ile zıt yönlüdür (Önerme 8.3). Sağlama: $v - \mathrm{izd}_u(v) = \left(-\frac{25}{7}, \frac{11}{14}, \frac{37}{14}\right)$ ve

$$\left\langle \left(-\frac{25}{7}, \frac{11}{14}, \frac{37}{14}\right), (2, -1, 3)\right\rangle = \frac{-100 - 11 + 111}{14} = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.10: $v = (-4, 1, 2)$'nin $u = (2, -1, 3)$ üzerine izdüşümü $\text{izd}_u(v) = (-3/7, 3/14, -9/14)$'tür. İç çarpım negatif olduğundan izdüşüm u'ya zıt yönlüdür ve u'nun kesikli uzantısı üzerinde kalır.

■

Örnek 8.12 (Aynı yönlü izdüşüm). $v = (1, -2, 1)$ vektörünün $u = (2, -1, 3)$ vektörü üzerine dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm.
İç çarpım:

$$\langle u, v\rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 2 + 2 + 3 = 7 > 0.$$

u'nun uzunluğunun karesi yine

$$\| u \|^2 = \langle u, u\rangle = 4 + 1 + 9 = 14$$

olduğundan

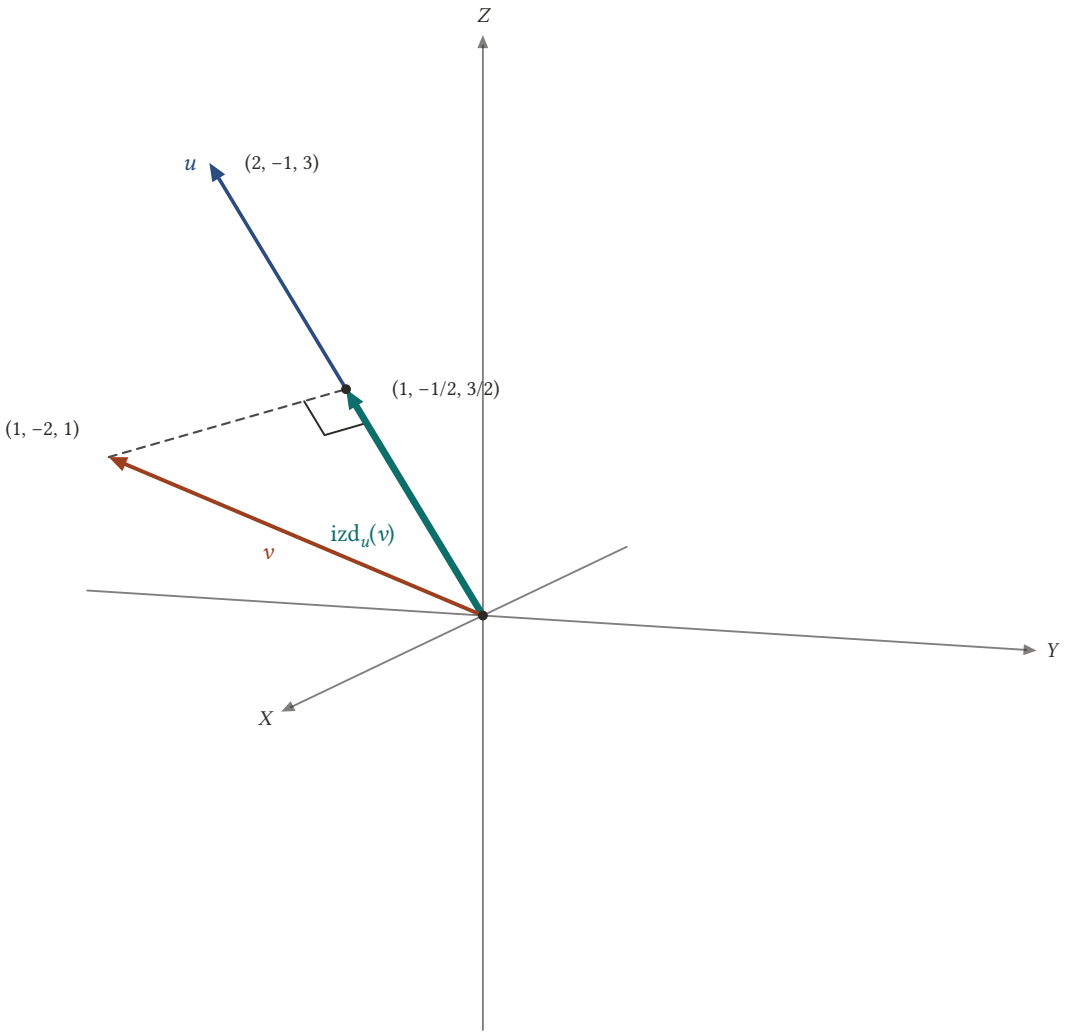
$$\text{bil}_u(v) = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve

$$\mathrm{izd}_u(v) = \frac{1}{2}(2,-1,3) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

elde edilir. İç çarpım pozitif olduğundan izdüşüm u ile aynı yönlüdür; hatta tam olarak u'nun yarısıdır. Sağlama: $v - \mathrm{izd}_u(v) = \left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ve bunun u ile iç çarpımı $0 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$'dır.



Şekil 8.11: v = (1, −2, 1)'nin u = (2, −1, 3) üzerine izdüşümü izd$_u$(v) = (1, −1/2, 3/2)'dir; dikmenin ayağı u'nun tam ortasına düşer.

■

8.7 Doğrultu açıları ve doğrultman kosinüsleri

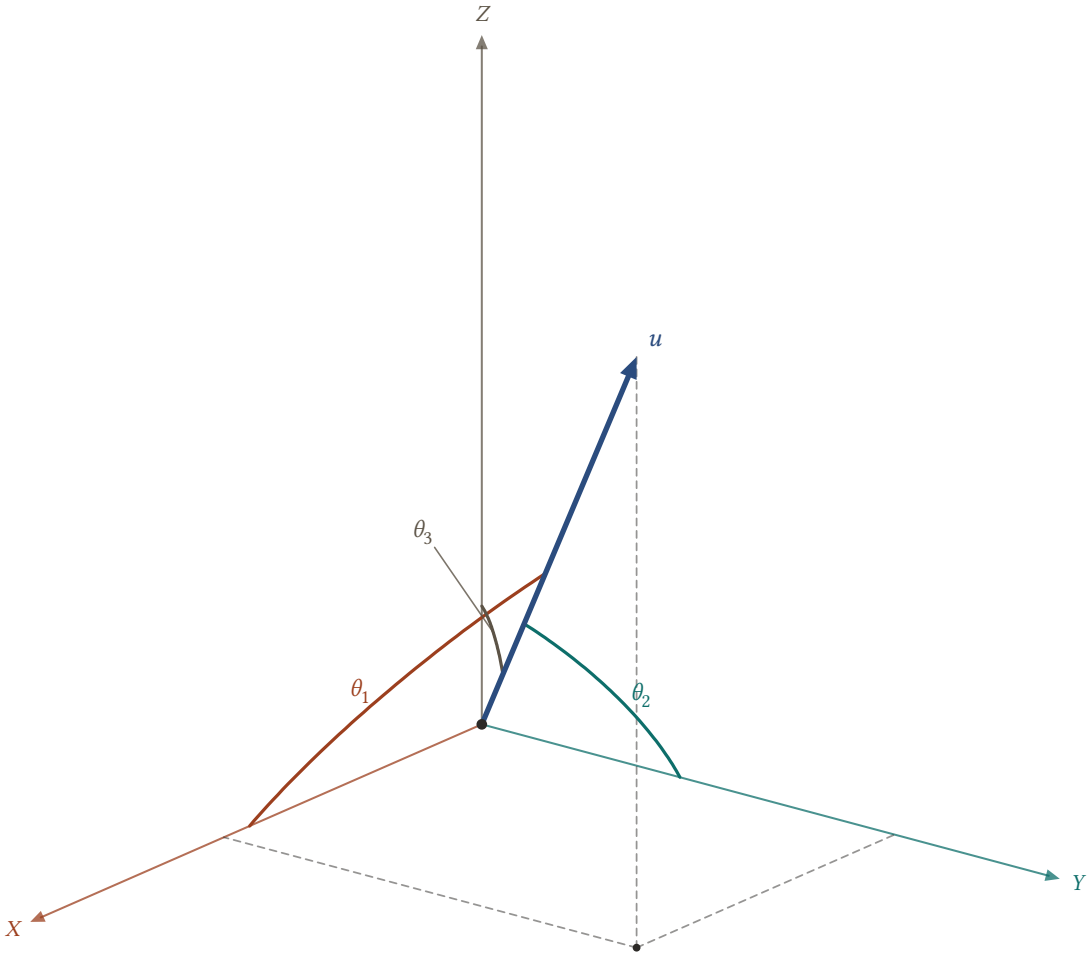
Bir vektörün uzaydaki doğrultusunu anlatmanın doğal bir yolu, onun üç koordinat ekseniyle yaptığı açıları vermektir. İç çarpım bu açıların kosinüslerini hiç zahmetsiz hesaplatır.

Tanım 8.6 (Doğrultu açıları ve doğrultman kosinüsleri). $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vektörünün X-, Y- ve Z-eksenlerinin pozitif yönleriyle, yani e_1, e_2 ve e_3 ile yaptığı açılar sırasıyla

$$\theta_1 = \measuredangle(u, e_1), \qquad \theta_2 = \measuredangle(u, e_2), \qquad \theta_3 = \measuredangle(u, e_3)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olsun. Bu açılara u vektörünün **doğrultu açıları**, bu açıların kosinüsleri olan $\cos\theta_1$, $\cos\theta_2$, $\cos\theta_3$ sayılarına da u'nun **doğrultman kosinüsleri** denir.



Şekil 8.12: u vektörünün doğrultu açıları: θ_1, θ_2, θ_3 sırasıyla u'nun X-, Y- ve Z-eksenlerinin pozitif yönleriyle yaptığı açılardır.

Yani doğrultu açıları, vektörün her bir koordinat ekseninin pozitif ucuna ne kadar "eğik" durduğunu ölçer. Tanımdaki üç açı bağımsız değildir; aşağıdaki teorem aralarında her zaman sağlanan bir bağıntı verir.

Teorem 8.4 (Doğrultman kosinüslerinin formülü). *$u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vektörünün doğrultu açıları $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ise*

$$\cos\theta_i = \frac{u_i}{\| u \|} \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{ve} \qquad \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$$

olur.

İspat.
$u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ yazıp bilineerliği ve standart baz vektörlerinin iç çarpımlarını (Örnek 8.5) kullanalım:

$$\begin{aligned}\langle u, e_1\rangle &= \langle u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3, e_1\rangle \\ &= u_1\underbrace{\langle e_1, e_1\rangle}_{=1} + u_2\underbrace{\langle e_2, e_1\rangle}_{=0} + u_3\underbrace{\langle e_3, e_1\rangle}_{=0} \\ &= u_1.\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Aynı hesap e_2 için $\langle u, e_2\rangle = u_2$, e_3 için $\langle u, e_3\rangle = u_3$ verir: e_i ile iç çarpım, u'nun i'nci bileşenini "seçer". $\| e_i \| = 1$ olduğundan açı formülü (Teorem 8.2)

$$\cos\theta_i = \frac{\langle u, e_i\rangle}{\| u \| \| e_i \|} = \frac{u_i}{\| u \|} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

verir. Kareleri toplarsak

$$\sum_{i=1}^{3} \cos^2\theta_i = \frac{u_1^2}{\| u \|^2} + \frac{u_2^2}{\| u \|^2} + \frac{u_3^2}{\| u \|^2}$$
$$= \frac{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}{\| u \|^2} = \frac{\| u \|^2}{\| u \|^2} = 1$$

bulunur.
■

Teoremin ilk kısmı, bir vektörü kendi uzunluğuna böldüğümüzde ortaya çıkan vektörün bileşenlerinin tam olarak doğrultman kosinüsleri olduğunu söyler.

Sonuç 8.2 (Birim vektör ve doğrultman kosinüsleri). *$u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ vektörünün doğrultu açıları θ_1, θ_2, θ_3 olsun. u yönündeki birim vektör*

$$u_0 = \frac{u}{\| u \|} = (\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3)$$

dır. Yani u yönündeki birim vektörün koordinatları, u'nun doğrultman kosinüsleridir.

İspat.
Doğrultman kosinüslerinin formülünden (Teorem 8.4)

$$u_0 = \frac{u}{\| u \|} = \left(\frac{u_1}{\| u \|}, \frac{u_2}{\| u \|}, \frac{u_3}{\| u \|}\right) = (\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3)$$

olur. Bu vektör u'nun pozitif bir katı olduğundan u ile aynı yönlüdür ve aynı teoremdeki kareler toplamı bağıntısından

$$\| u_0 \|^2 = \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = 1$$

bulunur; yani u_0 gerçekten birim vektördür.
■

Örnek 8.13 (Doğrultman kosinüslerinin hesabı). $u = (2, -1, 2)$ vektörünün doğrultman kosinüslerini ve doğrultu açılarını bulunuz; u yönündeki birim vektörü yazınız.

Çözüm.
Önce uzunluk:

$$\| u \| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

Doğrultman kosinüslerinin formülünden (Teorem 8.4)

$$\cos\theta_1 = \frac{2}{3}, \qquad \cos\theta_2 = -\frac{1}{3}, \qquad \cos\theta_3 = \frac{2}{3}$$

bulunur. Sağlama: $\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = 1$. Doğrultu açıları

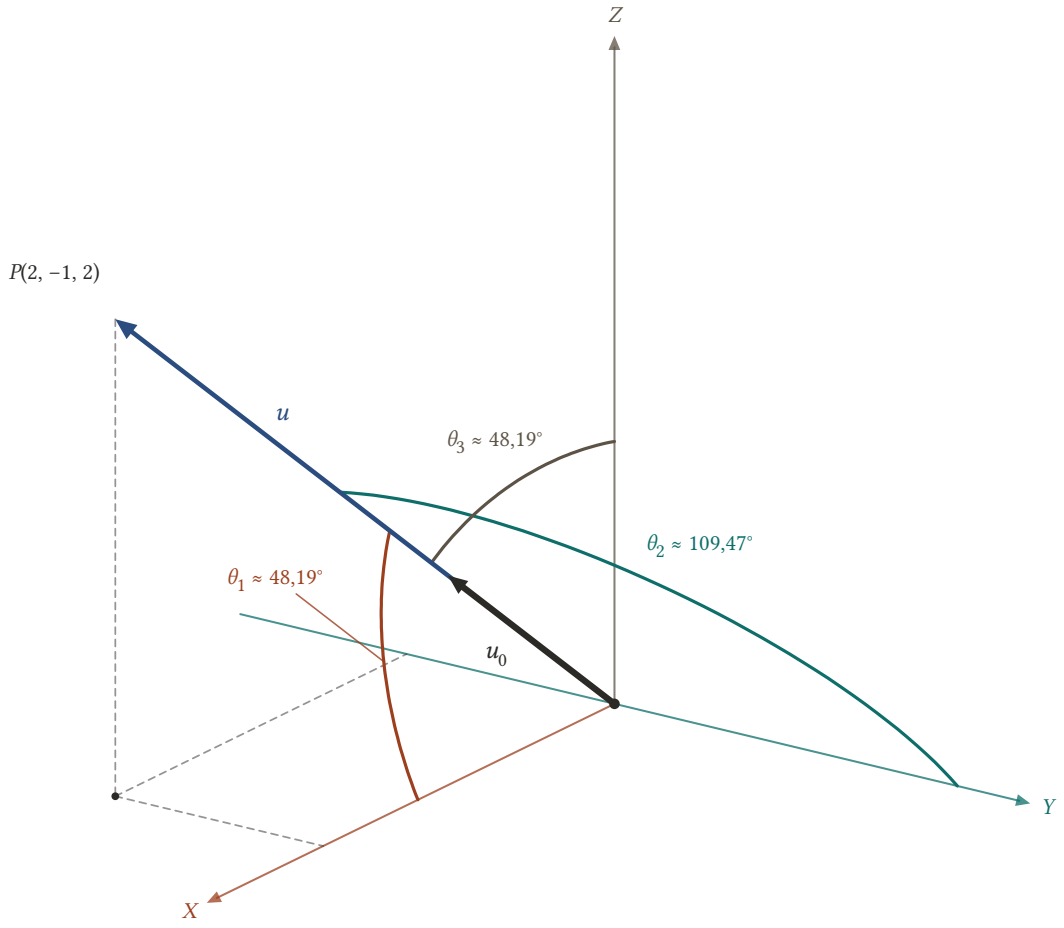
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\theta_1 = \theta_3 = \arccos\frac{2}{3} \approx 48{,}19^\circ, \qquad \theta_2 = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109{,}47^\circ$$

dir. $\cos\theta_2 < 0$ olduğundan u, Y-ekseninin pozitif yönüyle geniş açı yapar; bunun nedeni ikinci bileşenin negatif olmasıdır. Buna göre (Sonuç 8.2) u yönündeki birim vektör

$$u_0 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

dır.



Şekil 8.13: $u = (2, -1, 2)$ ve u yönündeki birim vektör $u_0 = (2/3, -1/3, 2/3)$. u, Y-ekseninin pozitif yönüyle geniş açı, öteki iki eksenle eşit dar açılar yapar.

■

Örnek 8.14 (Eksenlerle eşit açı yapan vektör). Üç koordinat ekseninin pozitif yönleriyle eşit dar açılar yapan birim vektörü ve bu açıyı bulunuz.

Çözüm.
Açıların üçü de θ olsun. Kareler toplamı bağıntısından

$$3\cos^2\theta = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

bulunur. Açı dar olduğundan kosinüs pozitiftir: $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\theta = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54{,}74^\circ.$$

Aranan birim vektör, Sonuç 8.2 gereğince koordinatları bu kosinüsler olan vektördür:

$$u_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right).$$

Bu, $(1,1,1)$ vektörünün, yani birim küpün köşegeninin doğrultusudur.
■

Örnek 8.15 (İki doğrultu açısı verilince üçüncüsü). Bir u vektörü X- ve Y-eksenlerinin pozitif yönleriyle $\frac{\pi}{3}$'er radyanlık açı yapıyor. u'nun Z-ekseniyle yaptığı açı ne olabilir? u yönündeki birim vektörü bulunuz.

Çözüm.
$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ olduğundan kareler toplamı bağıntısı

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2\theta_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta_3 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

verir. $[0,\pi]$ aralığında bunun iki çözümü vardır:

$$\theta_3 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{ya da} \qquad \theta_3 = \frac{3\pi}{4}.$$

Buna karşılık gelen birim vektörler

$$u_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \qquad \text{ya da} \qquad u_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

dır. Birincisi XY-düzleminin üstünde, ikincisi altında kalır; ikisi bu düzleme göre birbirinin simetriğidir.
■

Örnek 8.16 (Olamayacak doğrultu açıları). X- ve Y-eksenlerinin pozitif yönleriyle $\frac{\pi}{6}$'şar radyanlık açı yapan bir vektör var mıdır?

Çözüm.
Böyle bir vektör olsaydı $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olurdu ve kareler toplamı bağıntısından

$$\cos^2\theta_3 = 1 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

çıkardı. Bir reel sayının karesi negatif olamayacağından bu imkânsızdır; böyle bir vektör yoktur. Sezgisel olarak: bir vektör X-eksenine 30° kadar yakınsa, ondan 90° uzaktaki Y-eksenine de 30° kadar yakın olamaz.
■

8.8 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar iç çarpımın cebirsel özelliklerini, açı ve diklik ölçütünü ve izdüşüm formülünü birlikte kullanır.

Alıştırma 8.1 (Dik üçgenin kenar vektörleri). $u = (2,-1,1)$, $v = (1,-3,-5)$ ve $w = (3,-4,-4)$ vektörlerinin bir dik üçgenin kenarlarını oluşturabileceğini gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

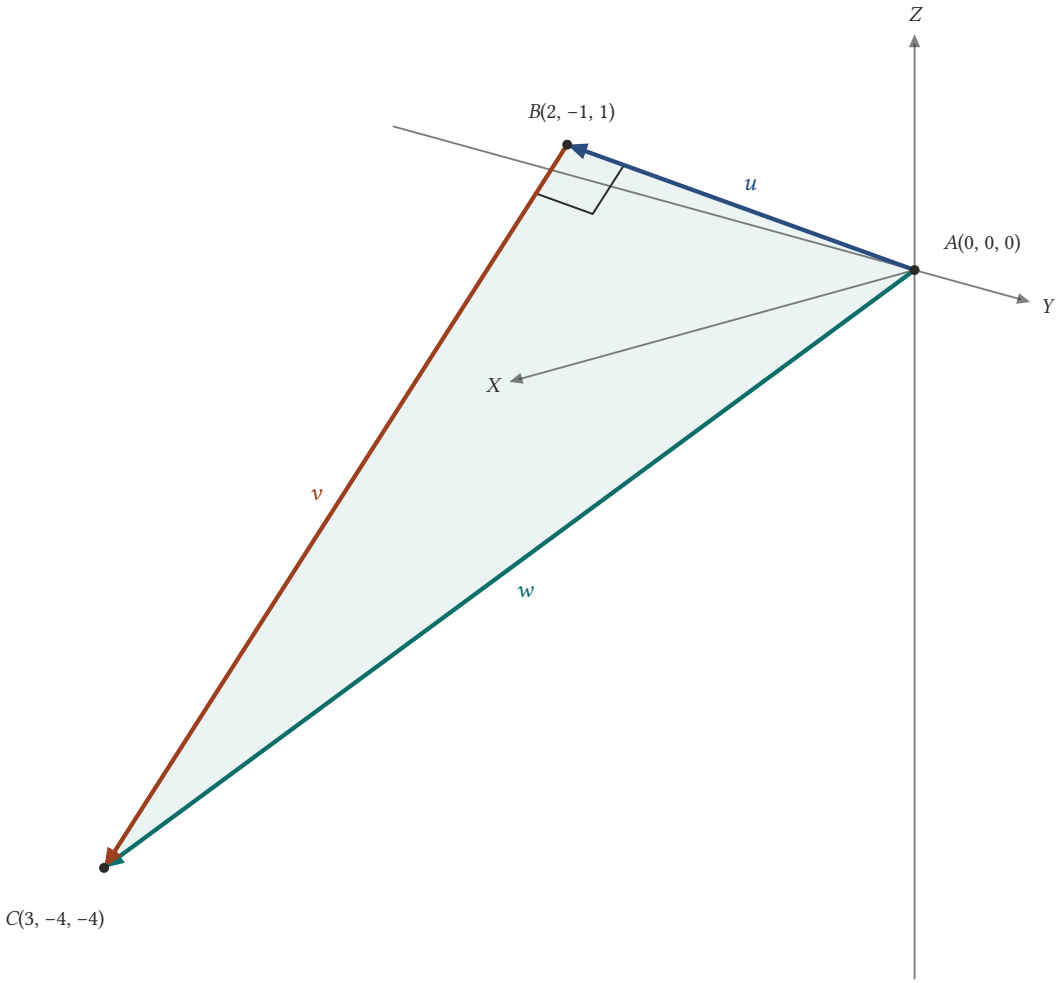
Çözüm.
Bir ABC üçgeninde $\overrightarrow{AB}$ kenarı u ile, $\overrightarrow{BC}$ kenarı v ile, $\overrightarrow{AC}$ kenarı w ile temsil edilsin. Bunun mümkün olması için önce A'dan B'ye, oradan C'ye gitmenin A'dan C'ye gitmekle aynı olması, yani $u + v = w$ olması gerekir. Gerçekten

$$(2, -1, 1) + (1, -3, -5) = (3, -4, -4) = w.$$

Şimdi B köşesindeki açıya bakalım:

$$\langle u, v \rangle = 2 \cdot 1 + (-1)(-3) + 1 \cdot (-5) = 2 + 3 - 5 = 0.$$

u ve v sıfırdan farklı olduğundan $u \perp v$'dir (Önerme 8.2). Sıfırdan farklı iki dik vektör paralel olamaz; dolayısıyla A, B, C bir doğru üzerinde değildir ve gerçekten bir üçgen oluşur. AB ve BC kenarları dik olduğundan bu üçgen, dik açısı B'de olan bir dik üçgendir.
Sağlama olarak Pisagor bağıntısını görelim: $\| u \|^2 = 6$, $\| v \|^2 = 35$, $\| w \|^2 = 41$ ve gerçekten $6 + 35 = 41$.



Şekil 8.14: $u + v = w$ olduğundan üç vektör ABC üçgeninin kenarlarıdır; $\langle u, v \rangle = 0$ olduğundan B köşesindeki açı diktir.

■

Alıştırma 8.2 (Toplamı sıfır olan üç birim vektör). $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ için $u + v + w = 0$ ve $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle = 1$ olsun. $\langle u, v \rangle$ değerini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

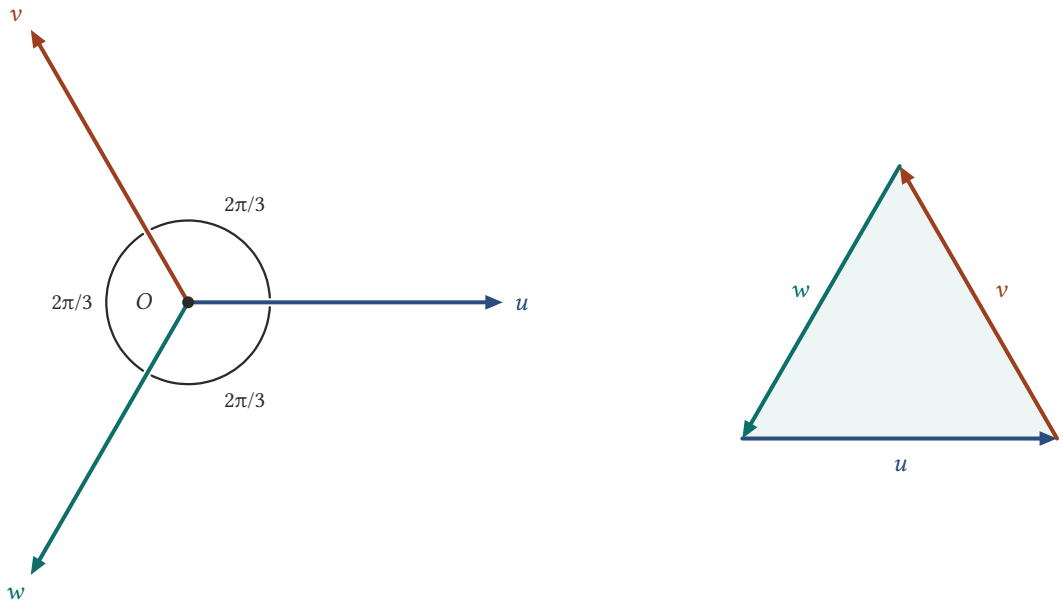
Çözüm.
$u + v + w = 0$ eşitliğinden $w = -(u + v)$ yazılabilir. Bunu $\langle w, w\rangle = 1$ koşulunda yerine koyalım:

$$\begin{aligned} 1 = \langle w, w\rangle &= \langle -(u+v), -(u+v)\rangle = \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= 1 + 2\langle u, v\rangle + 1. \end{aligned}$$

İlk satırda bilineerlikle iki (-1) çarpanını dışarı aldık ($(-1)^2 = 1$). Buradan $2\langle u, v\rangle = -1$, yani

$$\langle u, v\rangle = -\frac{1}{2}$$

bulunur.
Geometrik anlamı: u ile v birim vektör olduğundan $\cos \measuredangle(u, v) = -\frac{1}{2}$ ve $\measuredangle(u, v) = \frac{2\pi}{3}$'tür. Aynı hesap her çift için yapılabilir; üç birim vektör ikişer ikişer $120°$'lik açılar yapar. Uç uca eklendiklerinde başladıkları noktaya dönerler ve kenar uzunluğu 1 olan bir eşkenar üçgen oluştururlar.



u, v, w ikişer ikişer 2π/3 açı yapar — $u + v + w = 0$

Şekil 8.15: Solda aynı noktadan çizilen u, v, w birim vektörleri; ikişer ikişer $2\pi/3$ açı yaparlar. Sağda aynı vektörler uç uca eklenir ve kenar uzunluğu 1 olan bir eşkenar üçgen oluşturur: $u + v + w = 0$.

■

Alıştırma 8.3 (Paralelkenar kuralı). Her $u, v \in \mathbb{R}^3$ için

$$\| u + v \|^2 + \| u - v \|^2 = 2 \left(\| u \|^2 + \| v \|^2 \right)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
İki kareyi ayrı ayrı iç çarpım olarak açalım:

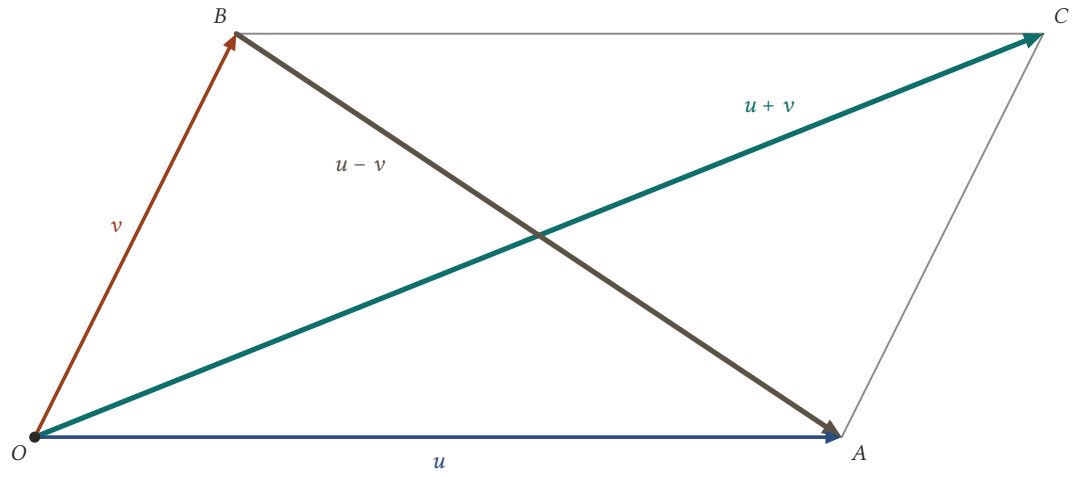
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| u+v \|^2 = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle,$$
$$\| u-v \|^2 = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle.$$

Taraf tarafa toplayınca karma terimler birbirini götürür:

$$\begin{aligned}\| u+v \|^2 + \| u-v \|^2 &= 2\langle u,u\rangle + 2\langle v,v\rangle \\ &= 2\| u \|^2 + 2\| v \|^2 = 2\left(\| u \|^2 + \| v \|^2 \right).\end{aligned}$$

Adının kaynağı şudur: kenarları u ve v olan bir paralelkenarın köşegenleri $u+v$ ve $u-v$'dir. Kural, **köşegenlerin karelerinin toplamının dört kenarın karelerinin toplamına eşit olduğunu** söyler (karşılıklı kenarlar eşit olduğundan dört kenarın kareleri toplamı $2\| u \|^2 + 2\| v \|^2$'dir). Örneğin $u = (4,0,0)$ ve $v = (1,2,0)$ için $\| u+v \|^2 = 29$, $\| u-v \|^2 = 13$ ve $29 + 13 = 42 = 2(16+5)$.



Şekil 8.16: Kenarları u ve v olan paralelkenarın köşegenleri $u+v$ ve $u-v$'dir. Köşegenlerin kareleri toplamı dört kenarın kareleri toplamına eşittir.

■

Alıştırma 8.4 (Polarizasyon özdeşliği). Her $u, v \in \mathbb{R}^3$ için

$$\langle u,v\rangle = \frac{\| u+v \|^2 - \| u-v \|^2}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Bir önceki alıştırmadaki açılımları bu kez birbirinden çıkaralım:

$$\begin{aligned}\| u+v \|^2 - \| u-v \|^2 &= \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &\quad - \left(\langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \right) \\ &= 2\langle u,v\rangle + 2\langle v,u\rangle \\ &= 4\langle u,v\rangle.\end{aligned}$$

Son adımda simetriyi kullandık. İki tarafı 4'e bölünce özdeşlik elde edilir.
Yani iç çarpım, yalnız uzunluklar bilinerek geri elde edilebilir: $u+v$ ve $u-v$ vektörlerinin uzunluklarını bilmek, $\langle u,v\rangle$'yi bilmek için yeter.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 8.5 (Köşegenleri eşit paralelkenar). Her $u, v \in \mathbb{R}^3$ için

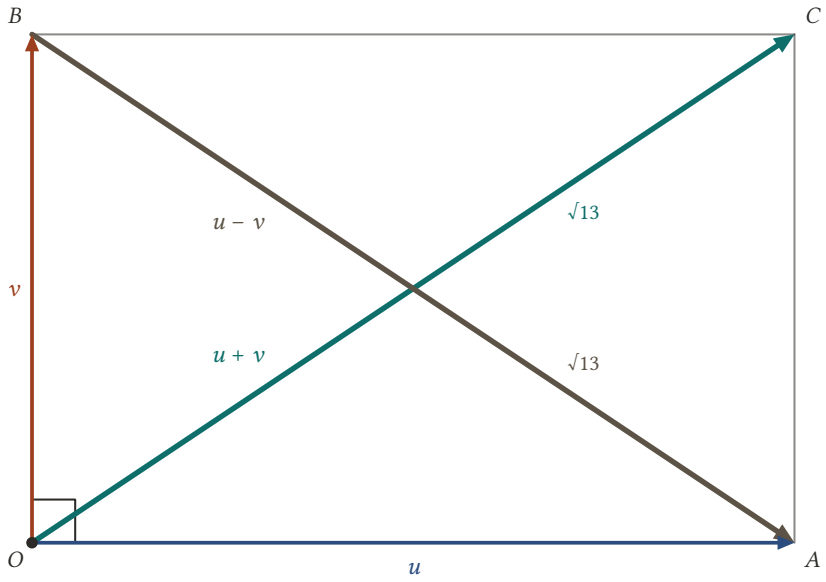
$$\| u+v \| = \| u-v \| \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Uzunluklar negatif olmadığından iki uzunluğun eşit olması, karelerinin eşit olmasına denktir. Kareleri açarak

$$\begin{aligned} \| u+v \| = \| u-v \| &\Leftrightarrow \langle u+v, u+v \rangle = \langle u-v, u-v \rangle \\ &\Leftrightarrow \| u \|^2 + 2\langle u, v \rangle + \| v \|^2 = \| u \|^2 - 2\langle u, v \rangle + \| v \|^2 \\ &\Leftrightarrow 4\langle u, v \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Her adım iki yönlüdür: ikinci satırdan üçüncüye geçerken iki taraftan aynı terimleri çıkardık, bu işlem geri alınabilir.
Geometrik anlamı: kenarları u ve v olan paralelkenarın köşegenleri ancak ve ancak kenarlar birbirine dik olduğunda, yani paralelkenar bir dikdörtgen olduğunda eşit uzunluktadır. Örneğin $u = (3, 0, 0)$ ve $v = (0, 2, 0)$ için iki köşegenin uzunluğu da $\sqrt{13}$'tür.



Şekil 8.17: u = (3, 0, 0) ve v = (0, 2, 0) dik olduğundan paralelkenar bir dikdörtgendir; iki köşegenin uzunluğu da $\sqrt{13}$'tür.

■

Alıştırma 8.6 (Farkların arasındaki eşit açılar). $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ birbirinden farklı vektörler olsun ve

$$\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = \langle w, w \rangle, \qquad \langle u, w \rangle = \langle w, v \rangle = \langle u, v \rangle$$

eşitlikleri sağlansın. $u - v$, $v - w$ ve $w - u$ vektörlerinin ikişer ikişer aralarındaki açıların eşit ve $\frac{2\pi}{3}$ olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Kısaltma için ortak değerlere ad verelim:

$$a = \langle u,u\rangle = \langle v,v\rangle = \langle w,w\rangle, \qquad b = \langle u,v\rangle = \langle v,w\rangle = \langle w,u\rangle.$$

(Simetriden $\langle w,v\rangle = \langle v,w\rangle$ ve $\langle u,w\rangle = \langle w,u\rangle$ olduğunu kullandık.)
Uzunluklar. Üç farkın uzunluk kareleri aynıdır:

$$\begin{aligned}
\| u-v \|^2 &= \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = 2a-2b,\\
\| v-w \|^2 &= \langle v,v\rangle - 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = 2a-2b,\\
\| w-u \|^2 &= \langle w,w\rangle - 2\langle w,u\rangle + \langle u,u\rangle = 2a-2b.
\end{aligned}$$

$u \neq v$ olduğundan $\| u-v \|^2 > 0$, yani $a-b>0$'dır. Demek ki üç fark da sıfırdan farklıdır ve aralarındaki açılar tanımlıdır.
İç çarpımlar. Bilineerlikle açarsak

$$\begin{aligned}
\langle u-v, v-w\rangle &= \langle u,v\rangle - \langle u,w\rangle - \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle\\
&= b - b - a + b = b-a,\\[4pt]
\langle v-w, w-u\rangle &= \langle v,w\rangle - \langle v,u\rangle - \langle w,w\rangle + \langle w,u\rangle\\
&= b - b - a + b = b-a,\\[4pt]
\langle w-u, u-v\rangle &= \langle w,u\rangle - \langle w,v\rangle - \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle\\
&= b - b - a + b = b-a
\end{aligned}$$

bulunur.
Açılar. $\theta = \measuredangle(u-v, v-w)$ olsun. Açı formülünden

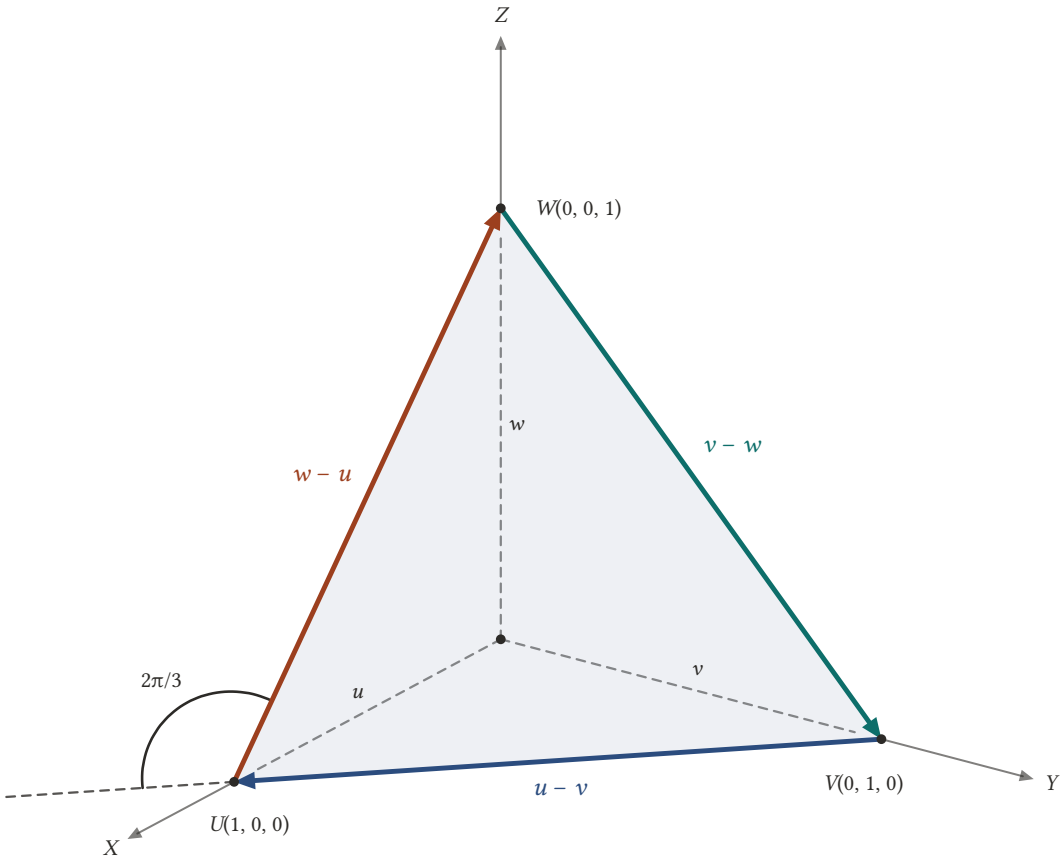
$$\cos\theta = \frac{\langle u-v, v-w\rangle}{\| u-v \|\,\| v-w \|} = \frac{b-a}{2(a-b)} = -\frac{1}{2}$$

ve dolayısıyla $\theta = \frac{2\pi}{3}$ elde edilir. Diğer iki çiftte pay yine $b-a$, paydadaki uzunlukların çarpımı yine $2(a-b)$ olduğundan $\gamma = \measuredangle(v-w, w-u)$ ve $\alpha = \measuredangle(w-u, u-v)$ için de

$$\cos\gamma = \cos\alpha = -\frac{1}{2}, \qquad \gamma = \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

bulunur. Böylece üç açı eşittir ve $\frac{2\pi}{3}$'tür.
Geometrik anlamı: u, v, w vektörlerinin uçları U, V, W olsun. Uzunluk hesabı $|\,UV\,| = |\,VW\,| = |\,WU\,|$ olduğunu, yani UVW'nin eşkenar üçgen olduğunu gösterir. $u-v = \overrightarrow{VU}$, $w-u = \overrightarrow{UW}$, $v-w = \overrightarrow{WV}$ vektörleri bu üçgenin kenarlarını sırayla dolaşır; ardışık iki kenar vektörü arasındaki açı, eşkenar üçgenin dış açısı olan $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$'tür. Örneğin $u = e_1$, $v = e_2$, $w = e_3$ koşulları sağlar ($a = 1$, $b = 0$).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.18: $u = e_1$, $v = e_2$, $w = e_3$ için UVW eşkenar bir üçgendir. Fark vektörleri üçgenin kenarlarını sırayla dolaşır; ardışık iki kenar vektörü arasındaki açı, dış açı olan $2\pi/3$'tür.

■

Alıştırma 8.7 (Eşit uzunluklu vektörlerin toplamı ve farkı). $\| u \| = \| v \|$ olacak biçimde seçilen her $u, v \in \mathbb{R}^3$ çifti için $u - v$ vektörünün $u + v$ vektörüne dik olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
İki vektörün iç çarpımını bilineerlikle açalım:

$$\begin{aligned}\langle u - v, u + v \rangle &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle \\ &= \| u \|^2 - \| v \|^2 .\end{aligned}$$

Simetriden $\langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle = 0$ olduğu için karma terimler gitti. $\| u \| = \| v \|$ olduğundan sonuç 0'dır; dolayısıyla $u - v \perp u + v$ bulunur (Önerme 8.2). (Bu hesap tersini de gösterir: $u - v \perp u + v$ ise $\| u \|^2 = \| v \|^2$, yani $\| u \| = \| v \|$ olur.)
■

Alıştırma 8.8 (Eşkenar dörtgenin köşegenleri). Eşit uzunluklu iki vektörün toplamı ile farkının dik olduğunu söyleyen sonucu (Alıştırma 8.7) $\mathbb{R}^2$'de geometrik olarak yorumlayınız.

Çözüm.
Düzlemdeki vektörleri XY-düzleminde yatan $(u_1, u_2, 0)$ biçimindeki uzay vektörleri olarak düşünürsek iç çarpım, uzunluk ve diklik aynen geçerlidir ve bir önceki alıştırma düzlemde de doğrudur.

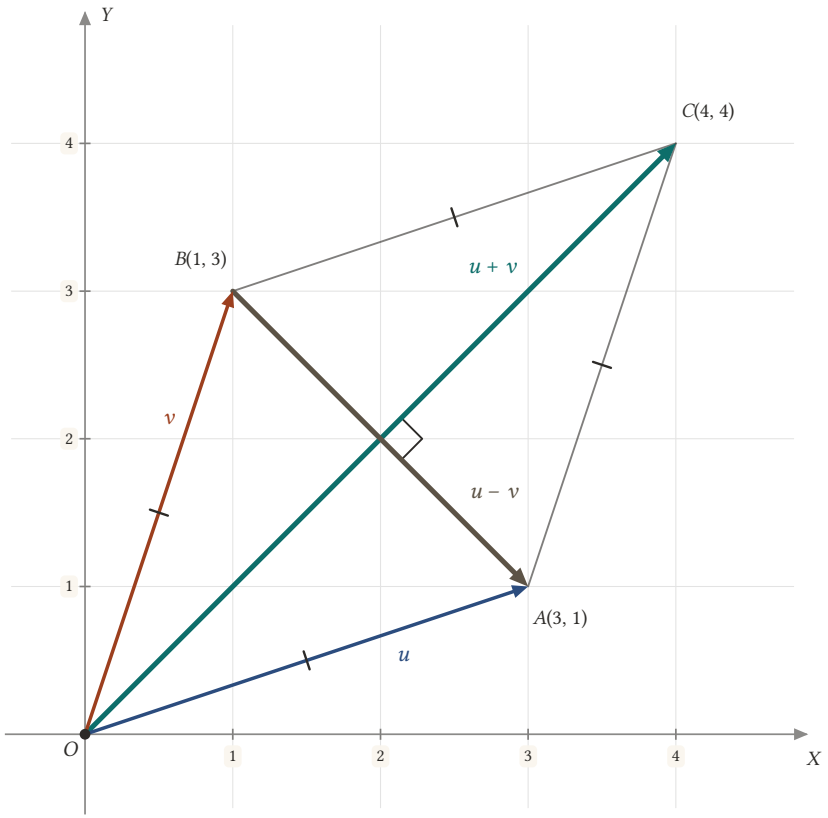
 CC BY-NC-SA 4.0

u ve v'yi aynı O noktasından çizip üzerlerine bir paralelkenar kuralım. Bu paralelkenarın köşegenleri $u+v$ (O'dan karşı köşeye) ve $u-v$'dir (bir kenarın ucundan ötekinin ucuna). $\| u \| = \| v \|$ koşulu paralelkenarın komşu kenarlarının, dolayısıyla dört kenarının da eşit olduğunu, yani paralelkenarın bir **eşkenar dörtgen** olduğunu söyler. O hâlde sonuç şudur: **eşkenar dörtgenin köşegenleri birbirine diktir.** Tersi de doğrudur: köşegenleri dik olan paralelkenar eşkenar dörtgendir.

Bir örnekle: $u = (3,1)$ ve $v = (1,3)$ için $\| u \|^2 = \| v \|^2 = 10$'dur; köşegenler $u+v = (4,4)$ ve $u-v = (2,-2)$ olup

$$\langle (4,4), (2,-2) \rangle = 8 - 8 = 0$$

çıkar.



Şekil 8.19: $u = (3, 1)$ ve $v = (1, 3)$ eşit uzunlukludur; üzerlerine kurulan paralelkenar bir eşkenar dörtgendir. Köşegenleri $u + v = (4, 4)$ ile $u - v = (2, -2)$ birbirine diktir.

■

Alıştırma 8.9 (İzdüşüm: dik vektörler). $v = (1,3,1)$ ve $u = (-1,1,-2)$ için $\mathrm{izd}_u(v)$ vektörünü bulunuz.

Çözüm.
$\mathrm{izd}_u(v) = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$ formülünü kullanıyoruz (Teorem 8.3).

$$\langle u, v \rangle = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 = -1 + 3 - 2 = 0$$

ve

$$\langle u, u \rangle = (-1)^2 + 1^2 + (-2)^2 = 1 + 1 + 4 = 6.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$\dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle} = \dfrac{0}{6} = 0$ olduğundan

$$\mathrm{izd}_u(v) = 0 \cdot u = (0,0,0)$$

bulunur. Bu sonucu Örnek 8.10 içinde de bulmuştuk: v, u'ya diktir.
■

Alıştırma 8.10 (İzdüşüm: negatif bileşen). $v = (-4,1,2)$ ve $u = (2,-1,3)$ için $\mathrm{izd}_u(v)$ vektörünü bulunuz.

Çözüm.

$$\langle u,v\rangle = 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 1 + 3\cdot 2 = -8 - 1 + 6 = -3$$

ve

$$\langle u,u\rangle = 2^2 + (-1)^2 + 3^2 = 4 + 1 + 9 = 14$$

olduğundan $\dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle} = -\dfrac{3}{14}$ ve

$$\mathrm{izd}_u(v) = -\frac{3}{14}\,(2,-1,3) = \left(-\frac{3}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{9}{14}\right)$$

bulunur. Bileşen negatif olduğundan izdüşüm u ile zıt yönlüdür; bu sonuç Örnek 8.11 ile aynıdır.
■

Alıştırma 8.11 (İzdüşüm: kesirli bileşen). $v = (1,-2,1)$ ve $u = (4,-4,7)$ için $\mathrm{izd}_u(v)$ vektörünü bulunuz.

Çözüm.

$$\langle u,v\rangle = 4\cdot 1 + (-4)\cdot(-2) + 7\cdot 1 = 4 + 8 + 7 = 19$$

ve

$$\langle u,u\rangle = 4^2 + (-4)^2 + 7^2 = 16 + 16 + 49 = 81$$

olduğundan $\mathrm{bil}_u(v) = \dfrac{19}{81}$ ve

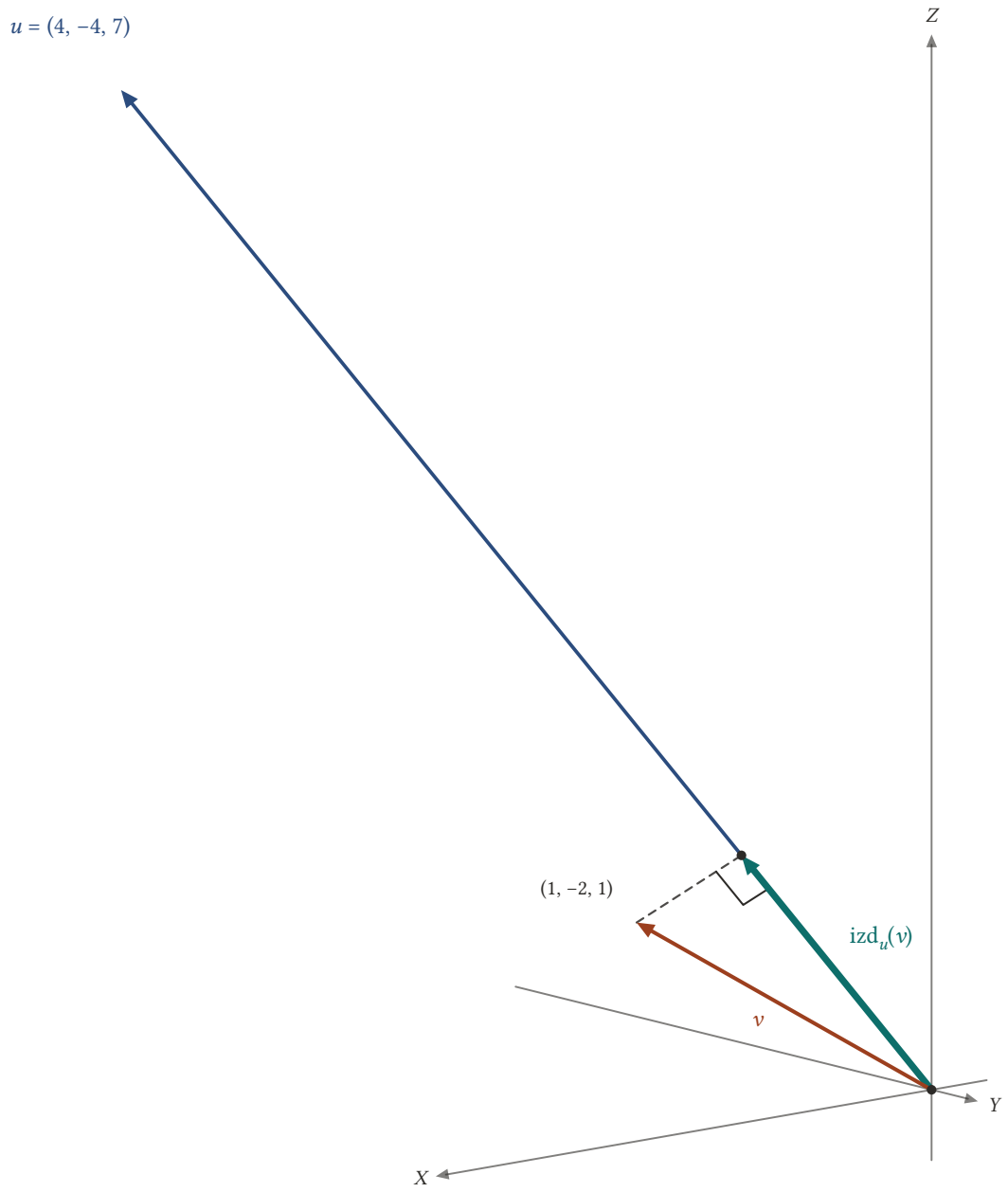
$$\mathrm{izd}_u(v) = \frac{19}{81}\,(4,-4,7) = \left(\frac{76}{81}, -\frac{76}{81}, \frac{133}{81}\right)$$

bulunur. Bileşen pozitif olduğundan izdüşüm u ile aynı yönlüdür.
Sağlama: $v - \mathrm{izd}_u(v) = \left(\frac{5}{81}, -\frac{86}{81}, -\frac{52}{81}\right)$ ve

$$\left\langle \left(\frac{5}{81}, -\frac{86}{81}, -\frac{52}{81}\right), (4,-4,7) \right\rangle = \frac{20 + 344 - 364}{81} = 0,$$

yani fark gerçekten u'ya diktir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.20: $v = (1, -2, 1)$'nin $u = (4, -4, 7)$ üzerine izdüşümü $\text{izd}_u(v) = (76/81, -76/81, 133/81)$'dir; bileşen $19/81$ pozitif olduğundan izdüşüm u ile aynı yönlüdür.

■

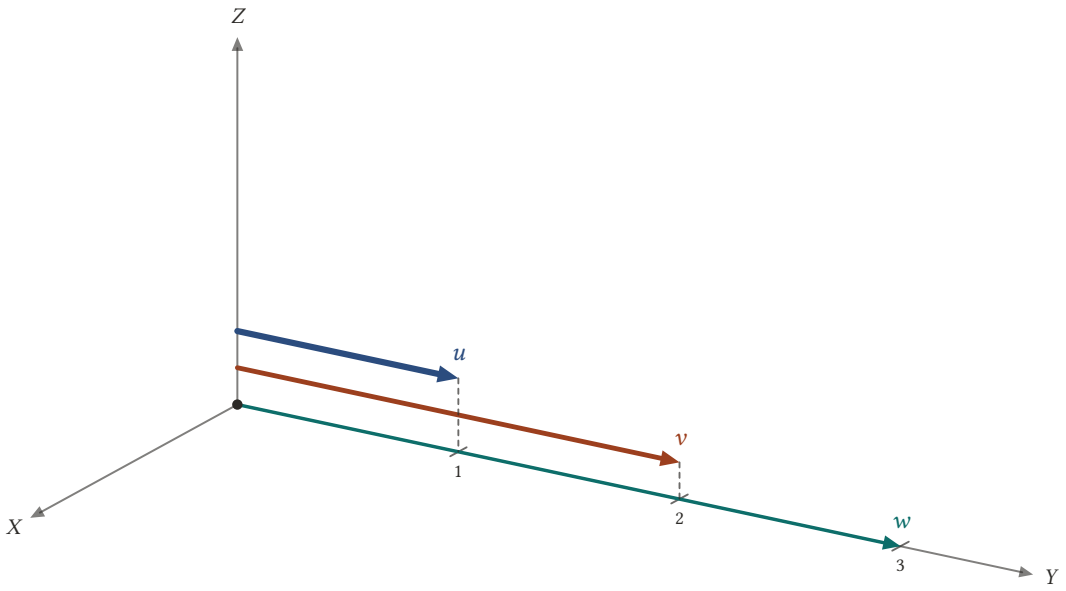
Alıştırma 8.12 (Aynı eksen üzerindeki vektörler). $u = (0, 1, 0)$, $v = (0, 2, 0)$ ve $w = (0, 3, 0)$ vektörlerini geometrik olarak yorumlayınız.

Çözüm.
$v = 2u$ ve $w = 3u$ olduğundan üç vektör de u'nun pozitif katlarıdır. Bir vektörü pozitif bir sayıyla çarpmak doğrultusunu ve yönünü değiştirmez; yalnız uzunluğunu ölçekler. O hâlde u, v ve w aynı doğrultuya ve aynı yöne sahiptir, yani birbirine paraleldir.
Bunu iç çarpımla da görebiliriz: $\langle u, v\rangle = 2$ ve $\| u \| \| v \| = 1 \cdot 2 = 2$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\cos \measuredangle(u,v) = \frac{2}{2} = 1, \qquad \measuredangle(u,v) = 0$$

olur; Cauchy–Schwarz eşitsizliği eşitliğe dönüşmüştür (Önerme 8.2, iv). Aynı hesap u ile w ve v ile w için de açıyı 0 verir.
Üç vektör de Y-ekseninin pozitif kısmı üzerinde yatar; uzunlukları 1, 2 ve 3'tür. Ortak birim vektörleri $u_0 = (0,1,0) = e_2$'dir, dolayısıyla doğrultman kosinüsleri $(0,1,0)$ ve doğrultu açıları $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = \frac{\pi}{2}$'dir.



Şekil 8.21: u = (0, 1, 0), v = (0, 2, 0), w = (0, 3, 0) hepsi Y-ekseninin pozitif kısmı üzerindedir; aynı doğrultu ve yöndedirler. Görünsünler diye oklar biraz yukarı kaydırılarak çizilmiştir.

■

Alıştırma 8.13 (Aynı doğru üzerindeki vektörler). $x = (0,1,1), y = (0,3,3)$ ve $z = (0,6,6)$ vektörlerini geometrik olarak yorumlayınız.

Çözüm.
$y = 3x$ ve $z = 6x$ olduğundan üç vektör de x'in pozitif katlarıdır; dolayısıyla aynı doğrultuya ve aynı yöne sahiptirler, yani birbirine paraleldirler. Örneğin

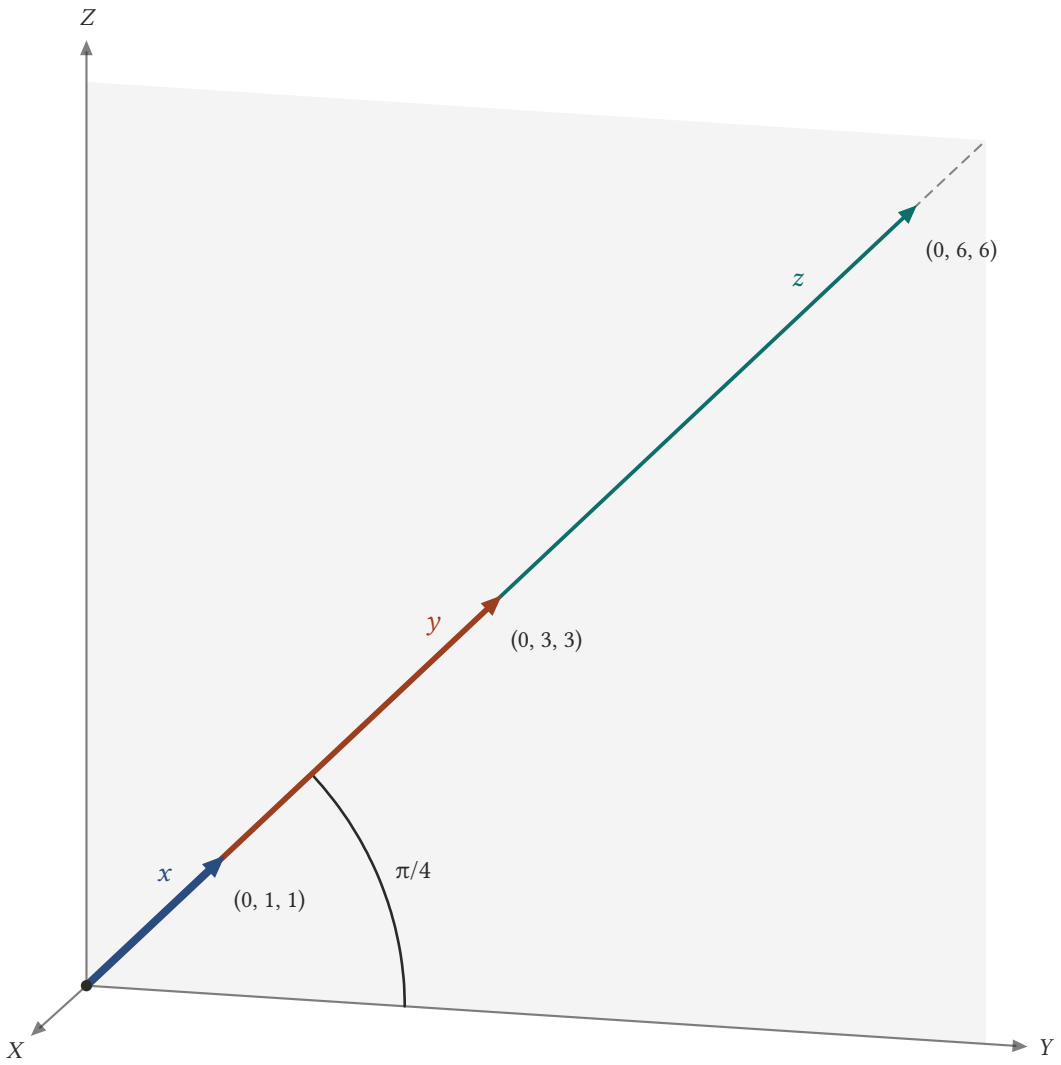
$$\langle x, y\rangle = 0 + 3 + 3 = 6, \qquad \| x \| \, \| y \| = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$$

olduğundan $\cos \measuredangle(x,y) = 1$ ve $\measuredangle(x,y) = 0$'dır.
Birinci bileşenleri 0 olduğundan üç vektör de YZ-düzleminde yatar; ikinci ve üçüncü bileşenleri eşit olduğundan bu düzlemde $y = z$ açıortay doğrusu üzerindedirler. Uzunlukları $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ ve $6\sqrt{2}$'dir. Ortak birim vektörleri

$$x_0 = \frac{x}{\| x \|} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

olduğundan doğrultu açıları $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{4}$'tür: vektörler X-eksenine dik, Y- ve Z-eksenleriyle eşit $45°$'lik açılar yapar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 8.22: $x = (0, 1, 1)$, $y = (0, 3, 3)$, $z = (0, 6, 6)$ YZ-düzleminde, $y = z$ açıortay doğrusu üzerindedir; bu doğru Y-ekseniyle $\pi/4$ açı yapar. Kısa oklar uzunların üstüne daha kalın çizilmiştir.

■

İç çarpım iki vektörden bir sayı üretti ve bu sayı bize uzunluğu, açıyı ve dikliği verdi. Bir sonraki bölümde, Vektörel ve Karma Çarpım bölümünde, iki vektörden bu kez yeni bir **vektör** üreten ve ikisine birden dik olan vektörel çarpımı tanıyacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

9. Vektörel ve Karma Çarpım

İç çarpım iki vektörden bir sayı üretir ve bize açıyı, uzunluğu, dikliği verir. Uzayda çok sık karşılaşılan bir başka soru ise şudur: verilen iki vektörün ikisine birden dik olan bir vektör nasıl bulunur? Bu sorunun cevabı **vektörel çarpımdır**. Vektörel çarpım iki vektörden yeni bir vektör üretir; bu vektör hem iki vektöre diktir hem de uzunluğu, iki vektörün belirlediği paralelkenarın alanına eşittir.
Vektörel çarpımı bir iç çarpımla birleştirince **karma çarpım** elde edilir: üç vektörden bir sayı. Bu sayı, üç vektörün üzerine kurulan paralelyüzün hacmini verir ve üç vektörün aynı düzleme paralel olup olmadığını tek bir determinantla söyler. Bölümün sonunda düzleme dönüp bu kavramlardan hangilerinin düzlemde anlamlı olduğunu tartışacağız.

9.1 Vektörel Çarpım

Vektörel çarpımı bir determinant yardımıyla tanımlayacağız. Birinci satırına standart baz vektörleri e_1, e_2, e_3 yazılan bu determinant gerçek bir sayı determinantı değildir; onu, birinci satıra göre açtığımızda ortaya çıkan ifadeyi kısaca yazmanın bir yolu olarak düşünmek gerekir.

Tanım 9.1 (Vektörel çarpım). $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ ve $v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, $\mathbb{R}^3$'te iki vektör olsun.

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (u, v) \mapsto u \times v$$

işlemi

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

determinantıyla, yani bu determinantın birinci satıra göre Laplace açılımıyla

$$\begin{aligned} u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2)\, e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\, e_2 \\ +(u_1v_2 - u_2v_1)\, e_3 \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu işleme $\mathbb{R}^3$'te **vektörel çarpım**, $u \times v$ vektörüne de u ile v'nin **vektörel çarpımı** denir.

Yani $u \times v$ bir sayı değil, $\mathbb{R}^3$'te bir vektördür. Koordinatlarla yazarsak

$$u \times v = \left(\, u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1 \, \right)$$

olur. Her bileşen bir 2×2 determinanttır. Bileşenlerdeki indislere dikkat edin: birinci bileşende $2, 3$; ikincide $3, 1$; üçüncüde $1, 2$ indisleri kullanılır. Yani indisler $1 \to 2 \to 3 \to 1$ biçiminde döngüsel olarak kayar. Bu gözlemi ispatlarda sık sık kullanacağız.

Vektörel çarpımı üç adımda hesaplamak

1. u'nun koordinatlarını üst satıra, v'nin koordinatlarını alt satıra yazın.
2. Birinci bileşen için birinci sütunu kapatın ve kalan 2×2 determinantı hesaplayın. Üçüncü bileşen için üçüncü sütunu kapatıp aynısını yapın.
3. İkinci bileşen için ikinci sütunu kapatın, kalan 2×2 determinantı hesaplayın ve **işaretini değiştirin**. Bu işaret, Laplace açılımındaki $+, -, +$ işaret düzeninden gelir.

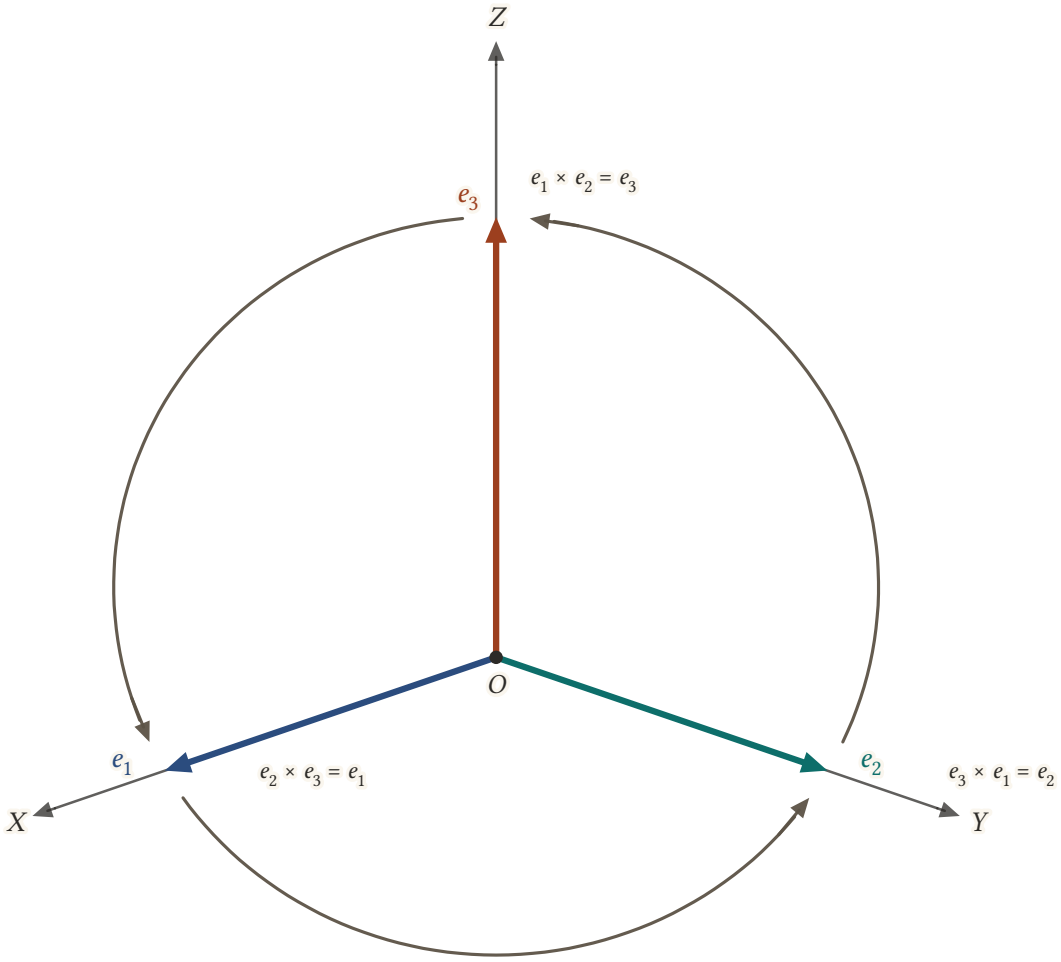
Örnek 9.1 (Standart baz vektörlerinin vektörel çarpımları). $e_1 \times e_2, e_2 \times e_3$ ve $e_3 \times e_1$ vektörlerini hesaplayalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
$e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ olduğundan tanımdaki formül doğrudan uygulanır:

$$\begin{aligned} e_1 \times e_2 &= (0\cdot 0 - 0\cdot 1, 0\cdot 0 - 1\cdot 0, 1\cdot 1 - 0\cdot 0) \\ &= (0,0,1) = e_3, \\ e_2 \times e_3 &= (1\cdot 1 - 0\cdot 0, 0\cdot 0 - 0\cdot 1, 0\cdot 0 - 1\cdot 0) \\ &= (1,0,0) = e_1, \\ e_3 \times e_1 &= (0\cdot 0 - 1\cdot 0, 1\cdot 1 - 0\cdot 0, 0\cdot 0 - 0\cdot 1) \\ &= (0,1,0) = e_2. \end{aligned}$$

Yani $e_1 \to e_2 \to e_3 \to e_1$ döngüsünde ardışık iki baz vektörünün vektörel çarpımı, döngüdeki bir sonraki baz vektörüdür. Her sonuç, çarpılan iki vektörün ikisine de diktir.



Şekil 9.1: Standart baz vektörleri ve döngü: $e_1 \longrightarrow e_2 \longrightarrow e_3 \longrightarrow e_1$ sırasında ardışık iki vektörün vektörel çarpımı döngüdeki bir sonraki vektördür; her yazı, sonucu olan vektörün ucunun yanındadır.

■

Örnek 9.2 (İlk vektörel çarpım hesabı). $u = (1,2,3)$ ve $v = (4,5,6)$ için $u \times v$'yi bulalım ve sonucun hem u'ya hem v'ye dik olduğunu doğrulayalım.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Üç adımlı reçeteyi uygulayalım. Üst satır $(1, 2, 3)$, alt satır $(4, 5, 6)$:

- Birinci sütun kapatılınca $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 15 = -3$.
- İkinci sütun kapatılınca $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6$; işareti değişir ve 6 olur.
- Üçüncü sütun kapatılınca $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$.

Buna göre

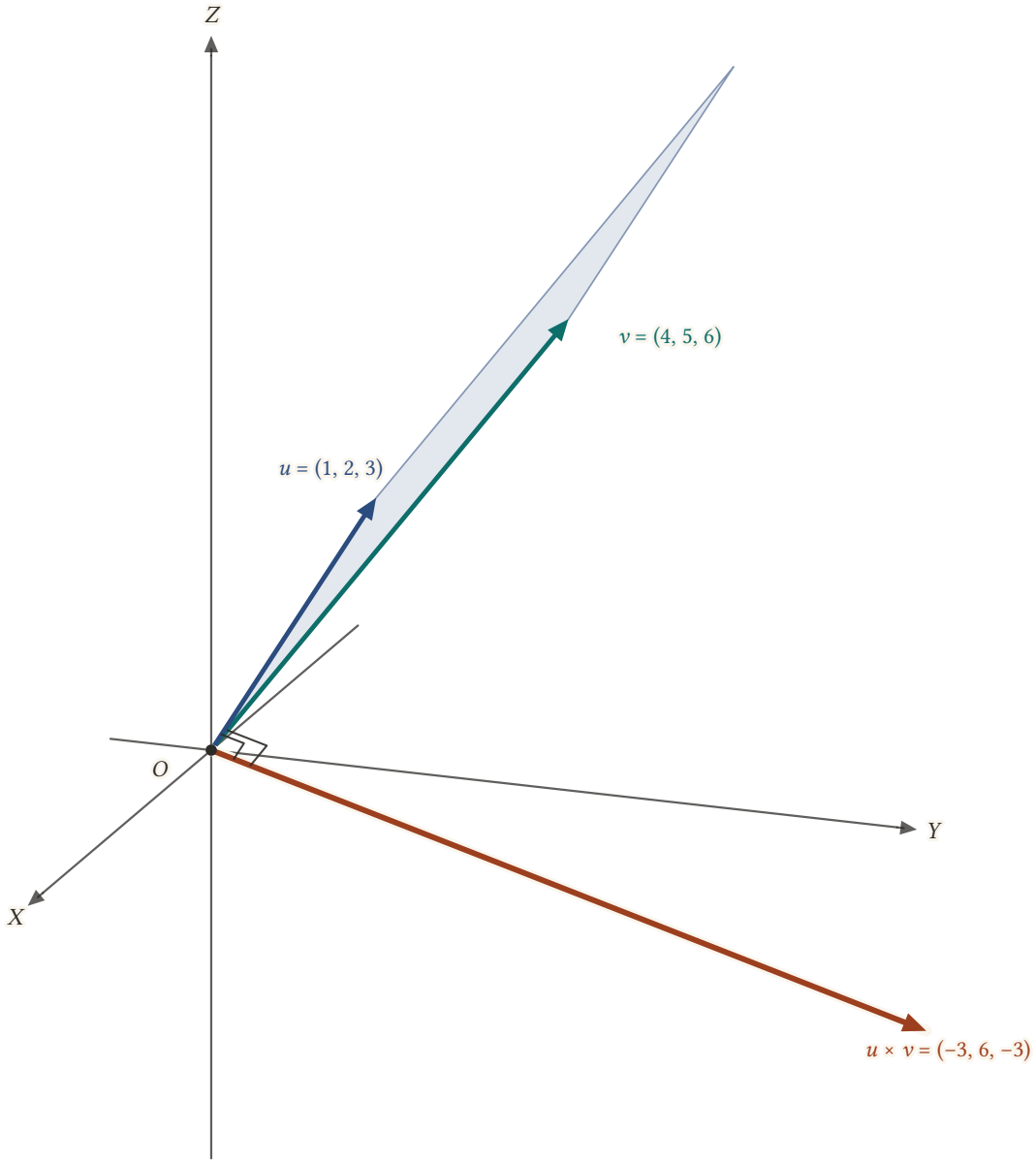
$$u \times v = (-3, 6, -3)$$

bulunur. Diklik için iç çarpımlara bakalım:

$$\langle u \times v, u \rangle = (-3) \cdot 1 + 6 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 = -3 + 12 - 9 = 0,$$
$$\langle u \times v, v \rangle = (-3) \cdot 4 + 6 \cdot 5 + (-3) \cdot 6 = -12 + 30 - 18 = 0.$$

İki iç çarpım da sıfır olduğundan $u \times v$, hem u'ya hem v'ye diktir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.2: $u = (1, 2, 3)$ ve $v = (4, 5, 6)$ vektörlerinin gerdiği paralelkenar ve $u \times v = (-3, 6, -3)$. Vektörel çarpım hem u'ya hem v'ye diktir, yani iki vektörün düzlemine diktir.

■

9.1.1 Vektörel Çarpımın Özellikleri

Vektörel çarpımın cebirsel kurallarını, tanımdaki determinantın özelliklerinden okuyabiliriz. Sembolik determinantta her bileşen bir 2×2 alt determinant olduğundan, satırların yer değiştirmesi, bir satırın bir sayıyla çarpılması ya da bir satırın iki satırın toplamı olarak yazılması gibi kurallar aynen geçerlidir.

Teorem 9.1 (Vektörel çarpımın özellikleri). *$u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda*
i) $u \times v = -v \times u$,
ii) $u \times u = 0$,
iii) $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v) = u \times (\lambda v)$,
iv) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$,
v) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$,

 CC BY-NC-SA 4.0

vi) $u \times v \perp u$ *ve* $u \times v \perp v$
dir.

İspat.
i) *Bir determinantta iki satırın yeri değişirse determinantın işareti değişir. İkinci ve üçüncü satırları değiştirirsek*

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -v \times u$$

bulunur.
ii) *İki satırı aynı olan bir determinant sıfırdır.* $u \times u$*'nun determinantında ikinci ve üçüncü satırlar aynı olduğundan* $u \times u = 0$ *olur. Bunu i)'den de görebiliriz:* $u \times u = -u \times u$ *ise* $2(u \times u) = 0$*, yani* $u \times u = 0$ *dır.*
iii) *Bir satırın bütün elemanları* λ *ile çarpılırsa determinant da* λ *ile çarpılır:*

$$(\lambda u) \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \lambda u_1 & \lambda u_2 & \lambda u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \lambda(u \times v).$$

Aynı kural üçüncü satıra uygulanırsa

$$u \times (\lambda v) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda v_1 & \lambda v_2 & \lambda v_3 \end{vmatrix} = \lambda(u \times v)$$

elde edilir.
iv) *Bir satırı iki satırın toplamı olan determinant, o satır yerine sırasıyla toplananlar yazılarak elde edilen iki determinantın toplamıdır:*

$$\begin{aligned} u \times (v + w) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 + w_1 & v_2 + w_2 & v_3 + w_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= u \times v + u \times w. \end{aligned}$$

v) *Aynı kural bu kez ikinci satıra uygulanır:*

$$\begin{aligned} (u + v) \times w &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= u \times w + v \times w. \end{aligned}$$

vi) *İç çarpımı koordinatlarla hesaplayalım:*

$$\begin{aligned} \langle u \times v, u \rangle &= (u_2 v_3 - u_3 v_2) u_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) u_2 \\ &\quad + (u_1 v_2 - u_2 v_1) u_3 \\ &= u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 + u_2 u_3 v_1 \\ &\quad - u_1 u_2 v_3 + u_1 u_3 v_2 - u_2 u_3 v_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci satırdaki her terim, işareti ters olarak bir kez daha geçtiği için terimler ikişer ikişer sadeleşir. Demek ki $u \times v \perp u$ *dur. Benzer biçimde*

$$\begin{aligned}\langle u \times v, v\rangle &= (u_2v_3 - u_3v_2)v_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)v_2 \\ &\quad +(u_1v_2 - u_2v_1)v_3 \\ &= u_2v_1v_3 - u_3v_1v_2 + u_3v_1v_2 \\ &\quad -u_1v_2v_3 + u_1v_2v_3 - u_2v_1v_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

olduğundan $u \times v \perp v$ *dir.*
■

i) özelliğine göre vektörel çarpım değişmeli değildir: çarpanların sırası değişince sonuç ters yöne döner. Örneğin Örnek 9.1 ile birlikte $e_2 \times e_1 = -e_3$, $e_3 \times e_2 = -e_1$ ve $e_1 \times e_3 = -e_2$ bulunur.

Sonuç 9.1 (Lineer bağımlı iki vektörün vektörel çarpımı). $u, v \in \mathbb{R}^3$ *lineer bağımlı olsun; yani ikisi birden sıfır olmayan* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *sayıları için*

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$$

bağıntısı sağlansın. Bu durumda $u \times v = 0$ *dır.*

İspat.
$\lambda_1 \neq 0$ *olduğunu varsayalım. Bu durumda* $u = \mu v$ *yazılabilir; burada* $\mu = -\lambda_2/\lambda_1$ *dir. Teorem 9.1 iii) ve ii)'den*

$$u \times v = (\mu v) \times v = \mu\,(v \times v) = \mu \cdot 0 = 0$$

bulunur. $\lambda_1 = 0$ *ise* $\lambda_2 \neq 0$ *olmak zorundadır ve bu kez* $v = \nu u$, $\nu = -\lambda_1/\lambda_2$ *yazılır. Yine aynı özelliklerden*

$$u \times v = u \times (\nu u) = \nu\,(u \times u) = 0$$

çıkar.
■

Yani paralel iki vektörün, ya da biri sıfır vektörü olan iki vektörün vektörel çarpımı sıfırdır. Bu sonucun tersinin de doğru olduğunu aşağıda göreceğiz (Önerme 9.3).

9.2 Üçlü Özdeşlik

Vektörel çarpım iki vektörden bir vektör ürettiğine göre, sonucu üçüncü bir vektörle yeniden vektörel çarpabiliriz. Böyle "iç içe" vektörel çarpımlar, iç çarpımlar cinsinden çok düzgün bir biçimde yazılabilir.

Teorem 9.2 (Üçlü özdeşlik). $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ *olsun. Bu durumda*
i)

$$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle\, v - \langle u, v\rangle\, w,$$

ii)

$$(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle\, v - \langle v, w\rangle\, u$$

dur.

İspat.
i) $t = v \times w$ *diyelim. Tanıma göre*

$$t = (t_1, t_2, t_3) = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1)$$

ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$$u \times t = (u_2t_3 - u_3t_2, u_3t_1 - u_1t_3, u_1t_2 - u_2t_1)$$

dir. Önce birinci bileşeni hesaplayalım. t_3 ile t_2 yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u_2t_3 - u_3t_2 &= u_2(v_1w_2 - v_2w_1) - u_3(v_3w_1 - v_1w_3) \\ &= u_2v_1w_2 - u_2v_2w_1 - u_3v_3w_1 + u_3v_1w_3 \\ &= v_1(u_2w_2 + u_3w_3) - w_1(u_2v_2 + u_3v_3) \end{aligned}$$

olur. Son satıra $u_1v_1w_1$ terimini bir kez ekleyip bir kez çıkaralım; eklenen terimi ilk parantezin, çıkarılanı ikinci parantezin içine alalım:

$$\begin{aligned} u_2t_3 - u_3t_2 &= v_1(u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) \\ &\quad -w_1(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &= v_1\langle u, w\rangle - w_1\langle u, v\rangle. \end{aligned}$$

Diğer iki bileşen için hesabı yinelemeye gerek yok. Vektörel çarpımın formülü, indisleri döngüsel olarak kaydırdığımızda ($1 \to 2 \to 3 \to 1$) değişmez: birinci bileşen ikinciye, ikinci üçüncüye, üçüncü birinciye dönüşür. İç çarpım $\langle u, w\rangle = u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3$ ise bu kaydırmada hiç değişmez. Bu yüzden yukarıdaki hesapta indisleri bir kez kaydırınca ikinci bileşen, iki kez kaydırınca üçüncü bileşen elde edilir:

$$\begin{aligned} u_3t_1 - u_1t_3 &= v_2\langle u, w\rangle - w_2\langle u, v\rangle, \\ u_1t_2 - u_2t_1 &= v_3\langle u, w\rangle - w_3\langle u, v\rangle. \end{aligned}$$

Üç bileşeni bir araya getirirsek

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= \langle u, w\rangle(v_1, v_2, v_3) - \langle u, v\rangle(w_1, w_2, w_3) \\ &= \langle u, w\rangle\, v - \langle u, v\rangle\, w \end{aligned}$$

bulunur.
ii) *Teorem 9.1 i)'yi ve ardından bu teoremin i) şıkkını (u yerine w, v yerine u, w yerine v yazarak) kullanalım:*

$$\begin{aligned} (u \times v) \times w &= -\,w \times (u \times v) \\ &= -\,\big(\,\langle w, v\rangle\, u - \langle w, u\rangle\, v\,\big) \\ &= \langle w, u\rangle\, v - \langle w, v\rangle\, u \\ &= \langle u, w\rangle\, v - \langle v, w\rangle\, u. \end{aligned}$$

Son adımda iç çarpımın simetri özelliğini kullandık.
■

Yani $u \times (v \times w)$ vektörü, v ile w'nin lineer bileşimidir; dolayısıyla v ile w'nin belirlediği düzleme paraleldir. Bu şaşırtıcı değildir: $u \times (v \times w)$, $v \times w$'ye diktir ve v ile w lineer bağımsız olduğunda $v \times w$'ye dik olan vektörler tam olarak v ile w'nin düzlemine paralel olan vektörlerdir. Aynı biçimde $(u \times v) \times w$ da u ile v'nin lineer bileşimidir.

Örnek 9.3 (Üçlü özdeşliği bir örnekte görmek). $u = (1, 1, 2)$, $v = (2, 0, 0)$ ve $w = (1, 2, 0)$ için $u \times (v \times w)$'yi önce doğrudan, sonra üçlü özdeşlikle hesaplayalım.

Çözüm.
Doğrudan hesap. Önce

$$v \times w = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 2, 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0, 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1) = (0, 0, 4)$$

bulunur. Sonra

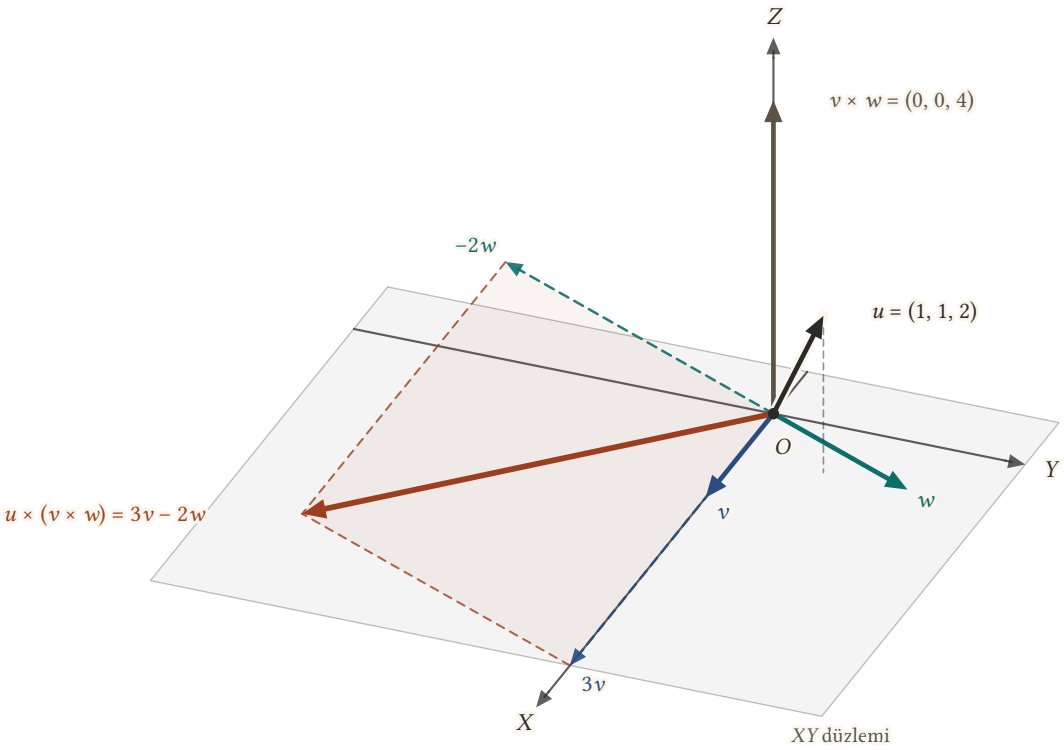
$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= (1, 1, 2) \times (0, 0, 4) \\ &= (1 \cdot 4 - 2 \cdot 0, 2 \cdot 0 - 1 \cdot 4, 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) \\ &= (4, -4, 0) \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

elde edilir.
Üçlü özdeşlikle. $\langle u, w\rangle = 1 + 2 + 0 = 3$ ve $\langle u, v\rangle = 2 + 0 + 0 = 2$ olduğundan

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= 3v - 2w = (6, 0, 0) - (2, 4, 0) \\ &= (4, -4, 0) \end{aligned}$$

bulunur. İki yol aynı sonucu verir. v ile w, XY düzlemindedir ve sonuç da, beklendiği gibi, XY düzleminde kalır.



Şekil 9.3: $u \times (v \times w) = (4, -4, 0)$, XY düzleminde kalır: $3v$ ile $-2w$ üzerine kurulan kesikli paralelkenarın köşegenidir, yani $3v - 2w$'ye eşittir. $v \times w = (0, 0, 4)$ ise düzleme diktir.

■

Vektörel çarpım birleşmeli de değildir: $u \times (v \times w)$ ile $(u \times v) \times w$ genellikle farklıdır. Üçlü özdeşliğin iki şıkkı zaten farklı ifadeler verir; aşağıdaki örnek bunu en sade biçimde gösterir.

Örnek 9.4 (Vektörel çarpım birleşmeli değildir). $e_1 \times (e_1 \times e_2)$ ile $(e_1 \times e_1) \times e_2$ vektörlerini karşılaştıralım.

Çözüm.
Standart baz vektörleri için $e_1 \times e_2 = e_3$ ve $e_3 \times e_1 = e_2$ dir (Örnek 9.1). Teorem 9.1 i)'den

$$e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_3 \times e_1 = -e_2$$

bulunur. Öte yandan Teorem 9.1 ii)'den $e_1 \times e_1 = 0$ olduğundan

$$(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0 \times e_2 = 0$$

dır. $-e_2 \neq 0$ olduğundan iki ifade farklıdır. Demek ki vektörel çarpımda parantezlerin yeri önemlidir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

9.3 Karma Çarpım

Üç vektörün koordinatlarını bir determinantın satırlarına yazarak bir sayı elde edebiliriz. Bu sayı, birazdan göreceğimiz gibi, hem bir vektörel çarpımı hem bir iç çarpımı içerir.

Tanım 9.2 (Karma çarpım). $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ ve $w = (w_1, w_2, w_3)$, $\mathbb{R}^3$'te üç vektör olsun.

$$[\cdot,\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(u, v, w) \mapsto [u, v, w] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanan işleme **karma çarpım**, $[u, v, w]$ sayısına da u, v, w vektörlerinin **karma çarpımı** denir.

Yani karma çarpım, satırları sırasıyla u, v, w olan 3×3 determinanttır ve sonucu bir sayıdır. İşleme "karma" denmesinin nedeni aşağıdaki önermededir: bu sayı, bir vektörel çarpım ile bir iç çarpımın art arda yapılmasıyla elde edilir.

Önerme 9.1 (Karma çarpım, bir vektörel ve bir iç çarpımdır). *$u, v, w \in \mathbb{R}^3$ için*

$$[u, v, w] = \langle u \times v, w\rangle = \langle w, u \times v\rangle$$

dir.

> ***İspat.***
> *Determinantı üçüncü satırına göre açalım. İşaret düzeni üçüncü satırda $+, -, +$ olduğundan*
>
> $$\begin{aligned}[u, v, w] &= w_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + w_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \\ &= w_1(u_2v_3 - u_3v_2) + w_2(u_3v_1 - u_1v_3) \\ &\quad + w_3(u_1v_2 - u_2v_1)\end{aligned}$$
>
> *bulunur. Parantezlerin içindekiler sırasıyla $u \times v$'nin birinci, ikinci ve üçüncü bileşenleridir. Dolayısıyla bu toplam, w ile $u \times v$'nin iç çarpımıdır:*
>
> $$[u, v, w] = \langle w, u \times v\rangle = \langle u \times v, w\rangle.$$
>
> *Son eşitlik iç çarpımın simetri özelliğidir.*
> ■

Örnek 9.5 (Karma çarpımı iki yoldan hesaplamak). $u = (1, 0, 2)$, $v = (2, 1, 0)$ ve $w = (0, 3, 1)$ için $[u, v, w]$'yi hem determinantla hem de $\langle u \times v, w\rangle$ ile hesaplayalım.

> **Çözüm.**
> **Determinantla.** Birinci satıra göre açarsak
>
> $$\begin{aligned}[u, v, w] &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\,(1 \cdot 1 - 0 \cdot 3) - 0\,(2 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 2\,(2 \cdot 3 - 1 \cdot 0) \\ &= 1 - 0 + 12 = 13\end{aligned}$$
>
> bulunur.
> **Vektörel ve iç çarpımla.** Önce
>
> $$u \times v = (0 \cdot 0 - 2 \cdot 1, 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) = (-2, 4, 1)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve sonra

$$\langle u \times v, w\rangle = (-2)\cdot 0 + 4\cdot 3 + 1\cdot 1 = 13$$

elde edilir. İki yol aynı sonucu verir: $[u, v, w] = 13$.
■

9.3.1 Karma Çarpımın Özellikleri

Karma çarpım bir determinant olduğu için özellikleri de determinantın satır işlemlerinden gelir. Bazı adımlarda karma çarpımın $\langle u \times v, w\rangle$ biçimindeki yazılışını (Önerme 9.1) kullanmak daha kısadır.

Teorem 9.3 (Karma çarpımın özellikleri). *$u, v, w, t \in \mathbb{R}^3$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun.*
i) Döngüsel sıra değişiminde karma çarpım değişmez, iki vektörün yeri değişince işaret değiştirir:

$$[u, v, w] = [w, u, v] = [v, w, u],$$

$$[u, v, w] = -[u, w, v] = -[w, v, u] = -[v, u, w].$$

ii) İki vektörü aynı olan karma çarpım sıfırdır:

$$[u, u, v] = [u, v, u] = [u, v, v] = 0.$$

iii) Bir bileşendeki sayı çarpanı dışarı çıkar:

$$\lambda[u, v, w] = [\lambda u, v, w] = [u, \lambda v, w] = [u, v, \lambda w].$$

iv) Karma çarpım her bileşende toplamsaldır:

$$\begin{aligned}[u + t, v, w] &= [u, v, w] + [t, v, w],\\ [u, v + t, w] &= [u, v, w] + [u, t, w],\\ [u, v, w + t] &= [u, v, w] + [u, v, t].\end{aligned}$$

İspat.
i) *İki satırın yeri değişince determinantın işareti değişir. Önce ikinci ile üçüncü satırı, sonra birinci ile ikinci satırı değiştirelim:*

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Ortadaki determinant $[u, w, v]$, sağdaki $[w, u, v]$ dir. Böylece hem $[u, v, w] = -[u, w, v]$ hem de $[u, v, w] = [w, u, v]$ bulunur. Aynı iki adımı $[w, u, v]$'ye uygularsak

$$[w, u, v] = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

olur; yani $[w, u, v] = [v, w, u]$ dır. Birinci ile ikinci satırı değiştirirsek

$$[u, v, w] = -\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = -[v, u, w],$$

birinci ile üçüncü satırı değiştirirsek

$$[u, v, w] = -\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -[w, v, u]$$

elde edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

ii) *Önerme 9.1 ile Teorem 9.1 ii) ve vi)'yı kullanalım:*

$$\begin{aligned}[u,u,v] &= \langle u\times u, v\rangle = \langle 0, v\rangle = 0,\\ [u,v,u] &= \langle u\times v, u\rangle = 0,\\ [u,v,v] &= \langle u\times v, v\rangle = 0.\end{aligned}$$

İkinci ve üçüncü satırlarda sıfır, $u\times v$'nin hem u'ya hem v'ye dik olmasından gelir.
iii) *Önerme 9.1, iç çarpımın doğrusallığı ve Teorem 9.1 iii)'den*

$$\begin{aligned}\lambda[u,v,w] &= \lambda\langle u\times v, w\rangle = \langle \lambda(u\times v), w\rangle\\ &= \langle (\lambda u)\times v, w\rangle = [\lambda u, v, w]\end{aligned}$$

bulunur. Aynı zincirde $\lambda(u\times v) = u\times(\lambda v)$ yazılırsa $\lambda[u,v,w] = [u,\lambda v,w]$ çıkar. Son olarak iç çarpımın ikinci bileşende de doğrusal olmasından

$$\lambda[u,v,w] = \langle u\times v, \lambda w\rangle = [u,v,\lambda w]$$

elde edilir.
iv) *Teorem 9.1 v)'den $(u+t)\times v = u\times v + t\times v$ olduğundan*

$$\begin{aligned}[u+t,v,w] &= \langle (u+t)\times v, w\rangle\\ &= \langle u\times v + t\times v, w\rangle\\ &= \langle u\times v, w\rangle + \langle t\times v, w\rangle\\ &= [u,v,w] + [t,v,w]\end{aligned}$$

bulunur. İkinci eşitlik için bu kez Teorem 9.1 iv)'ü kullanırız:

$$\begin{aligned}[u,v+t,w] &= \langle u\times v + u\times t, w\rangle\\ &= [u,v,w] + [u,t,w].\end{aligned}$$

Üçüncüsü doğrudan iç çarpımın toplamsallığıdır:

$$\begin{aligned}[u,v,w+t] &= \langle u\times v, w+t\rangle\\ &= \langle u\times v, w\rangle + \langle u\times v, t\rangle\\ &= [u,v,w] + [u,v,t].\end{aligned}$$

■

Yani karma çarpım, her bileşeninde ayrı ayrı doğrusaldır; üç vektörün sırasını döngüsel olarak kaydırmak sonucu değiştirmez, iki vektörün yerini değiştirmek yalnızca işaretini değiştirir. Özellikle i) şıkkı ile Önerme 9.1 birleşince

$$\langle u\times v, w\rangle = [u,v,w] = [v,w,u] = \langle u, v\times w\rangle$$

bulunur: karma çarpımda "$\times$" ile iç çarpımın yerleri değiştirilebilir.

9.4 Lagrange, Dörtlü ve Gram Özdeşlikleri

Üçlü özdeşlik ile karma çarpımın özellikleri bir araya gelince, vektörel çarpımların iç çarpımları ve karma çarpımların çarpımları için kullanışlı formüller elde edilir. Bu formüller, uzunluk ve açı hesaplarının temelidir.

Teorem 9.4 (Lagrange özdeşliği). *$u,v,w,t\in\mathbb{R}^3$ olmak üzere*

$$\langle u\times v, w\times t\rangle = \begin{vmatrix}\langle u,w\rangle & \langle u,t\rangle\\ \langle v,w\rangle & \langle v,t\rangle\end{vmatrix}$$

dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$z = w \times t$ diyelim. Önerme 9.1 ve Teorem 9.3 i)'deki döngüsel kaydırmayla

$$\langle u \times v, z\rangle = [u, v, z] = [z, u, v] = \langle z \times u, v\rangle$$

yazılır. Burada $z \times u = (w \times t) \times u$ vektörüne Teorem 9.2 ii)'yi (u yerine w, v yerine t, w yerine u yazarak) uygulayalım:

$$(w \times t) \times u = \langle w, u\rangle\, t - \langle t, u\rangle\, w.$$

Bunu yerine koyup iç çarpımın doğrusallığını ve simetrisini kullanırsak

$$\begin{aligned}\langle u \times v, w \times t\rangle &= \text{chevron.l}\langle w, u\rangle\, t - \langle t, u\rangle\, w, v\text{chevron.r}\\ &= \langle w, u\rangle\langle t, v\rangle - \langle t, u\rangle\langle w, v\rangle\\ &= \langle u, w\rangle\langle v, t\rangle - \langle u, t\rangle\langle v, w\rangle\\ &= \begin{vmatrix}\langle u, w\rangle & \langle u, t\rangle\\ \langle v, w\rangle & \langle v, t\rangle\end{vmatrix}\end{aligned}$$

elde edilir.
■

Lagrange özdeşliğinin en önemli kullanımı, bir vektörel çarpımın uzunluğunu iç çarpımlarla hesaplamaktır.

Sonuç 9.2 (Vektörel çarpımın uzunluğu). *$u, v \in \mathbb{R}^3$ olsun. Bu durumda*
i)

$$\| u \times v \|^2 = \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2,$$

ii) u ile v sıfırdan farklı ve aralarındaki açı θ ise $\| u \times v \| = \| u \|\, \| v \| \sin\theta$ dır.

İspat.
i) *Lagrange özdeşliğinde w yerine u, t yerine v yazalım. Sol taraf $\langle u \times v, u \times v\rangle = \| u \times v \|^2$ olur ve*

$$\| u \times v \|^2 = \begin{vmatrix}\langle u, u\rangle & \langle u, v\rangle\\ \langle v, u\rangle & \langle v, v\rangle\end{vmatrix} = \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle^2$$

bulunur.
ii) *$\langle u, u\rangle = \| u \|^2$, $\langle v, v\rangle = \| v \|^2$ ve $\langle u, v\rangle = \| u \|\, \| v \| \cos\theta$ olduğundan i)'den*

$$\begin{aligned}\| u \times v \|^2 &= \| u \|^2 \| v \|^2 - \left(\| u \|\, \| v \| \cos\theta\right)^2\\ &= \| u \|^2 \| v \|^2 - \| u \|^2 \| v \|^2 \cos^2\theta\\ &= \| u \|^2 \| v \|^2 (1 - \cos^2\theta)\\ &= \| u \|^2 \| v \|^2 \sin^2\theta\end{aligned}$$

bulunur. İki vektör arasındaki açı $0 \le \theta \le \pi$ aralığında olduğundan $\sin\theta \ge 0$ dır. İki tarafın da negatif olmayan karekökünü alırsak

$$\| u \times v \| = \| u \|\, \| v \| \sin\theta$$

elde edilir.
■

Örnek 9.6 (Uzunluk formülünü bir örnekte doğrulamak). $u = (1, 2, 3)$ ve $v = (4, 5, 6)$ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\| u \times v \|^2 = \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2$$

eşitliğini doğrulayalım.

Çözüm.
Bu vektörler için $u \times v = (-3,6,-3)$ bulmuştuk (Örnek 9.2). Buna göre

$$\| u \times v \|^2 = 9 + 36 + 9 = 54$$

dür. Öte yandan

$$\langle u,u\rangle = 1+4+9 = 14, \qquad \langle v,v\rangle = 16+25+36 = 77$$

ve

$$\langle u,v\rangle = 4+10+18 = 32$$

olduğundan

$$\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle - \langle u,v\rangle^2 = 14\cdot 77 - 32^2 = 1078 - 1024 = 54$$

bulunur. İki taraf da 54'tür.
■

Şimdi dört vektör arasındaki bir bağıntıya geçelim. $\mathbb{R}^3$'te dört vektör her zaman lineer bağımlıdır; aşağıdaki özdeşlik bu bağımlılığı karma çarpımlarla açıkça yazar.

Teorem 9.5 (Dörtlü özdeşlik). *$u,v,w,t \in \mathbb{R}^3$ olsun. Bu durumda*

$$[u,v,w]\,t = [t,v,w]\,u + [u,t,w]\,v + [u,v,t]\,w$$

dir.

İspat.
$(u\times v)\times(w\times t)$ vektörünü üçlü özdeşliğin iki şıkkıyla iki farklı biçimde hesaplayıp sonuçları eşitleyeceğiz.
Birinci hesap. *Teorem 9.2 ii)'de üçüncü vektör olarak $w\times t$'yi alalım:*

$$(u\times v)\times(w\times t) = \langle u, w\times t\rangle\, v - \langle v, w\times t\rangle\, u.$$

Karma çarpımın iç çarpımla yazılışından (Önerme 9.1) $\langle u, w\times t\rangle = \langle w\times t, u\rangle = [w,t,u]$ ve benzer biçimde $\langle v, w\times t\rangle = [w,t,v]$ dir. Böylece

$$(u\times v)\times(w\times t) = [w,t,u]\,v - [w,t,v]\,u$$

bulunur.
İkinci hesap. *Teorem 9.2 i)'de birinci vektör olarak $y = u\times v$'yi alalım:*

$$y\times(w\times t) = \langle y,t\rangle\, w - \langle y,w\rangle\, t.$$

Burada $\langle y,t\rangle = \langle u\times v, t\rangle = [u,v,t]$ ve $\langle y,w\rangle = [u,v,w]$ dir. Böylece

$$(u\times v)\times(w\times t) = [u,v,t]\,w - [u,v,w]\,t$$

bulunur.
Eşitleme. *İki sonuç aynı vektör olduğundan*

$$[u,v,t]\,w - [u,v,w]\,t = [w,t,u]\,v - [w,t,v]\,u$$

ve buradan

$$[u,v,w]\,t = [w,t,v]\,u - [w,t,u]\,v + [u,v,t]\,w$$

 CC BY-NC-SA 4.0

elde edilir. Katsayıları istenen biçime getirelim. Teorem 9.3 i)'deki döngüsel kaydırmayla $[w,t,v] = [t,v,w]$ *dir. Yine döngüsel kaydırmayla* $[w,t,u] = [u,w,t]$ *ve son iki vektörün yeri değişince işaret değiştiğinden* $[u,w,t] = -[u,t,w]$ *dir; yani* $-[w,t,u] = [u,t,w]$ *olur. Bunları yerine yazarsak*

$$[u,v,w]\,t = [t,v,w]\,u + [u,t,w]\,v + [u,v,t]\,w$$

bulunur.
■

Yani $[u,v,w] \neq 0$ ise, her t vektörü u, v, w cinsinden

$$t = \frac{[t,v,w]}{[u,v,w]}\,u + \frac{[u,t,w]}{[u,v,w]}\,v + \frac{[u,v,t]}{[u,v,w]}\,w$$

biçiminde yazılır. Katsayıların her biri, $[u,v,w]$'de ilgili vektörün yerine t konarak elde edilen karma çarpımın $[u,v,w]$'ye oranıdır.

Örnek 9.7 (Bir vektörü karma çarpımlarla bileşenlerine ayırmak). $u = (1,1,0), v = (0,1,1), w = (1,0,1)$ ve $t = (2,3,5)$ olsun. Dörtlü özdeşliği kullanarak t'yi u, v, w cinsinden yazalım.

Çözüm.
Gereken dört karma çarpımı birinci satıra göre açarak hesaplayalım:

$$[u,v,w] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(1-0) - 1\,(0-1) + 0 = 2,$$

$$[t,v,w] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(1-0) - 3\,(0-1) + 5\,(0-1) = 0,$$

$$[u,t,w] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(3-0) - 1\,(2-5) + 0 = 6,$$

$$[u,v,t] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\,(5-3) - 1\,(0-2) + 0 = 4.$$

Dörtlü özdeşlikten $2t = 0 \cdot u + 6v + 4w$, yani

$$t = 3v + 2w$$

bulunur. Kontrol edelim:

$$3v + 2w = (0,3,3) + (2,0,2) = (2,3,5) = t.$$

■

Son olarak iki karma çarpımın çarpımını iç çarpımlarla yazalım. İspatta lineer cebirden bilinen iki kural kullanılır: bir matrisin determinantı transpozunun determinantına eşittir ve iki matrisin çarpımının determinantı determinantların çarpımıdır.

Teorem 9.6 (Gram özdeşliği). $u,v,w,x,y,z \in \mathbb{R}^3$ *olsun. Bu durumda*

$$[x,y,z]\,[u,v,w] = \begin{vmatrix} \langle x,u\rangle & \langle x,v\rangle & \langle x,w\rangle \\ \langle y,u\rangle & \langle y,v\rangle & \langle y,w\rangle \\ \langle z,u\rangle & \langle z,v\rangle & \langle z,w\rangle \end{vmatrix}$$

dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
İkinci determinantı transpozuyla değiştirebiliriz, çünkü transpoz alınınca determinant değişmez:

$$[x,y,z]\,[u,v,w] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Determinantların çarpımı, matrislerin çarpımının determinantıdır:

$$[x,y,z]\,[u,v,w] = \left| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} \right|.$$

Çarpım matrisinin i-inci satır, j-inci sütun elemanı, birinci matrisin i-inci satırı ile ikinci matrisin j-inci sütununun karşılıklı elemanlarının çarpımlarının toplamıdır. Örneğin sol üst eleman $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = \langle x, u\rangle$, onun sağındaki $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = \langle x, v\rangle$ dir. Birinci matrisin satırları x, y, z; ikinci matrisin sütunları u, v, w olduğundan çarpım matrisinin bütün elemanları iç çarpımdır:

$$[x,y,z]\,[u,v,w] = \begin{vmatrix} \langle x,u\rangle & \langle x,v\rangle & \langle x,w\rangle \\ \langle y,u\rangle & \langle y,v\rangle & \langle y,w\rangle \\ \langle z,u\rangle & \langle z,v\rangle & \langle z,w\rangle \end{vmatrix}.$$

■

Yani özellikle $x = u$, $y = v$, $z = w$ alınırsa

$$[u,v,w]^2 = \begin{vmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle & \langle u,w\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle \\ \langle w,u\rangle & \langle w,v\rangle & \langle w,w\rangle \end{vmatrix}$$

olur: karma çarpımın karesini bilmek için vektörlerin koordinatlarına gerek yoktur, aralarındaki iç çarpımlar yeter. Bu, Sonuç 9.2 i)'nin üç vektörlü karşılığıdır.

Örnek 9.8 (Karma çarpımın karesini iç çarpımlardan bulmak). $u = (1,0,2)$, $v = (2,1,0)$, $w = (0,3,1)$ için $[u,v,w]^2$'yi Gram özdeşliğiyle hesaplayalım ve Örnek 9.5 ile karşılaştıralım.

Çözüm.
Gerekli iç çarpımlar şunlardır:

$$\langle u,u\rangle = 5,\ \langle u,v\rangle = 2,\ \langle u,w\rangle = 2,$$
$$\langle v,v\rangle = 5,\ \langle v,w\rangle = 3,\ \langle w,w\rangle = 10.$$

Gram determinantını birinci satıra göre açalım:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 5\,(50-9) - 2\,(20-6) + 2\,(6-10)$$
$$= 205 - 28 - 8 = 169.$$

Daha önce $[u,v,w] = 13$ bulmuştuk (Örnek 9.5) ve gerçekten $13^2 = 169$ dur.
■

9.5 Vektörel Çarpımın Geometrik Yorumu

Buraya kadar vektörel çarpımı cebirsel olarak inceledik. Şimdi $u \times v$ vektörünün geometrik olarak neyi temsil ettiğini, yani doğrultusunu, yönünü ve uzunluğunu sırayla yorumlayalım.
Doğrultu. $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ise Teorem 9.1 vi)'ya göre

$$u \times v \perp u \qquad \text{ve} \qquad u \times v \perp v$$

dir. Demek ki u ile v'ye paralel olan bir düzleme dik bir vektör bulmak için bu iki vektörün vektörel çarpımını almak yeterlidir.

Örnek 9.9 (İki vektöre dik birim vektörler). $u = (2, -1, 1)$ ve $v = (1, 1, -1)$ vektörlerinin ikisine de dik olan birim vektörleri bulalım.

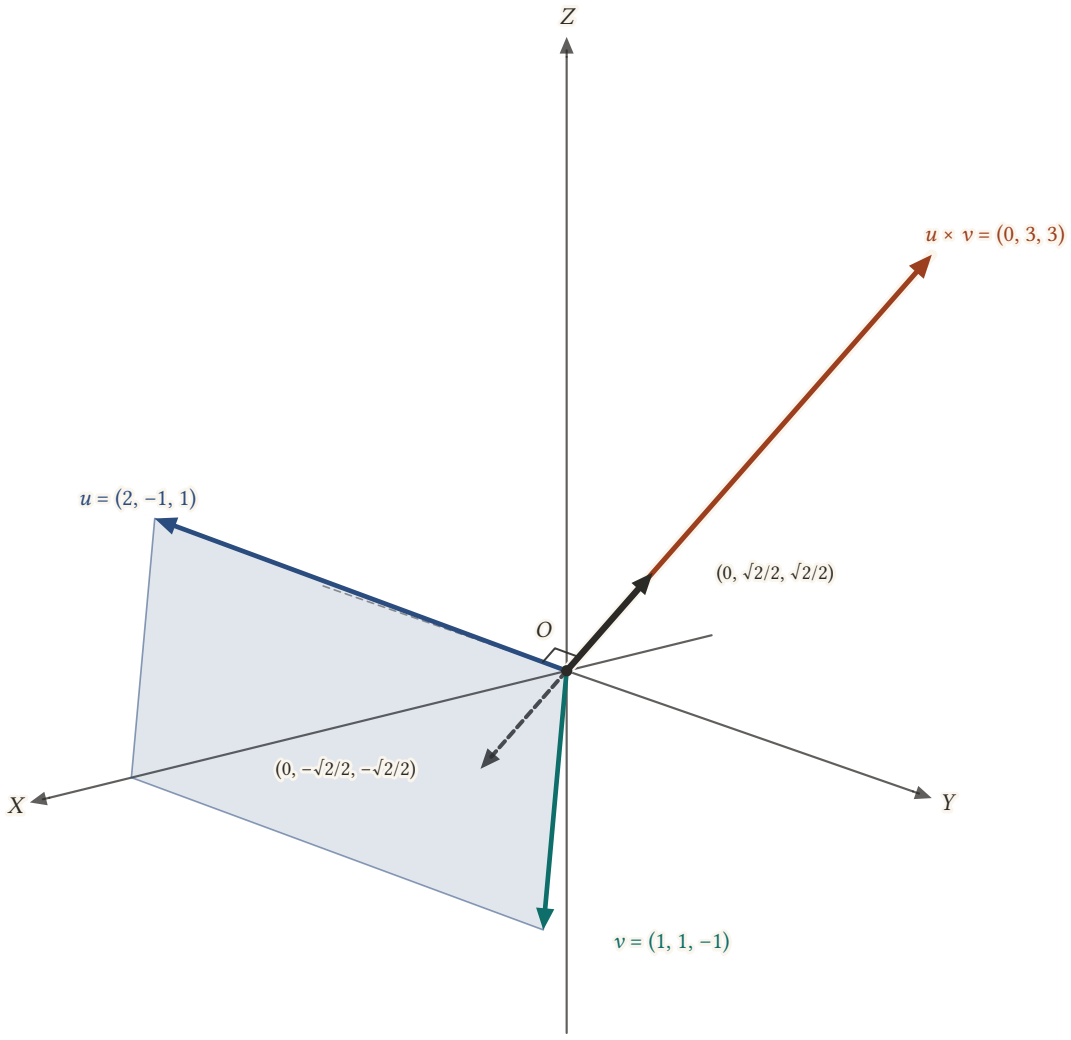
Çözüm.
Önce

$$\begin{aligned} u \times v &= \big((-1)(-1) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1), 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \big) \\ &= (0, 3, 3) \end{aligned}$$

bulunur. Diklik kontrolü: $\langle (0,3,3), u \rangle = 0 - 3 + 3 = 0$ ve $\langle (0,3,3), v \rangle = 0 + 3 - 3 = 0$. Uzunluk $\| u \times v \| = \sqrt{0 + 9 + 9} = 3\sqrt{2}$ olduğundan bu doğrultudaki birim vektörler

$$\pm \frac{1}{3\sqrt{2}} (0,3,3) = \pm \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

dir. İki vektöre dik doğrultu tektir; bu doğrultuda birbirinin tersi olan iki birim vektör vardır.



Şekil 9.4: $u = (2, -1, 1)$ ile $v = (1, 1, -1)$ vektörlerinin düzlemi ve ona dik $u \times v = (0, 3, 3)$. Bu doğrultudaki iki birim vektör $(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ ve düzlemin arkasına düşen, kesikli çizilen $(0, -\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Yön: sağ el kuralı. Bir doğrultuda birbirinin tersi olan iki yön vardır; $u \times v$ bunlardan hangisindedir? Standart baz için $e_1 \times e_2 = e_3$ bulmuştuk (Örnek 9.1): e_1'den e_2'ye dönüşü sağ elimizin dört parmağıyla izlersek başparmağımız e_3'ü gösterir. Koordinat eksenlerinin bu yerleşimini karma çarpımın işaretiyle ifade edebiliriz.

Tanım 9.3 (Sağ el sistemi). $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ olsun. $[a, b, c] > 0$ ise (a, b, c) sıralı üçlüsüne bir **sağ el sistemi** denir.

Yani sağ el sistemi, koordinat eksenleriyle aynı biçimde yerleşmiş bir üçlüdür: $[e_1, e_2, e_3] = 1 > 0$ olduğundan (e_1, e_2, e_3) bir sağ el sistemidir. Eksenlerin sağ el kuralına göre yönlendirildiğini varsaymıştık (Uzayda Dik Koordinat Sistemi); bu sözleşmeyle (e_1, e_2, e_3) sağ elle uyumludur ve $[a, b, c] > 0$ koşulu bu uyumu genel üçlülere taşır. Sağ elin dört parmağı a'dan b'ye doğru (π'den küçük açıyla) kıvrıldığında başparmak, a ile b'nin düzleminin c'nin bulunduğu tarafını gösterir. Sıradaki iki vektörün yerini değiştirmek karma çarpımın işaretini değiştirdiğinden (Teorem 9.3), örneğin (b, a, c) artık bir sağ el sistemi değildir.

Önerme 9.2 (Sağ el kuralı). *$u, v \in \mathbb{R}^3$ lineer bağımsız ise*

$$[u, v, u \times v] = \| u \times v \|^2 > 0$$

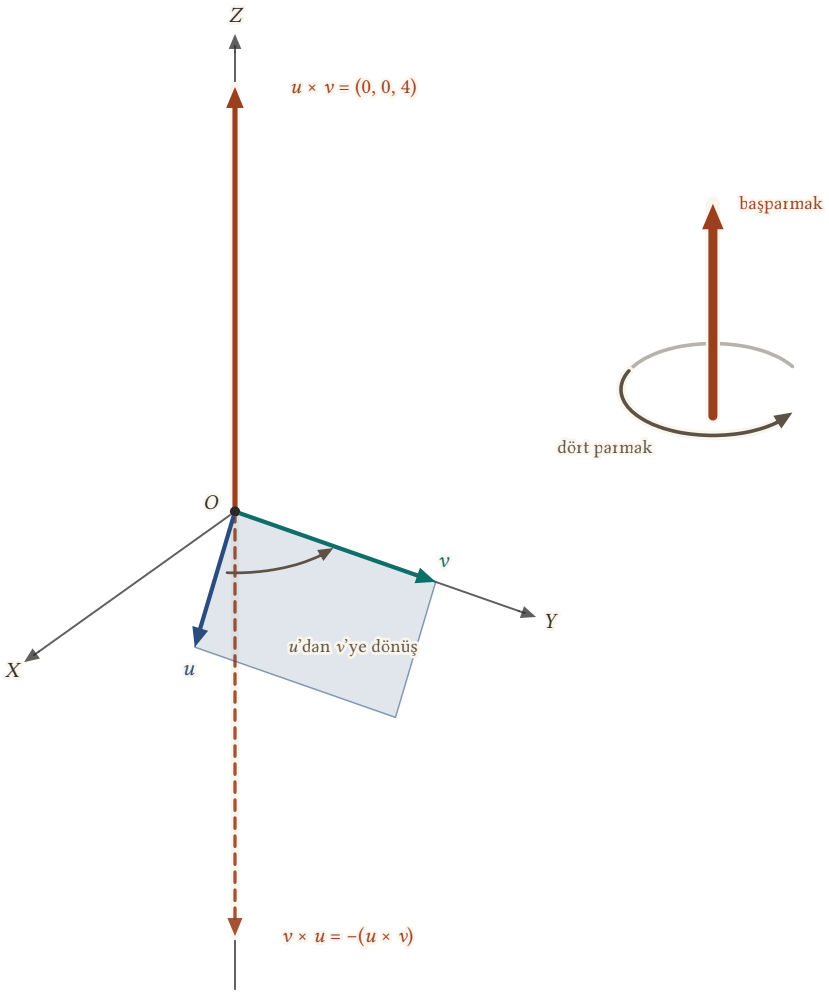
dır. Yani $(u, v, u \times v)$ bir sağ el sistemidir: sağ elin dört parmağı u'dan v'ye doğru kıvrıldığında başparmak $u \times v$'nin yönünü gösterir.

İspat.
Karma çarpımın iç çarpımla yazılışından (Önerme 9.1)

$$[u, v, u \times v] = \langle u \times v, u \times v \rangle = \| u \times v \|^2$$

dir. u ile v lineer bağımsız olduğundan $u \times v \neq 0$ dır (bunu hemen aşağıda Önerme 9.3 ile ispatlayacağız; o ispat bu önermeyi kullanmaz). Dolayısıyla $\| u \times v \|^2 > 0$ olur ve tanım gereği $(u, v, u \times v)$ bir sağ el sistemidir.
Buna karşılık $[v, u, u \times v] = -[u, v, u \times v] < 0$ dır: çarpanların sırası değişince $v \times u = -(u \times v)$ vektörü ters yöne döner ve $(v, u, v \times u)$ yine bir sağ el sistemi olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.5: Sağ el kuralı: sağ elin dört parmağı u *'dan* v *'ye doğru kıvrıldığında başparmak* u × v = *(0, 0, 4)'ün yönünü gösterir (sağdaki şema). Çarpanların sırası değişince sonuç ters yöne döner:* v × u = *(0, 0, −4).*

■

Uzunluk ve sıfır olma durumu. Lineer bağımlı iki vektörün vektörel çarpımının sıfır olduğunu gördük (Sonuç 9.1). Şimdi bunun tersini de ispatlayalım.

Önerme 9.3 (Vektörel çarpımın sıfır olması). *$u, v \in \mathbb{R}^3$ için*

$$u \times v = 0 \Leftrightarrow u \text{ ile } v \text{ lineer bağımlıdır}$$

dır. Özellikle $u = 0$ ya da $v = 0$ ise $u \times v = 0$ dır; $u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ için ise $u \times v = 0$ olması, u ile v'nin paralel olmasıyla denktir.

İspat.
($\Leftarrow$) Bu yön doğrudan Sonuç 9.1 ile verilir. Özellikle $u = 0$ ise $1 \cdot u + 0 \cdot v = 0$ bağıntısı u ile v'nin lineer bağımlı olduğunu gösterir ve $u \times v = 0$ olur; $v = 0$ için de aynısı geçerlidir.
($\Rightarrow$) $u \times v = 0$ olsun. $v = 0$ ise $0 \cdot u + 1 \cdot v = 0$ olduğundan u ile v lineer bağımlıdır. $v \neq 0$ olsun; o hâlde v'nin en az bir bileşeni sıfırdan farklıdır. Vektörel çarpımın formülü indislerin döngüsel kaydırılmasıyla değişmediği için $v_1 \neq 0$ olduğunu varsayabiliriz. $u \times v = 0$ eşitliği bileşen bileşen

$$u_2v_3 = u_3v_2, \qquad u_3v_1 = u_1v_3, \qquad u_1v_2 = u_2v_1$$

demektir. $\lambda = u_1/v_1$ diyelim. Üçüncü eşitlikten $u_2 v_1 = u_1 v_2$, yani $u_2 = \lambda v_2$; ikinci eşitlikten $u_3 v_1 = u_1 v_3$, yani $u_3 = \lambda v_3$ bulunur. Ayrıca $u_1 = \lambda v_1$ dir. Demek ki $u = \lambda v$, yani $1 \cdot u - \lambda v = 0$ dır ve u ile v lineer bağımlıdır.
Sıfırdan farklı iki vektörün lineer bağımlı olmasının paralel olmalarıyla denk olduğunu Vektörler bölümünde görmüştük; bu da son iddiayı verir.
■

Bu sonucu açıyla da okuyabiliriz. $u, v \neq 0$ ve aralarındaki açı θ ise Sonuç 9.2 ii)'den

$$u \times v = 0 \Leftrightarrow \| u \| \| v \| \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \{0, \pi\}$$

olur. Yani iki vektör ya aynı yönlüdür ($\theta = 0$) ya da zıt yönlüdür ($\theta = \pi$); her iki durumda da paraleldirler.
Açı. İç çarpım bize açının kosinüsünü, vektörel çarpım da sinüsünü verir.

Sonuç 9.3 (Açının kosinüsü ve sinüsü). *$u, v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ve aralarındaki açı θ olsun. Bu durumda*

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|}, \qquad \sin\theta = \frac{\| u \times v \|}{\| u \| \| v \|}$$

dir.

İspat.
Birinci eşitlik, $\langle u, v\rangle = \| u \| \| v \| \cos\theta$ bağıntısının $\| u \| \| v \| \neq 0$ sayısına bölünmesiyle elde edilir. İkinci eşitlik, Sonuç 9.2 ii)'deki $\| u \times v \| = \| u \| \| v \| \sin\theta$ bağıntısının aynı sayıya bölünmesiyle elde edilir.
■

Yalnız sinüs, açıyı belirlemeye yetmez: θ ile $\pi - \theta$ aynı sinüse sahiptir. Açının dar mı geniş mi olduğunu $\cos\theta$'nın, yani $\langle u, v\rangle$'nin işareti söyler.

Örnek 9.10 (Açıyı sinüs ve kosinüsle bulmak). $u = (1, 1, 0)$ ile $v = (0, 1, 1)$ arasındaki θ açısını bulalım.

Çözüm.
$\| u \| = \| v \| = \sqrt{2}$ ve $\langle u, v\rangle = 0 + 1 + 0 = 1$ olduğundan

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

dir. Ayrıca

$$u \times v = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (1, -1, 1)$$

ve $\| u \times v \| = \sqrt{3}$ olduğundan

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

bulunur. Kosinüs pozitif olduğundan açı dardır ve $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ tür. Kontrol olarak $\cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ dir.
■

Alan. Vektörel çarpımın uzunluğunun en güzel yorumu alandır.

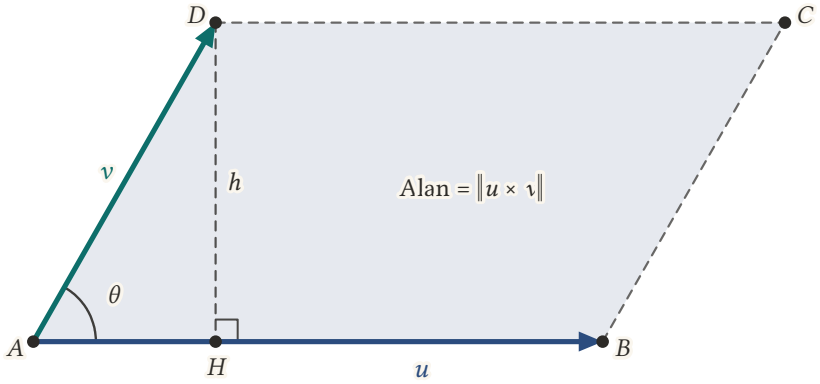
Teorem 9.7 (Paralelkenarın alanı). *$u, v \in \mathbb{R}^3$ lineer bağımsız olsun ve $ABCD$ paralelkenarının kenarları $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{AD} = v$ olsun; yani $| AB | = \| u \|$, $| AD | = \| v \|$ dir. Bu paralelkenarın alanı*

$$A(ABCD) = \| u \times v \|$$

dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
u ile v arasındaki açı θ olsun. D'den AB doğrusuna inilen dikmenin ayağı H, yüksekliğin uzunluğu $h = |\,DH\,|$ olsun.



Şekil 9.6: ABCD *paralelkenarında taban* |AB| = ‖u‖, *yükseklik* h = |DH| = ‖v‖ *sin* θ*'dır; alan* ‖u‖ h = ‖u × v‖ *olur.*

Paralelkenarın alanı taban uzunluğu ile yüksekliğin çarpımıdır:

$$A(ABCD) = |\,AB\,||\,DH\,| = \| u \| h.$$

AHD dik üçgeninde hipotenüs $|\,AD\,| = \| v \|$ dir. θ dar açıysa H, AB ışını üzerindedir ve $h = \| v \| \sin\theta$ olur. θ geniş açıysa H, A'nın öbür tarafına düşer; bu kez A'daki iç açı $\pi - \theta$ olur ve $h = \| v \| \sin(\pi - \theta) = \| v \| \sin\theta$ dır. $\theta = \pi/2$ ise $H = A$ ve $h = \| v \| = \| v \| \sin\theta$ dır. Her durumda $h = \| v \| \sin\theta$ olduğundan, Sonuç 9.2 ii)'den

$$A(ABCD) = \| u \| \| v \| \sin\theta = \| u \times v \|$$

bulunur.
■

u ile v lineer bağımlıysa, yani $u \parallel v$ ise ya da biri sıfırsa, paralelkenar bir doğru parçasına yassılaşır ve alanı 0 olur; Önerme 9.3 gereğince bu durumda da $\| u \times v \| = 0$ dır, yani formül yine doğrudur.
Özetle $u \times v$ vektörü üç bilgiyle tamamen belirlenir: u ile v'ye diktir, yönü sağ el kuralıyla bulunur ve uzunluğu u ile v üzerine kurulan paralelkenarın alanına eşittir.

Örnek 9.11 (Uzayda bir paralelkenarın alanı). $A = (1,1,0)$, $B = (3,2,1)$ ve $D = (0,3,2)$ noktaları verilsin. AB ile AD kenarları üzerine kurulan $ABCD$ paralelkenarının dördüncü köşesini ve alanını bulalım.

Çözüm.
Kenar vektörleri

$$u = \overrightarrow{AB} = (3-1,2-1,1-0) = (2,1,1),$$

$$v = \overrightarrow{AD} = (0-1,3-1,2-0) = (-1,2,2)$$

dir. Dördüncü köşe

$$C = B + v = (3-1,2+2,1+2) = (2,4,3)$$

olur. Vektörel çarpım

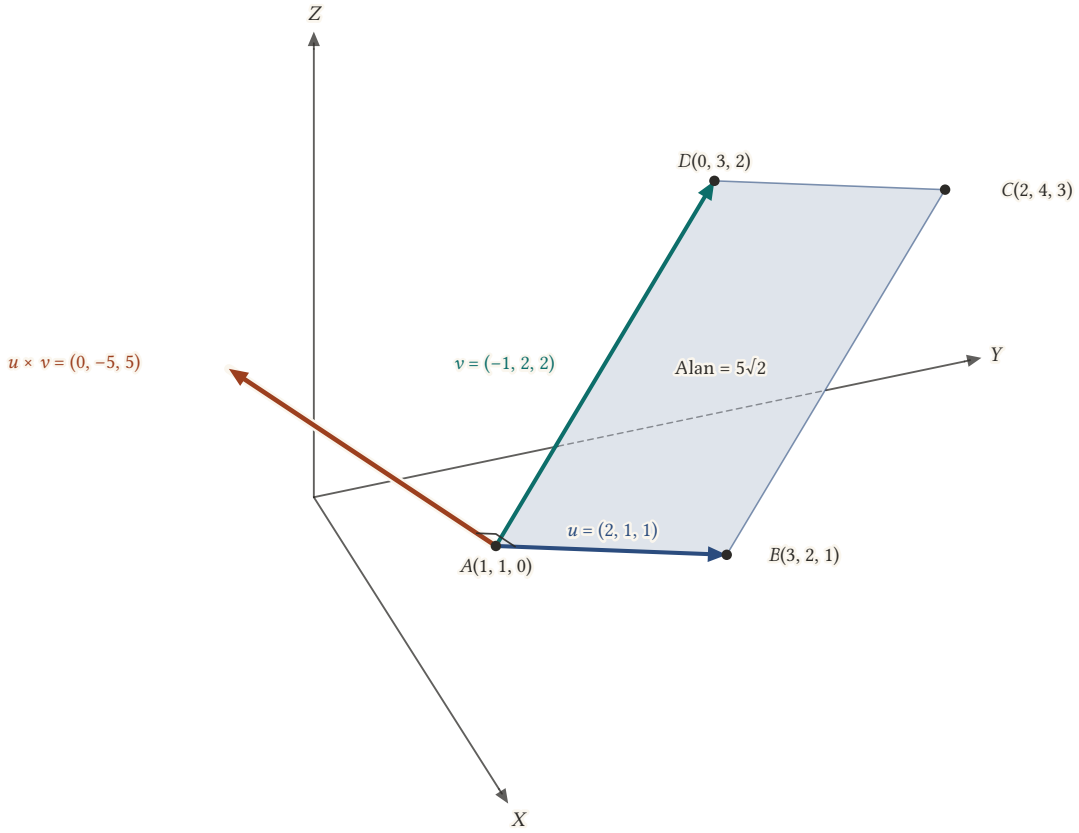
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} u \times v &= \big(\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2, 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2, 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \ \big) \\ &= (0, -5, 5) \end{aligned}$$

ve alan

$$A(ABCD) = \| \ u \times v \ \| = \sqrt{0 + 25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

dir.



Şekil 9.7: $A(1, 1, 0)$, $B(3, 2, 1)$, $C(2, 4, 3)$, $D(0, 3, 2)$ köşeli paralelkenar. A'dan çıkan kısa ok $u \times v = (0, -5, 5)$ vektörünün 0,4 katıdır; paralelkenarın düzlemine diktir ve uzunluğu alanı, $5\sqrt{2}$'yi verir.

■

Paralelkenarı bir köşegeniyle ikiye bölünce iki eş üçgen elde edilir. Bu, üçgenin alanı için de bir formül verir.

Sonuç 9.4 (Üçgenin alanı). *Uzayda doğrusal olmayan A, B, C noktalarının belirlediği ABC üçgeninin alanı*

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \text{parallel} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \text{parallel}$$

dir.

İspat.
$u = \overrightarrow{AB}$ ve $v = \overrightarrow{AC}$ üzerine kurulan paralelkenarın dördüncü köşesi D olsun. BC köşegeni bu paralelkenarı, üç kenarı karşılıklı eşit olan iki üçgene ayırır; bu üçgenlerden biri ABC dir. Eş üçgenlerin alanları eşit olduğundan ABC üçgeninin alanı paralelkenarın alanının yarısıdır ve Teorem 9.7 gereğince

 CC BY-NC-SA 4.0

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \parallel u \times v \parallel = \frac{1}{2}\text{parallel}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\text{parallel}$$

bulunur.
■

Örnek 9.12 (Eksenleri kesen bir üçgenin alanı). $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ ve $C = (0, 0, 3)$ köşeli üçgenin alanını bulalım.

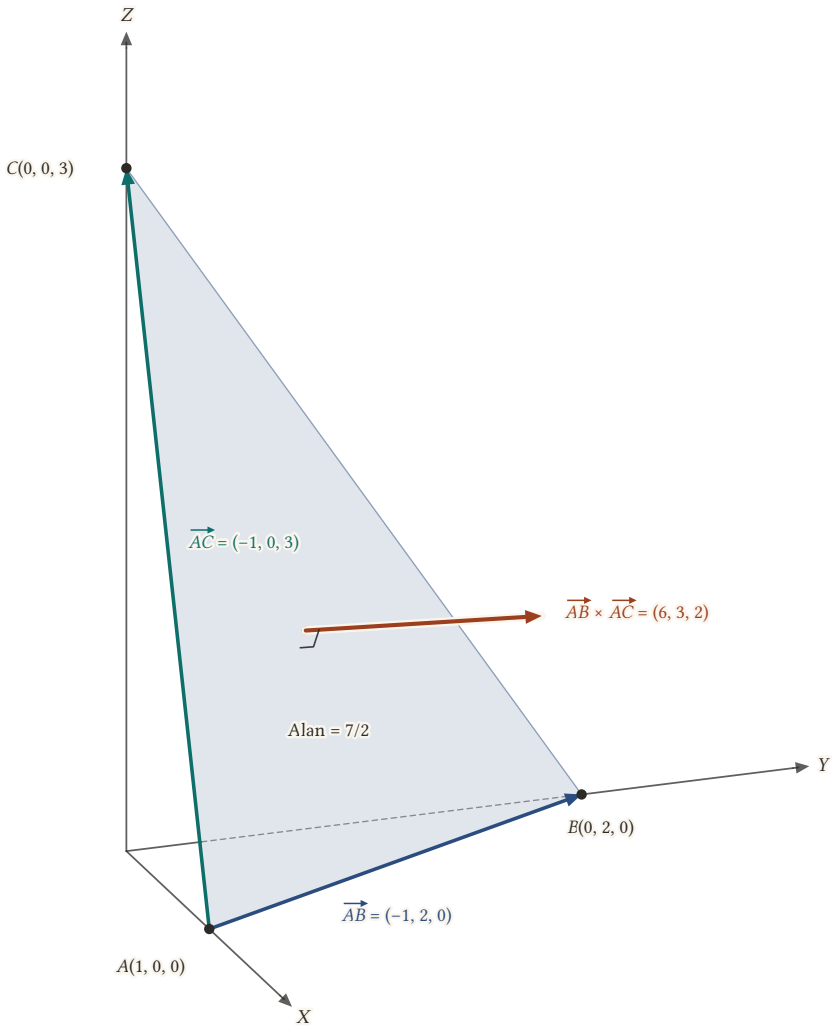
Çözüm.
$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ ve $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$ dür. Buna göre

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \big(\, 2 \cdot 3 - 0 \cdot 0, 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 3, (-1) \cdot 0 - 2 \cdot (-1) \, \big) \\ &= (6, 3, 2) \end{aligned}$$

ve $\parallel (6, 3, 2) \parallel = \sqrt{36 + 9 + 4} = 7$ olduğundan

$$A(ABC) = \frac{7}{2}$$

bulunur.



Şekil 9.8: $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ köşeli üçgen. Ağırlık merkezinden çıkan kısa ok, üçgenin düzlemine dik olan (6, 3, 2) vektörünün 0,2 katıdır; bu vektörün uzunluğu 7 olduğundan alan 7/2′dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

9.6 Karma Çarpımın Geometrik Yorumu

Vektörel çarpımın uzunluğu bir alan veriyordu. Bir adım ileri gidip bu alanı bir yükseklikle çarparsak hacim elde ederiz; karma çarpım tam olarak bunu yapar.
$u, v, w \in \mathbb{R}^3$ lineer bağımsız üç vektör olsun. Vektörler bölümünde gördüğümüz gibi bu üç vektör aynı düzleme paralel olamaz. Başlangıç noktaları ortak alınırsa u, v, w kenarları üzerine bir **paralelyüz** kurulur: karşılıklı yüzleri paralelkenar olan, altı yüzlü bir cisim.

Teorem 9.8 (Paralelyüzün hacmi). *$u, v, w \in \mathbb{R}^3$ üzerine kurulan paralelyüzün hacmi*

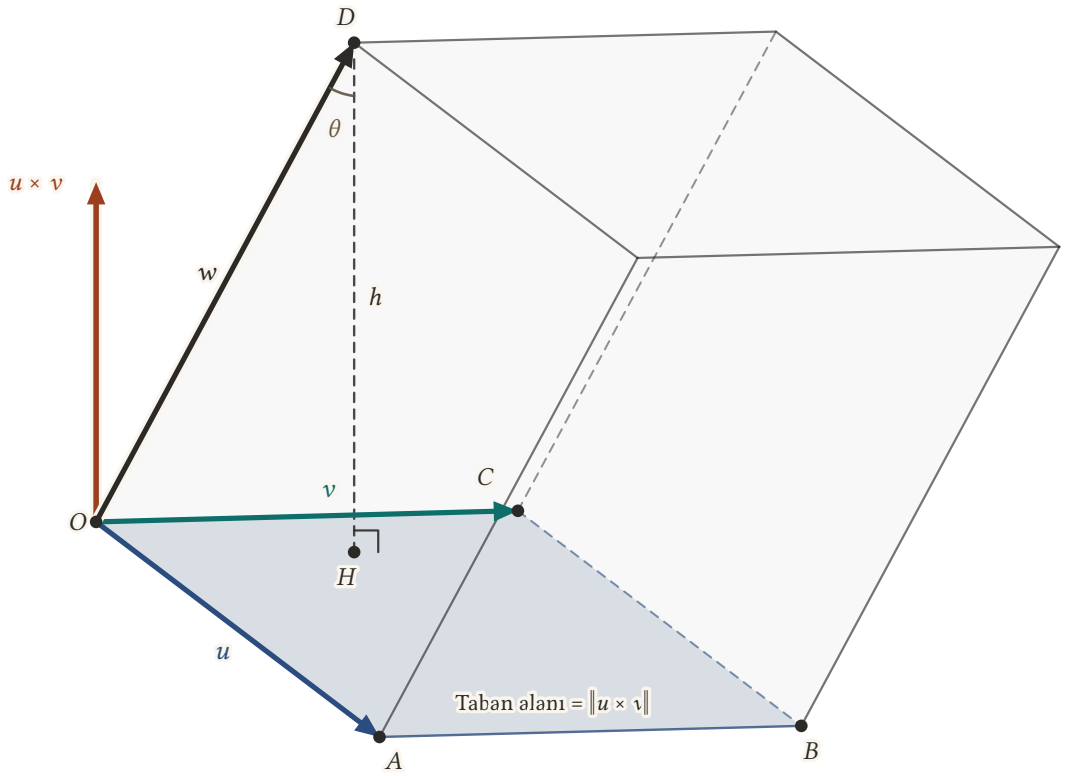
$$V = |\,[u, v, w]\,|$$

dir. Özellikle u, v, w lineer bağımsız ise $V > 0$ dır.

İspat.
Önce u, v, w lineer bağımsız olsun. Başlangıç noktası O olsun; u, v, w vektörlerinin uçları sırasıyla A, C, D, taban paralelkenarının dördüncü köşesi B olsun. Taban olarak u ile v üzerine kurulan $OABC$ paralelkenarını alalım. Paralelyüzün hacmi taban alanı ile bu tabana ait yüksekliğin çarpımıdır:

$$V = (\text{taban alanı}) \cdot h.$$

Teorem 9.7 gereğince taban alanı $\| u \times v \|$ dir.



Şekil 9.9: u, v, w *üzerine kurulan paralelyüz. Taban* OABC*'nin alanı* ‖u × v‖*, yükseklik* h = |HD| = ‖w‖ | cos θ|*'dır;* θ, w *ile tabana dik* u × v *arasındaki açıdır. Arkada kalan ayrıtlar kesiklidir.*

D'den taban düzlemine inilen dikmenin ayağı H olsun; yükseklik $h = |\,HD\,|$ dir. u ile v lineer bağımsız olduğundan Önerme 9.3 gereğince $u \times v \neq 0$, yani $\| u \times v \| > 0$ dır. D taban düzleminde olsaydı w, u ile v'nin lineer bileşimi olurdu ve u, v, w lineer bağımlı olurdu; o hâlde D taban düzleminde değildir ve

 CC BY-NC-SA 4.0

$h > 0$ dır. $\overrightarrow{HD}$ tabana dik olduğundan $u \times v$ ile aynı doğrultudadır. w ile $u \times v$ arasındaki açı θ olsun. $H \neq O$ ise OHD dik üçgeninde hipotenüs $\mid OD \mid = \parallel w \parallel$ ve D'deki açı ya θ ya da $\pi - \theta$ dır (hangisi olduğu, w'nin tabanın $u \times v$ tarafında mı yoksa öbür tarafında mı olduğuna bağlıdır). $H = O$ ise $w = \overrightarrow{OD}$ tabana diktir, yani $u \times v$ ile aynı doğrultudadır; bu durumda $\theta \in \{0, \pi\}$ ve $h = \parallel w \parallel = \parallel w \parallel \mid \cos\theta \mid$ dır. Her durumda

$$h = \parallel w \parallel \mid \cos\theta \mid$$

olur. Buna göre

$$V = \parallel u \times v \parallel \parallel w \parallel \mid \cos\theta \mid = \mid \langle u \times v, w \rangle \mid = \mid [u, v, w] \mid$$

bulunur; burada $\langle u \times v, w \rangle = \parallel u \times v \parallel \parallel w \parallel \cos\theta$ bağıntısını ve karma çarpımın iç çarpımla yazılışını (Önerme 9.1) kullandık. Taban alanı $\parallel u \times v \parallel$ ve yükseklik h pozitif olduğundan hacim de pozitiftir. u, v, w lineer bağımlı ise üç vektör aynı düzleme paraleldir, paralelyüz yassılaşır ve hacmi 0 olur. Bu durumda da $[u, v, w] = 0$ olduğunu birazdan göreceğiz (Sonuç 9.5); dolayısıyla formül yine geçerlidir.
■

Yani karma çarpımın mutlak değeri hacimdir; işareti ise yönü söyler. $[u, v, w] > 0$ ise w, taban düzleminin $u \times v$ ile aynı tarafındadır ve u, v, w üçlüsü sağ el sistemi oluşturur. $[u, v, w] < 0$ ise w öbür taraftadır.

Örnek 9.13 (Bir paralelyüzün hacmi). $u = (2, 0, 0)$, $v = (1, 3, 0)$ ve $w = (1, 1, 4)$ vektörleri üzerine kurulan paralelyüzün hacmini bulalım.

Çözüm.
Karma çarpımı birinci satıra göre açalım:

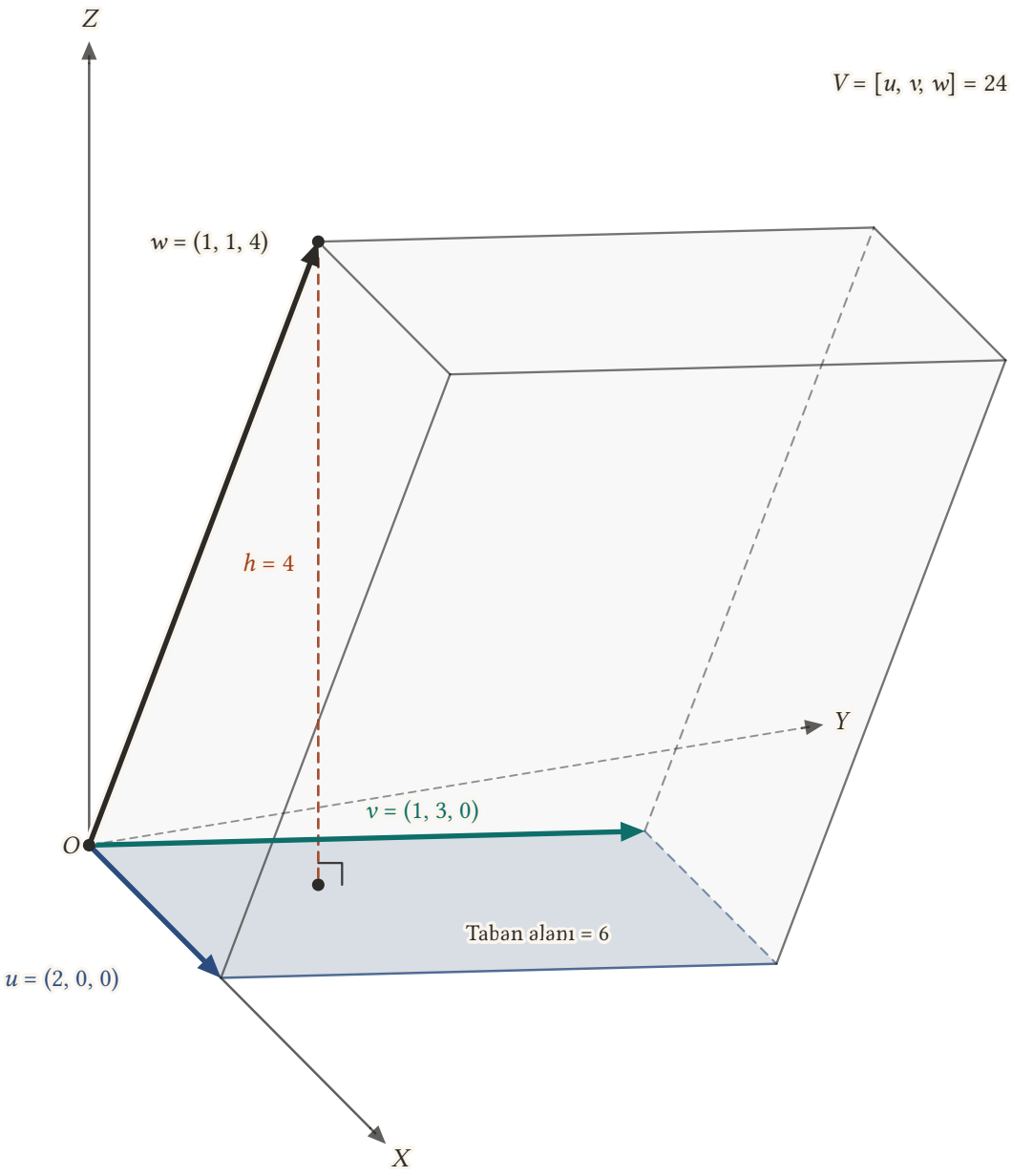
$$\begin{aligned}[u, v, w] &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2\,(3 \cdot 4 - 0 \cdot 1) - 0 + 0 = 24.\end{aligned}$$

Buna göre hacim $V = \mid 24 \mid = 24$ birim küptür.
Sonucu taban ve yükseklikle de görelim. u ile v, XY düzlemindedir ve

$$u \times v = (0 \cdot 0 - 0 \cdot 3, 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0, 2 \cdot 3 - 0 \cdot 1) = (0, 0, 6)$$

olduğundan taban alanı $\parallel u \times v \parallel = 6$'dır. w'nin ucu XY düzleminden 4 birim yukarıdadır, yani yükseklik 4'tür. Gerçekten $6 \cdot 4 = 24$ bulunur. Karma çarpım pozitif olduğundan u, v, w bir sağ el sistemi oluşturur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.10: $u = (2, 0, 0)$, $v = (1, 3, 0)$, $w = (1, 1, 4)$ üzerine kurulan paralelyüz. Taban XY düzlemindedir ve alanı 6'dır; w'nin ucu düzlemden 4 birim yukarıdadır. Hacim $6 \cdot 4 = 24 = [u, v, w]$.

■

Hacim yorumu bize üç vektörün aynı düzleme paralel olup olmadığını anlamanın kolay bir yolunu verir. Üç vektörün lineer bağımlı olmasının, aynı düzleme paralel olmalarıyla denk olduğunu Vektörler bölümünde görmüştük.

Sonuç 9.5 (Karma çarpım ve lineer bağımlılık). *$u, v, w \in \mathbb{R}^3$ için*

$$[u, v, w] = 0 \Leftrightarrow u, v, w \text{ lineer bağımlıdır}$$

dır. Yani üç vektörün aynı düzleme paralel olması için gerek ve yeter koşul karma çarpımlarının sıfır olmasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
($\Leftarrow$) u, v, w lineer bağımlı olsun: hepsi birden sıfır olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ için $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$ dır.

- *$\lambda_3 \neq 0$ ise $w = \alpha u + \beta v$ yazılabilir ($\alpha = -\lambda_1/\lambda_3$, $\beta = -\lambda_2/\lambda_3$). Teorem 9.3 iii), iv) ve ii)'den*

$$[u, v, w] = \alpha\,[u, v, u] + \beta\,[u, v, v] = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

  bulunur.
- *$\lambda_3 = 0$ ise $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$ ve λ_1, λ_2 ikisi birden sıfır değildir; yani u ile v lineer bağımlıdır. Sonuç 9.1 uyarınca $u \times v = 0$ ve $[u, v, w] = \langle 0, w\rangle = 0$ olur.*

($\Rightarrow$) $[u, v, w] = 0$ olsun. u ile v lineer bağımlıysa u, v, w de lineer bağımlıdır (w'nin katsayısı 0 alınır). u ile v lineer bağımsız olsun. Bu durumda Önerme 9.3 uyarınca $n = u \times v \neq 0$ dır.
Önce u, v, n vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $\alpha u + \beta v + \gamma n = 0$ olsun. Bu eşitliğin n ile iç çarpımını alırsak, $\langle u, n\rangle = \langle v, n\rangle = 0$ olduğundan $\gamma \parallel n \parallel^2 = 0$, yani $\gamma = 0$ bulunur. Geriye $\alpha u + \beta v = 0$ kalır ve u, v lineer bağımsız olduğundan $\alpha = \beta = 0$ dır.
$\mathbb{R}^3$'te üç lineer bağımsız vektör bir baz oluşturduğundan $w = \alpha u + \beta v + \gamma n$ biçiminde yazılabilir. Şimdi

$$0 = [u, v, w] = \langle n, w\rangle = \alpha\langle n, u\rangle + \beta\langle n, v\rangle + \gamma\langle n, n\rangle = \gamma \parallel n \parallel^2$$

olduğundan $\gamma = 0$ dır. Demek ki $w = \alpha u + \beta v$, yani u, v, w lineer bağımlıdır.
■

Örnek 9.14 (Üç vektörün aynı düzleme paralel olup olmadığını sınamak). $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$ ve $w = (7, 8, 9)$ vektörlerinin aynı düzleme paralel olup olmadığını inceleyelim.

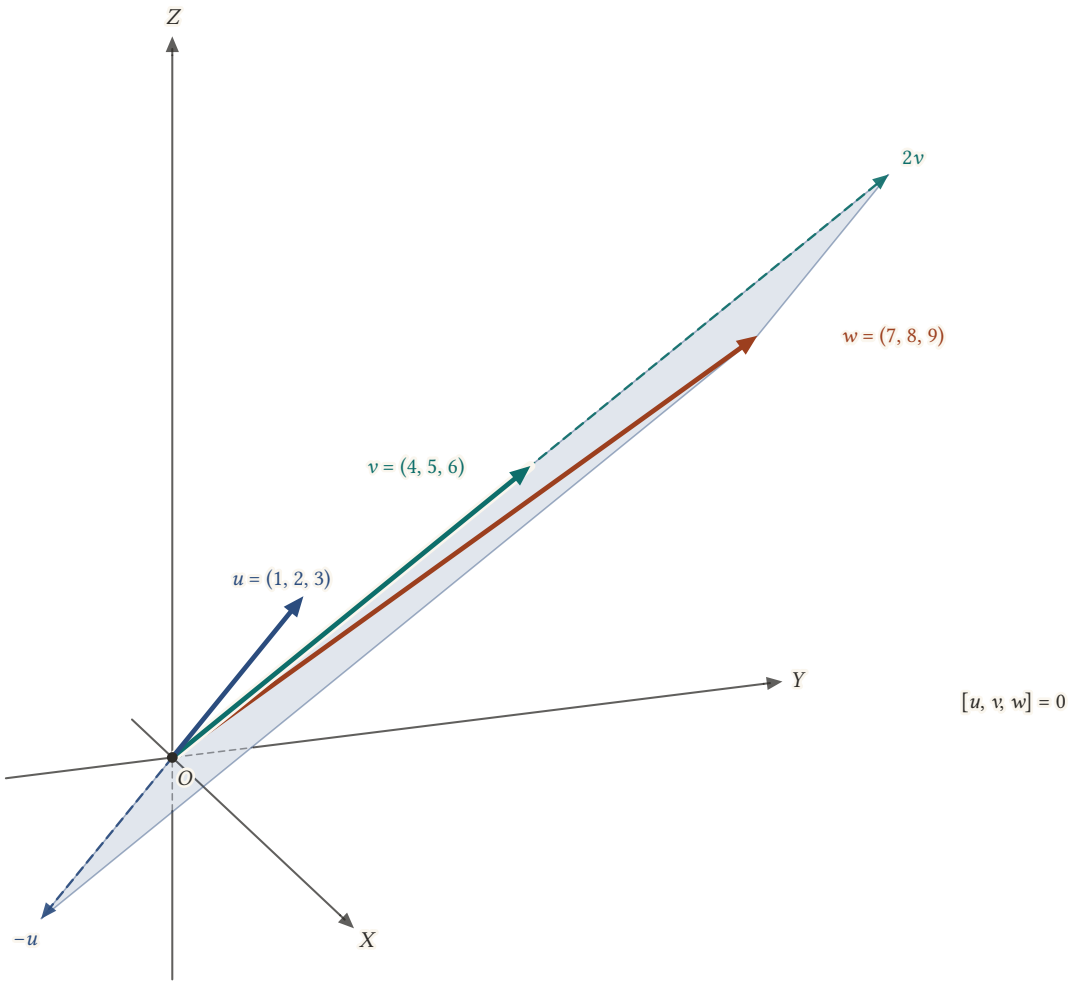
Çözüm.
Karma çarpımı birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned}[u, v, w] &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 1\,(45 - 48) - 2\,(36 - 42) + 3\,(32 - 35) \\ &= -3 + 12 - 9 = 0.\end{aligned}$$

Sonuç 9.5 uyarınca üç vektör lineer bağımlıdır, yani aynı düzleme paraleldir. Bağıntıyı açıkça da görebiliriz:

$$2v - u = (8 - 1, 10 - 2, 12 - 3) = (7, 8, 9) = w.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.11: $u = (1, 2, 3)$, $v = (4, 5, 6)$, $w = (7, 8, 9)$ aynı düzlemdedir: w, $-u$ ile $2v$ üzerine kurulan paralelkenarın köşegenidir, yani $w = 2v - u$.

■

9.7 Düzlemde Vektörler

Şimdiye kadar $\mathbb{R}^3$'te çalıştık. Düzlemde, yani $\mathbb{R}^2$'de, iç çarpım aynı biçimde tanımlanır; ancak vektörel ve karma çarpım için durum farklıdır.

Tanım 9.4 (Düzlemde iç çarpım). $u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$, $\mathbb{R}^2$'de iki vektör olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{R}^2$ üzerinde **iç çarpım fonksiyonu**, $\langle u, v \rangle$ sayısına da u ile v'nin **iç çarpımı** denir.

Yani düzlemdeki iç çarpım, uzaydaki iç çarpımın (İç Çarpım) üçüncü bileşeni atılmış hâlidir ve aynı özellikleri taşır. Özellikle $u, v \neq 0$ ve aralarındaki açı θ ise

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\| u \| \, \| v \|}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

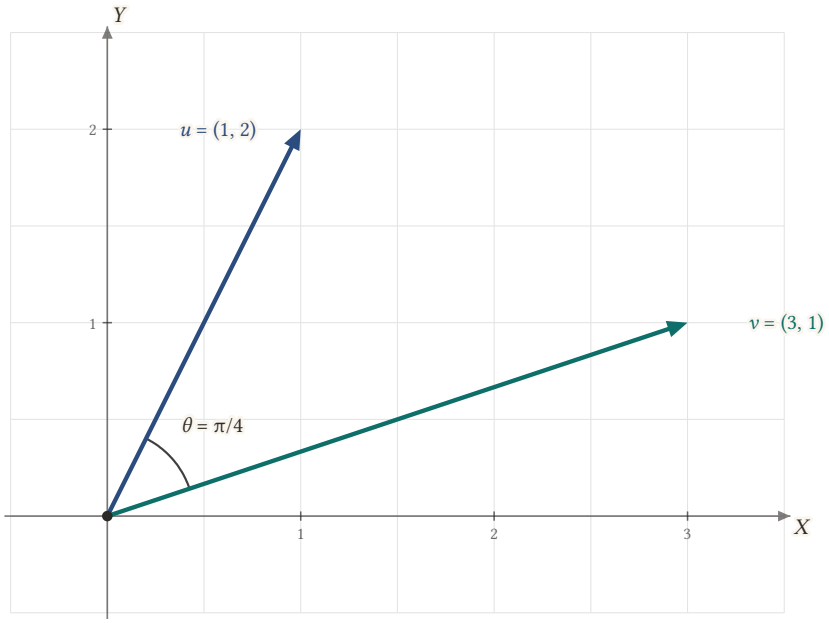
dir.

Örnek 9.15 (Düzlemde iki vektör arasındaki açı). $u = (1, 2)$ ile $v = (3, 1)$ arasındaki θ açısını bulalım.

Çözüm.
$\langle u, v\rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$, $\| u \| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ ve $\| v \| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ dur. Buna göre

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ve $0 \le \theta \le \pi$ olduğundan $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ tür.



Şekil 9.12: $u = (1, 2)$ ile $v = (3, 1)$ arasındaki açı: $\cos\theta = \sqrt{2}/2$, yani $\theta = \pi/4$.

■

i Düzlemde vektörel çarpım yoktur

Vektörel çarpım, iki vektöre birden dik olan üçüncü bir doğrultuya ihtiyaç duyar. Düzlemde sıfırdan farklı ve paralel olmayan iki vektöre birden dik olan sıfırdan farklı bir vektör bulunmaz. Bu yüzden $\mathbb{R}^2$'de vektörel çarpım tanımlı değildir; vektörel çarpım olmadan kurulamayan karma çarpım da tanımlı değildir.

Yine de düzlemdeki vektörleri uzayın içinde görerek vektörel çarpımdan yararlanabiliriz. Uzayda $(x, y, 0)$ biçimindeki vektörlerin hepsi XY düzleminde bulunur. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektörünü $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$ ile özdeşleştirirsek, bu vektörler için incelediğimiz kavramlar düzlemsel hâle indirgenmiş olur: iç çarpım ve uzunluk değişmez, vektörel çarpım ise aşağıda göreceğimiz gibi Z ekseni doğrultusunda kalır.

Önerme 9.4 (Düzlemde paralelkenarın alanı). *$u = (u_1, u_2)$ ve $v = (v_1, v_2)$, $\mathbb{R}^2$'de lineer bağımsız iki vektör olsun. u ile v üzerine kurulan paralelkenarın alanı*

$$A = \left|\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right| = |\, u_1 v_2 - u_2 v_1 \,|$$

dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
u ile v'yi uzayda $\tilde{u} = (u_1, u_2, 0)$ ve $\tilde{v} = (v_1, v_2, 0)$ olarak görelim. $\tilde{u}$ ile $\tilde{v}$ de lineer bağımsızdır, çünkü $\alpha\tilde{u} + \beta\tilde{v} = 0$ eşitliğinin ilk iki bileşeni $\alpha u + \beta v = 0$ demektir. Bu vektörlerin üzerine kurulan paralelkenar, düzlemdeki paralelkenarın ta kendisidir. Vektörel çarpım

$$\tilde{u} \times \tilde{v} = \left(\ u_2 \cdot 0 - 0 \cdot v_2, 0 \cdot v_1 - u_1 \cdot 0, u_1 v_2 - u_2 v_1 \ \right) = (0, 0, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

dir; yani Z ekseni doğrultusundadır. Teorem 9.7 gereğince alan

$$A = \| \ \tilde{u} \times \tilde{v} \ \| = \sqrt{0 + 0 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2} = | \ u_1 v_2 - u_2 v_1 \ |$$

bulunur.
■

$u \parallel v$ ise ya da biri sıfırsa paralelkenar yine bir doğru parçasına yassılaşır ve alanı 0 olur; bu durumda $(u_1, u_2, 0)$ ile $(v_1, v_2, 0)$ de lineer bağımlıdır, Sonuç 9.1 gereğince vektörel çarpımları sıfırdır ve bu çarpımın üçüncü bileşeni olan $u_1 v_2 - u_2 v_1$ de sıfır olur. Yani formül yine doğrudur.

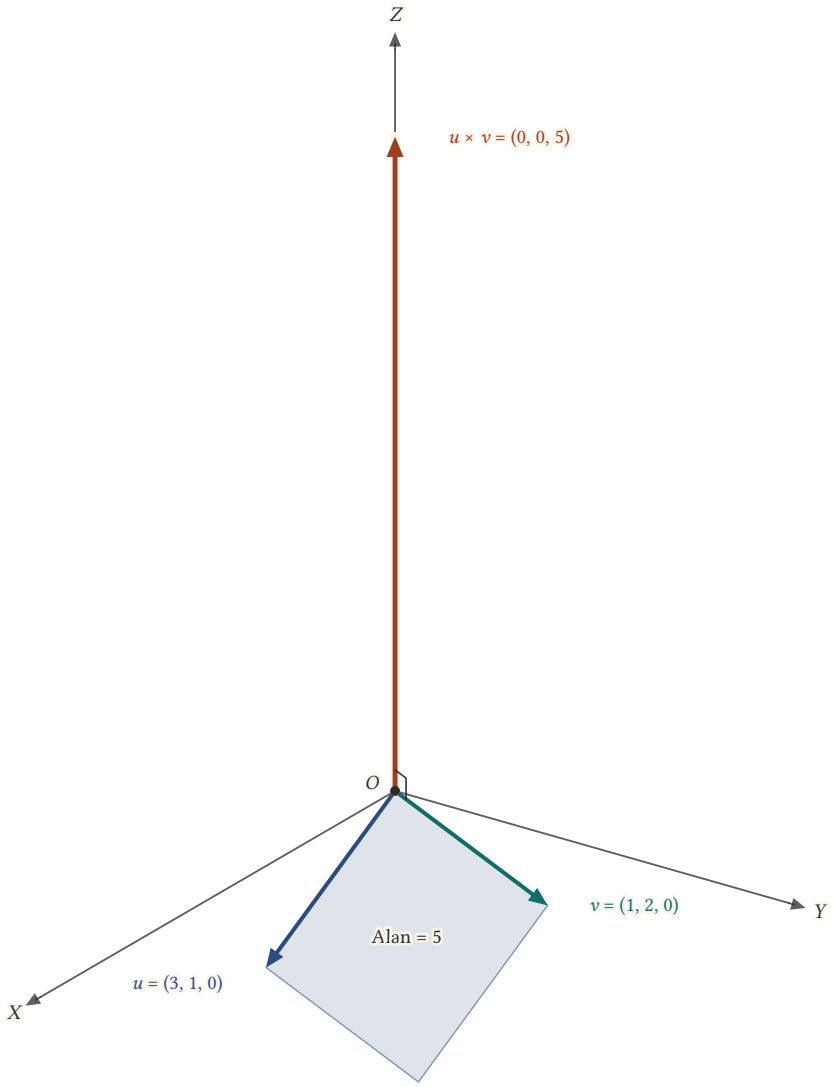
Örnek 9.16 (Düzlemde bir paralelkenarın alanı). $u = (3, 1)$ ve $v = (1, 2)$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanını bulalım.

Çözüm.
Önerme 9.4 uyarınca

$$A = \left| \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = | \ 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \ | = 5$$

bulunur. Uzaydan bakarsak $(3, 1, 0) \times (1, 2, 0) = (0, 0, 5)$ dir: vektörel çarpım Z ekseni üzerindedir ve uzunluğu alana eşittir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.13: XY düzlemindeki $u = (3, 1, 0)$ ve $v = (1, 2, 0)$ üzerine kurulan paralelkenar. $u \times v = (0, 0, 5)$ Z ekseni üzerindedir ve uzunluğu alana, 5'e eşittir.

■

9.8 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda vektörel ve karma çarpımı hem sayısal olarak hesaplayacak hem de bu bölümün özdeşliklerini kullanarak genel bağıntılar ispatlayacağız.

Alıştırma 9.1 (İç çarpım: u ile v). $u = (-1, -2, -3)$ ve $v = (4, 1, -2)$ olsun. $\langle u, v \rangle$ nedir?

Çözüm.
Karşılıklı bileşenleri çarpıp toplarız:

$$\langle u, v \rangle = (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) = -4 - 2 + 6 = 0.$$

Demek ki u ile v birbirine diktir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 9.2 (İç çarpım: u ile w). $u = (-1, -2, -3)$ ve $w = (1, 0, 2)$ olsun. $\langle u, w \rangle$ nedir?

Çözüm.

$$\langle u, w \rangle = (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 2 = -1 + 0 - 6 = -7.$$

■

Alıştırma 9.3 (İç çarpım: v ile w). $v = (4, 1, -2)$ ve $w = (1, 0, 2)$ olsun. $\langle v, w \rangle$ nedir?

Çözüm.

$$\langle v, w \rangle = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 = 4 + 0 - 4 = 0.$$

Demek ki v ile w de birbirine diktir.
■

Alıştırma 9.4 (Vektörel çarpım: u ile v). $u = (-1, -2, -3)$ ve $v = (4, 1, -2)$ olsun. $u \times v$ nedir?

Çözüm.
Sembolik determinantı birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \big((-2)(-2) - (-3) \cdot 1 \big) e_1 + \big((-3) \cdot 4 - (-1)(-2) \big) e_2 \\ &\quad + \big((-1) \cdot 1 - (-2) \cdot 4 \big) e_3 \\ &= (4 + 3)e_1 + (-12 - 2)e_2 + (-1 + 8)e_3 \\ &= 7e_1 - 14e_2 + 7e_3 = (7, -14, 7). \end{aligned}$$

■

Alıştırma 9.5 (Vektörel çarpım: v ile w). $v = (4, 1, -2)$ ve $w = (1, 0, 2)$ olsun. $v \times w$ nedir?

Çözüm.

$$\begin{aligned} v \times w &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \big(1 \cdot 2 - (-2) \cdot 0 \big) e_1 + \big((-2) \cdot 1 - 4 \cdot 2 \big) e_2 \\ &\quad + (4 \cdot 0 - 1 \cdot 1)e_3 \\ &= 2e_1 - 10e_2 - e_3 = (2, -10, -1). \end{aligned}$$

■

Alıştırma 9.6 (İç içe vektörel çarpım: u × (v × w)). $u = (-1, -2, -3)$, $v = (4, 1, -2)$ ve $w = (1, 0, 2)$ olsun. $u \times (v \times w)$ nedir?

Çözüm.
Birinci yol: doğrudan hesap. $v \times w = (2, -10, -1)$ olduğunu biliyoruz (Alıştırma 9.5). Buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & -10 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \big((-2)(-1) - (-3)(-10) \big)\, e_1 + \big((-3)\cdot 2 - (-1)(-1) \big)\, e_2 \\ &\quad + \big((-1)(-10) - (-2)\cdot 2 \big)\, e_3 \\ &= (2-30)e_1 + (-6-1)e_2 + (10+4)e_3 \\ &= (-28,-7,14) = -7\,(4,1,-2) = -7v \end{aligned}$$

bulunur.
İkinci yol: üçlü özdeşlik. Önceki alıştırmalarda $\langle u, w\rangle = -7$ ve $\langle u, v\rangle = 0$ bulmuştuk (Alıştırma 9.2, Alıştırma 9.1). Teorem 9.2 i)'den

$$u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle\, v - \langle u, v\rangle\, w = -7v - 0 \cdot w = -7v$$

elde edilir. İkinci yol hiçbir determinant hesaplamadan aynı sonuca ulaşır.
■

Alıştırma 9.7 (İç içe vektörel çarpım: (u × v) × w). $u = (-1,-2,-3)$, $v = (4,1,-2)$ ve $w = (1,0,2)$ olsun. $(u \times v) \times w$ nedir?

Çözüm.
Birinci yol: doğrudan hesap. $u \times v = (7,-14,7)$ olduğunu biliyoruz (Alıştırma 9.4). Buna göre

$$\begin{aligned} (u \times v) \times w &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 7 & -14 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \big((-14)\cdot 2 - 7\cdot 0 \big)\, e_1 + (7\cdot 1 - 7\cdot 2)e_2 \\ &\quad + \big(7\cdot 0 - (-14)\cdot 1 \big)\, e_3 \\ &= -28e_1 - 7e_2 + 14e_3 \\ &= (-28,-7,14) = -7v \end{aligned}$$

bulunur.
İkinci yol: üçlü özdeşlik. $\langle u, w\rangle = -7$ ve $\langle v, w\rangle = 0$ dır (Alıştırma 9.2, Alıştırma 9.3). Teorem 9.2 ii)'den

$$(u \times v) \times w = \langle u, w\rangle\, v - \langle v, w\rangle\, u = -7v - 0 \cdot u = -7v$$

elde edilir.
Bu vektörler için $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$ çıktı. Bu bir rastlantı değildir: $\langle u, v\rangle = \langle v, w\rangle = 0$ olduğundan iki özdeşlikte de yalnız $\langle u, w\rangle\, v$ terimi kalır. Genelde iki ifade farklıdır (Örnek 9.4).
■

Alıştırma 9.8 (İç içe vektörel çarpımların döngüsel toplamı). $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v)$$

toplamını hesaplayınız.

Çözüm.
Üç terimin her birine Teorem 9.2 i)'yi uygulayalım:

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= \langle u, w\rangle\, v - \langle u, v\rangle\, w, \\ v \times (w \times u) &= \langle v, u\rangle\, w - \langle v, w\rangle\, u, \\ w \times (u \times v) &= \langle w, v\rangle\, u - \langle w, u\rangle\, v. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İç çarpım simetrik olduğundan $\langle u,w\rangle = \langle w,u\rangle$, $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ ve $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$ dir. Üç satırı toplarsak her terim, işareti ters olarak bir kez daha geçer:

- v'nin katsayısı: $\langle u,w\rangle - \langle w,u\rangle = 0$,
- w'nin katsayısı: $-\langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle = 0$,
- u'nun katsayısı: $-\langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle = 0$.

Demek ki

$$u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$$

dır. Bu eşitliğe **Jacobi özdeşliği** denir.
■

Alıştırma 9.9 (Aynı düzleme paralel olma koşulu). $\mathbb{R}^3$'te $u = (1,-1,1)$, $v = (1,2,-1)$ ve $w = (3,m,1)$ vektörlerinin aynı düzlemde olmaları için m ne olmalıdır?

Çözüm.
Sonuç 9.5 uyarınca üç vektörün aynı düzlemde olması için gerek ve yeter koşul $[u,v,w] = 0$ olmasıdır. m üçüncü satırda olduğundan determinantı üçüncü satıra göre açalım; işaret düzeni $+,-,+$ dır:

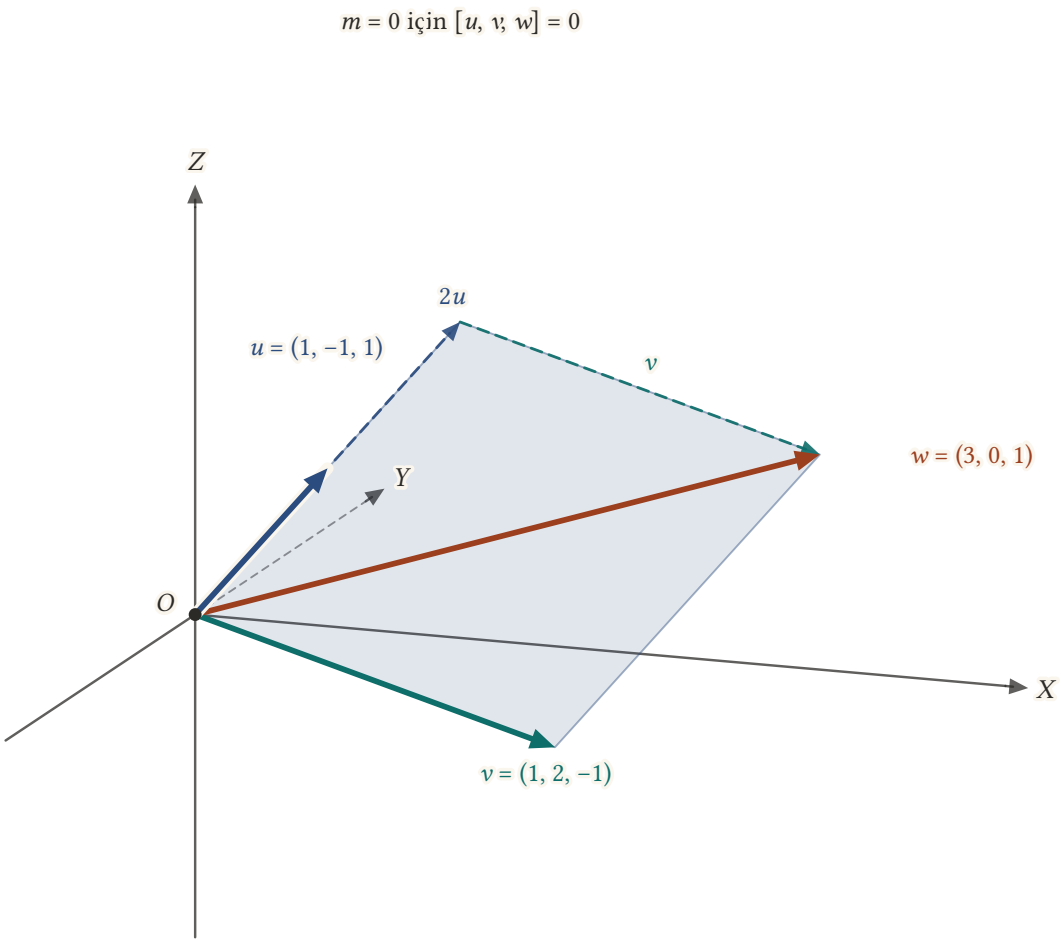
$$\begin{aligned}
[u,v,w] &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 3\,(1-2) - m\,(-1-1) + (2+1) \\
&= -3 + 2m + 3 = 2m.
\end{aligned}$$

$[u,v,w] = 2m = 0$ koşulundan $m = 0$ bulunur. Bu durumda $w = (3,0,1)$ dir ve gerçekten

$$2u + v = (2+1, -2+2, 2-1) = (3,0,1) = w$$

olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 9.14: $m = 0$ için $u = (1, -1, 1)$, $v = (1, 2, -1)$, $w = (3, 0, 1)$ aynı düzlemdedir: paralelkenar kuralıyla $w = 2u + v$.

■

Alıştırma 9.10 (Toplamların karma çarpımı). $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle u + v, (v + w) \times (w + u) \rangle = 2 \langle u, v \times w \rangle$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Önerme 9.1 gereğince sol taraf bir karma çarpımdır:

$$\begin{aligned} \langle u + v, (v + w) \times (w + u) \rangle &= \langle (v + w) \times (w + u), u + v \rangle \\ &= [v + w, w + u, u + v]. \end{aligned}$$

Şimdi Teorem 9.3 iv)'teki toplamsallığı bileşen bileşen uygulayalım. Önce birinci bileşeni açalım:

$$[v + w, w + u, u + v] = [v, w + u, u + v] + [w, w + u, u + v].$$

Sonra ikinci bileşenleri açalım:

$$\begin{aligned} &= [v, w, u + v] + [v, u, u + v] \\ &\quad + [w, w, u + v] + [w, u, u + v]. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$[w, w, u+v]$ terimi iki bileşeni aynı olduğundan sıfırdır (Teorem 9.3 ii). Son olarak üçüncü bileşenleri açalım:

$$\begin{aligned} &= [v,w,u] + [v,w,v] + [v,u,u] + [v,u,v] \\ &\quad +[w,u,u] + [w,u,v]. \end{aligned}$$

$[v,w,v]$, $[v,u,u]$, $[v,u,v]$ ve $[w,u,u]$ terimlerinin her birinde iki bileşen aynıdır, dolayısıyla hepsi sıfırdır. Geriye

$$[v,w,u] + [w,u,v]$$

kalır. Döngüsel kaydırmayla $[w,u,v] = [v,w,u]$ olduğundan (Teorem 9.3 i) toplam $2\,[v,w,u]$ olur. Son olarak

$$2\,[v,w,u] = 2\,\langle v \times w, u\rangle = 2\,\langle u, v \times w\rangle$$

bulunur ve istenen eşitlik elde edilir.
■

Alıştırma 9.11 (Toplamı sıfır olan üç vektör). $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ve $u+v+w=0$ ise

$$u \times v = v \times w = w \times u$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$v \times w = u \times v$ eşitliği. $u+v+w=0$ olduğundan $w = -(u+v)$ dir. Teorem 9.1 iii), iv) ve ii)'den

$$\begin{aligned} v \times w &= v \times \big(-(u+v)\big) = -\big(v \times (u+v)\big) \\ &= -\big(v \times u + v \times v\big) = -(v \times u) \end{aligned}$$

bulunur; çünkü $v \times v = 0$ dır. Teorem 9.1 i)'den $-(v \times u) = u \times v$ olduğundan

$$v \times w = u \times v \tag{1}$$

elde edilir.
$u \times v = w \times u$ eşitliği. Bu kez $v = -(u+w)$ yazalım. Aynı özelliklerle

$$\begin{aligned} u \times v &= u \times \big(-(u+w)\big) = -\big(u \times (u+w)\big) \\ &= -\big(u \times u + u \times w\big) = -(u \times w) = w \times u \end{aligned}$$

bulunur:

$$u \times v = w \times u. \tag{2}$$

(1) ve (2) eşitliklerinden $u \times v = v \times w = w \times u$ çıkar. Aynı yöntemle $u = -(v+w)$ yazılırsa

$$w \times u = w \times \big(-(v+w)\big) = -(w \times v) = v \times w$$

eşitliği doğrudan da görülür.

Geometrik olarak: $u+v+w=0$ ise u, v, w uç uca eklendiğinde bir üçgen oluşturur. Üç eşitlik, bu üçgenin alanının iki katının hangi iki kenar kullanılarak hesaplanırsa hesaplansın aynı çıktığını söyler.
■

Alıştırma 9.12 (İki vektörel çarpımın vektörel çarpımı). $u, v, w, x \in \mathbb{R}^3$ olsun. Bu durumda

$$(u \times v) \times (w \times x) = [w,x,u]\,v - [w,x,v]\,u$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$a = w \times x$ diyelim. Teorem 9.2 ii)'de üçüncü vektör olarak a'yı alırsak

$$\begin{aligned}(u \times v) \times a &= \langle u, a\rangle\, v - \langle v, a\rangle\, u \\ &= \langle u, w \times x\rangle\, v - \langle v, w \times x\rangle\, u\end{aligned}$$

bulunur. İç çarpım simetrik olduğundan $\langle u, w \times x\rangle = \langle w \times x, u\rangle$ ve $\langle v, w \times x\rangle = \langle w \times x, v\rangle$ dir. Önerme 9.1 gereğince bunlar sırasıyla $[w, x, u]$ ve $[w, x, v]$ karma çarpımlarıdır. Böylece

$$(u \times v) \times (w \times x) = [w, x, u]\, v - [w, x, v]\, u$$

elde edilir.
Yani iki vektörel çarpımın vektörel çarpımı, ilk çarpanın vektörleri olan u ile v'nin lineer bileşimidir. Bu hesap, dörtlü özdeşliğin (Teorem 9.5) ispatındaki birinci hesabın aynısıdır.
■

Alıştırma 9.13 (Altı vektörlü bir özdeşlik). $u, v, w, x, y, z \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\begin{aligned}&\langle u \times v, (w \times x) \times (y \times z)\rangle \\ &\quad = \langle u, v \times x\rangle\langle w, y \times z\rangle - \langle u, v \times w\rangle\langle x, y \times z\rangle\end{aligned}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Önce $(w \times x) \times (y \times z)$ vektörünü açalım. Teorem 9.2 ii)'de üçüncü vektör olarak $y \times z$'yi alırsak

$$(w \times x) \times (y \times z) = \langle w, y \times z\rangle\, x - \langle x, y \times z\rangle\, w$$

bulunur. Burada $\langle w, y \times z\rangle$ ve $\langle x, y \times z\rangle$ birer sayıdır. İç çarpımın doğrusallığından

$$\begin{aligned}&\langle u \times v, (w \times x) \times (y \times z)\rangle \\ &\quad = \langle w, y \times z\rangle\langle u \times v, x\rangle - \langle x, y \times z\rangle\langle u \times v, w\rangle\end{aligned}$$

olur. Şimdi $\langle u \times v, x\rangle$ ile $\langle u \times v, w\rangle$ çarpanlarını istenen biçime getirelim. Önerme 9.1 ve döngüsel kaydırmayla (Teorem 9.3 i)

$$\langle u \times v, x\rangle = [u, v, x] = [v, x, u] = \langle v \times x, u\rangle = \langle u, v \times x\rangle$$

ve aynı biçimde

$$\langle u \times v, w\rangle = [u, v, w] = [v, w, u] = \langle v \times w, u\rangle = \langle u, v \times w\rangle$$

dir. Bunları yerine yazar ve çarpanların sırasını düzenlersek

$$\begin{aligned}&\langle u \times v, (w \times x) \times (y \times z)\rangle \\ &\quad = \langle u, v \times x\rangle\langle w, y \times z\rangle - \langle u, v \times w\rangle\langle x, y \times z\rangle\end{aligned}$$

elde edilir.
■

Alıştırma 9.14 (Sinüs teoremi). Bir ABC üçgeninde sinüs teoremini, yani

$$\frac{\sin A}{|\,BC\,|} = \frac{\sin B}{|\,AC\,|} = \frac{\sin C}{|\,AB\,|}$$

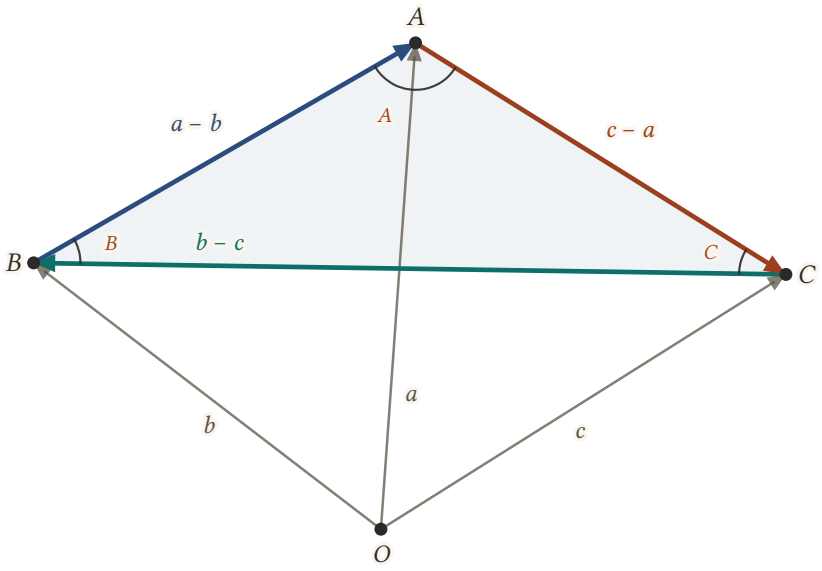
eşitliklerini vektörel çarpım yardımıyla ispatlayınız. Burada A, B, C aynı zamanda üçgenin bu köşelerdeki iç açılarını gösterir.

Çözüm.
Bir O başlangıç noktası seçelim ve A, B, C noktalarının yer vektörlerine sırasıyla a, b, c diyelim. Kenar vektörleri

 CC BY-NC-SA 4.0

$$a-b=\overrightarrow{BA}, \qquad b-c=\overrightarrow{CB}, \qquad c-a=\overrightarrow{AC}$$

dir ve uzunlukları $\mid a-b \mid = \mid AB \mid, \mid b-c \mid = \mid BC \mid, \mid c-a \mid = \mid AC \mid$ dir.



Şekil 9.15: A, B, C noktalarının yer vektörleri a, b, c ve kenar vektörleri $a-b, b-c, c-a$. Üçünün toplamı sıfırdır; köşelerdeki yaylar iç açıları gösterir.

$a-b, b-c$ ve $c-a$ vektörlerinin toplamı sıfırdır:

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0.$$

Alıştırma 9.11 gereğince bu üç vektörün ikişerli vektörel çarpımları eşittir; özellikle uzunlukları da eşittir:

$$\| (a-b)\times(b-c) \| = \| (b-c)\times(c-a) \| = \| (c-a)\times(a-b) \| .$$

Bu ortak değer, Sonuç 9.4 gereğince ABC üçgeninin alanının iki katıdır. Şimdi her birini kenar uzunlukları ve bir iç açının sinüsü cinsinden yazalım. Bir vektörün işaretini değiştirmek vektörel çarpımın yalnız işaretini değiştirir (Teorem 9.1 iii), uzunluğunu değiştirmez.

- A köşesinde iç açı, $\overrightarrow{AB}=b-a$ ile $\overrightarrow{AC}=c-a$ arasındaki açıdır. Buna göre
$$\| (c-a)\times(a-b) \| = \| (b-a)\times(c-a) \| = \mid AB \mid \mid AC \mid \sin A.$$
- B köşesinde iç açı, $\overrightarrow{BA}=a-b$ ile $\overrightarrow{BC}=c-b$ arasındaki açıdır. Buna göre
$$\| (a-b)\times(b-c) \| = \| (a-b)\times(c-b) \| = \mid AB \mid \mid BC \mid \sin B.$$
- C köşesinde iç açı, $\overrightarrow{CB}=b-c$ ile $\overrightarrow{CA}=a-c$ arasındaki açıdır. Buna göre
$$\| (b-c)\times(c-a) \| = \| (b-c)\times(a-c) \| = \mid BC \mid \mid AC \mid \sin C.$$

Her satırda son eşitlik Sonuç 9.2 ii)'dir. Üç ifade eşit olduğundan

$$\mid AB \mid \mid AC \mid \sin A = \mid AB \mid \mid BC \mid \sin B = \mid BC \mid \mid AC \mid \sin C$$

bulunur. Bu eşitlikleri sıfırdan farklı $\mid AB \mid \mid AC \mid \mid BC \mid$ sayısına bölersek

$$\frac{\sin A}{\mid BC \mid} = \frac{\sin B}{\mid AC \mid} = \frac{\sin C}{\mid AB \mid}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

elde edilir. Bu, sinüs teoremidir: bir üçgende her iç açının sinüsü, karşısındaki kenarın uzunluğuyla orantılıdır.
■

Bu bölümde uzayın üç temel çarpımını tamamladık: iç çarpım açıyı ve uzunluğu, vektörel çarpım dik doğrultuyu ve alanı, karma çarpım hacmi ve eş düzlemliliği ölçer. Bir sonraki bölümde bu araçlarla uzaydaki doğruların denklemlerini kuracağız: Uzayda Doğru Denklemleri.

 CC BY-NC-SA 4.0

10. Uzayda Doğru Denklemleri

Düzlemde bir doğruyu belirlemek için bir noktası ile eğimi yetiyordu (Düzlemde Doğru Denklemleri). Uzayda ise eğim tek başına bir anlam taşımaz: bir doğrunun uzaydaki doğrultusunu tek bir sayıyla anlatamayız. Bu işi bir vektöre yaptıracağız. Doğrunun bir noktasını ve doğruya paralel bir vektörü bilirsek, doğrunun her noktasına o noktadan başlayıp bu vektörün katları kadar ilerleyerek ulaşabiliriz.
Bu bölümde önceki bölümlerde kurduğumuz araçları kullanacağız: konum vektörü, paralel vektörler, iç çarpımla diklik ve vektörel çarpım. Önce bir doğrunun üç farklı biçimde yazılan denklemlerini kuracağız: vektörel, parametrik ve kartezyen denklemler. Sonra iki noktası verilen doğruyu, iki doğrunun paralelliğini ve dikliğini inceleyeceğiz. Bölümün sonunda doğrultman vektörünün sıfır olan bileşenlerinin doğrunun koordinat eksenlerine göre durumu hakkında ne söylediğine bakacağız.

10.1 Doğrultman vektörü

Bir doğrunun "hangi yöne uzandığını" bir vektörle anlatacağız. Bunun için doğru üzerinde çizilebilen yönlü doğru parçalarıyla aynı doğrultudaki vektörleri kullanırız.

Tanım 10.1 (Doğrultman vektörü). d uzayda bir doğru ve $v = (a, b, c)$ sıfırdan farklı bir vektör olsun. d üzerindeki farklı herhangi iki A, B noktası için v ile $\overrightarrow{AB}$ aynı doğrultulu ise (Tanım 7.2) v vektörüne d doğrusuna **paralel** bir vektör denir. Böyle bir v vektörüne d doğrusunun **doğrultman vektörü** (doğrultu vektörü) ya da kısaca **doğrultmanı** denir.

Yani doğrultman vektörü, doğrunun üzerinde ya da ona paralel bir doğru üzerinde çizilebilen bir oktur. Bu koşul bir çift için sağlanıyorsa her çift için sağlanır, çünkü d üzerindeki bütün yönlü doğru parçaları aynı doğru üzerindedir. Tanımda $v \neq 0$ olması, yani

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

olması şarttır: sıfır vektörünün bir doğrultusu yoktur, dolayısıyla bir doğrunun nereye uzandığını söyleyemez. Bir doğrunun tek bir doğrultmanı yoktur; aşağıda (Önerme 10.1) göreceğimiz gibi bir doğrultmanın sıfırdan farklı her katı da doğrultmandır.

10.2 Bir noktası ve doğrultmanı verilen doğru

Şimdi $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $v = (a, b, c)$ olan d doğrusunu ele alalım. P_0'ın konum vektörüne (Tanım 7.9) u_0 diyelim. Aşağıdaki teorem, uzaydaki bir P noktasının d üzerinde olup olmadığını konum vektörleriyle söyler.

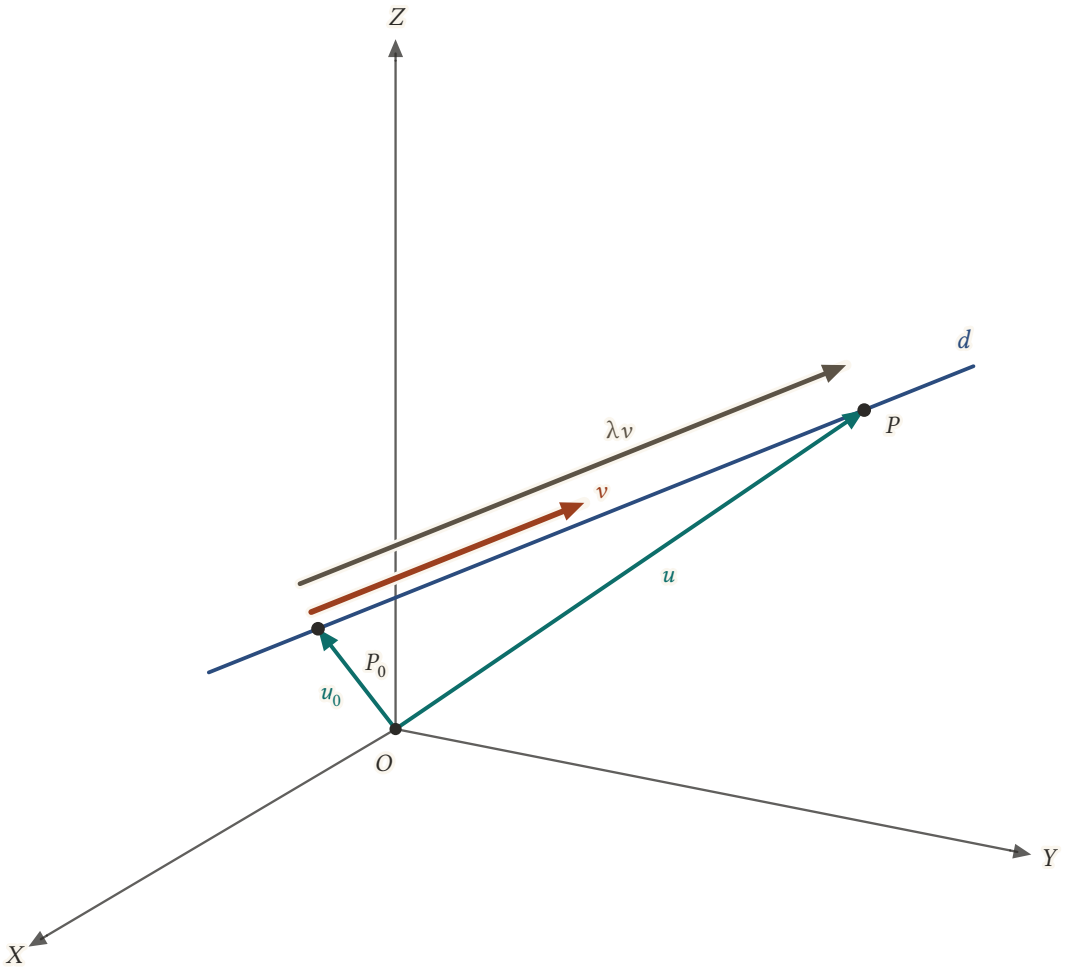
Teorem 10.1 (Doğrunun noktaları). *d, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $v = (a, b, c)$ olan doğru, u_0 da P_0'ın konum vektörü olsun. Konum vektörü u olan bir $P = (x, y, z)$ noktası için*

$$P \in d \Leftrightarrow \text{bir } \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } u = u_0 + \lambda v$$

dir.

> ***İspat.***
> *O başlangıç noktası olmak üzere $u = \overrightarrow{OP}$ ve $u_0 = \overrightarrow{OP_0}$ dır. Üçgen kuralından (Önerme 7.5)*
>
> $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}, \qquad \text{yani} \qquad u = u_0 + \overrightarrow{P_0P}$$
>
> *yazılabilir. Demek ki "$u = u_0 + \lambda v$" eşitliği, "$\overrightarrow{P_0P} = \lambda v$" eşitliğiyle aynı şeyi söyler. İki yönü ayrı ayrı gösterelim.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.1: d *doğrusu* P_o*'dan geçer ve doğrultmanı* v*'dir.* P*'ye* O*'dan doğrudan* (u) *ya da önce* P_o*'a* (u_o)*, sonra doğru boyunca* λv *kadar giderek varılır:* $u = u_o + \lambda v$.

(⇒) $P \in d$ *olsun.* $P = P_0$ *ise* $\overrightarrow{P_0P} = 0 = 0 \cdot v$ *olduğundan* $\lambda = 0$ *seçilir.* $P \neq P_0$ *ise* $\overrightarrow{P_0P}$ *yönlü doğru parçasının iki ucu da* d *üzerindedir.* v*,* d*'nin doğrultmanı olduğundan tanım gereği* $\overrightarrow{P_0P}$ *ile aynı doğrultuludur.* $v \neq 0$ *olduğundan Önerme 7.11 gereği* $\overrightarrow{P_0P} = \lambda v$ *olacak biçimde bir* $\lambda \in \mathbb{R}$ *vardır.*
(⇐) Bir $\lambda \in \mathbb{R}$ *için* $\overrightarrow{P_0P} = \lambda v$ *olsun.* $\lambda = 0$ *ise* $\overrightarrow{P_0P} = 0$*, yani* $P = P_0 \in d$ *dir.* $\lambda \neq 0$ *ise* $\overrightarrow{P_0P}$*,* v *ile aynı doğrultuludur (Önerme 7.8).* v *de* d *üzerindeki yönlü doğru parçalarıyla aynı doğrultulu olduğundan,* P_0 *ile* P*'den geçen doğru* d*'ye paraleldir ya da onunla çakışıktır. Bu doğru* d *ile* P_0 *noktasını paylaşır. Bir noktadan verilen bir doğruya paralel ancak bir doğru çizilebildiğinden bu doğru* d*'nin kendisidir. Dolayısıyla* $P \in d$ *dir.*
■

Teorem, bir doğrunun bütün noktalarını tek bir eşitlikle toplar. Bu eşitliğe bir ad verelim.

Tanım 10.2 (Doğrunun vektörel denklemi). P_0'dan geçen ve doğrultmanı v olan d doğrusu için

$$u = u_0 + \lambda v, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

denklemine d doğrusunun **vektörel denklemi** denir. Burada u_0, P_0'ın; u ise d'nin rastgele bir P noktasının konum vektörüdür. λ sayısına **parametre** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani λ bütün gerçel sayıları taradıkça $u = u_0 + \lambda v$ vektörünün ucu doğrunun bütün noktalarını tarar. $\lambda = 0$ için P_0'ı, $\lambda = 1$ için P_0'dan v kadar ilerlenerek varılan noktayı buluruz. $\lambda > 0$ değerleri P_0'ın v'nin gösterdiği tarafındaki noktaları, $\lambda < 0$ değerleri ise öbür tarafındaki noktaları verir.

10.2.1 Parametrik denklemler

Vektörel denklemi koordinatlarla yazalım: $u = (x, y, z)$, $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ve $v = (a, b, c)$ olduğundan

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$$

olur. İki vektör ancak karşılıklı bileşenleri eşitse eşit olduğundan (Tanım 7.11) bu tek vektör eşitliği üç sayı eşitliğine ayrılır:

$$\begin{aligned} \{x &= x_0 + \lambda a \\ y &= y_0 + \lambda b \\ z &= z_0 + \lambda c \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

Tanım 10.3 (Parametrik denklemler).

(1) ile verilen üç denkleme d doğrusunun **parametrik denklemleri** denir.

Yani parametrik denklemler, doğrunun noktalarını tek bir λ sayısıyla "numaralandırır": her λ değerine doğrunun tam bir noktası karşılık gelir. Aynı denklemleri matris gösterimiyle

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

biçiminde de yazabiliriz.

10.2.2 Kartezyen denklemler

a, b, c sayılarının üçü de sıfırdan farklı olsun. Bu durumda (1)'deki her denklemden λ'yı çekebiliriz:

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a}, \qquad \lambda = \frac{y - y_0}{b}, \qquad \lambda = \frac{z - z_0}{c}.$$

Üçü de aynı λ'ya eşit olduğundan

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} (= \lambda) \tag{2}$$

bulunur. Tersine, (2)'yi sağlayan bir (x, y, z) için ortak değere λ dersek (1) sağlanır. Demek ki (2), d'nin noktalarını parametre kullanmadan betimler.

Tanım 10.4 (Kartezyen denklemler). $a, b, c \neq 0$ iken (2) ile verilen denklemlere d doğrusunun **kartezyen denklemleri** denir.

Yani kartezyen denklemler, λ'yı yok ederek x, y, z arasında kalan iki bağıntıyı yazar. Bu biçimden doğrunun bir noktası ve bir doğrultmanı doğrudan okunur: paydalar doğrultmanın bileşenleridir, paylardaki sayıların işaret değiştirmiş hâlleri de P_0'ın koordinatlarıdır. Örneğin $\dfrac{y+3}{2}$ kesrinde $y_0 = -3$, $\dfrac{x}{2}$ kesrinde ise $x_0 = 0$ dır.

Doğrultmanın bir bileşeni sıfırsa ilgili kesri yazamayız. Bu durumda (1)'deki karşılık gelen denklem, o koordinatın doğru boyunca sabit kaldığını söyler ve kartezyen denklemlerin yerine geçer. Örneğin $a = 0$, $b, c \neq 0$ ise doğrunun denklemleri

$$x = x_0, \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

olur; $a = b = 0$ ise denklemler $x = x_0$, $y = y_0$ dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Düzlemde de aynı fikir çalışır. Düzlemde (x_0, y_0) noktasından geçen ve doğrultmanı (a, b) olan doğru için, $a \neq 0$ ise, parametrik denklemlerden $\lambda = \dfrac{x - x_0}{a}$ çekilip $y = y_0 + \lambda b$ içine yazılarak

$$y - y_0 = \frac{b}{a}\,(x - x_0)$$

bulunur. Bu, eğimi $m = b/a$ olan doğrunun nokta-eğim denklemidir (Tanım 3.1). Yani düzlemdeki eğim, doğrultman vektörünün iki bileşeninin oranından başka bir şey değildir. Uzayda üç bileşen olduğundan tek bir oran yetmez; bu yüzden kartezyen denklemler iki eşitlikten oluşur.

Bir doğrunun denklemlerini üç adımda yazmak

1. Doğrunun bir $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasını belirleyin.
2. Doğrunun bir $v = (a, b, c) \neq 0$ doğrultmanını belirleyin.
3. Bunları $u = u_0 + \lambda v$ vektörel denkleminde, (1) parametrik denklemlerinde ve (2) kartezyen denklemlerinde yerine yazın.

Örnek 10.1 (Bir noktası ve paralel olduğu vektör verilen doğru). $P_0 = (4, -3, 1)$ noktasından geçen ve $v = (7, 2, -3)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Doğruya d, üzerindeki rastgele bir noktaya $P = (x, y, z)$ diyelim. v, d'ye paralel ve sıfırdan farklı olduğundan d'nin bir doğrultmanıdır. Reçetenin ilk iki adımı hazırdır: $u_0 = (4, -3, 1)$ ve $v = (7, 2, -3)$.
Vektörel denklem. $u = u_0 + \lambda v$ eşitliğinde yerine yazarsak

$$(x, y, z) = (4, -3, 1) + \lambda(7, 2, -3), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

bulunur.
Parametrik denklemler. Sağ taraf $(4 + 7\lambda, -3 + 2\lambda, 1 - 3\lambda)$ olduğundan bileşenleri eşitleyerek

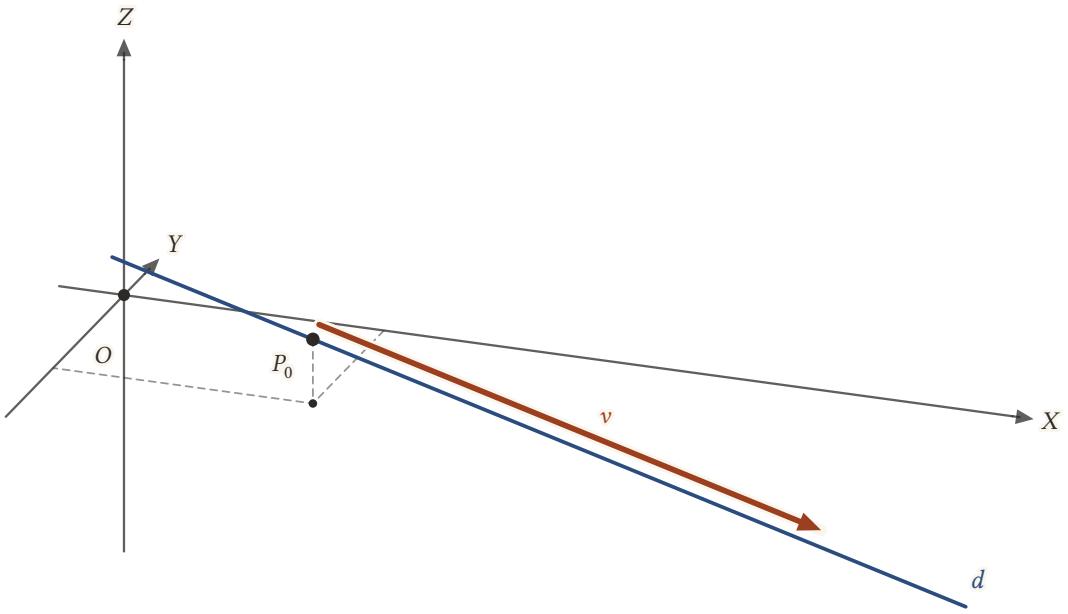
$$\begin{aligned} \{x &= 4 + 7\lambda \\ y &= -3 + 2\lambda \\ z &= 1 - 3\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

elde edilir.
Kartezyen denklemler. Doğrultmanın üç bileşeni de sıfırdan farklıdır. Her denklemden λ çekilirse

$$\frac{x - 4}{7} = \frac{y + 3}{2} = \frac{z - 1}{-3} (= \lambda)$$

bulunur. İkinci kesirde $y - (-3) = y + 3$ yazdığımıza dikkat edin.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.2: $P_0 = (4, -3, 1)$ noktasından geçen ve $v = (7, 2, -3)$ vektörüne paralel olan d doğrusu. Kesikli çizgiler P_0'ın XY düzlemindeki izdüşümünü gösterir.

■

Doğrunun denklemi elimizdeyken bir noktanın doğru üzerinde olup olmadığını anlamak kolaydır: noktanın koordinatlarını parametrik denklemlere yazarız ve üç denklemin de **aynı** λ değerini verip vermediğine bakarız.

Örnek 10.2 (Bir nokta doğru üzerinde mi?). Bir önceki örnekteki (Örnek 10.1) d doğrusu $x = 4 + 7\lambda$, $y = -3 + 2\lambda$, $z = 1 - 3\lambda$ parametrik denklemleriyle verilir. $R = (-3, -5, 5)$ noktası d üzerinde midir?

Çözüm.
Teorem 10.1 gereğince $R \in d$ olması, bir λ için üç denklemin birlikte sağlanması demektir. Denklemleri tek tek çözelim:

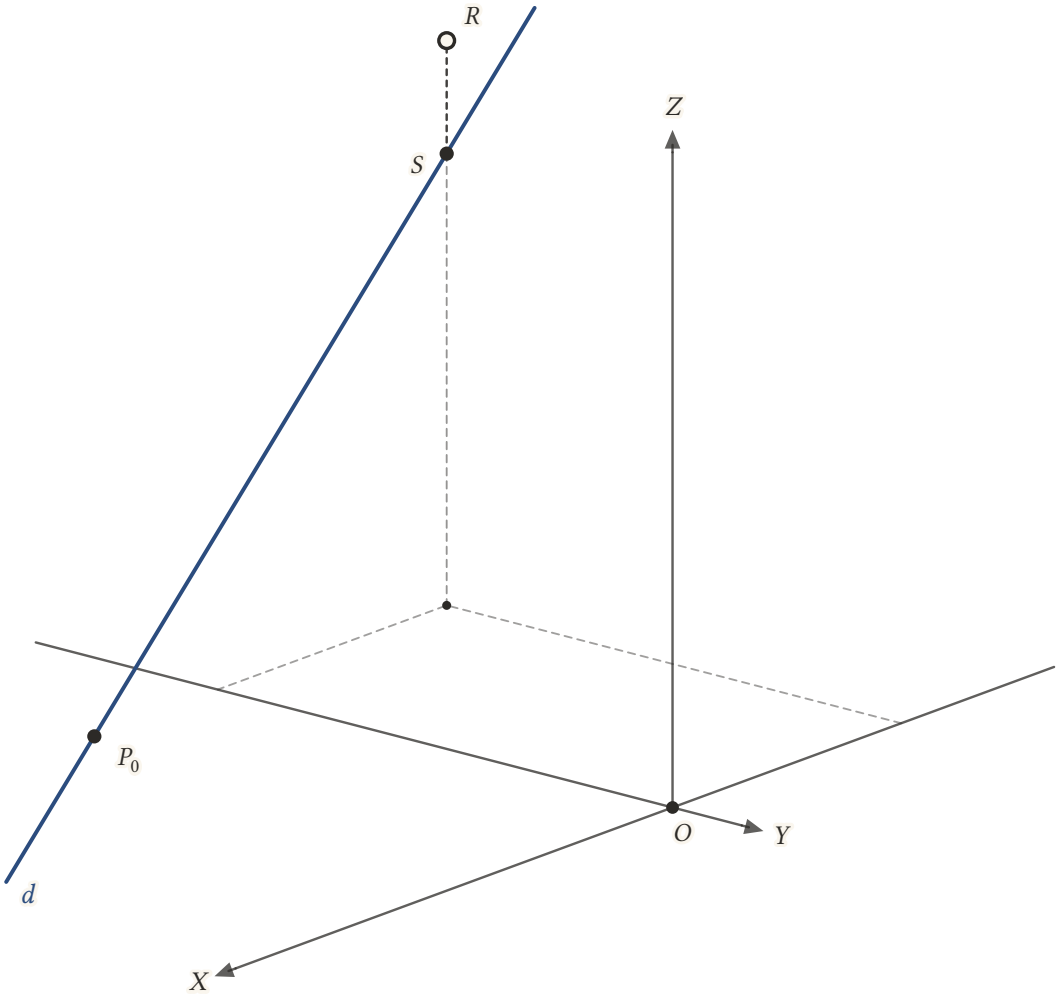
$$\begin{aligned} -3 = 4 + 7\lambda &\quad\Rightarrow\quad \lambda = -1, \\ -5 = -3 + 2\lambda &\Rightarrow\quad \lambda = -1, \\ 5 = 1 - 3\lambda &\quad\Rightarrow\quad \lambda = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

İlk iki denklem $\lambda = -1$ verirken üçüncüsü $\lambda = -\frac{4}{3}$ verir. Üç denklemi birlikte sağlayan bir λ olmadığından $R \notin d$ dir.
Bu sonucu şöyle de görebiliriz: ilk iki koordinatı tutan $\lambda = -1$ değeri doğrunun

$$S = (4 - 7, -3 - 2, 1 + 3) = (-3, -5, 4)$$

noktasını verir. R, bu noktanın 1 birim üstündedir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.3: d üzerindeki $S = (-3, -5, 4)$ noktası ilk iki koordinatı $R = (-3, -5, 5)$ ile aynı olan tek noktadır; R onun 1 birim üstündedir, yani d üzerinde değildir.

■

Bir doğrunun denklemlerini yazarken iki seçim yaptık: bir nokta ve bir doğrultman. Aşağıdaki önerme, bu seçimlerin doğrunun kendisini değiştirmediğini söyler; bu yüzden aynı doğrunun denklemleri birçok farklı biçimde yazılabilir.

Önerme 10.1 (Nokta ve doğrultman seçimi). *d, P_0'dan geçen ve doğrultmanı v olan bir doğru olsun.*
i) Her $\mu \neq 0$ için μv de d'nin bir doğrultmanıdır. Tersine, d'nin her doğrultmanı $\mu \neq 0$ olmak üzere μv biçimindedir. Özellikle sıfırdan farklı bir w vektörü için

$$w \text{ vektörü } d \text{ 'ye paraleldir} \Leftrightarrow w \parallel v$$

dir.
ii) P_0 yerine d'nin herhangi bir P_1 noktası alınabilir: P_1'den geçen ve doğrultmanı v olan doğru yine d'dir.

İspat.
i) *$\mu \neq 0$ ise $\mu v \neq 0$ dır ve μv ile v aynı doğrultuludur (Önerme 7.8). v, d üzerindeki bir $\overrightarrow{AB}$ ile aynı doğrultulu olduğundan μv de öyledir; yani μv, d'nin bir doğrultmanıdır.*
Tersine w, d'nin bir doğrultmanı olsun. w ile v'nin her biri, d üzerindeki yönlü doğru parçalarıyla aynı doğrultuludur; dolayısıyla w ile v de aynı doğrultuludur. $v \neq 0$ olduğundan Önerme 7.11 gereği $w = \mu v$

 CC BY-NC-SA 4.0

olacak biçimde bir μ vardır; $w \neq 0$ olduğundan $\mu \neq 0$ dır. Böylece $w = \mu v$ ve $\mu \neq 0$, yani $w \parallel v$ dir (Tanım 7.15). Son denklik, "d'ye paralel" ile "d'nin doğrultmanı" aynı şey olduğundan bu iki gözlemin birlikte söylediği şeydir.
ii) *$P_1 \in d$ olsun ve konum vektörüne u_1 diyelim. Teorem 10.1 gereğince bir λ_1 için $u_1 = u_0 + \lambda_1 v$ dir. Buna göre her $\lambda \in \mathbb{R}$ için*

$$u_1 + \lambda v = u_0 + (\lambda_1 + \lambda)\, v$$

olur. λ bütün gerçel sayıları taradığında $\lambda_1 + \lambda$ da bütün gerçel sayıları tarar. Demek ki $u_1 + \lambda v$ biçimindeki vektörlerin uçları ile $u_0 + \lambda v$ biçimindeki vektörlerin uçları aynı noktalardır; iki doğru aynıdır.
■

Yani bir doğrunun denklemini kurarken doğrultmanı sadeleştirmekte, örneğin ortak bir çarpanı atmakta ya da işaretini değiştirmekte serbestiz. Aşağıdaki örnekte bunu kullanacağız.

Örnek 10.3 (Bir vektöre paralel olma koşulu). c'nin hangi değerleri için

$$d : \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z-5}{-8}$$

doğrusu $w = (6, c, -12)$ vektörüne paralel olur?

Çözüm.
Kartezyen denklemlerin paydaları d'nin bir doğrultmanını verir: $v = (4, -6, -8)$. Bu vektörün bileşenlerinin ortak çarpanı -2 dir:

$$v = -2\,(-2, 3, 4).$$

Önerme 10.1 i) gereğince $\bar{v} = (-2, 3, 4)$ vektörü de d'nin bir doğrultmanıdır. Aynı önerme gereğince

$$d \parallel w \Leftrightarrow \bar{v} \parallel w \Leftrightarrow \text{bir} \quad \mu \neq 0 \quad \text{için} \quad w = \mu \bar{v}$$

dir. $w = \mu\bar{v}$ eşitliğini bileşen bileşen yazalım:

$$6 = -2\mu, \qquad c = 3\mu, \qquad -12 = 4\mu.$$

Birinci denklemden $\mu = -3$ bulunur; üçüncü denklem de $\mu = -3$ verir, yani iki denklem çelişmez. İkinci denklemden

$$c = 3 \cdot (-3) = -9$$

elde edilir. Bu hesabı bileşenlerin oranlarıyla da yazabiliriz:

$$\frac{6}{-2} = \frac{c}{3} = \frac{-12}{4} (= -3).$$

Sonuç olarak d, yalnız $c = -9$ için w vektörüne paraleldir.
■

Parametrik denklemlerin başka bir kullanımı, bir doğrunun koordinat düzlemlerini hangi noktalarda kestiğini bulmaktır. XY-düzleminin noktaları için $z = 0$, XZ-düzleminin noktaları için $y = 0$, YZ-düzleminin noktaları için $x = 0$ dır (Tanım 6.1).

Örnek 10.4 (Bir doğrunun koordinat düzlemlerini kestiği noktalar). $P_0 = (2, 1, 4)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $v = (1, 1, -2)$ olan d doğrusunun üç koordinat düzlemini kestiği noktaları bulunuz.

Çözüm.
d'nin parametrik denklemleri

$$x = 2 + \lambda, \qquad y = 1 + \lambda, \qquad z = 4 - 2\lambda$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dır. Her koordinat düzlemi için ilgili koordinatı sıfıra eşitleyip λ'yı buluruz, sonra bu λ'yı öteki iki denkleme yazarız.

XY-düzlemi ($z = 0$). $4 - 2\lambda = 0$ ise $\lambda = 2$ dir. Buradan $x = 2 + 2 = 4$, $y = 1 + 2 = 3$ bulunur. Kesim noktası $A = (4, 3, 0)$ dır.

XZ-düzlemi ($y = 0$). $1 + \lambda = 0$ ise $\lambda = -1$ dir. Buradan $x = 2 - 1 = 1$, $z = 4 + 2 = 6$ bulunur. Kesim noktası $B = (1, 0, 6)$ dır.

YZ-düzlemi ($x = 0$). $2 + \lambda = 0$ ise $\lambda = -2$ dir. Buradan $y = 1 - 2 = -1$, $z = 4 + 4 = 8$ bulunur. Kesim noktası $C = (0, -1, 8)$ dir.

Her koordinat için λ'yı bulurken doğrultmanın ilgili bileşenine böldük; bu bileşenlerin üçü de sıfırdan farklı olduğundan d her koordinat düzlemini tam bir noktada keser. Parametre değerleri $\lambda = -2, -1, 0, 2$ sırasıyla C, B, P_0, A noktalarına karşılık gelir; doğru boyunca bu sırayla dizilirler.



Şekil 10.4: d doğrusu YZ düzlemini C'de, XZ düzlemini B'de, XY düzlemini A'da keser; parametre değerleri sırasıyla −2, −1, 2'dir, P_0 ise $\lambda = 0$ noktasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

10.3 İki noktası verilen doğru

İki farklı noktadan tam bir doğru geçer. Bu doğrunun denklemini yazmak için yeni bir şey gerekmez: iki noktayı birleştiren vektör bir doğrultman verir.

Önerme 10.2 (İki noktası verilen doğrunun denklemleri). *$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ile $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ farklı iki nokta, u_0 ile u_1 konum vektörleri ve d bu iki noktadan geçen doğru olsun. Bu durumda*

$$v = \overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

vektörü d'nin bir doğrultmanıdır ve d'nin

- *vektörel denklemi $u = u_0 + \lambda \overrightarrow{P_0P_1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$,*
- *parametrik denklemleri*

$$\begin{aligned} \{x &= x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y &= y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z &= z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

- *kartezyen denklemleri, $x_1 \neq x_0$, $y_1 \neq y_0$, $z_1 \neq z_0$ iken,*

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} (= \lambda)$$

dir.

İspat.
$P_0 \neq P_1$ olduğundan $\overrightarrow{P_0P_1} \neq 0$ dır. $\overrightarrow{P_0P_1}$ yönlü doğru parçasının iki ucu da d üzerindedir; dolayısıyla bu vektör kendisiyle aynı doğrultulu olarak doğrultman tanımındaki (Tanım 10.1) koşulu sağlar ve d'nin bir doğrultmanıdır. Koordinatları, uç noktanın koordinatlarından başlangıç noktasının koordinatları çıkarılarak bulunur:

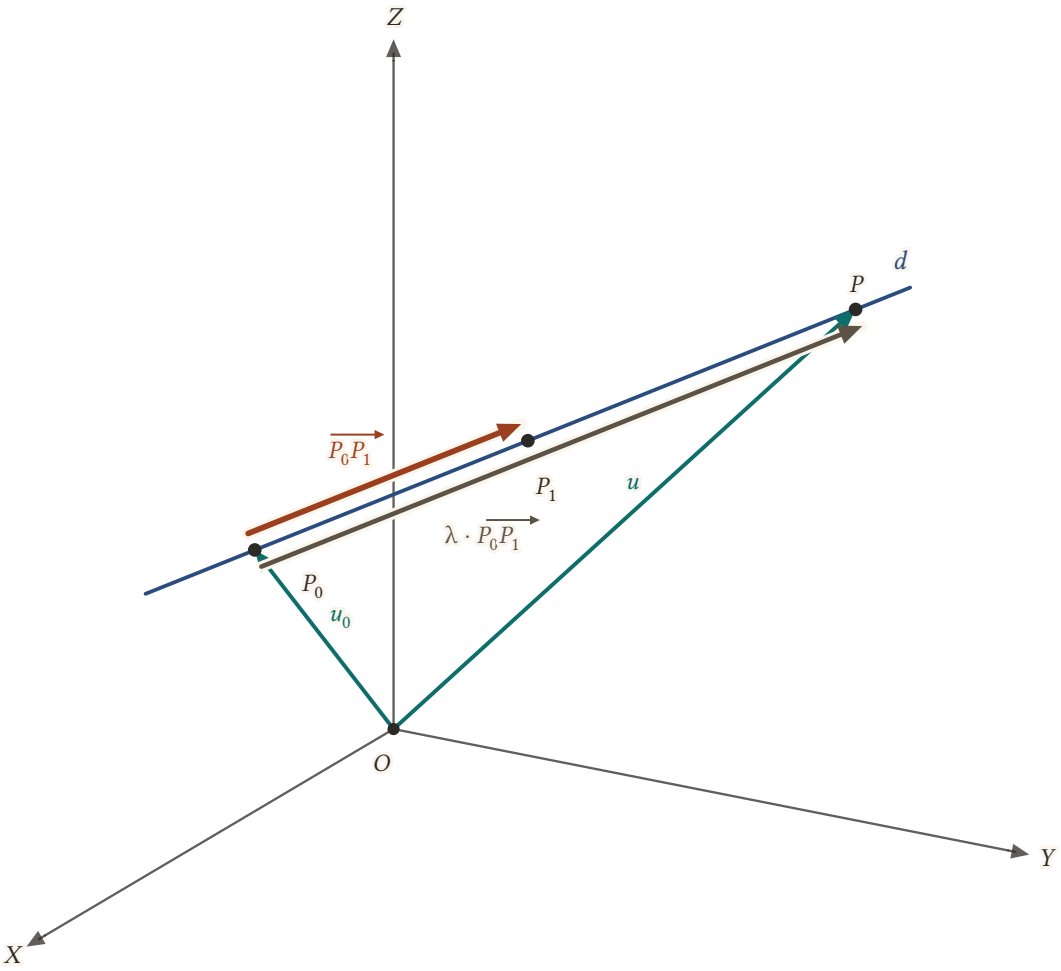
$$\overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0).$$

Şimdi d, P_0'dan geçen ve doğrultmanı $v = \overrightarrow{P_0P_1}$ olan doğrudur. $P = (x, y, z)$, d üzerinde rastgele bir nokta olsun. $\overrightarrow{P_0P}$ ile $\overrightarrow{P_0P_1}$ aynı doğrultuludur ve Teorem 10.1 gereğince

$$u = u_0 + \overrightarrow{P_0P} = u_0 + \lambda \overrightarrow{P_0P_1}$$

yazılabilir. Bu, vektörel denklemdir. $a = x_1 - x_0$, $b = y_1 - y_0$, $c = z_1 - z_0$ alınarak (1) ve (2)'den parametrik ve kartezyen denklemler elde edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.5: P_o *ile* P_1*'den geçen* d *doğrusunun doğrultmanı olarak* P_oP_1 *vektörü alınır;* d*'nin her* P *noktası için* $u = u_o + \lambda P_oP_1$ *olur.*

■

Yani iki noktadan geçen doğruda $\lambda = 0$ değeri P_0'ı, $\lambda = 1$ değeri P_1'i verir. Düzlemde iki noktası verilen doğrunun denkleminin (Önerme 3.1) uzaydaki karşılığı budur: orada tek bir oran eşitliği vardı, burada ikisi var.

Örnek 10.5 (İki noktadan geçen doğru). $P_0 = (2, -3, 4)$ ile $P_1 = (5, 2, -1)$ noktalarından geçen doğrunun kartezyen ve parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Doğruya d diyelim. Doğrultman olarak

$$v = \overrightarrow{P_0P_1} = \big(\ 5-2, 2-(-3), -1-4\ \big) = (3, 5, -5)$$

alınabilir (Önerme 10.2). Üç bileşen de sıfırdan farklı olduğundan kartezyen denklemler

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-(-3)}{2-(-3)} = \frac{z-4}{-1-4}$$

yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{-5} (= \lambda)$$

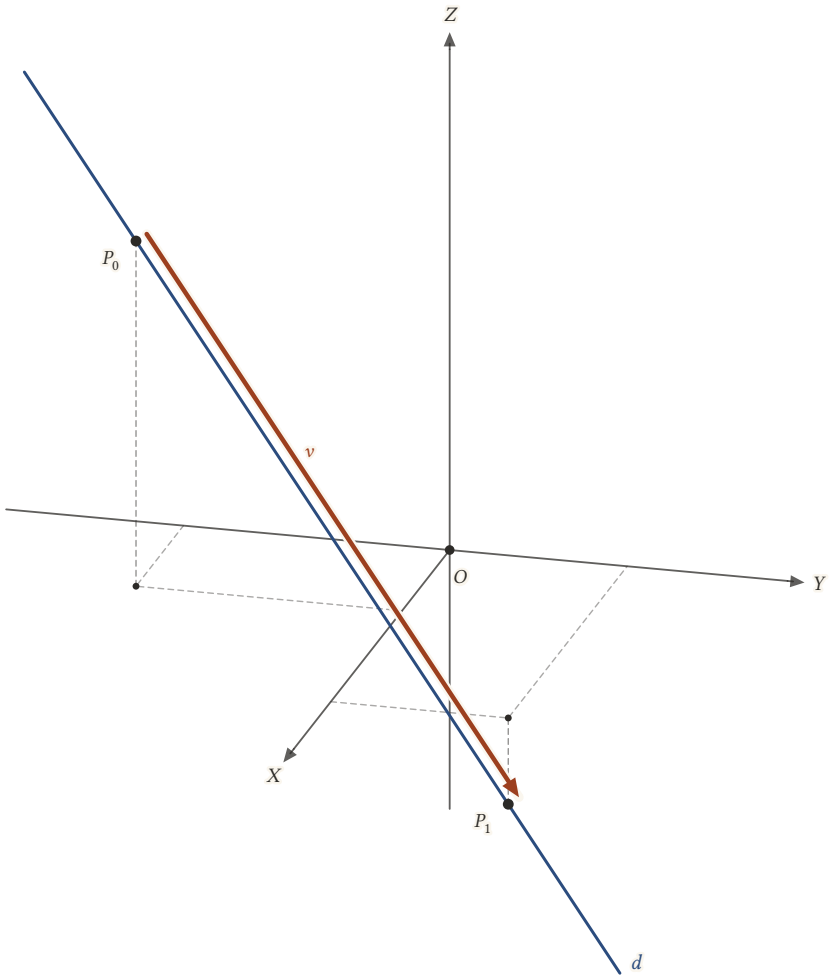
olur. Her kesri λ'ya eşitleyip x, y, z'yi çözersek parametrik denklemler

$$\begin{aligned} \{x &= 2 + 3\lambda \\ y &= -3 + 5\lambda \\ z &= 4 - 5\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

bulunur. Kontrol: $\lambda = 1$ için

$$(2+3, -3+5, 4-5) = (5, 2, -1) = P_1$$

elde edilir.



Şekil 10.6: P_0 = (2, −3, 4) ile P_1 = (5, 2, −1) noktalarından geçen doğru ve doğrultmanı v = (3, 5, −5). Kesikli çizgiler noktaları XY düzlemine bağlar.

■

Örnek 10.6 (Doğrultmanının bir bileşeni sıfır olan doğru). $P_0 = (1, 2, 3)$ ile $P_1 = (-2, 3, 3)$ noktalarından geçen doğrunun kartezyen ve parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğruya d diyelim. Doğrultman olarak

$$v = \overrightarrow{P_0P_1} = (-2-1, 3-2, 3-3) = (-3, 1, 0)$$

alınabilir. Parametrik denklemler (1)'den doğrudan yazılır:

$$\begin{aligned} \{x &= 1 - 3\lambda \\ y &= 2 + \lambda \\ z &= 3 \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

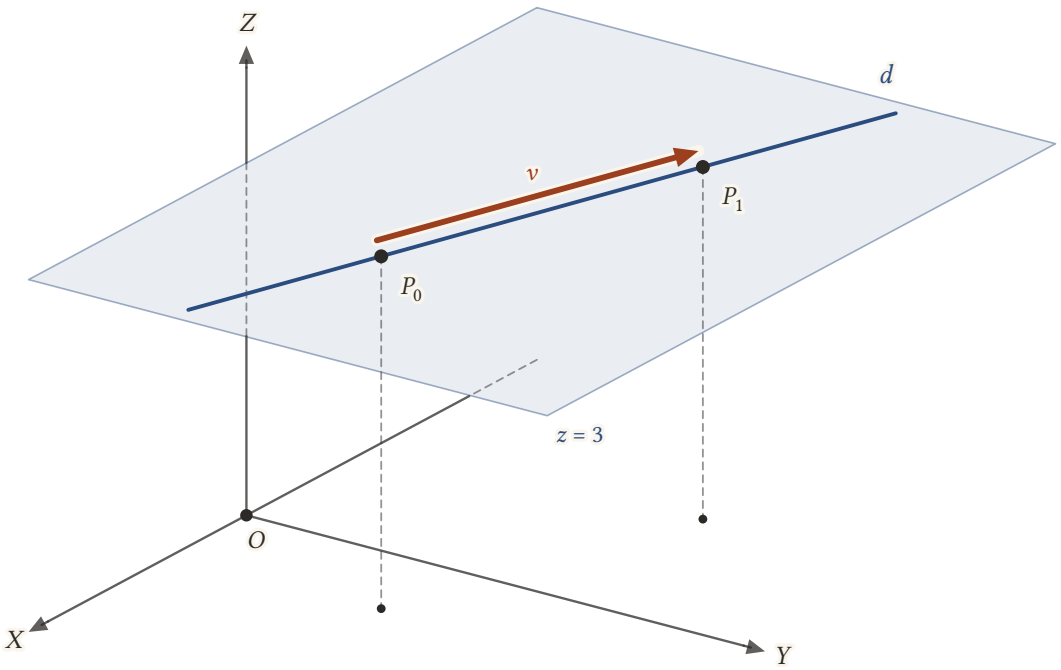
Doğrultmanın üçüncü bileşeni 0 olduğundan $\dfrac{z-3}{0}$ kesri yazılamaz. Üçüncü parametrik denklem, doğrunun bütün noktalarında $z = 3$ olduğunu söyler. İlk iki denklemden λ çekilerek kartezyen denklemler

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{1}, \qquad z = 3$$

biçiminde yazılır. Kontrol: $\lambda = 1$ için

$$(1-3, 2+1, 3) = (-2, 3, 3) = P_1$$

bulunur.
Yani d, kotu 3 olan noktalardan oluşan $z = 3$ düzleminin içinde yatar; bu düzlem XY-düzlemine paraleldir. Doğrultmanı sıfır bileşenli doğruları bölümün sonunda (Önerme 10.4) ayrıca inceleyeceğiz.



Şekil 10.7: Doğrultmanı $v = (-3, 1, 0)$ olan doğru, kotu 3 olan noktalardan oluşan $z = 3$ düzleminde yatar; P_0 ve P_1'den XY düzlemine inen kesikli çizgilerin ikisi de 3 birimdir.

■

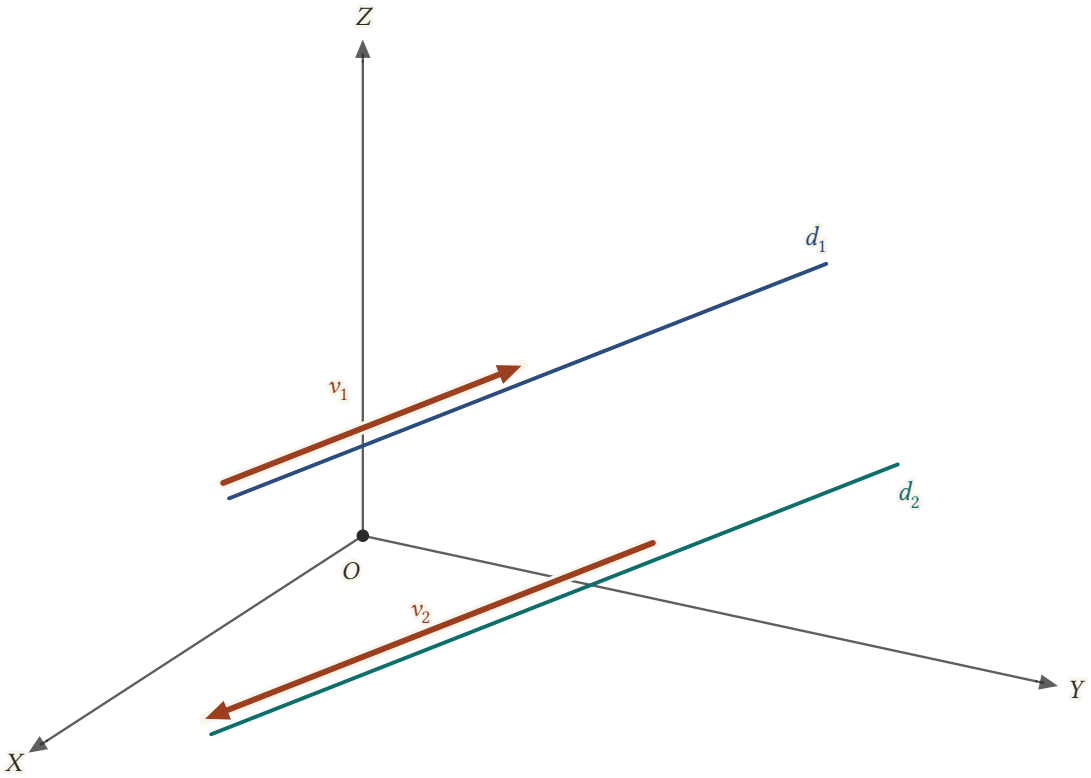
10.4 İki doğrunun paralelliği

İki doğrunun birbirine göre durumunu, doğrultmanlarını karşılaştırarak incelemeye başlayabiliriz. İlk karşılaştırma, doğrultmanların paralel olup olmadığıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 10.5 (Paralel doğrular). d_1 ve d_2, doğrultmanları sırasıyla v_1 ve v_2 olan iki doğru olsun. $v_1 \parallel v_2$ ise d_1 ile d_2'ye **paralel doğrular** denir ve $d_1 \parallel d_2$ yazılır:

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2.$$



Şekil 10.8: Doğrultmanları paralel olan d_1 ve d_2 doğruları. Burada $v_2 = -1{,}5\ v_1$ olduğundan iki doğrultman zıt yönlüdür; doğrular yine paraleldir.

Yani iki doğrunun paralel olması için doğrultmanlarının karşılıklı bileşenleri orantılı olmalıdır (Tanım 7.15). Tanım, doğrultmanların hangisinin seçildiğine bağlı değildir: Önerme 10.1 gereğince d_1'in her doğrultmanı v_1'in, d_2'nin her doğrultmanı v_2'nin sıfırdan farklı bir katıdır ve katlar paralelliği bozmaz. Paralel iki doğrunun doğrultmanları aynı yönlü ya da zıt yönlü olabilir; önemli olan doğrultularının aynı olmasıdır.

Paralel iki doğru ortak bir nokta paylaşıyorsa çakışır: ortak nokta P_0 ise ikisi de P_0'dan geçen ve doğrultmanı v_1 olan doğrudur (Önerme 10.1). Demek ki paralel iki doğru ya hiç kesişmez ya da aynı doğrudur. İki doğrunun birbirine göre bütün durumlarını bir sonraki bölümde ele alacağız.

Örnek 10.7 (Paralellik koşulundan bilinmeyen bulmak).

$$d_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{c_1} \qquad \text{ve} \qquad d_2 : \frac{x+3}{c_2} = \frac{y-1}{12} = \frac{z-3}{4}$$

doğrularının paralel olması için c_1 ve c_2 ne olmalıdır?

Çözüm.
Paydalar doğrultmanları verir:

$$v_1 = (2, -3, c_1), \qquad v_2 = (c_2, 12, 4).$$

Tanım 10.5 gereğince $d_1 \parallel d_2$ olması $v_1 \parallel v_2$ olması, yani bir μ için $v_2 = \mu v_1$ olmasıdır:

$$c_2 = 2\mu, \qquad 12 = -3\mu, \qquad 4 = \mu c_1.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci denklemde bilinmeyen yalnız μ'dür: $\mu = -4$. Bunu birinci denkleme yazarsak $c_2 = 2 \cdot (-4) = -8$, üçüncüye yazarsak $4 = -4c_1$, yani $c_1 = -1$ bulunur. Aynı hesap oranlarla

$$\frac{2}{c_2} = \frac{-3}{12} = \frac{c_1}{4}\left(= -\frac{1}{4}\right)$$

biçiminde de yazılabilir. Buna göre $c_1 = -1$ ve $c_2 = -8$ olmalıdır. Bu değerler sıfırdan farklı olduğundan kartezyen denklemlerdeki paydalar da anlamlıdır.
■

Örnek 10.8 (Bir doğruya paralel ve bir noktadan geçen doğru). $P_0 = (1, 3, 4)$ ve $P_1 = (-2, 2, 3)$ noktalarından geçen doğruya paralel olan ve $P = (-2, 4, 3)$ noktasından geçen doğrunun kartezyen ve parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
P_0 ile P_1'den geçen doğruya d_1, aranan doğruya d diyelim. Önerme 10.2 gereğince d_1'in kartezyen denklemleri

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-3}{2-3} = \frac{z-4}{3-4}, \quad \text{yani} \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-1}$$

dir; d_1'in doğrultmanı $v = (-3, -1, -1)$ dir. $d \parallel d_1$ olacağından v, d'nin de bir doğrultmanı olarak alınabilir. d, $P = (-2, 4, 3)$ noktasından geçtiğinden kartezyen denklemleri

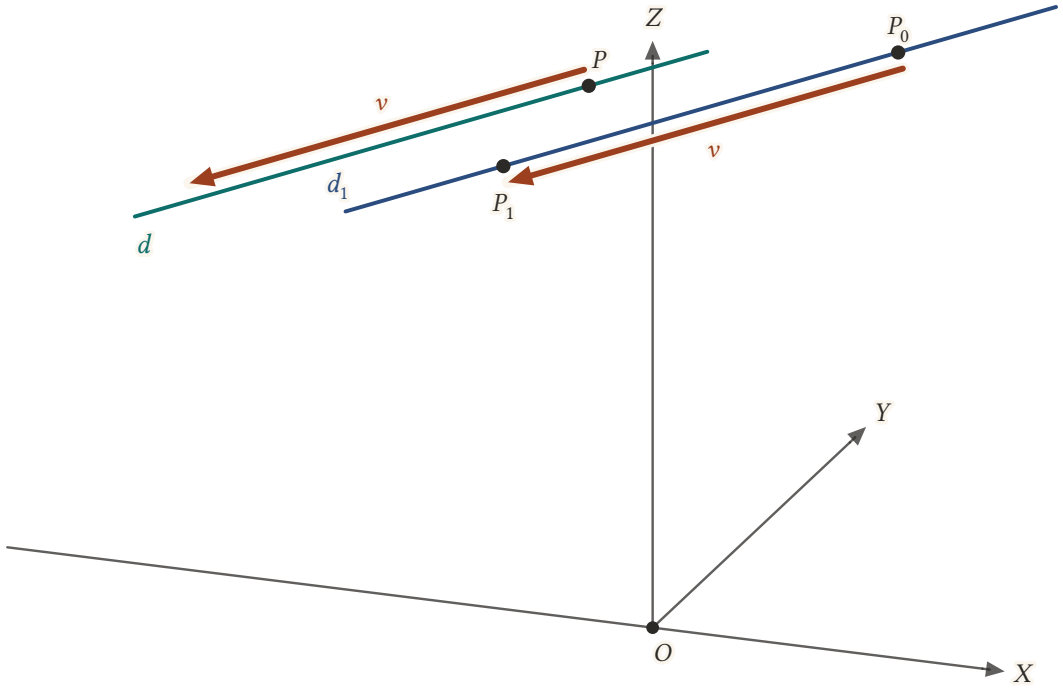
$$\frac{x-(-2)}{-3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{-1}, \quad \text{yani} \quad \frac{x+2}{-3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{-1}(= \lambda)$$

olur. Her kesri λ'ya eşitlersek parametrik denklemler

$$\begin{aligned} \{x &= -2 - 3\lambda \\ y &= 4 - \lambda \\ z &= 3 - \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

bulunur.
P noktası d_1 üzerinde değildir: d_1'in kartezyen denklemlerine yazıldığında ilk kesir $\frac{-2-1}{-3} = 1$, ikinci kesir $\frac{4-3}{-1} = -1$ verir ve bunlar eşit değildir. Demek ki d ile d_1 çakışmayan iki paralel doğrudur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.9: P_0 ile P_1'den geçen d_1 ve P'den geçen, aynı $v = (-3, -1, -1)$ doğrultmanlı d doğrusu. P, d_1 üzerinde olmadığından iki doğru çakışmaz.

■

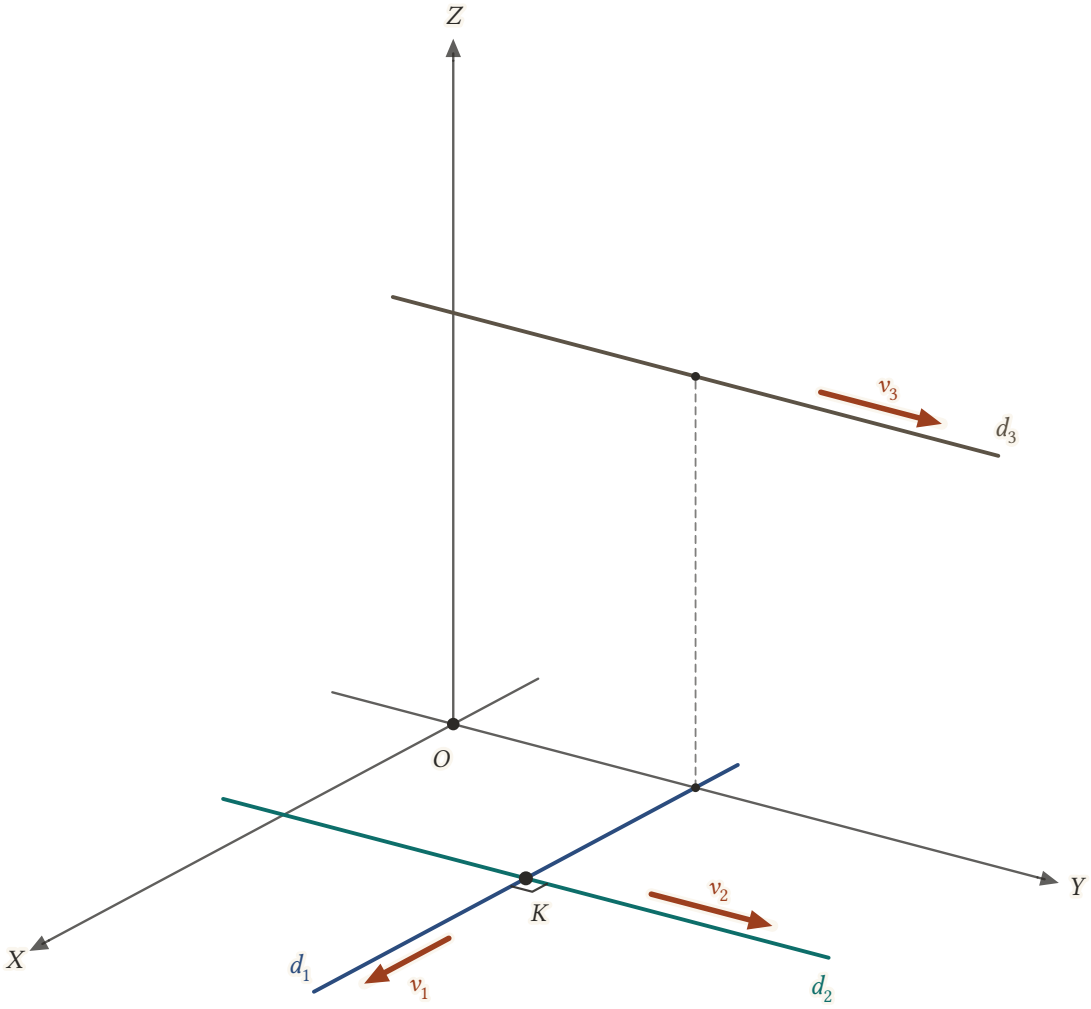
10.5 İki doğrunun dikliği

Doğrultmanları karşılaştırmanın ikinci yolu, aralarındaki açıya bakmaktır. En önemli özel durum, doğrultmanların dik olmasıdır.

Tanım 10.6 (Dik doğrular). d_1 ve d_2, doğrultmanları sırasıyla v_1 ve v_2 olan iki doğru olsun. $v_1 \perp v_2$ ise d_1 ile d_2'ye **dik doğrular** denir ve $d_1 \perp d_2$ yazılır:

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.10: $d_1 \perp d_2$ ve bu iki doğru K'da kesişir. d_3, d_1'in 3 birim üstünden geçer: $d_1 \perp d_3$ olduğu hâlde bu iki doğru kesişmez.

Yani iki doğrunun dik olup olmadığını anlamak için doğrultmanlarının iç çarpımına bakmak yeter: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ ise doğrular diktir (Önerme 8.2). Doğrultmanların katları da iç çarpımın sıfır olmasını bozmadığından tanım, doğrultmanların seçimine bağlı değildir.
Tanımda doğruların kesişmesi istenmez. Yukarıdaki şekilde $d_1 \perp d_2$ dir ve bu iki doğru kesişir; $d_1 \perp d_3$ de doğrudur, ama d_1 ile d_3 hiç kesişmez. Biz her iki durumda da doğrulara dik diyeceğiz. Kesişmeden dik olan iki doğruya bazı kitaplarda **dik durumlu doğrular** denir.

Örnek 10.9 (Kesişmeyen dik doğrular).

$$d_1 : \frac{x-4}{7} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-3} \qquad \text{ve} \qquad d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{1}$$

doğrularının dik olduğunu, fakat kesişmediğini gösteriniz.

Çözüm.
Diklik. Doğrultmanlar $v_1 = (7, 2, -3)$ ve $v_2 = (1, -2, 1)$ dir. İç çarpımları

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 7 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 = 7 - 4 - 3 = 0$$

olduğundan $v_1 \perp v_2$, yani $d_1 \perp d_2$ dir.
Kesişmeme. Parametrik denklemler

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d_1 : \{x = 4 + 7s \quad y = -3 + 2s \quad z = 1 - 3s \qquad d_2 : \{x = 1 + t \quad y = -2 - 2t \quad z = t$$

dir; iki doğru için farklı parametre harfleri kullandık, çünkü ortak bir noktada iki parametrenin değerleri farklı olabilir. Ortak bir nokta olsaydı bir s ve bir t için üç koordinat da eşit olurdu. x koordinatlarının eşitliğinden

$$4 + 7s = 1 + t \quad \Rightarrow \quad t = 3 + 7s$$

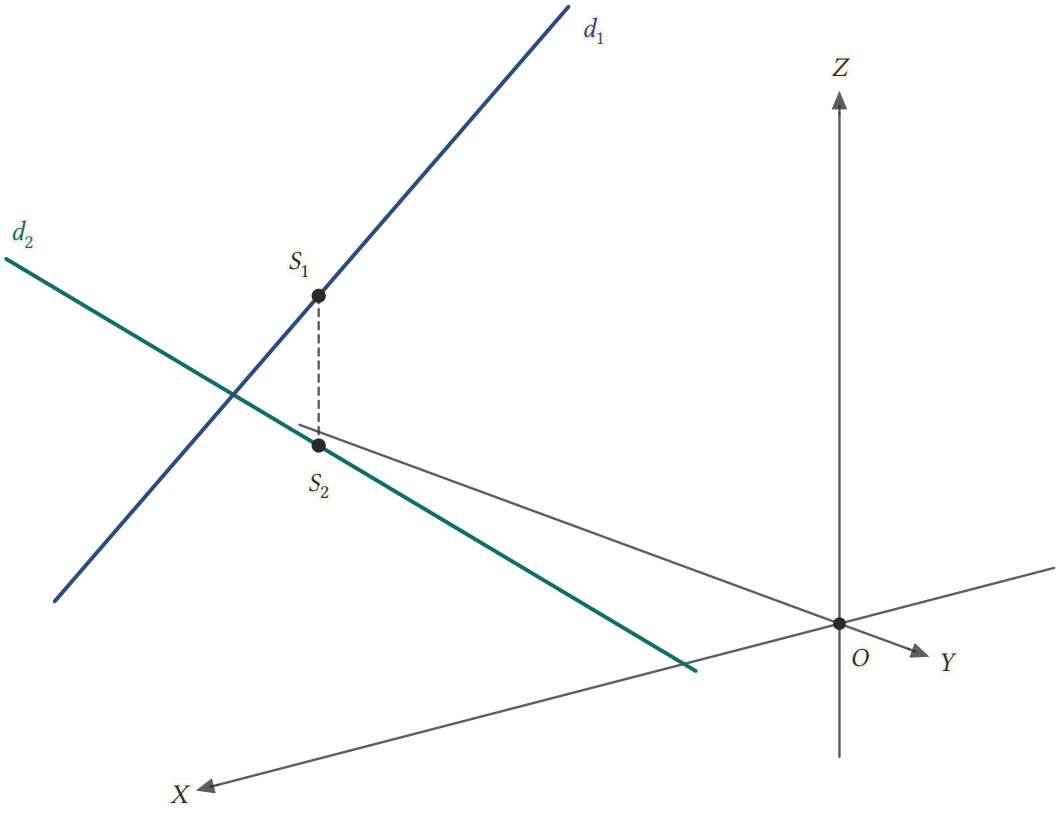
bulunur. Bunu y koordinatlarının eşitliğine yazalım:

$$-3 + 2s = -2 - 2(3 + 7s) = -8 - 14s \quad \Rightarrow \quad 16s = -5 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{5}{16}.$$

Buradan $t = 3 - \frac{35}{16} = \frac{13}{16}$ olur. Bu değerler için z koordinatları

$$1 - 3s = 1 + \frac{15}{16} = \frac{31}{16}, \qquad t = \frac{13}{16}$$

dır ve eşit değildir. x ile y koordinatlarını eşitleyen tek (s, t) ikilisi z koordinatlarını eşitlemediğinden doğruların ortak noktası yoktur. Demek ki d_1 ile d_2 kesişmeyen iki dik doğrudur, yani dik durumlu doğrulardır.
Bulduğumuz parametre değerleri, d_1 üzerindeki $S_1 = \left(\frac{29}{16}, -\frac{29}{8}, \frac{31}{16}\right)$ ile d_2 üzerindeki $S_2 = \left(\frac{29}{16}, -\frac{29}{8}, \frac{13}{16}\right)$ noktalarını verir. Bu iki nokta aynı dikey doğru üzerindedir: yukarıdan bakıldığında doğrular kesişiyormuş gibi görünür, ama d_1, d_2'nin $\frac{18}{16} = \frac{9}{8}$ birim üstünden geçer.



Şekil 10.11: Dik fakat kesişmeyen d_1 ve d_2 doğruları. S_1 ile S_2 aynı dikey doğru üzerindedir; d_1, d_2'nin 9/8 birim üstünden geçer.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Uzayda sık karşılaşılan bir soru, verilen iki doğrunun ikisine birden dik olan doğruyu bulmaktır. Bunun için doğrultmanlara aynı anda dik bir vektör gerekir; vektörel çarpım tam olarak bunu üretir.

Önerme 10.3 (İki doğruya birden dik doğrultman). *v_1 ve v_2 sıfırdan farklı ve paralel olmayan iki vektör, v de sıfırdan farklı bir vektör olsun. Bu durumda*

$$v \perp v_1 \quad \text{ve} \quad v \perp v_2 \Leftrightarrow v \parallel v_1 \times v_2$$

dir. Özellikle doğrultmanları v_1 ve v_2 olan paralel olmayan iki doğrunun ikisine de dik olan her doğrunun doğrultmanı olarak $v_1 \times v_2$ alınabilir.

İspat.
Önce $v_1 \times v_2 \neq 0$ olduğunu görelim. v_1 ile v_2 sıfırdan farklı ve paralel olmadığından lineer bağımsızdır (Sonuç 7.1); bu yüzden Önerme 9.3 gereğince $v_1 \times v_2 \neq 0$ dır.
(⇐) $v \parallel v_1 \times v_2$ ise bir μ için $v = \mu\,(v_1 \times v_2)$ dir. Teorem 9.1 vi) gereğince $v_1 \times v_2$ hem v_1'e hem v_2'ye diktir; iç çarpımın doğrusallığından

$$\langle v, v_1\rangle = \mu\,\langle v_1 \times v_2, v_1\rangle = 0, \qquad \langle v, v_2\rangle = \mu\,\langle v_1 \times v_2, v_2\rangle = 0$$

bulunur. Demek ki $v \perp v_1$ ve $v \perp v_2$ dir.
(⇒) $v \perp v_1$ ve $v \perp v_2$ olsun; yani $\langle v, v_1\rangle = \langle v, v_2\rangle = 0$ dır. Üçlü özdeşliğin (Teorem 9.2) i) şıkkını u yerine v, v yerine v_1, w yerine v_2 yazarak uygulayalım:

$$v \times (v_1 \times v_2) = \langle v, v_2\rangle\, v_1 - \langle v, v_1\rangle\, v_2 = 0 \cdot v_1 - 0 \cdot v_2 = 0.$$

v ile $v_1 \times v_2$ sıfırdan farklı olduğundan, vektörel çarpımlarının sıfır olması bu iki vektörün paralel olması demektir (Önerme 9.3). Yani $v \parallel v_1 \times v_2$ dir.
Son cümle, dik doğruların tanımından (Tanım 10.6) ve doğrultman seçimi önermesinden (Önerme 10.1) çıkar: bir d doğrusu iki doğruya da dikse doğrultmanı v_1'e ve v_2'ye diktir, dolayısıyla $v_1 \times v_2$'ye paraleldir ve $v_1 \times v_2$ de d'nin bir doğrultmanıdır.
■

Yani $d_1 \nparallel d_2$ ise iki doğruya birden dik olan bütün doğrular aynı doğrultudadır. Buna göre bir P_0 noktasından geçen ve d_1 ile d_2'ye dik olan doğru tektir. $d_1 \parallel d_2$ olduğunda ise $v_1 \times v_2 = 0$ dır ve bu yol işe yaramaz: bu durumda v_1'e dik her vektör v_2'ye de diktir ve iki doğruya birden dik sonsuz çoklukta doğrultu vardır.

Örnek 10.10 (İki doğruya dik olan doğru). Doğrultmanları $v_1 = (3, 2, -4)$ ve $v_2 = (2, -3, 2)$ olan doğrulara dik olan ve $P_0 = (3, -1, 4)$ noktasından geçen doğrunun vektörel, kartezyen ve parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Aranan doğruya d, doğrultmanına v diyelim. v_1 ile v_2 paralel değildir, çünkü ilk bileşenlerin oranı $\frac{3}{2}$, ikinci bileşenlerin oranı ise $-\frac{2}{3}$ olur. d iki doğruya da dik olacağından $v \perp v_1$ ve $v \perp v_2$ dir. Önerme 10.3 gereğince $v = v_1 \times v_2$ alınabilir:

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \big(\, 2\cdot 2 - (-4)(-3) \,\big)\, e_1 + \big(\, (-4)\cdot 2 - 3\cdot 2 \,\big)\, e_2 \\ &\quad + \big(\, 3\cdot(-3) - 2\cdot 2 \,\big)\, e_3 \\ &= (4 - 12)\, e_1 + (-8 - 6)\, e_2 + (-9 - 4)\, e_3 \\ &= -8e_1 - 14e_2 - 13e_3 = (-8, -14, -13). \end{aligned}$$

Kontrol edelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\langle v, v_1 \rangle = -24 - 28 + 52 = 0,$$
$$\langle v, v_2 \rangle = -16 + 42 - 26 = 0.$$

$u_0 = (3, -1, 4)$ ve $v = (-8, -14, -13)$ olduğundan, d üzerindeki bir $P = (x, y, z)$ noktasının konum vektörü $u = (x, y, z)$ olmak üzere, vektörel denklem

$$(x, y, z) = (3, -1, 4) + \lambda\,(-8, -14, -13), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

dir. Bileşenleri eşitleyerek parametrik denklemler

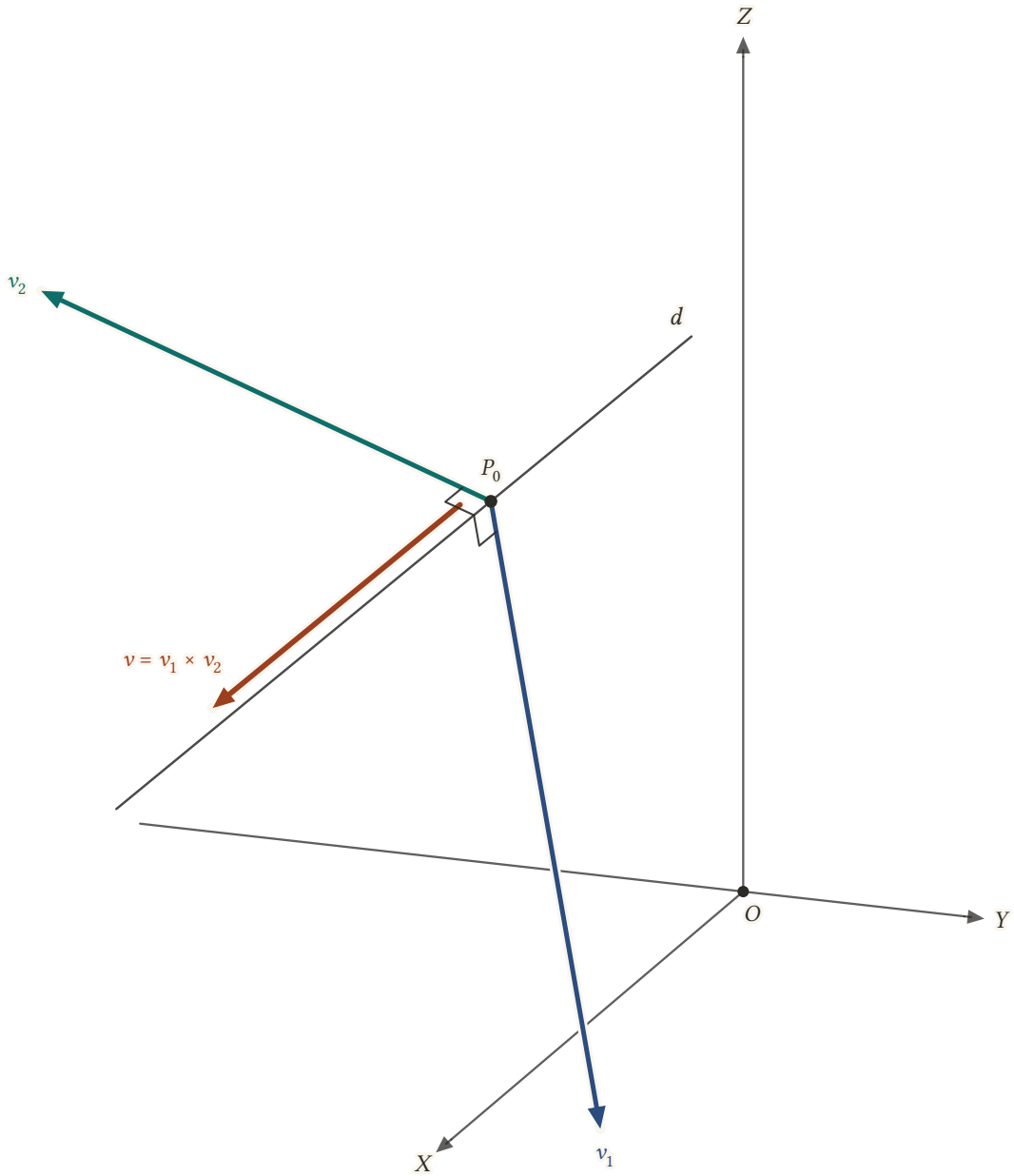
$$\begin{cases} x = 3 - 8\lambda \\ y = -1 - 14\lambda \\ z = 4 - 13\lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ve her denklemden λ çekilerek kartezyen denklemler

$$\frac{x - 3}{-8} = \frac{y + 1}{-14} = \frac{z - 4}{-13}$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.12: $P_0 = (3, -1, 4)$ noktasından çizilen v_1, v_2 ve bunların vektörel çarpımı $v = (-8, -14, -13)$; v kısaltılarak, yalnız yönü gösterilecek biçimde çizildi. v her ikisine de diktir ve aranan d doğrusunun doğrultmanıdır.

■

10.6 Koordinat eksenlerine göre özel doğrular

Doğrultmanın bileşenlerinden biri ya da ikisi sıfırsa doğrunun koordinat eksenlerine göre durumu doğrudan okunabilir. Koordinat eksenlerinin doğrultmanları eksenlerin birim vektörleridir (Tanım 7.17): X-ekseni O'dan geçer ve doğrultmanı $e_1 = (1, 0, 0)$ dır; Y- ve Z-ekseninin doğrultmanları da sırasıyla $e_2 = (0, 1, 0)$ ve $e_3 = (0, 0, 1)$ dir. Bir doğrultmanın bu vektörlerle iç çarpımı, sırasıyla, ilk, ikinci ve üçüncü bileşenidir:

$$\langle v, e_1 \rangle = a, \qquad \langle v, e_2 \rangle = b, \qquad \langle v, e_3 \rangle = c.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

$v = (a, b, c) \neq 0$ olduğundan üç bileşen birden sıfır olamaz. Üç bileşen de sıfırdan farklıysa doğru hiçbir eksene dik ya da paralel değildir. Geriye bir ya da iki bileşenin sıfır olduğu durumlar kalır.

Önerme 10.4 (Doğrultmanın bir bileşeni sıfırsa). *d, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $v = (a, b, c)$ olan doğru olsun.*
i) $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ ise d, X-eksenine diktir ve YZ-düzlemine paraleldir; d'nin bütün noktalarında $x = x_0$ dır.
ii) $a \neq 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ ise d, Y-eksenine diktir ve XZ-düzlemine paraleldir; d'nin bütün noktalarında $y = y_0$ dır.
iii) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$ ise d, Z-eksenine diktir ve XY-düzlemine paraleldir; d'nin bütün noktalarında $z = z_0$ dır.

İspat.
i) *$a = 0$ olduğundan $\langle v, e_1 \rangle = a = 0$ dır, yani $v \perp e_1$ dir (Önerme 8.2). e_1, X-ekseninin doğrultmanı olduğundan Tanım 10.6 gereğince d, X-eksenine diktir.*
Parametrik denklemlerin ilki $x = x_0 + \lambda \cdot 0 = x_0$ olur; yani d'nin her noktasının apsisi x_0 dır. Buna göre d, apsisi x_0 olan noktalardan oluşan $x = x_0$ düzleminin içinde yatar. $x = 0$ düzlemi YZ-düzlemidir (Örnek 6.3) ve $x = x_0$ düzlemi, YZ-düzleminin X-ekseni boyunca x_0 kadar kaydırılmış hâlidir; bu yüzden YZ-düzlemine paraleldir. Bu anlamda d'ye YZ-düzlemine paralel deriz. ($x_0 = 0$ ise d, YZ-düzleminin kendi içindedir.) Doğrunun denklemleri

$$x = x_0, \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

biçimindedir.
ii) *$b = 0$ olduğundan $\langle v, e_2 \rangle = 0$, yani $v \perp e_2$ dir; e_2, Y-ekseninin doğrultmanı olduğundan d, Y-eksenine diktir. İkinci parametrik denklem $y = y_0$ olur; d, XZ-düzlemine paralel olan $y = y_0$ düzleminin içinde yatar. Denklemler $y = y_0$, $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{z - z_0}{c}$ dir.*
iii) *$c = 0$ olduğundan $\langle v, e_3 \rangle = 0$, yani $v \perp e_3$ tür; e_3, Z-ekseninin doğrultmanı olduğundan d, Z-eksenine diktir. Üçüncü parametrik denklem $z = z_0$ olur; d, XY-düzlemine paralel olan $z = z_0$ düzleminin içinde yatar. Denklemler $z = z_0$, $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$ dir.*
■

Doğrultmanının bir bileşeni sıfır olan doğru örneğindeki (Örnek 10.6) doğru, iii) durumuna bir örnektir: doğrultmanı $(-3, 1, 0)$ dır ve doğru $z = 3$ düzleminde yatar.

Örnek 10.11 (X-eksenine dik bir doğru). $P_0 = (3, 1, 2)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $v = (0, 2, -1)$ olan d doğrusunun denklemlerini yazınız ve doğrunun koordinat eksenlerine göre durumunu belirtiniz.

Çözüm.
Parametrik denklemler

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

dir. Doğrultmanın ilk bileşeni sıfır, öteki iki bileşeni sıfırdan farklıdır. Birinci denklem x'in sabit kaldığını söyler; öteki ikisinden λ çekilerek denklemler

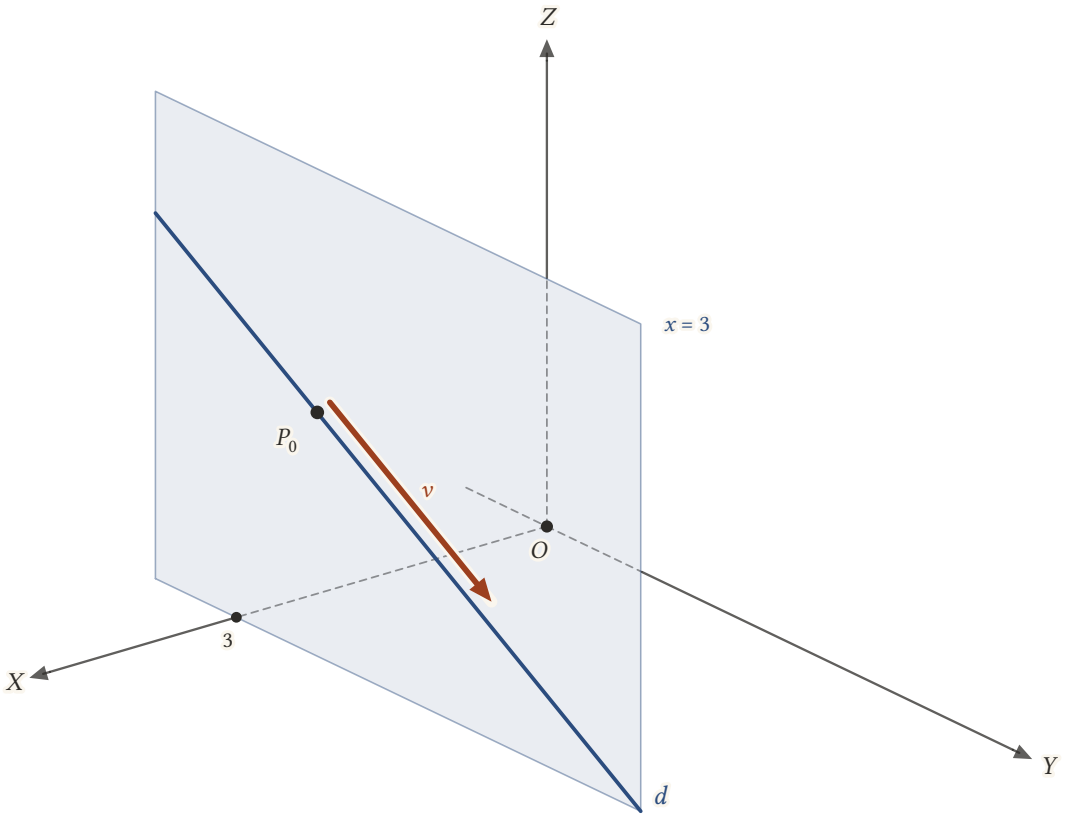
$$x = 3, \qquad \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{-1}$$

biçiminde yazılır. Önerme 10.4 i) gereğince d, X-eksenine diktir: gerçekten

$$\langle v, e_1 \rangle = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 = 0$$

dır. d, YZ-düzlemine paralel olan $x = 3$ düzleminin içinde yatar. d ne Y-eksenine ne de Z-eksenine diktir, çünkü $\langle v, e_2 \rangle = 2 \neq 0$ ve $\langle v, e_3 \rangle = -1 \neq 0$ dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.13: Doğrultmanı $v = (0, 2, -1)$ olan d doğrusu $x = 3$ düzleminde yatar. Bu düzlem YZ düzlemine paraleldir ve X eksenini 3'te dik keser.

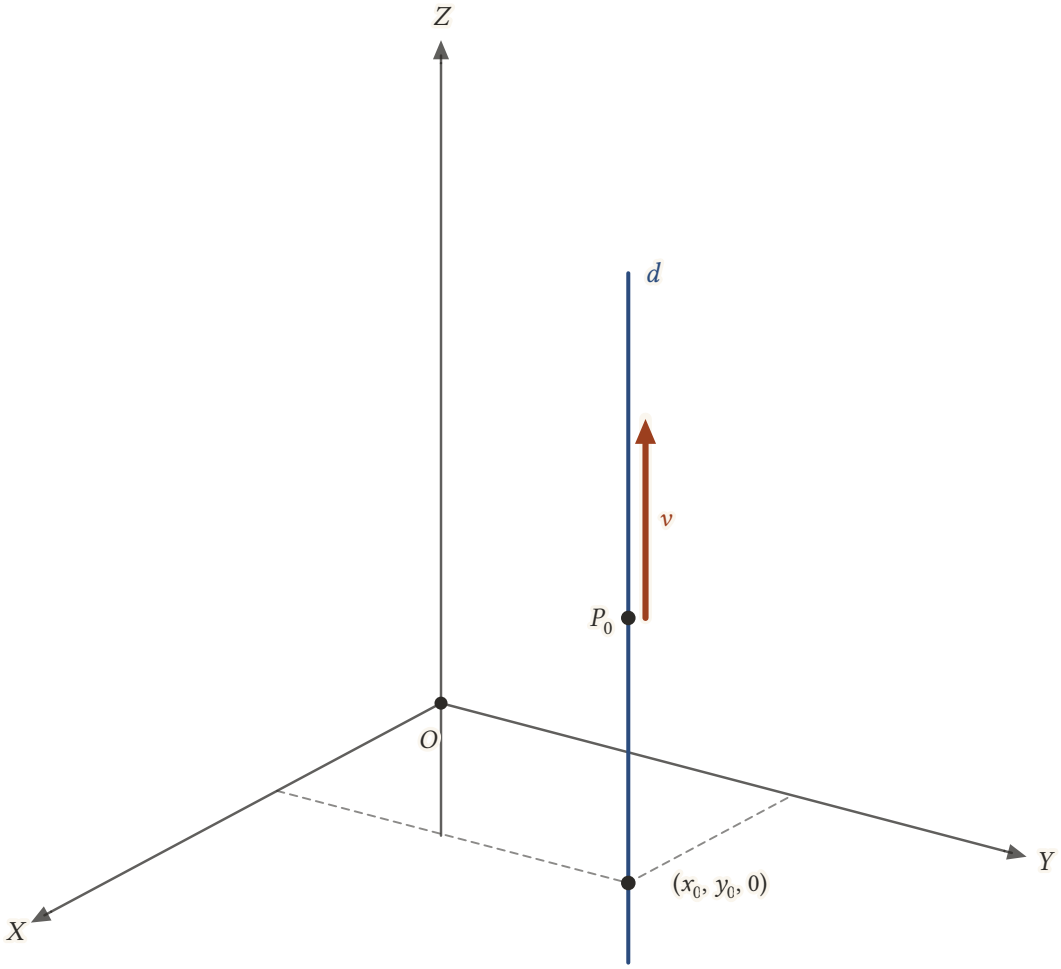
■

İki bileşen sıfırsa doğrultman bir eksen birim vektörünün katıdır ve doğru o eksene paralel olur.

Önerme 10.5 (Doğrultmanın iki bileşeni sıfırsa). *d, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $v = (a, b, c)$ olan doğru olsun.*
i) $a = b = 0$, $c \neq 0$ ise d, Z-eksenine paraleldir; d'nin bütün noktalarında $x = x_0$ ve $y = y_0$ dır.
ii) $a = c = 0$, $b \neq 0$ ise d, Y-eksenine paraleldir; d'nin bütün noktalarında $x = x_0$ ve $z = z_0$ dır.
iii) $b = c = 0$, $a \neq 0$ ise d, X-eksenine paraleldir; d'nin bütün noktalarında $y = y_0$ ve $z = z_0$ dır.

İspat.
i) *$v = (0, 0, c) = c\,e_3$ ve $c \neq 0$ olduğundan $v \parallel e_3$ tür (Tanım 7.15). e_3, Z-ekseninin doğrultmanı olduğundan Tanım 10.5 gereğince d, Z-eksenine paraleldir. Aynı sonuca diklik yoluyla da varılır: $\langle v, e_1 \rangle = 0$ ve $\langle v, e_2 \rangle = 0$ olduğundan d hem X-eksenine hem Y-eksenine diktir. e_1 ile e_2 paralel olmadığından Önerme 10.3 gereğince $v \parallel e_1 \times e_2$ dir; standart baz vektörleri için $e_1 \times e_2 = e_3$ olduğundan (Örnek 9.1) yine $v \parallel e_3$ buluruz.*
Parametrik denklemler $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0 + \lambda c$ olur. $c \neq 0$ olduğundan λ bütün gerçel sayıları taradıkça z de bütün gerçel sayıları tarar. Demek ki d, apsisi x_0 ve ordinatı y_0 olan bütün noktalardan oluşur; bu, XY-düzlemindeki $(x_0, y_0, 0)$ noktasından dikey olarak geçen doğrudur (bkz. Örnek 6.5).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 10.14: Doğrultmanı Z *eksenine paralel olan* d *doğrusu,* XY *düzlemindeki* (x_o, y_o, *0) noktasından dikey olarak geçer; üzerinde* $x = x_o$ *ve* $y = y_o$ *sabittir.*

ii) $v = (0, b, 0) = b\,e_2$ *ve* $b \neq 0$ *olduğundan* $v \parallel e_2$*, dolayısıyla* d*,* Y*-eksenine paraleldir. Ayrıca* $\langle v, e_1\rangle = \langle v, e_3\rangle = 0$ *olduğundan* d*,* X*- ve* Z*-eksenlerine diktir. Parametrik denklemler* $x = x_0$*,* $y = y_0 + \lambda b$*,* $z = z_0$ *olur.*
iii) $v = (a, 0, 0) = a\,e_1$ *ve* $a \neq 0$ *olduğundan* $v \parallel e_1$*, dolayısıyla* d*,* X*-eksenine paraleldir. Ayrıca* $\langle v, e_2\rangle = \langle v, e_3\rangle = 0$ *olduğundan* d*,* Y*- ve* Z*-eksenlerine diktir. Parametrik denklemler* $x = x_0 + \lambda a$*,* $y = y_0$*,* $z = z_0$ *olur.*
■

Yani bir eksene paralel olan doğru, öteki iki eksene diktir ve üzerinde iki koordinat sabit kalır. Bir bileşeni sıfır olan doğrultmanla bir koordinat, iki bileşeni sıfır olan doğrultmanla iki koordinat sabittir.

10.7 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda bu bölümde gördüğümüz denklem biçimlerini, paralellik ve diklik koşullarını kullanacağız.

Alıştırma 10.1 (Bir noktası ve doğrultmanı verilen doğrunun denklemleri). $P_0 = (2, 3, -1)$ noktasından geçen ve $v = (1, -3, 5)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Doğruya d, üzerindeki rastgele bir noktaya $P=(x,y,z)$ diyelim. $v\neq 0$ ve v, d'ye paralel olduğundan d'nin bir doğrultmanıdır. $u=(x,y,z)$ ve $u_0=(2,3,-1)$ olmak üzere vektörel denklem $u=u_0+\lambda v$, yani

$$(x,y,z)=(2,3,-1)+\lambda\,(1,-3,5),\qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

dir. Sağ taraf $(2+\lambda,\,3-3\lambda,\,-1+5\lambda)$ olduğundan parametrik denklemler

$$\begin{aligned}\{x&=2+\lambda\\ y&=3-3\lambda\\ z&=-1+5\lambda\qquad \lambda\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

olur. Doğrultmanın üç bileşeni de sıfırdan farklı olduğundan her denklemden λ çekilerek kartezyen denklemler

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z+1}{5}(=\lambda)$$

bulunur.
■

Alıştırma 10.2 (Bir vektöre paralel doğru için iki bilinmeyen). m'nin ve n'nin hangi değerleri için

$$d:\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+2}{-2}$$

doğrusu $w=(9,m,2n)$ vektörüne paralel olur?

Çözüm.
Paydalardan d'nin doğrultmanı $v=(3,1,-2)$ okunur. Önerme 10.1 i) gereğince

$$d\parallel w\Leftrightarrow v\parallel w\Leftrightarrow \text{bir}\ \ \mu\neq 0\ \ \text{için}\ \ w=\mu v$$

dir. $w=\mu v$ eşitliğini bileşen bileşen yazalım:

$$9=3\mu,\qquad m=\mu,\qquad 2n=-2\mu.$$

Birinci denklemden $\mu=3$ bulunur. Buradan $m=3$ ve $2n=-6$, yani $n=-3$ elde edilir. Aynı sonuç oranlarla

$$\frac{3}{9}=\frac{1}{m}=\frac{-2}{2n}$$

eşitliklerinden de okunur: $\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$ ise $m=3$, $\frac{-2}{2n}=\frac{1}{3}$ ise $2n=-6$ dır. Buna göre $m=3$ ve $n=-3$ tür; gerçekten bu değerlerle $w=(9,3,-6)=3v$ olur.
■

Alıştırma 10.3 (İki doğruya dik ve bir noktadan geçen doğru). $P_0=(2,-1,3)$ noktasından geçen ve

$$d_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y-\frac{155}{3}}{2}=\frac{z+2}{-1}\qquad\text{ile}\qquad d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-\frac{36}{19}}{1}=\frac{z-3}{4}$$

doğrularına dik olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Aranan doğruya d diyelim. Diklik yalnız doğrultmanlara bağlı olduğundan d_1 ve d_2'nin hangi noktalardan geçtiği bu soruda önemli değildir; paylardaki $\frac{155}{3}$ ve $\frac{36}{19}$ sayıları hesaba girmez. Paydalardan doğrultmanlar okunur:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$v_1 = (3, 2, -1), \qquad v_2 = (2, 1, 4).$$

İlk bileşenlerin oranı $\frac{3}{2}$, ikinci bileşenlerin oranı $\frac{2}{1} = 2$ olduğundan $v_1 \nparallel v_2$ dir. Önerme 10.3 gereğince d'nin doğrultmanı olarak $v = v_1 \times v_2$ alınabilir:

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \big(\, 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 \, \big) \, e_1 + \big(\, (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 4 \, \big) \, e_2 \\ &\quad + (3 \cdot 1 - 2 \cdot 2) \, e_3 \\ &= (8 + 1) \, e_1 + (-2 - 12) \, e_2 + (3 - 4) \, e_3 \\ &= (9, -14, -1). \end{aligned}$$

Kontrol: $\langle v, v_1 \rangle = 27 - 28 + 1 = 0$ ve $\langle v, v_2 \rangle = 18 - 14 - 4 = 0$ dır.
$u_0 = (2, -1, 3)$ olduğundan vektörel denklem

$$(x, y, z) = (2, -1, 3) + \lambda \, (9, -14, -1), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

parametrik denklemler

$$\begin{aligned} \{x &= 2 + 9\lambda \\ y &= -1 - 14\lambda \\ z &= 3 - \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ve kartezyen denklemler

$$\frac{x - 2}{9} = \frac{y + 1}{-14} = \frac{z - 3}{-1}$$

dir.
■

Alıştırma 10.4 (İki noktadan geçen doğrunun kartezyen denklemleri). $P_0 = (1, 2, -4)$ ile $P_1 = (3, 4, -1)$ noktalarından geçen doğrunun kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Önerme 10.2 gereğince doğrultman olarak

$$v = \overrightarrow{P_0 P_1} = \big(\, 3 - 1, 4 - 2, -1 - (-4) \, \big) = (2, 2, 3)$$

alınabilir. Üç bileşen de sıfırdan farklı olduğundan kartezyen denklemler

$$\frac{x - 1}{3 - 1} = \frac{y - 2}{4 - 2} = \frac{z - (-4)}{-1 - (-4)}$$

yani

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z + 4}{3}$$

olur. Kontrol: P_1 için üç kesir $\frac{2}{2} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = 1$ verir, yani P_1 doğrunun $\lambda = 1$ noktasıdır.
■

Alıştırma 10.5 (Üç noktanın aynı doğru üzerinde olması). $A = (1, 2, -4)$, $B = (3, 4, -1)$ ve $C = (7, 8, 5)$ noktalarının aynı doğru üzerinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

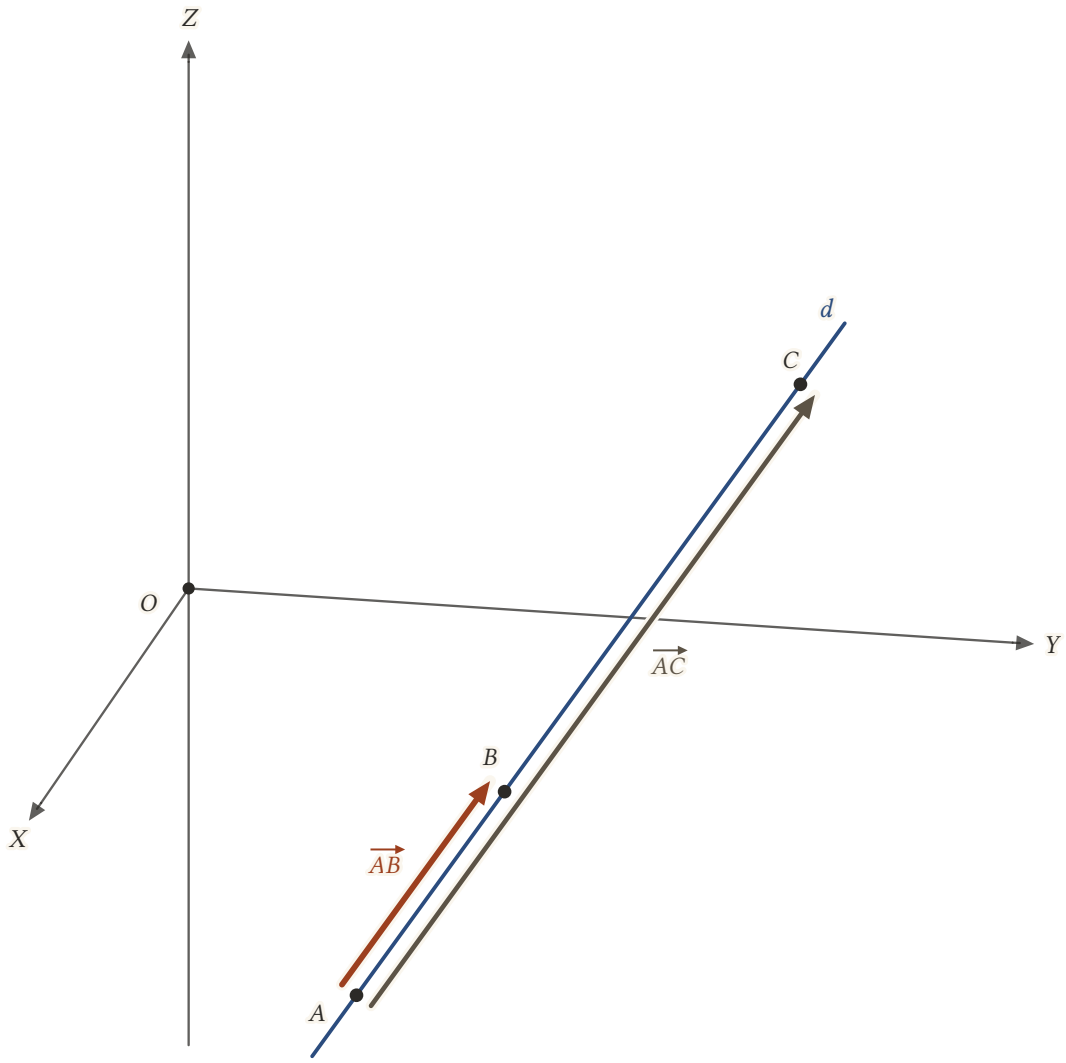
A ile B'den geçen doğruya d diyelim. Bu noktalar, bir önceki alıştırmadaki (Alıştırma 10.4) P_0 ile P_1 noktalarıdır; orada bu doğrunun doğrultmanını $\overrightarrow{AB} = (2,2,3)$, parametrik denklemlerini de

$$x = 1 + 2\lambda, \qquad y = 2 + 2\lambda, \qquad z = -4 + 3\lambda$$

olarak bulduk. $C = (7,8,5)$ noktasının koordinatlarını yerine yazalım:

$$\begin{aligned} 7 &= 1 + 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3, \\ 8 &= 2 + 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3, \\ 5 &= -4 + 3\lambda \Rightarrow \quad \lambda = 3. \end{aligned}$$

Üç denklem de aynı $\lambda = 3$ değerini verdiğinden Teorem 10.1 gereğince $C \in d$ dir. Demek ki A, B, C aynı doğru üzerindedir.
Aynı sonucu vektörlerle de görebiliriz: $\overrightarrow{AC} = (6,6,9) = 3\,(2,2,3) = 3\,\overrightarrow{AB}$ olduğundan $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB}$ dir; iki vektör de A'dan başladığından C, A ile B'den geçen doğru üzerindedir.



Şekil 10.15: A, B, C aynı d doğrusu üzerindedir: AC vektörü AB vektörünün 3 katıdır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 10.6 (Koordinat düzlemleriyle kesim noktaları). $P_0 = (2, 3, -1)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $v = (1, -3, 5)$ olan doğrunun üç koordinat düzlemini kestiği noktaları bulunuz.

Çözüm.
Bu doğrunun parametrik denklemlerini ilk alıştırmada (Alıştırma 10.1)

$$x = 2 + \lambda, \qquad y = 3 - 3\lambda, \qquad z = -1 + 5\lambda$$

olarak bulduk. Her koordinat düzleminde ilgili koordinat sıfırdır.
XY-düzlemi ($z = 0$). $-1 + 5\lambda = 0$ ise $\lambda = \frac{1}{5}$ dir. Buradan

$$x = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}, \qquad y = 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

bulunur. Kesim noktası $\left(\frac{11}{5}, \frac{12}{5}, 0 \right)$ dır.
XZ-düzlemi ($y = 0$). $3 - 3\lambda = 0$ ise $\lambda = 1$ dir. Buradan $x = 3, z = 4$ bulunur. Kesim noktası $(3, 0, 4)$ tür.
YZ-düzlemi ($x = 0$). $2 + \lambda = 0$ ise $\lambda = -2$ dir. Buradan $y = 3 + 6 = 9$, $z = -1 - 10 = -11$ bulunur. Kesim noktası $(0, 9, -11)$ dir.
Doğrultmanın üç bileşeni de sıfırdan farklı olduğundan doğru her koordinat düzlemini tam bir noktada keser.
■

Alıştırma 10.7 (Diklik koşulundan bilinmeyen bulmak).

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{k} = \frac{z}{3} \qquad \text{ve} \qquad d_2 : \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{-2}$$

doğrularının dik olması için k ne olmalıdır?

Çözüm.
Paydalardan doğrultmanlar okunur: $v_1 = (2, k, 3)$ ve $v_2 = (4, -1, -2)$. Tanım 10.6 gereğince $d_1 \perp d_2$ olması $v_1 \perp v_2$, yani $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ olmasıdır (Önerme 8.2):

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 2 \cdot 4 + k \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = 8 - k - 6 = 2 - k.$$

$2 - k = 0$ ise $k = 2$ dir. Bu değer sıfırdan farklı olduğundan d_1'in kartezyen denklemlerindeki payda da anlamlıdır. Buna göre doğrular yalnız $k = 2$ için diktir.
■

Artık uzayda bir doğruyu bir noktası ve bir doğrultmanıyla, ya da iki noktasıyla yazabiliyor; iki doğrunun paralel ya da dik olup olmadığını doğrultmanlarından okuyabiliyoruz. Bir sonraki bölümde iki doğru arasındaki açıyı, bir noktanın bir doğruya uzaklığını ve iki doğrunun birbirine göre durumlarını inceleyeceğiz: Uzayda İki Doğru.

 CC BY-NC-SA 4.0

11. Uzayda İki Doğru

Uzayda Doğru Denklemleri bölümünde bir doğruyu bir noktası ve bir doğrultman vektörüyle yazmayı, iki doğrunun ne zaman paralel ya da dik olduğunu gördük. Bu bölümde iki doğruyu birlikte ele alıp daha ince soruları soracağız: iki doğru arasındaki açı nedir, bir nokta bir doğrudan ne kadar uzaktadır, iki doğru kesişir mi?

Düzlemde iki doğru ya kesişir ya da paraleldir. Uzayda ise üçüncü bir olasılık ortaya çıkar: iki doğru ne kesişir ne de paraleldir. Bir odada tavanın bir kenarı ile tabanın karşı duvardaki ona dik kenarı buna örnektir. Böyle **aykırı** doğrular arasında en kısa uzaklığı veren tek bir doğru parçası vardır. Bu parçayı ve uç noktalarını bulmak bölümün son ve en önemli konusudur. Bütün hesaplarda İç Çarpım ve Vektörel ve Karma Çarpım bölümlerinin araçlarını kullanacağız.

Bölüm boyunca d_1 doğrusu $P_1(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü v_1 olan doğruyu, d_2 doğrusu da $P_2(x_2, y_2, z_2)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü v_2 olan doğruyu gösterecek. Doğrultman vektörleri sıfırdan farklıdır.

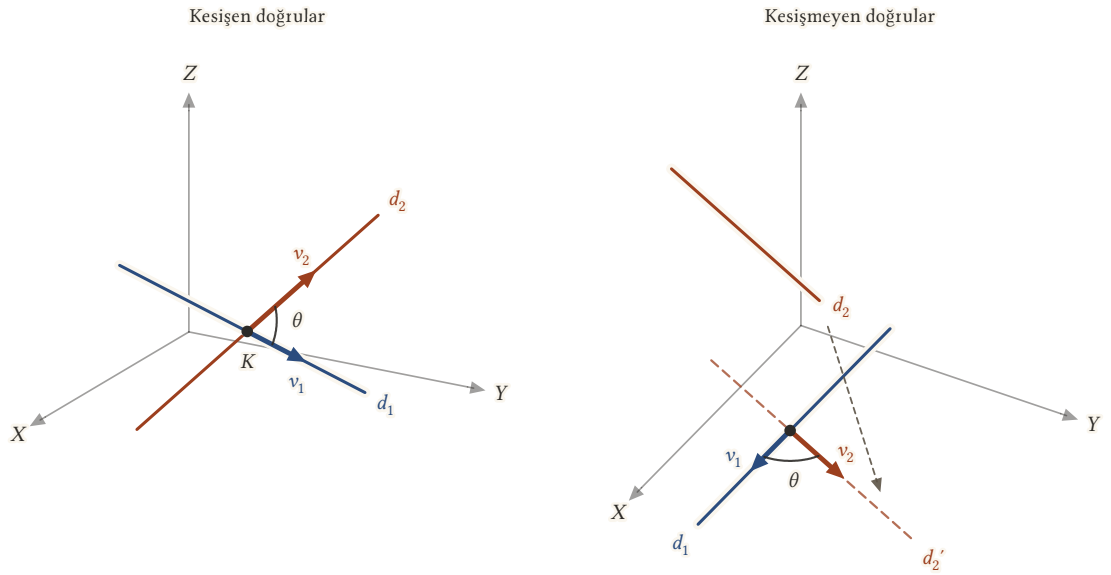
11.1 İki doğru arasındaki açı

Kesişen iki doğru, kesişim noktalarında dört açı oluşturur. Uzayda ise doğrular kesişmeyebilir de. Bu yüzden açıyı doğruların kendileri yerine yönlerini veren vektörlerle tanımlarız.

Tanım 11.1 (İki doğru arasındaki açı). d_1 ve d_2 doğrularının doğrultman vektörleri sırasıyla v_1 ve v_2 olsun. v_1 ile v_2 vektörleri arasındaki

$$\theta = \measuredangle(v_1, v_2)$$

açısına d_1 ile d_2 doğruları **arasındaki açı** denir. Doğrultman vektörleri değiştirilince bu açı θ ya da $\pi - \theta$ olur; iki doğru arasındaki açı bu bütünler çiftiyle belirlidir.



Şekil 11.1: Solda d_1 ile d_2 K noktasında kesişir; aralarındaki açı, K'dan çizilen doğrultman vektörleri v_1, v_2 arasındaki θ açısıdır. Sağda doğrular kesişmez: d_2 kendine paralel kaydırılarak d_1'i kesen d_2' konumuna getirilir; doğrultman vektörü, dolayısıyla açı değişmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani iki doğru arasındaki açıyı ölçmek için doğrultman vektörlerini aynı noktadan çizip aralarındaki açıya bakarız. Doğrular kesişiyorsa bu, kesişim noktasında oluşan açılardan biridir. Kesişmiyorlarsa d_2'yi kendine paralel olarak kaydırıp d_1'i kesecek konuma getirdiğimizi düşünebiliriz: kaydırma doğrultman vektörünü değiştirmez, dolayısıyla açıyı da değiştirmez.

Teorem 11.1 (İki doğru arasındaki açının kosinüsü). *d_1 ile d_2 arasındaki açı θ ise*

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\| v_1 \| \, \| v_2 \|}$$

dir. Özellikle d_1 ile d_2'nin dik olması için gerek ve yeter koşul $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ olmasıdır.

> ***İspat.***
> *Tanım 11.1 gereği $\theta = \measuredangle(v_1, v_2)$ dir. v_1 ve v_2 sıfırdan farklı olduğundan Teorem 8.2 bu iki vektör için uygulanabilir ve formülü verir. İki doğrunun dik olması, Uzayda Doğru Denklemleri bölümündeki tanım gereği doğrultman vektörlerinin dik olması demektir. $\cos\theta = 0$ ancak $\theta = \frac{\pi}{2}$ iken sağlandığından bu da $\langle v_1, v_2\rangle = 0$ ile denktir.*
> ■

Bir doğrunun doğrultman vektörü tek değildir: v_1 yerine $-v_1$ de alınabilir. Bu değişiklik $\langle v_1, v_2\rangle$'nin işaretini değiştirir, bu yüzden θ yerine $\pi - \theta$ elde edilir. Kesişen iki doğrunun oluşturduğu açılar da zaten θ ve $\pi - \theta$ çiftleridir. Hesapta hangi doğrultman vektörleri kullanıldıysa açı onlara göre söylenir. Dar açı istenirse

$$\cos\theta = \frac{|\ \langle v_1, v_2\rangle\ |}{\| v_1 \| \, \| v_2 \|}$$

alınır.

Örnek 11.1 (Dik kesişen iki doğru).

$$d_1 : \frac{x-2}{3} = y + 1 = \frac{z-3}{-3}$$

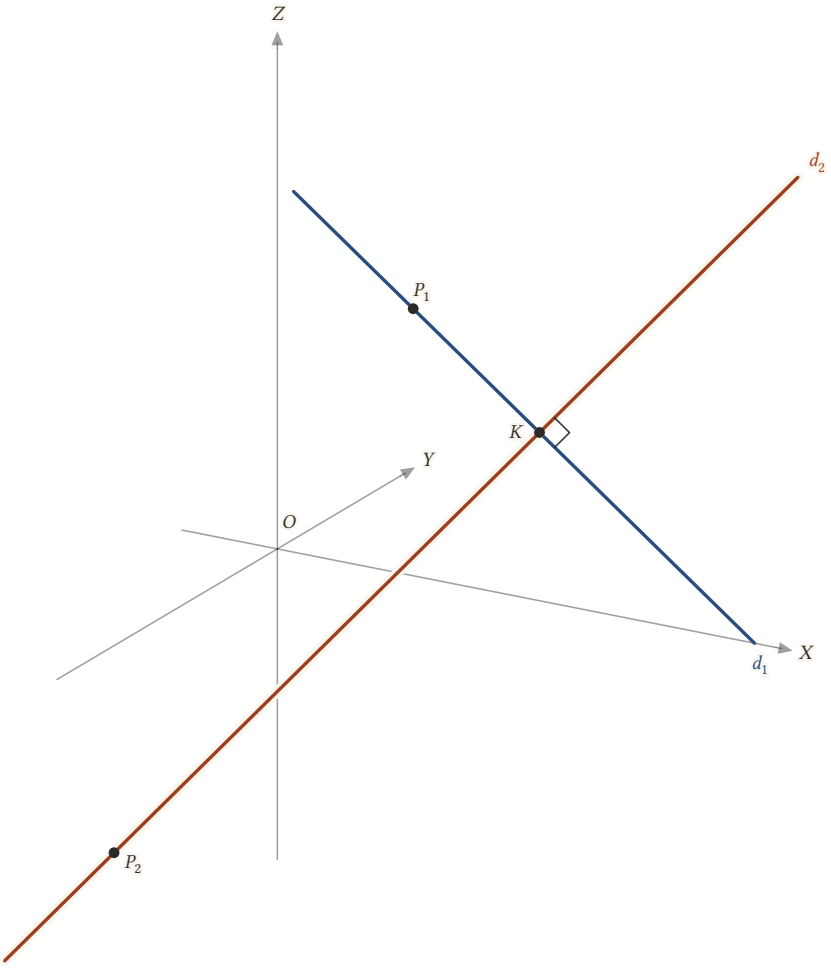
ile

$$d_2 : \frac{x}{4} = \frac{y + \frac{80}{27}}{3} = \frac{z+2}{5}$$

doğruları arasındaki açıyı bulalım.

> **Çözüm.**
> Kartezyen denklemlerde paydalar doğrultman vektörünü verir. d_1'in ikinci oranında payda yazılmamıştır, yani paydası 1'dir. Buna göre
>
> $$v_1 = (3, 1, -3), \qquad v_2 = (4, 3, 5)$$
>
> dir. İç çarpım
>
> $$\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle &= 3\cdot 4 + 1\cdot 3 + (-3)\cdot 5 \\ &= 12 + 3 - 15 = 0\end{aligned}$$
>
> olur. Teorem 11.1'ten $\cos\theta = 0$, dolayısıyla
>
> $$\theta = \frac{\pi}{2}$$
>
> bulunur. İki doğru birbirine diktir. Açıyı bulmak için doğruların üzerindeki noktalara hiç gerek olmadığına dikkat edin. Bu doğrular ayrıca $\left(\frac{28}{9}, -\frac{17}{27}, \frac{17}{9}\right)$ noktasında kesişir; bunu bir sonraki kesimin yöntemiyle kolayca doğrulayabilirsiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.2: d_1 ile d_2 doğruları $K(28/9, -17/27, 17/9)$ noktasında dik kesişir: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, $\theta = \pi/2$.

■

Örnek 11.2 (Açının doğrultman vektörüne bağlılığı). Parametrik denklemleri

$$d_1 : x = 1 + \lambda, y = 2, z = \lambda$$

ve

$$d_2 : x = -\lambda, y = 1 + \lambda, z = 3$$

olan doğrular arasındaki açıyı bulalım ve dar açıyı belirleyelim.

Çözüm.
Parametrenin katsayıları doğrultman vektörlerini verir:

$$v_1 = (1, 0, 1), \qquad v_2 = (-1, 1, 0).$$

Gerekli büyüklükler

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -1, \\ \| v_1 \| &= \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}, \\ \| v_2 \| &= \sqrt{1 + 1 + 0} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dir. Teorem 11.1'ten

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{2\pi}{3}$$

bulunur. Bu açı geniştir. v_2 yerine $-v_2 = (1,-1,0)$ alsaydık iç çarpım 1 olur ve $\cos\theta = \frac{1}{2}$, yani $\theta = \frac{\pi}{3}$ elde ederdik. İki doğru arasındaki dar açı $\frac{\pi}{3}$'tür; $\frac{2\pi}{3}$ ise onun bütünleridir.
■

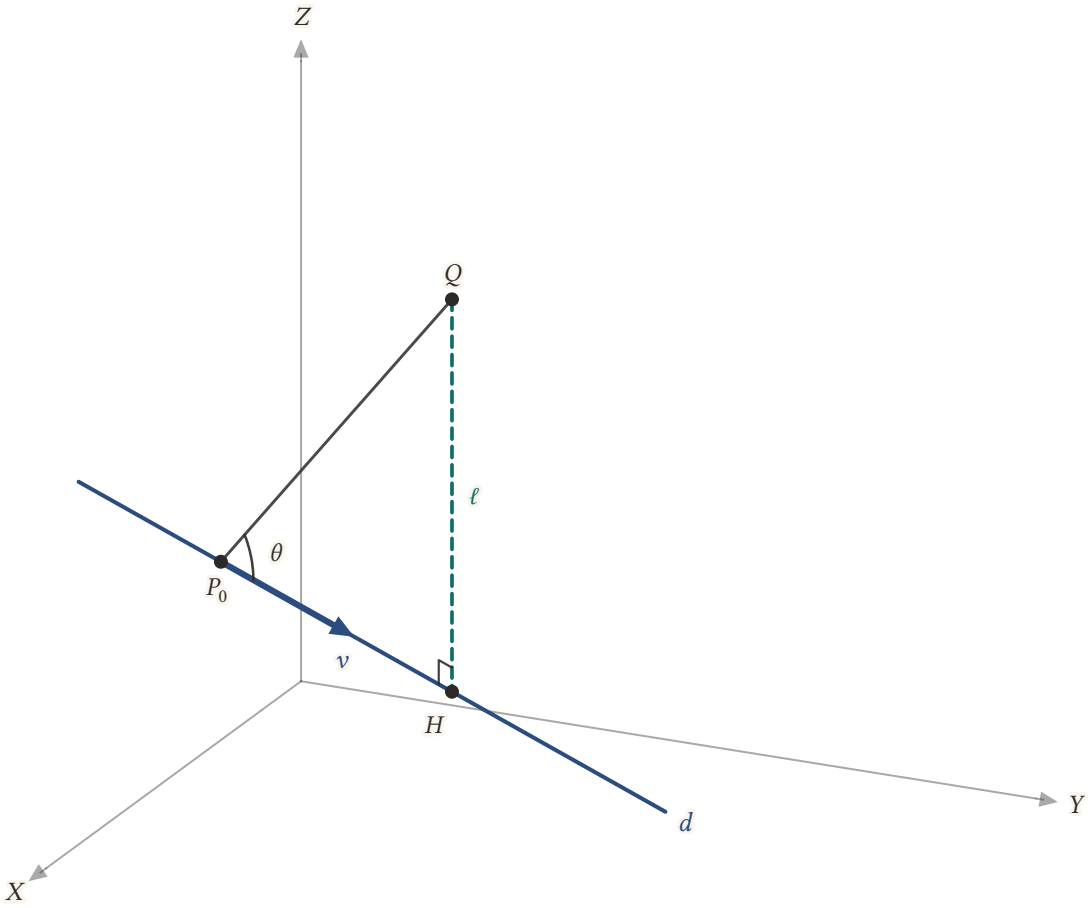
11.2 Bir noktanın bir doğruya uzaklığı

Düzlemde bir noktanın bir doğruya uzaklığını Düzlemde Doğru Denklemleri bölümünde doğrunun normal denklemiyle bulmuştuk. Uzayda bir doğrunun tek bir normal doğrultusu yoktur. Bu yüzden aynı soruyu vektörel çarpımla çözeceğiz.

Tanım 11.2 (Bir noktanın bir doğruya uzaklığı). d bir doğru, Q bir nokta olsun. d üzerinde, $\overrightarrow{HQ}$ vektörü d'nin doğrultman vektörüne dik olacak biçimde alınan H noktasına Q'dan d'ye inilen **dikmenin ayağı** denir. $Q \in d$ ise $H = Q$ alınır.

$$\ell = |\,QH\,|$$

sayısına Q noktasının d doğrusuna **uzaklığı** denir.



Şekil 11.3: Q noktasından d doğrusuna inilen dikme QH; uzunluğu $\ell = |QH|$, Q'nun d'ye uzaklığıdır. θ, d'nin doğrultman vektörü v ile P_0Q arasındaki açıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani ℓ, Q'dan d'ye çizilebilecek en kısa doğru parçasının uzunluğudur. Gerçekten X, d üzerinde H'den farklı bir nokta ise QHX üçgeni H köşesinde dik açılıdır ve Pisagor bağıntısından

$$| QX |^2 = | QH |^2 + | HX |^2 > | QH |^2$$

olur. Dikme ayağının var ve tek olduğunu aşağıdaki Önerme 11.1 gösterecek.

Teorem 11.2 (Noktanın doğruya uzaklığı formülü). *d doğrusu P_0 noktasından geçsin ve doğrultman vektörü v olsun. Q noktasının d'ye uzaklığı*

$$\ell = \frac{\text{parallel} v \times \overrightarrow{P_0Q} \text{parallel}}{\| v \|}$$

dir.

İspat.
$Q \in d$ ise $\overrightarrow{P_0Q}$, v ile paraleldir. Önerme 9.3'den $v \times \overrightarrow{P_0Q} = 0$ olur ve formül $\ell = 0$ verir; bu doğrudur. $Q \notin d$ olsun ve $\theta = \measuredangle\left(v, \overrightarrow{P_0Q}\right)$ diyelim. $H = P_0$ ise $\overrightarrow{P_0Q} \perp v$, yani $\theta = \frac{\pi}{2}$ ve $\ell = | P_0Q | = | P_0Q | \sin\theta$ dır. $H \neq P_0$ ise P_0HQ üçgeni H'de dik açılıdır ve QH dik kenarı P_0 köşesinin karşısındadır. P_0'daki iç açı θ (ya da H, P_0'ın v'nin tersi yönünde kalıyorsa $\pi - \theta$) olduğundan, $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ eşitliğiyle her iki durumda

$$\ell = | P_0Q | \sin\theta$$

bulunur. Öte yandan Sonuç 9.3'dan

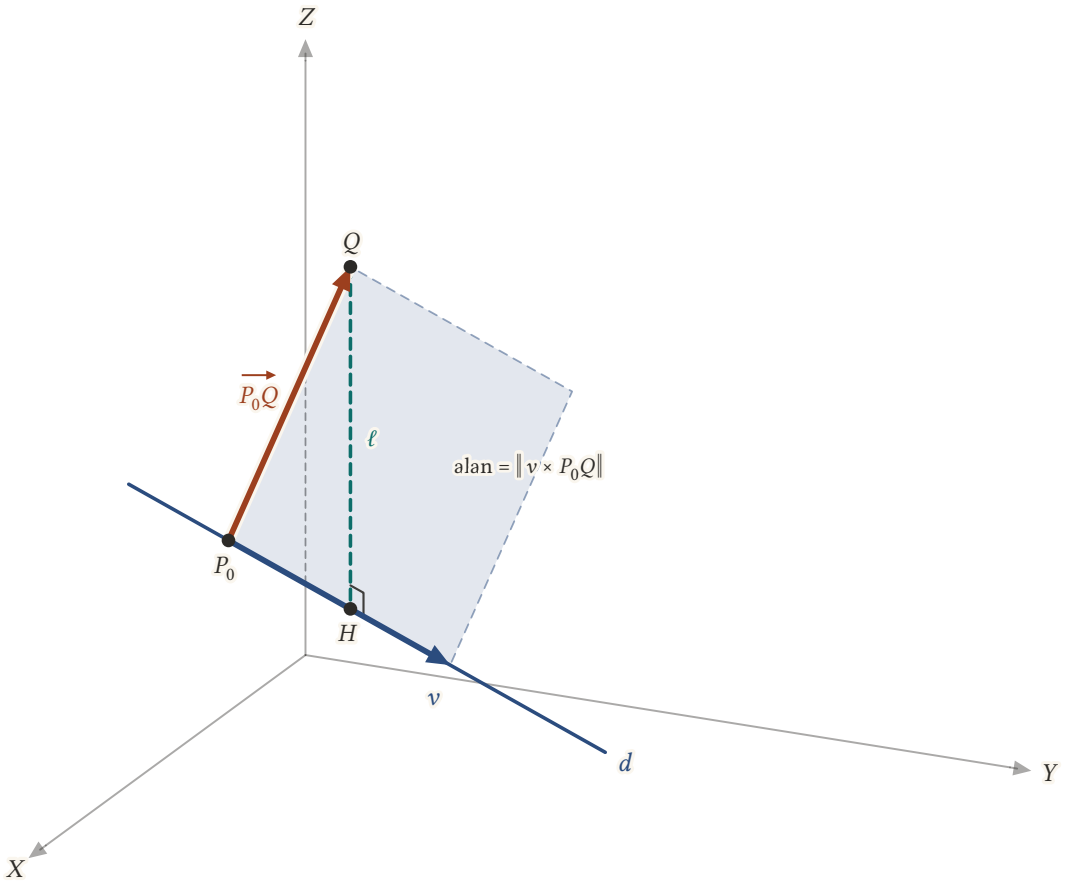
$$\sin\theta = \frac{\text{parallel} v \times \overrightarrow{P_0Q} \text{parallel}}{\| v \| | P_0Q |}$$

dir. Bunu yerine yazarsak $| P_0Q |$ sadeleşir:

$$\ell = | P_0Q | \cdot \frac{\text{parallel} v \times \overrightarrow{P_0Q} \text{parallel}}{\| v \| | P_0Q |} = \frac{\text{parallel} v \times \overrightarrow{P_0Q} \text{parallel}}{\| v \|}.$$

Formülün bir de alan yorumu vardır. v ile $\overrightarrow{P_0Q}$ vektörlerinin P_0'dan çizildiğinde oluşturduğu paralelkenarın alanı $\text{parallel} v \times \overrightarrow{P_0Q} \text{parallel}$ dir. Bu paralelkenarın v üzerindeki taban uzunluğu $\| v \|$, bu tabana ait yüksekliği ise tam olarak ℓ'dir. Alan = taban $\times$ yükseklik olduğundan yükseklik, alanın tabana bölümüdür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.4: v *ile* P_oQ *vektörlerinin gerdiği paralelkenarın alanı* $\|v \times P_oQ\|$*, tabanı* $\|v\|$*, yüksekliği* $\ell = |QH|$*'dir; bu yüzden* $\ell = \|v \times P_oQ\| / \|v\|$*.*

■

Formülde P_0 yerine d'nin başka bir noktası ya da v yerine onun sıfırdan farklı bir katı alınsa sonuç değişmez. Örneğin v yerine cv alınırsa pay da payda da $|\ c\ |$ ile çarpılır. Bu serbestlik hesapları kolaylaştırmak için kullanılabilir.

Önerme 11.1 (Dikmenin ayağı). *d doğrusu P_0 noktasından geçsin ve doğrultman vektörü v olsun. Q'dan d'ye inilen dikmenin ayağı tektir ve*

$$H = P_0 + \frac{\text{chevron.l}\overrightarrow{P_0Q}, v\text{chevron.r}}{\| v \|^2} v$$

noktasıdır. Yani $\overrightarrow{P_0H}$, $\overrightarrow{P_0Q}$'nun v üzerine dik izdüşümüdür.

İspat.
d'nin her noktası bir $t \in \mathbb{R}$ için $H = P_0 + tv$ biçimindedir. Bu nokta için $\overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{P_0Q} - tv$ olur. H'nin dikme ayağı olması için gerek ve yeter koşul

$$\text{chevron.l}\overrightarrow{P_0Q} - tv, v\text{chevron.r} = 0, \quad \text{yani} \quad \text{chevron.l}\overrightarrow{P_0Q}, v\text{chevron.r} - t\| v \|^2 = 0$$

olmasıdır. $\| v \| \neq 0$ olduğundan bu denklemin tek çözümü

 CC BY-NC-SA 4.0

$$t = \frac{\text{chevron.l}\overrightarrow{P_0Q}, v\text{chevron.r}}{\| v \|^2}$$

dir. Dolayısıyla dikme ayağı vardır ve tektir. $\overrightarrow{P_0H} = tv$ *vektörü, Teorem 8.3'a göre* $\text{izd}_v\left(\overrightarrow{P_0Q}\right)$ *vektörünün ta kendisidir.* $Q \in d$ *ise* $\overrightarrow{P_0Q} = sv$ *biçimindedir,* $t = s$ *bulunur ve* $H = Q$ *olur; bu da tanımdaki anlaşmaya uyar.*
■

Örnek 11.3 (Bir noktanın doğruya uzaklığı). $Q(0,-1,-2)$ noktasının

$$d : 2x = y - 1 = 4z + 8$$

doğrusuna uzaklığını bulalım.

Çözüm.
Önce d'yi kartezyen biçime getirelim. Her oranda değişkenin katsayısını 1 yapmak için $2x = \dfrac{x}{1/2}$ ve $4z + 8 = \dfrac{z+2}{1/4}$ yazarız:

$$d : \frac{\frac{x}{1}}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{\frac{1}{4}}.$$

Buna göre d, $P_0(0,1,-2)$ noktasından geçer ve doğrultman vektörü

$$v = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}\right)$$

dir. Ayrıca

$$\overrightarrow{P_0Q} = (0-0,-1-1,-2+2) = (0,-2,0)$$

olur. Vektörel çarpımı determinantla hesaplayalım:

$$\begin{aligned} v \times \overrightarrow{P_0Q} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(1 \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot (-2)\right) e_1 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4} \cdot 0\right) e_2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} \cdot (-2) - 1 \cdot 0\right) e_3 \\ &= \left(\frac{1}{2}, 0, -1\right). \end{aligned}$$

Uzunluklar

$$\begin{aligned} \text{parallel} v \times \overrightarrow{P_0Q} \text{parallel} &= \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \\ \| v \| &= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{4+16+1}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4} \end{aligned}$$

dir. Teorem 11.2'dan

$$\ell = \frac{\sqrt{5}/2}{\sqrt{21}/4} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{105}}{21}$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kesirlerden kaçınmak için v yerine $4v = (2,4,1)$ de alınabilirdi. O zaman $(2,4,1)\times(0,-2,0) = (2,0,-4)$, bu vektörün uzunluğu $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ ve $\|\,(2,4,1)\,\| = \sqrt{21}$ olur; oran yine $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$'dir.
■

Örnek 11.4 (Dikme ayağını bulmak). Aynı $Q(0,-1,-2)$ noktasından $d : 2x = y-1 = 4z+8$ doğrusuna inilen dikmenin ayağı H'yi bulalım ve $|\,QH\,|$'nin önceki örnekteki uzaklığa eşit olduğunu doğrulayalım.

Çözüm.
d, $P_0(0,1,-2)$ noktasından geçer. Doğrultman vektörü olarak $w = (2,4,1)$ alalım. $\overrightarrow{P_0Q} = (0,-2,0)$ olduğundan

$$\langle \overrightarrow{P_0Q}, w\rangle = 0\cdot 2 + (-2)\cdot 4 + 0\cdot 1 = -8, \qquad \|\,w\,\|^2 = 4+16+1 = 21$$

dir. Önerme 11.1'ndan

$$\begin{aligned} H &= (0,1,-2) - \frac{8}{21}(2,4,1) \\ &= \left(-\frac{16}{21}, 1-\frac{32}{21}, -2-\frac{8}{21}\right) \\ &= \left(-\frac{16}{21}, -\frac{11}{21}, -\frac{50}{21}\right) \end{aligned}$$

bulunur. H'nin gerçekten d üzerinde olduğunu denetleyelim: $2x = -\frac{32}{21}$, $y-1 = -\frac{32}{21}$ ve $4z+8 = -\frac{200}{21} + \frac{168}{21} = -\frac{32}{21}$; üç ifade eşittir.
Şimdi

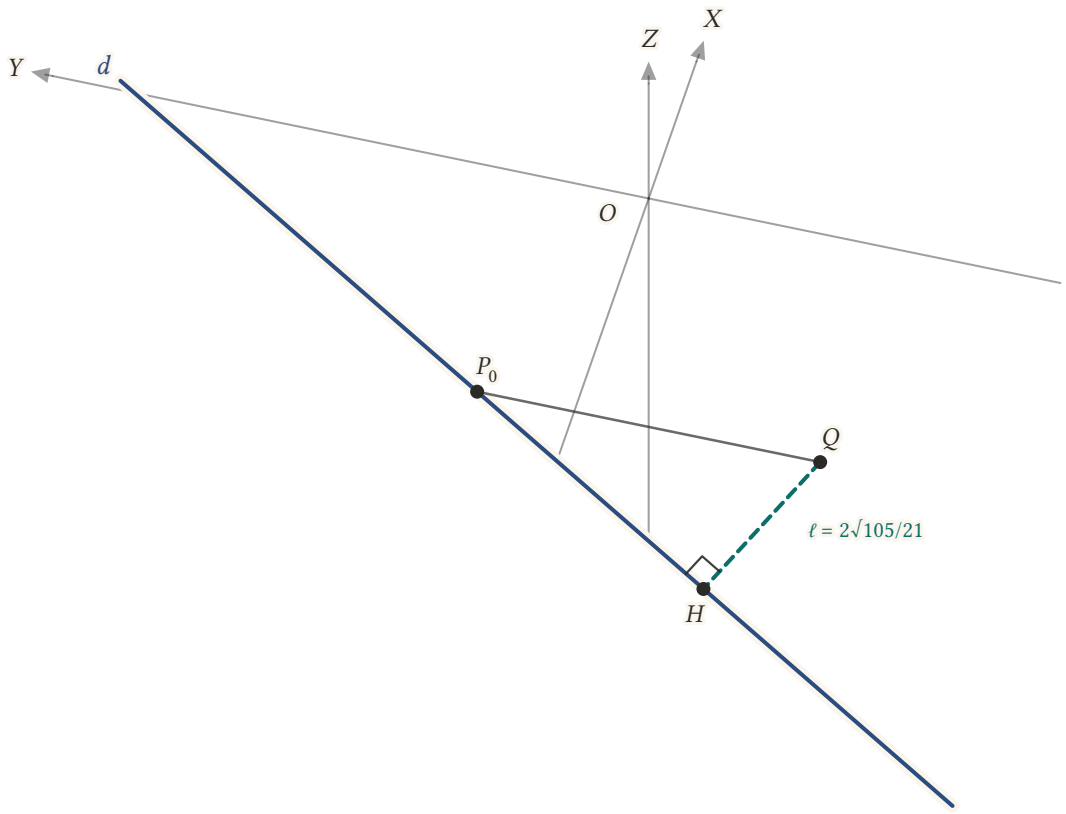
$$\overrightarrow{HQ} = \left(\frac{16}{21}, -\frac{10}{21}, \frac{8}{21}\right)$$

dir. Bu vektör w'ye diktir: $\frac{1}{21}(32-40+8) = 0$. Uzunluğu

$$|\,QH\,| = \frac{\sqrt{256+100+64}}{21} = \frac{\sqrt{420}}{21} = \frac{2\sqrt{105}}{21}$$

olup Örnek 11.3'taki sonuçla aynıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.5: $Q(0, -1, -2)$ noktasından $d : 2x = y - 1 = 4z + 8$ doğrusuna inilen dikmenin ayağı $H(-16/21, -11/21, -50/21)$; $|QH| = 2\sqrt{105}/21$.

■

11.3 İki doğrunun birbirine göre durumları

İki doğrunun birbirine göre durumunu anlamak için önce ortak noktalarının olup olmadığına bakarız. Ortak nokta, her iki doğrunun parametrik denklemlerini birden sağlayan noktadır. Bu yüzden iki doğrunun parametrik denklemlerini eşitlemek işin anahtarıdır.
$v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ve $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$ olsun. λ_1 ve λ_2 parametreleriyle

$$\begin{aligned} d_1 : \{ & x = x_1 + \lambda_1 a_1 \\ & y = y_1 + \lambda_1 b_1 \\ & z = z_1 + \lambda_1 c_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_2 : \{ & x = x_2 + \lambda_2 a_2 \\ & y = y_2 + \lambda_2 b_2 \\ & z = z_2 + \lambda_2 c_2 \end{aligned}$$

yazalım. Bir nokta iki doğrunun da üzerindeyse koordinatları iki gösterimde de aynıdır. Bu yüzden ortak noktalar

$$\begin{aligned} \{ x_1 + \lambda_1 a_1 &= x_2 + \lambda_2 a_2 \\ y_1 + \lambda_1 b_1 &= y_2 + \lambda_2 b_2 \\ z_1 + \lambda_1 c_1 &= z_2 + \lambda_2 c_2 \end{aligned} \tag{1}$$

sisteminin (λ_1, λ_2) çözümlerinden elde edilir. Bu, iki bilinmeyenli üç denklemden oluşan bir sistemdir; tek çözümü, sonsuz çözümü olabilir ya da hiç çözümü olmayabilir.

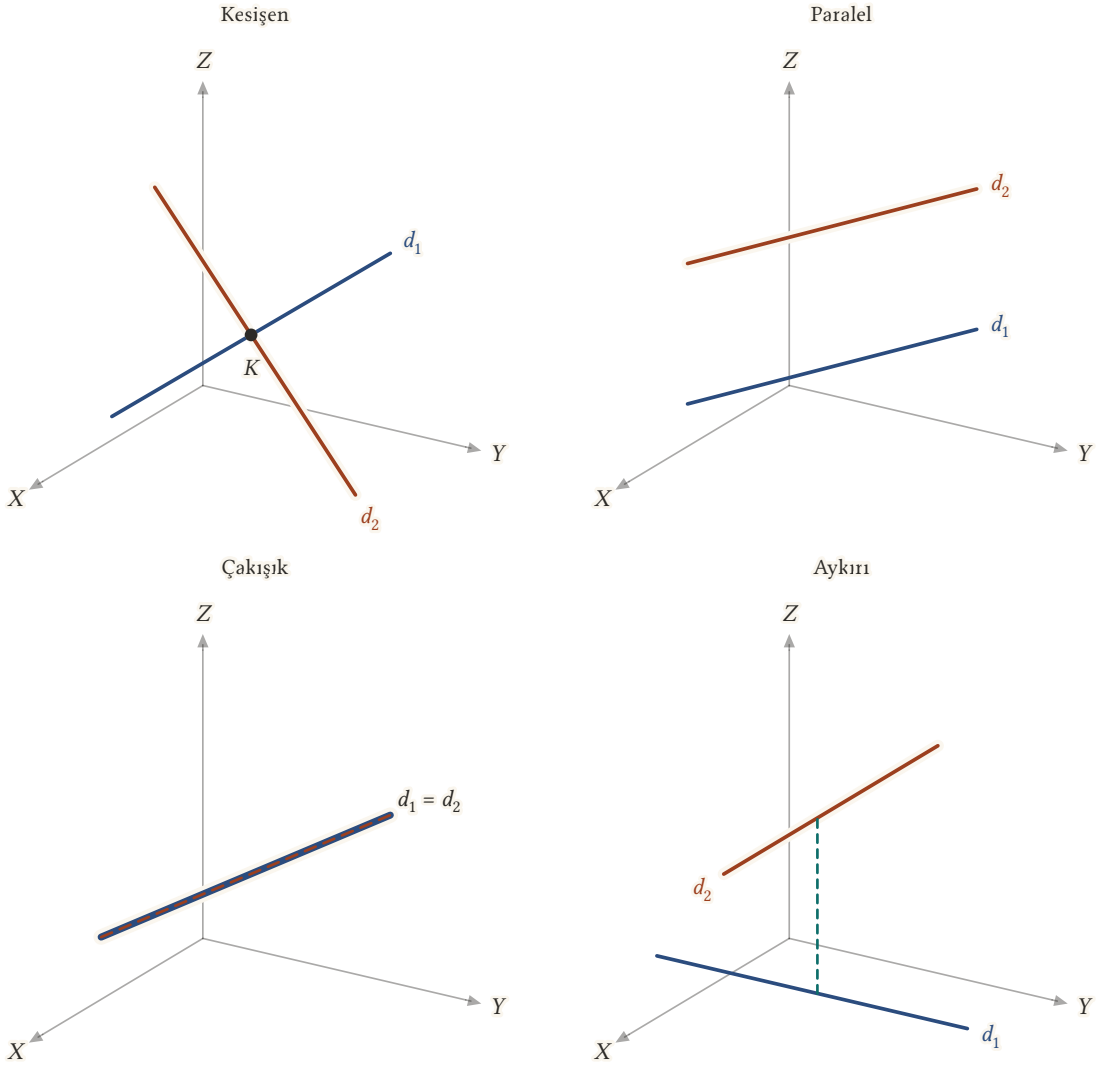
 CC BY-NC-SA 4.0

Paralel doğruları Uzayda Doğru Denklemleri bölümünde tanımlamıştık: $d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2$. Bu tanıma göre aynı doğru kendisine de paraleldir. Geri kalan durumları da adlandıralım.

Tanım 11.3 (Kesişen doğrular). Tam olarak bir ortak noktası olan iki doğruya **kesişen doğrular**, bu ortak noktaya da doğruların **kesişim noktası** denir.

Tanım 11.4 (Çakışık doğrular). Aynı nokta kümesini belirten, yani her noktası ortak olan iki doğruya **çakışık doğrular** denir.

Tanım 11.5 (Aykırı doğrular). Kesişmeyen ve paralel olmayan iki doğruya **aykırı doğrular** denir.



Şekil 11.6: Uzayda iki doğrunun dört durumu: kesişen doğrular (tek ortak nokta K), paralel ve farklı doğrular, çakışık doğrular ve aykırı doğrular. Aykırı doğrular ne kesişir ne de paraleldir; kesikli parça ikisine birden diktir.

Yani uzayda iki doğru için dört durum vardır: kesişirler, paralel ve farklıdırlar, çakışıktırlar ya da aykırıdırlar. Aykırı doğrular sezgisel olarak ortak bir düzlem üzerinde bulunmayan doğrulardır; düzlemde aykırı doğru yoktur. Hangi durumun geçerli olduğunu (1) sisteminin çözümleri söyler.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 11.3 (Ortak nokta sistemi ve doğruların durumu). *d_1 ve d_2 doğruları ile (1) sistemi için şunlar geçerlidir.*
i) (1)'in tek çözümü varsa d_1 ile d_2 kesişir.
ii) (1)'in sonsuz çözümü varsa d_1 ile d_2 çakışıktır.
iii) (1)'in çözümü yoksa ve $v_1 \parallel v_2$ ise d_1 ile d_2 paralel ve farklıdır.
iv) (1)'in çözümü yoksa ve $v_1 \nparallel v_2$ ise d_1 ile d_2 aykırıdır.
Bu dört durum birbirini dışlar ve her iki doğru bunlardan tam birine uyar.

> ***İspat.***
> *(1)'in her (λ_1, λ_2) çözümü bir ortak nokta verir. Tersine her ortak nokta tek bir çözümden gelir: $v_1 \neq 0$ olduğundan farklı λ_1 değerleri d_1'in farklı noktalarını verir, aynısı d_2 için de doğrudur. Demek ki (1)'in çözümleri ile ortak noktalar birebir eşlenir.*
> *Farklı iki doğrunun en çok bir ortak noktası vardır. Gerçekten d_1 ile d_2'nin $A \neq B$ gibi iki ortak noktası olsun. $\overrightarrow{AB}$ vektörü hem d_1 hem d_2 üzerinde yattığından v_1'e de v_2'ye de paraleldir. O hâlde iki doğru da A'dan geçen ve doğrultmanı $\overrightarrow{AB}$ olan doğrudur; yani çakışıktır.*
> *Buna göre ortak noktaların sayısı 0, 1 ya da sonsuzdur ve sonsuz olması çakışıklık demektir. i) ve ii) buradan çıkar. Ortak nokta yoksa doğrular ne kesişen ne de çakışıktır. $v_1 \parallel v_2$ ise tanım gereği paraleldirler ve çakışık olmadıklarından farklıdırlar: iii). $v_1 \nparallel v_2$ ise hem kesişmezler hem paralel değildirler, yani Tanım 11.5 gereği aykırıdırlar: iv).*
> *Durumların birbirini dışladığı, çözüm sayısının (1, sonsuz, 0) ve v_1, v_2'nin paralelliğinin aynı anda tek bir biçimde belirlenmesinden gelir.*
> ■

Bu teoremden iki pratik sonuç çıkar. Birincisi, $v_1 \nparallel v_2$ ise doğrular ya kesişir ya da aykırıdır; çakışık ya da paralel olamazlar. İkincisi, $v_1 \parallel v_2$ ise doğrular ya çakışıktır ya da paralel ve farklıdır; bunu anlamak için P_2'nin d_1 üzerinde olup olmadığına bakmak yeter.

> **İki doğrunun durumunu üç adımda belirlemek**
>
> 1. Doğrultman vektörlerini okuyun ve $v_1 \parallel v_2$ olup olmadığına bakın.
> 2. İki doğruyu farklı parametrelerle (λ_1, λ_2) parametrik biçimde yazıp (1) sistemini kurun. İki denklemden λ_1 ile λ_2'yi bulun ve üçüncü denklemde deneyin.
> 3. Tek çözüm varsa kesişim noktasını parametreleri yerine yazarak bulun. Çözüm yoksa 1. adımın sonucuna göre "paralel" ya da "aykırı" deyin.

Örnek 11.5 (Kesişen iki doğru).

$$d_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{4}$$

ve

$$d_2 : \frac{x-1}{6} = \frac{y}{7} = \frac{z+5}{9}$$

doğrularının birbirine göre durumunu belirleyelim; varsa ortak noktalarını bulalım.

> **Çözüm.**
> $v_1 = (2,3,4)$ ve $v_2 = (6,7,9)$ paralel değildir, çünkü $\frac{6}{2} = 3$ iken $\frac{7}{3} \neq 3$ tür. Doğrular ya kesişir ya da aykırıdır. Parametrik denklemler
>
> $$d_1 : \{x = -1 + 2\lambda_1 \qquad d_2 : \{x = 1 + 6\lambda_2$$
> $$ \{y = 3 + 3\lambda_1 \qquad\quad \{y = 7\lambda_2$$
> $$ \{z = 4\lambda_1 \qquad\quad \{z = -5 + 9\lambda_2$$
>
> dir. (1) sistemi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} -1 + 2\lambda_1 &= 1 + 6\lambda_2, \quad \text{(i)} \\ 3 + 3\lambda_1 &= 7\lambda_2, \quad \text{(ii)} \\ 4\lambda_1 &= -5 + 9\lambda_2 \quad \text{(iii)} \end{aligned}$$

olur. (i)'den $2\lambda_1 = 2 + 6\lambda_2$, yani $\lambda_1 = 1 + 3\lambda_2$ dir. Bunu (ii)'de yerine yazarsak

$$3 + 3 + 9\lambda_2 = 7\lambda_2 \Longrightarrow 2\lambda_2 = -6 \Longrightarrow \lambda_2 = -3$$

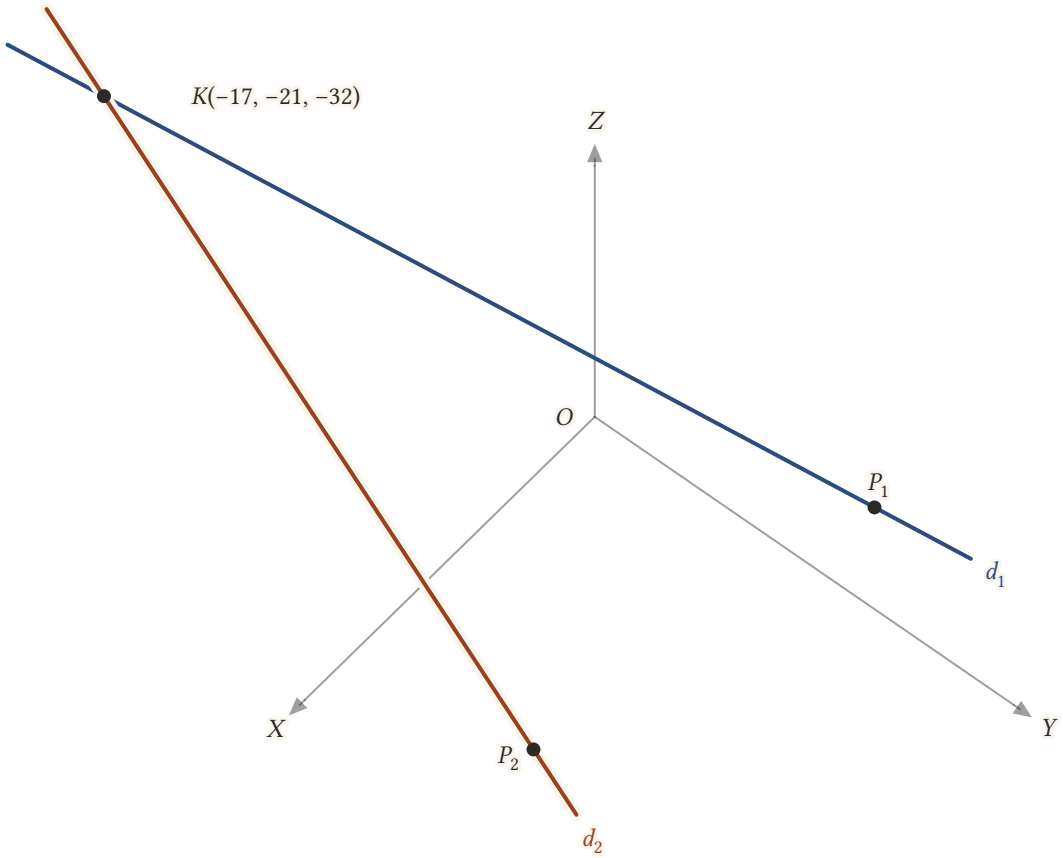
ve $\lambda_1 = 1 + 3 \cdot (-3) = -8$ bulunur. (iii)'de deneyelim: sol taraf $4 \cdot (-8) = -32$, sağ taraf $-5 + 9 \cdot (-3) = -32$. Üçüncü denklem de sağlanır, dolayısıyla $(\lambda_1, \lambda_2) = (-8, -3)$ sistemin tek çözümüdür ve Teorem 11.3 i)'den doğrular kesişir.
Kesişim noktası için $\lambda_1 = -8$'i d_1'in denklemlerine yazalım:

$$x = -1 - 16 = -17, \quad y = 3 - 24 = -21, \quad z = -32.$$

Denetim için $\lambda_2 = -3$'ü d_2'ye yazarsak $x = 1 - 18 = -17$, $y = -21$, $z = -5 - 27 = -32$ çıkar. Kesişim noktası

$$K(-17, -21, -32)$$

dir.



Şekil 11.7: d_1 ile d_2 $K(-17, -21, -32)$ noktasında kesişir. Doğrultman vektörleri arasındaki açı küçük olduğundan doğrular kesişim noktasına doğru yavaşça yaklaşır; eksenler başlangıç noktası çevresinde, ölçek için çizilmiştir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 11.6 (Kesişme için parametre seçimi).

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-2m}{1} = \frac{z-1}{1}$$

ve

$$d_2 : \frac{x-m}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$$

doğrularının kesişmesi için m ne olmalıdır?

Çözüm.
Kartezyen denklemlerden d_1 için $P_1(0, 2m, 1)$ ve $v_1 = (2, 1, 1)$, d_2 için $P_2(m, 0, 1)$ ve $v_2 = (1, 2, 1)$ okunur. $v_1 \nparallel v_2$ olduğundan doğrular her m için ya kesişir ya da aykırıdır. Parametrik denklemler

$$\begin{aligned} d_1 : \{ & x = 2\lambda_1 \\ & y = 2m + \lambda_1 \\ & z = 1 + \lambda_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_2 : \{ & x = m + \lambda_2 \\ & y = 2\lambda_2 \\ & z = 1 + \lambda_2 \end{aligned}$$

dir. Bir kesişim noktası için (1) sistemi

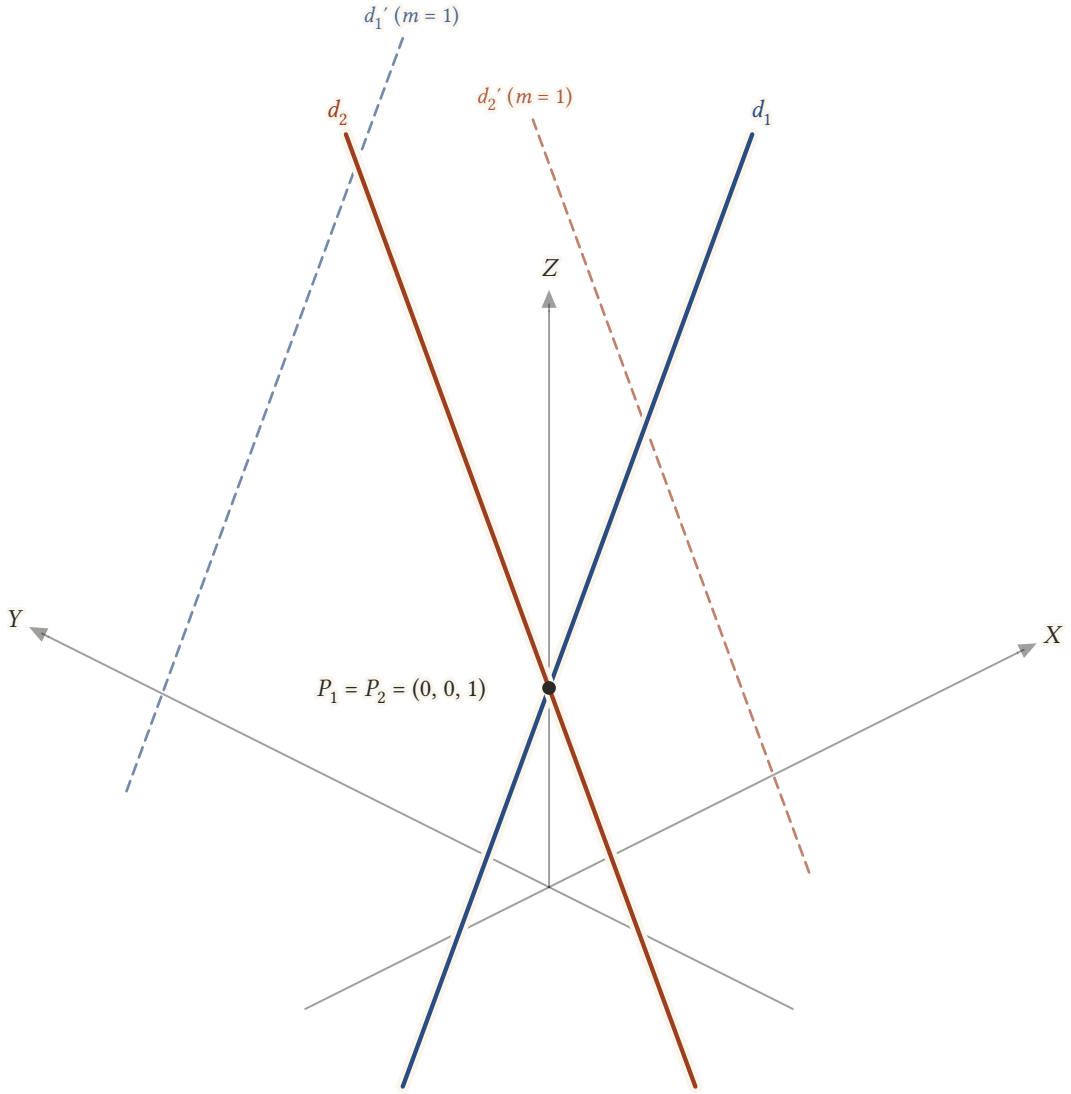
$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &= m + \lambda_2, && \text{(i)} \\ 2m + \lambda_1 &= 2\lambda_2, && \text{(ii)} \\ 1 + \lambda_1 &= 1 + \lambda_2 && \text{(iii)} \end{aligned}$$

olur. (iii)'den $\lambda_1 = \lambda_2$ dir. Bunu (i)'de kullanırsak $2\lambda_1 = m + \lambda_1$, yani $\lambda_1 = \lambda_2 = m$ bulunur. (ii)'de kullanırsak $2m + \lambda_1 = 2\lambda_1$, yani $\lambda_1 = \lambda_2 = 2m$ bulunur. İki sonucun birlikte sağlanması için $m = 2m$, yani

$$m = 0$$

olmalıdır. Bu durumda $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ dır ve kesişim noktası $P_1 = P_2 = (0, 0, 1)$'dir. $m \neq 0$ için sistemin çözümü yoktur ve doğrular aykırıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.8: $m = 0$ için d_1 ile d_2 $(0, 0, 1)$ noktasında kesişir. Kesikli çizilen d_1' ve d_2' ise $m = 1$ için aynı doğrulardır; bunlar kesişmez, aykırıdır.

■

Örnek 11.7 (Paralel ve farklı iki doğru).

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

ve

$$d_2 : \frac{x-4}{-2} = \frac{y}{-4} = \frac{z-2}{-4}$$

doğrularının birbirine göre durumunu belirleyelim.

Çözüm.
$v_1 = (1, 2, 2)$ ve $v_2 = (-2, -4, -4) = -2\,v_1$ olduğundan $v_1 \parallel v_2$ dir. Doğrular ya çakışıktır ya da paralel ve farklıdır. (1) sistemi

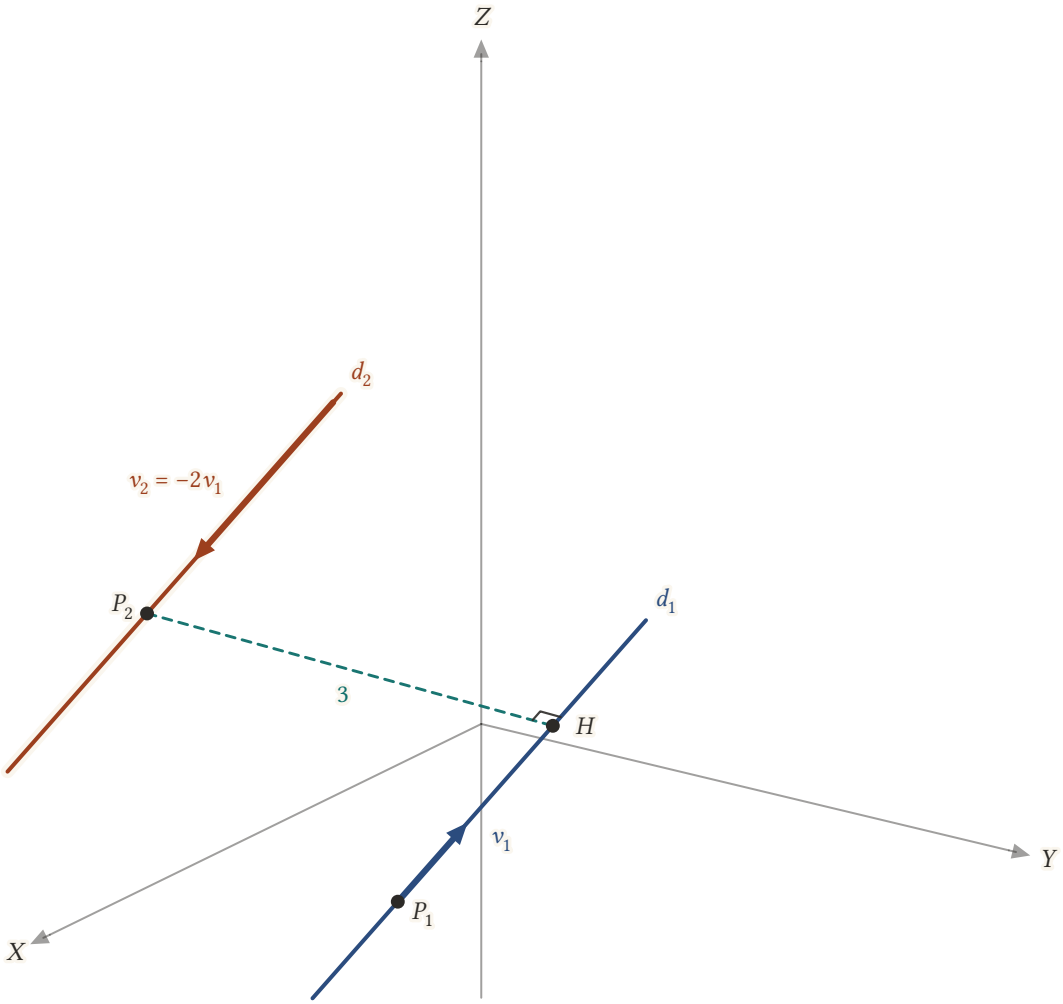
 CC BY-NC-SA 4.0

$$1 + \lambda_1 = 4 - 2\lambda_2, \quad \text{(i)}$$
$$2\lambda_1 = -4\lambda_2, \quad \text{(ii)}$$
$$-1 + 2\lambda_1 = 2 - 4\lambda_2 \quad \text{(iii)}$$

dir. (ii)'den $\lambda_1 = -2\lambda_2$ bulunur. Bunu (i)'de yerine yazarsak

$$1 - 2\lambda_2 = 4 - 2\lambda_2 \Longrightarrow 1 = 4$$

çelişkisi çıkar. Sistemin çözümü yoktur. Teorem 11.3 iii)'den d_1 ile d_2 paralel ve farklıdır. Aynı sonuca daha kısa yoldan da varılır: $P_2(4, 0, 2)$ noktası d_1'in denklemini sağlamaz, çünkü $\frac{4-1}{1} = 3$ iken $\frac{0}{2} = 0$ dır.



Şekil 11.9: Paralel ve farklı iki doğru: $v_2 = -2v_1$ ters yönde ve iki kat uzundur, $P_2(4, 0, 2)$ ise d_1 üzerinde değildir. P_2'den d_1'e inilen dikmenin ayağı $H(2, 2, 1)$, uzunluğu 3'tür.

■

Örnek 11.8 (Çakışık iki doğru).

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

ve

$$d_2 : \frac{x-5}{-4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-8}{-6}$$

doğrularının birbirine göre durumunu belirleyelim.

Çözüm.
$v_1 = (2,-1,3)$ ve $v_2 = (-4,2,-6) = -2\,v_1$ olduğundan $v_1 \parallel v_2$ dir. (1) sistemi

$$\begin{aligned} 1 + 2\lambda_1 &= 5 - 4\lambda_2, && \text{(i)} \\ -1 - \lambda_1 &= -3 + 2\lambda_2, && \text{(ii)} \\ 2 + 3\lambda_1 &= 8 - 6\lambda_2 && \text{(iii)} \end{aligned}$$

dir. Her denklemi λ_1 için çözelim: (i)'den $2\lambda_1 = 4 - 4\lambda_2$, (ii)'den $-\lambda_1 = -2 + 2\lambda_2$, (iii)'ten $3\lambda_1 = 6 - 6\lambda_2$. Üçü de aynı

$$\lambda_1 = 2 - 2\lambda_2$$

denklemine indirgenir. Her λ_2 için $\lambda_1 = 2 - 2\lambda_2$ alınınca sistem sağlanır; sistemin sonsuz çözümü vardır. Teorem 11.3 ii)'den doğrular çakışıktır. Gerçekten $\lambda_1 = 2$ için d_1'in noktası $(5,-3,8) = P_2$ dir; yani d_2, d_1'in bir noktasından d_1'e paralel olarak geçen doğrudur.
■

Örnek 11.9 (Aykırı iki doğru).

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

ve

$$d_2 : \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1}$$

doğrularının birbirine göre durumunu belirleyelim.

Çözüm.
$v_1 = (1,-1,2)$ ve $v_2 = (2,1,-1)$ paralel değildir, çünkü $\frac{2}{1} = 2$ iken $\frac{1}{-1} = -1$ dir. Doğrular ya kesişir ya da aykırıdır. (1) sistemi

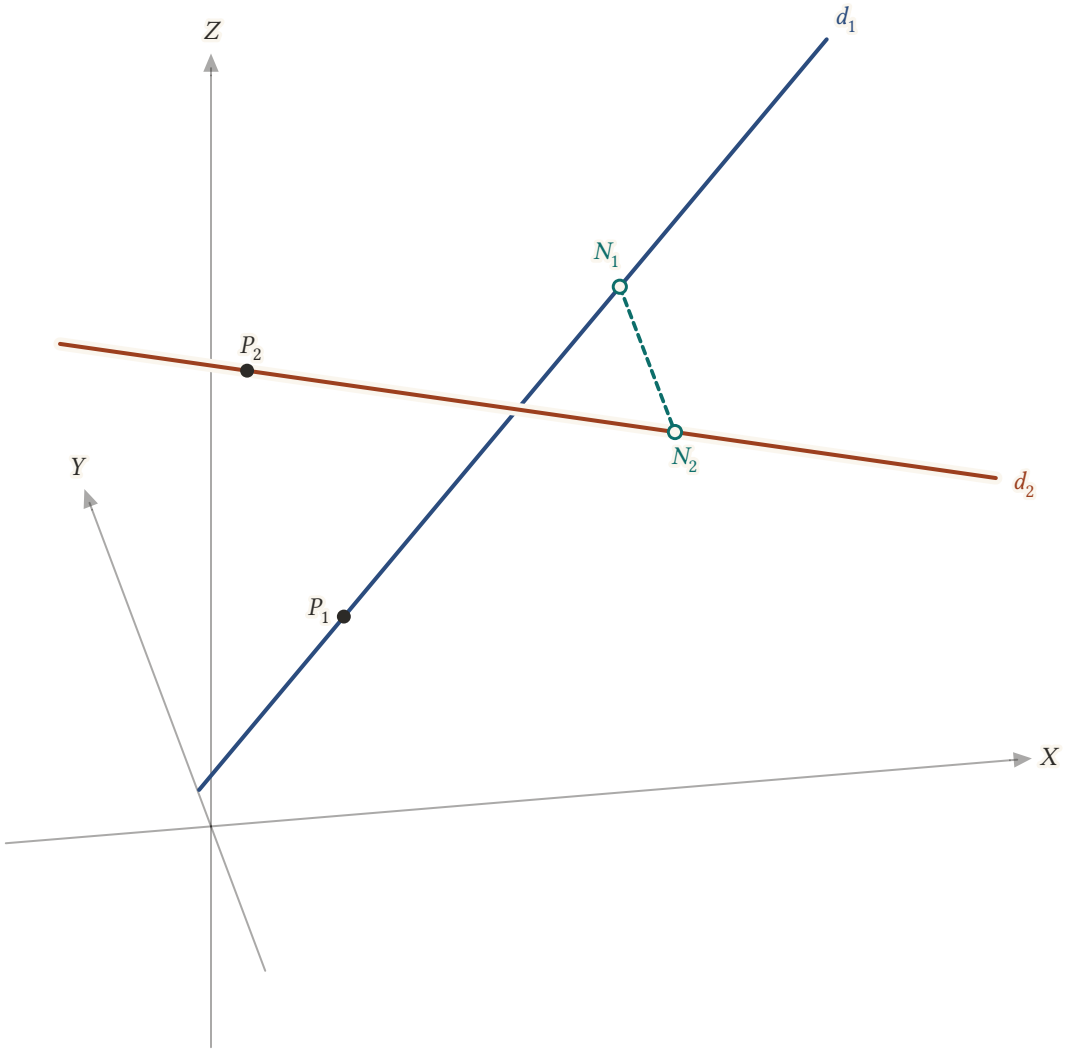
$$\begin{aligned} 1 + \lambda_1 &= 2\lambda_2, && \text{(i)} \\ 2 - \lambda_1 &= -1 + \lambda_2, && \text{(ii)} \\ 2\lambda_1 &= 3 - \lambda_2 && \text{(iii)} \end{aligned}$$

dir. (i) ile (ii)'yi taraf tarafa toplarsak λ_1 yok olur:

$$3 = -1 + 3\lambda_2 \Longrightarrow \lambda_2 = \frac{4}{3}.$$

(i)'den $\lambda_1 = 2 \cdot \frac{4}{3} - 1 = \frac{5}{3}$ bulunur. (iii)'te deneyelim: sol taraf $2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$, sağ taraf $3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$. Eşit değildir. İlk iki denklemin tek ortak çözümü üçüncüyü sağlamadığından sistemin çözümü yoktur. Teorem 11.3 iv)'ten d_1 ile d_2 aykırıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.10: Aykırı iki doğru: sayfada kesişiyormuş gibi görünseler de önde kalan doğru arkadakinin üzerinden geçer. En yakın noktaları $N_1(15/7,\ 6/7,\ 16/7)$ ile $N_2(16/7,\ 1/7,\ 13/7)$ arasındaki kesikli parça iki doğruya da diktir; uzunluğu $\sqrt{35}/7$'dir.

■

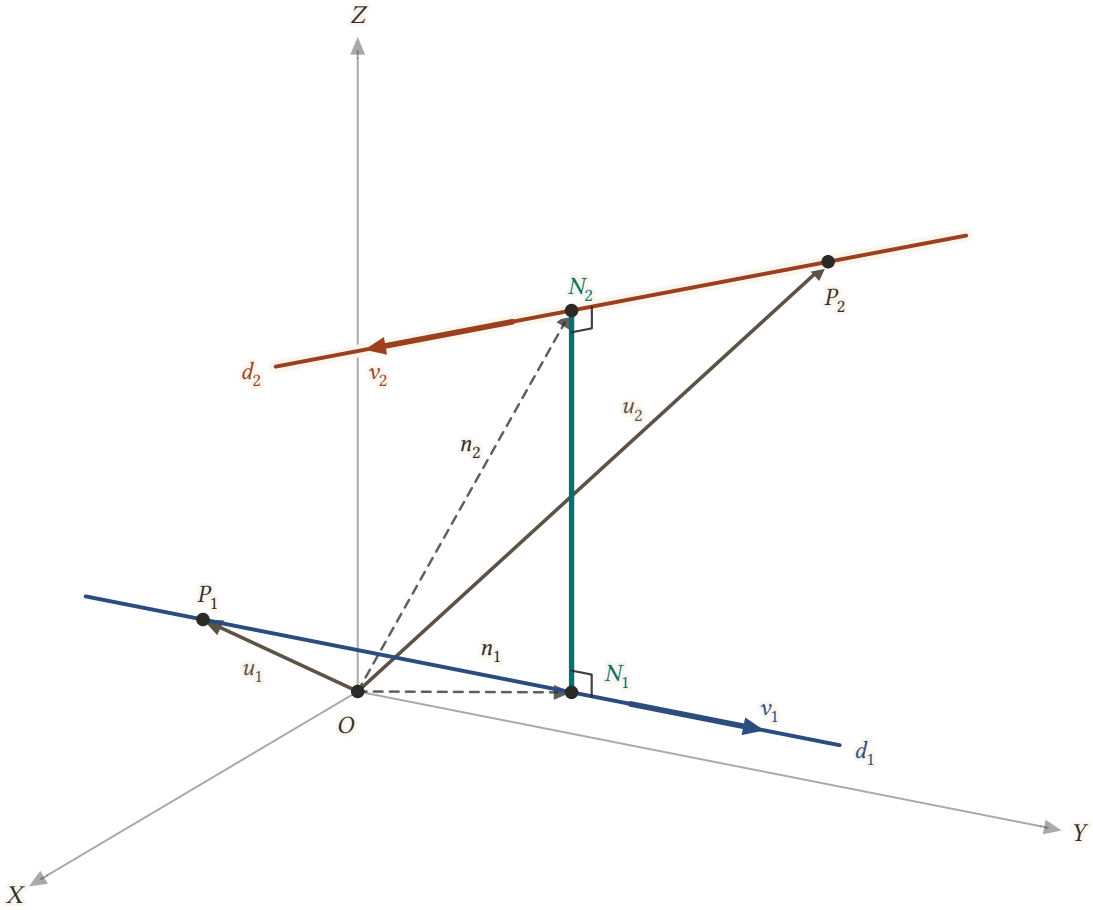
11.4 İki doğru arasındaki en kısa uzaklık

İki doğru kesişiyorsa aralarındaki uzaklık 0'dır. Paralel doğrular arasındaki uzaklık, birinin herhangi bir noktasının ötekine uzaklığıdır. Aykırı doğrularda ise durum daha ilginçtir: doğruların birbirine en çok yaklaştığı iki nokta vardır ve bu noktaları birleştiren parça iki doğruya birden diktir.

Tanım 11.6 (İki doğru arasındaki en kısa uzaklık). $X \in d_1$ ve $Y \in d_2$ olmak üzere $|\,XY\,|$ uzaklıklarının en küçüğüne d_1 ile d_2 doğruları arasındaki **en kısa uzaklık** denir.

Tanım 11.7 (Ortak dikme). $N_1 \in d_1$ ve $N_2 \in d_2$ noktaları için $\overrightarrow{N_1N_2}$ vektörü hem v_1'e hem de v_2'ye dik olsun. N_1 ile N_2'ye d_1 ile d_2'nin **ortak dikmesinin ayakları** denir. $N_1 \neq N_2$ ise N_1 ile N_2'den geçen doğruya d_1 ile d_2'nin **ortak dikmesi** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.11: N_1N_2 ortak dikmesi d_1'e ve d_2'ye diktir. u_1, u_2 doğrulardaki P_1, P_2 noktalarının, n_1, n_2 ise ayakların konum vektörleridir.

Yani ortak dikme, iki doğruyu da dik açıyla kesen doğrudur. Doğrular kesişiyorsa kesişim noktası K için $N_1 = N_2 = K$ alınabilir; bu durumda ortak dikme parçası tek bir noktaya iner. Aşağıdaki teorem, doğrultmanları paralel olmayan iki doğru için ortak dikmenin ayaklarının var ve tek olduğunu, en kısa uzaklığın da tam olarak $|\ N_1N_2\ |$ olduğunu gösterir.

Teorem 11.4 (Ortak dikmenin ayakları ve en kısa uzaklık). *$v_1 \nparallel v_2$ olsun. u_1 ve u_2 sırasıyla P_1 ile P_2'nin konum vektörleri olmak üzere, d_1 ile d_2'nin ortak dikmesinin ayaklarının konum vektörleri*

$$n_1 = u_1 + \lambda_1 v_1, \qquad n_2 = u_2 + \lambda_2 v_2 \tag{2}$$

biçimindedir; burada λ_1 ile λ_2

$$\begin{cases} \text{chevron.l}\overrightarrow{P_1P_2} + \lambda_2 v_2 - \lambda_1 v_1, v_1 \text{chevron.r} = 0 \\ \text{chevron.l}\overrightarrow{P_1P_2} + \lambda_2 v_2 - \lambda_1 v_1, v_2 \text{chevron.r} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

sisteminin tek çözümüdür. Dolayısıyla ortak dikmenin ayakları N_1 ve N_2 vardır ve tektir. Ayrıca $X \in d_1$ ve $Y \in d_2$ için

$$|\ XY\ | \geq |\ N_1N_2\ |$$

olur ve eşitlik yalnız $X = N_1, Y = N_2$ iken sağlanır. Yani en kısa uzaklık $|\ N_1N_2\ |$'dir.

> ***İspat.***
> *d_1'in her noktasının konum vektörü bir λ_1 için $u_1 + \lambda_1 v_1$, d_2'ninkiler de bir λ_2 için $u_2 + \lambda_2 v_2$ biçimindedir. Bu biçimdeki N_1 ve N_2 noktaları için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\overrightarrow{N_1N_2} = n_2 - n_1 = (u_2 - u_1) + \lambda_2 v_2 - \lambda_1 v_1$$

ve $u_2 - u_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ *olduğundan*

$$\overrightarrow{N_1N_2} = \overrightarrow{P_1P_2} + \lambda_2 v_2 - \lambda_1 v_1 \tag{4}$$

dir. $\overrightarrow{N_1N_2} \perp v_1$ *ve* $\overrightarrow{N_1N_2} \perp v_2$ *koşulları iç çarpımla tam olarak (3) sistemidir.*
Tek çözüm. *(3)'ü iç çarpımın doğrusallığıyla açıp* λ_1, λ_2*'ye göre düzenleyelim:*

$$\begin{aligned} \{\| v_1 \|^2 \lambda_1 - \langle v_1, v_2 \rangle \lambda_2 &= \text{chevron.l}\overrightarrow{P_1P_2}, v_1\text{chevron.r} \\ \langle v_1, v_2 \rangle \lambda_1 - \| v_2 \|^2 \lambda_2 &= \text{chevron.l}\overrightarrow{P_1P_2}, v_2\text{chevron.r} \end{aligned}$$

Bu doğrusal sistemin katsayılar determinantı

$$\begin{vmatrix} \| v_1 \|^2 & -\langle v_1, v_2 \rangle \\ \langle v_1, v_2 \rangle & -\| v_2 \|^2 \end{vmatrix} = -\left(\| v_1 \|^2 \| v_2 \|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2 \right)$$

dir. Sonuç 9.2 i)'den parantezin içi $\| v_1 \times v_2 \|^2$*'ye eşittir.* $v_1 \nparallel v_2$ *olduğundan Önerme 9.3'den* $v_1 \times v_2 \neq 0$ *dır, yani determinant sıfırdan farklıdır.*
Bu da sistemin tek çözümü olduğunu gösterir. Gerçekten sistemi kısaca $\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = p$, $\gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2 = q$ *diye yazalım; determinant* $D = \alpha\delta - \beta\gamma$ *olur. Birinci denklemi* δ *ile, ikinciyi* β *ile çarpıp çıkarırsak* λ_2 *yok olur ve* $D\,\lambda_1 = p\delta - q\beta$ *kalır. Birinciyi* γ *ile, ikinciyi* α *ile çarpıp ikincisinden birincisini çıkarırsak* λ_1 *yok olur ve* $D\,\lambda_2 = q\alpha - p\gamma$ *kalır.* $D \neq 0$ *olduğundan her bilinmeyen tek biçimde bulunur; bulunan değerlerin iki denklemi de sağladığı yerine yazarak görülür. Bu,* N_1 *ile* N_2*'nin var ve tek olduğunu gösterir.*
En küçüklük. $X \in d_1$ *ve* $Y \in d_2$ *olsun.* $N_1 \in d_1$ *ve* $N_2 \in d_2$ *olduğundan bazı* $s, t \in \mathbb{R}$ *için* $\overrightarrow{N_1X} = sv_1$ *ve* $\overrightarrow{N_2Y} = tv_2$ *dir. O hâlde*

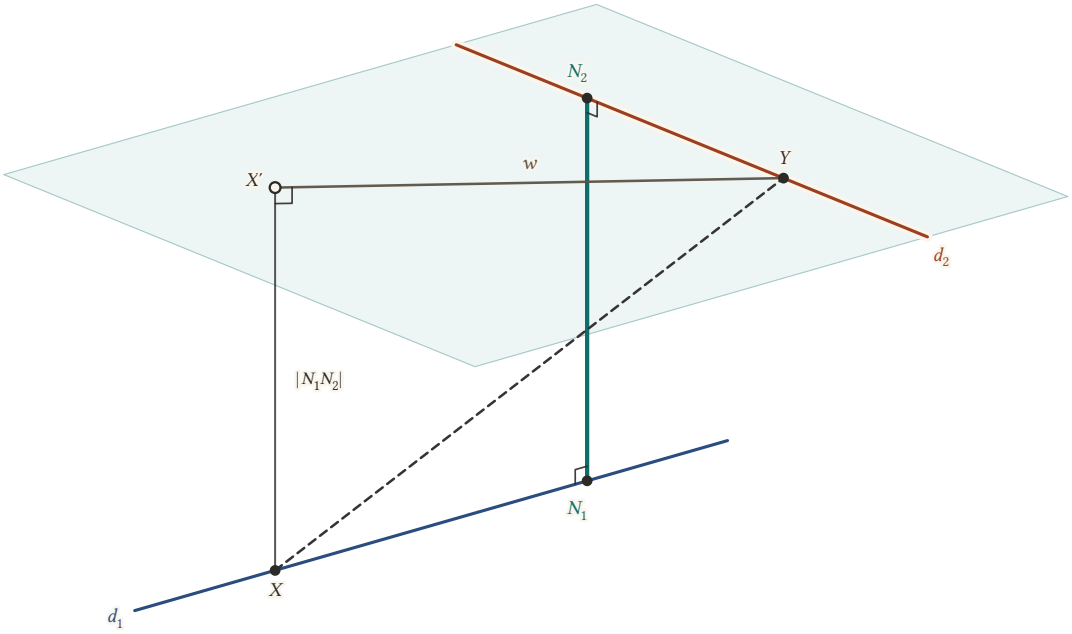
$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XN_1} + \overrightarrow{N_1N_2} + \overrightarrow{N_2Y} = \overrightarrow{N_1N_2} + w, \qquad w = tv_2 - sv_1$$

olur. $\overrightarrow{N_1N_2}$ *hem* v_1*'e hem* v_2*'ye dik olduğundan* w*'ye de diktir*$\text{chevron.l}\overrightarrow{N_1N_2}, w\text{chevron.r} = t \cdot 0 - s \cdot 0 = 0$*. Buna göre*

$$\begin{aligned} |\ XY\ |^2 &= \text{chevron.l}\overrightarrow{N_1N_2} + w, \overrightarrow{N_1N_2} + w\text{chevron.r} \\ &= |\ N_1N_2\ |^2 + 2\text{chevron.l}\overrightarrow{N_1N_2}, w\text{chevron.r} + \| w \|^2 \\ &= |\ N_1N_2\ |^2 + \| w \|^2 \geq |\ N_1N_2\ |^2 \end{aligned}$$

dir. Eşitlik ancak $w = 0$ *iken, yani* $tv_2 = sv_1$ *iken olur.* v_1 *ile* v_2 *lineer bağımsız olduğundan bu,* $s = t = 0$*, yani* $X = N_1$ *ve* $Y = N_2$ *demektir.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.12: $X \in d_1$, $Y \in d_2$ *için* XY *vektörü, ortak dikmeye eşit* XX' *ile ona dik* $w = X'Y$ *vektörlerinin toplamıdır. Pisagor bağıntısından* $|XY|^2 = |N_1N_2|^2 + \|w\|^2 \geq |N_1N_2|^2$.

■

Ortak dikmenin doğrultusu da bellidir. Uzayda Doğru Denklemleri bölümünde, paralel olmayan v_1 ile v_2'nin ikisine de dik olan sıfırdan farklı her vektörün $v_1 \times v_2$'ye paralel olduğunu gördük. Buna göre $N_1 \neq N_2$ ise ortak dikmenin doğrultman vektörü olarak $v_1 \times v_2$ alınabilir. Bu gözlem en kısa uzaklığı ayakları bulmadan hesaplamamızı sağlar.

Teorem 11.5 (En kısa uzaklık formülü). *$v_1 \nparallel v_2$ ise d_1 ile d_2 arasındaki en kısa uzaklık*

$$| N_1N_2 | = \frac{|\text{chevron.l}\overrightarrow{P_1P_2}, v_1 \times v_2\text{chevron.r}|}{\| v_1 \times v_2 \|} = \frac{|\,[\, v_1, v_2, \overrightarrow{P_1P_2} \,]\,|}{\| v_1 \times v_2 \|}$$

dir.

İspat.

(4) eşitliğinin iki yanının $v_1 \times v_2$ ile iç çarpımını alalım. $v_1 \times v_2$ hem v_1'e hem v_2'ye dik olduğundan $\langle v_1, v_1 \times v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \times v_2 \rangle = 0$ dır. Bu yüzden

$$\text{chevron.l}\overrightarrow{N_1N_2}, v_1 \times v_2\text{chevron.r} = \text{chevron.l}\overrightarrow{P_1P_2}, v_1 \times v_2\text{chevron.r}$$

olur. Öte yandan $\overrightarrow{N_1N_2}$ hem v_1'e hem v_2'ye diktir. $N_1 = N_2$ değilse, yukarıda andığımız gözlemden $v_1 \times v_2$'ye paraleldir. İki paralel vektör arasındaki açı 0 ya da π olduğundan kosinüsünün mutlak değeri 1'dir, dolayısıyla

$$|\text{chevron.l}\overrightarrow{N_1N_2}, v_1 \times v_2\text{chevron.r}| = | N_1N_2 | \, \| v_1 \times v_2 \|$$

dir. $N_1 = N_2$ ise iki yan da 0'dır ve eşitlik yine doğrudur. İki eşitliği birleştirip $\| v_1 \times v_2 \| \neq 0$ sayısına bölersek birinci formül çıkar. İkinci formül Önerme 9.1'deki $[\, v_1, v_2, \overrightarrow{P_1P_2} \,] = \text{chevron.l}v_1 \times v_2, \overrightarrow{P_1P_2}\text{chevron.r}$ eşitliğinden gelir. Son olarak Teorem 11.4'ye göre $| N_1N_2 |$ en kısa uzaklıktır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani en kısa uzaklığı bulmak için ayakları hesaplamaya gerek yoktur: iki doğrudan birer nokta alıp birleştiren $\overrightarrow{P_1P_2}$ vektörünü, ortak dikme doğrultusundaki $\dfrac{v_1 \times v_2}{\| v_1 \times v_2 \|}$ birim vektörü üzerine izdüşürmek yeter. Bu izdüşümün uzunluğu, P_1 ve P_2 doğrular üzerinde nasıl seçilirse seçilsin aynıdır. Formülün payı karma çarpım olduğundan uzaklığın bir hacim yorumu da vardır: v_1, v_2 ve $\overrightarrow{P_1P_2}$ üzerine kurulan paralelyüzün hacmi, taban alanı $\| v_1 \times v_2 \|$ ile yüksekliğin çarpımıdır ve bu yükseklik tam olarak en kısa uzaklıktır. Formül bize aykırılık için tek bir sayıya bakan bir ölçüt de verir.

Sonuç 11.1 (Aykırılık ölçütü). *d_1 ile d_2 doğrularının aykırı olması için gerek ve yeter koşul*

$$\left[\, v_1, v_2, \overrightarrow{P_1P_2} \,\right] \neq 0$$

olmasıdır. Buna denk olarak, $\left[\, v_1, v_2, \overrightarrow{P_1P_2} \,\right] = 0$ ise doğrular kesişir ya da paraleldir.

> ***İspat.***
> *$v_1 \parallel v_2$ ise Önerme 9.3'den $v_1 \times v_2 = 0$ ve karma çarpım* $\langle v_1 \times v_2, \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = 0$ *dır. Bu durumda doğrular paraleldir, aykırı değildir; ölçüt doğrudur.*
> *$v_1 \nparallel v_2$ olsun. Teorem 11.3'dan doğrular ya kesişir ya da aykırıdır. Kesişiyorlarsa $X = Y = K$ seçimi $|\, XY \,| = 0$ verir, en kısa uzaklık 0'dır. Tersine en kısa uzaklık 0 ise Teorem 11.4'den $N_1 = N_2$ olur ve bu nokta ortaktır. Demek ki doğruların kesişmesi en kısa uzaklığın 0 olmasıyla, Teorem 11.5'ten de karma çarpımın 0 olmasıyla denktir. Aykırılık bunun değili olduğundan karma çarpımın sıfırdan farklı olmasıyla denktir.*
> ■

Ortak dikmenin ayaklarını dört adımda bulmak

1. Doğrulardan P_1, v_1, P_2, v_2'yi okuyun ve $\overrightarrow{P_1P_2}$'yi hesaplayın.
2. $\overrightarrow{N_1N_2} = \overrightarrow{P_1P_2} + \lambda_2 v_2 - \lambda_1 v_1$ vektörünü bileşenleriyle yazın.
3. Bu vektörün v_1 ve v_2 ile iç çarpımlarını sıfıra eşitleyip (3) sistemini çözün.
4. λ_1'i d_1'e, λ_2'yi d_2'ye yazarak N_1 ile N_2'yi bulun. Denetim: $\overrightarrow{N_1N_2}$, $v_1 \times v_2$'ye paralel olmalı ve uzunluğu formüldeki sayıya eşit çıkmalıdır.

Örnek 11.10 (Aykırı iki doğru arasındaki en kısa uzaklık).

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+5}{-2}$$

ile

$$d_2 : \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-5}$$

doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulalım.

> **Çözüm.**
> Kartezyen denklemlerden
>
> $$P_1(0,2,-5), v_1 = (2,-1,-2), \qquad P_2(-1,2,0), v_2 = (4,-3,-5)$$
>
> okunur. Parametrik denklemler
>
> $$\begin{aligned} d_1 : \{ & x = 2\lambda_1 \\ & y = 2 - \lambda_1 \\ & z = -5 - 2\lambda_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} d_2 : \{ & x = -1 + 4\lambda_2 \\ & y = 2 - 3\lambda_2 \\ & z = -5\lambda_2 \end{aligned}$$
>
> dir. Teorem 11.5'i kullanacağız. Önce vektörel çarpım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \big(\ (-1)(-5) - (-2)(-3)\ \big)\, e_1 - \big(\ 2\cdot(-5) - (-2)\cdot 4\ \big)\, e_2 \\ &\quad + \big(\ 2\cdot(-3) - (-1)\cdot 4\ \big)\, e_3 \\ &= (5-6)\, e_1 - (-10+8)\, e_2 + (-6+4)\, e_3 \\ &= (-1, 2, -2). \end{aligned}$$

Sıfırdan farklı olduğundan $v_1 \nparallel v_2$ dir. Uzunluğu

$$\| \, v_1 \times v_2 \, \| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

tür. Ayrıca

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-1-0, 2-2, 0+5) = (-1, 0, 5)$$

ve

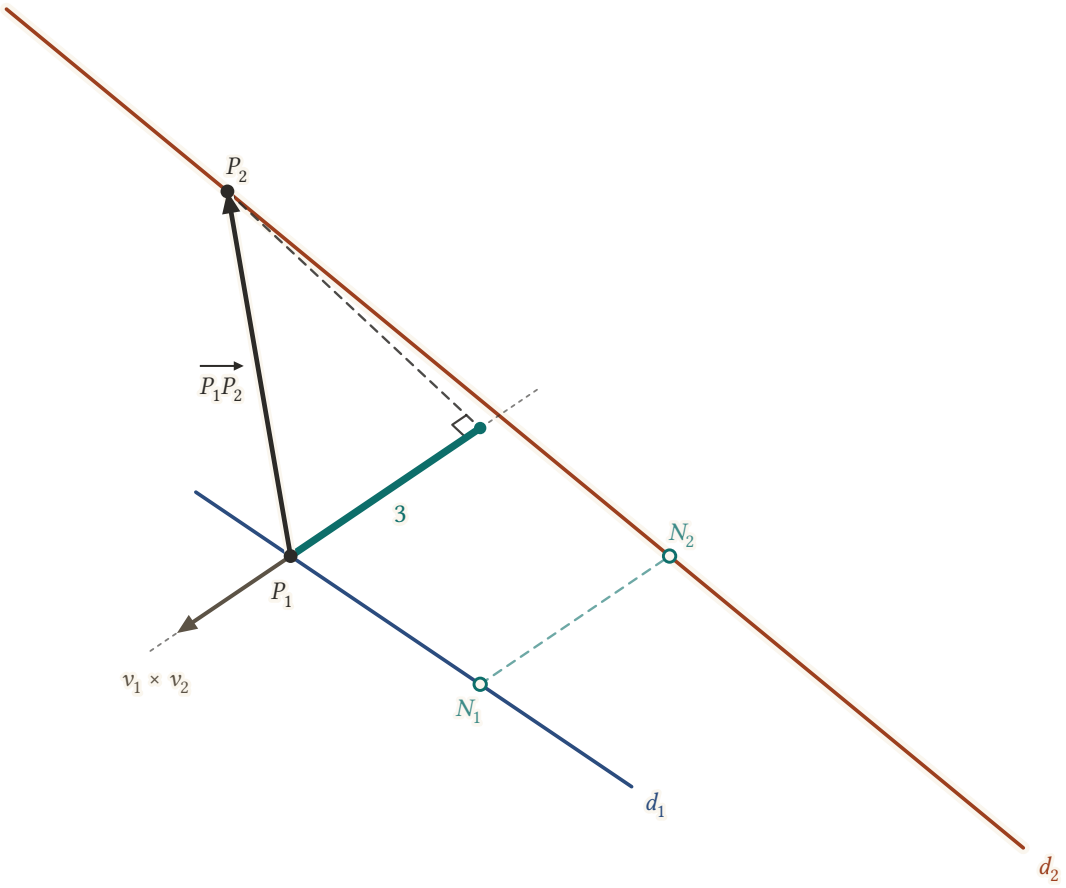
$$\begin{aligned} \text{chevron.l} v_1 \times v_2, \overrightarrow{P_1P_2} \text{chevron.r} &= (-1)(-1) + 2\cdot 0 + (-2)\cdot 5 \\ &= 1 + 0 - 10 = -9 \end{aligned}$$

dur. Karma çarpım sıfırdan farklı olduğundan Sonuç 11.1 gereği doğrular aykırıdır. En kısa uzaklık

$$| \, N_1N_2 \, | = \frac{|\,-9\,|}{3} = 3$$

tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.13: P_1P_2 vektörünün $v_1 \times v_2$ doğrultusu üzerindeki izdüşümünün uzunluğu (kalın parça) 3'tür. Soluk kesikli N_1N_2 ortak dikmesi bu parçaya paraleldir ve onunla aynı uzunluktadır.

■

Örnek 11.11 (Ortak dikmenin ayakları).

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+5}{-2}$$

ile

$$d_2 : \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-5}$$

doğruları arasındaki en kısa uzaklığı veren dikmenin ayaklarını bulalım.

Çözüm.
Bir önceki örnekteki gibi $P_1(0,2,-5)$, $v_1 = (2,-1,-2)$, $P_2(-1,2,0)$, $v_2 = (4,-3,-5)$ ve $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1,0,5)$ tir. (4)'ten

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N_1N_2} &= (-1,0,5) + \lambda_2(4,-3,-5) - \lambda_1(2,-1,-2)\\ &= (-1+4\lambda_2-2\lambda_1, -3\lambda_2+\lambda_1, 5-5\lambda_2+2\lambda_1)\end{aligned}$$

dir. Bu vektörün v_1 ile iç çarpımı sıfır olmalıdır:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$2(-1+4\lambda_2-2\lambda_1)-(-3\lambda_2+\lambda_1)$$
$$-2(5-5\lambda_2+2\lambda_1)=0.$$

Açarsak

$$-2+8\lambda_2-4\lambda_1+3\lambda_2-\lambda_1-10+10\lambda_2-4\lambda_1=0,$$

yani

$$21\lambda_2-9\lambda_1=12 \Longrightarrow 7\lambda_2-3\lambda_1=4 \qquad (*)$$

bulunur. v_2 ile iç çarpımı da sıfır olmalıdır:

$$4(-1+4\lambda_2-2\lambda_1)-3(-3\lambda_2+\lambda_1)$$
$$-5(5-5\lambda_2+2\lambda_1)=0.$$

Açarsak

$$-4+16\lambda_2-8\lambda_1+9\lambda_2-3\lambda_1-25+25\lambda_2-10\lambda_1=0,$$

yani

$$50\lambda_2-21\lambda_1=29 \qquad (**)$$

bulunur. $(*)$'ı 7 ile çarparsak $49\lambda_2-21\lambda_1=28$ olur. Bunu $(**)$'dan çıkarırsak $\lambda_2=1$, sonra $(*)$'dan $3\lambda_1=7-4=3$, yani $\lambda_1=1$ bulunur.
Parametreleri (2)'de yerine yazalım:

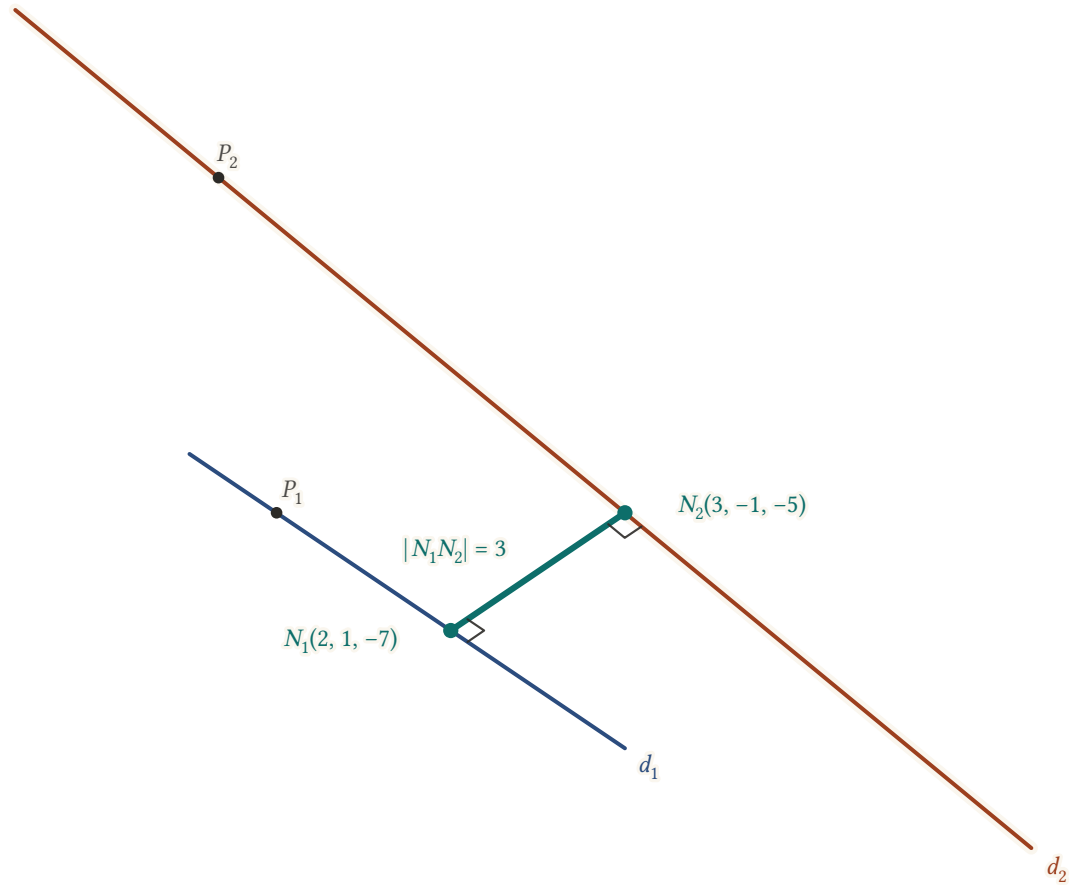
$$n_1=(0,2,-5)+1\cdot(2,-1,-2)=(2,1,-7),$$
$$n_2=(-1,2,0)+1\cdot(4,-3,-5)=(3,-1,-5).$$

Ortak dikmenin ayakları

$$N_1(2,1,-7), \qquad N_2(3,-1,-5)$$

tir. Denetim: $\overrightarrow{N_1N_2}=(1,-2,2)=-(v_1\times v_2)$ olup ortak dikme doğrultusundadır ve $\mid N_1N_2 \mid = \sqrt{1+4+4}=3$, Örnek 11.10'taki sonuçla aynıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.14: Aykırı d_1 ve d_2 doğrularının ortak dikmesi $N_1(2, 1, -7)$ ile $N_2(3, -1, -5)$ arasındadır; iki doğruya da diktir ve uzunluğu 3'tür.

■

Örnek 11.12 (Karma çarpımla kesişme koşulu). Örnek 11.6'ndeki

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-2m}{1} = \frac{z-1}{1}, \qquad d_2 : \frac{x-m}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$$

doğruları için aynı soruyu Sonuç 11.1 ile yanıtlayalım.

Çözüm.
$P_1(0, 2m, 1), v_1 = (2, 1, 1), P_2(m, 0, 1), v_2 = (1, 2, 1)$ dir. $v_1 \nparallel v_2$ olduğundan doğrular paralel olamaz; Sonuç 11.1'e göre kesişmeleri için gerek ve yeter koşul karma çarpımın sıfır olmasıdır.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (m, -2m, 0)$$

ve

$$\begin{aligned}\left[\, v_1, v_2, \overrightarrow{P_1P_2} \,\right] &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ m & -2m & 0 \end{vmatrix} \\ &= m\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-2m)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \\ &= m\,(1-2) + 2m\,(2-1) = m\end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dir (determinantı üçüncü satıra göre açtık). Karma çarpım ancak $m = 0$ için sıfırdır. Sonuç Örnek 11.6 ile aynıdır: $m = 0$ için doğrular kesişir, $m \neq 0$ için aykırıdır.
■

Doğrultmanları paralel olan doğrularda $v_1 \times v_2 = 0$ olduğundan en kısa uzaklık formülü kullanılamaz. Bu durumda en kısa uzaklık, bir doğrunun herhangi bir noktasının öbür doğruya uzaklığıdır. Gerçekten bir doğruyu kendine paralel kaydırmak ötekine olan uzaklığı değiştirmez: $d_1 \parallel d_2$ ise d_2'nin her noktası d_1'e aynı uzaklıktadır, çünkü Teorem 11.2'daki $\text{parallel} v_1 \times \overrightarrow{P_1 Y} \text{parallel}$ ifadesi Y, d_2 üzerinde v_1 doğrultusunda kaydıkça değişmez.

Örnek 11.13 (Paralel iki doğru arasındaki uzaklık). Örnek 11.7'deki

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}, \qquad d_2 : \frac{x-4}{-2} = \frac{y}{-4} = \frac{z-2}{-4}$$

paralel doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulalım.

Çözüm.
d_2'nin $P_2(4,0,2)$ noktasının d_1'e uzaklığını Teorem 11.2 ile hesaplayalım. d_1, $P_1(1,0,-1)$ noktasından geçer ve $v_1 = (1,2,2)$ dir.

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = (3,0,3)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} v_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2} &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (2\cdot 3 - 2\cdot 0)\, e_1 - (1\cdot 3 - 2\cdot 3)\, e_2 + (1\cdot 0 - 2\cdot 3)\, e_3 \\ &= (6, 3, -6) \end{aligned}$$

dır. Uzunluklar

$$\text{parallel} v_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2} \text{parallel} = \sqrt{36+9+36} = 9, \qquad \| v_1 \| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

olduğundan

$$\ell = \frac{9}{3} = 3$$

bulunur. İki doğru arasındaki en kısa uzaklık 3'tür. Önerme 11.1 ile P_2'den d_1'e inilen dikmenin ayağı da bulunabilir $\text{chevron.l} \overrightarrow{P_1 P_2}, v_1 \text{chevron.r} = 3 + 0 + 6 = 9, \| v_1 \| = 9$ olduğundan $H = P_1 + v_1 = (2,2,1)$ ve $\overrightarrow{HP_2} = (2,-2,1)$, uzunluğu 3'tür. Paralel doğrularda ortak dikme tek değildir: d_1'in her noktasından d_2'ye inilen dikme bir ortak dikmedir.
■

11.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda bu bölümün bütün araçlarını kullanacağız: açı formülü, ortak nokta sistemi ve en kısa uzaklık ile ortak dikme.

Alıştırma 11.1 (Paralellik için iki parametre).

$$d_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{m} = \frac{z-3}{4}$$

ve

$$d_2 : \frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z+1}{n}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

doğrularının paralel olması için m ve n ne olmalıdır?

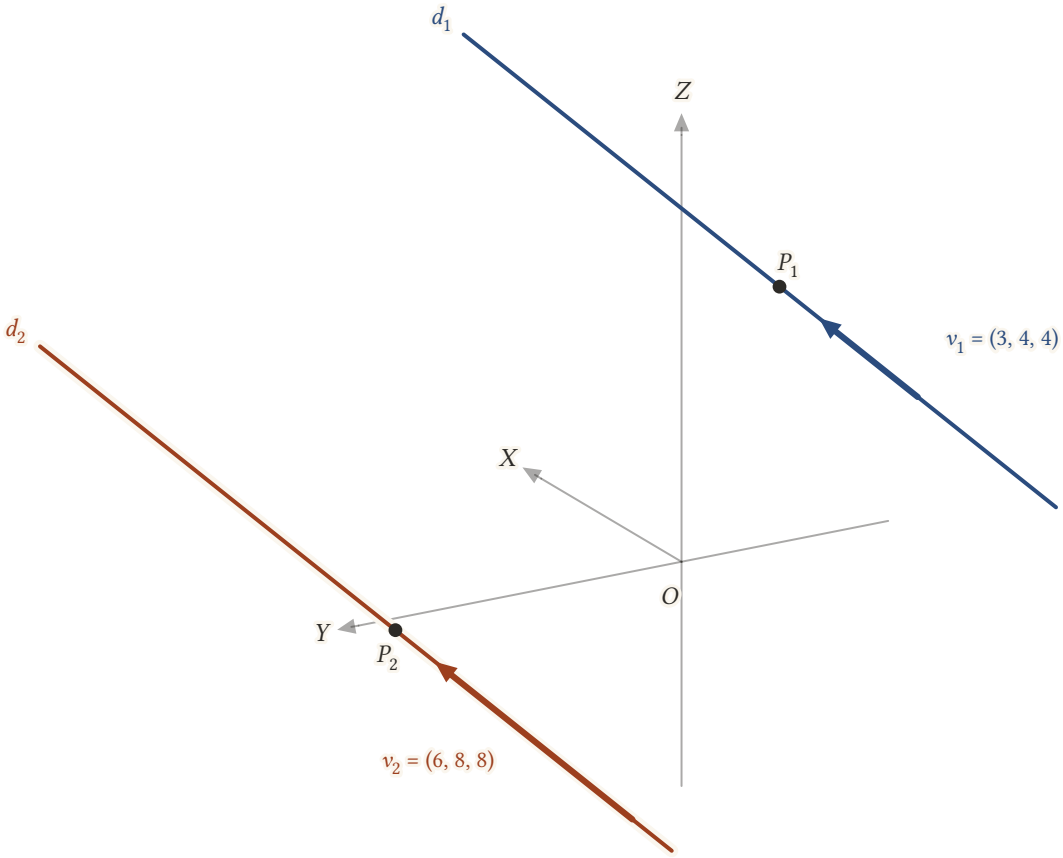
Çözüm.
Doğrultman vektörleri $v_1 = (3, m, 4)$ ve $v_2 = (6, 8, n)$ dir. Tanım gereği

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2$$

dir. İki vektörün paralel olması, karşılıklı bileşenlerinin orantılı olması demektir:

$$\frac{3}{6} = \frac{m}{8} = \frac{4}{n}.$$

İlk oran $\frac{1}{2}$'dir. $\frac{m}{8} = \frac{1}{2}$'den $m = 4$, $\frac{4}{n} = \frac{1}{2}$'den $n = 8$ bulunur. Bu değerlerle $v_2 = (6, 8, 8) = 2\,(3, 4, 4) = 2\,v_1$ olur.
Doğrular çakışık da değildir: $P_1(1, -2, 3)$ ve $P_2(2, 3, -1)$ için $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 5, -4)$ vektörü $v_1 = (3, 4, 4)$'e paralel değildir (ilk bileşenlerin oranı $\frac{1}{3}$, ikincilerin oranı $\frac{5}{4}$). Demek ki $P_2 \notin d_1$ dir ve $m = 4$, $n = 8$ için doğrular paralel ve farklıdır.



Şekil 11.15: $m = 4$, $n = 8$ için d_1 ile d_2 paralel ve farklıdır: $v_2 = 2v_1$, ama P_2 d_1 üzerinde değildir. Oklar, doğrultman vektörlerinin aynı oranda kısaltılmış hâlleridir.

■

Alıştırma 11.2 (Dik iki doğru).

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-4}{3}$$

ile

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d_2 : \frac{x+2}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-11}{-4}$$

doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm.
Doğrultman vektörleri $v_1 = (1,4,3)$ ve $v_2 = (4,2,-4)$ tür. İç çarpımları

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1\cdot 4 + 4\cdot 2 + 3\cdot(-4) = 4 + 8 - 12 = 0$$

dır. Teorem 11.1'ten

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\| v_1 \| \, \| v_2 \|} = 0$$

ve dolayısıyla

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

bulunur. d_1 ile d_2 birbirine diktir.
■

Alıştırma 11.3 (Köklü doğrultman vektörleriyle açı).

$$d_1 : \frac{x-5}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-3}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{z}{1}}{2}$$

ile

$$d_2 : \frac{x+2}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z - \frac{20+7\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}}{-1}$$

doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm.
Açı yalnız doğrultman vektörlerine bağlıdır; d_2'nin karmaşık görünen sabit terimi hesaba girmez. Doğrultman vektörleri

$$v_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \qquad v_2 = (-1,2,-1)$$

dir. İç çarpım

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2 \rangle &= \left(-\frac{1}{2}\right)(-1) + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot(-1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \sqrt{2}\,\sqrt{3} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

dır ($\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ olduğundan). Uzunluklar

$$\begin{aligned}\| v_1 \| &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}} = \sqrt{2}, \\ \| v_2 \| &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

dır. Teorem 11.1'ten

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ve dolayısıyla

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

bulunur.
■

Alıştırma 11.4 (Kesişip kesişmediklerini araştırmak).

$$d_1 : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{4}$$

ile

$$d_2 : \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-3} = \frac{z+4}{-12}$$

doğrularının kesişip kesişmediklerini araştırınız.

Çözüm.
$v_1 = (-2, 1, 4)$ ve $v_2 = (5, -3, -12)$ paralel değildir ($\frac{5}{-2} \neq \frac{-3}{1}$). Doğrular ya kesişir ya da aykırıdır. Parametrik denklemler

$$\begin{aligned} d_1 : \{ & x = 3 - 2\lambda_1 \\ & y = 1 + \lambda_1 \\ & z = 4\lambda_1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & \\ & \\ d_2 : \{ & x = 1 + 5\lambda_2 \\ & y = -3\lambda_2 \\ & z = -4 - 12\lambda_2 \end{aligned}$$

dir. (1) sistemi

$$\begin{aligned} 3 - 2\lambda_1 &= 1 + 5\lambda_2, && \text{(i)} \\ 1 + \lambda_1 &= -3\lambda_2, && \text{(ii)} \\ 4\lambda_1 &= -4 - 12\lambda_2 && \text{(iii)} \end{aligned}$$

olur. (ii)'yi 2 ile çarpıp (i)'ye eklersek λ_1 yok olur:

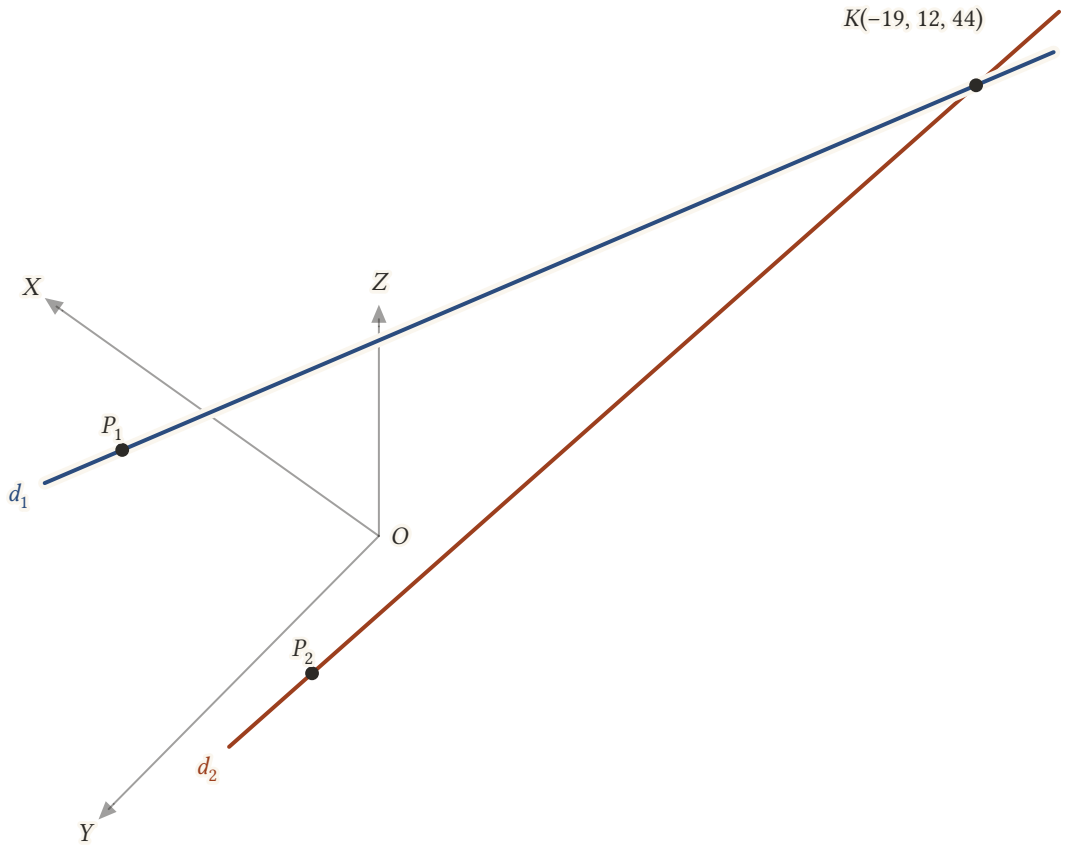
$$3 + 2 = 1 + 5\lambda_2 - 6\lambda_2 \Longrightarrow 5 = 1 - \lambda_2 \Longrightarrow \lambda_2 = -4.$$

(ii)'den $1 + \lambda_1 = 12$, yani $\lambda_1 = 11$ bulunur. (iii)'te deneyelim: sol taraf $4 \cdot 11 = 44$, sağ taraf $-4 - 12 \cdot (-4) = 44$. Üç denklem de sağlanır; $(\lambda_1, \lambda_2) = (11, -4)$ tek çözümdür ve doğrular bir noktada kesişir. Kesişim noktası için $\lambda_1 = 11$'i d_1'e yazalım: $x = 3 - 22 = -19$, $y = 1 + 11 = 12$, $z = 44$. Denetim olarak $\lambda_2 = -4$ ile d_2'den $x = 1 - 20 = -19$, $y = 12$, $z = -4 + 48 = 44$ çıkar. Kesişim noktası

$$K(-19, 12, 44)$$

tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.16: d_1 ile d_2 $K(-19, 12, 44)$ noktasında kesişir. Doğrultman vektörleri neredeyse paralel olduğundan doğrular kesişim noktasına çok yavaş yaklaşır; eksenler başlangıç noktası çevresinde, ölçek için çizilmiştir.

■

Alıştırma 11.5 (En kısa uzaklık).

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y}{4}, z = 1$$

ile

$$d_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{4}$$

doğruları arasındaki en kısa uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
d_1'de z sabit olduğundan doğrultman vektörünün üçüncü bileşeni 0'dır. Buna göre

$$P_1(0,0,1), v_1 = (2,4,0), \qquad P_2(3,2,5), v_2 = (2,2,4)$$

ve parametrik denklemler

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d_1 : \{x = 2\lambda_1 \qquad d_2 : \{x = 3 + 2\lambda_2$$
$$y = 4\lambda_1 \qquad\quad y = 2 + 2\lambda_2$$
$$z = 1 \qquad\quad z = 5 + 4\lambda_2$$

dir. Vektörel çarpım

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (4 \cdot 4 - 0 \cdot 2)\, e_1 - (2 \cdot 4 - 0 \cdot 2)\, e_2 + (2 \cdot 2 - 4 \cdot 2)\, e_3 \\ &= (16, -8, -4) \end{aligned}$$

ve uzunluğu

$$\| v_1 \times v_2 \| = \sqrt{256 + 64 + 16} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$$

dir. $\overrightarrow{P_1P_2} = (3, 2, 4)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \text{chevron.l} v_1 \times v_2, \overrightarrow{P_1P_2} \text{chevron.r} &= 16 \cdot 3 + (-8) \cdot 2 + (-4) \cdot 4 \\ &= 48 - 16 - 16 = 16 \end{aligned}$$

bulunur. Karma çarpım sıfırdan farklı olduğundan doğrular aykırıdır (Sonuç 11.1). Teorem 11.5'ten

$$| \, N_1N_2 \, | = \frac{16}{4\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}} = \frac{4\sqrt{21}}{21}$$

tir.
■

Alıştırma 11.6 (En kısa uzaklığı veren dikmenin ayakları).

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y}{4}, z = 1$$

ile

$$d_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{4}$$

doğruları arasındaki en kısa uzaklığı veren dikmenin ayaklarını bulunuz.

Çözüm.
Önceki alıştırmadaki gibi $P_1(0,0,1)$, $v_1 = (2,4,0)$, $P_2(3,2,5)$, $v_2 = (2,2,4)$ ve $\overrightarrow{P_1P_2} = (3,2,4)$ tür. (4)'ten

$$\begin{aligned} \overrightarrow{N_1N_2} &= (3,2,4) + \lambda_2(2,2,4) - \lambda_1(2,4,0) \\ &= (3 + 2\lambda_2 - 2\lambda_1, 2 + 2\lambda_2 - 4\lambda_1, 4 + 4\lambda_2) \end{aligned}$$

dir. v_1 ile iç çarpımı sıfır olmalıdır:

$$\begin{aligned} &2(3 + 2\lambda_2 - 2\lambda_1) + 4(2 + 2\lambda_2 - 4\lambda_1) + 0 = 0 \\ &\Longrightarrow 6 + 4\lambda_2 - 4\lambda_1 + 8 + 8\lambda_2 - 16\lambda_1 = 0 \\ &\Longrightarrow -20\lambda_1 + 12\lambda_2 = -14 \end{aligned}$$

yani

$$10\lambda_1 - 6\lambda_2 = 7. \qquad (*)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

v_2 ile iç çarpımı da sıfır olmalıdır:

$$\begin{aligned}&2(3+2\lambda_2-2\lambda_1)+2(2+2\lambda_2-4\lambda_1)\\&\quad+4(4+4\lambda_2)=0\\&\Longrightarrow 6+4\lambda_2-4\lambda_1+4+4\lambda_2-8\lambda_1+16+16\lambda_2=0\\&\Longrightarrow -12\lambda_1+24\lambda_2=-26\end{aligned}$$

yani

$$-6\lambda_1+12\lambda_2=-13. \qquad (**)$$

$(*)$'ı 2 ile çarpıp $(**)$'a eklersek λ_2 yok olur: $20\lambda_1-6\lambda_1=14-13$, yani $14\lambda_1=1$ ve

$$\lambda_1=\frac{1}{14}$$

bulunur. $(*)$'dan

$$6\lambda_2=10\cdot\frac{1}{14}-7=\frac{5}{7}-\frac{49}{7}=-\frac{44}{7},$$

yani

$$\lambda_2=-\frac{22}{21}$$

dir. Parametreleri (2)'de yerine yazalım:

$$\begin{aligned}n_1&=(0,0,1)+\frac{1}{14}(2,4,0)=\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},1\right),\\n_2&=(3,2,5)-\frac{22}{21}(2,2,4)\\&=\left(3-\frac{44}{21},2-\frac{44}{21},5-\frac{88}{21}\right)\\&=\left(\frac{19}{21},-\frac{2}{21},\frac{17}{21}\right).\end{aligned}$$

Ortak dikmenin ayakları

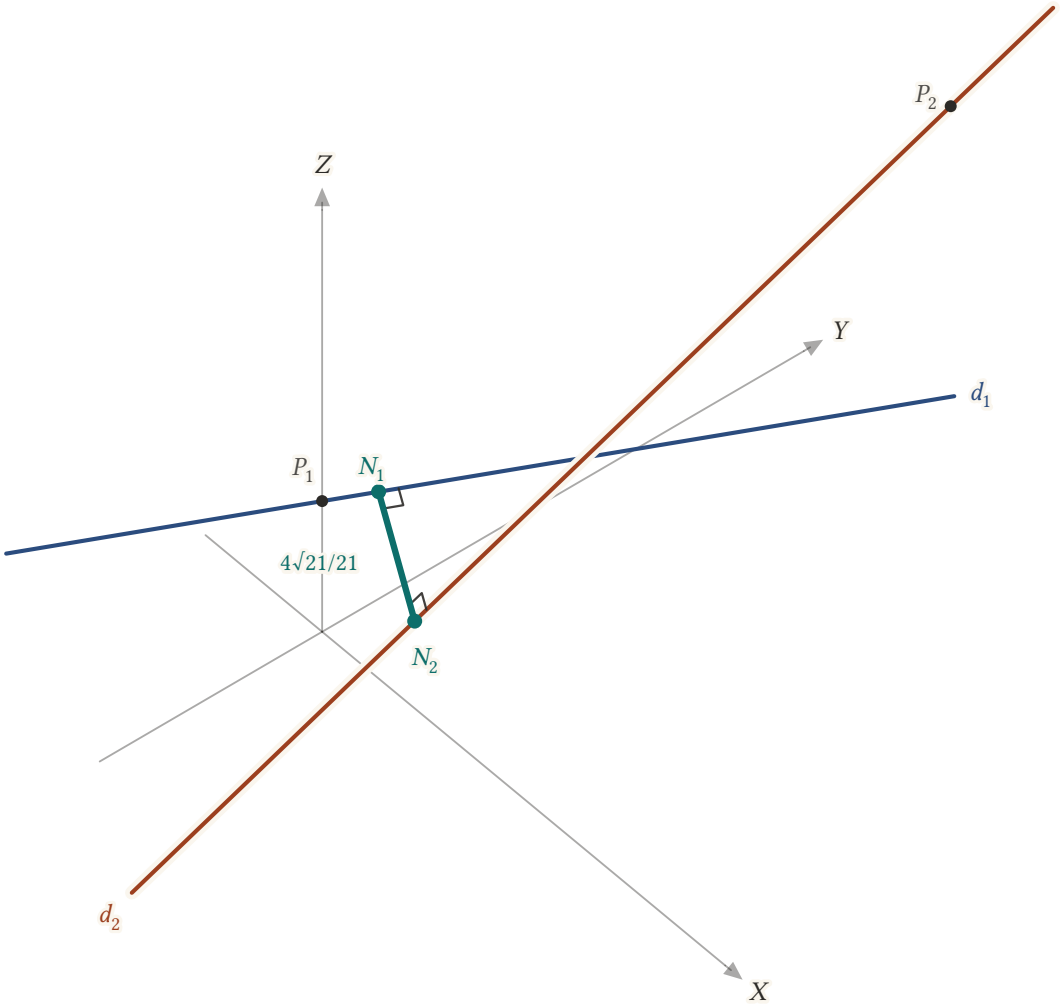
$$N_1\left(\frac{1}{7},\frac{2}{7},1\right),\qquad N_2\left(\frac{19}{21},-\frac{2}{21},\frac{17}{21}\right)$$

dir. Denetim:

$$\overrightarrow{N_1N_2}=\left(\frac{16}{21},-\frac{8}{21},-\frac{4}{21}\right)=\frac{1}{21}\left(v_1\times v_2\right)$$

olup ortak dikme doğrultusundadır. Uzunluğu $\frac{1}{21}\cdot 4\sqrt{21}=\frac{4\sqrt{21}}{21}$'dir; önceki alıştırmanın sonucuyla aynıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.17: Aykırı d_1 ve d_2 doğrularının ortak dikmesinin ayakları $N_1(1/7,\ 2/7,\ 1)$ ve $N_2(19/21,\ -2/21,\ 17/21)$; aralarındaki uzaklık $4\sqrt{21}/21 \approx 0{,}87$'dir.

■

Alıştırma 11.7 (Ortak dikmenin denklemi).

$$d_1 : \frac{x}{2} = \frac{y}{4}, z = 1$$

ile

$$d_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{4}$$

doğruları arasındaki en kısa uzaklığı veren dikmenin ayaklarından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm.
Önceki alıştırmada ortak dikmenin ayaklarını

$$N_1\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 1\right), \qquad N_2\left(\frac{19}{21}, -\frac{2}{21}, \frac{17}{21}\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulduk. Aranan doğru, bu iki noktadan geçen doğrudur, yani d_1 ile d_2'nin ortak dikmesidir. Doğrultman vektörü olarak

$$\overrightarrow{N_1N_2} = \left(\frac{16}{21}, -\frac{8}{21}, -\frac{4}{21}\right) = \frac{4}{21}\,(4,-2,-1)$$

vektörünün sıfırdan farklı bir katı olan $v = (4,-2,-1)$'i alabiliriz. Bu seçim, iki doğruya birden dik doğrultmanın $v_1 \times v_2$'ye paralel olmasıyla da uyumludur:

$$v_1 \times v_2 = (16,-8,-4) = 4\,(4,-2,-1).$$

N_1 noktasından geçen ve doğrultmanı v olan doğrunun parametrik denklemleri

$$x = \frac{1}{7} + 4\lambda, \qquad y = \frac{2}{7} - 2\lambda, \qquad z = 1 - \lambda$$

ve kartezyen denklemleri

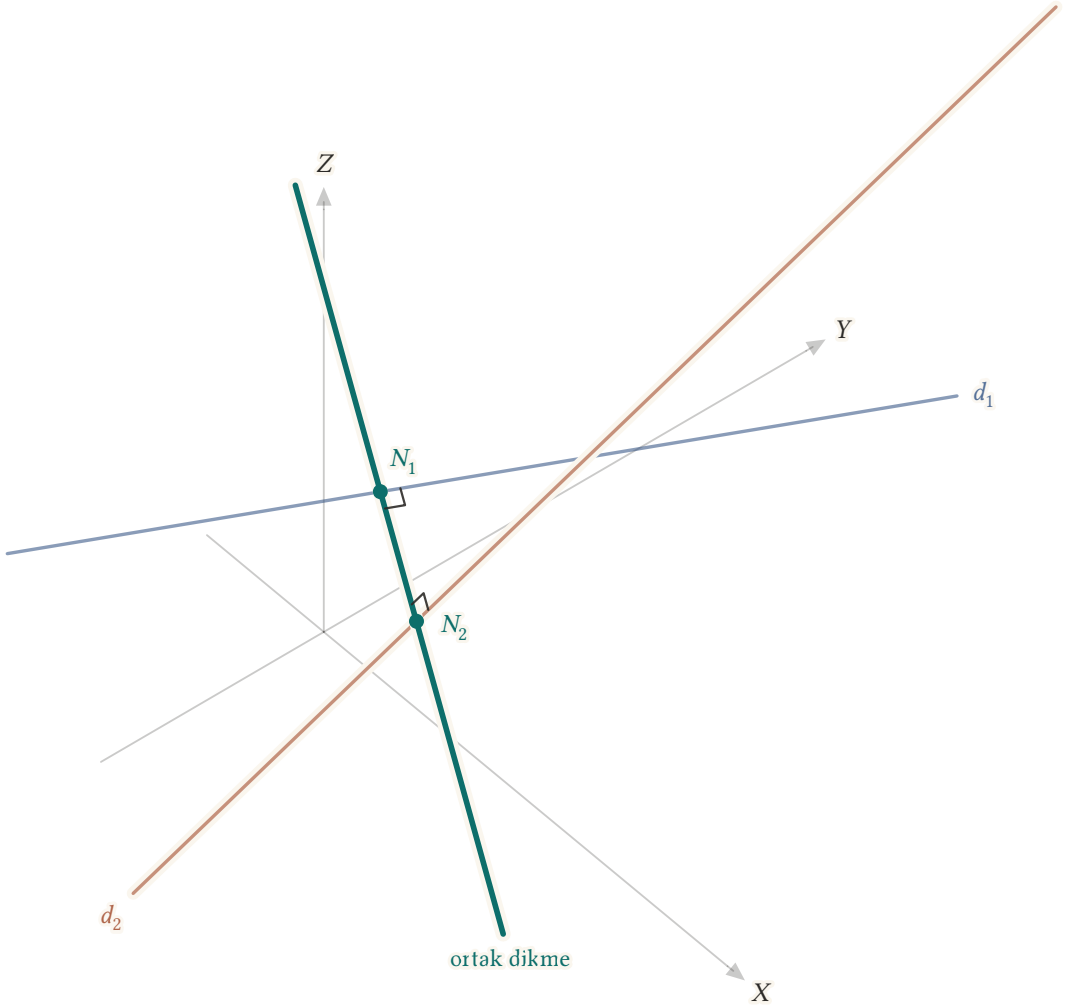
$$\frac{x - \frac{1}{7}}{4} = \frac{y - \frac{2}{7}}{-2} = \frac{z-1}{-1}$$

dir.
Denetleyelim. $\lambda = \frac{4}{21}$ için $x = \frac{3}{21} + \frac{16}{21} = \frac{19}{21}$, $y = \frac{6}{21} - \frac{8}{21} = -\frac{2}{21}$, $z = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$ bulunur; doğru N_2'den de geçer. Ayrıca doğru iki doğruya da diktir:

$$\langle v, v_1\rangle = 4\cdot 2 + (-2)\cdot 4 + (-1)\cdot 0 = 0,$$

$$\langle v, v_2\rangle = 4\cdot 2 + (-2)\cdot 2 + (-1)\cdot 4 = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 11.18: N_1 ve N_2′den geçen ortak dikme doğrusu; doğrultman vektörü $(4, -2, -1)$, $v_1 \times v_2$′ye paraleldir ve doğru iki doğruyu da dik keser.

■

Uzayda iki doğrunun birbirine göre bütün durumlarını ve aralarındaki uzaklığı artık hesaplayabiliyoruz. Aykırı doğrular konusunda sezgisel olarak kullandığımız "ortak bir düzlem üzerinde bulunmama" fikri, düzlemin denklemini yazdığımızda kesin bir anlam kazanacak. Bunu bir sonraki bölüm olan Uzayda Düzlem Denklemleri yapacak.

 CC BY-NC-SA 4.0

12. Uzayda Düzlem Denklemleri

Uzayda bir doğruyu bir noktası ve bir doğrultusuyla belirlemiştik. Bir düzlem için de benzer bir fikir işe yarar, ama bu kez doğrultuyu düzlemin **içinde** değil, düzleme **dik** olarak seçeriz. Düzleme dik tek bir vektör, düzlemin nasıl "durduğunu" tamamen söyler: bu vektöre dik olan bütün doğrultular düzlemin içindedir. Bir noktası ve bu dik vektör bilinince düzlem tek türlü belirlenir.
Bu bölümde düzlemin denklemini üç farklı veriden kuracağız: bir noktası ve düzleme dik bir vektör; bir noktası ve düzleme paralel iki doğrultu; doğrudaş olmayan üç noktası. Üç durumda da araçlarımız iç çarpım, vektörel çarpım ve karma çarpım olacak (bkz. Vektörel ve Karma Çarpım).

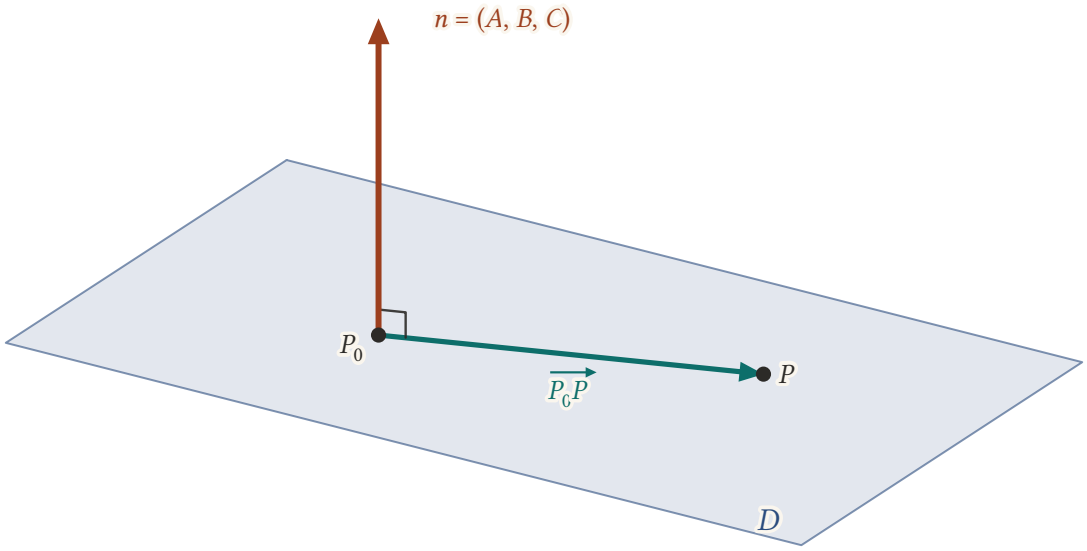
12.1 Bir Noktası ve Normali Verilen Düzlem

Bir $\mathfrak{D}$ düzlemi verilsin. $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathfrak{D}$'nin bilinen bir noktası ve $n = (A, B, C)$ de $\mathfrak{D}$'ye dik olan, sıfırdan farklı bir vektör olsun. $P(x, y, z)$ uzayın herhangi bir noktası olsun.
P noktası $\mathfrak{D}$'nin üzerindeyse P_0 ile P'yi birleştiren $\overrightarrow{P_0P}$ vektörü düzlemin içinde kalır; düzleme dik olan n vektörü de düzlemin içindeki her doğrultuya diktir. Tersine, $\overrightarrow{P_0P}$ vektörü n'ye dikse P, P_0'dan geçen ve n'ye dik olan düzlemin, yani $\mathfrak{D}$'nin üzerindedir. $P = P_0$ durumu da buna uyar, çünkü sıfır vektörü her vektöre diktir (Tanım 8.3). Böylece Önerme 8.2 iii) yardımıyla

$$P \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp n \Leftrightarrow \text{chevron.l}\overrightarrow{P_0P}, n\text{chevron.r} = 0$$

bulunur.
Bu gözlem, aşağıdaki iki tanımın dayanağıdır.

Tanım 12.1 (Düzlemin normal vektörü). $\mathfrak{D}$ bir düzlem olsun. $\mathfrak{D}$'ye dik olan sıfırdan farklı bir $n = (A, B, C)$ vektörüne $\mathfrak{D}$ düzleminin bir **normal vektörü** (kısaca **normali**) denir.



Şekil 12.1: Düzlemin bir P_0 noktası ve normali n. Düzlemin her P noktası için P_0P vektörü düzlemin içindedir ve n'ye diktir.

Yani normal, düzlemin "yüzünü çevirdiği" yönü gösteren vektördür. Normal vektör tek değildir: n bir normal ise sıfırdan farklı her λ için λn de bir normaldir, çünkü λn de düzlemdeki her vektöre diktir.

Özellikle n ile $-n$, düzlemin iki yüzünü gösteren iki normaldir. Hesaplarda bu serbestliği, normalin bileşenlerini sadeleştirmek için sık sık kullanacağız.

Tanım 12.2 (Düzlemin vektörel denklemi). P_0 noktasından geçen ve normali n olan $\mathfrak{D}$ düzleminin herhangi bir noktası P olmak üzere,

$$\text{chevron.l}\overrightarrow{P_0P}, n\text{chevron.r} = 0$$

denklemine $\mathfrak{D}$ düzleminin **vektörel denklemi** denir.

Yani vektörel denklem, "düzlemin sabit noktasından düzlemdeki bir noktaya giden her vektör normale diktir" cümlesinin iç çarpımla yazılışıdır. Denklemi sağlayan noktalar tam olarak $\mathfrak{D}$'nin noktalarıdır.
Vektörel denklemi koordinatlarla açalım. $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ve $n = (A, B, C)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\text{chevron.l}\overrightarrow{P_0P}, n\text{chevron.r} = 0 &\Leftrightarrow \text{chevron.l}(x - x_0, y - y_0, z - z_0), (A, B, C)\text{chevron.r} = 0 \\ &\Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0\end{aligned}$$

bulunur. Burada sabit terimi kısaca

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$

diye adlandırırsak denklem

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

biçimini alır.

Tanım 12.3 (Düzlemin kartezyen denklemi). $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve normali $n = (A, B, C)$ olan $\mathfrak{D}$ düzlemi için, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ olmak üzere

$$\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$$

denklemine $\mathfrak{D}$ düzleminin **kartezyen denklemi** denir.

Yani kartezyen denklem, vektörel denklemdeki iç çarpımın açılıp düzenlenmiş hâlidir. Denklemin önemli bir özelliği şudur: x, y, z'nin katsayıları doğrudan düzlemin bir normalinin bileşenleridir. Denklemi okuyan biri, hiç hesap yapmadan normali görür.
Bu gözlemin tersi de doğrudur: katsayılarından en az biri sıfırdan farklı olan her birinci derece denklem bir düzlem belirtir.

Önerme 12.1 (Birinci derece denklem bir düzlemdir). *$A, B, C, D \in \mathbb{R}$ ve $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ olsun. Bu durumda*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

denklemini sağlayan (x, y, z) noktalarının kümesi, normali $n = (A, B, C)$ olan bir düzlemdir.

> ***İspat.***
> *Önce denklemi sağlayan bir nokta bulalım. $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ olduğundan katsayılardan biri sıfırdan farklıdır; $A \neq 0$ olduğunu varsayalım ($B \neq 0$ ya da $C \neq 0$ durumunda aynı işlem o değişkenle yapılır). Bu durumda*
>
> $$P_0\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$$
>
> *noktası denklemi sağlar, çünkü*
>
> $$A \cdot \left(-\frac{D}{A}\right) + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = -D + D = 0$$
>
> *dır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi $P_0(x_0, y_0, z_0)$ denklemi sağlayan bu nokta olsun; yani $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$ dir. Bu eşitliği kullanarak herhangi bir (x, y, z) için

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) \\ &= A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) \\ &= \langle \overrightarrow{P_0P}, n \rangle \end{aligned}$$

yazabiliriz; burada $P = (x, y, z)$ ve $n = (A, B, C)$ dir. Demek ki (x, y, z) noktasının denklemi sağlaması, $\langle \overrightarrow{P_0P}, n \rangle = 0$ olmasıyla aynı şeydir. Bu ise P'nin, P_0'dan geçen ve n'ye dik olan düzlemin üzerinde olması demektir. $n \neq 0$ olduğundan bu düzlemin normali n dir.
■

Önermeden bir sonuç daha çıkar: bir düzlemin denklemi de tek değildir. $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda Ax + \lambda By + \lambda Cz + \lambda D = 0$$

denklemlerini aynı noktalar sağlar, dolayısıyla ikisi aynı düzlemin denklemidir. Bu nedenle bir düzlem denklemini, katsayılarının ortak çarpanına bölerek sadeleştirebiliriz.

Bir noktası ve normali verilen düzlemin denklemini iki adımda yazmak

1. Düzlemin bir normalini $n = (A, B, C)$ ve bir noktasını $P_0(x_0, y_0, z_0)$ belirleyin. Düzlem bir doğruya dik isteniyorsa, o doğrunun doğrultman vektörü normal olarak alınabilir.
2. $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ yazıp $\langle \overrightarrow{P_0P}, n \rangle = 0$ iç çarpımını açın ve $Ax + By + Cz + D = 0$ biçiminde düzenleyin.

Örnek 12.1 (Noktası ve normali verilen düzlem). $P_0(1, -3, 2)$ noktasından geçen ve $n = (5, -2, 3)$ vektörüne dik olan düzlemin kartezyen denklemini bulalım.

Çözüm.
Aranan düzlem $\mathfrak{D}$ ve $P(x, y, z)$, $\mathfrak{D}$'nin herhangi bir noktası olsun. n vektörü $\mathfrak{D}$'ye dik olduğundan normaldir. Ayrıca

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - 1, y + 3, z - 2)$$

dir. Vektörel denklemi açalım:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{P_0P}, n \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle (x - 1, y + 3, z - 2), (5, -2, 3) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow 5(x - 1) + (-2)(y + 3) + 3(z - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x - 5 - 2y - 6 + 3z - 6 = 0. \end{aligned}$$

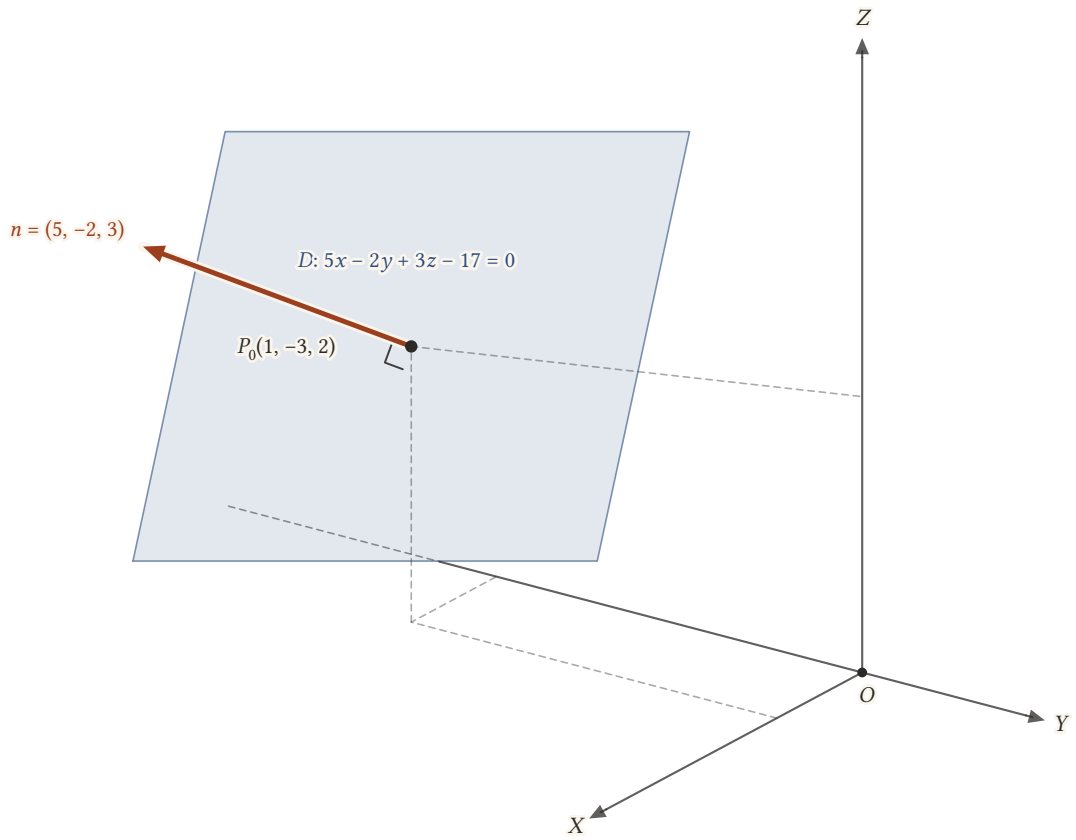
Sabit terimler toplanınca $-5 - 6 - 6 = -17$ olur ve

$$\mathfrak{D} : 5x - 2y + 3z - 17 = 0$$

bulunur. Kontrol olarak P_0'ı yerine yazalım:

$$5 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 - 17 = 5 + 6 + 6 - 17 = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.2: $5x - 2y + 3z - 17 = 0$ düzleminin $P_0(1, -3, 2)$ çevresindeki parçası ve normali $n = (5, -2, 3)$ (0,4 katı çizildi).

■

Düzlemin bir doğruya dik olması istendiğinde de aynı yol izlenir: doğru düzleme dik olduğundan doğrunun doğrultman vektörü düzlemin normaline paraleldir ve normal olarak doğrudan bu vektör alınabilir.

Örnek 12.2 (Bir doğruya dik düzlem). $P_0(4, -2, 1)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü $v = (7, 2, -3)$ olan doğruya dik düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm.
Aranan düzlem $\mathfrak{D}$ olsun. Doğru $\mathfrak{D}$'ye dik olduğundan $v = (7, 2, -3)$ vektörü $\mathfrak{D}$'nin normaline paraleldir; bu yüzden normal olarak $n = v = (7, 2, -3)$ alınabilir. Düzlemin herhangi bir noktası $P(x, y, z)$ için

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - 4, y + 2, z - 1)$$

olup

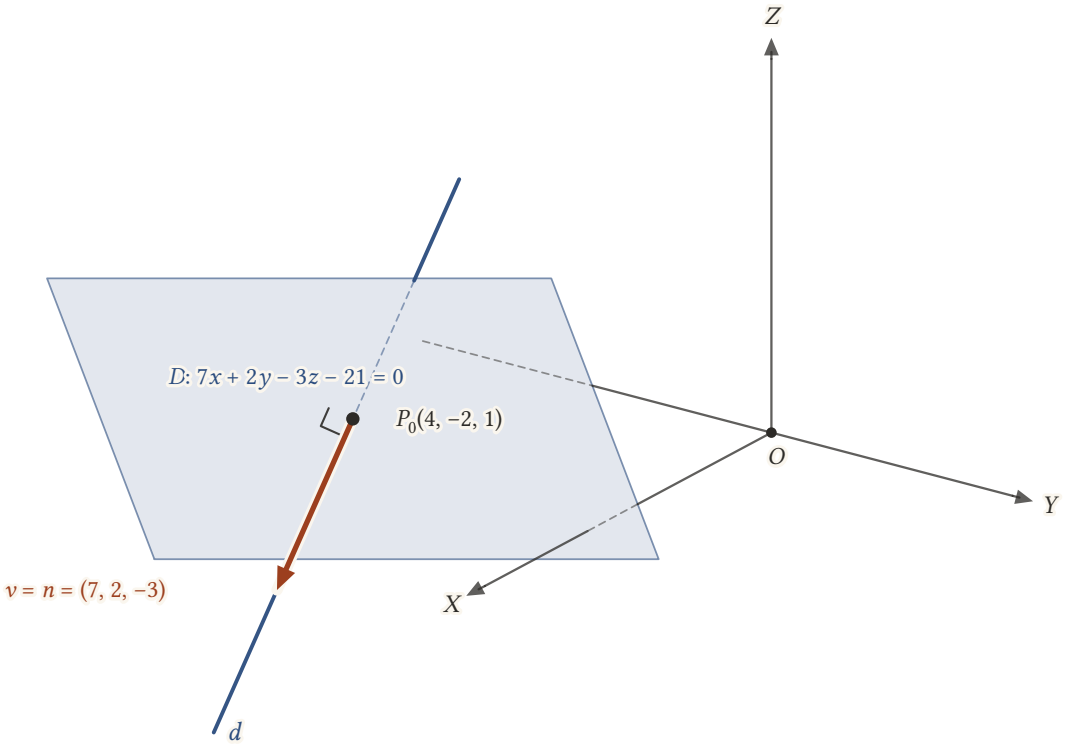
$$\begin{aligned} \text{chevron.l}\overrightarrow{P_0P}, n\text{chevron.r} = 0 &\Leftrightarrow \text{chevron.l}(x - 4, y + 2, z - 1), (7, 2, -3)\text{chevron.r} = 0 \\ &\Leftrightarrow 7(x - 4) + 2(y + 2) + (-3)(z - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 7x - 28 + 2y + 4 - 3z + 3 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $-28 + 4 + 3 = -21$ olduğundan

$$\mathfrak{D} : 7x + 2y - 3z - 21 = 0$$

elde edilir. Kontrol:

$$7 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 - 21 = 28 - 4 - 3 - 21 = 0.$$



Şekil 12.3: $P_0(4, -2, 1)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $v = (7, 2, -3)$ olan d doğrusuna dik düzlem. Doğrunun düzlemin arkasında kalan kısmı kesiklidir.

■

Örnek 12.3 (Kartezyen denklemi verilen doğruya dik düzlem).

$$d : \frac{x-1}{2} = y = z - 1$$

doğrusuna dik olan ve $P_0(0, 0, 1)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm.
Aranan düzlem $\mathfrak{D}$ olsun. d'nin denklemini $\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{1}$ biçiminde yazarsak doğrunun $(1, 0, 1)$ noktasından geçtiği ve doğrultman vektörünün $v = (2, 1, 1)$ olduğu görülür. d, $\mathfrak{D}$'ye dik olduğundan normal olarak $n = v = (2, 1, 1)$ alınabilir.
$P(x, y, z)$, $\mathfrak{D}$'nin herhangi bir noktası olsun. $\overrightarrow{P_0P} = (x,y,z-1)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\text{chevron.l}\overrightarrow{P_0P}, n\text{chevron.r} = 0 &\Leftrightarrow \text{chevron.l}(x,y,z-1), (2,1,1)\text{chevron.r} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + y + (z-1) = 0\end{aligned}$$

ve böylece

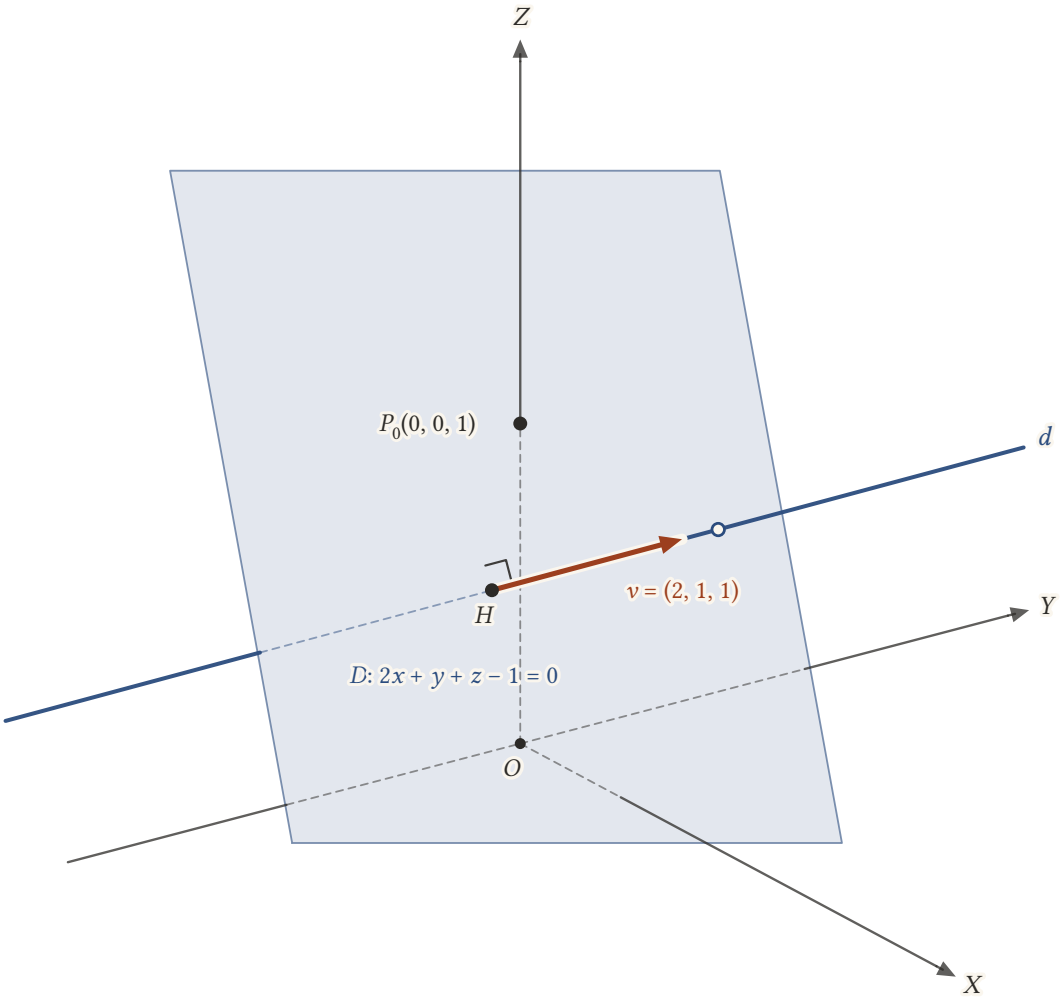
$$\mathfrak{D} : 2x + y + z - 1 = 0$$

elde edilir.
Sonucu bir de şöyle sınayalım: d'nin noktaları $t \in \mathbb{R}$ için $(1 + 2t, t, 1 + t)$ biçimindedir. Bunu düzlem denkleminde yerine yazarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$2(1+2t)+t+(1+t)-1=6t+2=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$$

bulunur. Demek ki d, $\mathfrak{D}$'yi tek bir noktada, $H\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ noktasında keser; doğrultusu normale paralel olduğundan bu kesişme diktir.



Şekil 12.4: $2x + y + z - 1 = 0$ düzlemi ve ona dik d doğrusu. d düzlemi $H(1/3, -1/3, 2/3)$ noktasında dik keser; boş daire d'nin $(1, 0, 1)$ noktasıdır.

■

Önerme 12.1 sayesinde denklemi verilen bir düzlemin normalini ve noktalarını da kolayca okuyabiliriz.

Örnek 12.4 (Denklemden normal ve nokta okumak). $\mathfrak{D}: 2x-y+3z-6=0$ düzleminin bir normal vektörünü ve bir noktasını bulalım.

Çözüm.
x, y, z'nin katsayıları bir normalin bileşenleridir, dolayısıyla

$$n=(2,-1,3)$$

$\mathfrak{D}$'nin bir normalidir. Bir nokta bulmak için iki koordinatı keyfi seçip üçüncüsünü denklemden hesaplarız. $y=0$, $z=0$ alırsak $2x-6=0$, yani $x=3$ olur. Demek ki $P_0(3,0,0)$ noktası $\mathfrak{D}$ üzerindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Başka seçimler başka noktalar verir; örneğin $x = 1, z = 1$ için $2 - y + 3 - 6 = 0$, yani $y = -1$ bulunur ve $(1, -1, 1)$ de $\mathfrak{D}$'nin bir noktasıdır.
Sağlama olarak, $(3, 0, 0)$'dan $(1, -1, 1)$'e giden $(-2, -1, 1)$ vektörünün n'ye dik olduğunu görelim:

$$\chevron.l(-2, -1, 1), (2, -1, 3)\chevron.r = -4 + 1 + 3 = 0.$$

■

12.2 Bir Noktası ve İki Doğrultusu Verilen Düzlem

Bir düzlemin normalini her zaman hazır bulamayız. Çoğu zaman elimizde düzlemin **içindeki** iki doğrultu vardır; örneğin düzlemin paralel olması istenen iki doğru. Bu durumda normali vektörel çarpımla üretiriz. Bir d doğrusunun bir $\mathfrak{D}$ düzlemine paralel olması, d'nin doğrultman vektörünün $\mathfrak{D}$'nin normaline dik olmasıyla denktir; başka bir deyişle, doğrultman vektörünün bir temsilcisi düzlemin içine çizilebilir. Bunu, doğru ile düzlemin birbirine göre durumlarıyla birlikte Doğru ile Düzlem ve Uzaklıklar bölümünde ispatlayacağız. Bu bölümde bir düzlemin bir v vektörüne paralel olmasını, normalinin v'ye dik olması anlamında kullanacağız.
Uzayda, doğrultman vektörleri sırasıyla

$$v_1 = (a_1, b_1, c_1) \quad \text{ve} \quad v_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

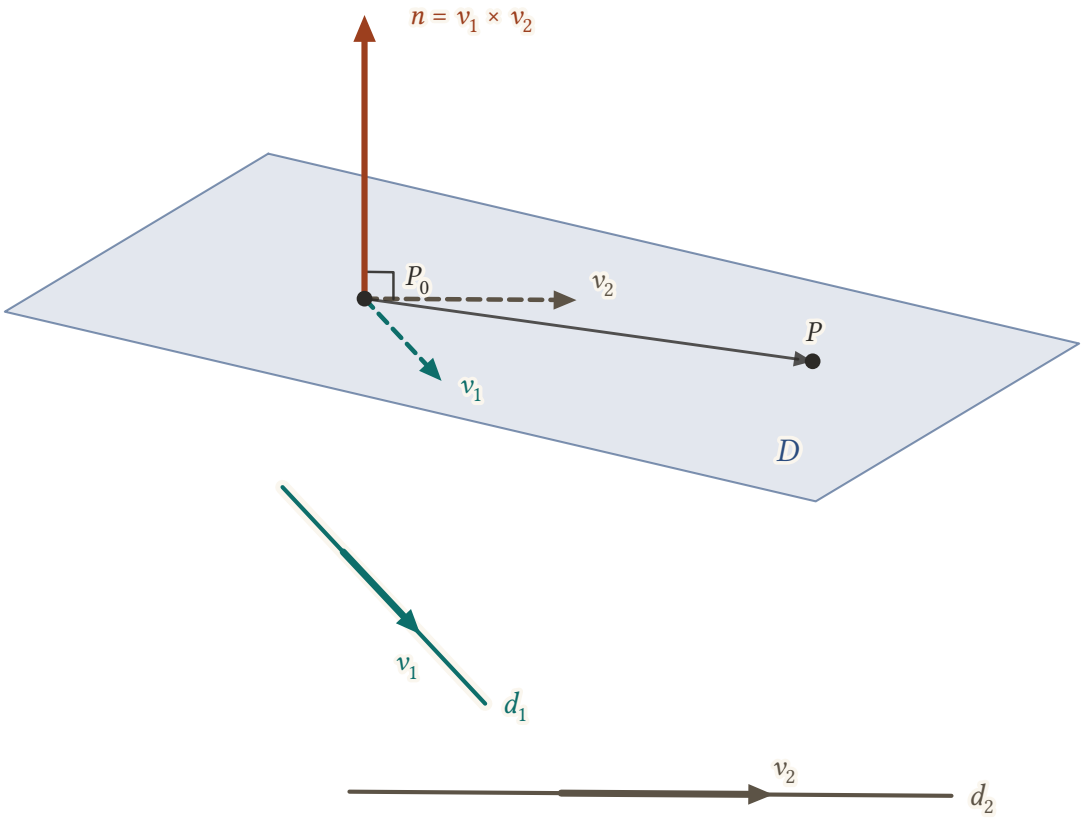
olan d_1 ve d_2 doğruları verilsin ve bu iki vektör paralel olmasın, yani lineer bağımsız olsun. $\mathfrak{D}$ düzlemi d_1 ve d_2'ye paralel olsun ve $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçsin. $\mathfrak{D}$'nin normali hem v_1'e hem v_2'ye dik olmalıdır; iki vektöre birden dik olan vektör ise vektörel çarpımdır. Böylece $n = v_1 \times v_2$, $\mathfrak{D}$'nin normali olarak alınabilir.

Teorem 12.1 (Bir noktası ve iki doğrultusu verilen düzlem). *$v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ ve $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$ lineer bağımsız iki vektör, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de bir nokta olsun. P_0'dan geçen ve v_1 ile v_2'ye paralel olan düzlem tektir (v_1 ile v_2'ye paralel olmak, normali v_1'e ve v_2'ye dik olmak anlamındadır); normali $n = v_1 \times v_2$ ve kartezyen denklemi*

$$\mathfrak{D} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.5: Altta doğrultmanları v_1 *ve* v_2 *olan aykırı* d_1, d_2 *doğruları; üstte* P_0*'dan geçip ikisine de paralel olan düzlem. Kesikli oklar* v_1 *ve* v_2*'nin* P_0*'a taşınmış temsilcileridir; normal* $\mathrm{n} = \mathrm{v}_1 \times \mathrm{v}_2$ *ikisine de diktir.*

İspat.
Normal,* $v_1 \times v_2$*'ye paraleldir. *v_1 ile v_2 lineer bağımsız olduğundan Önerme 9.3 uyarınca $v_1 \times v_2 \neq 0$ dır ve Teorem 9.1 vi) gereğince $v_1 \times v_2$ hem v_1'e hem v_2'ye diktir. Şimdi n, v_1 ile v_2'ye paralel bir düzlemin herhangi bir normali olsun; yani $\langle v_1, n\rangle = 0$ ve $\langle v_2, n\rangle = 0$ olsun. Üçlü özdeşlikten (Teorem 9.2 ii)*

$$(v_1 \times v_2) \times n = \langle v_1, n\rangle\, v_2 - \langle v_2, n\rangle\, v_1 = 0 \cdot v_2 - 0 \cdot v_1 = 0$$

bulunur. Önerme 9.3 uyarınca $v_1 \times v_2$ ile n lineer bağımlıdır; ikisi de sıfırdan farklı olduğundan birbirine paraleldir. Demek ki böyle bir düzlemin normali olarak her zaman $v_1 \times v_2$ alınabilir. Bir noktası ve normali belli olan düzlem tek olduğundan, P_0'dan geçen ve v_1, v_2'ye paralel düzlem de tektir.
Denklem. *$P(x, y, z)$, $\mathfrak{D}$'nin herhangi bir noktası olsun. Vektörel denklemde normal olarak $n = v_1 \times v_2$ yazalım ve iç çarpımın simetrisini (Önerme 8.1 i) ile karma çarpımın iç ve vektörel çarpımla yazılışını (Önerme 9.1) kullanalım:*

$$\begin{aligned} 0 &= \text{chevron.l}\overrightarrow{P_0P}, n\text{chevron.r} = \text{chevron.l}\overrightarrow{P_0P}, v_1 \times v_2\text{chevron.r} \\ &= \text{chevron.l}v_1 \times v_2, \overrightarrow{P_0P}\text{chevron.r} = \left[\, v_1, v_2, \overrightarrow{P_0P} \,\right]. \end{aligned}$$

Karma çarpım, satırları sırasıyla v_1, v_2 ve $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ olan determinanttır (Tanım 9.2). Bu da teoremdeki denklemdir.
■

Yani iki doğrultu verildiğinde normali ayrıca hesaplamak zorunda değiliz: iki doğrultuyu ve $\overrightarrow{P_0P}$'yi bir determinantın satırlarına yazıp sıfıra eşitlemek yeter. Geometrik olarak bu, v_1, v_2 ve $\overrightarrow{P_0P}$ vektörlerinin düzlemdeş olması demektir (Sonuç 9.5): P ancak ve ancak $\overrightarrow{P_0P}$, v_1 ile v_2'nin belirlediği düzleme paralelse $\mathfrak{D}$ üzerindedir.

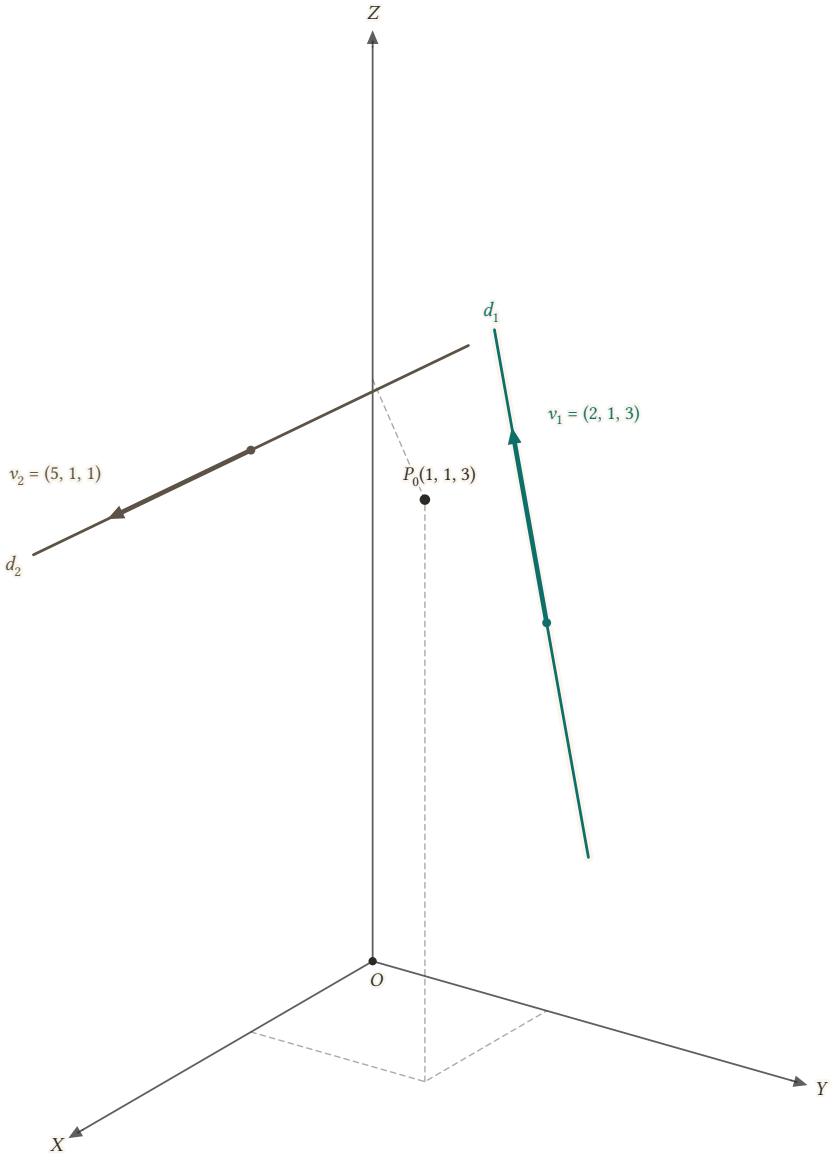
 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 12.5 (İki doğruya paralel düzlem).

$$d_1 : \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z-2}{3} \qquad \text{ve} \qquad d_2 : \frac{x-1}{5} = y = z - 3$$

doğrularına paralel olan ve $P_0(1,1,3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm.
Paydalar doğrultman vektörlerinin bileşenleridir. d_1 doğrusu $(0,1,2)$ noktasından geçer ve doğrultman vektörü $v_1 = (2,1,3)$ tür; d_2 doğrusu $(1,0,3)$ noktasından geçer ve doğrultman vektörü $v_2 = (5,1,1)$ dir. Bu iki vektör paralel değildir, çünkü bileşenleri orantılı değildir $(2/5 \neq 1/1)$.



Şekil 12.6: Aykırı d_1 ve d_2 doğruları, doğrultmanları ve $P_0(1, 1, 3)$ noktası. Doğrular kesişmez; şekilde çakışır gibi göründükleri yerde arkadaki doğru kesintilidir.

Normal vektörel çarpımla. $\mathfrak{D}$, d_1 ve d_2'ye paralel olduğundan normali olarak $n = v_1 \times v_2$ alınabilir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} n = v_1 \times v_2 &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1\cdot 1 - 3\cdot 1)\, e_1 + (3\cdot 5 - 2\cdot 1)\, e_2 + (2\cdot 1 - 1\cdot 5)\, e_3 \\ &= (1-3)\, e_1 + (15-2)\, e_2 + (2-5)\, e_3 \\ &= (-2, 13, -3). \end{aligned}$$

$P(x,y,z)$, $\mathfrak{D}$'nin herhangi bir noktası olsun. $\overrightarrow{P_0P} = (x-1, y-1, z-3)$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 =& \text{chevron.l} v_1 \times v_2, \overrightarrow{P_0P} \text{chevron.r} \\ =& \text{chevron.l}(-2, 13, -3), (x-1, y-1, z-3) \text{chevron.r} \\ =& -2(x-1) + 13(y-1) - 3(z-3) \\ =& -2x + 2 + 13y - 13 - 3z + 9 \end{aligned}$$

ve $2 - 13 + 9 = -2$ olduğundan

$$\mathfrak{D} : -2x + 13y - 3z - 2 = 0$$

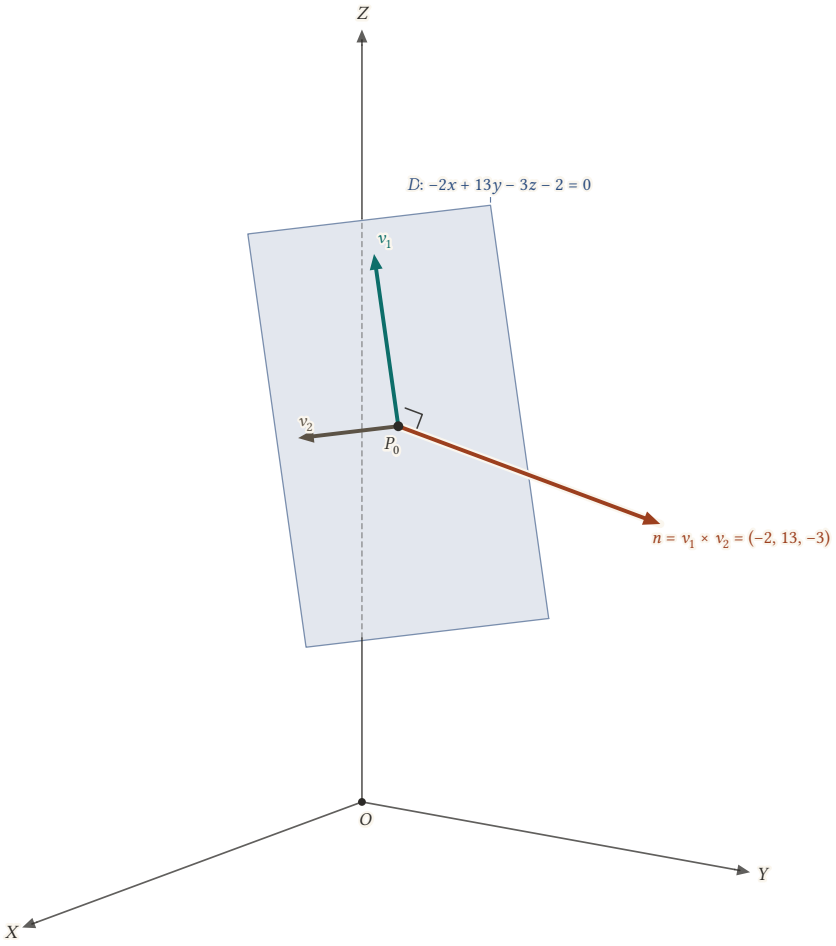
elde edilir.

Doğrudan determinantla. $\langle v_1 \times v_2, \overrightarrow{P_0P} \rangle = [v_1, v_2, \overrightarrow{P_0P}]$ olduğundan aynı denklemi, Teorem 12.1 içindeki determinantla tek adımda da bulabiliriz. Determinantı birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ x-1 & y-1 & z-3 \end{vmatrix} \\ &\quad = 2\left[\,(z-3) - (y-1)\,\right] - 1\left[\,5(z-3) - (x-1)\,\right] \\ &\qquad +3\left[\,5(y-1) - (x-1)\,\right] \\ &\quad = (2z - 2y - 4) + (-5z + x + 14) + (15y - 3x - 12) \\ &\quad = -2x + 13y - 3z - 2. \end{aligned}$$

Determinantı sıfıra eşitleyince yine $\mathfrak{D} : -2x + 13y - 3z - 2 = 0$ bulunur. Kontrol: P_0 için $-2 + 13 - 9 - 2 = 0$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.7: $-2x + 13y - 3z - 2 = 0$ düzleminin kenarları v_1 ve v_2 doğrultusunda olan bir parçası ve normali $n = v_1 \times v_2$ (0,15 katı çizildi).

■

İki doğrultu, koordinat eksenlerinin doğrultuları da olabilir. Bu durumda determinant çok sadeleşir.

Örnek 12.6 (İki koordinat eksenine paralel düzlem). $P_0(1,2,3)$ noktasından geçen ve hem X- hem Y-eksenine paralel olan düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm.
X-ekseninin doğrultman vektörü $e_1 = (1,0,0)$, Y-ekseninin doğrultman vektörü $e_2 = (0,1,0)$ dır ve bu iki vektör lineer bağımsızdır. Teorem 12.1 uyarınca düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x-1 & y-2 & z-3 \end{vmatrix} = 0$$

dır. Birinci satıra göre açarsak

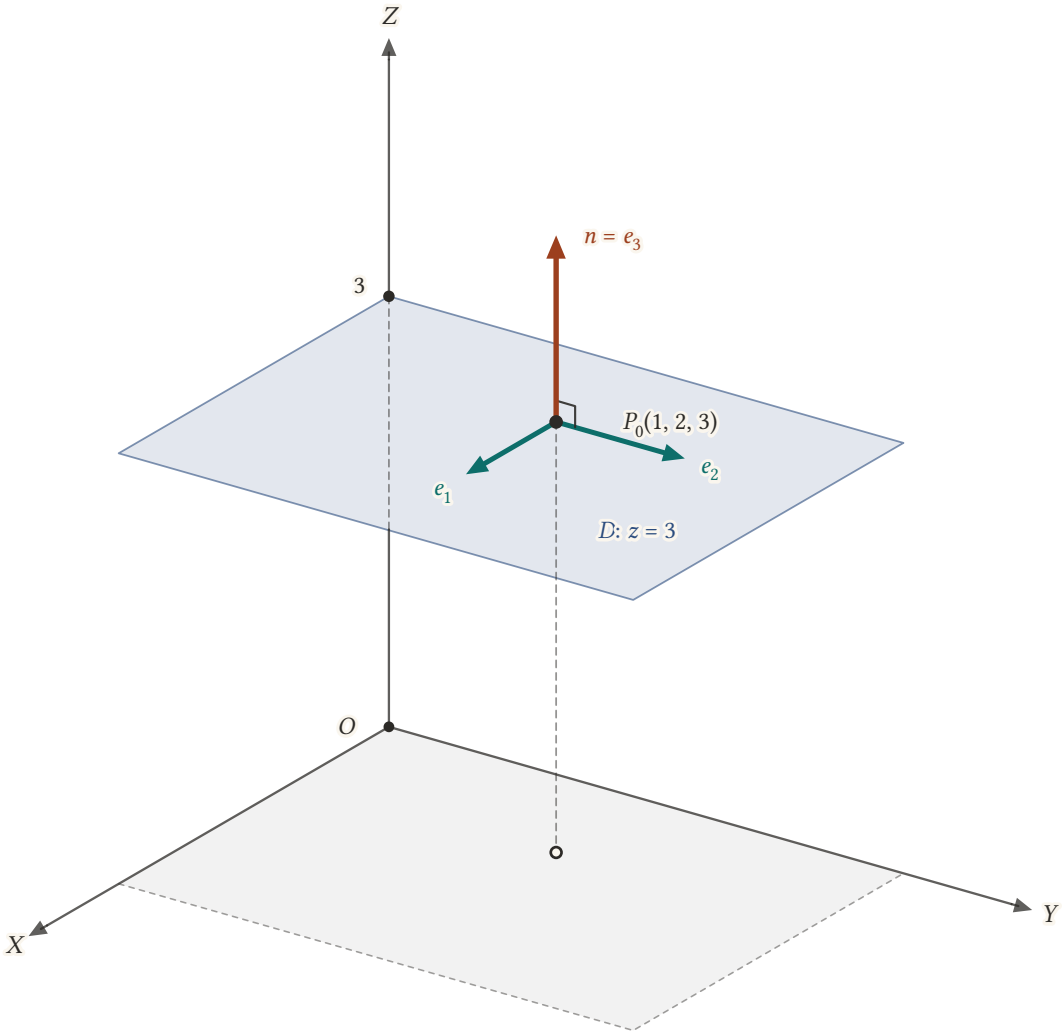
$$1 \cdot \big[\, 1 \cdot (z-3) - 0 \cdot (y-2) \,\big] - 0 + 0 = z - 3$$

bulunur. Demek ki aranan düzlem

$$\mathfrak{D} : z - 3 = 0, \quad \text{yani} \quad z = 3$$

 CC BY-NC-SA 4.0

tür. Bu, XY-düzlemine paralel olan ve onun 3 birim üstünde duran düzlemdir; normali $n = e_1 \times e_2 = e_3 = (0, 0, 1)$, yani Z-ekseni doğrultusundadır.



Şekil 12.8: X- ve Y-eksenine paralel olup $P_0(1, 2, 3)$'ten geçen $z = 3$ düzlemi: XY-düzlemine (soluk) paraleldir, normali e_3'tür.

■

12.3 Doğrudaş Olmayan Üç Noktası Verilen Düzlem

Düzlemde iki farklı nokta bir doğru belirler. Uzayda bir düzlemi belirlemek içinse üç nokta gerekir; ama bu üç nokta aynı doğru üzerinde, yani **doğrudaş** olmamalıdır. Bu durumu bir önceki kısma indirgeyeceğiz: üç noktadan biri düzlemin noktası, bu noktadan diğer ikisine giden vektörler de düzlemin iki doğrultusu olur. $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3(x_3, y_3, z_3)$, bir $\mathfrak{D}$ düzleminin doğrudaş olmayan üç noktası ve $Q(x, y, z)$, $\mathfrak{D}$'nin herhangi bir noktası olsun. $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ ve $\overrightarrow{P_1Q}$ vektörlerinin üçü de $\mathfrak{D}$'nin içindedir.
Önce bu iki doğrultunun gerçekten bir normal verdiğini görelim. Doğrudaş olmayan üç nokta ikişer ikişer farklıdır (iki nokta çakışsaydı, üç nokta bu nokta ile üçüncü noktadan geçen doğrunun üzerinde kalırdı); dolayısıyla $\overrightarrow{P_1P_2} \neq 0$ ve $\overrightarrow{P_1P_3} \neq 0$ dır. $\overrightarrow{P_1P_2}$ ile $\overrightarrow{P_1P_3}$ lineer bağımlı olsaydı, Sonuç 7.1 uyarınca paralel olurlardı; paralel vektörlerin tanımı (Tanım 7.15) gereğince de biri diğerinin bir katı olurdu, örneğin $\overrightarrow{P_1P_3} = \lambda\,\overrightarrow{P_1P_2}$ olurdu ve P_3, P_1'den geçip $\overrightarrow{P_1P_2}$ doğrultusunda giden doğrunun, yani P_1P_2 doğrusunun

 CC BY-NC-SA 4.0

üzerinde kalırdı (diğer durumda da P_2, P_1P_3 doğrusunun üzerinde kalır). Bu, noktaların doğrudaş olmamasıyla çelişir. Demek ki $\overrightarrow{P_1P_2}$ ile $\overrightarrow{P_1P_3}$ lineer bağımsızdır ve Önerme 9.3 uyarınca

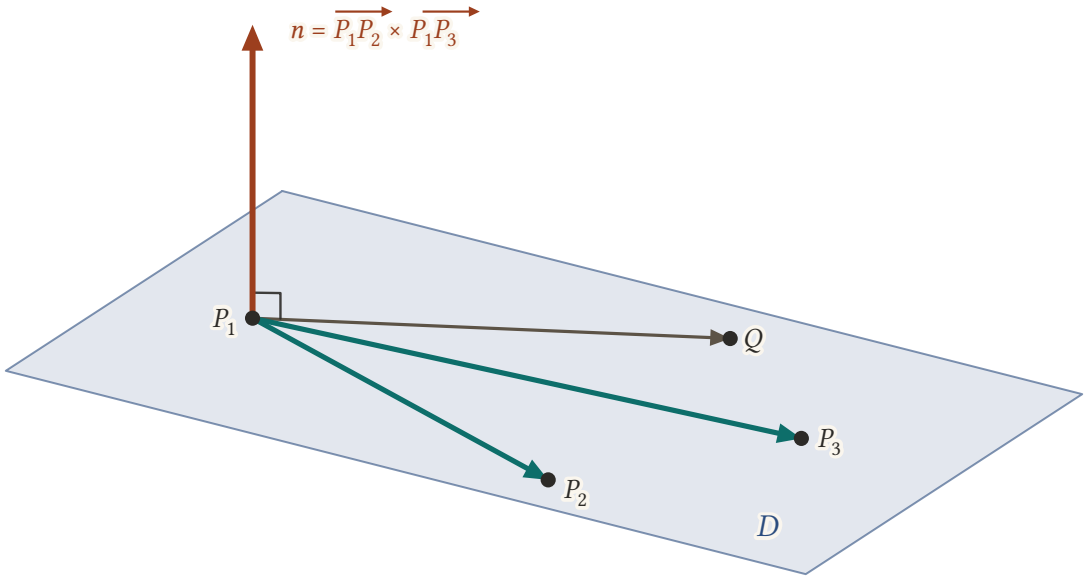
$$n = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \neq 0$$

dır. Bu vektör $\mathfrak{D}$'nin normali yerine alınabilir.

Teorem 12.2 (Üç noktası verilen düzlem). *$P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ve $P_3(x_3, y_3, z_3)$ doğrudaş olmayan üç nokta olsun. Bu üç noktadan geçen tek bir $\mathfrak{D}$ düzlemi vardır ve $\mathfrak{D}$'nin kartezyen denklemi*

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

dır.



Şekil 12.9: Doğrudaş olmayan P_1, P_2, P_3 noktaları ve düzlemin herhangi bir Q noktası. P_1'den çıkan üç vektör de düzlemin içindedir; normal, ilk ikisinin vektörel çarpımıdır.

İspat.
Üç noktadan geçen bir düzlem P_1'den geçer ve $\overrightarrow{P_1P_2}$ ile $\overrightarrow{P_1P_3}$ vektörlerini içerir, yani bu iki vektöre paraleldir. Tersine, P_1'den geçip bu iki vektöre paralel olan bir düzlem P_2 ve P_3'ü de içerir; örneğin $\overrightarrow{P_1P_2}$ düzleme paralel olduğundan P_1'den çıkan temsilcisi düzlemdedir ve ucu P_2 de düzlemdedir. Demek ki üç noktadan geçen düzlemler, tam olarak P_1'den geçip $v_1 = \overrightarrow{P_1P_2}$ ve $v_2 = \overrightarrow{P_1P_3}$'e paralel olan düzlemlerdir. Yukarıda v_1 ile v_2'nin lineer bağımsız olduğunu gördük. Bu nedenle $P_0 = P_1$ noktası ve bu iki vektörle Teorem 12.1 uygulanabilir: böyle bir düzlem tektir, normali $n = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$ dür ve $Q(x, y, z)$ noktası için

$$\begin{aligned} Q \in \mathfrak{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} \perp \overrightarrow{P_1Q} \\ &\Leftrightarrow \text{chevron.l} \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1Q} \text{chevron.r} = 0 \\ &\Leftrightarrow [\, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1Q} \,] = 0 \end{aligned}$$

olur. Son olarak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$
$$\overrightarrow{P_1Q} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

vektörleri satırlara yazılınca karma çarpım teoremdeki determinant olur.
■

Yani üç noktadan geçen düzlemin denklemini yazmak için, noktalardan birini "başlangıç" seçip ondan diğer iki noktaya ve rastgele $Q(x, y, z)$ noktasına giden vektörleri bir determinantın satırlarına yazar ve determinantı sıfıra eşitleriz. Hangi noktanın başlangıç seçildiği önemli değildir; düzlem tek olduğu için her seçim aynı düzlemin (belki bir sabit çarpanla farklı) denklemini verir.

Örnek 12.7 (Üç noktadan geçen düzlem). $P_1(1, 1, -1)$, $P_2(-2, -2, 2)$ ve $P_3(1, -1, 2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm.
Aranan düzlem $\mathfrak{D}$ ve $Q(x, y, z)$, $\mathfrak{D}$'nin herhangi bir noktası olsun. P_1'i başlangıç seçelim:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-2 - 1, -2 - 1, 2 - (-1)) = (-3, -3, 3),$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (1 - 1, -1 - 1, 2 - (-1)) = (0, -2, 3),$$
$$\overrightarrow{P_1Q} = (x - 1, y - 1, z + 1).$$

İlk iki vektörün bileşenleri orantılı olmadığından (birincinin ilk bileşeni sıfır değil, ikincininki sıfır) noktalar doğrudaş değildir. Teorem 12.2 uyarınca

$$\left[\, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1Q} \,\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ x-1 & y-1 & z+1 \end{vmatrix} = 0$$

dır. Determinantı birinci satıra göre açalım. İşaret düzeni $+, -, +$ olduğundan

$$-3\left[\, -2(z+1) - 3(y-1) \,\right] - (-3)\left[\, 0 \cdot (z+1) - 3(x-1) \,\right]$$
$$+3\left[\, 0 \cdot (y-1) - (-2)(x-1) \,\right] = 0$$

bulunur. Köşeli parantezleri çarparsak

$$\Leftrightarrow 6(z+1) + 9(y-1) - 9(x-1) + 6(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow 6z + 6 + 9y - 9 - 9x + 9 + 6x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow -3x + 9y + 6z = 0$$

elde edilir. Her iki yanı -3'e bölersek

$$\mathfrak{D} : x - 3y - 2z = 0$$

bulunur. Bölme işlemi normali de sadeleştirir:

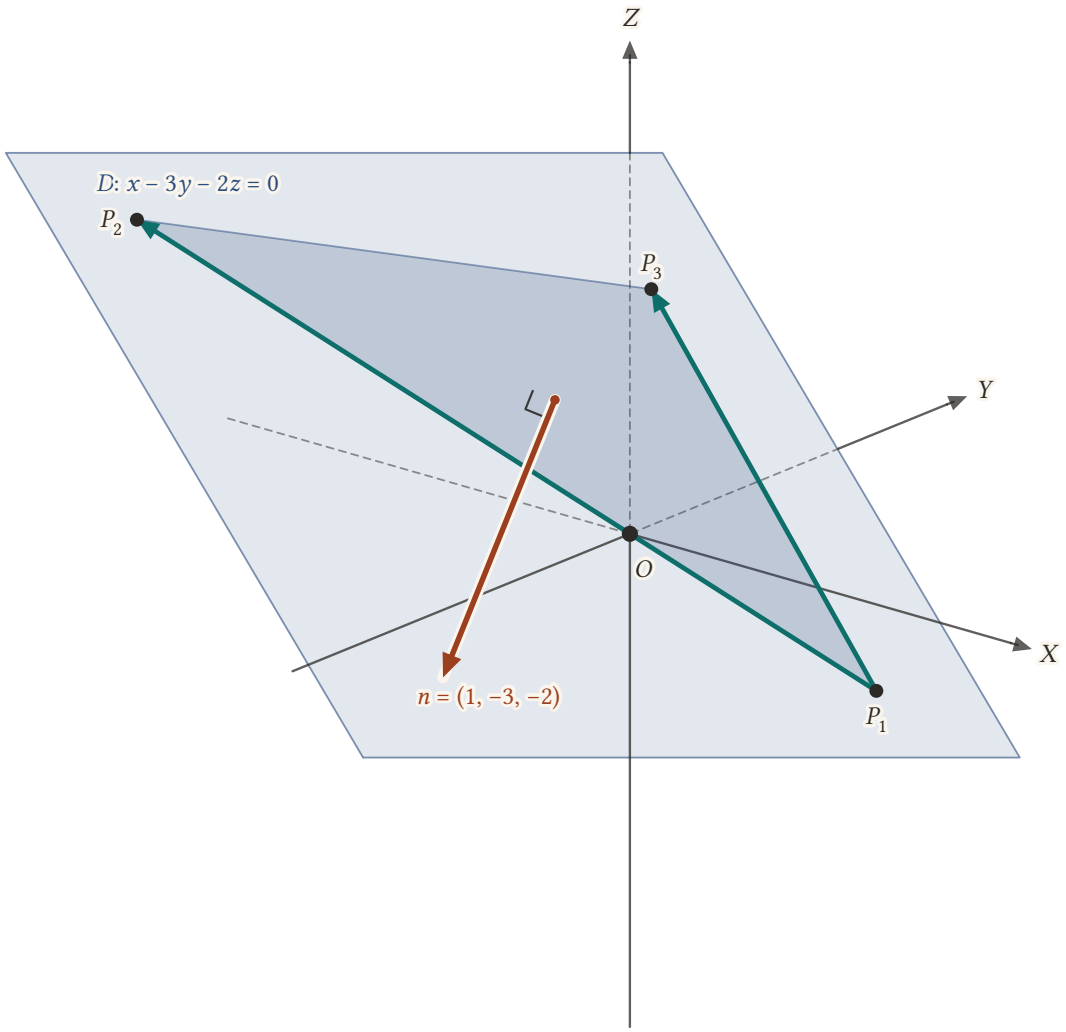
$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (-3, 9, 6) = -3\,(1, -3, -2).$$

Kontrol:

$$P_1 : 1 - 3 + 2 = 0,$$
$$P_2 : -2 + 6 - 4 = 0,$$
$$P_3 : 1 + 3 - 4 = 0.$$

Sabit terim 0 olduğundan bu düzlem orijinden de geçer.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.10: $P_1(1,\,1,\,-1)$, $P_2(-2,\,-2,\,2)$, $P_3(1,\,-1,\,2)$ noktalarından geçen $x-3y-2z=0$ düzlemi; düzlem orijinden de geçer. Normal, üçgenin ağırlık merkezinden çizildi.

■

Teoremde üç noktanın doğrudaş olmaması koşulu gerçekten gereklidir. Noktalar doğrudaşsa $\overrightarrow{P_1P_2}$ ile $\overrightarrow{P_1P_3}$ paraleldir; determinantın ilk iki satırı orantılı olur ve determinant, Q nasıl seçilirse seçilsin sıfırdır. Denklem "$0=0$" a dönüşür ve hiçbir düzlem belirtmez. Geometrik olarak bunun nedeni, bir doğrunun sonsuz çok düzlemin içinde kalmasıdır.

Örnek 12.8 (Doğrudaş üç nokta düzlem belirtmez). $P_1(1,0,2)$, $P_2(3,1,5)$ ve $P_3(5,2,8)$ noktalarından geçen düzlemleri inceleyelim.

Çözüm.
P_1'i başlangıç seçersek

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3), \qquad \overrightarrow{P_1P_3}=(4,2,6)=2\,\overrightarrow{P_1P_2}$$

bulunur. Demek ki P_3, P_1P_2 doğrusu üzerindedir; üç nokta doğrudaştır. Teorem 12.2 içindeki determinant

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ x-1 & y & z-2 \end{vmatrix}$$

ikinci satırı birincinin iki katı olduğundan her (x, y, z) için sıfırdır; bu determinant bir düzlem denklemi vermez.
Gerçekten de bu üç noktayı içeren birden çok düzlem vardır. Örneğin

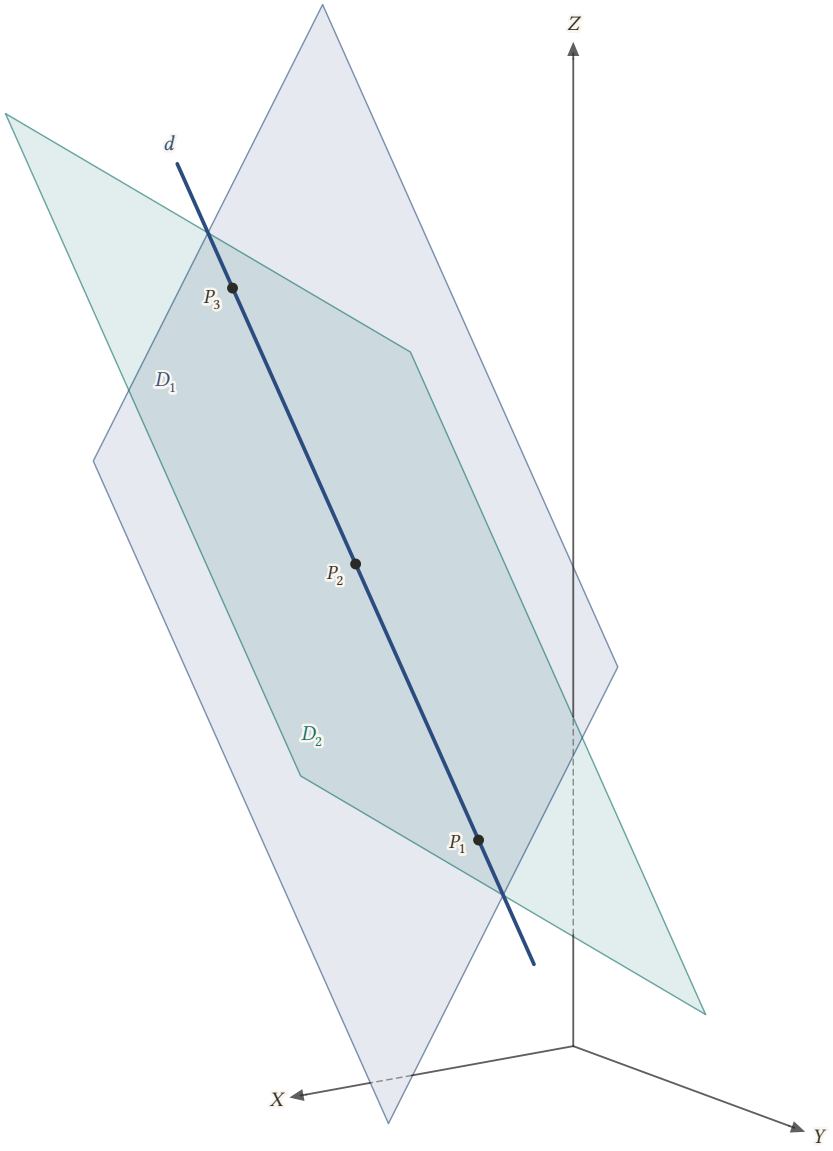
$$\mathfrak{D}_1 : x - 2y - 1 = 0 \qquad \text{ve} \qquad \mathfrak{D}_2 : 3x - 2z + 1 = 0$$

düzlemlerinin ikisi de üç noktayı içerir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_1 &: 1 - 0 - 1 = 0, \quad 3 - 2 - 1 = 0, \quad 5 - 4 - 1 = 0, \\ \mathfrak{D}_2 &: 3 - 4 + 1 = 0, \quad 9 - 10 + 1 = 0, \quad 15 - 16 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Normalleri $(1, -2, 0)$ ve $(3, 0, -2)$ paralel olmadığından bunlar farklı düzlemlerdir. İki normal de doğrunun doğrultusu $(2, 1, 3)$'e diktir: $2 - 2 + 0 = 0$ ve $6 + 0 - 6 = 0$. Aslında normali $(2, 1, 3)$'e dik olan ve P_1'den geçen her düzlem bu doğruyu içerir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.11: Doğrudaş P_1, P_2, P_3 noktalarından geçen d doğrusu ve d'yi içeren iki düzlem: $x - 2y - 1 = 0$ ve $3x - 2z + 1 = 0$. Üç nokta tek bir düzlem belirtmez.

■

Üç noktası verilen düzlemin denkleminden hemen bir sonuç çıkar (bkz. Teorem 12.2): dört noktanın aynı düzlemde olup olmadığını tek bir determinantla sınayabiliriz.

Sonuç 12.1 (Dört noktanın aynı düzlemde olması). *A, B, C doğrudaş olmayan üç nokta ve D bir nokta olsun. D'nin A, B, C'den geçen düzlemde olması için gerek ve yeter koşul*

$$[\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\,] = 0$$

olmasıdır.

İspat.
A, B, C doğrudaş olmadığından Teorem 12.2 uyarınca bu üç noktadan geçen tek bir $\mathfrak{D}$ düzlemi vardır ve bir Q noktası için $Q \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AQ}] = 0$ dır. $Q = D$ alınırsa istenen elde edilir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani dört nokta, birinden diğer üçüne giden vektörlerin karma çarpımı sıfırsa aynı düzlemdedir. Bu, Sonuç 9.5 ile verilen ölçütün noktalar için söylenişidir: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ vektörleri düzlemdeş olmalıdır.

Örnek 12.9 (Aynı düzlemdeki dört nokta). $A(1,2,0)$, $B(3,0,1)$, $C(0,1,2)$ ve $D(-1,4,-1)$ noktalarının aynı düzlemde olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm.
A'yı başlangıç seçelim:

$$\overrightarrow{AB} = (2,-2,1), \qquad \overrightarrow{AC} = (-1,-1,2), \qquad \overrightarrow{AD} = (-2,2,-1).$$

$\overrightarrow{AB}$ ile $\overrightarrow{AC}$ orantılı değildir ($2/(-1) \neq (-2)/(-1)$), dolayısıyla A, B, C doğrudaş değildir. Karma çarpımı birinci satıra göre açalım:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\,\big[\,(-1)(-1) - 2\cdot 2\,\big] - (-2)\,\big[\,(-1)(-1) - 2\cdot(-2)\,\big]$$
$$+1\,\big[\,(-1)\cdot 2 - (-1)(-2)\,\big]$$
$$= 2(1-4) + 2(1+4) + (-2-2)$$
$$= -6 + 10 - 4 = 0.$$

Sonuç 12.1 uyarınca dört nokta aynı düzlemdedir.
Bu düzlemin denklemini de yazalım. Normal

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \big(\,(-2)\cdot 2 - 1\cdot(-1), 1\cdot(-1) - 2\cdot 2,$$
$$2\cdot(-1) - (-2)(-1)\,\big)$$
$$= (-3,-5,-4)$$

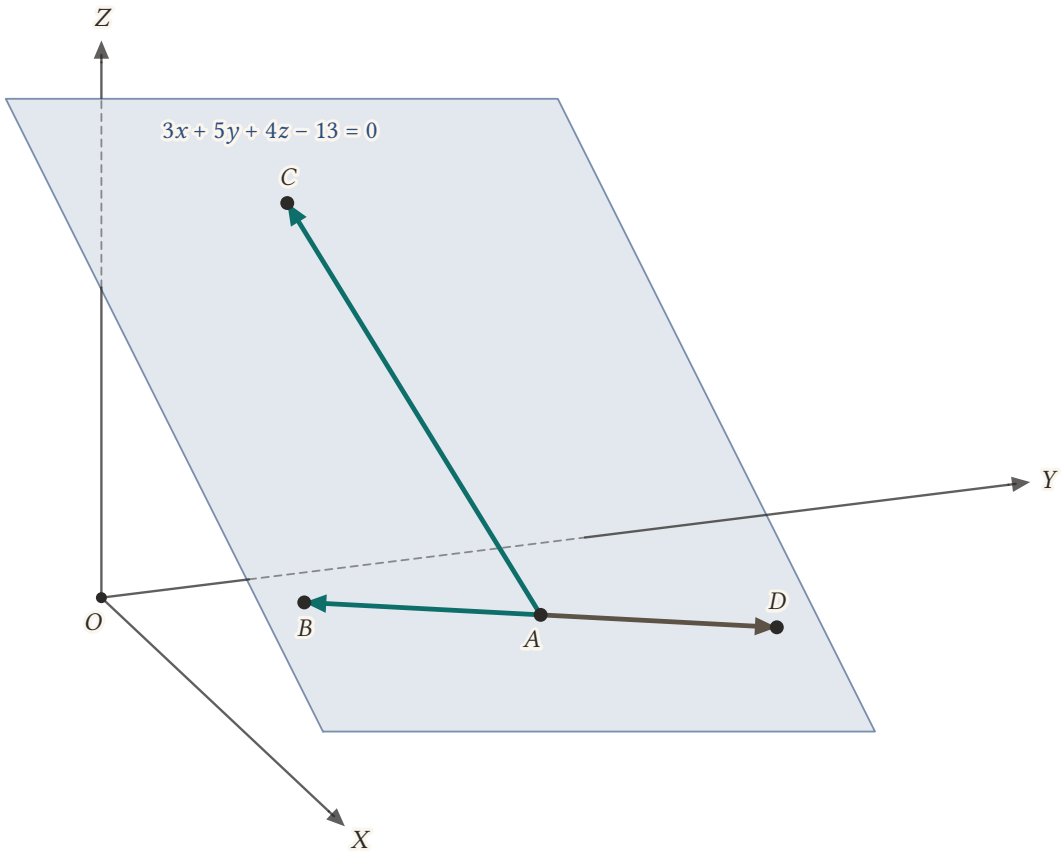
dür; -1 ile çarparak $n = (3,5,4)$ alalım. $A(1,2,0)$'dan geçtiği için

$$3(x-1) + 5(y-2) + 4z = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y + 4z - 13 = 0$$

bulunur. Sağlama olarak D'yi yerine yazalım:

$$3\cdot(-1) + 5\cdot 4 + 4\cdot(-1) - 13 = -3 + 20 - 4 - 13 = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.12: A, B, C, D noktaları aynı düzlemdedir: AB, AC ve AD vektörleri düzlemin içinde kalır.

■

Örnek 12.10 (Aynı düzlemde olmayan dört nokta). $A(1,2,0)$, $B(3,0,1)$, $C(0,1,2)$ ve $E(2,3,1)$ noktalarının aynı düzlemde olup olmadığını inceleyelim.

Çözüm.
A, B, C'nin doğrudaş olmadığını bir önceki örnekte gördük; ayrıca

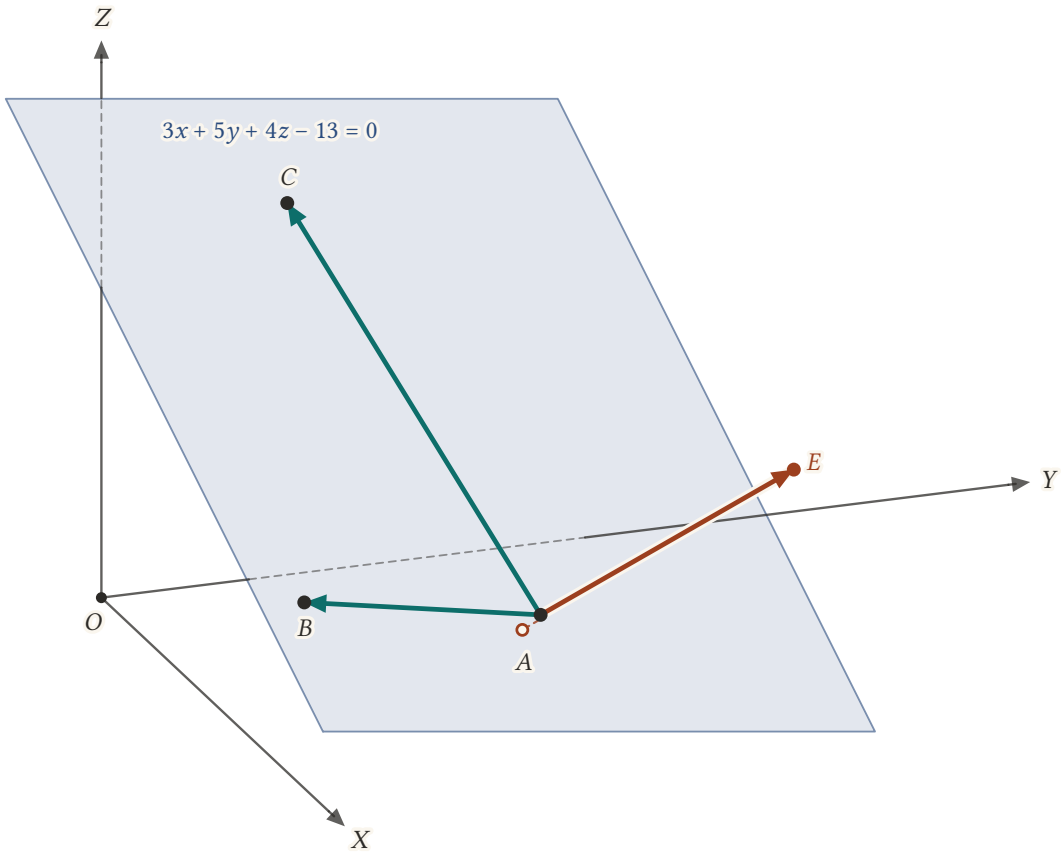
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3,-5,-4)$$

dür. $\overrightarrow{AE} = (1,1,1)$ olduğundan Önerme 9.1 ile

$$\left[\, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE} \,\right] = \left\langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE} \right\rangle = -3 - 5 - 4 = -12 \neq 0$$

bulunur. Sonuç 12.1 uyarınca E, A, B, C'den geçen düzlemde değildir; dört nokta aynı düzlemde bulunmaz. Nitekim E'yi $3x + 5y + 4z - 13 = 0$ denkleminde yerine yazınca $6 + 15 + 4 - 13 = 12 \neq 0$ çıkar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.13: $E(2,\,3,\,1)$ noktası A, B, C'den geçen düzlemin dışındadır: AE vektörü düzlemden çıkar. Kesikli çizgi E'den düzleme inen dikmedir.

■

12.4 Alıştırmalar

Alıştırmaların ilk kısmında Uzayda Doğru Denklemleri bölümünde kurduğumuz doğru denklemlerini, bir noktası ve doğrultman vektörü verilen doğrular için yeniden yazacağız; bu, düzlem denklemleriyle karşılaştırma için iyi bir ısınmadır. Sonra düzlem denklemlerine geçeceğiz.

Alıştırma 12.1 (Doğrunun üç denklemi). $P_0 = (-2,-1,4)$ noktasından geçen ve $v = (5,-3,2)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
P_0'dan geçen ve v'ye paralel doğru d olsun; doğrunun noktaları P_0'a v'nin katları eklenerek elde edilir.
Vektörel denklem.

$$(x,y,z) = (-2,-1,4) + \lambda\,(5,-3,2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parametrik denklemler. Vektörel denklemi bileşen bileşen yazarsak

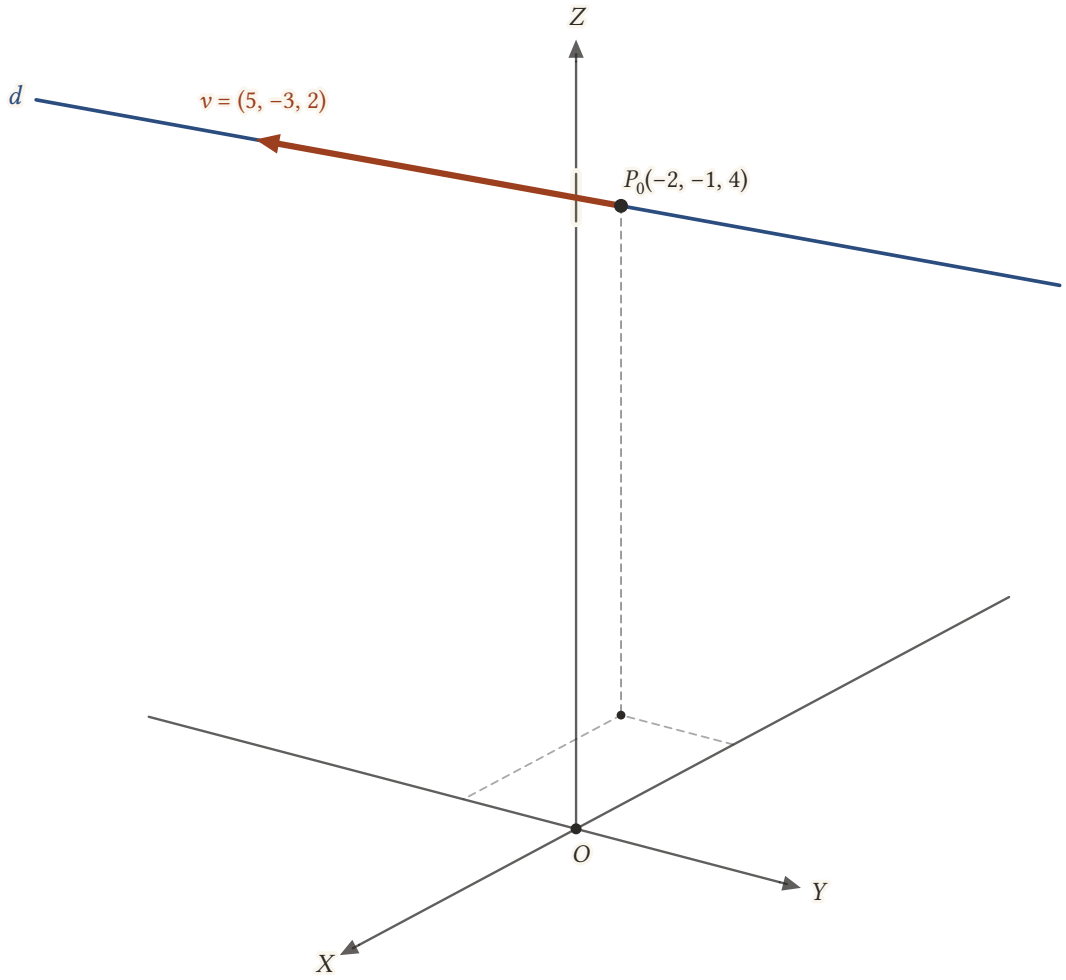
$$\begin{aligned} x &= -2 + 5\lambda \\ y &= -1 - 3\lambda \\ z &= 4 + 2\lambda\} \end{aligned} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kartezyen denklemler. v'nin bileşenlerinin üçü de sıfırdan farklı olduğundan her denklemden λ'yı çekip eşitleyebiliriz:

$$d : \frac{x+2}{5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{2} (= \lambda).$$



Şekil 12.14: $P_0(-2, -1, 4)$ noktasından geçen ve $v = (5, -3, 2)$ vektörüne paralel olan d doğrusu; kesikli çizgi P_0'ın XY-düzlemine dikmesidir.

■

Alıştırma 12.2 (Noktası YZ-düzleminde olan doğru). $P_0 = (0, 2, -1)$ noktasından geçen ve $v = (1, -3, 4)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Vektörel denklem.

$$(x, y, z) = (0, 2, -1) + \lambda\,(1, -3, 4), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parametrik denklemler.

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 2 - 3\lambda \\ z &= -1 + 4\lambda\} \end{aligned} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Kartezyen denklemler. v'nin bütün bileşenleri sıfırdan farklıdır:

$$d : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4} (= \lambda).$$

$\lambda = 0$ için doğru P_0'dan, yani YZ-düzleminin $(0, 2, -1)$ noktasından geçer; $x = \lambda$ olduğundan doğru YZ-düzlemini yalnız bu noktada keser.
■

Alıştırma 12.3 (Orijinden geçen ve eksenlerle eşit açı yapan doğru). $P_0 = (0, 0, 0)$ noktasından geçen ve $v = (1, 1, 1)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Vektörel denklem.

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda\,(1, 1, 1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parametrik denklemler.

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= \lambda \\ z &= \lambda\} \end{aligned} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Kartezyen denklemler.

$$d : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} (= \lambda), \quad \text{yani} \quad x = y = z.$$

$v = (1, 1, 1)$'in doğrultman kosinüslerinin üçü de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ olduğundan (Tanım 8.6) bu doğru üç eksenle de eşit açı yapar.
■

Alıştırma 12.4 (Paydasında negatif sayı bulunan kartezyen denklem). $P_0 = (1, -1, 6)$ noktasından geçen ve $v = (2, -1, 1)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Vektörel denklem.

$$(x, y, z) = (1, -1, 6) + \lambda\,(2, -1, 1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parametrik denklemler.

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2\lambda \\ y &= -1 - \lambda \\ z &= 6 + \lambda\} \end{aligned} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Kartezyen denklemler. Her parametrik denklemden λ'yı çekersek $\lambda = \frac{x-1}{2}$, $\lambda = \frac{y+1}{-1}$, $\lambda = \frac{z-6}{1}$ bulunur; buna göre

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-6}{1} (= \lambda).$$

Ortadaki payda -1 dir; bu eşitlik $\frac{x-1}{2} = -(y+1) = z - 6$ biçiminde de yazılabilir.
■

Alıştırma 12.5 (Bir koordinat düzlemine paralel doğru). $P_0 = (-2, 3, 2)$ noktasından geçen ve $v = (0, 2, 1)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Vektörel denklem.

$$(x, y, z) = (-2, 3, 2) + \lambda\,(0, 2, 1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

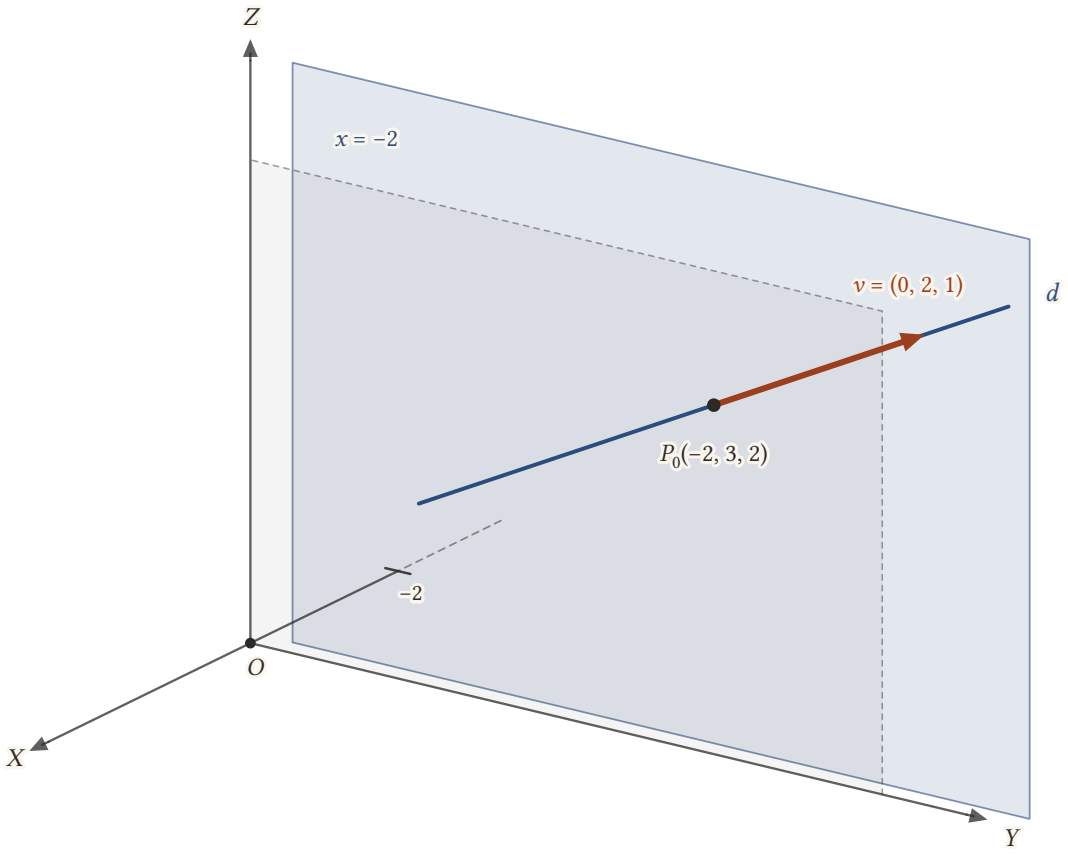
Parametrik denklemler.

$$\begin{aligned} x &= -2 \\ y &= 3 + 2\lambda \\ z &= 2 + \lambda\} \end{aligned} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Kartezyen denklemler. v'nin birinci bileşeni 0 olduğundan x'e ait denklemden λ çekilemez; bu denklem yalnızca x'in sabit kaldığını söyler. Diğer ikisinden λ'yı çekip eşitleriz:

$$d : x = -2, \qquad \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} (= \lambda).$$

Doğrunun bütün noktalarının apsisi -2 olduğundan d, $x = -2$ düzleminin içinde kalır; bu düzlem YZ -düzlemine paraleldir.



Şekil 12.15: $v = (0, 2, 1)$ vektörüne paralel olan d doğrusu $x = -2$ düzleminin içinde kalır; bu düzlem YZ-düzlemine (soluk) paraleldir.

■

Alıştırma 12.6 (Verilen doğruya paralel doğru).

$$d : 2x = y - 1 = 3z - 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

doğrusuna paralel olan ve $P_0(1,-1,2)$ noktasından geçen doğrunun parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Önce d'nin doğrultman vektörünü okuyalım. Bunun için denklemi, her kesrin payında yalnız bir değişken ve paydasında onun katsayısı olacak biçime getiririz: $2x = \dfrac{x}{1/2}$ ve $3z-1 = 3\left(z-\frac{1}{3}\right) = \dfrac{z-\frac{1}{3}}{1/3}$ olduğundan

$$d: \frac{x}{1/2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-\frac{1}{3}}{1/3}$$

yazılır. Demek ki d, $\left(0,1,\frac{1}{3}\right)$ noktasından geçer ve doğrultman vektörü $v = \left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{3}\right)$ tür.
Paralel doğruların doğrultman vektörleri paraleldir. Kesirlerden kurtulmak için v yerine onun 6 katı olan $(3,6,2)$ vektörünü kullanabiliriz. $P_0(1,-1,2)$'den geçen ve d'ye paralel doğruya d' diyelim.
Parametrik denklemler.

$$\begin{aligned} x &= 1+3\lambda \\ y &= -1+6\lambda \\ z &= 2+2\lambda\} \end{aligned} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Kartezyen denklemler.

$$d': \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-2}{2} (= \lambda).$$

Doğrultman vektörünü doğrudan $v = \left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{3}\right)$ alsaydık

$$d': \frac{x-1}{1/2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1/3}$$

bulurduk. Bu kesirlerin her biri yukarıdakilerin 6 katıdır, dolayısıyla iki yazılış aynı doğruyu verir; yalnızca parametre $\mu = 6\lambda$ olarak değişir.
■

Alıştırma 12.7 (X-eksenine paralel doğru). $P_0 = (2,-1,3)$ noktasından geçen ve X-eksenine paralel olan doğruyu bulunuz.

Çözüm.
X-ekseninin doğrultman vektörü $e_1 = (1,0,0)$ dır. Aranan doğrunun vektörel ve parametrik denklemleri

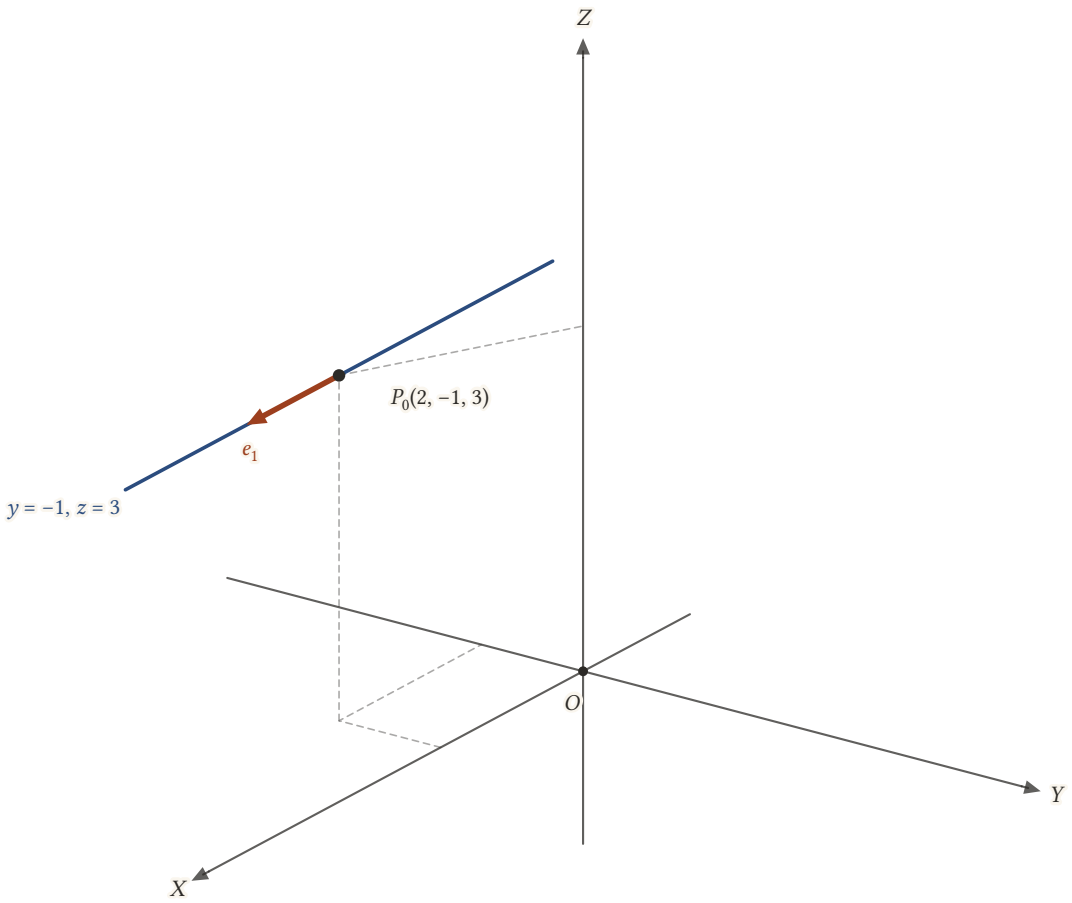
$$(x,y,z) = (2,-1,3) + \lambda\,(1,0,0), \qquad \begin{aligned} x &= 2+\lambda \\ y &= -1 \\ z &= 3\} \end{aligned}$$

dır. x her değeri alırken y ve z sabit kalır: $y = y_0$, $z = z_0$. Böylece doğru

$$y = -1, \qquad z = 3$$

denklemleriyle verilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.16: $P_0(2, -1, 3)$ noktasından geçen ve X-eksenine paralel olan doğru; doğrultmanı e_1'dir.

■

Alıştırma 12.8 (Y-eksenine paralel doğru). $P_0 = (2, -1, 3)$ noktasından geçen ve Y-eksenine paralel olan doğruyu bulunuz.

Çözüm.
Y-ekseninin doğrultman vektörü $e_2 = (0, 1, 0)$ dır. Aranan doğrunun vektörel ve parametrik denklemleri

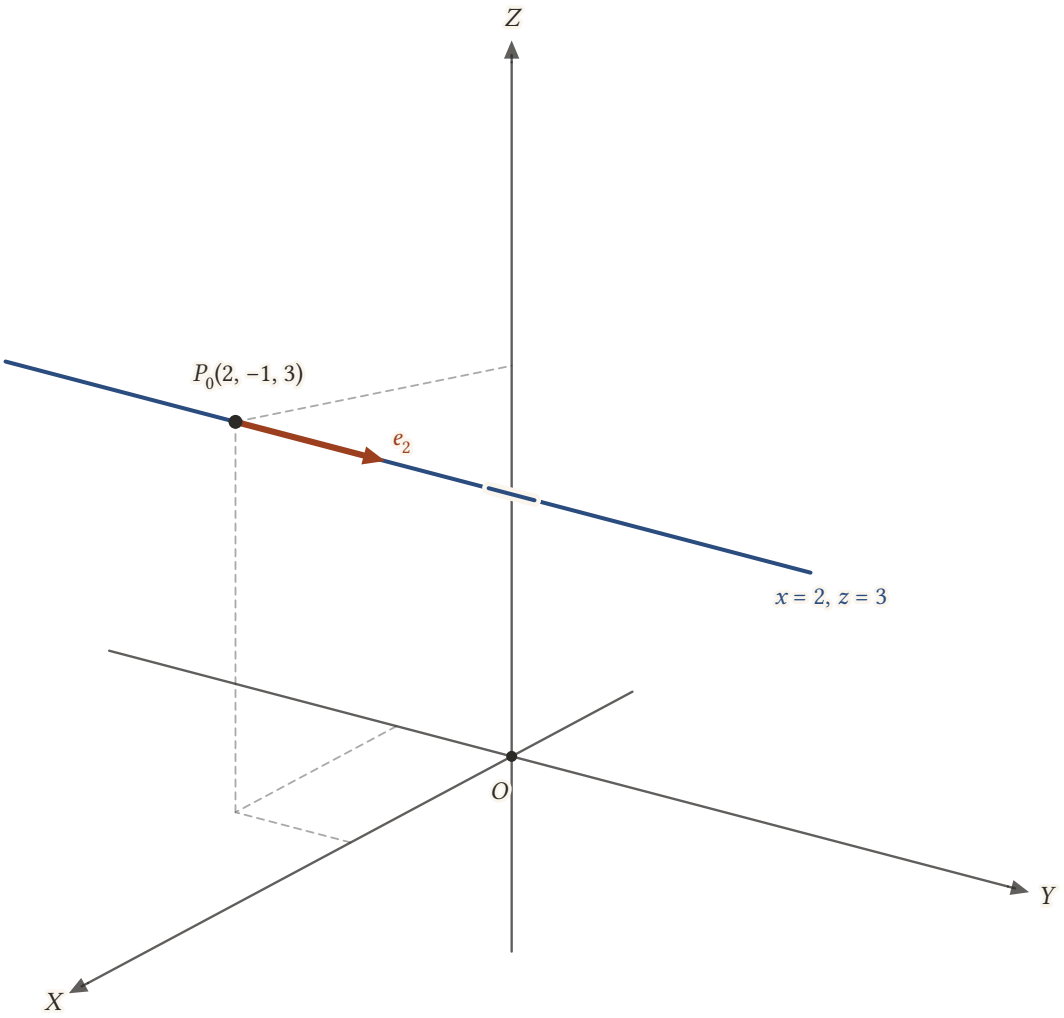
$$(x, y, z) = (2, -1, 3) + \lambda\,(0, 1, 0), \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 + \lambda \\ z &= 3\} \end{aligned}$$

dır. Bu kez y serbesttir, $x = x_0$ ve $z = z_0$ sabittir. Böylece doğru

$$x = 2, \qquad z = 3$$

denklemleriyle verilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.17: $P_0(2, -1, 3)$ noktasından geçen ve Y-eksenine paralel olan doğru; doğrultmanı e_2'dir.

■

Alıştırma 12.9 (Z-eksenine paralel doğru). $P_0 = (2, -1, 3)$ noktasından geçen ve Z-eksenine paralel olan doğruyu bulunuz.

Çözüm.
Z-ekseninin doğrultman vektörü $e_3 = (0, 0, 1)$ dir. Aranan doğrunun vektörel ve parametrik denklemleri

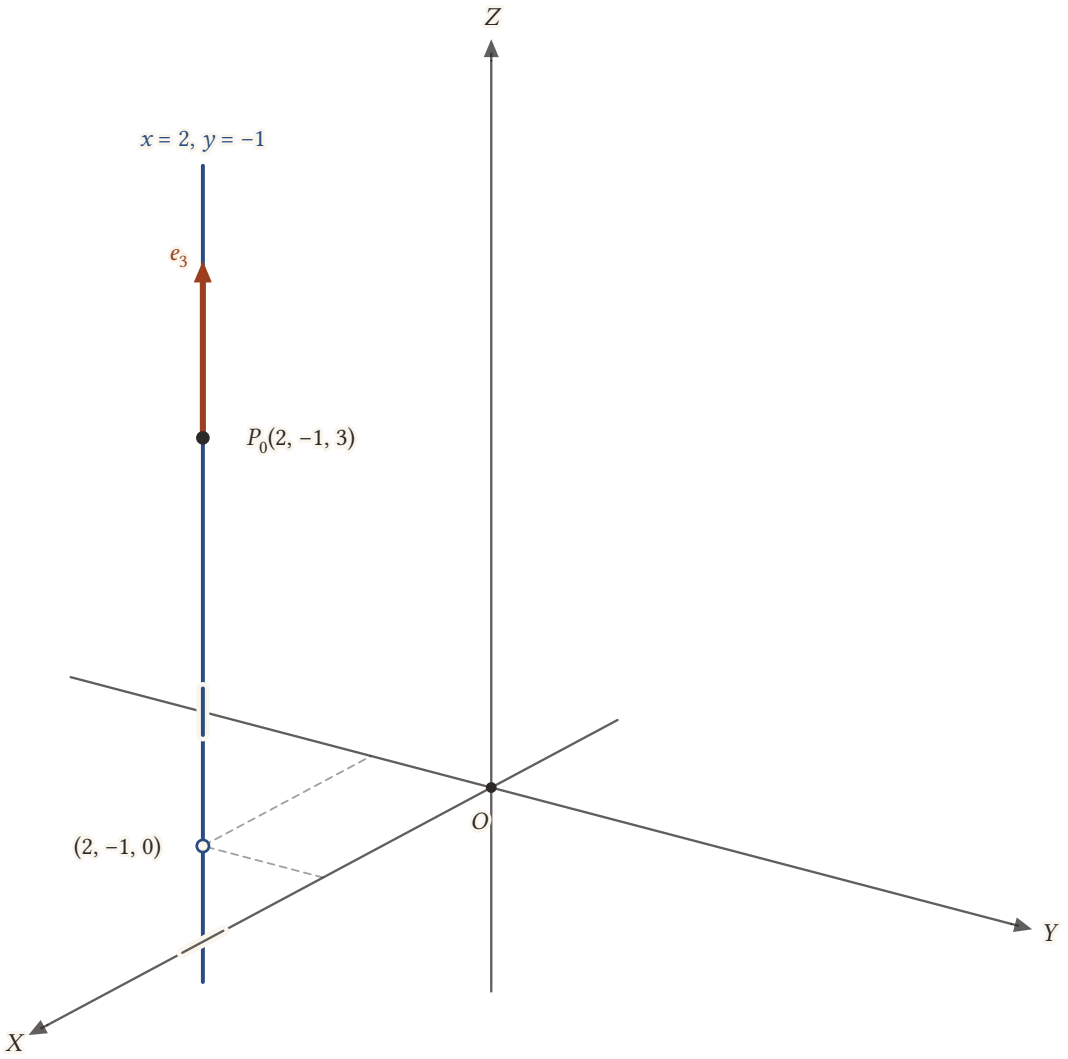
$$(x, y, z) = (2, -1, 3) + \lambda\,(0, 0, 1), \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 3 + \lambda\} \end{aligned}$$

dir. z serbesttir, $x = x_0$ ve $y = y_0$ sabittir. Böylece doğru

$$x = 2, \qquad y = -1$$

denklemleriyle verilir. Bu doğru XY-düzlemini $(2, -1, 0)$ noktasında dik olarak keser.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.18: $P_0(2,-1,3)$ noktasından geçen ve Z-eksenine paralel olan doğru; doğrultmanı e_3'dir. Doğru XY-düzlemini $(2,-1,0)$ noktasında dik keser.

■

Alıştırma 12.10 (İki doğruya dik doğru). Doğrultman vektörleri $v_1 = (2,-1,3)$ ve $v_2 = (-1,2,0)$ olan doğrulara dik olan ve $P_0(3,-1,4)$ noktasından geçen doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Aranan doğru d ve doğrultman vektörü v olsun. d, doğrultman vektörleri v_1 ve v_2 olan doğrulara dik olduğundan $v \perp v_1$ ve $v \perp v_2$ dir. v_1 ile v_2 sıfırdan farklıdır ve paralel değildir (ilk bileşenlerin oranı -2, ikinci bileşenlerin oranı $-\frac{1}{2}$). İki vektöre birden dik olan doğrultu $v_1 \times v_2$ doğrultusudur (Önerme 10.3), dolayısıyla v yerine $v_1 \times v_2$ alınabilir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \big(\,(-1)\cdot 0 - 3\cdot 2\,\big)\,e_1 + \big(\,3\cdot(-1) - 2\cdot 0\,\big)\,e_2 \\ &\quad + \big(\,2\cdot 2 - (-1)(-1)\,\big)\,e_3 \\ &= (-6,-3,3). \end{aligned}$$

Sağlama:

$$\begin{aligned} &\langle (-6,-3,3),(2,-1,3)\rangle = -12+3+9 = 0, \\ &\langle (-6,-3,3),(-1,2,0)\rangle = 6-6+0 = 0. \end{aligned}$$

Vektörel denklem.

$$(x,y,z) = (3,-1,4) + \lambda\,(-6,-3,3), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Parametrik denklemler.

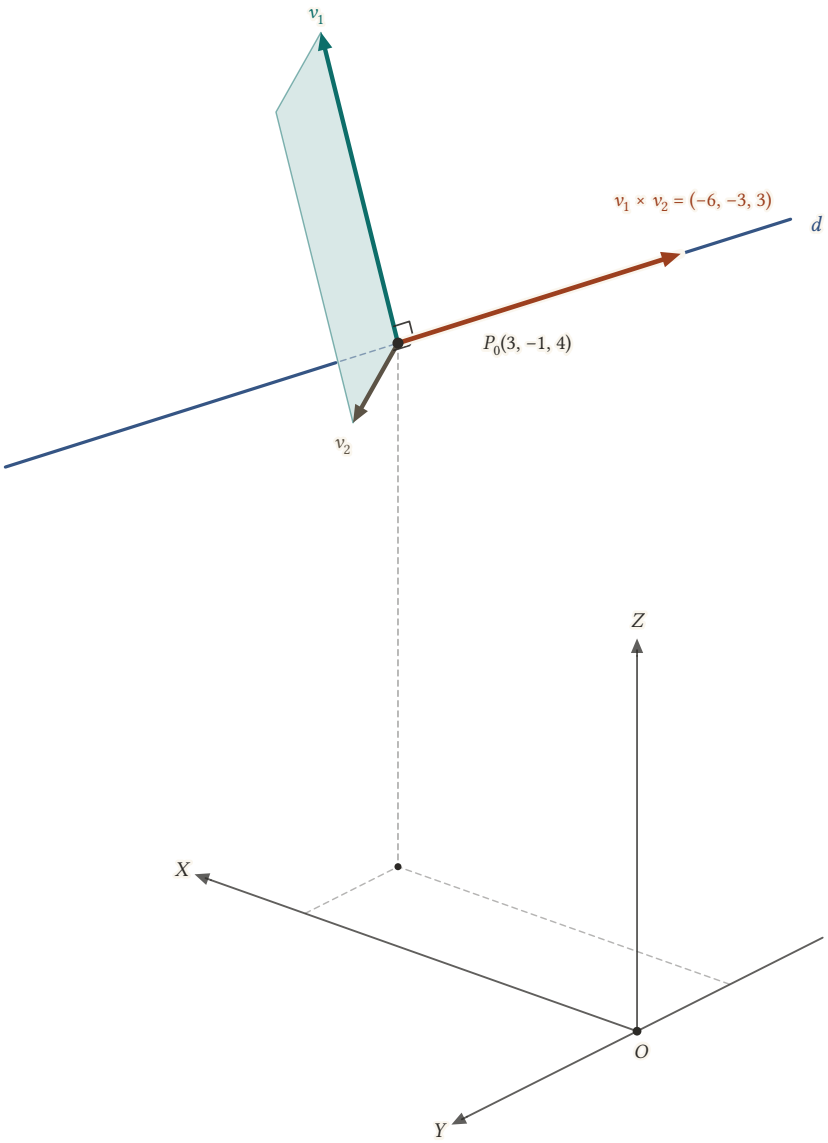
$$\left.\begin{aligned} x &= 3 - 6\lambda \\ y &= -1 - 3\lambda \\ z &= 4 + 3\lambda \end{aligned}\right\} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Kartezyen denklemler.

$$d : \frac{x-3}{-6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-4}{3}.$$

$(-6,-3,3) = -3\,(2,1,-1)$ olduğundan doğrultman vektörü olarak $(2,1,-1)$ de alınabilir; bu durumda kartezyen denklemler daha sade olarak $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-4}{-1}$ biçimini alır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.19: v_1 ve v_2'nin gerdiği paralelkenar (0,6 katı) ve $P_0(3, -1, 4)$'ten geçip ikisine de dik olan d doğrusu; doğrultmanı $v_1 \times v_2 = (-6, -3, 3)$ (0,3 katı çizildi).

■

Alıştırma 12.11 (Doğruya dik düzlem). $P_0(3, 14, 1)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü $v = (7, 2, -3)$ olan doğruya dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Düzlem doğruya dik olduğundan doğrunun doğrultman vektörü düzlemin normali olarak alınabilir: $n = v = (7, 2, -3)$. Düzlemin herhangi bir noktası $P(x, y, z)$ için $\overrightarrow{P_0P} = (x - 3, y - 14, z - 1)$ olup

$$\begin{aligned} \text{chevron.l}\overrightarrow{P_0P}, n\text{chevron.r} = 0 &\Leftrightarrow \text{chevron.l}(x-3, y-14, z-1), (7, 2, -3)\text{chevron.r} = 0 \\ &\Leftrightarrow 7(x-3) + 2(y-14) - 3(z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 7x - 21 + 2y - 28 - 3z + 3 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $-21 - 28 + 3 = -46$ olduğundan düzlemin denklemi

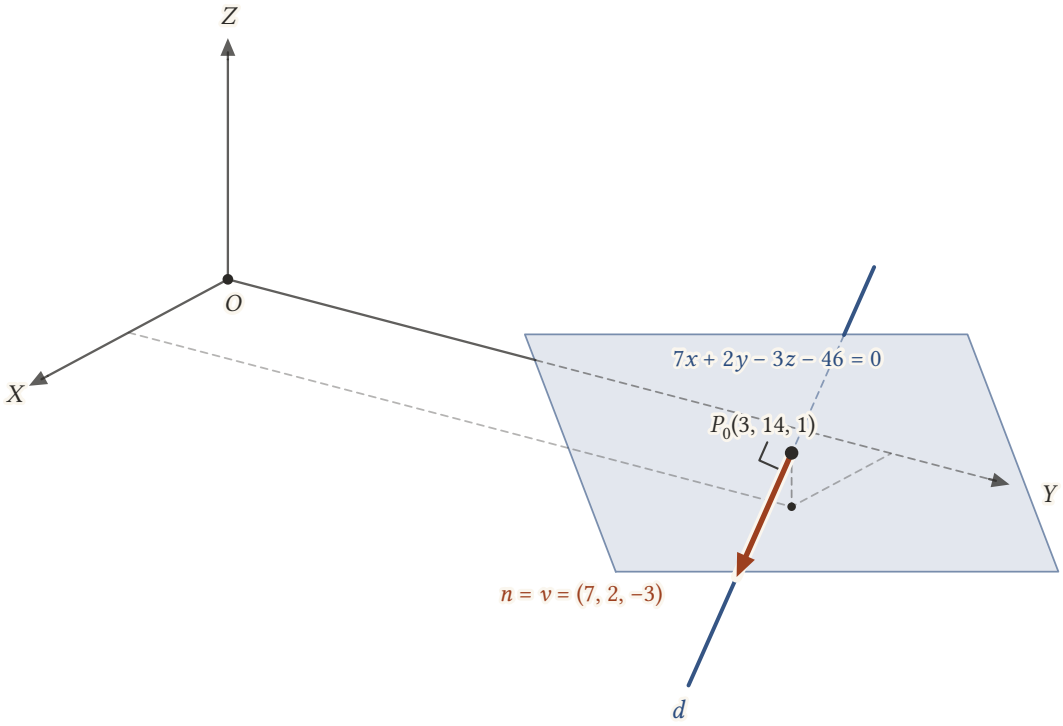
 CC BY-NC-SA 4.0

$$7x + 2y - 3z - 46 = 0$$

dır. Kontrol:

$$7 \cdot 3 + 2 \cdot 14 - 3 \cdot 1 - 46 = 21 + 28 - 3 - 46 = 0.$$

Bu düzlemin normali, Örnek 12.2 içinde bulunan $7x + 2y - 3z - 21 = 0$ düzleminin normaliyle aynıdır; iki düzlem yalnız sabit terimde ayrılır. Böyle düzlemlerin birbirine paralel olduğunu bir sonraki bölümde göreceğiz.



Şekil 12.20: $P_0(3, 14, 1)$ noktasından geçen ve doğrultmanı $(7, 2, -3)$ olan d doğrusuna dik düzlem: $7x + 2y - 3z - 46 = 0$. Doğrunun düzlemin arkasında kalan kısmı kesiklidir.

■

Alıştırma 12.12 (Üç noktadan geçen düzlemi iki yoldan bulmak). $P_1(1, 1, -1)$, $P_2(-3, -3, 3)$ ve $P_3(1, -1, 2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Birinci yol: katsayıları bilinmeyen denklem. Önerme 12.1 uyarınca aranan $\mathfrak{D}$ düzleminin denklemi, $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ olmak üzere $\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ biçimindedir. Üç noktayı denklemde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && A + B - C + D = 0, \\ &\text{(ii)} && -3A - 3B + 3C + D = 0, \\ &\text{(iii)} && A - B + 2C + D = 0. \end{aligned}$$

(i)'yi 3 ile çarpıp (ii)'ye eklersek $4D = 0$, yani $D = 0$ bulunur. Bu durumda (i) ve (iii)

$$A + B = C, \qquad A - B = -2C$$

olur. Bu ikisini toplarsak $2A = -C$, yani $A = -\frac{C}{2}$; (i)'den de $B = C - A = \frac{3C}{2}$ bulunur. Böylece düzlemin denklemi

$$-\frac{C}{2}\,x + \frac{3C}{2}\,y + Cz = 0$$

biçimindedir. $C = 0$ olsaydı $A = B = 0$ olurdu, bu da düzlem belirtmezdi; öyleyse $C \neq 0$ dır. Denklemi $-\frac{2}{C}$ ile çarparsak

$$\mathfrak{D} : x - 3y - 2z = 0$$

elde edilir.

İkinci yol: determinant. Teorem 12.2 içindeki determinantı, P_1 başlangıç olmak üzere kuralım:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_1P_2} &= (-3-1,-3-1,3-(-1)) = (-4,-4,4),\\
\overrightarrow{P_1P_3} &= (1-1,-1-1,2-(-1)) = (0,-2,3),\\
\overrightarrow{P_1Q} &= (x-1,y-1,z+1).
\end{aligned}$$

Buna göre

$$\begin{vmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ x-1 & y-1 & z+1 \end{vmatrix} = 0$$

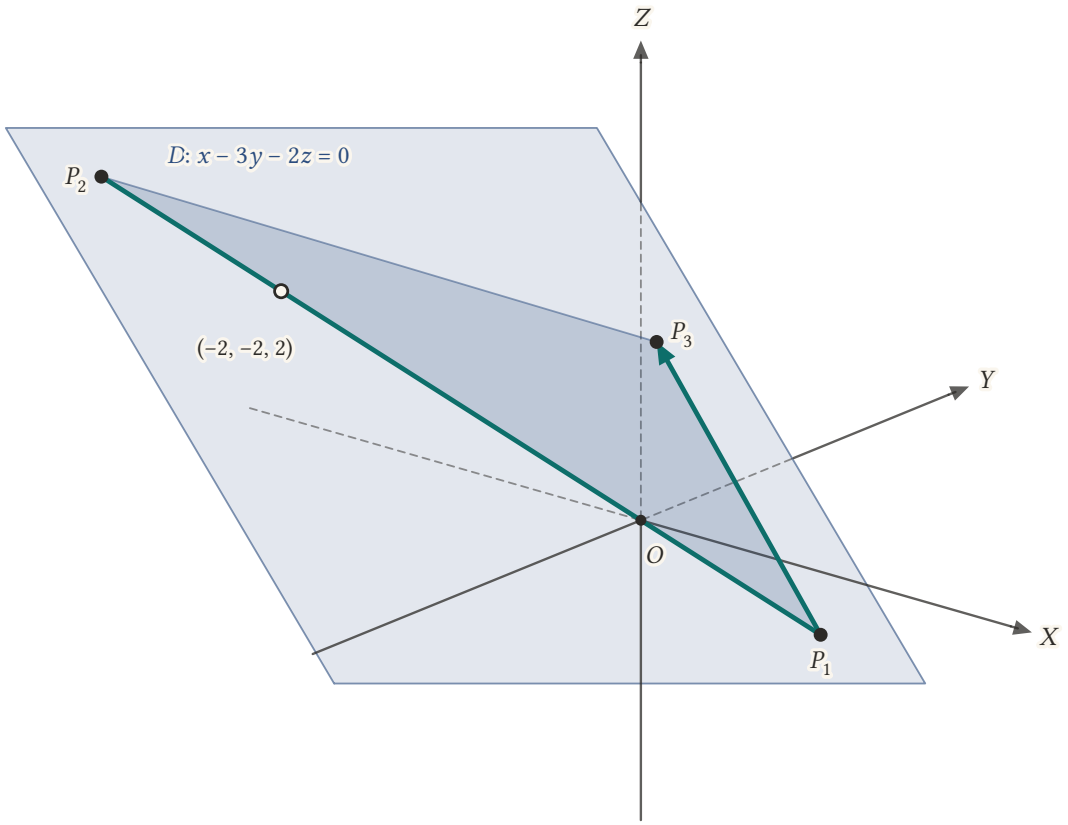
dır. Birinci satıra göre açarsak

$$\begin{aligned}
&-4\,\big[-2(z+1)-3(y-1)\,\big] - (-4)\,\big[\,0-3(x-1)\,\big]\\
&\quad +4\,\big[\,0-(-2)(x-1)\,\big] = 0\\
&\Leftrightarrow 8(z+1)+12(y-1)-12(x-1)+8(x-1) = 0\\
&\Leftrightarrow 8z+8+12y-12-12x+12+8x-8 = 0\\
&\Leftrightarrow -4x+12y+8z = 0\\
&\Leftrightarrow x-3y-2z = 0
\end{aligned}$$

bulunur. İki yol aynı düzlemi verir.

Bu düzlem, Örnek 12.7 içinde bulunan düzlemle aynıdır. Bunun nedeni: buradaki $P_2(-3,-3,3)$ noktası için $\overrightarrow{P_1P_2} = (-4,-4,4)$, oradaki $P_2(-2,-2,2)$ noktası için ise $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3,-3,3)$ tür ve bu iki vektör paraleldir. Yani iki P_2 noktası da P_1'den geçen aynı doğrunun üzerindedir ve P_1, P_3 ortak olduğundan iki üçlü aynı düzlemi belirler.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 12.21: $P_1(1, 1, -1)$, $P_2(-3, -3, 3)$, $P_3(1, -1, 2)$ noktalarından geçen $x - 3y - 2z = 0$ düzlemi. Önceki örneğin $(-2, -2, 2)$ noktası (boş daire) P_1P_2 doğrusu üzerindedir.

■

Alıştırma 12.13 (Üç noktadan geçen düzlemin determinantla bulunması). $P_1(2, 1, -1)$, $P_2(-2, 2, 4)$ ve $P_3(3, 2, -2)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm.
P_1'i başlangıç seçelim:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-2-2, 2-1, 4-(-1)) = (-4, 1, 5),$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (3-2, 2-1, -2-(-1)) = (1, 1, -1),$$
$$\overrightarrow{P_1Q} = (x-2, y-1, z+1).$$

İlk iki vektör orantılı değildir $(-4/1 \neq 1/1)$, dolayısıyla noktalar doğrudaş değildir. Teorem 12.2 uyarınca düzlemin denklemi

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ x-2 & y-1 & z+1 \end{vmatrix} = 0$$

dır. Birinci satıra göre açalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

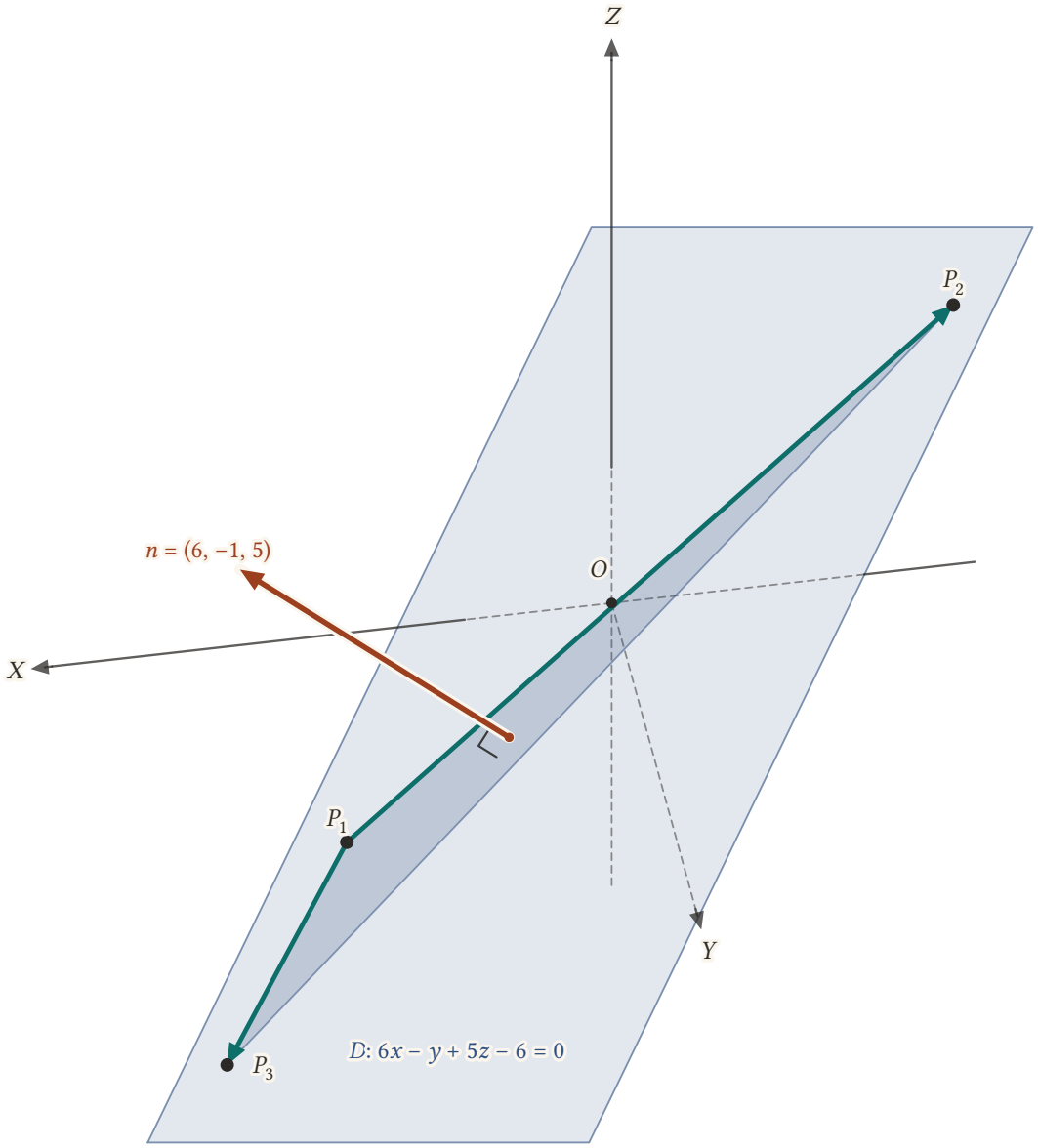
$$
\begin{aligned}
&-4\,[\,1\cdot(z+1)-(-1)(y-1)\,]-1\,[\,1\cdot(z+1)-(-1)(x-2)\,]\\
&\quad+5\,[\,1\cdot(y-1)-1\cdot(x-2)\,]=0\\
&\Leftrightarrow -4(z+1+y-1)-(z+1+x-2)+5(y-1-x+2)=0\\
&\Leftrightarrow -4y-4z-x-z+1+5y-5x+5=0\\
&\Leftrightarrow -6x+y-5z+6=0.
\end{aligned}
$$

Her iki yanı -1 ile çarparsak

$$\mathfrak{D}:6x-y+5z-6=0$$

bulunur. Bu sonuç, iki vektörün vektörel çarpımı olan $(-6,1,-5)$ normaliyle uyumludur. Kontrol:

$$
\begin{aligned}
P_1&:12-1-5-6=0,\\
P_2&:-12-2+20-6=0,\\
P_3&:18-2-10-6=0.
\end{aligned}
$$



Şekil 12.22: $P_1(2,\,1,\,-1)$, $P_2(-2,\,2,\,4)$, $P_3(3,\,2,\,-2)$ noktalarından geçen $6x-y+5z-6=0$ düzlemi ve normali (0,3 katı, üçgenin ağırlık merkezinden).

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Bu bölümde bir düzlemi üç farklı veriden belirledik: bir nokta ve bir normal, bir nokta ve iki doğrultu, doğrudaş olmayan üç nokta. Her durumda iş, düzlemin normalini bulmaya dayandı. Bir sonraki bölümde iki düzlemin birbirine göre durumlarını, kesişen iki düzlemin arakesit doğrusunu, iki düzlem arasındaki açıyı ve düzlem denkleminin katsayılarının geometrik anlamını inceleyeceğiz: İki Düzlem ve Düzlemin İrdelenmesi.

 CC BY-NC-SA 4.0

13. İki Düzlem ve Düzlemin İrdelenmesi

Bir önceki bölümde uzayda bir düzlemin denklemini kurmayı öğrendik (Uzayda Düzlem Denklemleri): her $\mathfrak{D}$ düzlemi

$$\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$$

biçiminde bir kartezyen denklemle yazılır ve $n = (A, B, C) \neq 0$ vektörü $\mathfrak{D}$'nin bir normal vektörüdür. Bu bölümde iki düzlemi yan yana koyacağız. İki düzlem paralel mi, çakışık mı, dik mi? Kesişiyorlarsa hangi doğru boyunca kesişirler ve aralarındaki açı nedir? Bu soruların hepsinin cevabı normal vektörlerde saklıdır. Bölümün ikinci yarısında tek bir düzleme döneceğiz: bir düzlemi uzayda nasıl çizeriz ve denklemindeki katsayıların sıfır olup olmaması düzlemin konumu hakkında ne söyler?
Bölüm boyunca, aksi söylenmedikçe iki düzlemi

$$\mathfrak{D}_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\mathfrak{D}_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

biçiminde yazacağız; normal vektörleri $n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ve $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ olsun. Bir $P(x, y, z)$ noktasını konum vektörüyle özdeşleştirirsek $A_1x + B_1y + C_1z = \langle n_1, P\rangle$ olur; böylece $\mathfrak{D}_1$'in denklemi kısaca $\langle n_1, P\rangle + D_1 = 0$ diye de yazılabilir. Bu yazımı ispatlarda sık kullanacağız.

13.1 İki Düzlemin Birbirine Göre Durumları

Uzayda iki düzlem birbirine göre ancak iki biçimde durabilir:

1. $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$ **paraleldir**. Özel bir durum olarak **çakışık** olabilirler, yani aynı düzlem olabilirler.
2. $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$ **kesişir**. Özel bir durum olarak **dik** kesişebilirler.

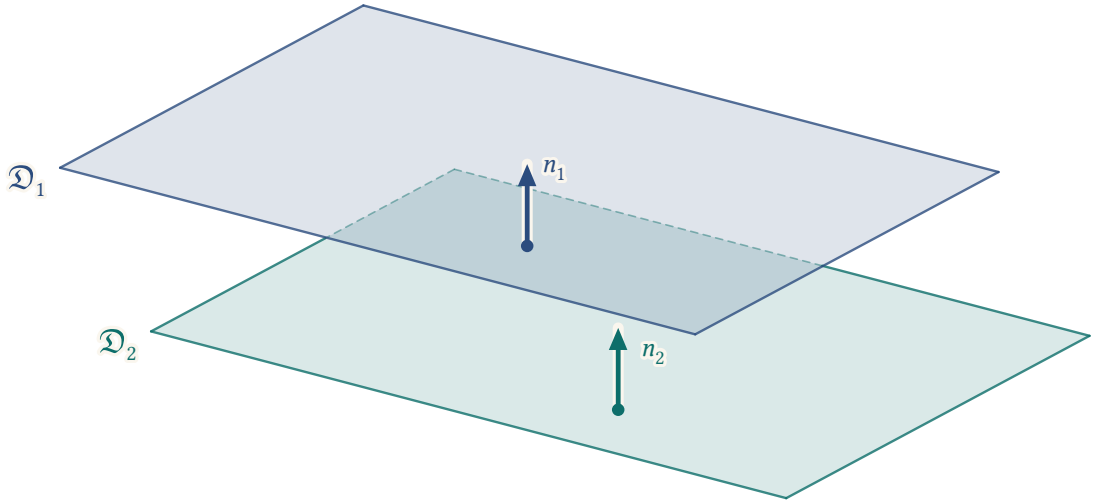
Paralellik ve diklik, düzlemlerin normal vektörleri üzerinden tanımlanır. Bunun nedeni basittir: bir düzlemin "hangi yöne baktığını" normal vektörü söyler. İki düzlem aynı yöne bakıyorsa paralel, birbirine dik yönlere bakıyorsa diktir.

13.1.1 Paralellik koşulu

Tanım 13.1 (Paralel düzlemler). $\mathfrak{D}_1$ ve $\mathfrak{D}_2$ düzlemlerinin normal vektörleri sırasıyla n_1 ve n_2 olsun. $n_1 \parallel n_2$ ise $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$'ye **paralel düzlemler** denir ve $\mathfrak{D}_1 \parallel \mathfrak{D}_2$ yazılır:

$$\mathfrak{D}_1 \parallel \mathfrak{D}_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.1: Paralel iki düzlem: normal vektörleri n_1 ile n_2 aynı doğrultudadır. Alttaki düzlemin üsttekinin arkasında kalan kenarları kesiklidir.

Yani paralel iki düzlem, normal vektörleri aynı doğrultuda olan düzlemlerdir. Bir düzlemin normal vektörü tek değildir: n bir normal ise sıfırdan farklı her λ için λn de bir normaldir. Bu yüzden tanım, hangi normalin seçildiğine bağlı değildir; $n_1 \parallel n_2$ ise $\lambda n_1 \parallel \mu n_2$ de doğrudur.

Önerme 13.1 (Paralelliğin koordinatlarla ifadesi). *$n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ve $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ olsun. Bu durumda*

$$\mathfrak{D}_1 \parallel \mathfrak{D}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

dir. Buradaki eşitlik bir orantı olarak okunur: bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ olması demektir. Paydalardan biri sıfırsa karşısındaki pay da sıfırdır.

> ***İspat.***
> *Tanım gereği $\mathfrak{D}_1 \parallel \mathfrak{D}_2$, $n_1 \parallel n_2$ demektir. Paralel vektörlerin tanımına göre (Tanım 7.15) bu, bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $n_1 = \lambda n_2$ olmasına, yani koordinatlarda*
>
> $$A_1 = \lambda A_2, \qquad B_1 = \lambda B_2, \qquad C_1 = \lambda C_2$$
>
> *olmasına denktir. Bu üç eşitlik, orantının tam olarak söylediği şeydir. $n_1 \neq 0$ olduğundan $\lambda \neq 0$'dır. Örneğin $A_2 = 0$ ise $A_1 = \lambda \cdot 0 = 0$ olur; paydası sıfır olan oranın payının da sıfır olması bundandır.* ■

Örnek 13.1 (Bir katsayısı sıfır olan paralel düzlemler). $\mathfrak{D}_1 : y + 2z - 1 = 0$ ve $\mathfrak{D}_2 : 3y + 6z + 7 = 0$ düzlemlerinin paralel olduğunu gösterelim.

> **Çözüm.**
> Normal vektörler $n_1 = (0, 1, 2)$ ve $n_2 = (0, 3, 6)$'dır. İki vektörün de birinci koordinatı sıfır, kalan koordinatlar ise
>
> $$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$
>
> orantısını sağlar. Gerçekten $n_1 = \frac{1}{3}\, n_2$'dir: $0 = \frac{1}{3} \cdot 0$, $1 = \frac{1}{3} \cdot 3$, $2 = \frac{1}{3} \cdot 6$. Demek ki $n_1 \parallel n_2$ ve dolayısıyla $\mathfrak{D}_1 \parallel \mathfrak{D}_2$'dir. Burada $\frac{A_1}{A_2} = \frac{0}{0}$ yazımı bir sayı belirtmez; orantıyı "$A_1 = \lambda A_2$" diye okuduğumuzda $0 = \frac{1}{3} \cdot 0$ eşitliği sorunsuz sağlanır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Paralel iki düzlem ne zaman aynı düzlemdir? Normallerin orantılı olması yetmez; denklemlerin sabit terimleri de aynı oranda olmalıdır.

Tanım 13.2 (Çakışık düzlemler). Aynı noktalardan oluşan, yani nokta kümeleri eşit olan iki düzleme **çakışık düzlemler** denir.

Yani çakışık iki düzlem, iki farklı denklemle yazılmış aynı düzlemdir. Örneğin $x+y+z-1=0$ ile $2x+2y+2z-2=0$ denklemlerini aynı noktalar sağlar, çünkü ikinci denklem birincinin 2 katıdır.

Önerme 13.2 (Çakışıklık koşulu). *$\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$ düzlemlerinin çakışık olması için gerek ve yeter koşul*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$$

olmasıdır; yani sıfırdan farklı bir λ için $(A_1,B_1,C_1,D_1)=\lambda\,(A_2,B_2,C_2,D_2)$ olmasıdır. Özellikle çakışık iki düzlem paraleldir.

İspat.
($\Leftarrow$) $(A_1,B_1,C_1,D_1)=\lambda\,(A_2,B_2,C_2,D_2)$ ve $\lambda\neq 0$ olsun. Her $P(x,y,z)$ noktası için

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=\lambda\,(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$$

olur. $\lambda\neq 0$ olduğundan sol taraf ancak ve ancak sağdaki parantez sıfırken sıfırdır. Yani bir nokta $\mathfrak{D}_1$'in denklemini ancak ve ancak $\mathfrak{D}_2$'nin denklemini sağlıyorsa sağlar; iki düzlem çakışıktır.
($\Rightarrow$) $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$ aynı noktalardan oluşsun. Önce normallerin paralel olduğunu gösterelim. Bu ortak düzlemden bir P_0 noktası alalım; $\langle n_1,P_0\rangle+D_1=0$ ve $\langle n_2,P_0\rangle+D_2=0$'dır.
n_1'e dik herhangi bir w vektörü için P_0+w noktası $\mathfrak{D}_1$'dedir, çünkü

$$\langle n_1,P_0+w\rangle+D_1=\big(\ \langle n_1,P_0\rangle+D_1\ \big)+\langle n_1,w\rangle=0+0=0$$

olur. Düzlemler çakışık olduğundan P_0+w noktası $\mathfrak{D}_2$'de de bulunur. Aynı hesabı n_2 ile yaparsak

$$0=\big(\ \langle n_2,P_0\rangle+D_2\ \big)+\langle n_2,w\rangle=\langle n_2,w\rangle$$

*bulunur. Yani **n_1'e dik her vektör n_2'ye de diktir.***
Şimdi bu gözlemi özel bir vektöre uygulayalım:

$$w=\|\ n_1\ \|^2 n_2-\langle n_1,n_2\rangle\, n_1.$$

İç çarpımın bilineerliğinden (Önerme 8.1)

$$\langle n_1,w\rangle=\|\ n_1\ \|^2\langle n_1,n_2\rangle-\langle n_1,n_2\rangle\ \|\ n_1\ \|^2=0$$

olduğundan $w\perp n_1$'dir; öyleyse $w\perp n_2$ olmalıdır:

$$0=\langle n_2,w\rangle=\|\ n_1\ \|^2\,\|\ n_2\ \|^2-\langle n_1,n_2\rangle^2.$$

Demek ki $|\ \langle n_1,n_2\rangle\ |=\|\ n_1\ \|\ \|\ n_2\ \|$'dir. Cauchy–Schwarz eşitsizliğinde eşitlik ancak vektörler lineer bağımlıyken sağlanır (Teorem 8.1). n_1 ve n_2 sıfırdan farklı olduğundan bu, sıfırdan farklı bir λ için $n_1=\lambda n_2$ demektir. Böylece $A_1=\lambda A_2$, $B_1=\lambda B_2$, $C_1=\lambda C_2$'dir.
Son olarak sabit terimlere bakalım:

$$D_1=-\langle n_1,P_0\rangle=-\lambda\langle n_2,P_0\rangle=\lambda D_2.$$

Böylece $(A_1,B_1,C_1,D_1)=\lambda\,(A_2,B_2,C_2,D_2)$ elde edilir. Bu eşitliğin ilk üç bileşeni $n_1\parallel n_2$ demektir; yani çakışık düzlemler paraleldir. ■

Paralel iki düzlem çakışık değilse ne olur? Günlük sezgimiz "hiç buluşmazlar" der; bunu ispatlayalım.

Önerme 13.3 (Paralel düzlemlerin ortak noktası). *Paralel iki düzlem ya çakışıktır ya da hiç ortak noktaları yoktur.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$\mathfrak{D}_1 \parallel \mathfrak{D}_2$ olsun; Önerme 13.1 gereği sıfırdan farklı bir λ için $n_1 = \lambda n_2$'dir. İki düzlemin bir P_0 ortak noktası bulunduğunu varsayalım. O zaman $\langle n_1, P_0\rangle + D_1 = 0$ ve $\langle n_2, P_0\rangle + D_2 = 0$ olduğundan

$$D_1 = -\langle n_1, P_0\rangle = -\lambda\langle n_2, P_0\rangle = \lambda D_2$$

olur. Demek ki $(A_1, B_1, C_1, D_1) = \lambda\,(A_2, B_2, C_2, D_2)$'dir ve Önerme 13.2 gereği düzlemler çakışıktır. Öyleyse paralel iki düzlemin tek bir ortak noktası bile varsa düzlemler çakışıktır; çakışık değillerse hiç ortak noktaları yoktur. ■

Yani paralel iki düzlemin durumu, A, B, C katsayılarının oranı ile D'lerin oranı karşılaştırılarak anlaşılır: oranlar eşitse düzlemler çakışıktır, D'lerin oranı ötekilerden farklıysa düzlemler hiç kesişmez.

Örnek 13.2 (Paralel ve ayrık iki düzlem). $\mathfrak{D}_1 : 2x - 4y + 6z - 1 = 0$ ve $\mathfrak{D}_2 : -x + 2y - 3z + 5 = 0$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyelim.

Çözüm.
Normaller $n_1 = (2, -4, 6)$ ve $n_2 = (-1, 2, -3)$'tür. Katsayıları oranlayalım:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{-1} = -2, \qquad \frac{B_1}{B_2} = \frac{-4}{2} = -2, \qquad \frac{C_1}{C_2} = \frac{6}{-3} = -2.$$

Üç oran eşit olduğundan $n_1 = -2\,n_2$ ve $\mathfrak{D}_1 \parallel \mathfrak{D}_2$'dir. Sabit terimlerin oranı ise

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{-1}{5} \neq -2$$

olduğundan düzlemler çakışık değildir (Önerme 13.2). Önerme 13.3 gereği $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$'nin hiç ortak noktası yoktur. ■

Örnek 13.3 (Çakışık iki düzlem). $\mathfrak{D}_1 : 3x - 6y + 9z - 12 = 0$ ve $\mathfrak{D}_2 : x - 2y + 3z - 4 = 0$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyelim.

Çözüm.
Dört katsayının oranları

$$\frac{3}{1} = \frac{-6}{-2} = \frac{9}{3} = \frac{-12}{-4} = 3$$

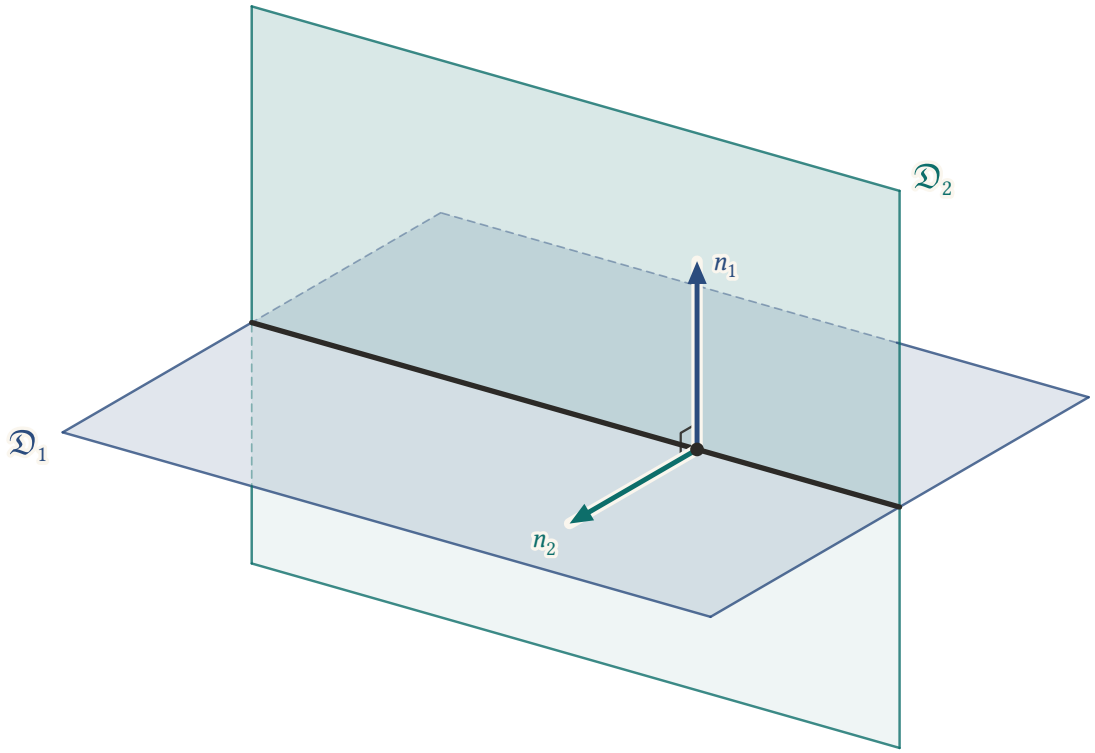
olup hepsi eşittir. Yani $\mathfrak{D}_1$'in denklemi, $\mathfrak{D}_2$'nin denkleminin 3 katıdır ve Önerme 13.2 gereği iki düzlem çakışıktır: aslında tek bir düzlemi iki farklı denklemle yazmışız. ■

13.1.2 Diklik koşulu

Tanım 13.3 (Dik düzlemler). $\mathfrak{D}_1$ ve $\mathfrak{D}_2$ düzlemlerinin normal vektörleri sırasıyla n_1 ve n_2 olsun. $n_1 \perp n_2$ ise $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$'ye **dik düzlemler** denir ve $\mathfrak{D}_1 \perp \mathfrak{D}_2$ yazılır:

$$\mathfrak{D}_1 \perp \mathfrak{D}_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \Leftrightarrow \langle n_1, n_2\rangle = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.2: Dik iki düzlem: yatay zemin ile düşey duvar. Normalleri n_1 ile n_2 arasındaki açı diktir; düşey düzlemin yatay düzlemin altında kalan kısmı soluk, kenarları kesiklidir.

Yani iki düzlem, normalleri birbirine dikse diktir. Odanın zemini ile bir duvarı dik iki düzlemdir: zeminin normali yukarıyı, duvarın normali ise yatay bir yönü gösterir. Son denklik iç çarpımla diklik ölçütünden gelir (Tanım 8.3).

Önerme 13.4 (Dikliğin koordinatlarla ifadesi). *$n_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ve $n_2 = (A_2, B_2, C_2)$ olsun. Bu durumda*

$$\mathfrak{D}_1 \perp \mathfrak{D}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

dır. Ayrıca dik iki düzlem paralel değildir.

> ***İspat.***
> *İç çarpımın koordinatlarla ifadesi $\langle n_1, n_2\rangle = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$ olduğundan birinci kısım doğrudan tanımdan çıkar.*
> *İkinci kısım için dik iki düzlemin aynı zamanda paralel olduğunu varsayalım. O zaman sıfırdan farklı bir λ için $n_1 = \lambda n_2$ olur ve*
>
> $$\langle n_1, n_2\rangle = \lambda\langle n_2, n_2\rangle = \lambda \parallel n_2 \overset{2}{\parallel} \neq 0$$
>
> *bulunur, çünkü $\lambda \neq 0$ ve $n_2 \neq 0$'dır. Bu, $\langle n_1, n_2\rangle = 0$ olmasıyla çelişir. Demek ki dik düzlemler paralel olamaz; bir sonraki kısımda göreceğimiz gibi paralel olmayan iki düzlem bir doğru boyunca kesişir. Yani dik düzlemler **dik kesişir**.* ■

Örnek 13.4 (Diklik için parametre bulma). $\mathfrak{D}_1 : x + y + z = 0$ ve $\mathfrak{D}_2 : 2x - 3y + mz = 0$ düzlemlerinin dik olması için m ne olmalıdır?

> **Çözüm.**
> Normal vektörler $n_1 = (1, 1, 1)$ ve $n_2 = (2, -3, m)$'dir. Önerme 13.4 gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_1 \perp \mathfrak{D}_2 &\Leftrightarrow \langle n_1, n_2\rangle = 0\\ &\Leftrightarrow 1\cdot 2 + 1\cdot(-3) + 1\cdot m = 0\\ &\Leftrightarrow -1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 1\end{aligned}$$

bulunur. Yani iki düzlem yalnız $m = 1$ için diktir; bu durumda $\mathfrak{D}_2 : 2x - 3y + z = 0$ olur. ■

Örnek 13.5 (Diklik denetimi). $\mathfrak{D}_1 : x + 2y + 2z - 5 = 0$ ve $\mathfrak{D}_2 : 2x - 2y + z = 0$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyelim.

Çözüm.
Normaller $n_1 = (1, 2, 2)$ ve $n_2 = (2, -2, 1)$'dir. Önce paralelliğe bakalım: $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-2}$ olduğundan normaller orantılı değildir ve düzlemler paralel değildir. Sonra iç çarpımı hesaplayalım:

$$\langle n_1, n_2\rangle = 1\cdot 2 + 2\cdot(-2) + 2\cdot 1 = 2 - 4 + 2 = 0.$$

Demek ki $\mathfrak{D}_1 \perp \mathfrak{D}_2$'dir: iki düzlem dik kesişir. ■

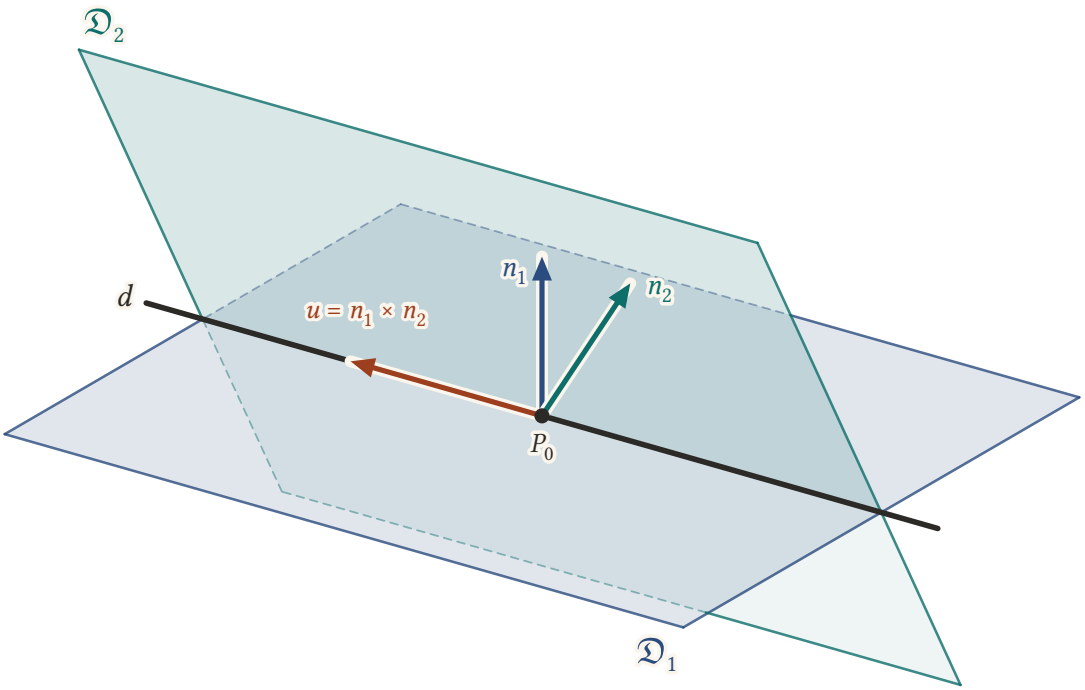
13.2 Kesişen İki Düzlemin Arakesit Doğrusu

Paralel olmayan iki düzlemin ne yaptığını şimdi görelim. Açık bir kitabın iki kapağı gibi, bu iki düzlem bir doğru boyunca buluşur. Aşağıdaki teorem bunu ispatlar ve o doğrunun doğrultusunu da verir.

Teorem 13.1 (Kesişen iki düzlemin arakesiti bir doğrudur). *$\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$ paralel olmasın. Bu durumda $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ kümesi bir doğrudur ve bu doğrunun bir doğrultman vektörü*

$$u = n_1 \times n_2$$

*dir. Bu durumda $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$'ye **kesişen düzlemler**, ortak doğrularına da iki düzlemin **arakesit doğrusu** denir.*



Şekil 13.3: Kesişen iki düzlem ortak bir d *doğrusu boyunca buluşur.* d*, iki düzlemde de yattığı için iki normale de diktir; doğrultusu* $\mathrm{u} = \mathrm{n}_1 \times \mathrm{n}_2$*'dir. Düzlemlerin birbirinin arkasında kalan kenarları kesiklidir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
İspatı dört adımda yapacağız.
1. $u \neq 0$'dır. *n_1 ve n_2 sıfırdan farklıdır ve paralel değildir. Bu iki vektör lineer bağımlı olsaydı ikisi birden sıfır olmayan λ_1, λ_2 için $\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 = 0$ olurdu; vektörler sıfırdan farklı olduğundan $\lambda_1 \neq 0$ ve $\lambda_2 \neq 0$ olmak zorundadır ve $n_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} n_2$ bulunurdu, yani $n_1 \parallel n_2$ olurdu. Demek ki n_1 ile n_2 lineer bağımsızdır ve Önerme 9.3 gereği $u = n_1 \times n_2 \neq 0$'dır.*
2. İki düzlemin bir ortak noktası vardır. *Vektörel çarpımın tanımından (Tanım 9.1)*

$$u = \left(B_1C_2 - C_1B_2, C_1A_2 - A_1C_2, A_1B_2 - B_1A_2 \right)$$

dir. $u \neq 0$ olduğundan bileşenlerinden en az biri sıfırdan farklıdır. Üçüncü bileşenin sıfırdan farklı olduğunu, yani $A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$ olduğunu varsayalım; öteki iki durum, değişkenlerin rolleri değiştirilerek aynı biçimde işlenir. İki denklemde $z = 0$ yazarsak

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= -D_1, \\ A_2x + B_2y &= -D_2 \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar determinantı $A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$ olduğundan sistemin tek bir (x_0, y_0) çözümü vardır. O hâlde $P_0(x_0, y_0, 0)$ noktası iki düzlemin de denklemini sağlar.
3. P_0'dan geçen ve u doğrultusundaki d doğrusu iki düzlemde de kalır. *d'nin noktaları $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P_0 + t\,u$ biçimindedir. $u = n_1 \times n_2$ hem n_1'e hem n_2'ye diktir (Teorem 9.1). Bu yüzden $i = 1, 2$ için*

$$\langle n_i, P_0 + t\,u \rangle + D_i = \left(\langle n_i, P_0 \rangle + D_i \right) + t \langle n_i, u \rangle = 0 + t \cdot 0 = 0$$

olur; yani $d \subseteq \mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$'dir.
4. İki düzlemin her ortak noktası d üzerindedir. *P, iki düzlemin ortak bir noktası olsun ve $w = \overrightarrow{P_0P}$ diyelim. P ile P_0 aynı denklemleri sağladığından, denklemleri taraf tarafa çıkarırsak*

$$\langle n_1, w \rangle = 0 \qquad \text{ve} \qquad \langle n_2, w \rangle = 0$$

bulunur. Şimdi n_1, n_2, u vektörlerinin bir baz olduğunu gösterelim. Karma çarpımı iç ve vektörel çarpımla yazarsak (Önerme 9.1)

$$[n_1, n_2, u] = \langle n_1 \times n_2, u \rangle = \langle u, u \rangle = \| u \|^2 \neq 0$$

olur. Sonuç 9.5 gereği bu üç vektör lineer bağımsızdır ve Teorem 7.2 gereği bir baz oluşturur. O hâlde bazı a, b, c sayıları için $w = a\,n_1 + b\,n_2 + c\,u$ yazılabilir. Bu eşitliğin n_1 ve n_2 ile iç çarpımını alalım; $\langle u, n_1 \rangle = \langle u, n_2 \rangle = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} a \| n_1 \|^2 + b \langle n_1, n_2 \rangle &= 0, \\ a \langle n_1, n_2 \rangle + b \| n_2 \|^2 &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu a, b bilinmeyenli sistemin determinantı

$$\| n_1 \|^2 \| n_2 \|^2 - \langle n_1, n_2 \rangle^2 = \| n_1 \times n_2 \|^2 = \| u \|^2 \neq 0$$

dır (Sonuç 9.2). Öyleyse sistemin tek çözümü $a = b = 0$'dır ve $w = c\,u$ olur. Yani $P = P_0 + c\,u$ noktası d üzerindedir.

3. ve 4. adımlar birlikte $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2 = d$ olduğunu gösterir. ■

Yani arakesit doğrusu iki düzlemin de içindedir; bu yüzden doğrultusu iki normale birden diktir ve iki normale birden dik olan vektörü vektörel çarpım verir. Arakesit doğrusunu pratikte bulmanın yolları şunlardır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Arakesit doğrusunu bulmanın üç yolu

1. **İki ortak nokta.** Değişkenlerden birine iki farklı değer verin (örneğin $x = 1$ ve $x = 0$). Her seferinde iki denklem, kalan iki değişkenli bir sistem olur; onu çözerek iki ortak nokta bulun ve bu iki noktadan geçen doğrunun denklemini yazın. Seçtiğiniz değişken doğru boyunca sabit olmamalıdır; sabitse (sistem çözümsüz ya da belirsiz çıkarsa) başka bir değişken seçin.
2. **Bir değişkeni parametre almak.** Değişkenlerden birine λ deyin (örneğin $z = \lambda$). İki denklemden kalan iki değişkeni λ cinsinden çözün. Bulduğunuz ifadeler doğrunun parametrik denklemleridir.
3. **Vektörel çarpım.** Doğrultman vektörünü $u = n_1 \times n_2$ olarak alın ve 1. yoldaki gibi tek bir ortak nokta bulun.

Örnek 13.6 (Arakesit doğrusunu iki yolla bulmak). $\mathfrak{D}_1 : 2x - 3y + z - 5 = 0$ ile $\mathfrak{D}_2 : 3x + 4y - z + 1 = 0$ düzlemlerinin arakesit doğrusunu bulalım.

Çözüm.
Önce düzlemlerin kesiştiğinden emin olalım: $n_1 = (2, -3, 1)$ ile $n_2 = (3, 4, -1)$ orantılı değildir ($\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{4}$), yani düzlemler paralel değildir ve Teorem 13.1 gereği bir doğru boyunca kesişirler.
I. yol: iki ortak nokta. $x = 1$ yazalım. İki denklem

$$2 - 3y + z - 5 = 0 \Longrightarrow -3y + z = 3,$$
$$3 + 4y - z + 1 = 0 \Longrightarrow 4y - z = -4$$

olur. Taraf tarafa toplarsak $y = -1$, sonra birinci denklemden $z = 3 + 3y = 0$ bulunur. O hâlde $P_1(1, -1, 0)$ iki düzlemde de bulunur.
Şimdi $x = 0$ yazalım:

$$-3y + z - 5 = 0 \Longrightarrow -3y + z = 5,$$
$$4y - z + 1 = 0 \Longrightarrow 4y - z = -1.$$

Toplarsak $y = 4$, sonra $z = 5 + 3y = 17$ bulunur. Yani $P_2(0, 4, 17)$ de ortak bir noktadır.
Arakesit doğrusu P_1 ile P_2'den geçen doğrudur. Doğrultman vektörü

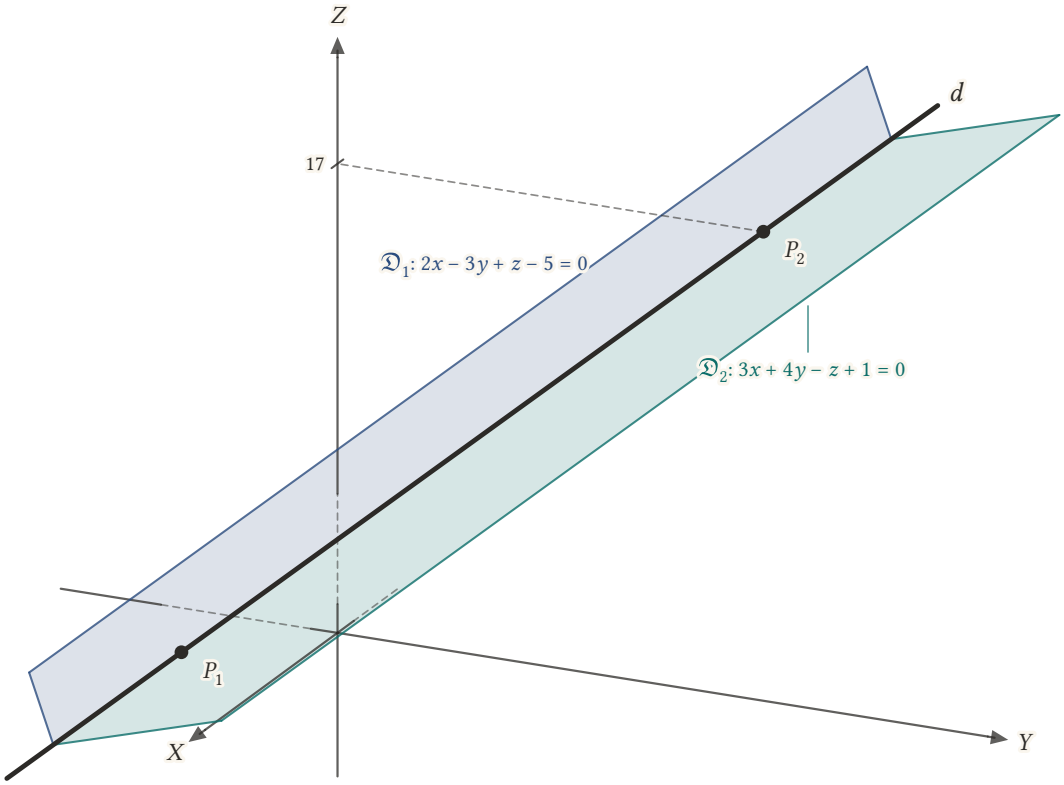
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0 - 1, 4 - (-1), 17 - 0) = (-1, 5, 17)$$

olduğundan arakesit doğrusu

$$d : \frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{5} = \frac{z}{17}$$

dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.4: İki düzlemin arakesit doğrusu d, ortak noktalar $P_1(1, -1, 0)$ ve $P_2(0, 4, 17)$'den geçer; iki şerit, düzlemlerin d'yi içeren parçalarıdır. Şekil sığsın diye Z-ekseni dörtte bir ölçekle çizilmiştir.

II. yol: bir değişkeni parametre almak. $z = \lambda$ diyelim. Denklemler

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 - \lambda, \\ 3x + 4y &= -1 + \lambda \end{aligned}$$

olur. y'yi yok etmek için birinciyi 4, ikinciyi 3 ile çarpıp toplayalım:

$$8x + 9x = 20 - 4\lambda - 3 + 3\lambda \Longrightarrow 17x = 17 - \lambda \Longrightarrow x = 1 - \frac{1}{17}\lambda.$$

x'i yok etmek için birinciyi 3, ikinciyi 2 ile çarpıp çıkaralım:

$$-9y - 8y = 15 - 3\lambda + 2 - 2\lambda \Longrightarrow -17y = 17 - 5\lambda \Longrightarrow y = -1 + \frac{5}{17}\lambda.$$

Böylece doğrunun parametrik denklemleri

$$x = 1 - \frac{1}{17}\lambda, \qquad y = -1 + \frac{5}{17}\lambda, \qquad z = \lambda$$

olur. Her birinden λ'yı çekersek

$$\lambda = -17(x - 1) = \frac{17}{5}(y + 1) = z$$

bulunur; 17'ye bölersek

$$d : \frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{5} = \frac{z}{17}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

kartezyen denklemlerine, yani I. yoldaki sonuca ulaşırız.
Denetim. Teorem 13.1 gereği doğrultman $n_1 \times n_2$'ye paralel olmalıdır:

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= \big((-3)(-1) - 1\cdot 4, 1\cdot 3 - 2\cdot(-1), 2\cdot 4 - (-3)\cdot 3 \big) \\ &= (-1, 5, 17). \end{aligned}$$

Gerçekten de iki yolda bulduğumuz doğrultmanın aynısıdır. ■

Örnek 13.7 (Orijinden geçen iki düzlemin arakesiti). $\mathfrak{D}_1 : x + y + 2z = 0$ ile $\mathfrak{D}_2 : 2x - y + z = 0$ düzlemlerinin arakesit doğrusunu bulalım.

Çözüm.
Normaller $n_1 = (1, 1, 2)$ ile $n_2 = (2, -1, 1)$ orantılı değildir ($\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1}$), yani düzlemler kesişir. $z = \lambda$ diyelim:

$$\begin{aligned} x + y &= -2\lambda, \\ 2x - y &= -\lambda. \end{aligned}$$

Taraf tarafa toplarsak $3x = -3\lambda$, yani $x = -\lambda$ bulunur. Birinci denklemden $y = -2\lambda - x$ ve $x = -\lambda$ olduğundan $y = -2\lambda + \lambda = -\lambda$ olur. Buna göre arakesit doğrusunun parametrik denklemleri

$$x = -\lambda, \qquad y = -\lambda, \qquad z = \lambda$$

ve kartezyen denklemleri

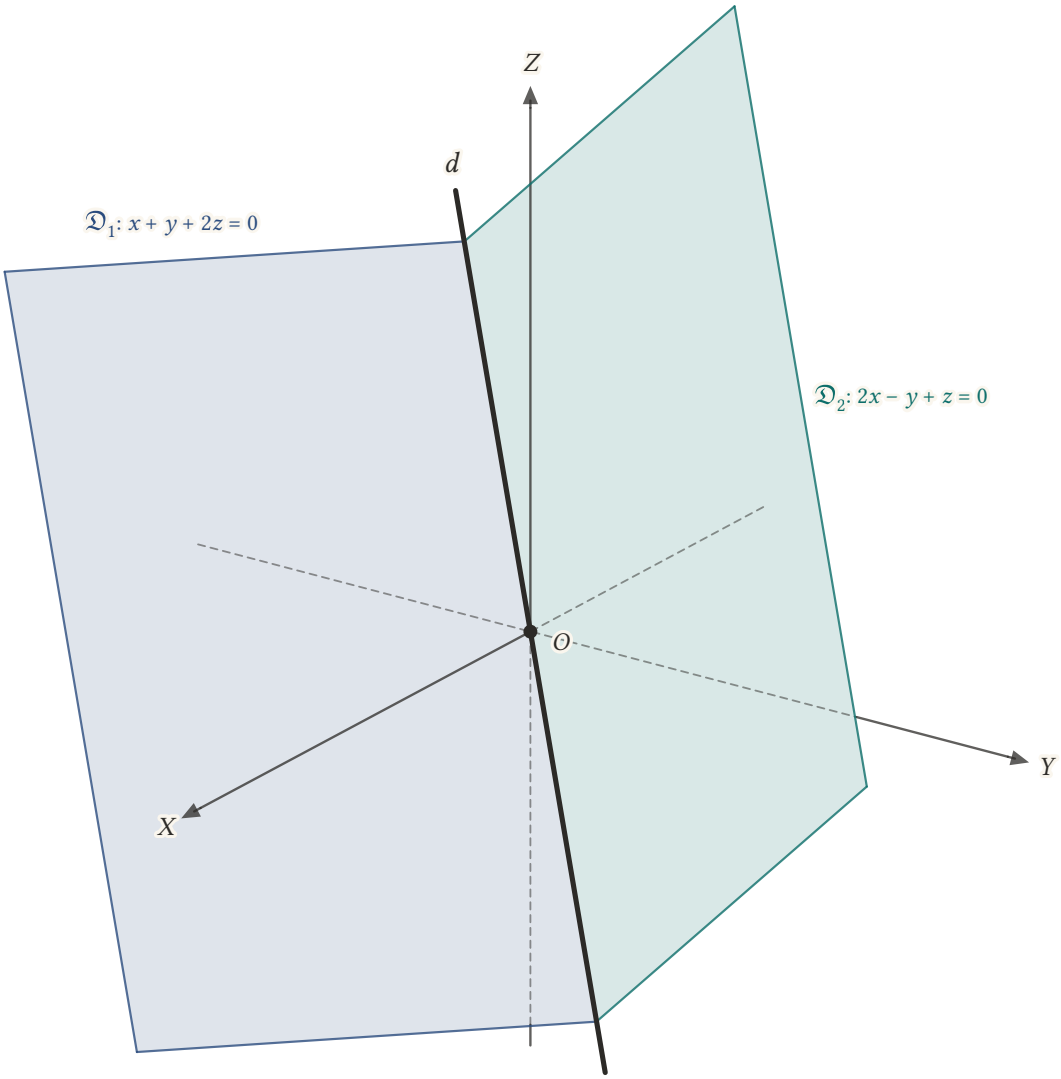
$$d : \frac{x}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

dir. İki düzlem de orijinden geçtiği için ($D_1 = D_2 = 0$) arakesit doğrusu da orijinden geçer; $\lambda = 0$ değeri $O(0, 0, 0)$ noktasını verir.
Denetim için vektörel çarpımı hesaplayalım:

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= \big(1\cdot 1 - 2\cdot(-1), 2\cdot 2 - 1\cdot 1, 1\cdot(-1) - 1\cdot 2 \big) \\ &= (3, 3, -3) = -3\,(-1, -1, 1). \end{aligned}$$

Bu vektör bulduğumuz $(-1, -1, 1)$ doğrultmanına paraleldir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.5: Orijinden geçen iki düzlemin arakesiti de orijinden geçer: d, O'dan geçen ve $(-1, -1, 1)$ doğrultusundaki doğrudur. Her düzlemin yalnız d'nin bir yanında kalan yarısı çizilmiştir.

■

Parametre seçerken bir noktaya dikkat etmek gerekir: arakesit doğrusu boyunca sabit kalan bir değişkeni parametre alamayız.

Örnek 13.8 (Parametre seçimine dikkat). $\mathfrak{D}_1 : x + y + z - 4 = 0$ ile $\mathfrak{D}_2 : x + y - z = 0$ düzlemlerinin arakesit doğrusunu bulalım.

Çözüm.
Normaller $n_1 = (1, 1, 1)$ ile $n_2 = (1, 1, -1)$ orantılı değildir, düzlemler kesişir. Denklemleri taraf tarafa çıkarırsak

$$(x + y + z - 4) - (x + y - z) = 0 \Longrightarrow 2z - 4 = 0 \Longrightarrow z = 2$$

bulunur. Yani arakesit doğrusunun **her** noktasında $z = 2$'dir; bu doğru boyunca z değişmez ve $z = \lambda$ seçimi işe yaramaz. Bunun yerine $x = \lambda$ diyelim. Toplarsak $2x + 2y - 4 = 0$, yani $y = 2 - x = 2 - \lambda$ olur. Arakesit doğrusu

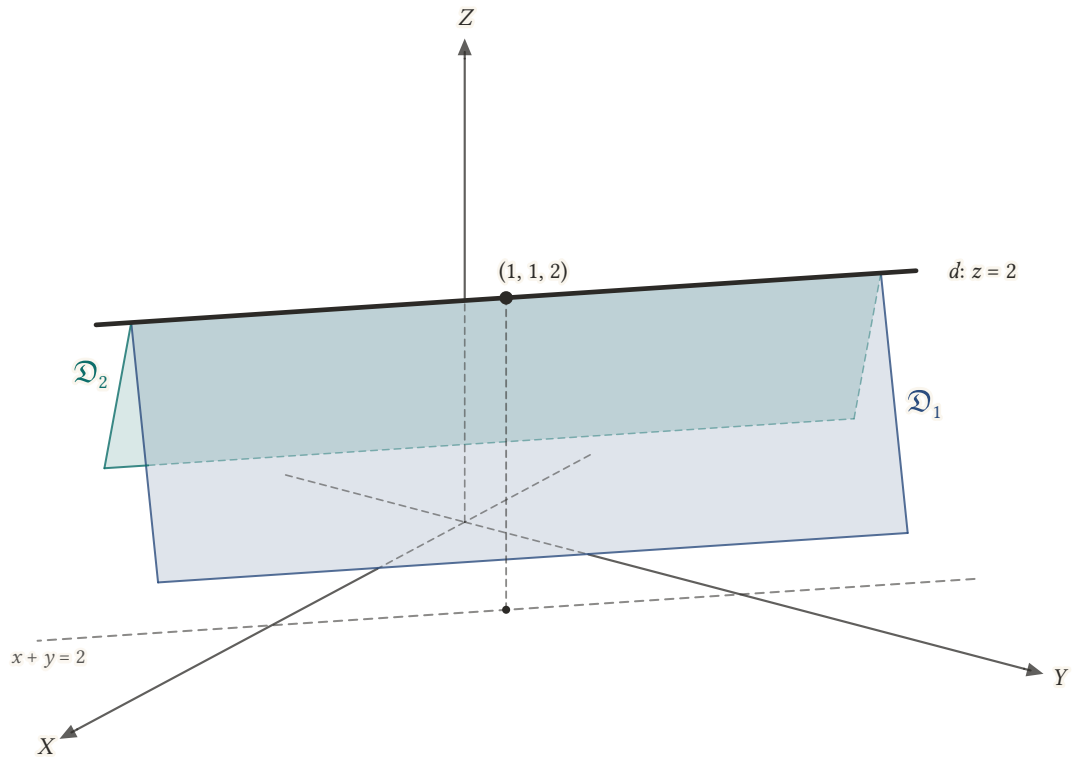
 CC BY-NC-SA 4.0

$$x = \lambda, \qquad y = 2 - \lambda, \qquad z = 2$$

dir; doğrultman vektörü $(1, -1, 0)$'dır. Denetim:

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= \big(\, 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1), 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \, \big) \\ &= (-2, 2, 0) = -2\,(1, -1, 0). \end{aligned}$$

Doğrultmanın üçüncü bileşeninin 0 olması, z'nin doğru boyunca sabit olmasının vektörel ifadesidir.



Şekil 13.6: Arakesit doğrusu d her noktasında $z = 2$ olan yatay bir doğrudur; bu yüzden z parametre olarak seçilemez. Kesikli doğru, d'nin XY-düzlemindeki izdüşümü $x + y = 2$'dir.

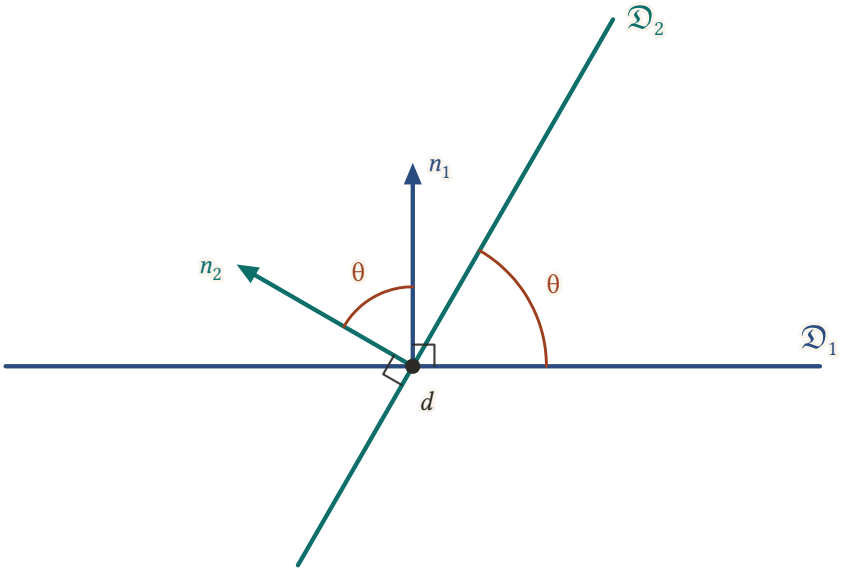
■

13.3 İki Düzlem Arasındaki Açı

Kesişen iki düzlem birbirine ne kadar "yatık"tır? Paralellik ve diklikte olduğu gibi, bu soruyu da normaller üzerinden cevaplarız.

Tanım 13.4 (İki düzlem arasındaki açı). $\mathfrak{D}_1$ ve $\mathfrak{D}_2$, normal vektörleri sırasıyla n_1 ve n_2 olan iki düzlem olsun. n_1 ile n_2 arasındaki $\theta = \measuredangle(n_1, n_2)$ açısına $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$ **düzlemleri arasındaki açı** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.7: Arakesit doğrusuna dik bir kesit: d bir nokta, düzlemler iki doğru, normaller bu doğrulara dik iki ok olarak görünür. Normaller arasındaki açı ile doğrular arasındaki açı aynı θ açısıdır.

Yani iki düzlem arasındaki açıyı ölçmek için normallerini aynı noktadan çizip aralarındaki açıya bakarız. Arakesit doğrusuna dik bir düzlemle kesit aldığımızda iki düzlem iki doğru, normaller de bu doğrulara dik iki ok olarak görünür; bir doğruyu ve ona dik oku birlikte θ kadar döndürürsek öteki doğruyu ve öteki oku elde ederiz. Bu yüzden normaller arasındaki açı, kesitteki iki doğru arasındaki açıya eşittir.

Önerme 13.5 (Açının kosinüsü; paralellik ve diklik). *$\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$ arasındaki açı $\theta = \measuredangle(n_1, n_2)$ olsun. Bu durumda*

$$\cos\theta = \frac{\langle n_1, n_2\rangle}{\| n_1 \| \| n_2 \|}$$

dir. Ayrıca
i) $\theta = 0$ ya da $\theta = \pi$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{D}_1 \parallel \mathfrak{D}_2$ olmasıdır;
ii) $\theta = \frac{\pi}{2}$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathfrak{D}_1 \perp \mathfrak{D}_2$ olmasıdır.

İspat.
n_1 ve n_2 sıfırdan farklı olduğundan kosinüs formülü, iki vektör arasındaki açının kosinüsü için bildiğimiz formüldür (Teorem 8.2).
i) *$\theta \in [0, \pi]$ olduğundan $\theta = 0$ ya da $\theta = \pi$ olması $|\cos\theta| = 1$ olmasına, bu da*

$$|\langle n_1, n_2\rangle| = \| n_1 \| \| n_2 \|$$

olmasına denktir. Cauchy–Schwarz eşitsizliğinde eşitlik ancak ve ancak n_1 ile n_2 lineer bağımlıyken sağlanır (Teorem 8.1). Sıfırdan farklı iki vektör için lineer bağımlılık, birinin ötekinin skaler katı olması, yani $n_1 \parallel n_2$ demektir. Bu da tanım gereği $\mathfrak{D}_1 \parallel \mathfrak{D}_2$'dir.
ii) *$\theta \in [0, \pi]$ aralığında*

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \langle n_1, n_2\rangle = 0$$

dır; bu da tanım gereği $\mathfrak{D}_1 \perp \mathfrak{D}_2$ demektir. ■

Bir düzlemin normalini ters çevirmek, yani n_2 yerine $-n_2$ almak düzlemi değiştirmez ama açıyı $\pi - \theta$ yapar, çünkü kosinüsün işareti değişir. Kesişen iki düzlem gerçekten de dört açı oluşturur: iki tanesi θ, iki tanesi $\pi - \theta$. Bu yüzden iki düzlem arasındaki açı çoğu zaman bu ikisinden dar olanıyla, yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\cos\varphi = \frac{|\,\langle n_1, n_2\rangle\,|}{\|\,n_1\,\|\,\|\,n_2\,\|}, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

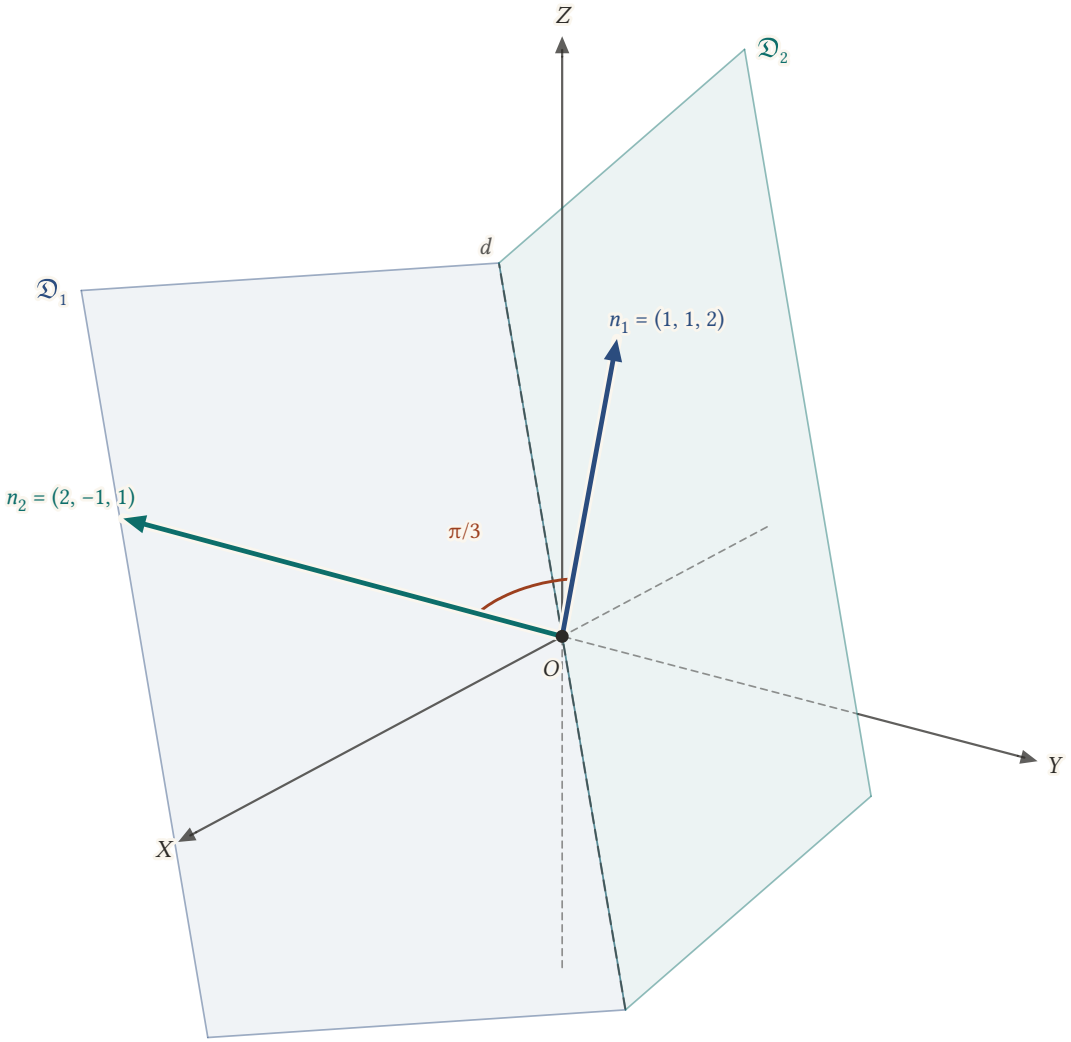
eşitliğiyle belirlenen φ açısıyla da verilir.

Örnek 13.9 (Açının hesaplanması). $\mathfrak{D}_1 : x + y + 2z = 0$ ile $\mathfrak{D}_2 : 2x - y + z = 0$ düzlemleri arasındaki açıyı bulalım.

Çözüm.
Bunlar arakesit doğrusunu bulduğumuz düzlemlerdir (Örnek 13.7). Normaller $n_1 = (1, 1, 2)$ ve $n_2 = (2, -1, 1)$'dir. Önerme 13.5 gereği

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1\cdot 2 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 1}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

bulunur. $\theta \in [0, \pi]$ ve $\cos\theta = \frac{1}{2}$ olduğundan $\theta = \frac{\pi}{3}$'tür. O hâlde $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$ arasındaki açı $\frac{\pi}{3}$'tür.



Şekil 13.8: $n_1 = (1, 1, 2)$ ile $n_2 = (2, -1, 1)$ arasındaki açı $\pi/3$ olup düzlemler arasındaki açı da budur. Soluk yarım düzlemler $x + y + 2z = 0$ ile $2x - y + z = 0$ düzlemlerinin parçaları, kesikli doğru da onların arakesiti d'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 13.10 (Geniş açı ve dar açı). $\mathfrak{D}_1 : x + y - 2 = 0$ ile $\mathfrak{D}_2 : z - y - 3 = 0$ düzlemleri arasındaki açıyı bulalım.

Çözüm.
$\mathfrak{D}_2$'nin denklemini $0 \cdot x - y + z - 3 = 0$ diye yazarsak normaller $n_1 = (1,1,0)$ ve $n_2 = (0,-1,1)$ olur. Buna göre

$$\cos\theta = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 1}{\sqrt{1+1+0}\sqrt{0+1+1}} = \frac{-1}{2}$$

ve $\theta = \frac{2\pi}{3}$ bulunur. Bu, seçtiğimiz normaller arasındaki açıdır. n_2 yerine $-n_2 = (0,1,-1)$ normalini seçseydik kosinüs $\frac{1}{2}$ ve açı $\frac{\pi}{3}$ çıkardı. Yani iki düzlem $\frac{2\pi}{3}$ ve $\frac{\pi}{3}$ açıları oluşturur; aralarındaki dar açı $\varphi = \frac{\pi}{3}$'tür. ■

Örnek 13.11 (Bir düzlemin XY-düzlemiyle yaptığı açı). $\mathfrak{D} : x + 2y + 2z - 6 = 0$ düzleminin XY-düzlemiyle yaptığı açının kosinüsünü bulalım.

Çözüm.
XY-düzleminin denklemi $z = 0$'dır ve bir normali $e_3 = (0,0,1)$'dir. $\mathfrak{D}$'nin normali $n = (1,2,2)$ ve $\| n \| = \sqrt{1+4+4} = 3$'tür. Buna göre

$$\cos\theta = \frac{\langle n, e_3\rangle}{\| n \| \, \| e_3 \|} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1}{3\cdot 1} = \frac{2}{3}$$

ve $\theta = \arccos\frac{2}{3} \approx 48{,}19^\circ$ bulunur. $\cos\theta > 0$ olduğundan bu açı zaten dardır. ■

13.4 Düzlemin Uzayda Resmedilmesi

Bir düzlemi kâğıda çizmek için sonsuz düzlemin tamamını değil, onu temsil eden bir parçasını çizeriz. En kullanışlı parça, düzlemin koordinat eksenlerini kestiği noktaların belirlediği üçgendir. Bu noktaları bulmak için denklemi uygun bir biçime getireceğiz. Önce orijinden geçen düzlemleri ayıralım.

Önerme 13.6 (Orijinden geçen düzlem). *$\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ düzleminin orijinden geçmesi için gerek ve yeter koşul $D = 0$ olmasıdır.*

İspat.
$O(0,0,0)$ noktasını denklemde yerine yazarsak $A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 0 + D = D$ bulunur. Demek ki $O \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow D = 0$'dır. ■

Yani düzlem orijinden geçmiyorsa $D \neq 0$ olmak zorundadır ve denklemi $-D$'ye bölebiliriz.

Önerme 13.7 (Düzlemin eksenleri kestiği noktalar). *$\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ düzleminde A, B, C, D katsayılarının hepsi sıfırdan farklı olsun ve*

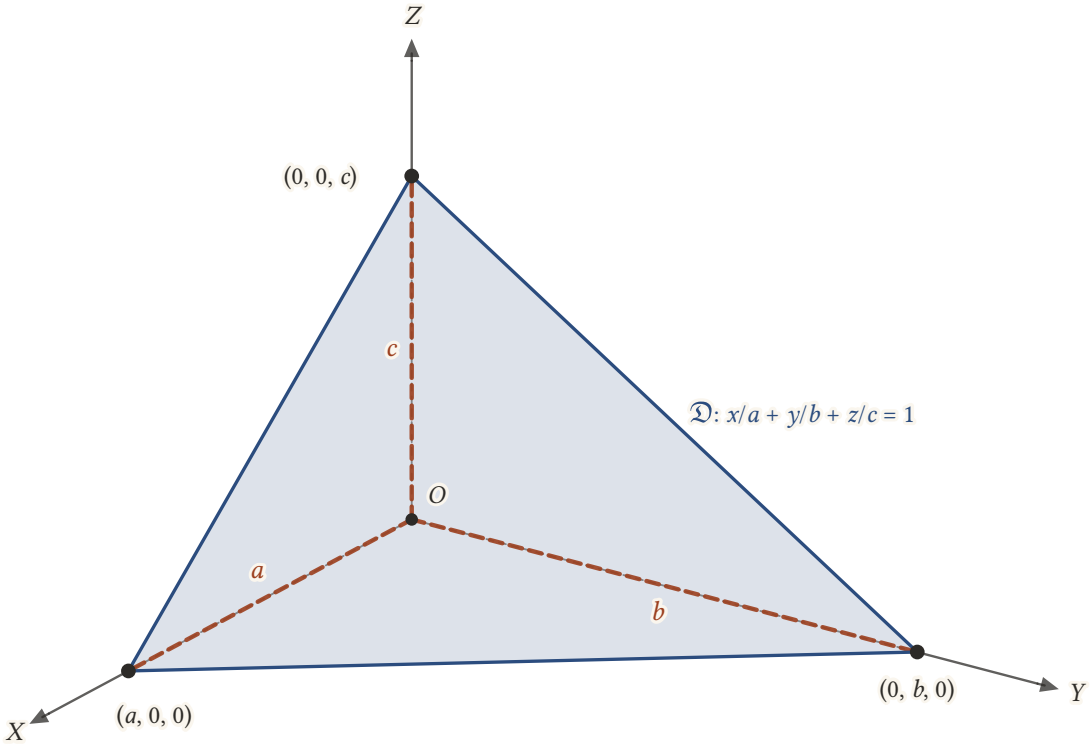
$$a = -\frac{D}{A}, \qquad b = -\frac{D}{B}, \qquad c = -\frac{D}{C}$$

diyelim. Bu durumda $\mathfrak{D}$'nin denklemi

$$\mathfrak{D} : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

biçiminde yazılabilir ve $\mathfrak{D}$; X-eksenini $(a,0,0)$, Y-eksenini $(0,b,0)$, Z-eksenini de $(0,0,c)$ noktasında keser.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.9: Düzlem eksenleri (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c) noktalarında keser; kalın parçalar eksen parçalarıdır. Bu üç noktanın üçgeni düzlemin bir parçasıdır.

İspat.
$D \neq 0$ olduğundan denklemin iki tarafını $-D$'ye bölebiliriz:

$$\left(-\frac{A}{D}\right)x + \left(-\frac{B}{D}\right)y + \left(-\frac{C}{D}\right)z = 1.$$

$A, B, C \neq 0$ olduğundan a, b, c tanımlıdır ve sıfırdan farklıdır; ayrıca $-\frac{A}{D} = \frac{1}{a}$, $-\frac{B}{D} = \frac{1}{b}$, $-\frac{C}{D} = \frac{1}{c}$'dir. Bunları yerine yazınca istenen denklem çıkar.
X-ekseninin noktaları $y = z = 0$ koşulunu sağlar. Bu değerleri denklemde yazarsak $\frac{x}{a} = 1$, yani $x = a$ bulunur; $\mathfrak{D}$, X-eksenini yalnız $(a, 0, 0)$ noktasında keser. Aynı biçimde $x = z = 0$ yazılınca $y = b$, $x = y = 0$ yazılınca $z = c$ bulunur. ■

Tanım 13.5 (Eksen parçaları denklemi). Bir önceki önermede elde ettiğimiz (Önerme 13.7)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

denklemine $\mathfrak{D}$ düzleminin **eksen parçaları denklemi**, a, b, c sayılarına da düzlemin sırasıyla X-, Y- ve Z-ekseni üzerinde ayırdığı **eksen parçaları** denir.

Yani eksen parçaları, düzlemin eksenleri kestiği noktaların orijine işaretli uzaklıklarıdır: $a > 0$ ise düzlem X-eksenini pozitif tarafta, $a < 0$ ise negatif tarafta keser. Eksen parçaları denklemi, düzlemi çizmek için gereken üç noktayı hiç hesap yapmadan gösterir.
Üç kesim noktasını birleştiren doğru parçaları, düzlemin koordinat düzlemlerini kestiği doğrular üzerindedir. Bu doğrulara bir ad verelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 13.6 (Düzlemin izleri). Bir $\mathfrak{D}$ düzleminin bir koordinat düzlemiyle arakesitine (bu arakesit bir doğruysa) $\mathfrak{D}$'nin o koordinat düzlemindeki **izi** denir. Örneğin $\mathfrak{D}$'nin XY-düzlemindeki izi, $\mathfrak{D}$'nin denkleminde $z=0$ yazılarak elde edilen doğrudur.

Yani iz, düzlemin bir koordinat düzlemine "bıraktığı çizgidir". Eksen parçaları denklemiyle verilen bir düzlemin izleri

$$\begin{aligned} XY\text{ -düzleminde: } & \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ z=0,\\ XZ\text{ -düzleminde: } & \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1,\ y=0,\\ YZ\text{ -düzleminde: } & \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x=0 \end{aligned}$$

doğrularıdır. Örneğin XY-düzlemindeki iz, $(a,0,0)$ ile $(0,b,0)$ noktalarından geçer. Demek ki kesim noktalarının belirlediği üçgenin kenarları üç izin üzerindedir.

Bir düzlemi üç adımda çizmek

1. Denklemde iki değişkeni sıfır yaparak düzlemin üç ekseni kestiği noktaları bulun (ya da denklemi eksen parçaları biçimine getirin).
2. Bu noktaları eksenler üzerinde işaretleyin.
3. Noktaları doğru parçalarıyla birleştirin. Oluşan üçgen düzlemin bir parçasıdır; kenarları düzlemin izleri üzerindedir.

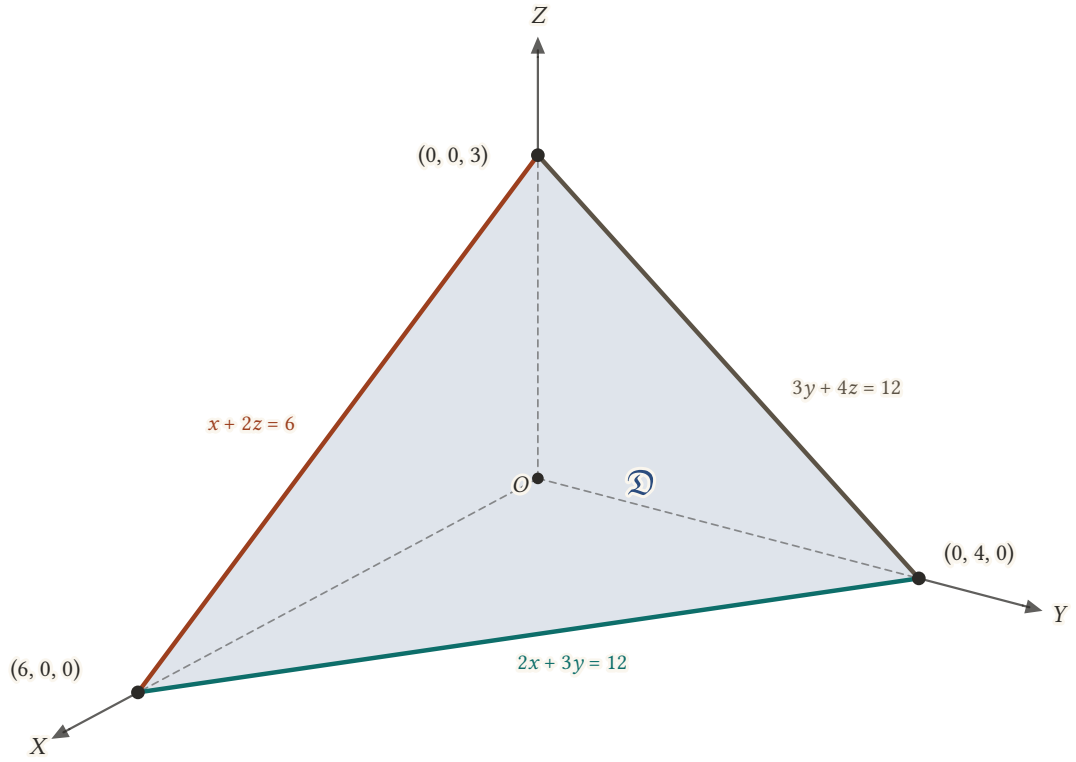
Örnek 13.12 (Eksenleri pozitif tarafta kesen düzlem). $\mathfrak{D}: 2x+3y+4z-12=0$ düzlemini çizelim.

Çözüm.
Dört katsayı da sıfırdan farklıdır. Denklemi 12'ye bölelim: $2x+3y+4z=12$ olduğundan

$$\frac{2x}{12}+\frac{3y}{12}+\frac{4z}{12}=1 \Longrightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=1$$

bulunur. Eksen parçaları $a=6$, $b=4$, $c=3$'tür; düzlem eksenleri $(6,0,0)$, $(0,4,0)$ ve $(0,0,3)$ noktalarında keser. Aynı sonucu doğrudan da bulabiliriz: $y=z=0$ yazınca $2x=12$, yani $x=6$ olur; ötekiler de benzerdir.
İzler şunlardır: XY-düzleminde $2x+3y=12$, XZ-düzleminde $2x+4z=12$ (yani $x+2z=6$), YZ -düzleminde $3y+4z=12$. Kesim noktalarını birleştiren üçgen, düzlemin birinci bölgedeki parçasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.10: $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ düzleminin birinci bölgedeki parçası. Üçgenin kenarları düzlemin izleri üzerindedir: XY-düzleminde $2x + 3y = 12$, XZ-düzleminde $x + 2z = 6$, YZ-düzleminde $3y + 4z = 12$.

■

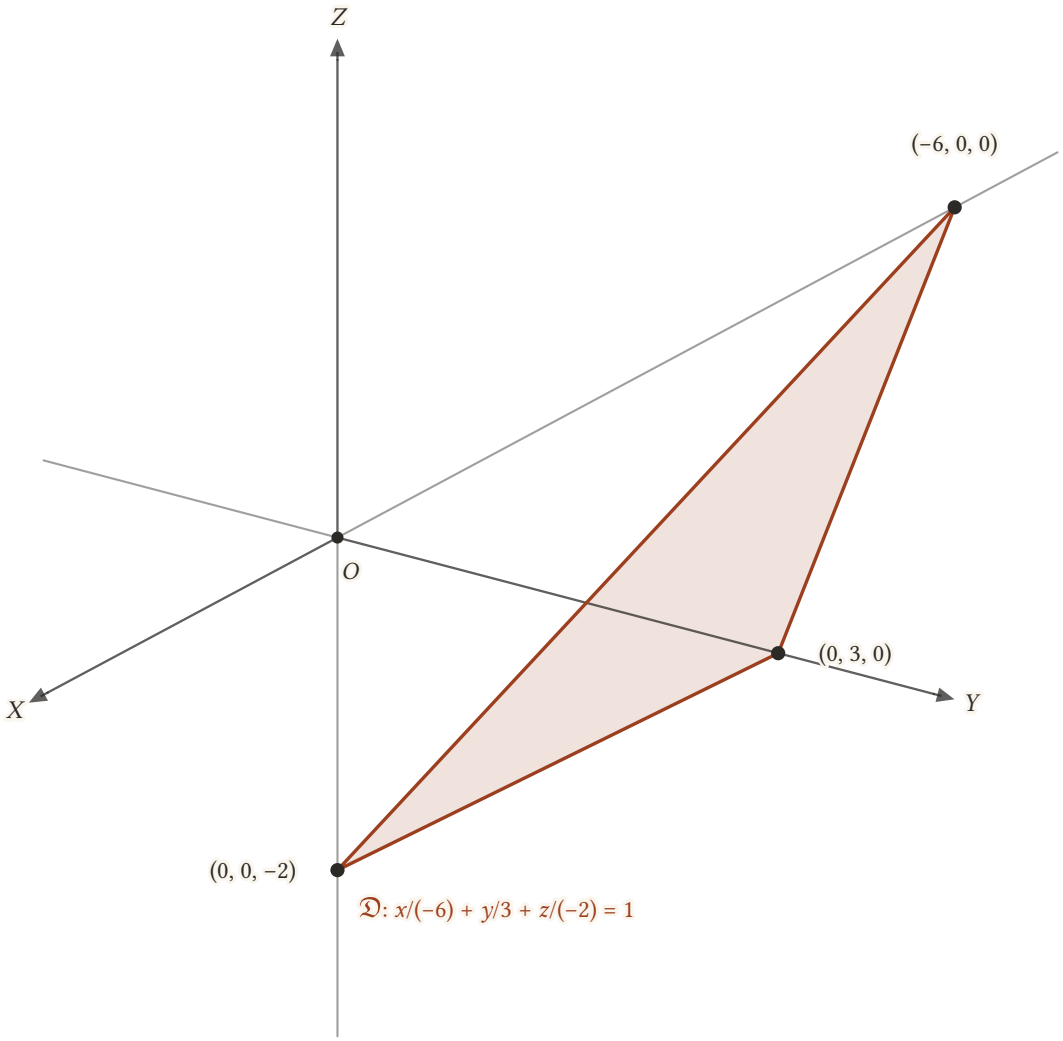
Örnek 13.13 (Eksen parçaları negatif olabilen düzlem). $\mathfrak{D} : x - 2y + 3z + 6 = 0$ düzleminin eksen parçaları denklemini yazalım ve düzlemi çizelim.

Çözüm.
Dört katsayı da sıfırdan farklıdır. Denklemi $x - 2y + 3z = -6$ diye yazıp -6'ya bölelim:

$$\frac{x}{-6} + \frac{-2y}{-6} + \frac{3z}{-6} = 1 \Longrightarrow \frac{x}{-6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1.$$

Eksen parçaları $a = -6$, $b = 3$, $c = -2$'dir; düzlem X-eksenini $(-6, 0, 0)$, Y-eksenini $(0, 3, 0)$, Z-eksenini $(0, 0, -2)$ noktasında keser. Formülle denetleyelim: $A = 1$, $B = -2$, $C = 3$, $D = 6$ için $a = -\frac{6}{1} = -6$, $b = -\frac{6}{-2} = 3$, $c = -\frac{6}{3} = -2$'dir.
İzler: XY-düzleminde $x - 2y = -6$, XZ-düzleminde $x + 3z = -6$, YZ-düzleminde $-2y + 3z = -6$. Üç noktayı birleştiren üçgen düzlemin bir parçasıdır; bu kez üçgen X ve Z eksenlerinin negatif taraflarına uzanır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.11: $x - 2y + 3z + 6 = 0$ düzlemi eksenleri $(-6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ ve $(0, 0, -2)$ noktalarında keser; üçgen X ve Z eksenlerinin negatif yanlarına uzanır. Eksenlerin negatif kısımları soluktur.

■

Düzlem orijinden geçiyorsa ($D = 0$) üç kesim noktası da O'ya düşer ve üçgen yöntemi işe yaramaz. Bu durumda düzlemi izleriyle çizeriz.

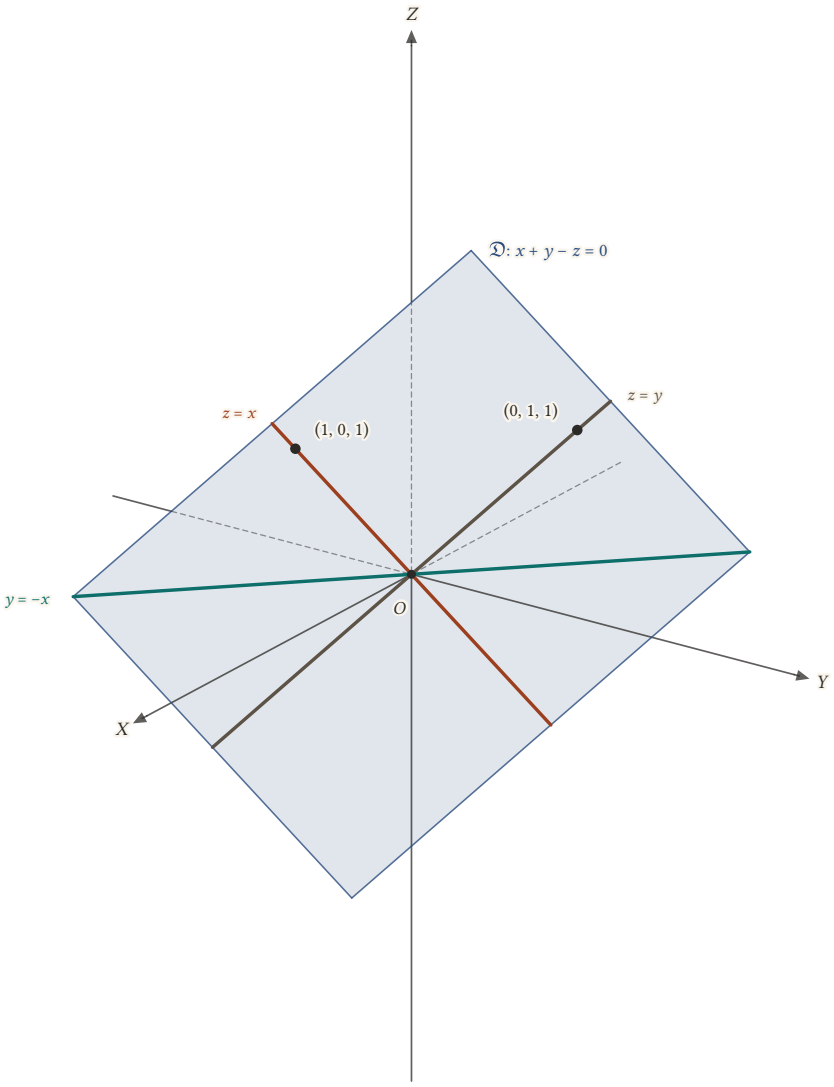
Örnek 13.14 (Orijinden geçen bir düzlemin çizimi). $\mathfrak{D} : x + y - z = 0$ düzlemini çizelim.

Çözüm.
$D = 0$ olduğundan düzlem orijinden geçer (Önerme 13.6) ve eksenleri yalnız O'da keser: örneğin $y = z = 0$ yazınca $x = 0$ bulunur. Bu yüzden izleri kullanalım:

- XY-düzleminde ($z = 0$): $x + y = 0$, yani $y = -x$ doğrusu;
- XZ-düzleminde ($y = 0$): $x - z = 0$, yani $z = x$ doğrusu;
- YZ-düzleminde ($x = 0$): $y - z = 0$, yani $z = y$ doğrusu.

Üç iz de O'dan geçer. Örneğin XZ-düzlemindeki izden $(1, 0, 1)$ ve YZ-düzlemindeki izden $(0, 1, 1)$ noktalarını alırsak, O, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(0, 1, 1)$ köşeli paralelkenar düzlemin bir parçasıdır. Dördüncü köşenin düzlemde olduğunu denetleyelim: $1 + 1 - 2 = 0$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.12: $x + y - z = 0$ düzlemi orijinden geçer; onu üç iziyle çizeriz: XY-düzleminde $y = -x$, XZ-düzleminde $z = x$, YZ-düzleminde $z = y$. Yama, $|x|, |y| \le 1{,}2$ olan parçadır.

■

13.5 Düzlem Denkleminin İrdelenmesi

Şimdi $\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ denkleminde bazı katsayılar sıfır olduğunda düzlemin nasıl bir konumda durduğunu inceleyelim. Normal vektör $n = (A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ olduğundan A, B, C'nin üçü birden sıfır olamaz; en çok ikisi sıfırdır. Ayrıca Önerme 13.6 gereği $D = 0$ olması düzlemin orijinden geçmesi demektir. İncelemeyi bu iki duruma göre ayıralım. A, B, C'nin hiçbiri sıfır değilse düzlem ya orijinden geçer ($D = 0$) ve eksenleri yalnız orada keser ya da ($D \neq 0$) eksenleri üç farklı noktada keser (Önerme 13.7); bu durumu bir önceki kısımda gördük.
Aşağıda "$\mathfrak{D}$, X-eksenine paraleldir" sözünü şu anlamda kullanacağız: $\mathfrak{D}$'nin her noktasından geçen ve X-eksenine paralel olan doğru tümüyle $\mathfrak{D}$'nin içindedir. Bu, $\mathfrak{D}$'nin normalinin X-ekseninin doğrultusu e_1'e dik olmasıyla aynı şeydir.

13.5.1 Orijinden geçen düzlemler

Önerme 13.8 (Bir koordinat ekseninden geçen düzlem). *$D = 0$ olsun.*

i) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ *ise* $\mathfrak{D} : By + Cz = 0$ *düzlemi* X*-eksenine paraleldir ve* X*-ekseninden geçer.*
ii) $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ *ise* $\mathfrak{D} : Ax + Cz = 0$ *düzlemi* Y*-eksenine paraleldir ve* Y*-ekseninden geçer.*
iii) $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ *ise* $\mathfrak{D} : Ax + By = 0$ *düzlemi* Z*-eksenine paraleldir ve* Z*-ekseninden geçer.*

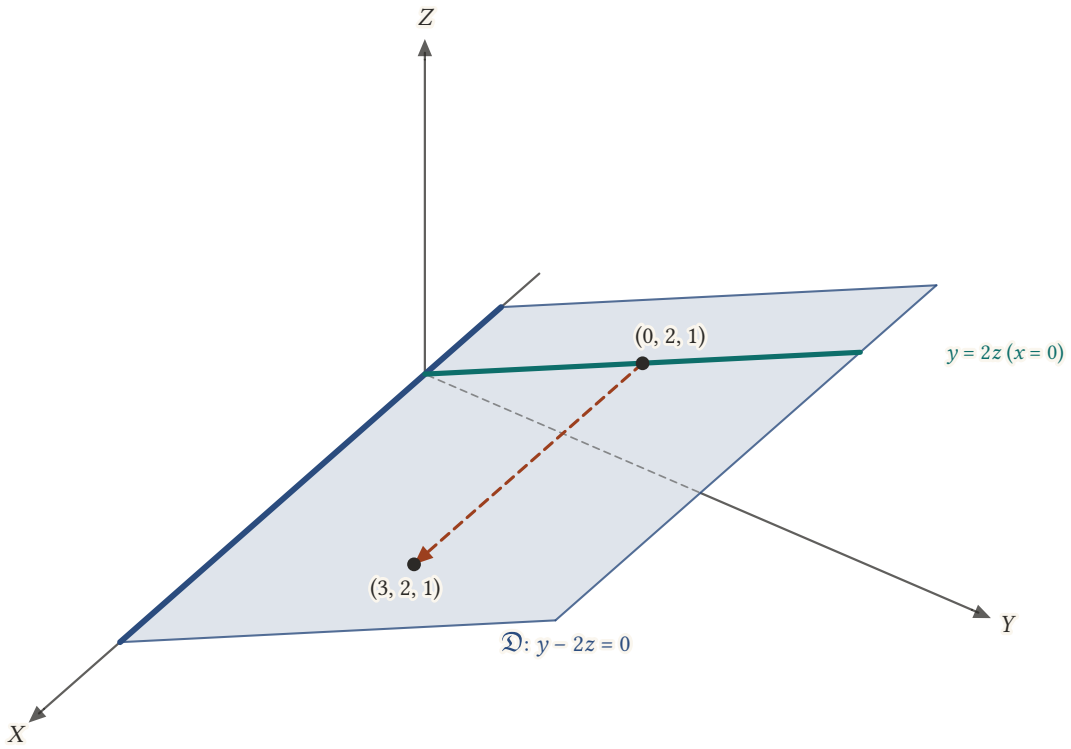
İspat.
i) *Normal vektör* $n = (0, B, C)$*'dir ve* $\langle n, e_1 \rangle = 0 \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$ *olduğundan* $n \perp e_1$*'dir. Bunun geometrik anlamı şudur:* $(x_0, y_0, z_0) \in \mathfrak{D}$ *ise her* t *için* $(x_0 + t, y_0, z_0)$ *noktası da* $\mathfrak{D}$*'dedir, çünkü denklemde* x *hiç geçmez ve*

$$By_0 + Cz_0 = 0$$

eşitliği x*'in değerinden bağımsızdır. Yani* $\mathfrak{D}$*'nin her noktasından geçen ve* X*-eksenine paralel olan doğru* $\mathfrak{D}$*'dedir;* $\mathfrak{D}$*,* X*-eksenine paraleldir. Ayrıca* $D = 0$ *olduğundan* $\mathfrak{D}$ *orijinden geçer; orijinden geçen ve* X*-eksenine paralel olan doğru* X*-ekseninin kendisidir. Doğrudan da görülebilir:* X*-ekseninin her* $(t, 0, 0)$ *noktası için* $B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$*'dır. Demek ki* X*-ekseni tümüyle* $\mathfrak{D}$*'nin içindedir.*
ii) *i)'deki düşünce* x *yerine* y *ile tekrarlanır:* $n = (A, 0, C) \perp e_2$*'dir, denklemde* y *geçmez ve* Y*-ekseninin her* $(0, t, 0)$ *noktası* $A \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$ *eşitliğini sağlar.*
iii) *Aynı biçimde* $n = (A, B, 0) \perp e_3$*'tür, denklemde* z *geçmez ve* Z*-ekseninin her* $(0, 0, t)$ *noktası* $A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0$ *eşitliğini sağlar.* ■

Örnek 13.15 (X-ekseninden geçen bir düzlem). $\mathfrak{D} : y - 2z = 0$ düzleminin konumunu belirleyip düzlemi çizelim.

Çözüm.
Burada $A = 0, B = 1, C = -2, D = 0$'dır. Önerme 13.8 i) gereği $\mathfrak{D}$, X-ekseninden geçer. Düzlemin YZ-düzlemindeki izi $(x = 0)$ $y = 2z$ doğrusudur; örneğin $(0, 2, 1)$ noktası bu izin üzerindedir. $\mathfrak{D}$, bu izin X-ekseni doğrultusunda kaydırılmasıyla oluşur: $(0, 2, 1)$ düzlemde olduğuna göre her t için $(t, 2, 1)$ de düzlemdedir, çünkü $2 - 2 \cdot 1 = 0$'dır.



Şekil 13.13: $y - 2z = 0$ düzlemi X-eksenini içerir (kalın mavi). YZ-düzlemindeki izi $y = 2z$ doğrusudur; düzlem bu izin X-ekseni doğrultusunda kaydırılmasıyla oluşur: (0, 2, 1) düzlemdeyse (3, 2, 1) de düzlemdedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Önerme 13.9 (Bir koordinat düzlemine eşit olan düzlem). *$D = 0$ olsun.*
i) $A = B = 0, C \neq 0$ ise $\mathfrak{D}$, XY-düzlemidir.
ii) $A = 0, B \neq 0, C = 0$ ise $\mathfrak{D}$, XZ-düzlemidir.
iii) $A \neq 0, B = C = 0$ ise $\mathfrak{D}$, YZ-düzlemidir.

İspat.
i) *Normal vektör $n = (0, 0, C)$, e_3'ün C katıdır; yani Z-eksenine paraleldir. Dolayısıyla $\mathfrak{D}$, normali e_3 olan XY-düzlemine paraleldir. Denklem $Cz = 0$'dır ve $C \neq 0$ olduğundan $z = 0$'a denktir; bu da tam olarak XY-düzleminin denklemidir. Başka bir deyişle, $\mathfrak{D}$ ile XY-düzlemi paraleldir ve O ortak noktadır; Önerme 13.3 gereği çakışıktırlar.*
ii) *Aynı düşünceyle $n = (0, B, 0)$, Y-eksenine paraleldir, $\mathfrak{D}$ ile XZ-düzlemi paraleldir ve $By = 0 \Leftrightarrow y = 0$ olduğundan $\mathfrak{D}$, XZ-düzlemidir.*
iii) *$n = (A, 0, 0)$, X-eksenine paraleldir ve $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$ olduğundan $\mathfrak{D}$, YZ-düzlemidir.* ■

Örneğin $5z = 0$ denklemi XY-düzlemini, $-2y = 0$ denklemi XZ-düzlemini gösterir.

13.5.2 Orijinden geçmeyen düzlemler

$D \neq 0$ olduğunda da aynı altı durum ortaya çıkar; bu kez düzlem orijinden geçmediği için ne eksenleri ne de koordinat düzlemlerini içerebilir.

Önerme 13.10 (Bir koordinat eksenine paralel düzlem). *$D \neq 0$ olsun.*
i) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ ise $\mathfrak{D} : By + Cz + D = 0$ düzlemi X-eksenine paraleldir ama X-ekseniyle ortak noktası yoktur.
ii) $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ ise $\mathfrak{D} : Ax + Cz + D = 0$ düzlemi Y-eksenine paraleldir ama Y-ekseniyle ortak noktası yoktur.
iii) $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ ise $\mathfrak{D} : Ax + By + D = 0$ düzlemi Z-eksenine paraleldir ama Z-ekseniyle ortak noktası yoktur.

İspat.
i) *Orijinden geçen düzlemlerdeki gibi (Önerme 13.8) $n = (0, B, C) \perp e_1$'dir ve denklemde x geçmediğinden $(x_0, y_0, z_0) \in \mathfrak{D}$ ise her t için $(x_0 + t, y_0, z_0) \in \mathfrak{D}$'dir; yani $\mathfrak{D}$, X-eksenine paraleldir. Öte yandan X-ekseninin bir $(t, 0, 0)$ noktasını denklemde yazarsak*

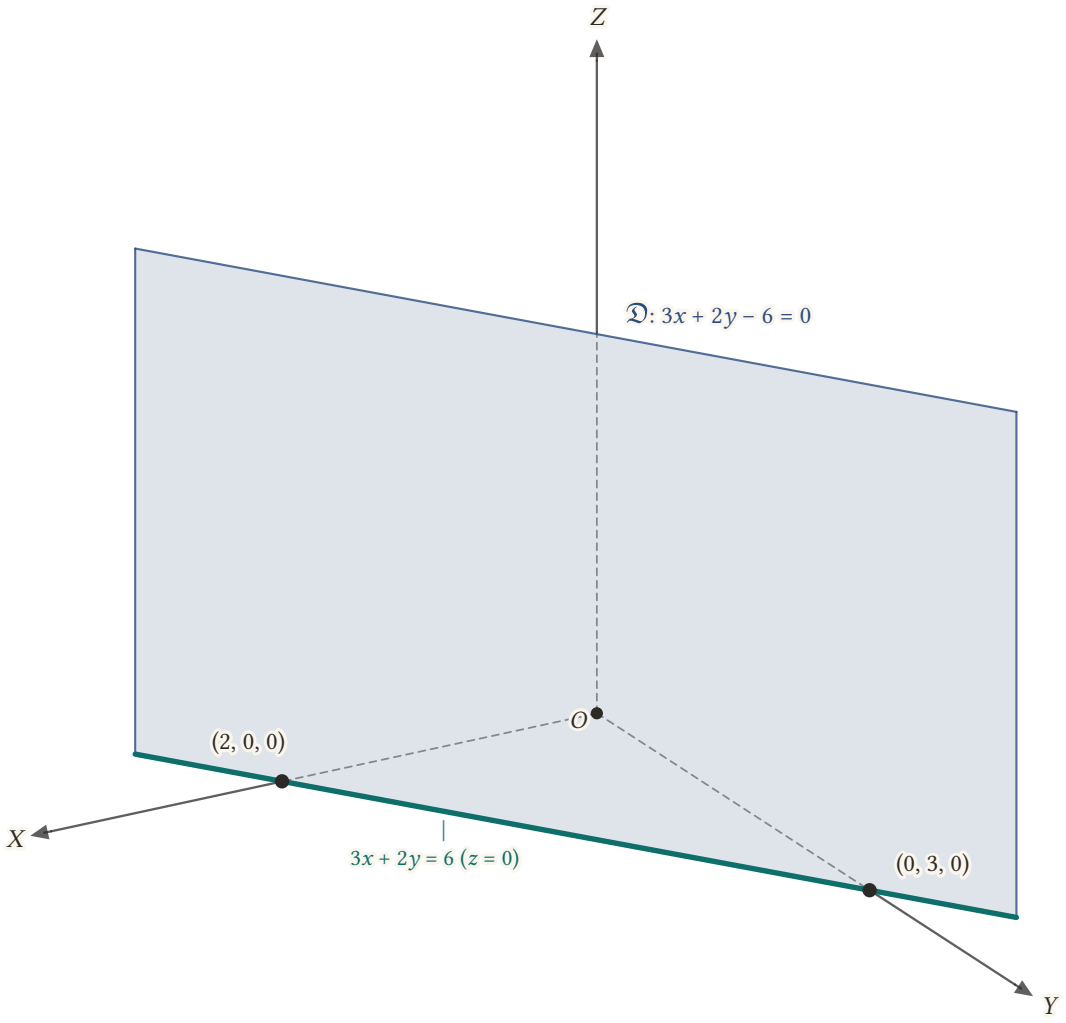
$$B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = D \neq 0$$

bulunur. Demek ki X-ekseninin hiçbir noktası $\mathfrak{D}$'de değildir: $\mathfrak{D}$, X-eksenine paraleldir ama ondan geçmez.
ii) *ve* ***iii)*** *aynı biçimde gösterilir: $n \perp e_2$ (sırasıyla $n \perp e_3$) olur ve eksenin her noktası denklemin sol tarafını $D \neq 0$ yapar.* ■

Örnek 13.16 (Z-eksenine paralel bir düzlem). $\mathfrak{D} : 3x + 2y - 6 = 0$ düzleminin konumunu belirleyip düzlemi çizelim.

Çözüm.
Burada $A = 3, B = 2, C = 0, D = -6 \neq 0$'dır. Önerme 13.10 iii) gereği $\mathfrak{D}$, Z-eksenine paraleldir ve Z-eksenini kesmez. X-eksenini kestiği nokta için $y = z = 0$ yazarsak $3x = 6$, yani $(2, 0, 0)$; Y-eksenini kestiği nokta için $x = z = 0$ yazarsak $2y = 6$, yani $(0, 3, 0)$ bulunur. $\mathfrak{D}$'nin XY-düzlemindeki izi, bu iki noktadan geçen $3x + 2y = 6$ doğrusudur. Düzlem, bu izin Z-ekseni doğrultusunda yukarı ve aşağı kaydırılmasıyla oluşan bir "duvar"dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.14: $3x + 2y - 6 = 0$ düzlemi, XY-düzlemindeki izi $3x + 2y = 6$ üzerinde dikilen bir duvardır. Z-eksenine paraleldir ama onu kesmez: eksen duvarın arkasında kalır (kesikli).

■

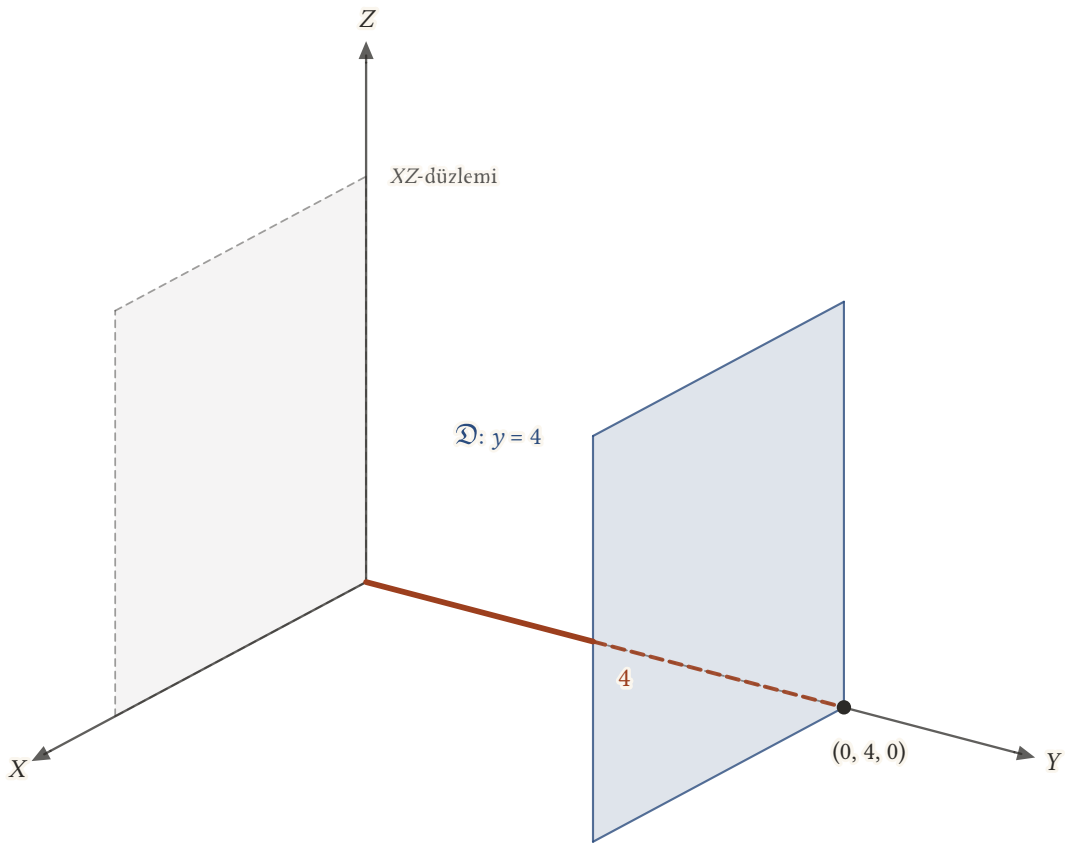
Önerme 13.11 (Bir koordinat düzlemine paralel düzlem). *$D \neq 0$ olsun.*
i) $A = B = 0, C \neq 0$ ise $\mathfrak{D} : z = -\frac{D}{C}$ düzlemi XY-düzlemine paraleldir ama onunla çakışık değildir.
ii) $A = 0, B \neq 0, C = 0$ ise $\mathfrak{D} : y = -\frac{D}{B}$ düzlemi XZ-düzlemine paraleldir ama onunla çakışık değildir.
iii) $A \neq 0, B = C = 0$ ise $\mathfrak{D} : x = -\frac{D}{A}$ düzlemi YZ-düzlemine paraleldir ama onunla çakışık değildir.

İspat.
i) *Denklem $Cz + D = 0$'dır; $C \neq 0$ olduğundan $z = -\frac{D}{C}$'ye denktir. Normal $n = (0, 0, C)$, XY-düzleminin normali e_3'e paraleldir; yani $\mathfrak{D}$, XY-düzlemine paraleldir. $D \neq 0$ olduğundan $-\frac{D}{C} \neq 0$'dır ve $\mathfrak{D}$ orijinden geçmez (Önerme 13.6). Orijin XY-düzleminde olduğundan iki düzlem çakışık olamaz; Önerme 13.3 gereği hiç ortak noktaları da yoktur.*
ii) *ve* ***iii)*** *aynı biçimde gösterilir: $n = (0, B, 0) \parallel e_2$ ve $y = -\frac{D}{B} \neq 0$; $n = (A, 0, 0) \parallel e_1$ ve $x = -\frac{D}{A} \neq 0$.* ■

Örnek 13.17 (XZ-düzlemine paralel bir düzlem). $\mathfrak{D} : 2y - 8 = 0$ düzleminin konumunu belirleyip düzlemi çizelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Burada $A = C = 0$, $B = 2$, $D = -8 \neq 0$'dır. Denklem $y = 4$'e denktir. Önerme 13.11 ii) gereği $\mathfrak{D}$, XZ -düzlemine paraleldir ve onunla çakışık değildir. $\mathfrak{D}$, Y-eksenini $(0, 4, 0)$ noktasında dik keser; XZ-düzleminin Y-ekseni boyunca 4 birim kaydırılmışıdır.



Şekil 13.15: $y = 4$ düzlemi XZ-düzlemine paraleldir: XZ-düzleminin Y-ekseni boyunca 4 birim kaydırılmışıdır ve Y-eksenini $(0, 4, 0)$'da dik keser.

■

Bu kısımdaki sonuçları bir tabloda toplayalım. Her satırda sıfır olan katsayılar belirtilmiştir; belirtilmeyen katsayılar sıfırdan farklıdır.

Sıfır olan katsayılar	$D = 0$	$D \neq 0$
hiçbiri	eksenleri yalnız O'da keser	eksenleri $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$'de keser
A	X-ekseninden geçer	X-eksenine paraleldir, onu kesmez
B	Y-ekseninden geçer	Y-eksenine paraleldir, onu kesmez
C	Z-ekseninden geçer	Z-eksenine paraleldir, onu kesmez
A, B	XY-düzlemidir	XY-düzlemine paraleldir, çakışık değildir

 CC BY-NC-SA 4.0

Sıfır olan katsayılar	$D = 0$	$D \neq 0$
A, C	XZ-düzlemidir	XZ-düzlemine paraleldir, çakışık değildir
B, C	YZ-düzlemidir	YZ-düzlemine paraleldir, çakışık değildir

Kısaca: **denklemde hangi değişken yoksa, düzlem o değişkenin ekseni doğrultusunda uzanır.** $D = 0$ ise düzlem o ekseni (ya da iki değişken yoksa o iki eksenin belirlediği koordinat düzlemini) içerir; $D \neq 0$ ise yalnız ona paraleldir.

13.6 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda bu bölümün paralellik ve diklik koşullarını, önceki bölümde gördüğümüz "bir noktadan geçen ve normali verilen düzlem" kuruluşuyla birlikte kullanacağız (Uzayda Düzlem Denklemleri). Hatırlatalım: P_0'dan geçen ve normali n olan düzlem, $P(x, y, z)$ onun rastgele bir noktası olmak üzere $\langle \overrightarrow{P_0P}, n \rangle = 0$ denklemiyle verilir.

Alıştırma 13.1 (Bir doğru ile bir düzlemin durumu). $d : x = -1,\ \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-3}{4}$ doğrusu ile $\mathfrak{D} : 6x - 2y + z - 1 = 0$ düzleminin birbirine göre durumunu inceleyin.

Çözüm.
d'nin denkleminde x sabit ($x = -1$) olduğundan doğrultman vektörünün birinci bileşeni 0'dır; kalan oranlardan doğrultman $v = (0, 2, 4)$ ve doğru üzerindeki bir nokta $(-1, -2, 3)$ olarak okunur. Buna göre d'nin parametrik denklemleri

$$x = -1, \qquad y = -2 + 2t, \qquad z = 3 + 4t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

dir. $\mathfrak{D}$'nin normali $n = (6, -2, 1)$'dir.
Önce doğrultman ile normalin iç çarpımına bakalım:

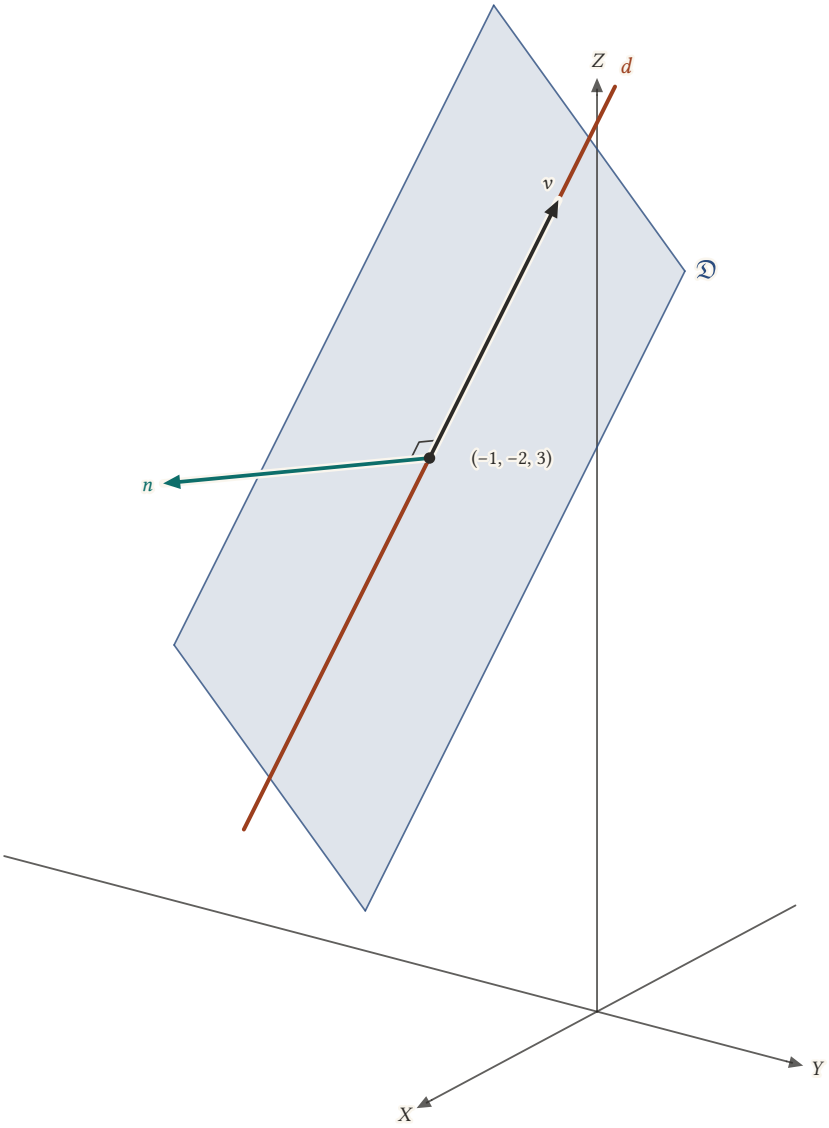
$$\langle n, v \rangle = 6 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 0.$$

Yani $v \perp n$: doğrunun doğrultusu düzleme paraleldir.
Şimdi doğrunun rastgele bir noktasını düzlemin denkleminde yerine yazalım:

$$\begin{aligned} &6(-1) - 2(-2 + 2t) + (3 + 4t) - 1 \\ &\quad = -6 + 4 - 4t + 3 + 4t - 1 = 0. \end{aligned}$$

Sonuç t'den bağımsız olarak 0'dır; yani d'nin **her** noktası $\mathfrak{D}$'nin denklemini sağlar. Özellikle $t = 0$ için $(-1, -2, 3)$ noktası düzlemdedir: $6(-1) - 2(-2) + 3 - 1 = 0$. Demek ki d doğrusu tümüyle $\mathfrak{D}$ düzleminin içindedir. İç çarpımın sıfır çıkması tek başına yalnız "doğru düzleme paraleldir" derdi; doğrunun bir noktasının düzlemde olması, doğrunun düzlemin içinde yattığını gösterir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.16: d doğrusu $6x - 2y + z - 1 = 0$ düzleminin içinde yatar: doğrultusu $v = (0, 2, 4)$ normal $n = (6, -2, 1)$'e diktir ve $(-1, -2, 3)$ noktası düzlemdedir. Oklar $v/2$ ve $n/3$ boyunda çizilmiştir.

■

Alıştırma 13.2 (XY-düzleminin 3 birim altındaki düzlem). XY-düzlemine paralel olan ve onun 3 birim aşağısında bulunan düzlemin denklemini yazın.

Çözüm.
XY-düzleminin normali $e_3 = (0, 0, 1)$'dir. Aranan düzlem ona paralel olduğundan normali e_3'e paraleldir, yani bir $C \neq 0$ için $(0, 0, C)$ biçimindedir. Bu yüzden denklemi $Cz + D = 0$, yani $z = k$ biçimindedir (bkz. Önerme 13.11). XY-düzleminin noktalarında $z = 0$'dır; 3 birim aşağıdaki noktalarda ise $z = -3$'tür. Demek ki aranan düzlem

$$\mathfrak{D} : z = -3 \qquad \text{yani} \qquad z + 3 = 0$$

dır. Bu düzlem Z-eksenini $(0, 0, -3)$ noktasında keser. ■

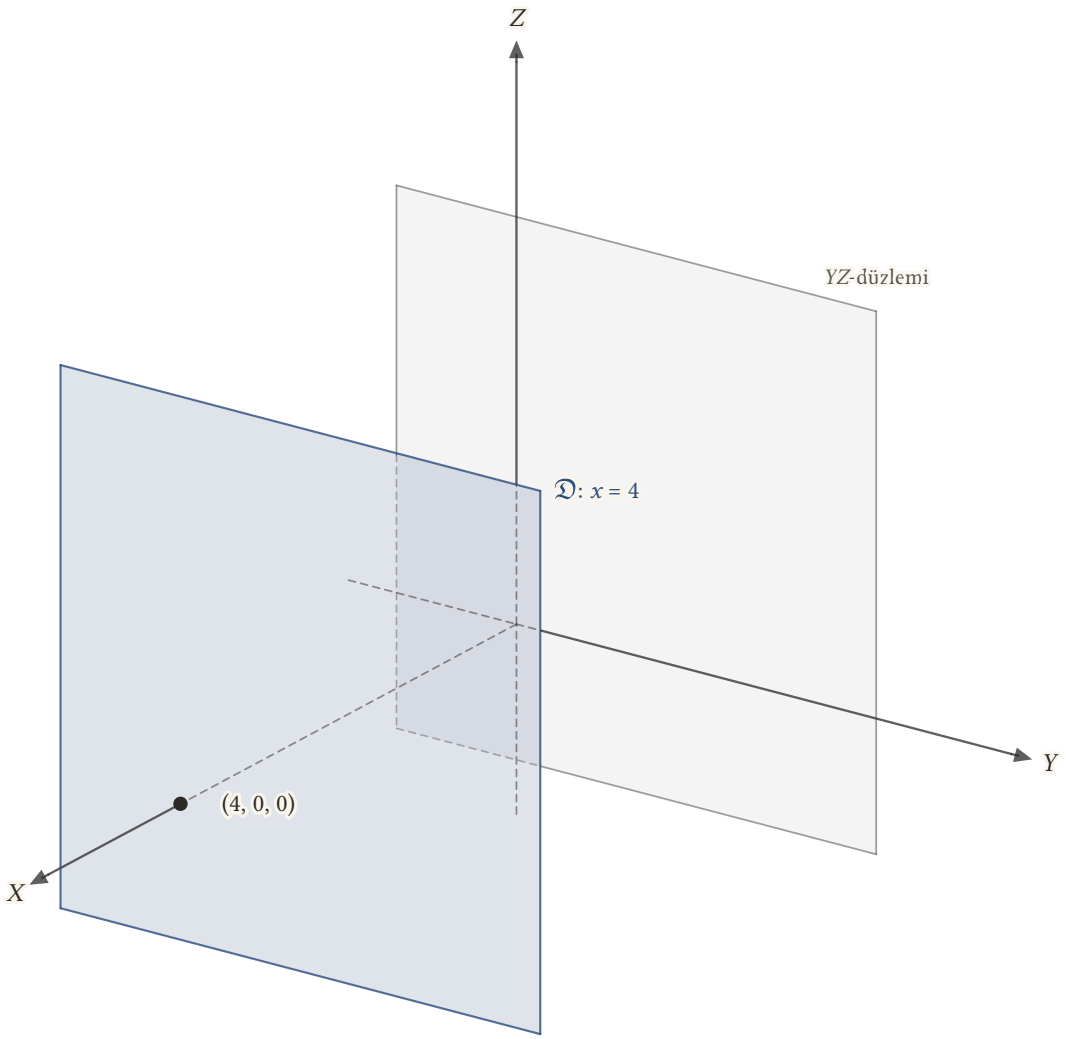
 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 13.3 (YZ-düzlemine paralel, X-eksenini 4'te kesen düzlem). YZ-düzlemine paralel olan ve X-eksenini 4'te kesen düzlemin denklemini yazın.

Çözüm.
YZ-düzleminin normali $e_1 = (1,0,0)$'dır. Aranan düzlemin normali buna paralel olduğundan denklemi $Ax + D = 0$ $(A \neq 0)$, yani $x = k$ biçimindedir (Önerme 13.11). Düzlem X-eksenini $(4,0,0)$ noktasında kestiğine göre bu nokta denklemi sağlar: $k = 4$. Aranan düzlem

$$\mathfrak{D} : x = 4 \qquad \text{yani} \qquad x - 4 = 0$$

dır.



Şekil 13.17: $x = 4$ düzlemi YZ-düzlemine paraleldir ve X-eksenini $(4, 0, 0)$'da dik keser; eksenin düzlemin arkasında kalan kısmı kesiklidir.

■

Alıştırma 13.4 (Z-eksenine bir noktasında dik düzlem). $(0,0,6)$ noktasında Z-eksenine dik olan düzlemin denklemini yazın.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Düzlem Z-eksenine dik olduğundan Z-ekseninin doğrultusu $e_3 = (0,0,1)$ düzlemin bir normalidir. $P_0(0,0,6)$'dan geçen ve normali e_3 olan düzlem, $P(x,y,z)$ rastgele noktası için

$$\langle \overrightarrow{P_0P}, e_3 \rangle = \langle (x,y,z-6), (0,0,1) \rangle = z - 6 = 0$$

denklemiyle verilir. Aranan düzlem $\mathfrak{D} : z = 6$'dır; XY-düzlemine paraleldir ve onun 6 birim yukarısındadır. ■

Alıştırma 13.5 (Bir doğruya dik düzlem). $P_0(3,-2,4)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü $v = (2,2,-3)$ olan doğruya dik olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
Aranan düzlem $\mathfrak{D}$ olsun. $\mathfrak{D}$ doğruya dik olduğundan doğrunun doğrultman vektörü $\mathfrak{D}$'nin normaline paraleldir; bu yüzden normal olarak doğrudan $n = v = (2,2,-3)$ alınabilir. $P(x,y,z)$, $\mathfrak{D}$'nin rastgele bir noktası olsun; $\overrightarrow{P_0P} = (x-3, y+2, z-4)$'tür. Buna göre

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{P_0P}, n \rangle = 0 &\Leftrightarrow 2(x-3) + 2(y+2) - 3(z-4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - 6 + 2y + 4 - 3z + 12 = 0 \end{aligned}$$

ve böylece

$$\mathfrak{D} : 2x + 2y - 3z + 10 = 0$$

bulunur. Denetim: P_0 için $6 - 4 - 12 + 10 = 0$. ■

Alıştırma 13.6 (Bir doğru parçasına dik düzlem). $P_0(-1,2,-3)$ noktasından geçen ve $P(-3,2,4)$ noktasını $Q(5,4,1)$ noktasına birleştiren doğru parçasına dik olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
$[PQ]$ doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğru

$$\frac{x-(-3)}{5-(-3)} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z-4}{1-4}, \quad \text{yani} \quad \frac{x+3}{8} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-4}{-3}$$

doğrusudur; doğrultman vektörü $v = \overrightarrow{PQ} = (8,2,-3)$'tür. Aranan $\mathfrak{D}$ düzlemi bu doğru parçasına dik olduğundan normal olarak $n = v = (8,2,-3)$ alınabilir. $\mathfrak{D}$'nin rastgele bir $X(x,y,z)$ noktası için $\overrightarrow{P_0X} = (x+1, y-2, z+3)$ olup

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{P_0X}, n \rangle = 0 &\Leftrightarrow 8(x+1) + 2(y-2) - 3(z+3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 8x + 8 + 2y - 4 - 3z - 9 = 0 \end{aligned}$$

ve böylece

$$\mathfrak{D} : 8x + 2y - 3z - 5 = 0$$

bulunur. Denetim: P_0 için $-8 + 4 + 9 - 5 = 0$. ■

Alıştırma 13.7 (Bir uçtan geçen ve doğru parçasına dik düzlem). $P_0(2,-3,4)$ noktasından geçen ve bu noktayı $P_1(4,4,-1)$ noktasına birleştiren doğru parçasına dik olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
$[P_0P_1]$ doğru parçasının doğrultusu

$$v = \overrightarrow{P_0P_1} = (4-2, 4-(-3), -1-4) = (2,7,-5)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

vektörüdür; doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğru $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{7}=\dfrac{z-4}{-5}$'tir. Aranan düzlemin normali olarak $n=v=(2,7,-5)$ alınabilir. Rastgele bir $P(x,y,z)$ noktası için $\overrightarrow{P_0P}=(x-2,y+3,z-4)$ olup

$$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{P_0P},n\rangle=0 &\Leftrightarrow 2(x-2)+7(y+3)-5(z-4)=0\\ &\Leftrightarrow 2x-4+7y+21-5z+20=0\end{aligned}$$

ve böylece

$$\mathfrak{D}: 2x+7y-5z+37=0$$

bulunur. Denetim: P_0 için $4-21-20+37=0$. ■

Alıştırma 13.8 (Orta dikme düzlemi). $Q(-2,2,-3)$ noktasını $R(6,4,5)$ noktasına birleştiren doğru parçasına, bu doğru parçasının orta noktasında dik olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
Doğru parçasının doğrultusu

$$v=\overrightarrow{QR}=(6-(-2),4-2,5-(-3))=(8,2,8)$$

vektörüdür; doğru parçasının üzerinde bulunduğu doğru $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{8}$'dir. Orta nokta

$$P_0=\Big(\frac{-2+6}{2},\frac{2+4}{2},\frac{-3+5}{2}\Big)=(2,3,1)$$

dir. Aranan $\mathfrak{D}$ düzlemi P_0'dan geçer ve normali olarak $n=v=(8,2,8)$ alınabilir. Rastgele bir $P(x,y,z)$ noktası için $\overrightarrow{P_0P}=(x-2,y-3,z-1)$ olup

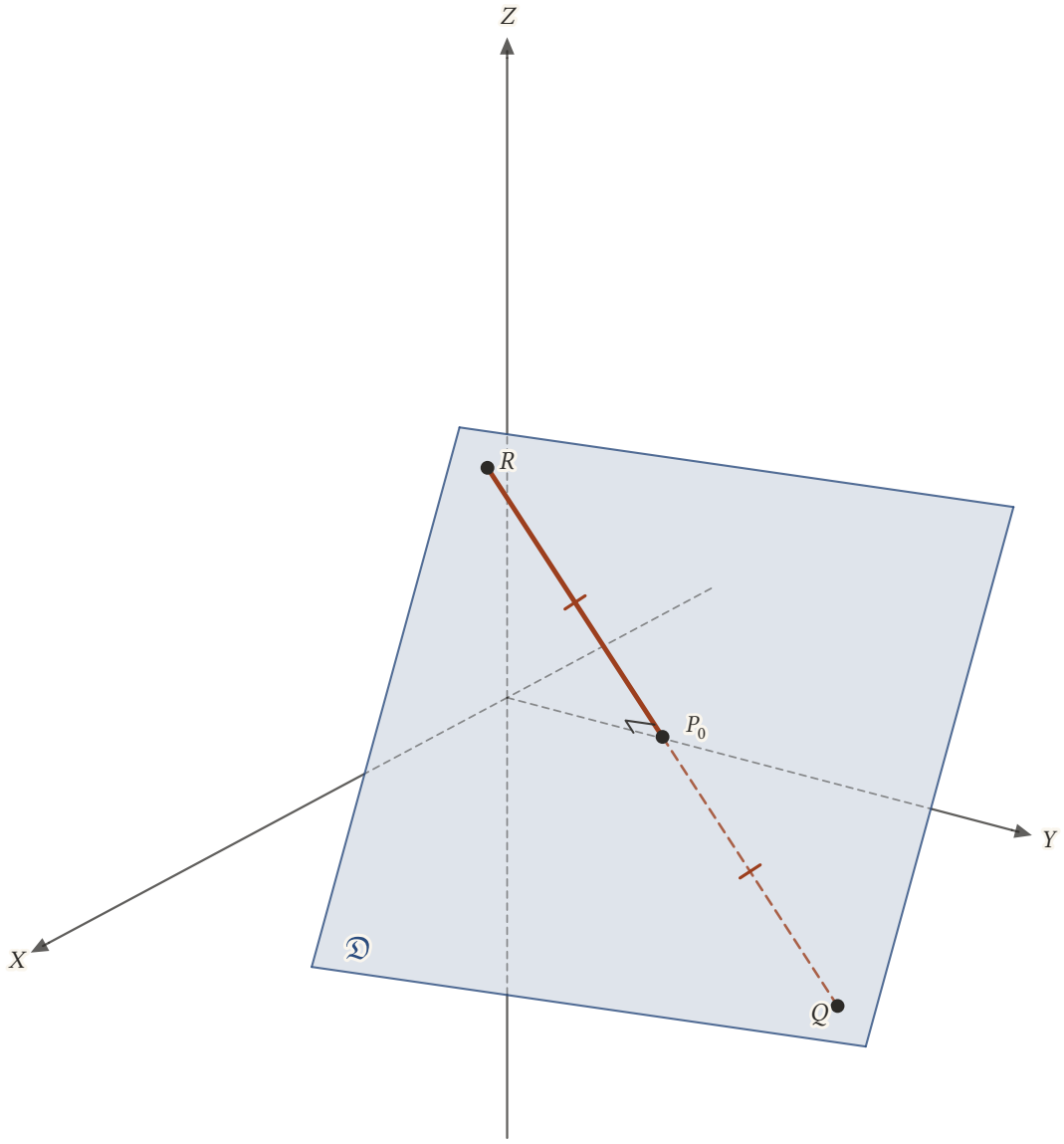
$$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{P_0P},n\rangle=0 &\Leftrightarrow 8(x-2)+2(y-3)+8(z-1)=0\\ &\Leftrightarrow 8x+2y+8z-30=0\end{aligned}$$

bulunur. Denklemi 2'ye bölersek

$$\mathfrak{D}: 4x+y+4z-15=0$$

elde edilir. Denetim: P_0 için $8+3+4-15=0$. Bu düzlemin her noktası Q ile R'ye eşit uzaklıktadır: P_0 orta nokta olduğundan her P için $\mid PQ\mid^2-\mid PR\mid^2=2\langle\overrightarrow{P_0P},\overrightarrow{QR}\rangle$ olur, dolayısıyla $P\in\mathfrak{D}\Leftrightarrow \mid PQ\mid=\mid PR\mid$'dir. Bu yüzden ona $[QR]$'nin orta dikme düzlemi denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 13.18: $[QR]$ doğru parçasının orta dikme düzlemi $4x + y + 4z - 15 = 0$: orta nokta $P_0(2, 3, 1)$'den geçer ve QR'ye diktir. Doğru parçasının düzlemin arkasında kalan kısmı kesiklidir.

■

Alıştırma 13.9 (Verilen düzleme paralel ve bir noktadan geçen düzlem). $P(-1, 2, 4)$ noktasından geçen ve $2x - 3y - 5z + 6 = 0$ düzlemine paralel olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
Verilen düzlemin normali $n = (2, -3, -5)$'tir. Aranan $\mathfrak{D}$ düzlemi buna paralel olduğundan normalleri paraleldir (Tanım 13.1); normal olarak aynı n'yi seçebiliriz. O hâlde $\mathfrak{D}$'nin denklemi, D bilinmemek üzere

$$\mathfrak{D} : 2x - 3y - 5z + D = 0$$

biçimindedir. $\mathfrak{D}$, $P(-1, 2, 4)$ noktasından geçtiğinden

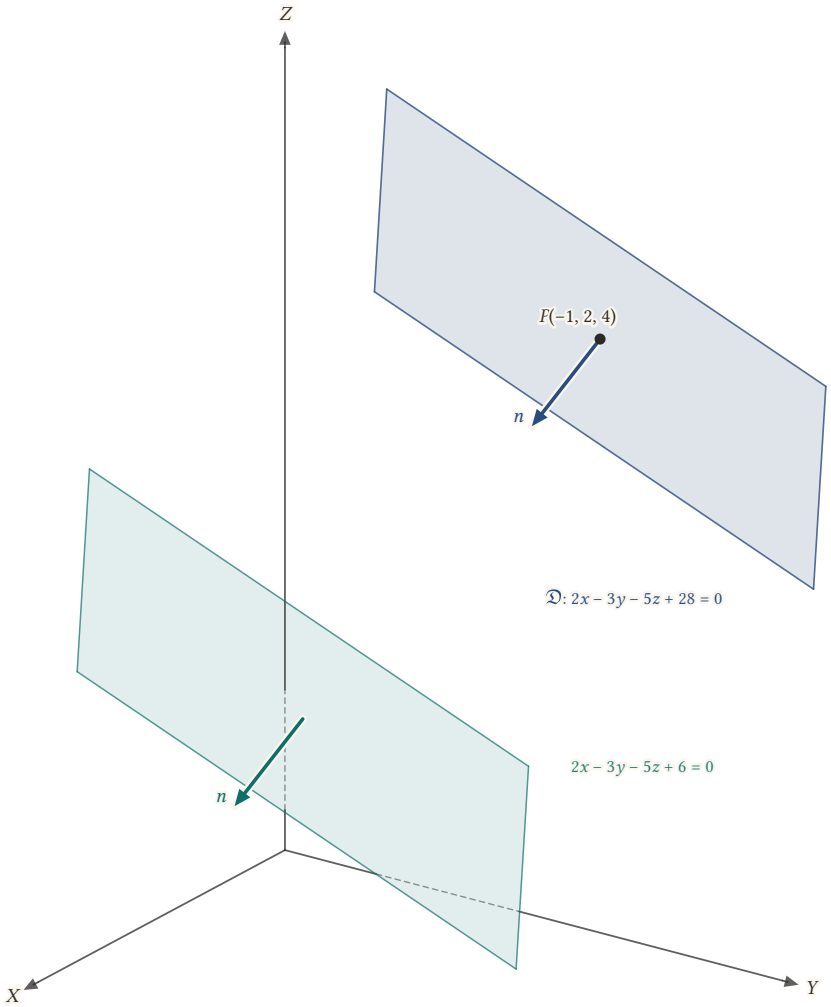
$$2(-1) - 3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 + D = 0 \Longrightarrow -28 + D = 0 \Longrightarrow D = 28$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Aranan düzlem

$$\mathfrak{D} : 2x - 3y - 5z + 28 = 0$$

dır. İki denklemde A, B, C katsayıları aynıdır (oran 1), sabit terimlerin oranı ise $\frac{28}{6} \neq 1$'dir; bu yüzden bulduğumuz düzlem verilen düzlemle çakışık değildir (Önerme 13.2).



Şekil 13.19: Aynı normale sahip iki paralel düzlem: soluk olanı verilen $2x - 3y - 5z + 6 = 0$ düzlemi, mavisi $P(-1, 2, 4)$'ten geçen $2x - 3y - 5z + 28 = 0$ düzlemidir.

■

Alıştırma 13.10 (Verilen düzleme paralel ve orijinden geçen düzlem). Orijinden geçen ve $3x + 7y - 6z + 3 = 0$ düzlemine paralel olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
Verilen düzlemin normali $n = (3, 7, -6)$'dır. Aranan $\mathfrak{D}$ düzlemi buna paralel olduğundan denklemi

$$\mathfrak{D} : 3x + 7y - 6z + D = 0$$

biçimindedir. $\mathfrak{D}$, $O(0, 0, 0)$'dan geçtiğinden $3 \cdot 0 + 7 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + D = 0$, yani $D = 0$'dır (Önerme 13.6). Aranan düzlem

$$\mathfrak{D} : 3x + 7y - 6z = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dır. ■

Sıradaki alıştırmalarda bir noktanın bir düzleme uzaklığı kullanılıyor. Bir P_0 noktasının bir düzleme uzaklığı, P_0'dan düzleme inilen dikmenin uzunluğudur: P_0'dan geçip düzlemin normali doğrultusunda uzanan doğru düzlemi bir H noktasında keser ve uzaklık $\mid P_0H \mid$'dir. Bu kavramı ve genel formülünü bir sonraki bölümde ayrıntılı olarak inceleyeceğiz (Doğru ile Düzlem ve Uzaklıklar); burada yalnız bu tanımı kullanacağız.
Normali n olan ve P_0'a uzaklığı l olan bir düzlem arıyorsak şöyle düşünürüz: dikme ayağı bir t sayısı için $H = P_0 + t\,n$ biçimindedir ve $\mid P_0H \mid = \mid t \mid \parallel n \parallel = l$ olmalıdır. Aranan düzlem H'den geçen ve normali n olan düzlemdir; denklemi $\langle n, X\rangle - \langle n, H\rangle = 0$, yani sabit terimi

$$D = -\langle n, H\rangle = -\langle n, P_0\rangle - t \parallel n \parallel^2$$

olan düzlemdir. t'nin iki değeri ($t = \pm\frac{l}{\|n\|}$) P_0'ın iki yanındaki iki düzlemi verir.

Alıştırma 13.11 (Orijinden 2 birim uzaktaki paralel düzlemler). $6x - 6y + 7z - 44 = 0$ düzlemine paralel olan ve orijinden 2 birim uzaklıkta bulunan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
Verilen düzlemin normali $n = (6, -6, 7)$'dir ve

$$\parallel n \parallel = \sqrt{36 + 36 + 49} = \sqrt{121} = 11$$

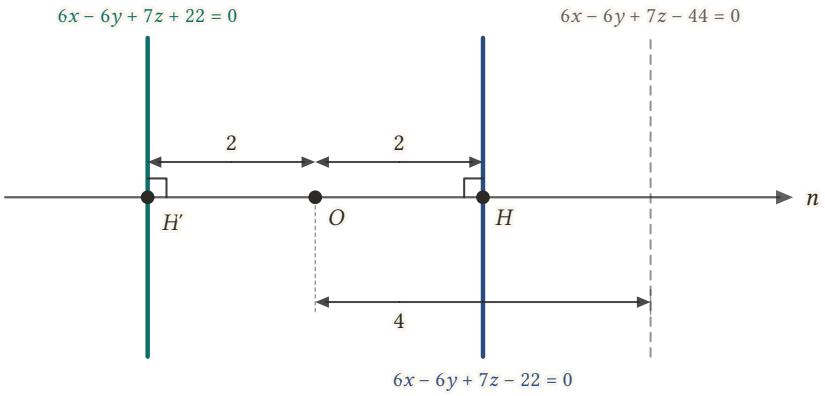
dir. Aranan $\mathfrak{D}$ düzlemi verilen düzleme paralel olduğundan denklemi $6x - 6y + 7z + D = 0$ biçimindedir.
Orijinden $\mathfrak{D}$'ye inilen dikmenin ayağı $H = O + t\,n = t\,(6, -6, 7)$ olsun. Uzaklık $\mid OH \mid = \mid t \mid \cdot 11 = 2$ olmalıdır; buradan $t = \pm\frac{2}{11}$ bulunur. $\mathfrak{D}$, H'den geçtiğinden

$$D = -\langle n, H\rangle = -t \parallel n \parallel^2 = -t \cdot 121 = \mp 22$$

olur. Demek ki koşulu sağlayan iki düzlem vardır:

$$\mathfrak{D} : 6x - 6y + 7z + 22 = 0 \qquad \text{ve} \qquad \mathfrak{D}' : 6x - 6y + 7z - 22 = 0.$$

İkisi orijinin iki yanındadır ve orijine eşit uzaklıktadır.



Şekil 13.20: Normal doğrultusundaki kesit: düzlemler n'ye dik doğrular olarak görünür. Orijinin iki yanında, ona 2 birim uzaklıkta iki paralel düzlem vardır; kesikli doğru, orijine uzaklığı 4 olan verilen düzlemdir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 13.12 (Bir noktadan 4 birim uzaktaki paralel düzlemler). $4x-4y+7z-3=0$ düzlemine paralel olan ve $P_0(4,1,-2)$ noktasına uzaklığı 4 birim olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
Verilen düzlemin normali $n=(4,-4,7)$'dir ve

$$\| n \| = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$$

dur. Aranan $\mathfrak{D}$ düzleminin denklemi $4x-4y+7z+D=0$ biçimindedir.
P_0'dan $\mathfrak{D}$'ye inilen dikmenin ayağı $H = P_0 + t\,n$ olsun. $| P_0H | = | t | \cdot 9 = 4$ olmalıdır; yani $t = \pm\frac{4}{9}$'dur. Ayrıca

$$\langle n, P_0\rangle = 4\cdot 4 - 4\cdot 1 + 7\cdot(-2) = 16-4-14 = -2$$

dir. $\mathfrak{D}$, H'den geçtiğinden

$$D = -\langle n, P_0\rangle - t\,\| n \|^2 = 2 - t\cdot 81 = 2 \mp 36$$

bulunur. $t=\frac{4}{9}$ için $D=-34$, $t=-\frac{4}{9}$ için $D=38$ olur. Koşulu sağlayan iki düzlem

$$\mathfrak{D}: 4x-4y+7z-34=0,$$
$$\mathfrak{D}': 4x-4y+7z+38=0$$

dır. ■

Alıştırma 13.13 (Bir noktadan 3 birim uzaktaki paralel düzlemler). $2x-3y-5z+1=0$ düzlemine paralel olan ve $P_0(-1,3,1)$ noktasına uzaklığı 3 birim olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
Verilen düzlemin normali $n=(2,-3,-5)$'tir ve

$$\| n \| = \sqrt{4+9+25} = \sqrt{38}$$

dir. Aranan $\mathfrak{D}$ düzleminin denklemi $2x-3y-5z+D=0$ biçimindedir.
Dikme ayağı $H = P_0 + t\,n$ olsun. $| P_0H | = | t | \sqrt{38} = 3$ olmalıdır; yani $t = \pm\frac{3}{\sqrt{38}}$'dir. Ayrıca

$$\langle n, P_0\rangle = 2\cdot(-1) - 3\cdot 3 - 5\cdot 1 = -2-9-5 = -16$$

dır. Buna göre

$$D = -\langle n, P_0\rangle - t\,\| n \|^2 = 16 - t\cdot 38 = 16 \mp \frac{3}{\sqrt{38}}\cdot 38 = 16 \mp 3\sqrt{38}$$

bulunur. Koşulu sağlayan iki düzlem

$$\mathfrak{D}: 2x-3y-5z+16-3\sqrt{38}=0,$$
$$\mathfrak{D}': 2x-3y-5z+16+3\sqrt{38}=0$$

dır. ■

Alıştırma 13.14 (İki düzleme birden dik ve bir noktadan geçen düzlem). $P_0(1,1,2)$ noktasından geçen ve $\mathfrak{D}_1: 2x-2y-4z-6=0$ ile $\mathfrak{D}_2: 3x+y+6z-4=0$ düzlemlerinin ikisine birden dik olan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
Aranan düzlem $\mathfrak{D}: Ax+By+Cz+D=0$ ve normali $n=(A,B,C)$ olsun. $\mathfrak{D}_1$'in normali $n_1 = (2,-2,-4)$, $\mathfrak{D}_2$'nin normali $n_2=(3,1,6)$'dır. İki düzlem dikse normalleri diktir (Tanım 13.3); buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\langle n, n_1\rangle = 0 \Longrightarrow 2A - 2B - 4C = 0,$$
$$\langle n, n_2\rangle = 0 \Longrightarrow 3A + B + 6C = 0$$

olmalıdır. İkinci denklemi 2 ile çarpıp birinciyle toplarsak B'ler yok olur:

$$(2A - 2B - 4C) + (6A + 2B + 12C) = 8A + 8C = 0 \Longrightarrow C = -A.$$

İkinci denklemden $B = -3A - 6C$ ve $C = -A$ olduğundan $B = -3A + 6A = 3A$ bulunur. İki denklem, üç bilinmeyeni ancak bir çarpana kadar belirler; bu beklenen bir durumdur, çünkü bir düzlemin normali de ancak bir çarpana kadar bellidir. $A = 1$ seçelim: $n = (1, 3, -1)$. Demek ki $\mathfrak{D} : x + 3y - z + D = 0$'dır. $\mathfrak{D}$, $P_0(1, 1, 2)$'den geçtiğinden

$$1 + 3 \cdot 1 - 2 + D = 0 \Longrightarrow D = -2$$

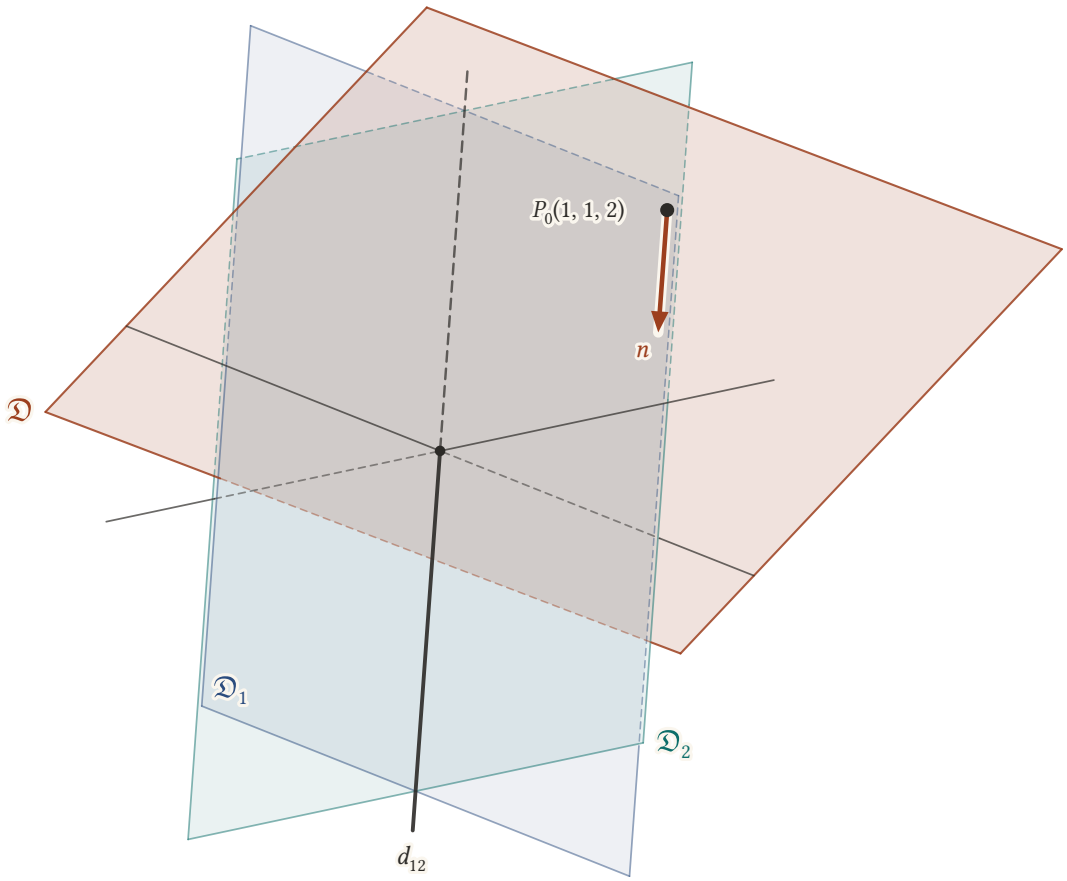
ve aranan düzlem

$$\mathfrak{D} : x + 3y - z - 2 = 0$$

dir.
Aynı normali vektörel çarpımla da bulabiliriz: iki vektöre birden dik vektör onların vektörel çarpımına paraleldir ve

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= \big((-2)\cdot 6 - (-4)\cdot 1, (-4)\cdot 3 - 2\cdot 6, 2\cdot 1 - (-2)\cdot 3 \big) \\ &= (-8, -24, 8) = -8\,(1, 3, -1) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\mathfrak{D}$'nin normali hem n_1'e hem n_2'ye dik olduğundan, $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$'nin arakesit doğrusuna paraleldir (Teorem 13.1): $\mathfrak{D}$, bu arakesit doğrusuna dik bir düzlemdir.



Şekil 13.21: $P_0(1, 1, 2)$'den geçen ve iki düzleme birden dik olan düzlem: normali $n = (1, 3, -1)$, d_{12} arakesit doğrusuna paraleldir; bu yüzden düzlem d_{12}'ye diktir ve iki düzlemi ince çizgiler boyunca keser.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 13.15 (İki düzleme dik ve orijinden 1 birim uzaktaki düzlem). $\mathfrak{D}_1 : x - 4y + z = 0$ ile $\mathfrak{D}_2 : 3x + 4y + z - 2 = 0$ düzlemlerinin ikisine birden dik olan ve orijinden 1 birim uzaklıkta bulunan düzlemin denklemini bulun.

Çözüm.
Aranan düzlem $\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ ve normali $n = (A, B, C)$ olsun. Normaller $n_1 = (1, -4, 1)$ ve $n_2 = (3, 4, 1)$'dir. Diklik koşullarından

$$\begin{aligned} \langle n, n_1 \rangle = 0 &\Longrightarrow A - 4B + C = 0, \\ \langle n, n_2 \rangle = 0 &\Longrightarrow 3A + 4B + C = 0 \end{aligned}$$

bulunur. İkinciden birinciyi çıkarırsak $2A + 8B = 0$, yani $A = -4B$ olur; birinci denklemden $C = 4B - A = 4B + 4B = 8B$ çıkar. $B = -1$ seçersek $A = 4$, $C = -8$ olur ve

$$\mathfrak{D} : 4x - y - 8z + D = 0$$

yazılabilir. Denetim:

$$\begin{aligned} n_1 \times n_2 &= \big((-4)\cdot 1 - 1\cdot 4, 1\cdot 3 - 1\cdot 1, 1\cdot 4 - (-4)\cdot 3 \big) \\ &= (-8, 2, 16) = -2\,(4, -1, -8). \end{aligned}$$

Şimdi uzaklık koşulunu kullanalım. $\| n \| = \sqrt{16 + 1 + 64} = \sqrt{81} = 9$'dur. Orijinden $\mathfrak{D}$'ye inilen dikmenin ayağı $H = t\,n$ olsun; $| OH | = 9 \mid t \mid = 1$ olmalıdır, yani $t = \pm\frac{1}{9}$'dur. $\mathfrak{D}$, H'den geçtiğinden

$$D = -\langle n, H \rangle = -t \overset{2}{\| n \|} = -t \cdot 81 = \mp 9$$

bulunur. Koşulu sağlayan iki düzlem

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} &: 4x - y - 8z - 9 = 0, \\ \mathfrak{D}' &: 4x - y - 8z + 9 = 0 \end{aligned}$$

dır; orijinin iki yanında, ona 1 birim uzaklıkta dururlar. ■

Bu bölümde iki düzlemin birbirine göre durumlarını tamamen normal vektörler üzerinden okuduk: paralellik orantıyla, diklik iç çarpımla, arakesit doğrultusu vektörel çarpımla, açı da kosinüs formülüyle belirlendi. Ardından bir düzlemi eksen parçaları ve izleriyle çizmeyi ve denklemdeki sıfır katsayıların düzlemin konumu hakkında ne söylediğini gördük. Bir sonraki bölümde bir doğru ile bir düzlemin birbirine göre durumlarını ve uzaklıkları inceleyeceğiz: Doğru ile Düzlem ve Uzaklıklar.

 CC BY-NC-SA 4.0

14. Doğru ile Düzlem ve Uzaklıklar

Önceki bölümlerde uzayda doğruları ve düzlemleri ayrı ayrı denklemlerle yazdık, iki doğrunun ve iki düzlemin birbirine göre durumlarını inceledik. Bu bölümde bir doğru ile bir düzlemi yan yana koyuyoruz. Göreceğimiz her şey iki vektöre dayanıyor: doğrunun doğrultman vektörü v ve düzlemin normal vektörü n. Bu ikisinin iç çarpımı, doğrunun düzlemi kesip kesmediğini söyler; kesiyorsa ortak noktayı ve aradaki açıyı verir. Ardından düzlemin normalini kullanarak bir noktanın bir düzleme uzaklığını tek bir formülle hesaplayacak, bu formülden de paralel iki düzlem arasındaki uzaklığı çıkaracağız.
Bölüm boyunca düzlem ve doğru için şu yazılışları kullanıyoruz:

$$\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0, \qquad n = (A, B, C) \neq 0,$$

$$d : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \lambda, \qquad v = (a, b, c) \neq 0.$$

Burada n, $\mathfrak{D}$ düzleminin normal vektörü; v, d doğrusunun doğrultman vektörü ve $P_0(x_0, y_0, z_0)$, d üzerinde bir noktadır. d'nin parametrik denklemleri

$$x = x_0 + \lambda a, \qquad y = y_0 + \lambda b, \qquad z = z_0 + \lambda c \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

dir. Doğru ve düzlem denklemlerinin nasıl kurulduğunu Uzayda Doğru Denklemleri ve Uzayda Düzlem Denklemleri bölümlerinde gördük.

14.1 Uzayda Doğru ile Düzlemin Durumları

Uzayda bir doğru ile bir düzlem ya tek bir noktada kesişir ya da hiç kesişmez; bir üçüncü olasılık olarak doğrunun tamamı düzlemin üzerinde yatabilir. Bu durumları önce geometrik olarak adlandıralım, sonra hangisinin gerçekleştiğini denklemlerden nasıl okuyacağımızı görelim.

Tanım 14.1 (Kesişen doğru ve düzlem). d doğrusu ile $\mathfrak{D}$ düzleminin tam olarak bir ortak noktası varsa d ile $\mathfrak{D}$'ye **kesişiyor** denir. Bu ortak noktaya d ile $\mathfrak{D}$'nin **arakesit noktası** denir.

Yani doğru düzlemi bir noktada "deler" ve düzlemin bir yanından öbür yanına geçer.

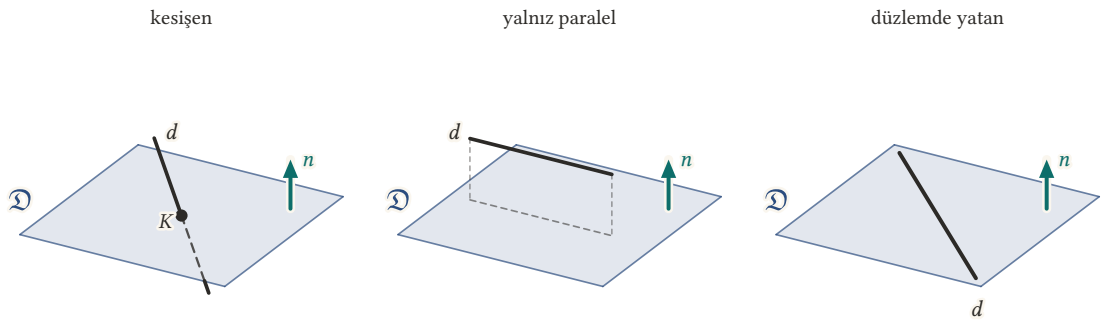
Tanım 14.2 (Doğru ile düzlemin paralelliği). $d \cap \mathfrak{D} = \varnothing$ ya da $d \subset \mathfrak{D}$ ise d doğrusu $\mathfrak{D}$ düzlemine **paraleldir** denir ve $d \parallel \mathfrak{D}$ yazılır. $d \subset \mathfrak{D}$ durumunda d doğrusu $\mathfrak{D}$ düzleminin **üzerindedir** (düzlemde yatar) ya da d ile $\mathfrak{D}$ **çakışıktır** denir.

Yani paralellik, doğrunun düzlemi "delmemesi" demektir: doğru ya düzleme hiç değmeden onun yanından geçer ya da tamamen onun içinde kalır. Düzlemde yatmak, paralelliğin özel bir durumudur; tıpkı iki düzlemin çakışmasının paralelliğin özel bir durumu olması gibi.

Tanım 14.3 (Doğrunun düzleme dikliği). d doğrusunun doğrultman vektörü v, $\mathfrak{D}$ düzleminin normal vektörü n'ye paralelse ($v \parallel n$) d doğrusu $\mathfrak{D}$ düzlemine **diktir** denir ve $d \perp \mathfrak{D}$ yazılır.

Yani dik doğru, düzlemin normali doğrultusunda uzanır. Normal vektör düzlemin içindeki her doğrultuya dik olduğundan böyle bir doğru, düzlemin içinde kalan her doğrultuya diktir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.1: Bir doğru ile bir düzlem: solda doğru düzlemi tek bir K noktasında deler (düzlemin arkasında kalan parçası kesikli), ortada düzleme paraleldir ve onu hiç kesmez (kesikli çizgi, doğrunun düzlemdeki dik izdüşümüdür), sağda tamamen düzlemin içinde yatar.

İlk iki tanım bir doğru ile bir düzlemin bütün olası durumlarını kapsar. Gerçekten bir sonraki teorem, ortak nokta sayısının yalnız 0, 1 ya da sonsuz olabileceğini ve sonsuz olduğunda doğrunun tamamen düzlemde yattığını gösterecek. Dolayısıyla uzayda bir doğru ile bir düzlem için iki ana durum vardır:
1) Doğru ile düzlem kesişir. Kesişmenin özel bir durumu olarak doğru düzleme dik olabilir.
2) Doğru ile düzlem paraleldir. Paralelliğin özel bir durumu olarak doğru düzlemin üzerinde yatabilir.

Teorem 14.1 (Doğru ile düzlemin ortak noktaları). *$\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ düzleminin normali $n = (A, B, C)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen d doğrusunun doğrultman vektörü $v = (a, b, c)$ olsun.*
i) $\langle n, v\rangle \neq 0$ ise d ile $\mathfrak{D}$ kesişir. Arakesit noktası, d'nin parametrik denklemlerinde

$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Aa + Bb + Cc} \tag{1}$$

yazılarak bulunur.
ii) $\langle n, v\rangle = 0$ ve $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ ise $d \subset \mathfrak{D}$'dir; yani d düzlemin üzerindedir.
iii) $\langle n, v\rangle = 0$ ve $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ ise $d \cap \mathfrak{D} = \varnothing$'dir; yani d düzleme yalnızca paraleldir, düzlemin üzerinde değildir.

İspat.
Adım 1: Ortak noktaların denklemi. *d'nin her noktası bir λ değeri için $(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$ biçimindedir ve $v \neq 0$ olduğundan farklı λ değerleri farklı noktalar verir. Bu nokta $\mathfrak{D}$ üzerindedir ancak ve ancak düzlemin denklemini sağlarsa:*

$$A(x_0 + \lambda a) + B(y_0 + \lambda b) + C(z_0 + \lambda c) + D = 0.$$

Terimleri λ'ya göre toplarsak bu denklem

$$\lambda\,(Aa + Bb + Cc) = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)$$

olur. Sol taraftaki katsayı bir iç çarpımdır:

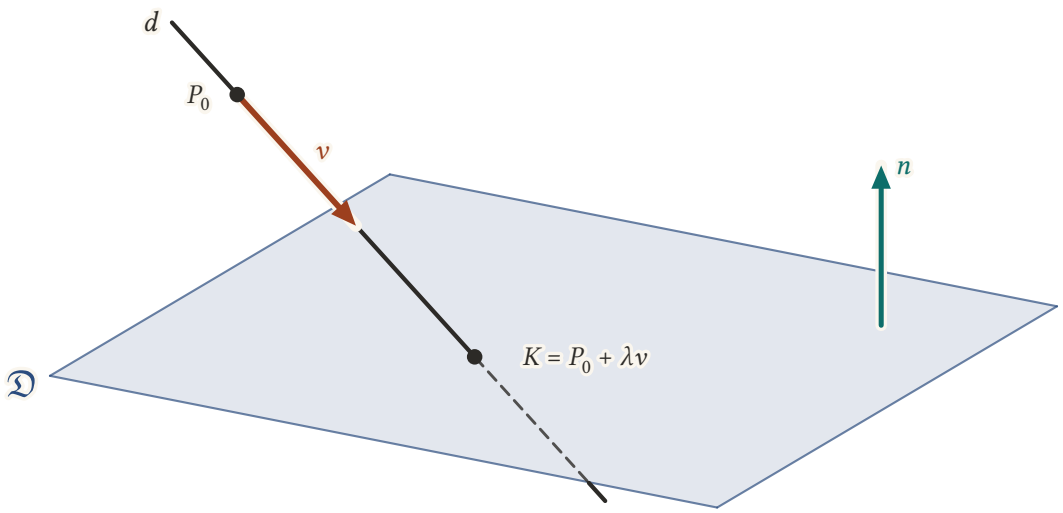
$$Aa + Bb + Cc = \text{chevron.l}(A, B, C), (a, b, c)\text{chevron.r} = \langle n, v\rangle.$$

Demek ki $d \cap \mathfrak{D}$'nin noktaları,

$$\lambda\,\langle n, v\rangle = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)$$

doğrusal denkleminin çözümlerine birebir karşılık gelir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.2: d *doğrusunun noktaları* $P_0 + \lambda v$ *biçimindedir. Bu noktalardan düzlemin denklemini sağlayan tek nokta* K*'dır;* λ *değeri (1)'den bulunur. Doğrunun düzlemin arkasında kalan parçası kesiklidir.*

Adım 2: $\langle n, v\rangle \neq 0$ ***durumu.*** *Denklemin iki yanını* $\langle n, v\rangle \neq 0$ *sayısına bölersek tek bir çözüm buluruz: (1)'deki* λ *değeri. O halde* d *ile* $\mathfrak{D}$*'nin tam bir ortak noktası vardır, yani kesişirler. Bu* λ *parametrik denklemlerde yerine yazılınca arakesit noktası elde edilir.*
Adım 3: $\langle n, v\rangle = 0$ ***durumu.*** *Denklemin sol tarafı her* λ *için* 0 *olur ve denklem*

$$0 = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)$$

biçimini alır. $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ *ise bu eşitlik her* λ *için doğrudur; d'nin bütün noktaları* $\mathfrak{D}$ *üzerindedir ve* $d \subset \mathfrak{D}$ *olur.* $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ *ise eşitlik hiçbir* λ *için sağlanmaz; ortak nokta yoktur ve* $d \cap \mathfrak{D} = \varnothing$ *olur.*
■

Teoremin ii) ve iii) şıklarında $\langle n, v\rangle = 0$ olduğunu, i) şıkkında ise doğrunun düzlemi kestiğini gördük. Paralelliği tek bir koşulla ifade edebiliriz.

Sonuç 14.1 (Paralellik koşulu). $d \parallel \mathfrak{D}$ *olması için gerek ve yeter koşul*

$$\langle n, v\rangle = Aa + Bb + Cc = 0$$

olmasıdır. Bu durumda d'nin herhangi bir noktası $\mathfrak{D}$*'nin denklemini sağlıyorsa* d *düzlemin üzerindedir; sağlamıyorsa* d *düzleme yalnızca paraleldir.*

İspat.
$\langle n, v\rangle = 0$ *ise ortak nokta teoreminin (Teorem 14.1) ii) ve iii) şıklarına göre ya* $d \subset \mathfrak{D}$ *ya da* $d \cap \mathfrak{D} = \varnothing$*'dir; iki durumda da tanım gereği* $d \parallel \mathfrak{D}$ *olur. Tersine* $\langle n, v\rangle \neq 0$ *ise aynı teoremin i) şıkkına göre* d *ile* $\mathfrak{D}$*'nin tam bir ortak noktası vardır; bu durumda ne* $d \cap \mathfrak{D} = \varnothing$ *ne de* $d \subset \mathfrak{D}$ *olabilir (bir doğrunun sonsuz noktası vardır), yani* d *düzleme paralel değildir. İkinci cümle, teoremdeki* P_0 *yerine d'nin herhangi bir noktası alınarak aynı teoremden okunur.*
■

Yani v, düzlemin normaline dikse doğru düzlemi delmez. Bu sezgiyle de uyumludur: normale dik bir doğrultu, düzlemin kendi doğrultularından biridir.

Önerme 14.1 (Diklik koşulu). $d \perp \mathfrak{D}$ *ise* d *ile* $\mathfrak{D}$ *kesişir. Ayrıca* a, b, c *sıfırdan farklıysa*

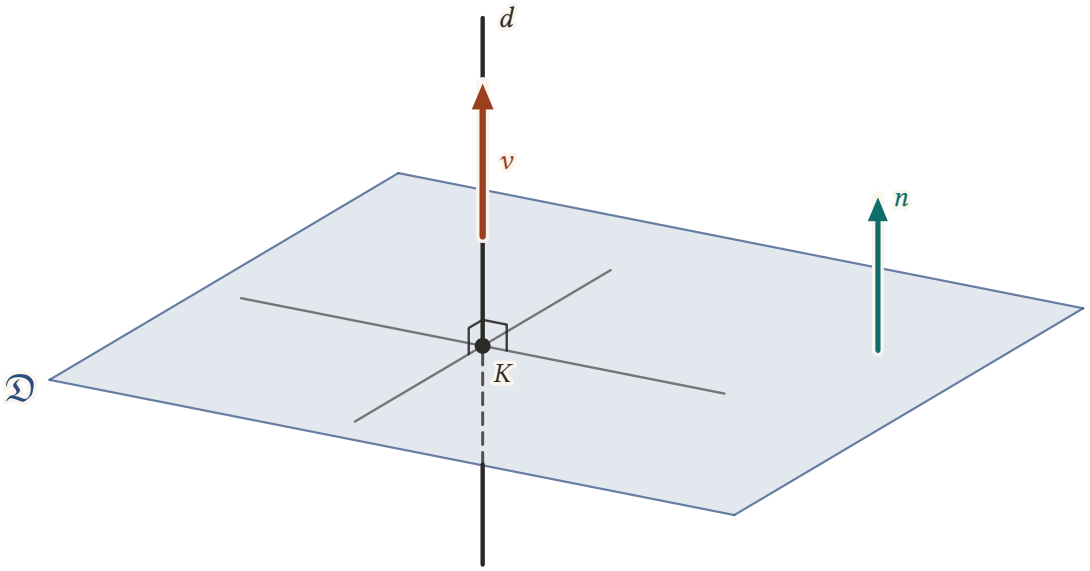
 CC BY-NC-SA 4.0

$$d \perp \mathfrak{D} \Leftrightarrow n \parallel v \Leftrightarrow \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$$

olur.

> ***İspat.***
> *$d \perp \mathfrak{D}$ olsun. Tanım gereği $v \parallel n$'dir; yani sıfırdan farklı bir k sayısı için $v = k\,n$ olur. O zaman*
>
> $$\langle n, v\rangle = \langle n, k\,n\rangle = k \parallel n \overset{2}{\parallel} \neq 0$$
>
> *dır, çünkü $k \neq 0$ ve $n \neq 0$'dır. Ortak nokta teoreminin (Teorem 14.1) i) şıkkına göre d ile $\mathfrak{D}$ kesişir. Birinci denklik, diklik tanımının (Tanım 14.3) kendisidir. İkinci denklik için paralel vektör tanımını (Tanım 7.15) kullanalım: $n \parallel v$ olması, bir μ için $A = \mu a$, $B = \mu b$, $C = \mu c$ olmasıdır. $a, b, c \neq 0$ olduğundan bu üç eşitlik*
>
> $$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \mu$$
>
> *demektir. Tersine bu oranlar ortak bir μ değerine eşitse $A = \mu a$, $B = \mu b$, $C = \mu c$ olur ve $n = \mu v$ bulunur; $n \neq 0$ olduğundan $\mu \neq 0$'dır, yani $n \parallel v$'dir.*
> ■

Oran koşulunda paydalardan biri sıfırsa oranı yazmak yerine doğrudan $n = \mu v$ eşitliğini denemek gerekir. Örneğin $v = (1, 0, 2)$ ise $n \parallel v$ olması için $B = 0$ ve $C = 2A$ olmalıdır.



Şekil 14.3: Düzleme dik doğru: *d*'nin doğrultman vektörü *v*, düzlemin normali *n* ile aynı doğrultudadır. Bu yüzden *d*, düzlemin *K*'dan geçen her doğrusuna diktir; şekilde bunlardan ikisi gösterilmiştir.

Düzleme dik doğruların en önemli kullanımı, bir noktadan düzleme "dikme indirmek"tir.

Tanım 14.4 (Bir noktadan düzleme inen dikme). P bir nokta ve $\mathfrak{D}$ normali n olan bir düzlem olsun. P'den geçen ve doğrultman vektörü n olan doğruya P'den $\mathfrak{D}$'ye inen **dikme**, bu doğrunun $\mathfrak{D}$'yi kestiği noktaya da dikmenin **ayağı** denir.

Yani dikme, P'den geçen ve düzleme dik olan doğrudur. Diklik koşuluna (Önerme 14.1) göre bu doğru düzlemi mutlaka keser ve ortak nokta teoreminin (Teorem 14.1) i) şıkkına göre tek bir noktada keser; dolayısıyla dikmenin ayağı her zaman vardır ve tektir. $P \in \mathfrak{D}$ ise ayak P'nin kendisidir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Doğru ile düzlemin durumunu üç adımda bulmak

1. Doğrunun denkleminden bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktası ile $v = (a, b, c)$ doğrultman vektörünü, düzlemin denkleminden $n = (A, B, C)$ normalini okuyun.
2. $\langle n, v\rangle = Aa + Bb + Cc$ sayısını hesaplayın. Sıfırdan farklıysa doğru düzlemi keser: (1)'deki λ'yı bulup parametrik denklemlere yazın. Ayrıca $n \parallel v$ ise kesişme diktir.
3. $\langle n, v\rangle = 0$ ise doğru düzleme paraleldir: P_0'ı düzlemin denkleminde yerine yazın. Sonuç 0 ise doğru düzlemin üzerindedir, değilse düzleme yalnızca paraleldir.

Örnek 14.1 (Düzlemin üzerinde yatan bir doğru).

$$d : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

doğrusu ile $\mathfrak{D} : x + z + 1 = 0$ düzleminin birbirine göre durumunu inceleyelim ve varsa ortak noktalarını bulalım.

Çözüm.
Adım 1: Vektörler. d'nin denkleminden $P_0 = (-1, 0, 0)$ ve $v = (3, 2, -3)$; $\mathfrak{D}$'nin denkleminden $n = (1, 0, 1)$ okunur (y'nin katsayısı 0'dır).
Adım 2: İç çarpım.

$$\langle n, v\rangle = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 0$$

olduğundan Sonuç 14.1 gereği $d \parallel \mathfrak{D}$'dir.
Adım 3: Nokta denemesi. $P_0 = (-1, 0, 0)$ noktası düzlemin denkleminde yerine yazılırsa

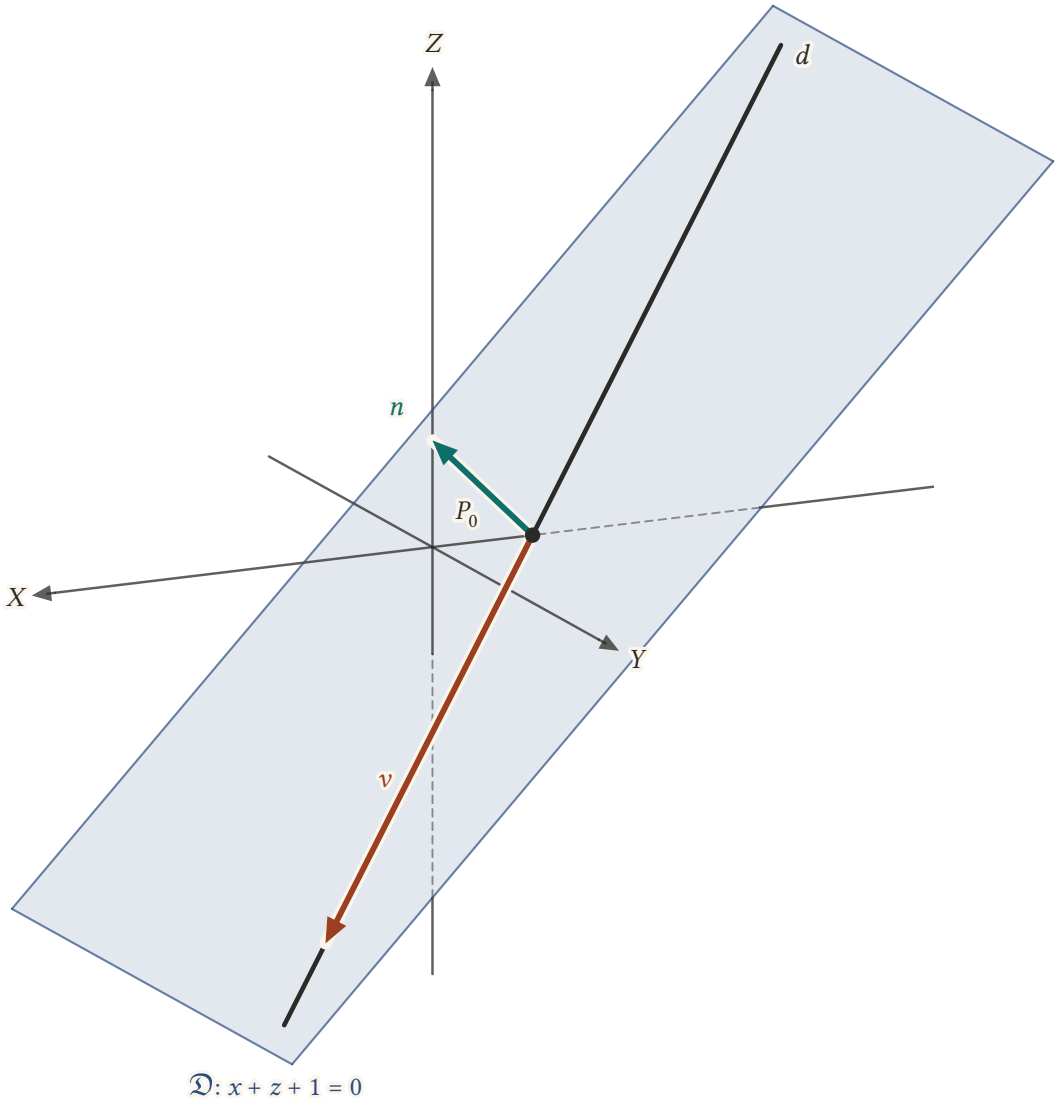
$$-1 + 0 + 1 = 0$$

bulunur, yani $P_0 \in \mathfrak{D}$'dir. Ortak nokta teoreminin (Teorem 14.1) ii) şıkkına göre d doğrusu $\mathfrak{D}$ düzleminin üzerindedir; d'nin her noktası ortak noktadır.
Bunu doğrudan da görebiliriz: d'nin genel noktası $(-1 + 3\lambda,\, 2\lambda,\, -3\lambda)$'dır ve

$$(-1 + 3\lambda) + (-3\lambda) + 1 = 0$$

her λ için sağlanır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.4: d doğrusu düzlemin içinde yatar: doğrultman vektörü v = (3, 2, −3), düzlemin normali n = (1, 0, 1)'e diktir ve P_0(−1, 0, 0) düzlemin üzerindedir. Eksenlerin düzlemin arkasında kalan kısımları kesiklidir.

■

Örnek 14.2 (Düzlemi kesen bir doğru).

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$$

doğrusu ile $\mathfrak{D} : x + 2y + z - 7 = 0$ düzleminin birbirine göre durumunu inceleyelim ve varsa ortak noktalarını bulalım.

Çözüm.
Adım 1: Vektörler. $P_0 = (1, -1, 2)$, $v = (2, 1, -1)$ ve $n = (1, 2, 1)$'dir.
Adım 2: İç çarpım.

$$\langle n, v \rangle = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 3 \neq 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan ortak nokta teoreminin (Teorem 14.1) i) şıkkına göre d ile $\mathfrak{D}$ tek bir noktada kesişir. $n = (1, 2, 1)$ ile $v = (2, 1, -1)$ paralel değildir (örneğin $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1}$), bu yüzden kesişme dik değildir.

Adım 3: Parametre. P_0'ın düzlem denklemindeki değeri

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 1 + 2 \cdot (-1) + 2 - 7 = -6$$

dır. (1)'den

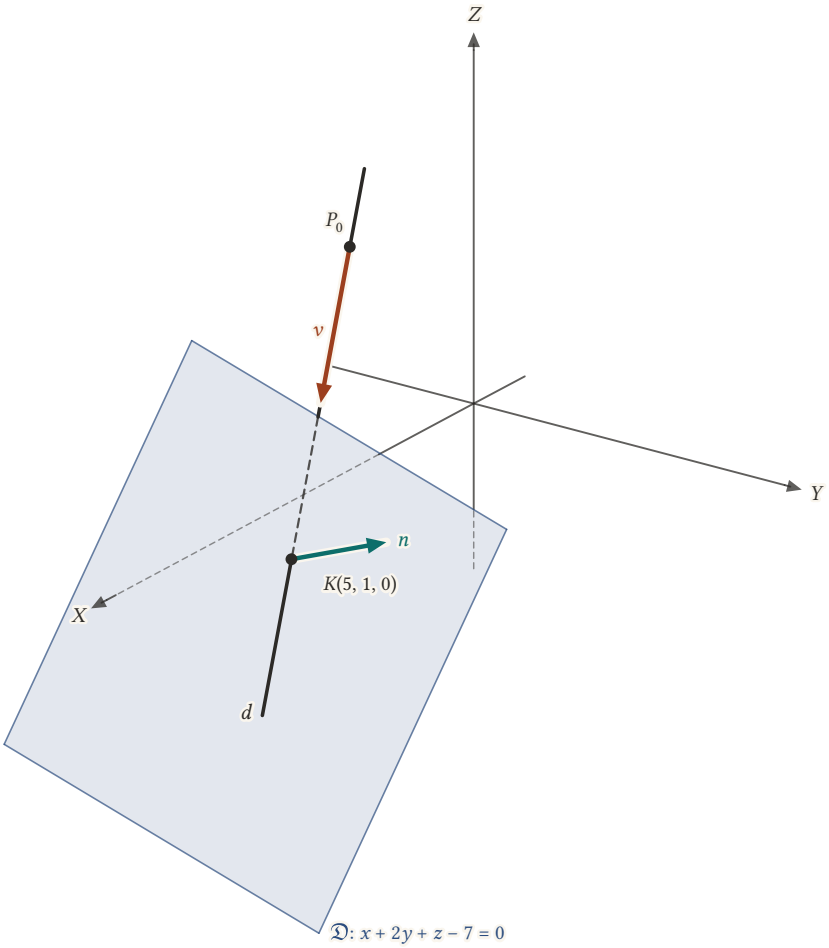
$$\lambda = -\frac{-6}{3} = 2$$

bulunur.

Adım 4: Arakesit noktası. $\lambda = 2$ parametrik denklemlerde yerine yazılırsa

$$x = 1 + 2 \cdot 2 = 5, \qquad y = -1 + 2 = 1, \qquad z = 2 - 2 = 0$$

elde edilir. Arakesit noktası $K(5, 1, 0)$'dır. Kontrol: $5 + 2 \cdot 1 + 0 - 7 = 0$.



Şekil 14.5: d doğrusu düzlemi $K(5, 1, 0)$ noktasında keser: $\langle n, v \rangle = 3 \neq 0$'dır. $v = (2, 1, -1)$, $P_0(1, -1, 2)$'dan; $n = (1, 2, 1)$, K'dan çizilmiştir. Doğrunun ve eksenlerin düzlemin arkasında kalan kısımları kesiklidir.

■

Örnek 14.3 (Düzleme dik bir doğru).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$d : \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$$

doğrusunun $\mathfrak{D} : 2x - y + 2z + 9 = 0$ düzlemine dik olduğunu gösterelim ve arakesit noktasını bulalım.

Çözüm.
Adım 1: Diklik. $v = (2, -1, 2)$ ve $n = (2, -1, 2)$'dir. Oranlar

$$\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} = \frac{2}{2} = 1$$

eşit olduğundan Önerme 14.1 gereği $d \perp \mathfrak{D}$'dir.
Adım 2: Parametre. $P_0 = (3, 1, 2)$ için

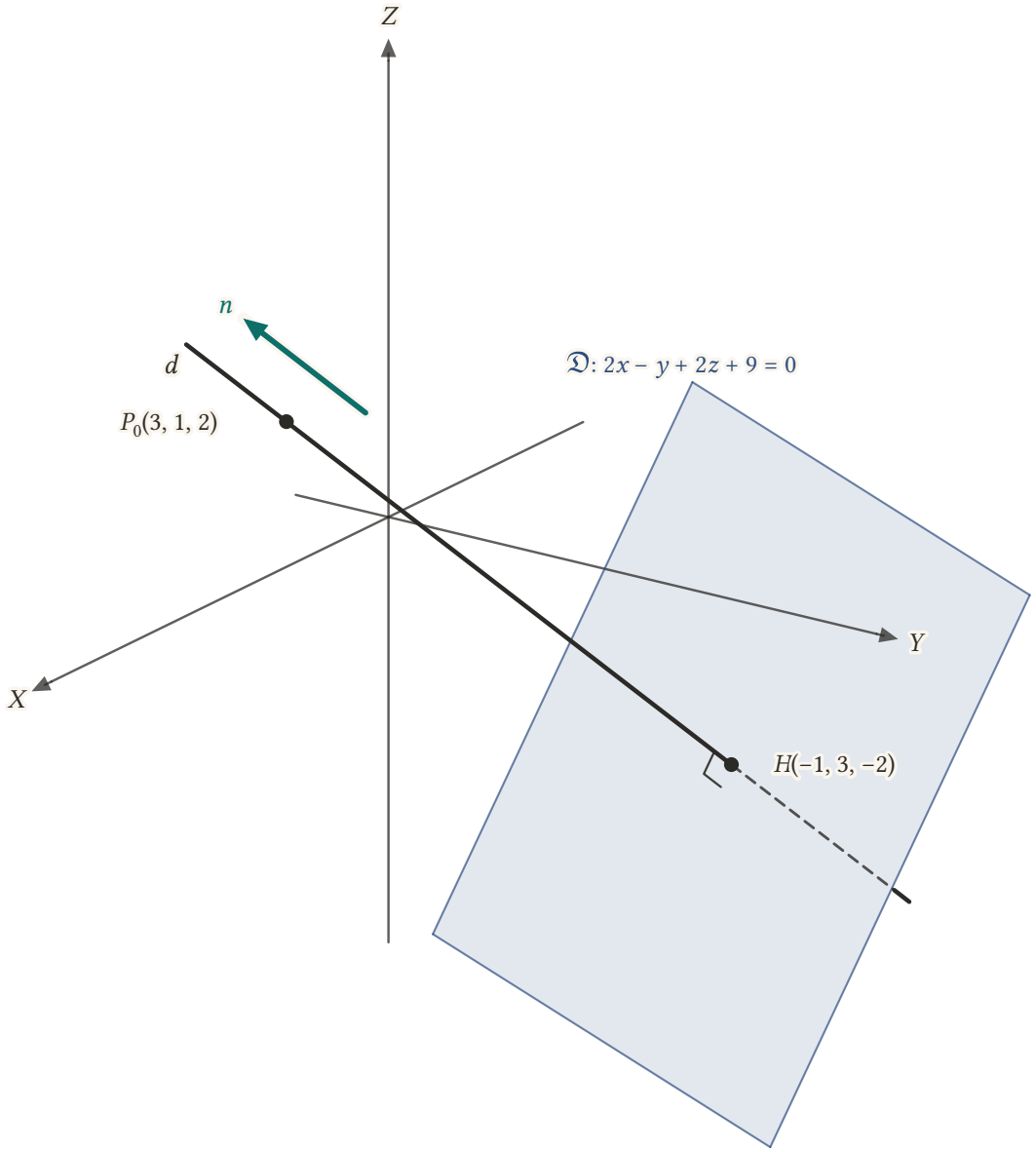
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 6 - 1 + 4 + 9 = 18, \qquad \langle n, v \rangle = 4 + 1 + 4 = 9$$

olup (1)'den $\lambda = -\frac{18}{9} = -2$ bulunur.
Adım 3: Arakesit noktası.

$$x = 3 + 2 \cdot (-2) = -1, \qquad y = 1 - (-2) = 3, \qquad z = 2 + 2 \cdot (-2) = -2.$$

Arakesit noktası $H(-1, 3, -2)$'dir. Kontrol: $2 \cdot (-1) - 3 + 2 \cdot (-2) + 9 = 0$. d düzleme dik olduğundan H, P_0'dan $\mathfrak{D}$'ye inen dikmenin ayağıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.6: d'nin doğrultman vektörü düzlemin normali $n = (2, -1, 2)$'dir; doğru düzleme diktir ve onu $H(-1, 3, -2)$'de keser. H, $P_0(3, 1, 2)$'dan düzleme inen dikmenin ayağıdır.

■

Örnek 14.4 (Düzleme yalnızca paralel bir doğru).

$$d : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$$

doğrusu ile $\mathfrak{D} : 2x - y - z + 4 = 0$ düzleminin birbirine göre durumunu inceleyelim.

Çözüm.
Adım 1: İç çarpım. $v = (1, -1, 3)$ ve $n = (2, -1, -1)$ için

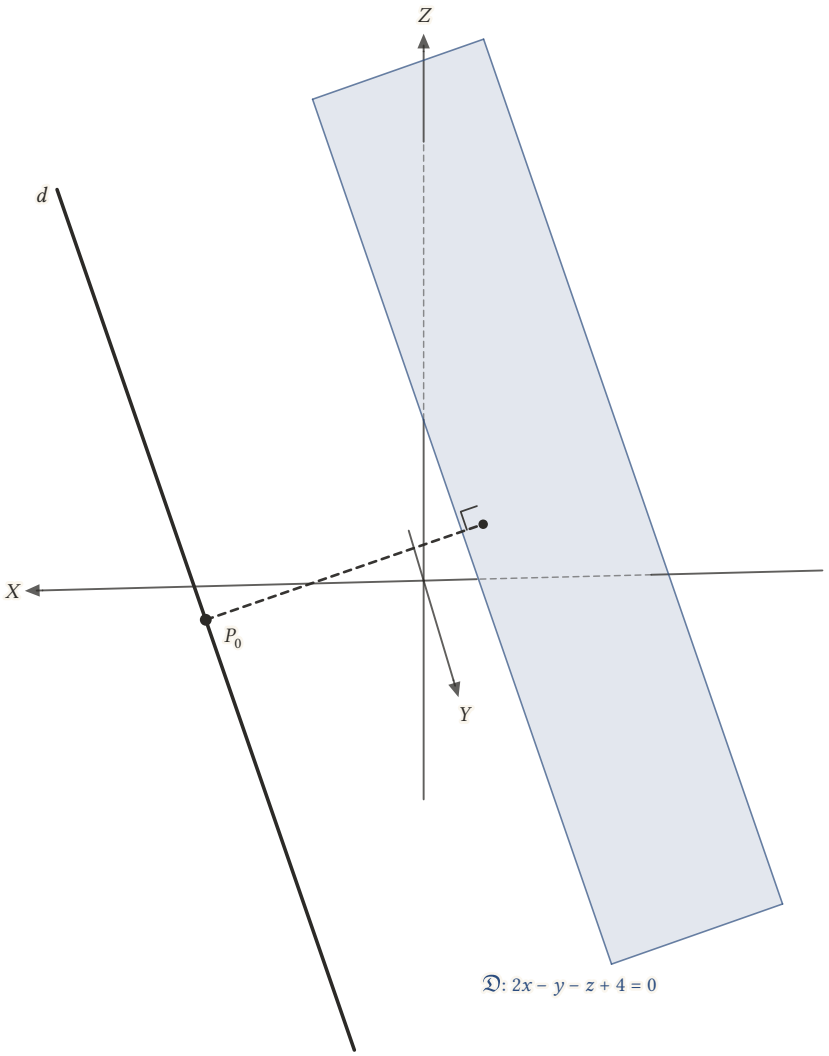
$$\langle n, v \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olduğundan $d \parallel \mathfrak{D}$'dir.
Adım 2: Nokta denemesi. $P_0 = (2, 1, 0)$ için

$$2 \cdot 2 - 1 - 0 + 4 = 7 \neq 0$$

dır; P_0 düzlemde değildir. Ortak nokta teoreminin (Teorem 14.1) iii) şıkkına göre $d \cap \mathfrak{D} = \varnothing$'dir: d düzleme yalnızca paraleldir, ortak noktaları yoktur.



Şekil 14.7: d doğrusu düzleme paraleldir ($\langle n, v \rangle = 0$) ama $P_0(2, 1, 0)$ düzlemde değildir; doğru düzlemin yanından geçer ve onu hiç kesmez. Kesikli çizgi P_0'dan düzleme inen dikmedir.

■

Örnek 14.5 (Paralellik için parametre).

$$d : \frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-2}$$

doğrusunun $\mathfrak{D} : 2x + y + 4z - 5 = 0$ düzlemine paralel olması için m ne olmalıdır? Bu m için d düzlemin üzerinde midir?

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 1: Paralellik koşulu. $v = (m, 3, -2)$ ve $n = (2, 1, 4)$'tür. Sonuç 14.1 gereği

$$\langle n, v \rangle = 2m + 3 - 8 = 2m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}$$

bulunur.
Adım 2: Nokta denemesi. $P_0 = (1, -2, 0)$ için

$$2 \cdot 1 + (-2) + 4 \cdot 0 - 5 = -5 \neq 0$$

dır. O halde $m = \frac{5}{2}$ iken d düzleme yalnızca paraleldir, düzlemin üzerinde değildir.
■

Örnek 14.6 (Hiçbir değerde dik olmayan doğru).

$$d : \frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-2}$$

doğrusunun $\mathfrak{D} : 2x + y + 4z - 5 = 0$ düzlemine hiçbir m değeri için dik olamayacağını gösterelim.

Çözüm.
$v = (m, 3, -2)$ ve $n = (2, 1, 4)$'tür. $d \perp \mathfrak{D}$ olsaydı bir μ için $n = \mu v$, yani

$$2 = \mu m, \qquad 1 = 3\mu, \qquad 4 = -2\mu$$

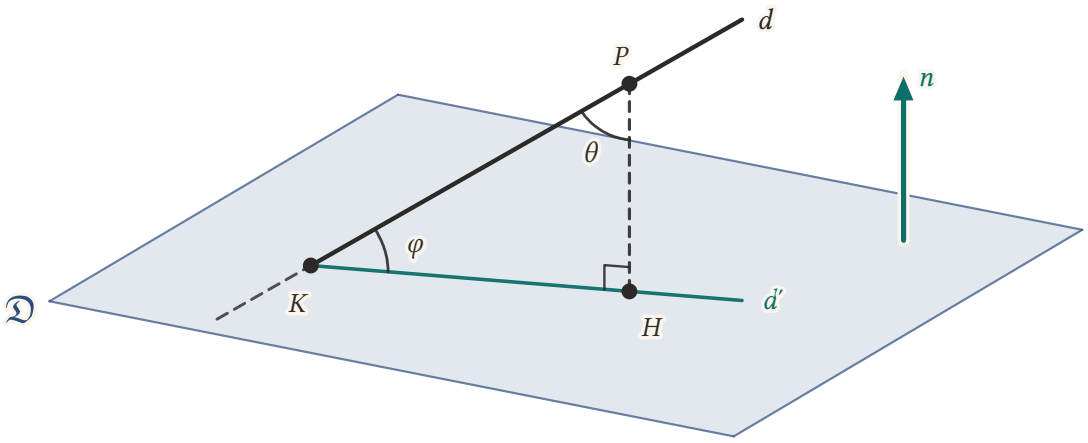
olurdu. İkinci eşitlikten $\mu = \frac{1}{3}$, üçüncüden $\mu = -2$ bulunur; bu bir çelişkidir. m yalnız birinci eşitlikte geçtiğinden hiçbir m bu çelişkiyi gideremez. O halde d hiçbir m için $\mathfrak{D}$'ye dik değildir.
Yani diklik için v'nin üç bileşeni birlikte n ile orantılı olmalıdır; burada değişmeyen iki bileşen $(3, -2)$ ile $(1, 4)$ zaten orantılı değildir.
■

14.2 Doğru ile Düzlem Arasındaki Açı

Kesişen iki doğru arasındaki açıyı ve iki düzlem arasındaki açıyı (İki Düzlem ve Düzlemin İrdelenmesi) biliyoruz. Bir doğrunun bir düzlemle yaptığı açıyı ölçmenin doğal yolu, doğruyu düzlemdeki "gölgesiyle", yani düzlem üzerindeki dik izdüşümüyle karşılaştırmaktır.

Tanım 14.5 (Doğru ile düzlem arasındaki açı). d doğrusu ile $\mathfrak{D}$ düzlemi K noktasında kesişsin ve d düzleme dik olmasın. d üzerinde K'dan farklı bir P noktası alalım ve H, P'den $\mathfrak{D}$'ye inen dikmenin ayağı olsun. $\varphi = \measuredangle PKH$ açısına d ile $\mathfrak{D}$ **arasındaki açı** denir. $d \perp \mathfrak{D}$ ise bu açı $\frac{\pi}{2}$, $d \parallel \mathfrak{D}$ ise 0 kabul edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.8: Doğru ile düzlem arasındaki açı: P'den inen dikmenin ayağı H'dir ve $d' = KH$, d''nin düzlemdeki izdüşümüdür. φ, d ile d' arasındaki açıdır; PHK dik üçgeninde $\varphi + \theta = \pi/2$ olur.

Yani φ, doğru ile onun düzlemdeki izdüşümü arasındaki açıdır ve $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ aralığındadır. Tanım anlamlıdır: d düzleme dik değilse $H \neq K$ olur. Gerçekten $H = K$ olsaydı d, P ile H'den geçen dikmenin kendisi olurdu; doğrultusu n'ye paralel olurdu ve $d \perp \mathfrak{D}$ çıkardı. Açının P'nin seçimine bağlı olmadığı aşağıdaki teoremden görülecek.

Teorem 14.2 (Doğru ile düzlem arasındaki açının sinüsü). *d doğrusunun doğrultman vektörü v, $\mathfrak{D}$ düzleminin normali n ve φ, d ile $\mathfrak{D}$ arasındaki açı olsun. O zaman*

$$\sin\varphi = \frac{|\ \langle n, v\rangle\ |}{\|\ n\ \|\ \|\ v\ \|}$$

olur.

İspat.
Özel durumlar. *$d \parallel \mathfrak{D}$ ise Sonuç 14.1 ile $\langle n, v\rangle = 0$'dır ve formül $\sin\varphi = 0$, yani $\varphi = 0$ verir. $d \perp \mathfrak{D}$ ise bir $k \neq 0$ için $v = k\,n$'dir ve*

$$\frac{|\ \langle n, k\,n\rangle\ |}{\|\ n\ \|\ \|\ k\,n\ \|} = \frac{|\ k\ |\ \|\ n\ \|^2}{|\ k\ |\ \|\ n\ \|^2} = 1$$

olur; formül $\varphi = \frac{\pi}{2}$ verir.
Genel durum. *d ile $\mathfrak{D}$, K'da kesişsin ve d düzleme dik olmasın. Tanımdaki P, H noktalarını alalım. PHK* bir dik üçgendir. *K ile H düzlemin üzerinde olduğundan*

$$Ax_K + By_K + Cz_K = -D = Ax_H + By_H + Cz_H$$

dir; bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa $\langle n, \overrightarrow{KH}\rangle = 0$ bulunur. $\overrightarrow{HP}$ ise dikme üzerinde olduğundan n'ye paraleldir. Demek ki $HP \perp HK$ ve PHK üçgeni H'de dik açılıdır. Bu dik üçgende

$$\sin\varphi = \frac{|\ PH\ |}{|\ PK\ |}$$

olur.
$|\ PH\ |$'yi hesaplayalım. *Bir μ için $\overrightarrow{HP} = \mu\,n$ olsun. $\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HP}$ olduğundan*

$$\langle \overrightarrow{KP}, n\rangle = \langle \overrightarrow{KH}, n\rangle + \langle \mu\,n, n\rangle = 0 + \mu\,\|\ n\ \|^2$$

dir. Buradan $|\ PH\ | = |\ \mu\ |\ \|\ n\ \| = \dfrac{|\ \langle \overrightarrow{KP}, n\rangle\ |}{\|\ n\ \|}$ elde edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

v cinsinden yazalım. *P ile K, d üzerinde olduğundan bir $t \neq 0$ için $\overrightarrow{KP} = t\,v$'dir. O halde*

$$|\,PH\,| = \frac{|\,t\,|\,|\,\langle v, n\rangle\,|}{\|\,n\,\|}, \qquad |\,PK\,| = |\,t\,|\,\|\,v\,\|$$

olur. Oranları alırsak $|\,t\,|$ sadeleşir:

$$\sin\varphi = \frac{|\,PH\,|}{|\,PK\,|} = \frac{|\,\langle n, v\rangle\,|}{\|\,n\,\|\,\|\,v\,\|}.$$

Sağ taraf P'ye bağlı olmadığından açı da P'nin seçimine bağlı değildir.
■

Yani doğru ile düzlem arasındaki açının sinüsü, v ile n arasındaki açının kosinüsünün mutlak değeridir. Bunun geometrik anlamı açıktır: şekildeki PHK dik üçgeninde P köşesindeki θ açısı, d ile normal doğrultusu arasındaki dar açıdır ve $\varphi + \theta = \frac{\pi}{2}$'dir. Kısacası φ, iki vektör arasındaki açının kosinüs formülünden (Teorem 8.2) bulunan dar açının tümleridir.

Örnek 14.7 (Bir doğru ile bir düzlem arasındaki açı).

$$d : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$$

doğrusu ile $\mathfrak{D} : 2x - y + z - 6 = 0$ düzlemi arasındaki açıyı ve arakesit noktasını bulalım.

Çözüm.
Adım 1: Açı. $v = (1, 1, 2)$ ve $n = (2, -1, 1)$'dir.

$$\langle n, v\rangle = 2 - 1 + 2 = 3, \qquad \|\,n\,\| = \sqrt{6}, \qquad \|\,v\,\| = \sqrt{6}$$

olduğundan Teorem 14.2 ile

$$\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{6}\,\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

bulunur. $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ olduğundan $\varphi = \frac{\pi}{6}$'dır.
Adım 2: Arakesit noktası. $P_0 = (1, -1, 0)$ için $2 + 1 + 0 - 6 = -3$ olduğundan (1)'den $\lambda = -\frac{-3}{3} = 1$ bulunur. Parametrik denklemlerde yerine yazılırsa $K(2, 0, 2)$ elde edilir. Kontrol: $4 - 0 + 2 - 6 = 0$.
■

14.3 Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı

Düzlemde bir noktanın bir doğruya uzaklığını normal denklemle bulmuştuk (Düzlemde Doğru Denklemleri). Uzayda aynı rolü düzlem oynar ve formül neredeyse aynı biçimde çıkar: noktanın koordinatları düzlemin denkleminde yerine yazılır, sonuç normalin uzunluğuna bölünür.

Tanım 14.6 (Bir noktanın düzleme uzaklığı). P_0 bir nokta, $\mathfrak{D}$ bir düzlem ve S, P_0'dan $\mathfrak{D}$'ye inen dikmenin ayağı olsun. $\ell = |\,P_0S\,|$ uzunluğuna P_0 noktasının $\mathfrak{D}$ düzlemine **uzaklığı** denir.

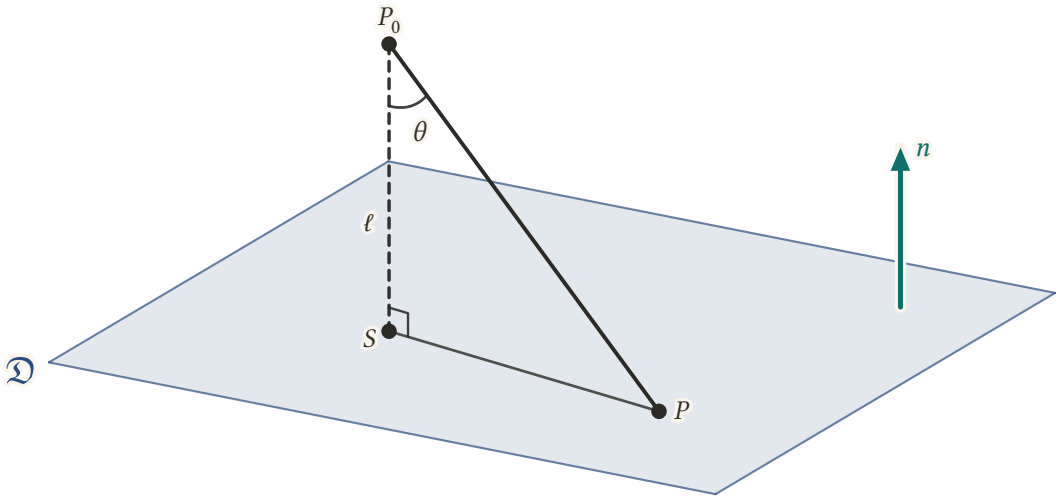
Yani uzaklık, noktayı düzleme bağlayan en kısa yolun uzunluğudur. Gerçekten P, $\mathfrak{D}$ üzerinde S'den farklı bir nokta ise $\overrightarrow{P_0S}$ normale, $\overrightarrow{SP}$ ise düzleme paralel olduğundan P_0SP üçgeni S'de dik açılıdır ve Pisagor teoremiyle $|\,P_0P\,|^2 = |\,P_0S\,|^2 + |\,SP\,|^2 > |\,P_0S\,|^2$ olur. $P_0 \in \mathfrak{D}$ ise $S = P_0$ ve uzaklık 0'dır.

Teorem 14.3 (Bir noktanın düzleme uzaklığı). *$P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemine uzaklığı*

$$\ell = \frac{|\,Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

dir.

İspat.
$P_0 \in \mathfrak{D}$ ise pay 0'dır ve formül doğru olarak $\ell = 0$ verir. $P_0 \notin \mathfrak{D}$ olsun; S, P_0'dan inen dikmenin ayağı ve $P(x, y, z)$, $\mathfrak{D}$ üzerinde S'den farklı herhangi bir nokta olsun.



Şekil 14.9: P_o'dan düzleme inen dikmenin ayağı S, düzlemin başka bir noktası P'dir. P_oSP üçgeni S'de dik açılıdır ve $\ell = |P_oS| = |P_oP|\,|\cos\theta|$ olur.

Adım 1: Dik üçgen. *P_0SP üçgeni S'de dik açılıdır: $\overrightarrow{SP}$ düzlem içindedir ve Teorem 14.2 ispatındaki gibi $\langle \overrightarrow{SP}, n\rangle = 0$'dır; $\overrightarrow{P_0S}$ ise dikme üzerinde olduğundan n'ye paraleldir. $\theta = \measuredangle SP_0P$ dersek bu dik üçgende*

$$\ell = |\ P_0S\ | = |\ P_0P\ |\,|\cos\theta\ |$$

olur (θ dar açı olduğundan mutlak değer burada zararsızdır).
Adım 2: Açıyı normalle ifade etmek. *$\overrightarrow{P_0S}$, n'ye paralel olduğundan θ ya $\overrightarrow{P_0P}$ ile n arasındaki açıya ya da bu açının π'ye tümleyenine eşittir; iki durumda da kosinüslerin mutlak değeri aynıdır. Teorem 8.2 ile*

$$|\cos\theta\ | = \frac{|\ \langle \overrightarrow{P_0P}, n\rangle\ |}{\|\ \overrightarrow{P_0P}\ \|\,\|\ n\ \|}$$

yazılır. Bunu Adım 1'de yerine koyarsak $|\ P_0P\ | = \|\ \overrightarrow{P_0P}\ \|$ sadeleşir:

$$\ell = \frac{|\ \langle \overrightarrow{P_0P}, n\rangle\ |}{\|\ n\ \|}.$$

Bu, $\overrightarrow{P_0P}$ vektörünün n üzerine dik izdüşümünün uzunluğudur (Teorem 8.3).
Adım 3: Koordinatlarla. *$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ ve $n = (A, B, C)$ olduğundan*

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{P_0P}, n\rangle &= A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)\\ &= (Ax + By + Cz) - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)\end{aligned}$$

dir. $P \in \mathfrak{D}$ olduğundan $Ax + By + Cz = -D$'dir. O halde

$$\langle \overrightarrow{P_0P}, n\rangle = -D - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)$$

olur. Mutlak değer işareti eksi işaretini yok eder ve $\|\ n\ \| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ olduğundan

$$\ell = \frac{|\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

elde edilir. Sonuç P'nin seçimine bağlı değildir; düzlemin herhangi bir noktasıyla aynı sayı bulunur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani uzaklığı bulmak için dikmenin ayağını hesaplamaya gerek yoktur: noktayı düzlemin denkleminin sol tarafına yazar, mutlak değerini alır ve normalin uzunluğuna böleriz.

Sonuç 14.2 (Orijinin düzleme uzaklığı). *Orijinin* $\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ *düzlemine uzaklığı*

$$\ell = \frac{\mid D \mid}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

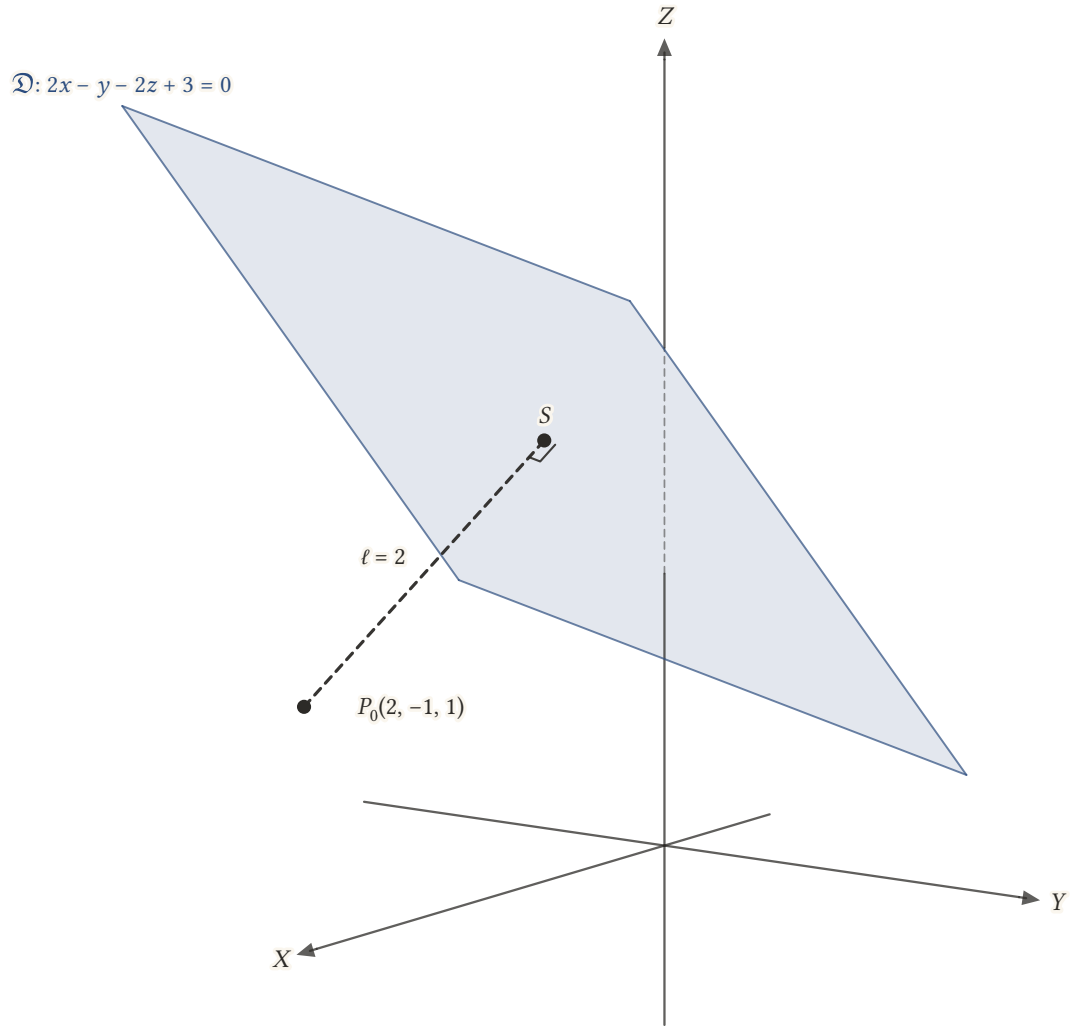
dir.

> ***İspat.***
> *Uzaklık formülünde (Teorem 14.3)* $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ *yazılırsa pay* $\mid A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D \mid = \mid D \mid$ *olur.*
> ■

Örnek 14.8 (Bir noktanın düzleme uzaklığı). $P_0(2, -1, 1)$ noktasının $\mathfrak{D} : 2x - y - 2z + 3 = 0$ düzlemine uzaklığını hesaplayalım.

> **Çözüm.**
> **Adım 1: Pay.** P_0'ı denklemin sol tarafına yazalım:
>
> $$2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 3 = 4 + 1 - 2 + 3 = 6.$$
>
> **Adım 2: Payda.** $\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$.
> **Adım 3: Uzaklık.** Teorem 14.3 ile
>
> $$\ell = \frac{\mid 6 \mid}{3} = 2$$
>
> bulunur.
> Sonucu dikmenin ayağıyla da denetleyebiliriz. Dikme $(2 + 2\lambda, -1 - \lambda, 1 - 2\lambda)$ doğrusudur; (1)'den $\lambda = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$ ve ayak $S\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ bulunur. $\overrightarrow{SP_0} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ olduğundan
>
> $$\mid P_0S \mid = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{4} = 2$$
>
> olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.10: $P_0(2, -1, 1)$'dan düzleme inen dikmenin ayağı $S(2/3, -1/3, 7/3)$'tür ve $|P_0S| = 2$'dir. P_0, normal $n = (2, -1, -2)$'nin gösterdiği taraftadır.

■

Örnek 14.9 (Dikmenin uzunluğu ile formülün karşılaştırılması). $P_0(3,1,2)$ noktasının $\mathfrak{D} : 2x - y + 2z + 9 = 0$ düzlemine uzaklığını formülle bulalım ve daha önce bulunan dikme ayağıyla (Örnek 14.3) karşılaştıralım.

Çözüm.
Adım 1: Formül.

$$\ell = \frac{|\, 2\cdot 3 - 1 + 2\cdot 2 + 9 \,|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{18}{3} = 6.$$

Adım 2: Dikme ayağı. Düzleme dik doğru örneğinde (Örnek 14.3) P_0'dan geçen ve düzleme dik olan doğrunun düzlemi $H(-1,3,-2)$'de kestiğini bulmuştuk. $\overrightarrow{P_0H} = (-4,2,-4)$ olduğundan

$$|\, P_0H \,| = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

dır. İki yol aynı sonucu verir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bir doğru bir düzleme paralelse doğrunun bütün noktaları düzleme aynı uzaklıktadır; bu ortak değere doğru ile düzlem **arasındaki uzaklık** denir.

Önerme 14.2 (Paralel doğru ile düzlem arasındaki uzaklık). *$d \parallel \mathfrak{D}$ ise d'nin her noktasının $\mathfrak{D}$'ye uzaklığı aynıdır ve $P_0(x_0, y_0, z_0) \in d$ olmak üzere*

$$\frac{\mid Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \mid}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

sayısına eşittir.

> ***İspat.***
> *d'nin genel noktası $(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$'dir. Bu noktayı düzlem denkleminin sol tarafına yazarsak*
>
> $$\begin{aligned} &A(x_0 + \lambda a) + B(y_0 + \lambda b) + C(z_0 + \lambda c) + D \\ &= (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + \lambda \langle n, v \rangle \end{aligned}$$
>
> *bulunur. $d \parallel \mathfrak{D}$ olduğundan Sonuç 14.1 ile $\langle n, v \rangle = 0$'dır ve bu ifade λ'dan bağımsız olarak $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$'ye eşittir. Uzaklık formülüne (Teorem 14.3) göre her noktanın uzaklığı bu sayının mutlak değerinin $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$'ye bölümüdür.*
> ■

Örnek 14.10 (Paralel bir doğrunun düzleme uzaklığı). Yalnızca paralel doğru örneğindeki (Örnek 14.4)

$$d : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}$$

doğrusu ile $\mathfrak{D} : 2x - y - z + 4 = 0$ düzlemi arasındaki uzaklığı bulalım.

> **Çözüm.**
> O örnekte $d \parallel \mathfrak{D}$ olduğunu ve $P_0 = (2, 1, 0)$ için sol tarafın 7 olduğunu görmüştük. Önerme 14.2 ile
>
> $$\ell = \frac{\mid 7 \mid}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$$
>
> bulunur. Denetim için d'nin başka bir noktasını, örneğin $\lambda = 1$'e karşılık gelen $(3, 0, 3)$'ü alalım: $2 \cdot 3 - 0 - 3 + 4 = 7$ olur ve aynı uzaklık çıkar.
> ■

14.4 Paralel İki Düzlem Arasındaki Uzaklık

İki paralel düzlem, iki paralel doğru gibi, her yerde "aynı açıklıkla" birbirinden ayrılır. Bu açıklığı bir noktanın düzleme uzaklığıyla ölçeceğiz. Paralel düzlemlerin normalleri paraleldir (İki Düzlem ve Düzlemin İrdelenmesi); denklemlerden birini uygun bir sayıyla çarparak iki düzlemin denklemini

$$\mathfrak{D}_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0, \qquad \mathfrak{D}_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

biçiminde, yani x, y, z'nin katsayıları aynı olacak şekilde yazabiliriz.

Tanım 14.7 (Paralel iki düzlem arasındaki uzaklık). $\mathfrak{D}_1 \parallel \mathfrak{D}_2$ olsun. Düzlemlerden biri üzerinde alınan bir noktanın öteki düzleme uzaklığına $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$ **arasındaki uzaklık** denir.

Yani iki düzlem arasındaki uzaklık, birinden ötekine inen herhangi bir dikmenin uzunluğudur. Bu uzunluğun noktanın seçimine bağlı olmadığı aşağıdaki teoremden çıkar.

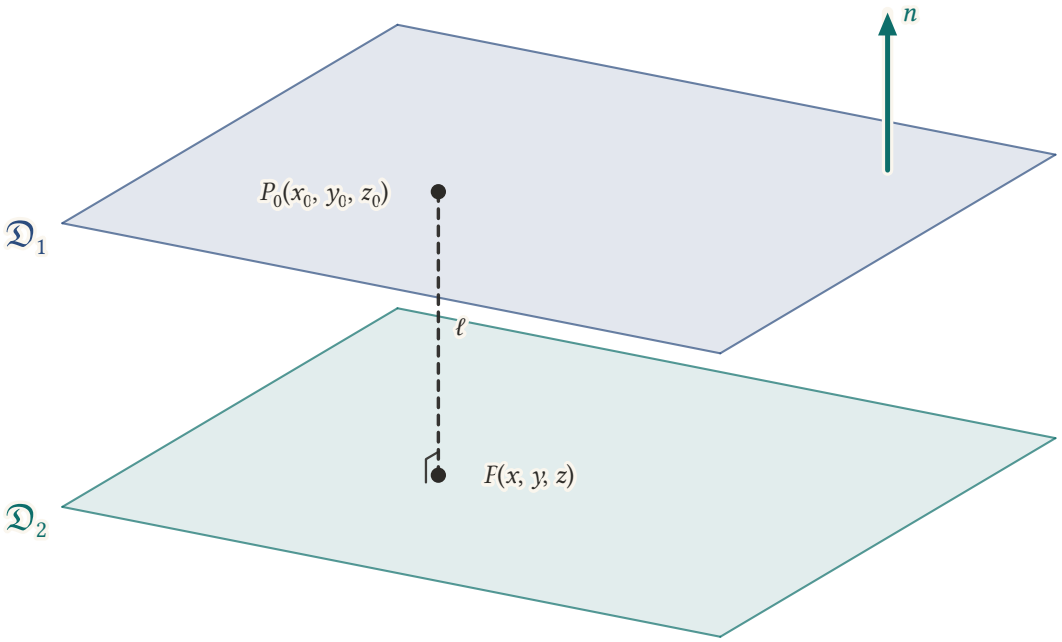
Teorem 14.4 (Paralel iki düzlem arasındaki uzaklık formülü). *$\mathfrak{D}_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$ ile $\mathfrak{D}_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$ paralel düzlemleri arasındaki uzaklık*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\ell = \frac{\mid D_2 - D_1 \mid}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

dir.

İspat.
$P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\mathfrak{D}_1$ üzerinde herhangi bir nokta ve $P(x, y, z)$, P_0'dan $\mathfrak{D}_2$'ye inen dikmenin ayağı olsun.



Şekil 14.11: Paralel iki düzlemin normali ortaktır: ikisi de aynı n *vektörüne diktir. Üstteki düzlemin* P_o *noktasından alttaki düzleme inen dikmenin uzunluğu* ℓ*, iki düzlem arasındaki uzaklıktır.*

Tanım 14.7 ve Teorem 14.3 ile

$$\ell = \mid P_0P \mid = \frac{\mid Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2 \mid}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

dir. $P_0 \in \mathfrak{D}_1$ olduğundan $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_1 = 0$, yani

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D_1$$

dir. Bunu paya yazarsak

$$\ell = \frac{\mid -D_1 + D_2 \mid}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\mid D_2 - D_1 \mid}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

elde edilir. Sonuç P_0'ın koordinatlarını içermediğinden uzaklık noktanın seçimine bağlı değildir. Aynı hesap $\mathfrak{D}_2$ üzerinden bir nokta alınarak yapılsa $\mid D_1 - D_2 \mid$ bulunurdu; bu da aynı sayıdır.
■

Yani iki paralel düzlemin denklemleri aynı A, B, C katsayılarıyla yazıldığında aralarındaki uzaklık, sabit terimlerin farkının normalin uzunluğuna bölümüdür. Çakışık düzlemlerde $D_1 = D_2$ olur ve formül beklendiği gibi 0 verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

⚠ Önce katsayıları eşitleyin

Formül yalnız iki denklemde x, y, z'nin katsayıları **aynı** iken geçerlidir. Örneğin $x+y+z-1=0$ ile $2x+2y+2z-1=0$ paraleldir, ama sabit terimleri doğrudan çıkarmak yanlış sonuç verir; önce ikinci denklem 2'ye bölünerek $x+y+z-\tfrac{1}{2}=0$ biçimine getirilmelidir. Denklem $Ax+By+Cz=k$ biçiminde verildiyse sabit terim $D=-k$'dır.

Örnek 14.11 (Paralel iki düzlem arasındaki uzaklık). $\mathfrak{D}_1: 2x+6y-3z+35=0$ ile $\mathfrak{D}_2: 2x+6y-3z-7=0$ paralel düzlemleri arasındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm.
İki denklemde katsayılar aynıdır: $A=2$, $B=6$, $C=-3$ ve $D_1=35$, $D_2=-7$. Teorem 14.4 ile

$$\ell=\frac{|\,-7-35\,|}{\sqrt{2^2+6^2+(-3)^2}}=\frac{42}{\sqrt{49}}=\frac{42}{7}=6$$

bulunur.
■

Örnek 14.12 (Katsayıları farklı yazılmış paralel düzlemler). $\mathfrak{D}_1: x-2y+2z-1=0$ ile $\mathfrak{D}_2: 2x-4y+4z+7=0$ düzlemlerinin paralel olduğunu gösterelim ve aralarındaki uzaklığı bulalım.

Çözüm.
Adım 1: Paralellik. Normaller $n_1=(1,-2,2)$ ve $n_2=(2,-4,4)=2\,n_1$'dir; $n_1 \parallel n_2$ olduğundan düzlemler paraleldir. $\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}=\frac{2}{4}\neq\frac{-1}{7}$ olduğundan çakışık değildirler.
Adım 2: Katsayıları eşitleme. $\mathfrak{D}_2$'nin denklemini 2'ye bölersek

$$\mathfrak{D}_2: x-2y+2z+\frac{7}{2}=0$$

olur. Artık $A=1$, $B=-2$, $C=2$, $D_1=-1$ ve $D_2=\frac{7}{2}$'dir.
Adım 3: Uzaklık.

$$\ell=\frac{\left|\frac{7}{2}-(-1)\right|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{\frac{9}{2}}{3}=\frac{3}{2}.$$

Katsayıları eşitlemeden sabit terimleri çıkarsaydık $\frac{|\,7-(-1)\,|}{3}=\frac{8}{3}$ gibi yanlış bir sonuç bulurduk.
■

14.5 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorular bir noktanın düzleme uzaklığını, iki düzlem arasındaki açıyı ve uzaklığı ve iki düzlemin arakesitini içeren bir düzlemin kurulmasını çalıştırır. Her sorunun çözümü kendi kutusunun içindedir.

Alıştırma 14.1 (Noktanın düzleme uzaklığı: $P_0(-2,2,3)$). $P_0(-2,2,3)$ noktası ile $\mathfrak{D}: 2x+y-2z-12=0$ düzlemi arasındaki dik uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
Uzaklık formülünü (Teorem 14.3) $A=2$, $B=1$, $C=-2$, $D=-12$ ile uygulayalım.
Adım 1: Pay.

$$2\cdot(-2)+1\cdot 2-2\cdot 3-12=-4+2-6-12=-20.$$

Adım 2: Payda. $\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$.
Adım 3: Uzaklık.

$$\ell=\frac{|\,-20\,|}{3}=\frac{20}{3}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 14.2 (Noktanın düzleme uzaklığı: P₀(7, 3, 4)). $P_0(7,3,4)$ noktası ile $\mathfrak{D}: 6x-3y+2z-13=0$ düzlemi arasındaki dik uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
Uzaklık formülünü (Teorem 14.3) $A=6$, $B=-3$, $C=2$, $D=-13$ ile uygulayalım.
Adım 1: Pay.

$$6\cdot 7-3\cdot 3+2\cdot 4-13=42-9+8-13=28.$$

Adım 2: Payda. $\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{49}=7$.
Adım 3: Uzaklık.

$$\ell=\frac{\mid 28\mid}{7}=4.$$

■

Alıştırma 14.3 (İki düzlem arasındaki açı). $\mathfrak{D}_1: 2x-y+z-7=0$ ile $\mathfrak{D}_2: x+y+2z-11=0$ düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm.
İki düzlem arasındaki açı, normalleri arasındaki açıdır (İki Düzlem ve Düzlemin İrdelenmesi).
Adım 1: Normaller. $n_1=(2,-1,1)$ ve $n_2=(1,1,2)$'dir.
Adım 2: İç çarpım ve uzunluklar.

$$\langle n_1,n_2\rangle=2\cdot 1+(-1)\cdot 1+1\cdot 2=3,$$

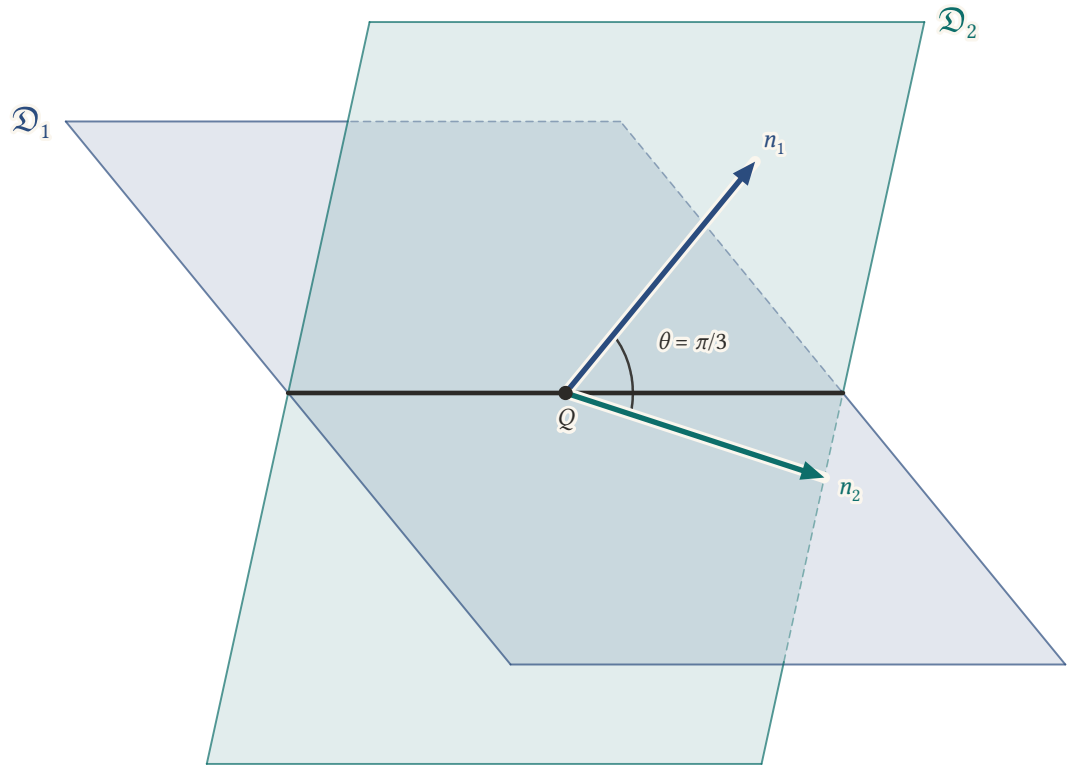
$$\parallel n_1\parallel=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6},\qquad \parallel n_2\parallel=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}.$$

Adım 3: Açı. Teorem 8.2 ile

$$\cos\theta=\frac{\langle n_1,n_2\rangle}{\parallel n_1\parallel\,\parallel n_2\parallel}=\frac{3}{\sqrt{6}\,\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

olur ve $0\le\theta\le\pi$ olduğundan $\theta=\frac{\pi}{3}$ bulunur. $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}_2$ arasındaki açı $\frac{\pi}{3}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.12: İki düzlem arakesit doğrusu boyunca kesişir. Arakesit üzerindeki $Q(6,\,5,\,0)$ noktasından çizilen $n_1 = (2,\,-1,\,1)$ ve $n_2 = (1,\,1,\,2)$ normalleri arasındaki açı $\theta = \pi/3$'tür; düzlemler arasındaki açı da budur.

■

Alıştırma 14.4 (Paralel düzlemler: 2x − 3y − 6z − 14 = 0). $\mathfrak{D}_1 : 2x - 3y - 6z - 14 = 0$ ile $\mathfrak{D}_2 : 2x - 3y - 6z + 7 = 0$ düzlemleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Paralellik. İki denklemde x, y, z'nin katsayıları aynıdır; normaller eşit olduğundan düzlemler paraleldir, sabit terimler farklı olduğundan çakışık değildir.
Adım 2: Formül. $A = 2,\ B = -3,\ C = -6,\ D_1 = -14,\ D_2 = 7$ ile paralel düzlemler arasındaki uzaklık formülünden (Teorem 14.4)

$$\ell = \frac{|\,7 - (-14)\,|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-6)^2}} = \frac{21}{\sqrt{49}} = \frac{21}{7} = 3$$

bulunur.
■

Alıştırma 14.5 (Paralel düzlemler: 3x + 6y + 2z = 22). $\mathfrak{D}_1 : 3x + 6y + 2z = 22$ ile $\mathfrak{D}_2 : 3x + 6y + 2z = 27$ düzlemleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Genel biçim. Denklemleri $Ax + By + Cz + D = 0$ biçimine getirelim:

$$\mathfrak{D}_1 : 3x + 6y + 2z - 22 = 0, \qquad \mathfrak{D}_2 : 3x + 6y + 2z - 27 = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Katsayılar aynı olduğundan düzlemler paraleldir ve $D_1 = -22$, $D_2 = -27$'dir.
Adım 2: Formül. $\sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$ olduğundan Teorem 14.4 ile

$$\ell = \frac{|\,-27 - (-22)\,|}{7} = \frac{|\,-5\,|}{7} = \frac{5}{7}$$

bulunur.
■

Alıştırma 14.6 (Arakesit doğrusundan ve bir noktadan geçen düzlem). $\mathfrak{D}_1 : 2x - 7y + 4z - 3 = 0$ ile $\mathfrak{D}_2 : 3x - 5y + 4z + 11 = 0$ düzlemlerinin arakesit doğrusundan ve $P_0(-2, 1, 3)$ noktasından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: Arakesit doğrusu. Normaller $n_1 = (2, -7, 4)$ ve $n_2 = (3, -5, 4)$ paralel olmadığından ($\frac{2}{3} \neq \frac{-7}{-5}$) düzlemler bir doğru boyunca kesişir. Bu doğruyu İki Düzlem ve Düzlemin İrdelenmesi bölümündeki gibi değişkenleri yok ederek bulalım.
İkinci denklemden birincisini çıkarırsak z yok olur:

$$(3x - 5y + 4z + 11) - (2x - 7y + 4z - 3) = x + 2y + 14 = 0,$$

yani $x = -2y - 14$, başka bir deyişle $y = \dfrac{x + 14}{-2}$ olur.
Birinci denklemin 3 katından ikincinin 2 katını çıkarırsak x yok olur:

$$\begin{aligned}&(6x - 21y + 12z - 9) - (6x - 10y + 8z + 22)\\ &\quad = -11y + 4z - 31 = 0,\end{aligned}$$

yani $y = \dfrac{4z - 31}{11}$ olur. İki sonucu birleştirirsek arakesit doğrusu

$$d : \frac{x + 14}{-2} = y = \frac{4z - 31}{11}$$

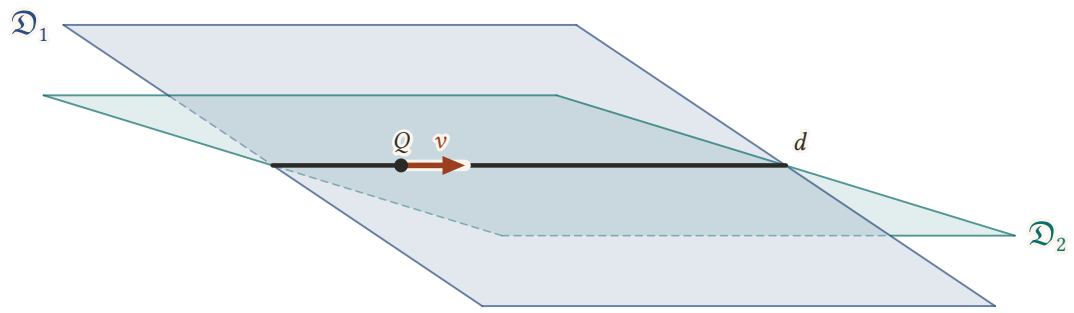
bulunur. Son kesri $\dfrac{4z - 31}{11} = \dfrac{z - \frac{31}{4}}{\frac{11}{4}}$ biçiminde yazarsak d'nin $Q\big(-14, 0, \frac{31}{4}\big)$ noktasından geçtiği ve doğrultman vektörünün $v = \big(-2, 1, \frac{11}{4}\big)$ olduğu görülür.
Adım 2: Denetim. Q iki düzlemin de denklemini sağlar:

$$2(-14) - 0 + 4 \cdot \frac{31}{4} - 3 = -28 + 31 - 3 = 0,$$

$$3(-14) - 0 + 4 \cdot \frac{31}{4} + 11 = -42 + 31 + 11 = 0.$$

Ayrıca $4v = (-8, 4, 11)$ iki normale de diktir: $\langle n_1, 4v\rangle = -16 - 28 + 44 = 0$ ve $\langle n_2, 4v\rangle = -24 - 20 + 44 = 0$.
Adım 3: P_0 doğru üzerinde değil. P_0'ı $\mathfrak{D}_1$'de yerine yazarsak $2(-2) - 7 + 12 - 3 = -2 \neq 0$ olur; $P_0 \notin \mathfrak{D}_1$, dolayısıyla $P_0 \notin d$'dir. Bir doğru ile onun dışındaki bir noktadan tek bir düzlem geçer.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 14.13: İki düzlem d doğrusu boyunca kesişir; d, $Q(-14, 0, 31/4)$ noktasından geçer ve doğrultman vektörü $v = (-2, 1, 11/4)$'tür. Düzlemler arasındaki açı küçük olduğundan yamalar birbirine yakın durur.

Adım 4: Aranan düzlemin koşulları. Aranan düzlem $\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ olsun. $d \subset \mathfrak{D}$ olduğundan Sonuç 14.1 gereği $n = (A, B, C)$, v'ye diktir:

$$\left\langle (A, B, C), \left(-2, 1, \frac{11}{4}\right) \right\rangle = 0 \Leftrightarrow -8A + 4B + 11C = 0. \tag{2}$$

$P_0 \in \mathfrak{D}$ olduğundan

$$-2A + B + 3C + D = 0 \tag{3}$$

ve $Q \in \mathfrak{D}$ olduğundan

$$-14A + \frac{31}{4}C + D = 0 \tag{4}$$

dır.

Adım 5: Denklem sistemini çözmek. (3)'ü 4 ile çarpıp (2)'yi çıkaralım:

$$(-8A + 4B + 12C + 4D) - (-8A + 4B + 11C) = C + 4D = 0,$$

yani $D = -\frac{C}{4}$'tür. Bunu (4)'te yerine yazarsak

$$-14A + \frac{31}{4}C - \frac{1}{4}C = 0 \Leftrightarrow -14A + \frac{30}{4}C = 0 \Leftrightarrow A = \frac{15}{28}C$$

bulunur. Düzlemin denklemi sıfırdan farklı bir sayıyla çarpılınca değişmediğinden $C = 28$ seçebiliriz. O zaman $A = 15$, $D = -7$ olur ve (2)'den

$$4B = 8A - 11C = 120 - 308 = -188 \Longrightarrow B = -47$$

elde edilir. Aranan düzlem

$$\mathfrak{D} : 15x - 47y + 28z - 7 = 0$$

dır.

Adım 6: Kontrol. P_0 ve Q düzlemin denklemini sağlar ve $4v$ normale diktir:

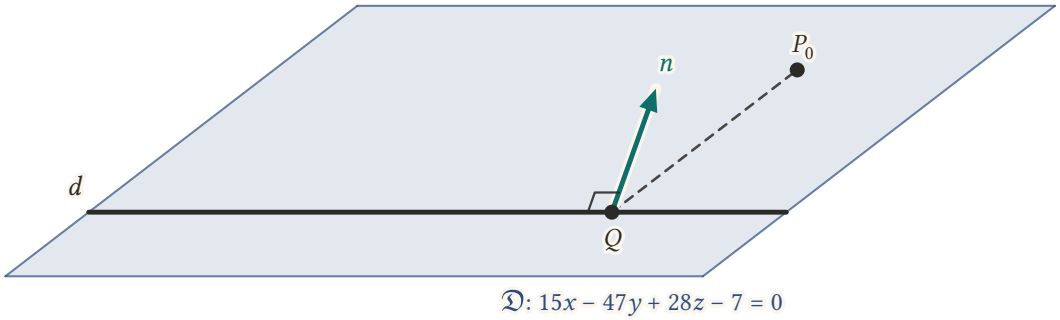
$$\begin{aligned} P_0 &: 15(-2) - 47 \cdot 1 + 28 \cdot 3 - 7 = -30 - 47 + 84 - 7 = 0, \\ Q &: 15(-14) + 28 \cdot \frac{31}{4} - 7 = -210 + 217 - 7 = 0, \\ &\langle (15, -47, 28), (-8, 4, 11) \rangle = -120 - 188 + 308 = 0. \end{aligned}$$

Son eşitlikten d düzleme paraleldir ve Q düzlemde olduğundan ortak nokta teoreminin (Teorem 14.1) ii) şıkkı gereği d düzlemin üzerindedir.
Aynı normali vektörel çarpımla da bulabiliriz: $\overrightarrow{QP_0} = \left(12, 1, -\frac{19}{4}\right)$ ve $4\overrightarrow{QP_0} = (48, 4, -19)$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(-8, 4, 11) \times (48, 4, -19) = (-120, 376, -224) = -8\,(15, -47, 28)$$

bulunur; bu vektör hem v'ye hem $\overrightarrow{QP_0}$'a diktir ve yukarıdaki normalle paraleldir.



Şekil 14.14: Aranan düzlem d arakesit doğrusunu ve onun dışındaki $P_0(-2, 1, 3)$ noktasını içerir; Q'dan geçen d ile QP_0 doğrultusu düzlemi gerer. Q'dan çizilen ok, normal $n = (15, -47, 28)$ doğrultusundadır ve d'ye diktir.

■

Bu bölümde bir doğru ile bir düzlemin kesişme, paralellik, düzlemde yatma ve diklik durumlarını $\langle n, v\rangle$ iç çarpımıyla ayırt ettik, aralarındaki açıyı bulduk ve bir noktanın düzleme, paralel iki düzlemin birbirine uzaklığını hesapladık. Sıradaki bölümde, Uzayda Simetri bölümünde, bu araçları bir noktanın bir doğruya ve bir düzleme göre simetriğini bulmak için kullanacağız; dikmenin ayağı orada da anahtar rol oynayacak.

 CC BY-NC-SA 4.0

15. Uzayda Simetri

Aynaya baktığımızda gördüğümüz görüntü, aynanın öbür tarafında ve aynaya bizimle aynı uzaklıkta durur. Ayna ile aramızdaki en kısa yol aynaya diktir; görüntüye giden yol da bu dikmenin devamıdır. Uzayda simetri bu gözlemin matematiksel hâlidir. Bu bölümde iki tür "ayna" kullanacağız: bir doğru ve bir düzlem.
İki durumda da yöntem aynıdır. Noktadan aynaya bir dikme indiririz; dikmenin ayağı K olsun. Simetrik nokta, bu dikmenin uzantısı üzerinde, K'nın öbür yanında ve K'ya aynı uzaklıktadır. Başka bir deyişle K, nokta ile simetriğini birleştiren doğru parçasının orta noktasıdır. Formüllerin hepsi bu iki koşuldan çıkacak: "K aynanın üzerindedir" ve "nokta ile simetriğini birleştiren doğru aynaya diktir".

15.1 Doğruya Göre Simetri

Önce aynamız bir doğru olsun. d doğrusu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçsin ve doğrultman vektörü $v = (a, b, c) \neq 0$ olsun. Doğrunun noktaları, λ bütün reel sayıları dolaşırken

$$d: \quad x = x_0 + \lambda a, \qquad y = y_0 + \lambda b, \qquad z = z_0 + \lambda c$$

parametrik denklemleriyle verilir. a, b, c sıfırdan farklıysa aynı doğru

$$d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \lambda$$

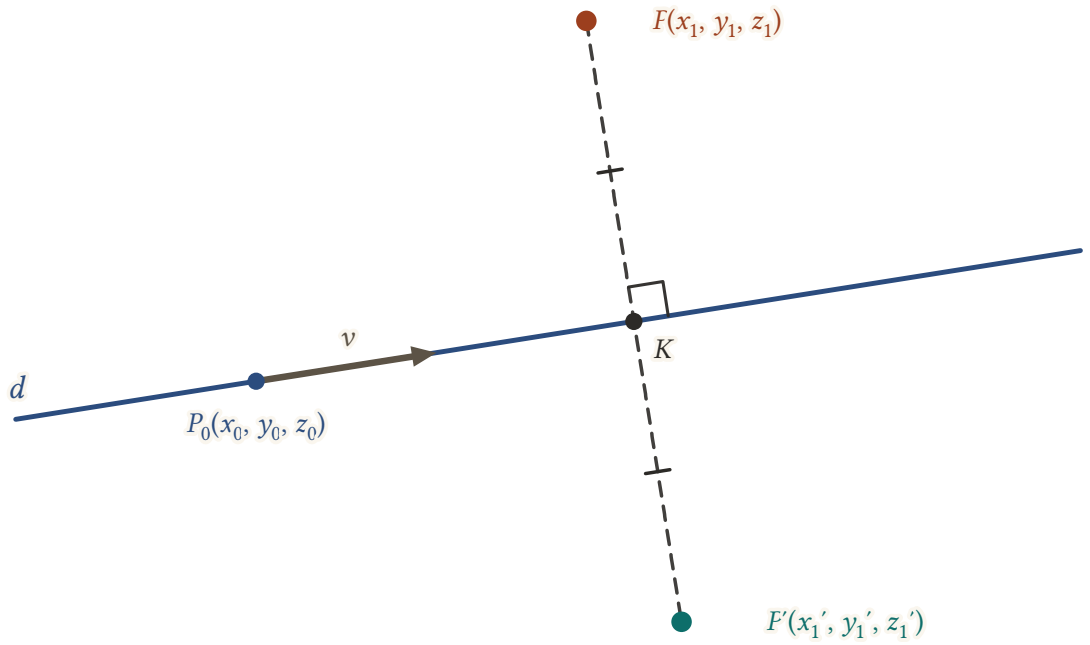
kartezyen biçiminde de yazılır (doğru denklemleri için bkz. Uzayda Doğru Denklemleri).
$P(x_1, y_1, z_1)$ bir nokta olsun. P'den d'ye inilen dikmenin d'yi kestiği nokta, yani dikmenin ayağı K olsun; $P \in d$ ise $K = P$ alınır. Böyle bir K noktası vardır ve tektir: $\overrightarrow{P_0P}$ vektörünü P_0'dan çizdiğimizde, $\overrightarrow{P_0K}$ tam olarak bu vektörün v üzerine dik izdüşümüdür (Tanım 8.4).

Tanım 15.1 (Bir noktanın bir doğruya göre simetriği). $P \notin d$ olsun ve K, P'den d doğrusuna inilen dikmenin ayağı olsun. PK doğrusu üzerinde bulunan, K'nın öbür yanında kalan ve

$$|\, PK \,| = |\, P'K \,|$$

koşulunu sağlayan P' noktasına P noktasının d **doğrusuna göre simetriği** denir. $P \in d$ ise P'nin simetriği kendisidir: $P' = P$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.1: P noktasının d doğrusuna göre simetriği P': P'den d'ye inilen dikmenin ayağı K'dır ve P' bu dikmenin uzantısında, K'nın öbür yanında durur. Çentikler $|PK| = |KP'|$ eşitliğini gösterir; d, P_0 noktasından geçer ve doğrultman vektörü v'dir.

Yani d doğrusu bir eksen gibi davranır: P'den d'ye dik olarak gidip aynı uzaklık kadar devam edince P''ye varırız. K, PP' doğru parçasının orta noktasıdır ve PP' doğrusu d'ye diktir. Bu iki koşul simetrik noktayı tamamen belirler.
Orta noktanın koordinatlarını düzlemde biliyoruz (Sonuç 2.1). Uzayda da aynı formül geçerlidir.

Lemma 15.1 (Uzayda orta nokta). *Uç noktaları $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ve $P_2(x_2, y_2, z_2)$ olan doğru parçasının orta noktası*

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

noktasıdır.

> ***İspat.***
> *M'nin koordinatlarından P_1'inkileri çıkarırsak*
>
> $$\overrightarrow{P_1M} = \left(\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{y_2 - y_1}{2}, \frac{z_2 - z_1}{2}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}$$
>
> *buluruz. Aynı biçimde P_2'nin koordinatlarından M'ninkileri çıkarırsak $\overrightarrow{MP_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2}$ olur. Demek ki $\overrightarrow{P_1M}$ ile $\overrightarrow{MP_2}$ aynı vektördür: ikisi de $\overrightarrow{P_1P_2}$ ile aynı yönlüdür ve onun yarısı uzunluğundadır. Buna göre M, P_1'den P_2'ye giden doğru parçasının üzerindedir ve*
>
> $$|\ P_1M\ | = |\ MP_2\ | = \frac{1}{2}|\ P_1P_2\ |$$
>
> *olur. Doğru parçası üzerinde P_1'e uzaklığı $\frac{1}{2}\ |\ P_1P_2\ |$ olan tek bir nokta bulunduğundan orta nokta M'dir.*
> ■

Artık simetrik noktanın koordinatlarını hesaplayabiliriz.

Teorem 15.1 (Doğruya göre simetri formülü). *d doğrusu $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçsin ve doğrultman vektörü $v = (a, b, c) \neq 0$ olsun. $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının d'ye göre simetriği $P'(x_1', y_1', z_1')$ ise*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\lambda = \frac{a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 2(x_0 + \lambda a), \\ y_1' &= -y_1 + 2(y_0 + \lambda b), \\ z_1' &= -z_1 + 2(z_0 + \lambda c) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca dikmenin ayağı $K(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$ *noktasıdır.*

İspat.
Önce $P \notin d$ *olsun ve* P'*,* P*'nin simetriği olsun.* K *noktası* PP' *doğru parçasının orta noktası olduğundan Lemma 15.1 gereğince*

$$K\left(\frac{x_1 + x_1'}{2}, \frac{y_1 + y_1'}{2}, \frac{z_1 + z_1'}{2}\right) \tag{1}$$

olur. K *noktası* d *üzerindedir; öyleyse parametrik denklemleri sağlayan bir* λ *sayısı vardır:*

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_1'}{2} &= x_0 + \lambda a, \\ \frac{y_1 + y_1'}{2} &= y_0 + \lambda b, \\ \frac{z_1 + z_1'}{2} &= z_0 + \lambda c. \end{aligned} \tag{2}$$

Bu eşitliklerin her birini 2 *ile çarpıp* x_1, y_1, z_1*'i karşı tarafa atarsak*

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 2(x_0 + \lambda a), \\ y_1' &= -y_1 + 2(y_0 + \lambda b), \\ z_1' &= -z_1 + 2(z_0 + \lambda c). \end{aligned} \tag{3}$$

elde ederiz. Geriye λ*'yı bulmak kalıyor.* PP' *doğrusu* d*'ye dik olduğundan* $\overrightarrow{PP'} \perp v$*, yani* $\langle \overrightarrow{PP'}, v \rangle = 0$ *olur (Önerme 8.2). Koordinatlarla*

$$a(x_1' - x_1) + b(y_1' - y_1) + c(z_1' - z_1) = 0. \tag{4}$$

(3)'ten $x_1' - x_1 = -2(x_1 - x_0) + 2\lambda a$ *ve benzer biçimde* $y_1' - y_1 = -2(y_1 - y_0) + 2\lambda b$*,* $z_1' - z_1 = -2(z_1 - z_0) + 2\lambda c$ *gelir. Bunları (4)'te yerine yazalım:*

$$\begin{aligned} -2a(x_1 - x_0) + 2\lambda a^2 - 2b(y_1 - y_0) + 2\lambda b^2 \\ -2c(z_1 - z_0) + 2\lambda c^2 = 0. \end{aligned}$$

λ *içeren terimleri bir yanda toplarsak*

$$2\lambda\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 2a(x_1 - x_0) + 2b(y_1 - y_0) + 2c(z_1 - z_0)$$

olur. $v \neq 0$ *olduğundan* $a^2 + b^2 + c^2 > 0$*'dır; iki yanı* $2(a^2 + b^2 + c^2)$ *sayısına bölünce* λ *için verilen formül çıkar. Bu* λ *ile (3) teoremdeki eşitliklerdir, (2) de* K*'nın koordinatlarını verir.*
Tersine, λ *formüldeki gibi tanımlansın;* K *ve* P' *noktaları da teoremdeki koordinatlarla alınsın.* K*, parametre değeri* λ *olan nokta olduğundan* d *üzerindedir. (3) eşitlikleri (2) ile denk olduğundan* K*,* PP'*'nün orta noktasıdır. Yukarıdaki hesap geriye doğru okunursa (4) sağlanır, yani* $\overrightarrow{PP'} \perp v$ *olur.* $P \notin d$ *ise* $P \neq K$*'dır ve* PK *doğrusu* d*'ye* K*'da dik iner; demek ki* K *dikmenin ayağıdır.* P' *bu dikme üzerinde,* K*'nın öbür yanında ve* $|\,P'K\,| = |\,PK\,|$ *uzaklığındadır. Dolayısıyla* P'*,* P*'nin simetriğidir.*
Son olarak $P \in d$ *olsun. Bu durumda bir* t *için* $x_1 - x_0 = ta$*,* $y_1 - y_0 = tb$*,* $z_1 - z_0 = tc$ *olur ve formül*

$$\lambda = \frac{t(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = t$$

 CC BY-NC-SA 4.0

verir. O zaman $K = P$ ve $x_1' = -x_1 + 2x_1 = x_1$ olur; aynı biçimde $y_1' = y_1$, $z_1' = z_1$ bulunur. Formül bu durumda da doğru sonucu, $P' = P$'yi verir.
■

Formüldeki λ sayısı tanıdıktır: dik izdüşüm formülündeki katsayıdır (Teorem 8.3). Gerçekten $\lambda = \dfrac{\langle \overrightarrow{P_0P}, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$ olduğundan $\lambda v = \mathrm{izd}_v(\overrightarrow{P_0P})$ olur. Yani K'ya varmak için P_0'dan başlayıp $\overrightarrow{P_0P}$'nin v üzerindeki izdüşümü kadar ilerliyoruz. P' ise K'nın P'ye göre "iki katı" konumdur: her koordinatta $x_1' = 2\cdot(K$ 'nın apsisi$) - x_1$.

Bir noktanın doğruya göre simetriğini üç adımda bulmak

1. Doğrunun denkleminden bir $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktası ve bir $v = (a, b, c)$ doğrultman vektörü oku.
2. $\lambda = \dfrac{\langle \overrightarrow{P_0P}, v\rangle}{a^2 + b^2 + c^2}$ sayısını hesapla ve dikmenin ayağını $K(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$ olarak yaz.
3. P''nün her koordinatını "K'nın koordinatının iki katı eksi P'nin koordinatı" olarak bul. İstersen $\langle \overrightarrow{PP'}, v\rangle = 0$ olduğunu sınayarak sonucu denetle.

Örnek 15.1 (Bir noktanın kartezyen denklemi verilen doğruya göre simetriği). $P(3, 4, -2)$ noktasının

$$d : \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{1}$$

doğrusuna göre simetriğini bulunuz.

Çözüm.
Doğrudan okunanlar. Paydalar doğrultman vektörünü, paylardaki sabitler de doğrunun bir noktasını verir: $v = (2, 4, 1)$ ve $P_0(0, 0, 2) \in d$. Ayrıca $x_1 = 3$, $y_1 = 4$, $z_1 = -2$'dir.
λ sayısı. Doğruya göre simetri formülüyle (Teorem 15.1)

$$\lambda = \frac{2(3-0) + 4(4-0) + 1(-2-2)}{2^2 + 4^2 + 1^2} = \frac{6 + 16 - 4}{21} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$$

bulunur. Dikmenin ayağı

$$K\left(0 + \frac{6}{7}\cdot 2, 0 + \frac{6}{7}\cdot 4, 2 + \frac{6}{7}\cdot 1\right) = K\left(\frac{12}{7}, \frac{24}{7}, \frac{20}{7}\right)$$

noktasıdır.
Simetrik nokta. P'nin simetriği $P'(x_1', y_1', z_1')$ olsun. Teoremdeki eşitliklerle

$$x_1' = -3 + 2\left(0 + \frac{6}{7}\cdot 2\right) = -3 + \frac{24}{7} = \frac{3}{7},$$
$$y_1' = -4 + 2\left(0 + \frac{6}{7}\cdot 4\right) = -4 + \frac{48}{7} = \frac{20}{7},$$
$$z_1' = -(-2) + 2\left(2 + \frac{6}{7}\cdot 1\right) = 2 + \frac{40}{7} = \frac{54}{7}$$

bulunur. Demek ki $P'\left(\frac{3}{7}, \frac{20}{7}, \frac{54}{7}\right)$'dir.
Sağlama. P ile P''nün koordinat farkları

$$\overrightarrow{PP'} = \left(\frac{3}{7} - 3, \frac{20}{7} - 4, \frac{54}{7} + 2\right) = \frac{1}{7}(-18, -8, 68)$$

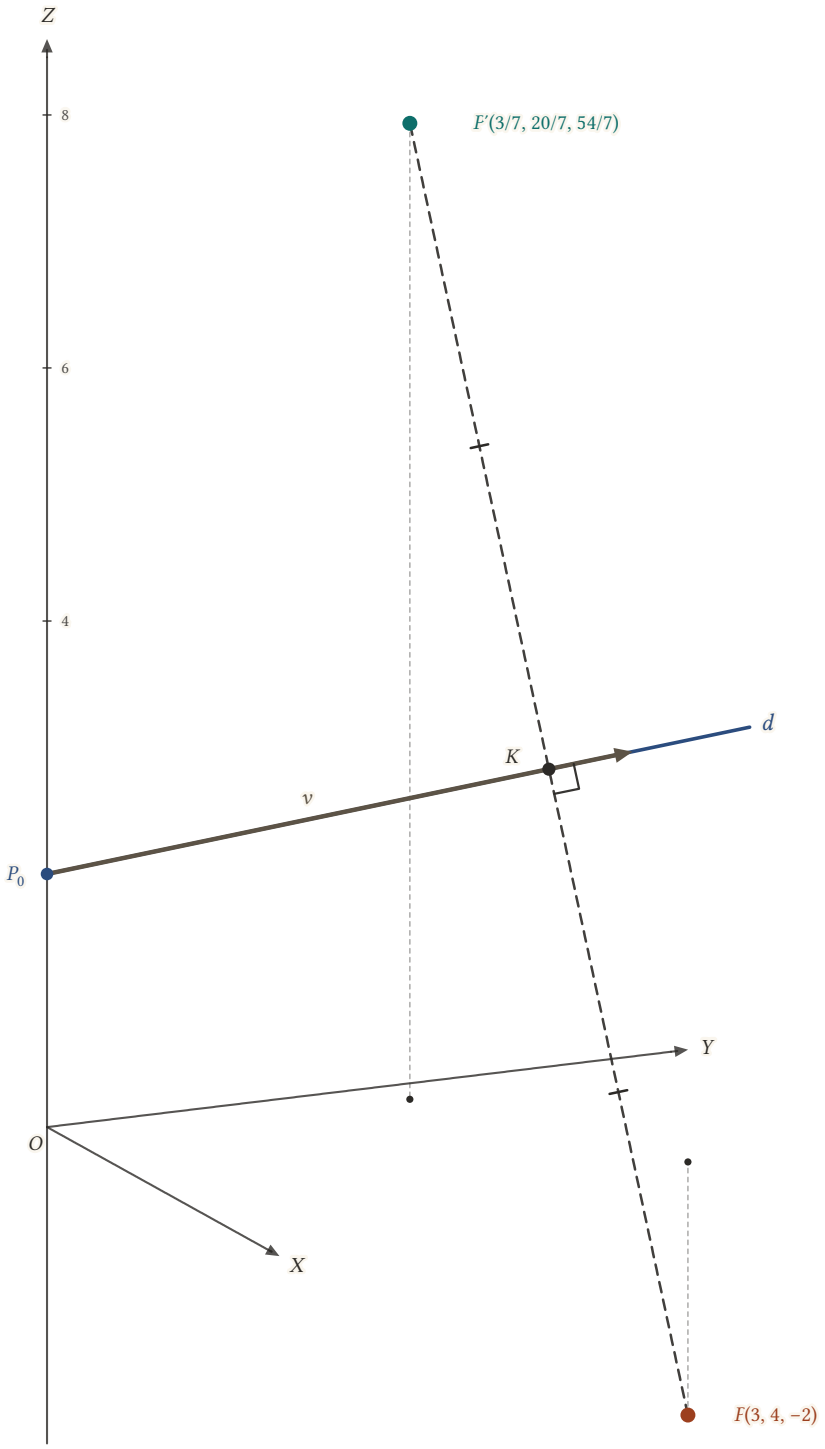
olur ve

$$\langle \overrightarrow{PP'}, v\rangle = \frac{1}{7}\left(\,(-18)\cdot 2 + (-8)\cdot 4 + 68\cdot 1\,\right) = \frac{1}{7}(-36 - 32 + 68) = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

çıkar; PP' gerçekten d'ye diktir. PP''nün orta noktası da K'dır:

$$\left(\frac{3+3/7}{2}, \frac{4+20/7}{2}, \frac{-2+54/7}{2}\right) = \left(\frac{12}{7}, \frac{24}{7}, \frac{20}{7}\right).$$



Şekil 15.2: $P(3, 4, -2)$ noktası, d: $x/2 = y/4 = z - 2$ doğrusu ve simetriği $P'(3/7, 20/7, 54/7)$. d, $P_0(0, 0, 2)$ noktasından $v = (2, 4, 1)$ doğrultusunda geçer; dikmenin ayağı $K(12/7, 24/7, 20/7)$, PP' parçasının orta noktasıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Doğru her zaman bütün paydaları sıfırdan farklı bir kartezyen denklemle verilmez. Parametrik denklemlerle çalışınca bu durum hiçbir güçlük çıkarmaz.

Örnek 15.2 (Bir koordinatı sabit olan doğruya göre simetri). $P(3,2,5)$ noktasının

$$d: \quad x = 1+\lambda, \qquad y = 1, \qquad z = 2+\lambda$$

doğrusuna göre simetriğini bulunuz.

Çözüm.
Doğrudan okunanlar. $\lambda = 0$ alınca $P_0(1,1,2) \in d$ bulunur; λ'nın katsayıları da $v = (1,0,1)$ doğrultman vektörünü verir. v'nin ikinci bileşeni 0'dır: doğru boyunca y değişmez.
λ sayısı. $\overrightarrow{P_0P} = (2,1,3)$ olduğundan

$$\lambda = \frac{1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 3}{1^2+0^2+1^2} = \frac{5}{2}$$

olur. Dikmenin ayağı

$$K\left(1+\frac{5}{2}, 1+\frac{5}{2}\cdot 0, 2+\frac{5}{2}\right) = K\left(\frac{7}{2}, 1, \frac{9}{2}\right)$$

noktasıdır.
Simetrik nokta. Her koordinat, K'nın koordinatının iki katı eksi P'ninkidir:

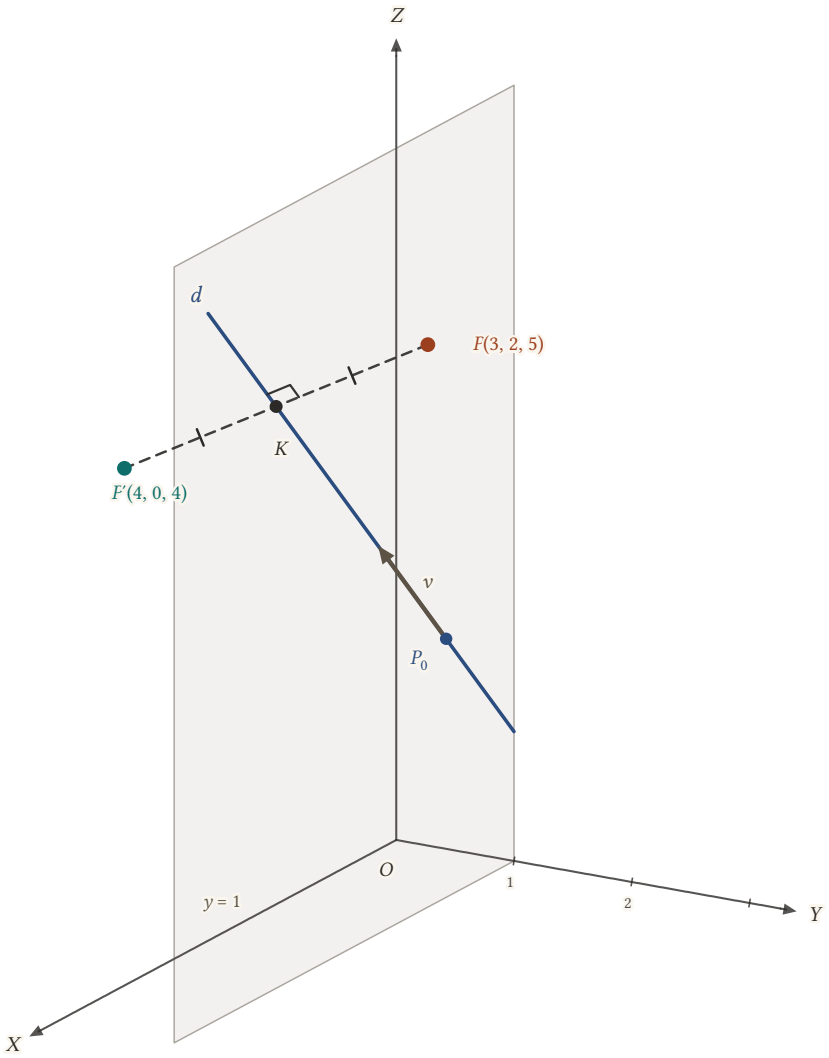
$$x_1' = 2\cdot\frac{7}{2} - 3 = 4, \qquad y_1' = 2\cdot 1 - 2 = 0, \qquad z_1' = 2\cdot\frac{9}{2} - 5 = 4.$$

Demek ki $P'(4,0,4)$'tür.
Sağlama. $\overrightarrow{PP'} = (1,-2,-1)$ ve $\langle \overrightarrow{PP'}, v\rangle = 1 - 0 - 1 = 0$'dır. Ayrıca $\overrightarrow{KP} = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ ve $\overrightarrow{KP'} = \left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$ olduğundan

$$|\,PK\,|^2 = |\,P'K\,|^2 = \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

bulunur; iki uzaklık da $\sqrt{3/2}$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.3: d: $x = 1 + \lambda$, $y = 1$, $z = 2 + \lambda$ doğrusu soluk çizilen $y = 1$ düzleminde kalır; P bu düzlemin önünde ($y = 2$), P' arkasındadır ($y = 0$). $P(3, 2, 5)$ noktasının simetriği $P'(4, 0, 4)$, dikmenin ayağı $K(7/2, 1, 9/2)$'dir.

■

Koordinat eksenleri de birer doğrudur ve onlara göre simetri çok sade bir biçim alır.

Sonuç 15.1 (Koordinat eksenlerine göre simetri). *$P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının*
i) X-eksenine göre simetriği $(x_1, -y_1, -z_1)$,
ii) Y-eksenine göre simetriği $(-x_1, y_1, -z_1)$,
iii) Z-eksenine göre simetriği $(-x_1, -y_1, z_1)$
noktasıdır. Yani eksene ait koordinat korunur, öbür iki koordinat işaret değiştirir.

İspat.
i) X-ekseni $O(0, 0, 0)$ noktasından geçer ve doğrultman vektörü $e_1 = (1, 0, 0)$'dır. Simetri formülünde (Teorem 15.1) $P_0 = O$ ve $v = e_1$ alınırsa

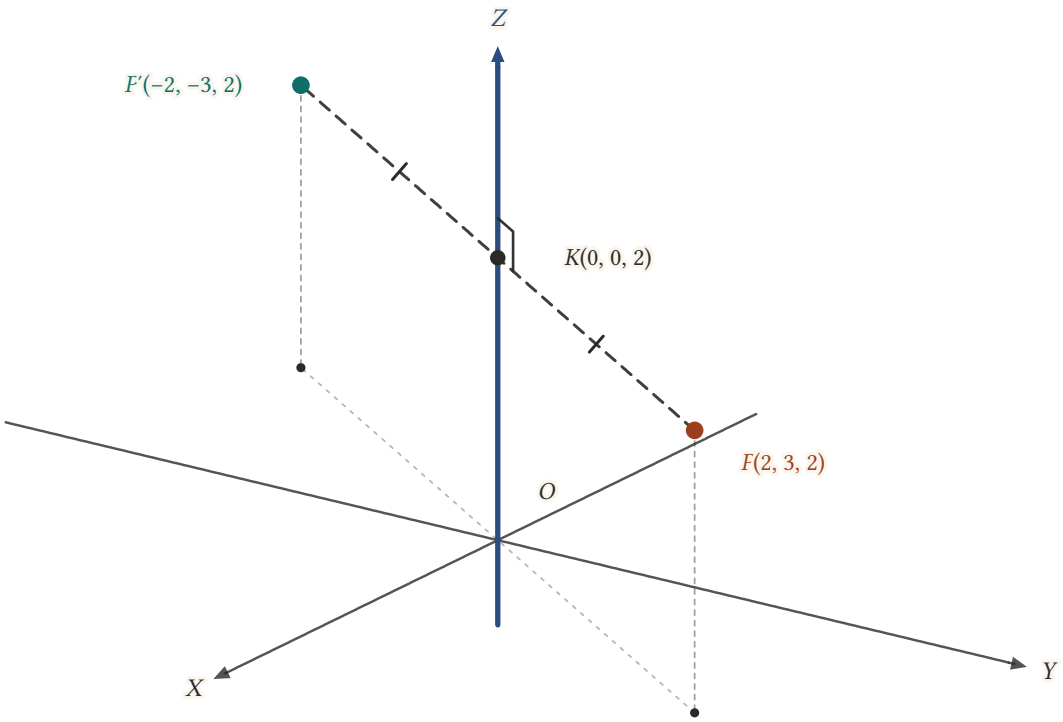
$$\lambda = \frac{1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot z_1}{1} = x_1$$

olur ve dikmenin ayağı $K(x_1, 0, 0)$'dır. Buna göre

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x_1' = -x_1 + 2x_1 = x_1,$$
$$y_1' = -y_1 + 2 \cdot 0 = -y_1,$$
$$z_1' = -z_1 + 2 \cdot 0 = -z_1$$

bulunur.
ii) $P_0 = O$ *ve* $v = e_2 = (0,1,0)$ *alınırsa* $\lambda = y_1$, $K(0, y_1, 0)$ *ve* $P'(-x_1, y_1, -z_1)$ *olur.*
iii) $P_0 = O$ *ve* $v = e_3 = (0,0,1)$ *alınırsa* $\lambda = z_1$, $K(0,0,z_1)$ *ve* $P'(-x_1, -y_1, z_1)$ *olur.*
Örneğin $P(2,3,2)$ *noktasının* Z*-eksenine göre simetriği* $P'(-2,-3,2)$*'dir ve dikmenin ayağı* $K(0,0,2)$*'dir.*



Şekil 15.4: P*(2, 3, 2) noktasının* Z*-eksenine göre simetriği* P′*(−2, −3, 2). Dikmenin ayağı* K*(0, 0, 2) eksenin üzerindedir;* PP′ *parçası* z *= 2 yüksekliğinde yataydır. Soluk kesikli çizgiler iki noktanın* XY*-düzlemine inen dikmeleridir.*

■

15.2 Düzleme Göre Simetri

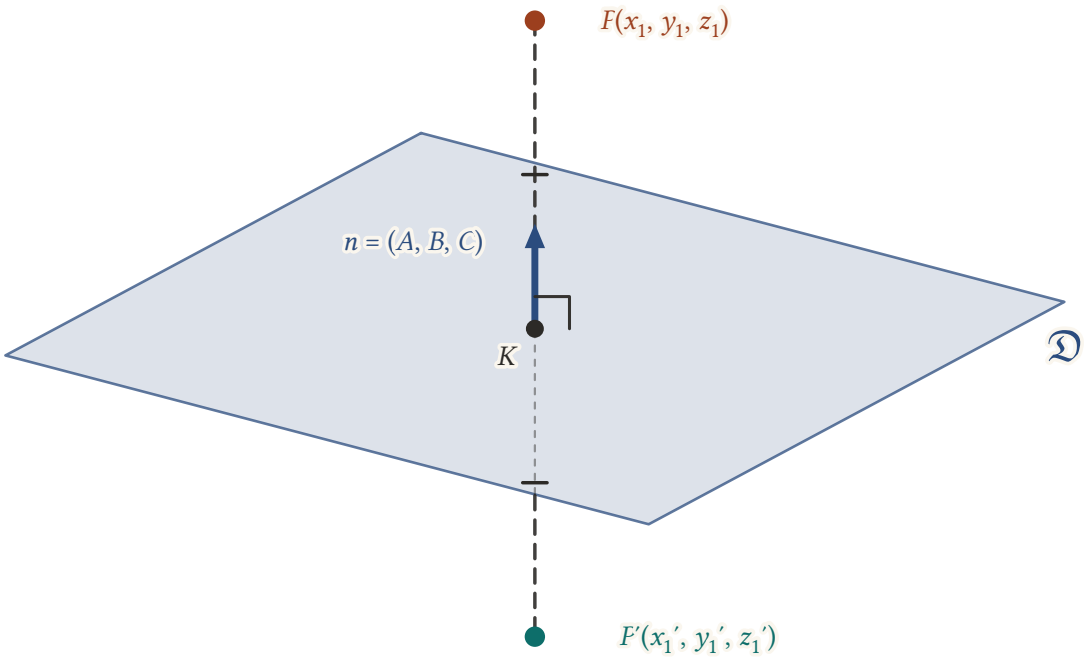
Şimdi aynamız bir düzlem olsun. $\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ düzleminin normal vektörü $n = (A, B, C) \neq 0$'dır; n'ye paralel her doğru düzleme diktir (bkz. Uzayda Düzlem Denklemleri). $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve n'ye paralel olan doğru, P'den $\mathfrak{D}$'ye inilen dikmedir; bu dikme düzlemi tek bir K noktasında keser.

Tanım 15.2 (Bir noktanın bir düzleme göre simetriği). $\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi verilsin ve $P(x_1, y_1, z_1) \notin \mathfrak{D}$ olsun. P'den $\mathfrak{D}$ düzlemine inilen dikmenin düzlemi kestiği nokta K olmak üzere, bu dikme üzerinde bulunan, K'nın öbür yanında kalan ve

$$| PK | = | KP' |$$

koşulunu sağlayan $P'(x_1', y_1', z_1')$ noktasına P'nin $\mathfrak{D}$ **düzlemine göre simetriği** denir. $P \in \mathfrak{D}$ ise P'nin simetriği kendisidir: $P' = P$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.5: P noktasının bir düzleme göre simetriği P': P'den düzleme inilen dikme düzlemi K'da keser ve normal vektör n'ye paraleldir; P' bu dikmenin düzlemin öbür yanında kalan kısmında, K'ya P kadar uzaktadır. Düzlemin arkasında kalan parça daha soluktur.

Yani $\mathfrak{D}$ düzlemi bir ayna gibidir: P', P'nin aynadaki görüntüsüdür. Yine K, PP' doğru parçasının orta noktasıdır ve bu kez PP' doğrusu düzlemin normaline paraleldir.

Teorem 15.2 (Düzleme göre simetri formülü). *$\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$ düzlemi ve $P(x_1, y_1, z_1)$ noktası verilsin. P'nin $\mathfrak{D}$'ye göre simetriği $P'(x_1', y_1', z_1')$ ise*

$$\mu = \frac{-2(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

olmak üzere

$$x_1' = x_1 + \mu A, \qquad y_1' = y_1 + \mu B, \qquad z_1' = z_1 + \mu C$$

olur. Ayrıca dikmenin ayağı $K\left(x_1 + \frac{\mu}{2}A, y_1 + \frac{\mu}{2}B, z_1 + \frac{\mu}{2}C\right)$ noktasıdır.

İspat.
Önce $P \notin \mathfrak{D}$ olsun ve P', P'nin simetriği olsun. P' noktası P'den geçen ve $n = (A, B, C)$'ye paralel olan dikme üzerindedir; bu yüzden $\overrightarrow{PP'} \parallel n$'dir ve bir μ sayısı için $\overrightarrow{PP'} = \mu n$ yazılabilir:

$$\begin{aligned} x_1' - x_1 &= \mu A, \\ y_1' - y_1 &= \mu B, \\ z_1' - z_1 &= \mu C. \end{aligned} \tag{5}$$

Buradan

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \mu A, \\ y_1' &= y_1 + \mu B, \\ z_1' &= z_1 + \mu C. \end{aligned} \tag{6}$$

çıkar. Geriye μ'yü bulmak kalıyor. K, PP' doğru parçasının orta noktasıdır. Lemma 15.1 ve (6) gereğince

 CC BY-NC-SA 4.0

$$K\left(\frac{x_1+x_1'}{2},\frac{y_1+y_1'}{2},\frac{z_1+z_1'}{2}\right)=K\left(x_1+\frac{\mu}{2}A,y_1+\frac{\mu}{2}B,z_1+\frac{\mu}{2}C\right)$$

olur. $K\in\mathfrak{D}$ *olduğundan koordinatları düzlemin denklemini sağlar:*

$$A\left(x_1+\frac{\mu}{2}A\right)+B\left(y_1+\frac{\mu}{2}B\right)+C\left(z_1+\frac{\mu}{2}C\right)+D=0. \tag{7}$$

Parantezleri açıp μ *içeren terimleri toplarsak*

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D+\frac{1}{2}\mu\left(A^2+B^2+C^2\right)=0$$

buluruz. $n\neq 0$ *olduğundan* $A^2+B^2+C^2>0$*'dır ve*

$$\mu=\frac{-2(Ax_1+By_1+Cz_1+D)}{A^2+B^2+C^2} \tag{8}$$

elde edilir. Bu değer (6)'da yerine yazılınca simetrik noktanın koordinatları bulunur.
Tersine, μ *(8) ile tanımlansın ve* P' *(6) ile alınsın.* K*,* PP'*'nün orta noktası olsun. Yukarıdaki hesap geriye doğru okunursa (7) sağlanır, yani* $K\in\mathfrak{D}$*'dir.* $\overrightarrow{PK}=\frac{\mu}{2}\,n$ *olduğundan* PK *doğrusu* n*'ye paraleldir, yani düzleme diktir.* $P\notin\mathfrak{D}$ *ise* $Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$*, dolayısıyla* $\mu\neq 0$ *ve* $P\neq K$*'dır; demek ki* K *dikmenin ayağıdır.* P' *bu dikme üzerinde,* K*'nın öbür yanında ve* $\mid KP'\mid=\mid PK\mid$ *uzaklığındadır. Böylece* P'*,* P*'nin simetriğidir.*
Son olarak $P\in\mathfrak{D}$ *ise* $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$*, dolayısıyla* $\mu=0$ *ve* $P'=P$ *olur. Formül bu durumda da doğru sonucu verir.*
■

Formül bir uzaklık formülünü de içinde taşır. $\overrightarrow{PK}=\frac{\mu}{2}\,n$ olduğundan

$$\begin{aligned}\mid PK\mid&=\frac{\mid\mu\mid}{2}\parallel n\parallel=\frac{\mid Ax_1+By_1+Cz_1+D\mid}{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\\&=\frac{\mid Ax_1+By_1+Cz_1+D\mid}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}$$

olur. Bu, P noktasının $\mathfrak{D}$ düzlemine uzaklığıdır (bkz. Doğru ile Düzlem ve Uzaklıklar). Yani simetri formülü, "düzleme uzaklık kadar dik in, bir o kadar daha devam et" demenin koordinatlarla söylenişidir.

Bir noktanın düzleme göre simetriğini iki adımda bulmak

1. $\delta=Ax_1+By_1+Cz_1+D$ değerini (noktanın koordinatlarını düzlemin denkleminin sol yanında yerine yazarak) ve $A^2+B^2+C^2$ sayısını hesapla; $\mu=\dfrac{-2\delta}{A^2+B^2+C^2}$ olur.
2. P''nü P'ye $\mu n=(\mu A,\mu B,\mu C)$ vektörünü ekleyerek bul. İstersen orta noktanın düzlemin denklemini sağladığını sınayarak sonucu denetle.

Örnek 15.3 (Bir noktanın bir düzleme göre simetriği). $P(2,-2,3)$ noktasının $\mathfrak{D}:x-2y+2z-3=0$ düzlemine göre simetriğini bulunuz.

Çözüm.
***μ* sayısı.** Düzlemin normal vektörü $n=(1,-2,2)$'dir ve $A^2+B^2+C^2=1+4+4=9$'dur. P'nin koordinatlarını denklemin sol yanında yerine yazarsak

$$\delta=2-2\cdot(-2)+2\cdot 3-3=2+4+6-3=9$$

bulunur. Düzleme göre simetri formülüyle (Teorem 15.2)

$$\mu=\frac{-2\cdot 9}{9}=-2$$

 CC BY-NC-SA 4.0

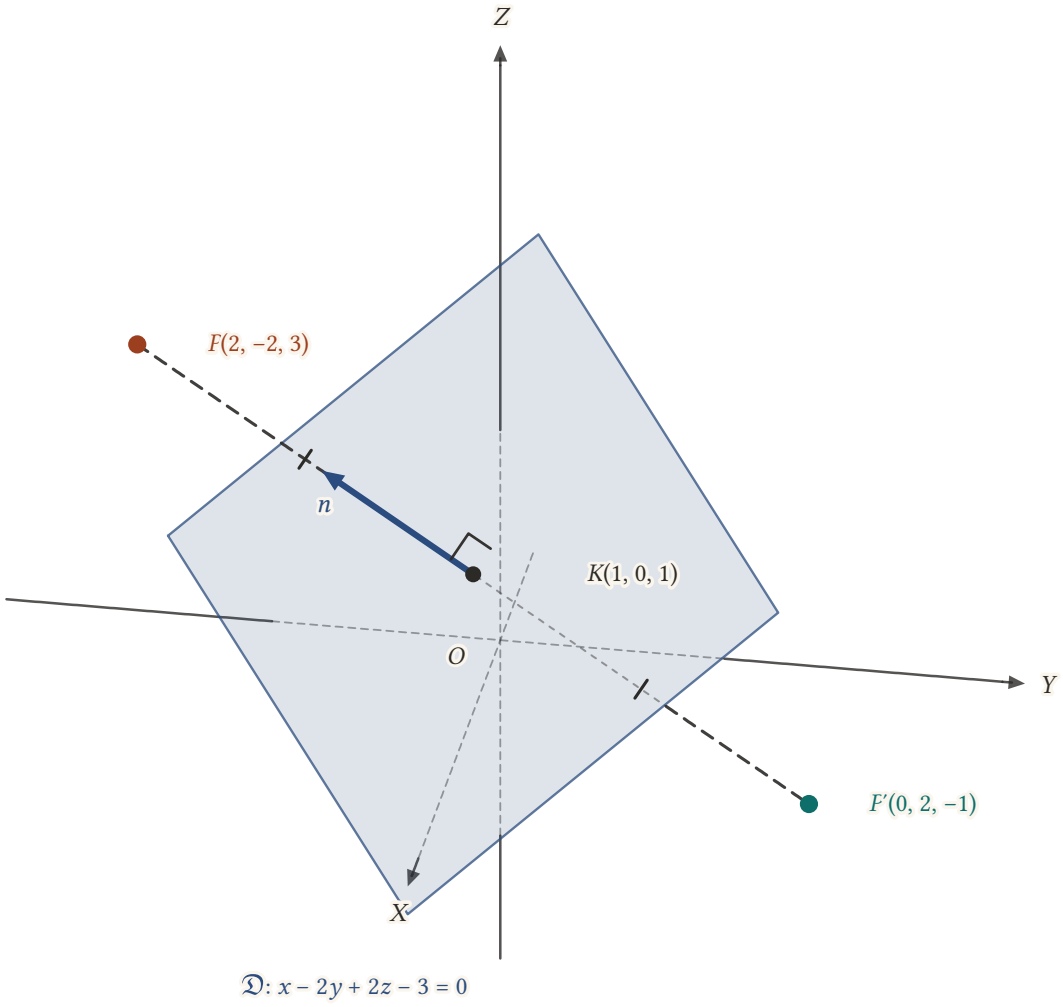
olur.

Simetrik nokta.

$$\begin{aligned} x_1' &= 2 + (-2)\cdot 1 = 0, \\ y_1' &= -2 + (-2)\cdot(-2) = 2, \\ z_1' &= 3 + (-2)\cdot 2 = -1. \end{aligned}$$

Demek ki $P'(0, 2, -1)$'dir.

Sağlama. Dikmenin ayağı, yani PP''nün orta noktası $K(1, 0, 1)$'dir ve $1 - 2\cdot 0 + 2\cdot 1 - 3 = 0$ olduğundan $K \in \mathfrak{D}$'dir. $\overrightarrow{PP'} = (-2, 4, -4) = -2n$ olduğundan PP' düzleme diktir. Ayrıca $|\,PK\,| = \sqrt{1+4+4} = 3$ bulunur; bu da P'nin düzleme uzaklığı olan $\dfrac{|\,9\,|}{\sqrt{9}} = 3$ ile aynıdır.



Şekil 15.6: $P(2, -2, 3)$ noktasının $x - 2y + 2z - 3 = 0$ düzlemine göre simetriği $P'(0, 2, -1)$. PP' parçası normal $n = (1, -2, 2)$ doğrultusundadır ve düzlemi orta noktası $K(1, 0, 1)$'de dik keser; düzlemin arkasında kalan parçalar kesikli ve soluktur.

■

Koordinat düzlemlerine göre simetri, koordinat eksenlerine göre simetrinin eşidir.

Sonuç 15.2 (Koordinat düzlemlerine göre simetri). *$P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının*
i) XY-düzlemine göre simetriği $(x_1, y_1, -z_1)$,

 CC BY-NC-SA 4.0

ii) XZ-düzlemine göre simetriği $(x_1, -y_1, z_1)$,
iii) YZ-düzlemine göre simetriği $(-x_1, y_1, z_1)$
noktasıdır. Yani düzleme dik olan eksenin koordinatı işaret değiştirir, öbür iki koordinat korunur.

İspat.
i) XY-düzleminin denklemi $z = 0$'dır; yani $A = B = 0, C = 1, D = 0$'dır. Düzleme göre simetri formülüyle (Teorem 15.2)

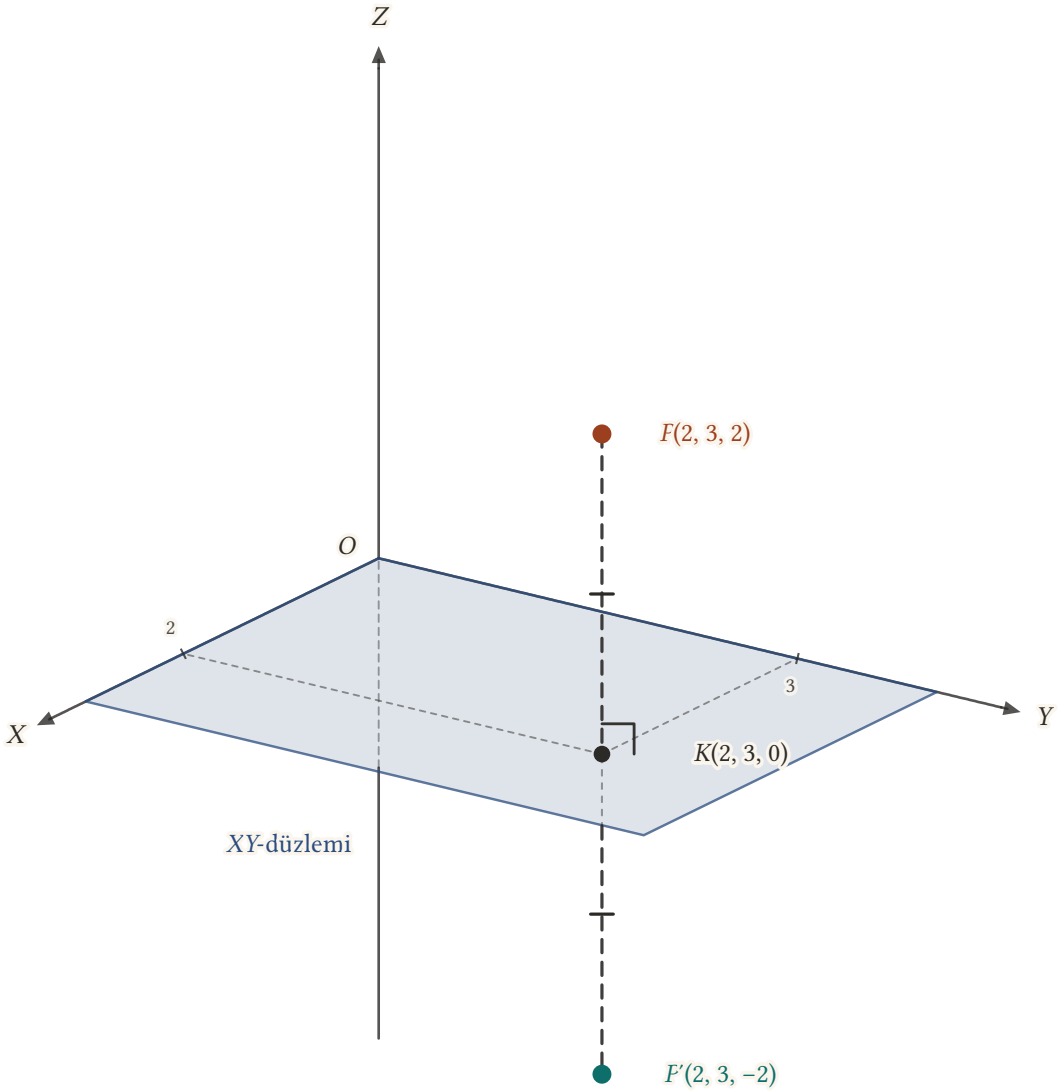
$$\mu = \frac{-2(0 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot z_1 + 0)}{0^2 + 0^2 + 1^2} = -2z_1$$

olur ve

$$x_1' = x_1 + \mu \cdot 0 = x_1, \qquad y_1' = y_1 + \mu \cdot 0 = y_1, \qquad z_1' = z_1 - 2z_1 = -z_1$$

bulunur.
ii) XZ-düzleminin denklemi $y = 0$'dır. $A = 0, B = 1, C = 0, D = 0$ ile $\mu = -2y_1$ ve $P'(x_1, -y_1, z_1)$ elde edilir.
iii) YZ-düzleminin denklemi $x = 0$'dır. $A = 1, B = C = 0, D = 0$ ile $\mu = -2x_1$ ve $P'(-x_1, y_1, z_1)$ elde edilir.
Örneğin $P(2, 3, 2)$ noktasının XY-düzlemine göre simetriği $P'(2, 3, -2)$'dir ve dikmenin ayağı $K(2, 3, 0)$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.7: P*(2, 3, 2) noktasının* XY*-düzlemine göre simetriği* P′*(2, 3, −2). Dikme* Z*-eksenine paraleldir ve düzlemi* K*(2, 3, 0)'da keser; düzlemin altında kalan parça kesikli ve soluktur.*

■

Simetri almayı iki kez uygulayınca başladığımız yere döneriz. Bu basit gözlem, bir sonraki önermede bütün bir kümenin simetriğini bulmamızı sağlayacak.

Önerme 15.1 (Simetriğin simetriği). *Ayna bir doğru ya da bir düzlem olsun. P', P noktasının bu aynaya göre simetriği ise P''nün aynı aynaya göre simetriği P'dir.*

İspat.
P aynanın üzerindeyse $P' = P$'dir ve söylenecek bir şey yoktur. P aynanın üzerinde değilse K, P'den aynaya inilen dikmenin ayağı olsun. K, PP''nün orta noktasıdır. P', PK doğrusu üzerindedir ve bu doğru aynayı yalnız K'da keser; öyleyse P' aynanın üzerinde olsaydı $P' = K$ olurdu. Oysa $\mid P'K \mid = \mid PK \mid > 0$'dır. Demek ki P' aynanın üzerinde değildir.
P', PK doğrusu üzerindedir. Bu doğru aynaya K'da diktir ve P''den geçer; o hâlde P''den aynaya inilen dikme de bu doğrudur ve ayağı yine K'dır. (Ayna bir doğruysa dikmenin ayağı tektir; ayna bir düzlemse

 CC BY-NC-SA 4.0

P''den geçip normale paralel olan doğru tektir.) P''nün simetriği, bu dikme üzerinde K'nın öbür yanında ve K'ya $\mid P'K \mid$ uzaklığında olan noktadır. K, PP''nün orta noktası olduğundan bu nokta P'dir.
■

Yani simetri alma işlemi kendi kendisinin tersidir: bir noktayı aynaya göre yansıtıp görüntüyü tekrar yansıtırsak noktanın kendisini buluruz.

15.2.1 Bir Geometrik Yerin Düzleme Göre Simetriği

Bir $\mathcal{G}$ geometrik yeri (bir yüzey, bir düzlem, bir küre ...) $f(x,y,z)=0$ denklemiyle verilsin. $\mathcal{G}$'nin noktalarının $\mathfrak{D}$ düzlemine göre simetriklerinin oluşturduğu kümeye $\mathcal{G}$'nin $\mathfrak{D}$'ye göre **simetriği** denir. Bu kümenin denklemini, formülü f'nin içine yerleştirerek hemen yazabiliriz.

Önerme 15.2 (Bir geometrik yerin düzleme göre simetriğinin denklemi). *$\mathfrak{D}: Ax+By+Cz+D=0$ bir düzlem, $\mathcal{G}$ de $f(x,y,z)=0$ denklemiyle verilen bir geometrik yer olsun. Kısaltma olarak*

$$\delta = Ax+By+Cz+D, \qquad N=A^2+B^2+C^2$$

yazalım. $\mathcal{G}$'nin $\mathfrak{D}$ düzlemine göre simetriğinin denklemi

$$f\left(x-\frac{2A\,\delta}{N}, y-\frac{2B\,\delta}{N}, z-\frac{2C\,\delta}{N}\right)=0$$

biçimindedir.

İspat.
Bir $Q(x,y,z)$ noktasının $\mathfrak{D}$'ye göre simetriğini $\sigma(Q)$ ile gösterelim. Simetri formülünde (Teorem 15.2) $P=Q$ alınırsa $\mu=-\dfrac{2\delta}{N}$ olur ve

$$\sigma(Q)=\left(x-\frac{2A\,\delta}{N}, y-\frac{2B\,\delta}{N}, z-\frac{2C\,\delta}{N}\right)$$

bulunur. $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}$'nin simetriği olsun. Şunu göstereceğiz:

$$Q\in\mathcal{G}' \Leftrightarrow \sigma(Q)\in\mathcal{G}.$$

$Q\in\mathcal{G}'$ ise bir $R\in\mathcal{G}$ için $Q=\sigma(R)$'dir. Önerme 15.1 gereğince $\sigma(Q)=\sigma(\sigma(R))=R$ olur, yani $\sigma(Q)\in\mathcal{G}$'dir. Tersine $\sigma(Q)\in\mathcal{G}$ ise $R=\sigma(Q)$ diyelim. Yine Önerme 15.1 gereğince $\sigma(R)=Q$ olur; Q, $\mathcal{G}$'nin bir noktasının simetriği olduğundan $Q\in\mathcal{G}'$'dür.
Son olarak $\sigma(Q)\in\mathcal{G}$ olması, $\sigma(Q)$'nun koordinatlarının $f=0$ denklemini sağlaması demektir. Bu koşul yukarıda yazılan denklemdir.
■

Yani simetriğin denklemini bulmak için f'nin içindeki x,y,z yerine, (x,y,z) noktasının aynadaki görüntüsünün koordinatlarını yazarız. Dikkat: δ, sabit bir noktadaki değer değil, x,y,z değişkenlerine bağlı $Ax+By+Cz+D$ ifadesidir. Koordinat düzlemleri için bu kural çok kısalır: örneğin XY-düzlemine göre simetrinin denklemi, f'de z yerine $-z$ yazılarak elde edilir (Sonuç 15.2).

Örnek 15.4 (Bir kürenin bir düzleme göre simetriği). $\mathcal{S}:(x-3)^2+y^2+z^2=4$ küresinin $\mathfrak{D}: x+y+z=0$ düzlemine göre simetriğinin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Görüntünün koordinatları. Burada $A=B=C=1$, $D=0$ olduğundan $\delta=x+y+z$ ve $N=3$'tür. (x,y,z) noktasının görüntüsünün koordinatlarına X,Y,Z diyelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$X = x - \frac{2}{3}(x+y+z) = \frac{1}{3}(x-2y-2z),$$
$$Y = y - \frac{2}{3}(x+y+z) = \frac{1}{3}(-2x+y-2z),$$
$$Z = z - \frac{2}{3}(x+y+z) = \frac{1}{3}(-2x-2y+z).$$

Yerine koyma. Kürenin denklemini açarsak

$$f(x,y,z) = (x-3)^2 + y^2 + z^2 - 4 = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 5$$

olur. Önerme 15.2 gereğince simetriğin denklemi

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 6X + 5 = 0$$

olur. Önce kareler toplamını hesaplayalım. Üç kareyi ayrı ayrı açarsak

$$(x-2y-2z)^2 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 4xz + 8yz,$$
$$(-2x+y-2z)^2 = 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz,$$
$$(-2x-2y+z)^2 = 4x^2 + 4y^2 + z^2 + 8xy - 4xz - 4yz$$

bulunur. Toplarken xy, xz ve yz terimlerinin katsayıları $-4-4+8=0$ olur; kare terimlerin katsayıları ise $1+4+4=9$'dur. Buna göre

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{9x^2 + 9y^2 + 9z^2}{9} = x^2 + y^2 + z^2$$

çıkar. Ayrıca

$$-6X = -2(x-2y-2z) = -2x + 4y + 4z$$

dir. Simetriğin denklemi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0$$

olur.
Tam kareye tamamlama. $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, $y^2 + 4y = (y+2)^2 - 4$, $z^2 + 4z = (z+2)^2 - 4$ olduğundan

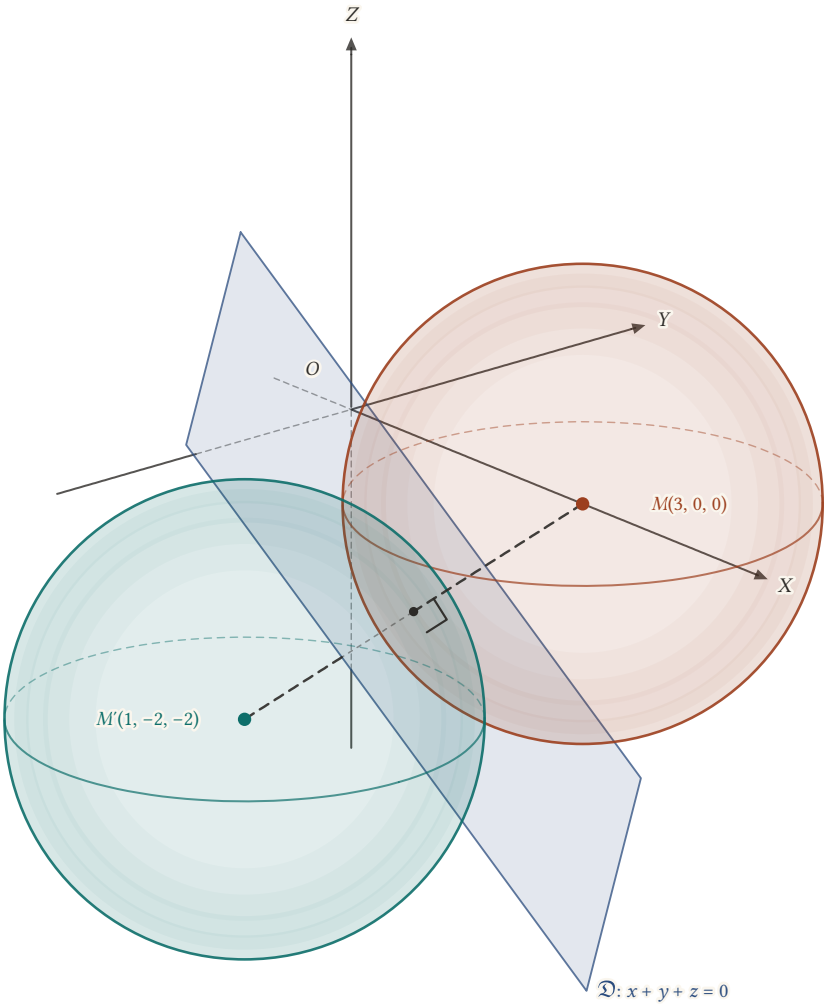
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 - 1 - 4 - 4 + 5 = 0,$$

yani

$$\mathcal{S}' : (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2 = 4$$

bulunur. Simetrik küre, merkezi $M'(1,-2,-2)$ ve yarıçapı 2 olan küredir.
Sağlama. Asıl kürenin merkezi $M(3,0,0)$'dır. Onun $\mathfrak{D}$'ye göre simetriği için $\delta = 3$ ve $\mu = -\frac{2\cdot 3}{3} = -2$ olur; M'nin koordinatlarına $\mu n = (-2,-2,-2)$ eklenince $(1,-2,-2)$ bulunur. Beklendiği gibi merkez merkeze gider ve yarıçap değişmez.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.8: $(x-3)^2+y^2+z^2=4$ küresi (turuncu) ve $x+y+z=0$ düzlemine göre simetriği (yeşil). Merkez $M(3,0,0)$ merkeze,$M'(1,-2,-2)$'ye gider; MM' parçası düzlemi orta noktası $(2,-1,-1)$'de dik keser ve yarıçap 2 olarak kalır.

■

15.3 Bir Doğrunun Bir Düzleme Göre Simetriği

Bir doğrunun düzleme göre simetriği, doğrunun bütün noktalarının simetriklerinden oluşan kümedir. Bu kümenin yine bir doğru olduğunu ve iki noktasıyla belirlendiğini gösterelim.

Önerme 15.3 (Bir doğrunun düzleme göre simetriği bir doğrudur). *d doğrusu P_0 noktasından geçsin ve doğrultman vektörü $v \neq 0$ olsun. $\mathfrak{D}$ düzleminin normal vektörü n ve P_0'ın $\mathfrak{D}$'ye göre simetriği P_0' olsun. d'nin $\mathfrak{D}$'ye göre simetriği, P_0''dan geçen ve doğrultman vektörü*

$$w = v - \frac{2\langle v, n\rangle}{\langle n, n\rangle}\, n$$

olan d' doğrusudur. Özel olarak, d üzerindeki iki farklı noktanın simetrikleri de farklıdır ve d' bu iki simetrik noktadan geçen doğrudur.

İspat.

$\mathfrak{D} : Ax + By + Cz + D = 0$, $n = (A, B, C)$ ve $N = \langle n, n\rangle$ olsun. Bir $Q(x, y, z)$ noktası için $\delta(Q) = Ax + By + Cz + D$ yazalım. Teorem 15.2 gereğince Q'nun simetriği, Q'nun koordinatlarına $-\dfrac{2\delta(Q)}{N}\, n$ vektörünün koordinatları eklenerek bulunur.
d'nin noktaları, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ve $v = (a, b, c)$ olmak üzere, $Q_\lambda(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c)$ noktalarıdır. Bu nokta için

$$\delta(Q_\lambda) = (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + \lambda(Aa + Bb + Cc) = \delta(P_0) + \lambda\,\langle v, n\rangle$$

olur. Buna göre Q_λ'nın simetriğinin koordinatları, P_0'ın koordinatlarına

$$\lambda v - \frac{2\delta(P_0)}{N}\, n - \lambda\,\frac{2\langle v, n\rangle}{N}\, n$$

vektörünün koordinatları eklenerek bulunur. Terimleri yeniden gruplarsak: P_0'a $-\frac{2\delta(P_0)}{N}\, n$ eklemek P_0''ı verir; geriye kalan $\lambda\Big(v - \frac{2\langle v,n\rangle}{N}\, n\Big) = \lambda w$'dur. Yani Q_λ'nın simetriği, P_0''dan λw kadar ilerleyerek varılan noktadır.
$w \neq 0$ olduğunu gösterelim. $w = 0$ olsaydı $v = \frac{2\langle v,n\rangle}{N}\, n$ olurdu. Bu eşitliğin iki yanının n ile iç çarpımını alırsak

$$\langle v, n\rangle = \frac{2\langle v, n\rangle}{N}\,\langle n, n\rangle = 2\langle v, n\rangle$$

bulunur; buradan $\langle v, n\rangle = 0$ ve dolayısıyla $v = 0$ çıkar. Bu, $v \neq 0$ olmasıyla çelişir.
λ bütün reel sayıları dolaşırken P_0''dan λw kadar ilerleyerek varılan noktalar, P_0''dan geçen ve doğrultman vektörü w olan d' doğrusunun tam olarak bütün noktalarıdır. Böylece d'nin simetriği d''dür. Farklı λ değerleri, $w \neq 0$ olduğundan, d' üzerinde farklı noktalar verir; bu yüzden d'nin iki farklı noktasının simetrikleri farklıdır ve d', bu iki noktadan geçen tek doğrudur.
■

Önermeden iki kullanışlı sonuç okunur. d düzleme paralelse $\langle v, n\rangle = 0$'dır; o zaman $w = v$ olur ve d' de d'ye paraleldir. d düzlemi bir S noktasında kesiyorsa $S \in \mathfrak{D}$ olduğundan S'nin simetriği kendisidir; demek ki S hem d'nin hem d''nün üzerindedir. Bu ikinci gözlem, hesabın sağlamasını yapmak için çok elverişlidir.

Bir doğrunun düzleme göre simetriğini üç adımda bulmak

1. Doğrunun parametrik denklemlerinde iki farklı λ değeri seçerek (örneğin $\lambda = 0$ ve $\lambda = 1$) iki nokta, P_0 ile P_1'i bul.
2. Teorem 15.2 ile bu iki noktanın simetrikleri P_0' ve P_1''i hesapla.
3. P_0' ve P_1''den geçen doğrunun denklemini yaz. İstersen doğrunun düzlemle kesişim noktasının d' üzerinde olduğunu sınayarak sonucu denetle.

Örnek 15.5 (Bir doğrunun bir düzleme göre simetriği).

$$d : \frac{x - 1}{2} = y = \frac{z}{3}$$

doğrusunun $\mathfrak{D} : 2x - 3y + 4z + 4 = 0$ düzlemine göre simetriğini bulunuz.

Çözüm.
İki nokta seçme. d'nin parametrik denklemleri

$$x = 1 + 2\lambda, \qquad y = \lambda, \qquad z = 3\lambda$$

biçimindedir. $\lambda = 0$ için $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, yani $P_0(1, 0, 0)$; $\lambda = 1$ için $x_1 = 3$, $y_1 = 1$, $z_1 = 3$, yani $P_1(3, 1, 3)$ bulunur. Bu iki noktanın $\mathfrak{D}$'ye göre simetrikleri $P_0'(x_0', y_0', z_0')$ ve $P_1'(x_1', y_1', z_1')$ olsun. Düzlem için $A = 2$, $B = -3$, $C = 4$, $D = 4$ ve

$$A^2 + B^2 + C^2 = 4 + 9 + 16 = 29$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dur.
P_0'ın simetriği. Teorem 15.2 gereğince $x_0' = x_0 + \mu_0 A$, $y_0' = y_0 + \mu_0 B$, $z_0' = z_0 + \mu_0 C$ ve

$$\mu_0 = \frac{-2\,(\,2\cdot 1 + (-3)\cdot 0 + 4\cdot 0 + 4\,)}{29} = -\frac{12}{29}$$

olur. Buna göre

$$\begin{aligned} x_0' &= 1 + \left(-\frac{12}{29}\right)\cdot 2 = \frac{29-24}{29} = \frac{5}{29},\\ y_0' &= 0 + \left(-\frac{12}{29}\right)\cdot (-3) = \frac{36}{29},\\ z_0' &= 0 + \left(-\frac{12}{29}\right)\cdot 4 = -\frac{48}{29} \end{aligned}$$

bulunur; yani $P_0'\left(\frac{5}{29}, \frac{36}{29}, -\frac{48}{29}\right)$'dır.
P_1'in simetriği. Aynı biçimde

$$\mu_1 = \frac{-2\,(\,2\cdot 3 + (-3)\cdot 1 + 4\cdot 3 + 4\,)}{29} = \frac{-2\cdot 19}{29} = -\frac{38}{29}$$

olur ve

$$\begin{aligned} x_1' &= 3 + \left(-\frac{38}{29}\right)\cdot 2 = \frac{87-76}{29} = \frac{11}{29},\\ y_1' &= 1 + \left(-\frac{38}{29}\right)\cdot (-3) = \frac{29+114}{29} = \frac{143}{29},\\ z_1' &= 3 + \left(-\frac{38}{29}\right)\cdot 4 = \frac{87-152}{29} = -\frac{65}{29} \end{aligned}$$

bulunur; yani $P_1'\left(\frac{11}{29}, \frac{143}{29}, -\frac{65}{29}\right)$'dir.
Simetrik doğru. Önerme 15.3 gereğince d'nin simetriği, P_0' ve P_1''den geçen d' doğrusudur. Doğrultman vektörü olarak

$$\overrightarrow{P_0'P_1'} = \left(\frac{11-5}{29}, \frac{143-36}{29}, \frac{-65+48}{29}\right) = \left(\frac{6}{29}, \frac{107}{29}, -\frac{17}{29}\right)$$

alınabilir. P_0''dan geçen ve bu doğrultudaki doğrunun kartezyen denklemi

$$d' : \frac{x - \frac{5}{29}}{\frac{6}{29}} = \frac{y - \frac{36}{29}}{\frac{107}{29}} = \frac{z + \frac{48}{29}}{-\frac{17}{29}}$$

olur. Her kesrin payını ve paydasını 29 ile çarparsak

$$d' : \frac{29x - 5}{6} = \frac{29y - 36}{107} = \frac{29z + 48}{-17}$$

elde edilir. Böylece d doğrusunun $\mathfrak{D}$ düzlemine göre simetriği d' doğrusudur.
Sağlama. Doğrultmanı önermedeki formülle de bulalım. $v = (2,1,3), n = (2,-3,4)$ için $\langle v, n\rangle = 4 - 3 + 12 = 13$ ve

$$w = (2,1,3) - \frac{26}{29}(2,-3,4) = \left(\frac{58-52}{29}, \frac{29+78}{29}, \frac{87-104}{29}\right) = \left(\frac{6}{29}, \frac{107}{29}, -\frac{17}{29}\right)$$

çıkar; bulduğumuz doğrultmanla aynıdır. Ayrıca d düzlemi, parametrik denklemleri düzlem denkleminde yerine yazınca

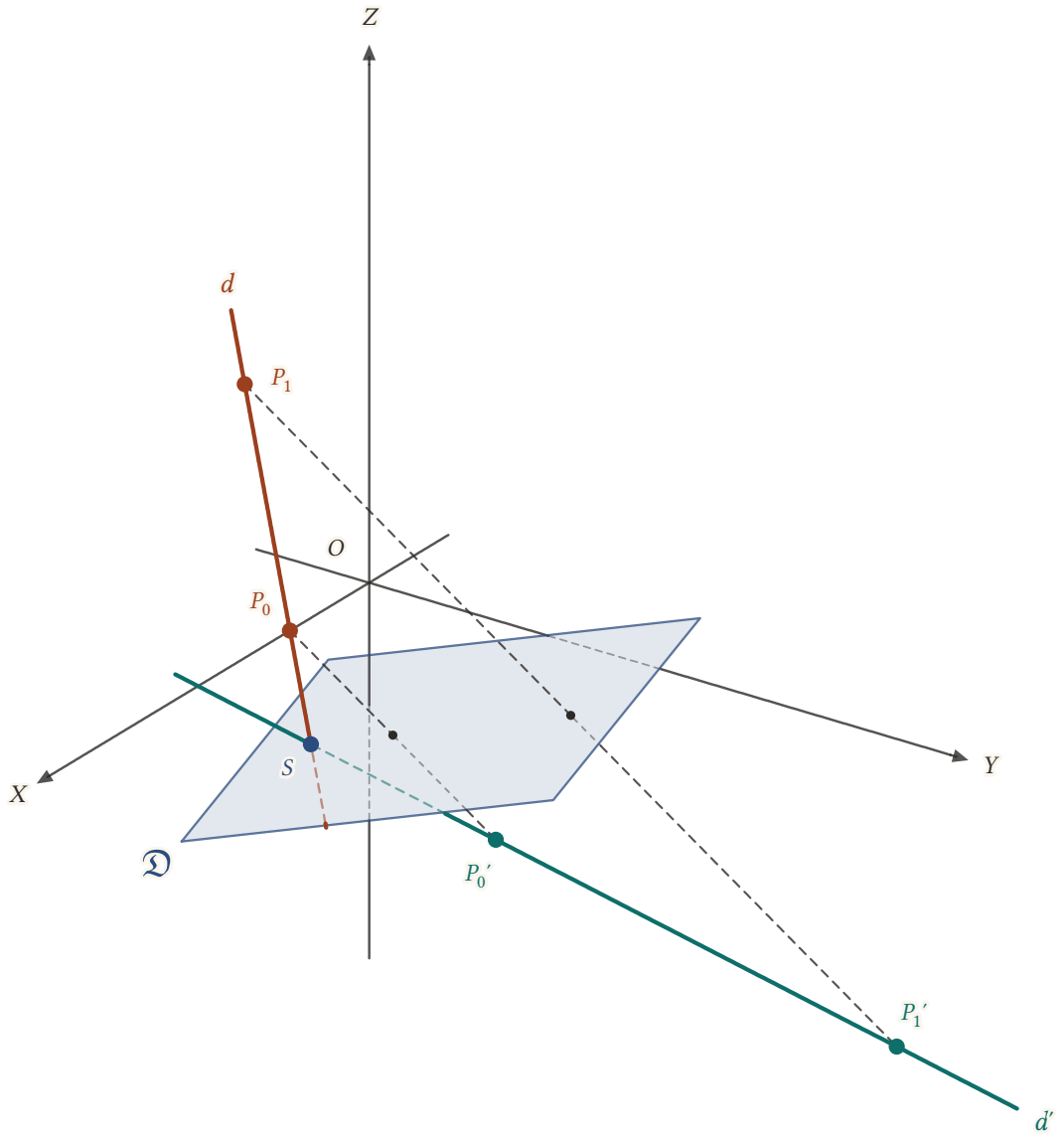
$$2(1+2\lambda) - 3\lambda + 4\cdot 3\lambda + 4 = 6 + 13\lambda = 0$$

denkleminden bulunan $\lambda = -\frac{6}{13}$ değerinde, yani $S\left(\frac{1}{13}, -\frac{6}{13}, -\frac{18}{13}\right)$ noktasında keser. S'nin koordinatlarını d''nün denkleminde yerine yazarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{\frac{29}{13}-5}{6}=\frac{-\frac{174}{13}-36}{107}=\frac{-\frac{522}{13}+48}{-17}=-\frac{6}{13}$$

bulunur: üç oran da eşittir, yani $S \in d'$'dür. Kesişim noktası, beklendiği gibi, yerinden kıpırdamamıştır.



Şekil 15.9: d doğrusu (turuncu) ve $2x - 3y + 4z + 4 = 0$ düzlemine göre simetriği d' (yeşil). $P_0(1, 0, 0)$ ve $P_1(3, 1, 3)$ noktalarının simetrikleri $P_0'(5/29, 36/29, -48/29)$ ve $P_1'(11/29, 143/29, -65/29)$'dir; iki doğru düzlemi aynı $S(1/13, -6/13, -18/13)$ noktasında keser. Düzlemin arkasında kalan parçalar kesiklidir.

■

15.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar doğruya ve düzleme göre simetri formüllerini, simetriğin simetriği gözlemini ve bir geometrik yerin simetriğini birlikte kullanır.

Alıştırma 15.1 (Bir noktanın bir doğruya göre simetriği ve dikmenin boyu). $P(1, 8, 2)$ noktasının

$$d : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

doğrusuna göre simetriğini ve P'nin d'ye uzaklığını bulunuz.

Çözüm.
Doğrudan okunanlar. $P_0(1,-1,2) \in d$ ve $v = (2,1,-2)$'dir; $a^2+b^2+c^2 = 4+1+4 = 9$'dur.
λ sayısı ve dikmenin ayağı. Koordinat farkları $\overrightarrow{P_0P} = (0,9,0)$ olduğundan

$$\lambda = \frac{2\cdot 0 + 1\cdot 9 + (-2)\cdot 0}{9} = 1$$

olur. Dikmenin ayağı

$$K(1+1\cdot 2, -1+1\cdot 1, 2+1\cdot(-2)) = K(3,0,0)$$

noktasıdır.
Simetrik nokta. Teorem 15.1 gereğince her koordinat, K'nın koordinatının iki katı eksi P'ninkidir:

$$x_1' = 2\cdot 3 - 1 = 5, \qquad y_1' = 2\cdot 0 - 8 = -8, \qquad z_1' = 2\cdot 0 - 2 = -2.$$

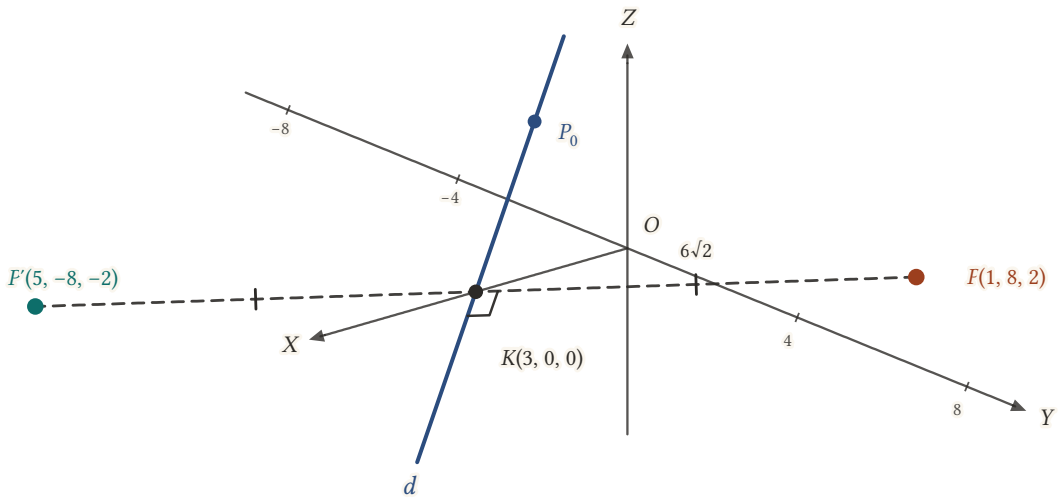
Demek ki $P'(5,-8,-2)$'dir.
Uzaklık. P'nin d'ye uzaklığı dikmenin boyudur:

$$|\,PK\,| = \sqrt{(3-1)^2+(0-8)^2+(0-2)^2} = \sqrt{4+64+4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Sağlama. $\overrightarrow{PP'} = (4,-16,-4)$ ve $\langle \overrightarrow{PP'}, v\rangle = 8-16+8 = 0$'dır. Ayrıca

$$|\,PP'\,| = \sqrt{16+256+16} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2} = 2\,|\,PK\,|$$

olur.



Şekil 15.10: $P(1, 8, 2)$ noktası, d: $(x-1)/2 = y+1 = (z-2)/(-2)$ doğrusu ve simetriği $P'(5,-8,-2)$. Dikmenin ayağı $K(3, 0, 0)$'dır ve P'nin d'ye uzaklığı $|PK| = 6\sqrt{2}$'dir.

■

Alıştırma 15.2 (Simetriği bilinen noktayı bulmak). Bir P noktasının $\mathfrak{D} : 2x - y + 2z + 3 = 0$ düzlemine göre simetriği $Q(0,4,-4)$ noktasıdır. P'yi bulunuz.

Çözüm.

Fikir. Önerme 15.1 gereğince Q, P'nin simetriği ise P de Q'nun simetriğidir. Öyleyse Q'nun $\mathfrak{D}$'ye göre simetriğini bulmamız yeter.
Hesap. $n = (2, -1, 2)$ ve $A^2 + B^2 + C^2 = 4 + 1 + 4 = 9$'dur. Q'nun koordinatlarını denklemin sol yanında yerine yazarsak

$$\delta = 2 \cdot 0 - 4 + 2 \cdot (-4) + 3 = -9$$

bulunur. Teorem 15.2 gereğince $\mu = \dfrac{-2 \cdot (-9)}{9} = 2$ olur ve

$$x = 0 + 2 \cdot 2 = 4, \qquad y = 4 + 2 \cdot (-1) = 2, \qquad z = -4 + 2 \cdot 2 = 0$$

çıkar. Demek ki $P(4, 2, 0)$'dır.
Sağlama. P'nin simetriğini doğrudan hesaplayalım: $\delta = 2 \cdot 4 - 2 + 2 \cdot 0 + 3 = 9$, $\mu = \dfrac{-18}{9} = -2$ ve

$$(4 - 4, 2 + 2, 0 - 4) = (0, 4, -4) = Q$$

bulunur. Ortak dikme ayağı $K(2, 3, -2)$'dir ve $2 \cdot 2 - 3 + 2 \cdot (-2) + 3 = 0$ olduğundan gerçekten düzlemin üzerindedir.
■

Alıştırma 15.3 (Simetrik iki noktadan aynayı bulmak). $A(1, 2, 3)$ noktasının bir $\mathfrak{D}$ düzlemine göre simetriği $B(3, -2, 7)$ noktasıdır. $\mathfrak{D}$'nin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Düzlemin normali. B, A'dan $\mathfrak{D}$'ye inilen dikme üzerindedir. Bu dikme $\mathfrak{D}$'ye dik olduğundan $\overrightarrow{AB}$ vektörü düzlemin bir normal vektörüdür:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, -2 - 2, 7 - 3) = (2, -4, 4) = 2(1, -2, 2).$$

Sıfırdan farklı bir katı da normal olduğundan $n = (1, -2, 2)$ alabiliriz.
Düzlemin bir noktası. Dikmenin ayağı K, AB'nin orta noktasıdır ve düzlemin üzerindedir. Lemma 15.1 ile

$$K\left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-2}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = K(2, 0, 5)$$

bulunur.
Düzlemin denklemi. $K(2, 0, 5)$ noktasından geçen ve normali $n = (1, -2, 2)$ olan düzlem

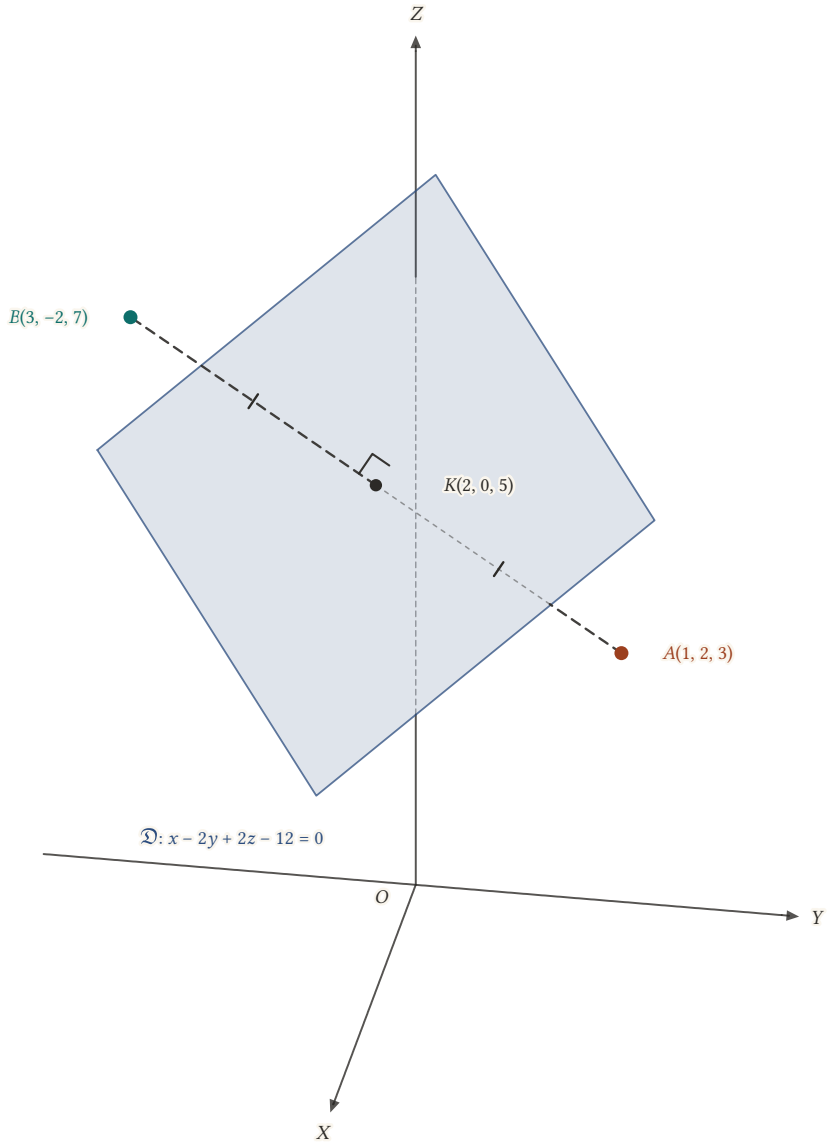
$$1 \cdot (x - 2) - 2(y - 0) + 2(z - 5) = 0, \qquad \text{yani} \qquad \mathfrak{D} : x - 2y + 2z - 12 = 0$$

düzlemidir.
Sağlama. A'nın bu düzleme göre simetriğini Teorem 15.2 ile hesaplayalım: $\delta = 1 - 4 + 6 - 12 = -9$, $A^2 + B^2 + C^2 = 9$, $\mu = \dfrac{-2 \cdot (-9)}{9} = 2$ ve

$$(1 + 2 \cdot 1, 2 + 2 \cdot (-2), 3 + 2 \cdot 2) = (3, -2, 7) = B$$

bulunur. Geometrik olarak $\mathfrak{D}$, AB doğru parçasının orta noktasından geçen ve ona dik olan düzlemdir; bu düzlemin her noktası A ile B'ye eşit uzaklıktadır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.11: $A(1,2,3)$ ile simetriği $B(3,-2,7)$ arasındaki ayna, AB parçasının orta noktası $K(2,0,5)$'ten geçen ve AB'ye dik olan $x-2y+2z-12=0$ düzlemidir. Düzlemin arkasında kalan parça kesikli ve soluktur.

■

Alıştırma 15.4 (Düzleme paralel bir doğrunun simetriği).

$$d: \quad x = 1+\lambda, \qquad y = 2+\lambda, \qquad z = 7$$

doğrusunun $\mathfrak{D}: x-y+z-3=0$ düzlemine göre simetriğini bulunuz.

Çözüm.
Doğru ile düzlemin durumu. d'nin doğrultman vektörü $v=(1,1,0)$, düzlemin normal vektörü $n=(1,-1,1)$'dir ve

$$\langle v, n\rangle = 1-1+0 = 0$$

olur. Yani $v \perp n$'dir ve d düzleme paraleldir. d'nin $P_0(1,2,7)$ noktası için $1-2+7-3 = 3 \neq 0$ olduğundan d düzlemin içinde de değildir.

Bir noktanın simetriği. $A^2+B^2+C^2 = 3$ ve $\delta(P_0) = 3$ olduğundan $\mu = \dfrac{-2\cdot 3}{3} = -2$ olur. Buna göre

$$P_0' = (1-2\cdot 1,\ 2-2\cdot(-1),\ 7-2\cdot 1) = (-1,4,5)$$

bulunur.

Simetrik doğru. $\langle v, n\rangle = 0$ olduğundan Önerme 15.3 içindeki doğrultman vektörü $w = v - 0\cdot n = v$'dir. d', $P_0'(-1,4,5)$'ten geçen ve doğrultusu $v = (1,1,0)$ olan doğrudur:

$$d' : \quad x = -1+\lambda, \qquad y = 4+\lambda, \qquad z = 5.$$

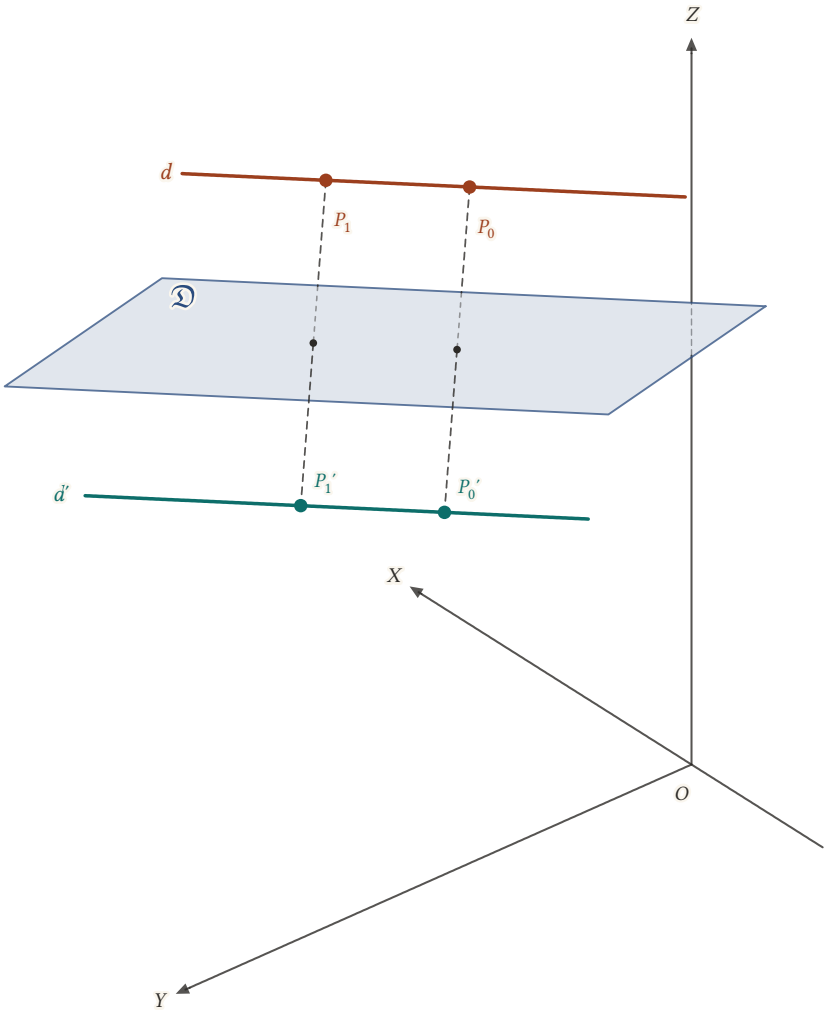
d', d'ye paraleldir.

Sağlama. d'nin ikinci bir noktasını, $\lambda = 1$ için $P_1(2,3,7)$'yi alalım. $\delta(P_1) = 2-3+7-3 = 3$ ve $\mu = -2$ olduğundan

$$P_1' = (2-2,\ 3+2,\ 7-2) = (0,5,5)$$

bulunur. Bu nokta d''nün $\lambda = 1$ değerindeki noktasıdır. Ayrıca d ile d' düzlemin iki yanında, düzleme aynı $\dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ uzaklığındadır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.12: $x - y + z - 3 = 0$ düzlemine paralel d doğrusu (turuncu) ve simetriği d' (yeşil). İki doğru da $(1, 1, 0)$ doğrultusundadır ve düzlemin iki yanında, ona $\sqrt{3}$ uzaklıktadır; kesikli dikmelerin ayakları $(0, 3, 6)$ ve $(1, 4, 6)$'dır.

■

Alıştırma 15.5 (Bir düzlemin bir düzleme göre simetriği). $\mathfrak{D}_1 : x + 2y + 3z - 6 = 0$ düzleminin $\mathfrak{D} : x - y = 0$ düzlemine göre simetriğini bulunuz.

Çözüm.
Görüntünün koordinatları. $\mathfrak{D}$ için $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$ olduğundan $\delta = x - y$ ve $N = 2$'dir. (x, y, z) noktasının $\mathfrak{D}$'ye göre simetriğinin koordinatları

$$\begin{aligned} x - \frac{2 \cdot 1 \cdot (x - y)}{2} &= x - (x - y) = y, \\ y - \frac{2 \cdot (-1) \cdot (x - y)}{2} &= y + (x - y) = x, \\ z - \frac{2 \cdot 0 \cdot (x - y)}{2} &= z \end{aligned}$$

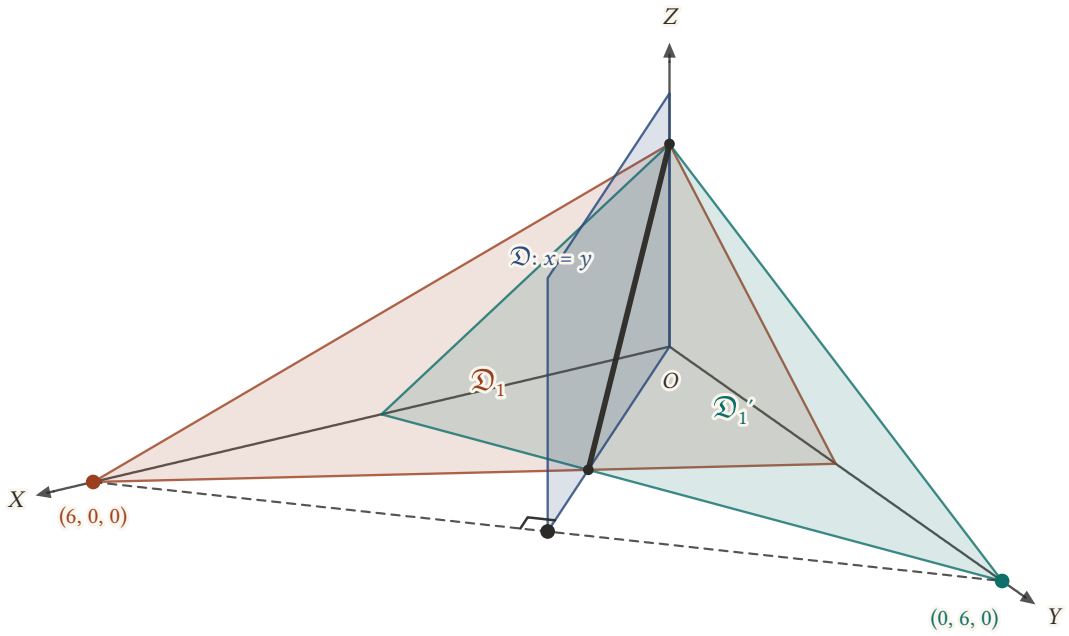
olur. Yani bu aynaya göre simetri, x ile y'nin yerini değiştirir: $(x, y, z) \mapsto (y, x, z)$.
Yerine koyma. $f(x, y, z) = x + 2y + 3z - 6$ olduğundan Önerme 15.2 gereğince simetriğin denklemi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$f(y,x,z) = y + 2x + 3z - 6 = 0, \qquad \text{yani} \qquad \mathfrak{D}_1' : 2x + y + 3z - 6 = 0$$

bulunur.

Sağlama. $\mathfrak{D}_1$'in $(6,0,0)$ noktasının simetriği $(0,6,0)$'dır ve $2\cdot 0 + 6 + 0 - 6 = 0$ olduğundan $\mathfrak{D}_1'$ üzerindedir. Ayrıca $\mathfrak{D}_1$ ile $\mathfrak{D}$'nin ortak noktaları $x = y$ ve $3x + 3z = 6$ koşullarıyla verilir; bu noktalar $\mathfrak{D}_1'$'in denklemini de sağlar, çünkü $x = y$ iken $2x + y + 3z - 6$ ifadesi $3x + 3z - 6$'a eşittir. Aynadaki noktalar yerinden kıpırdamadığı için beklenen de budur: üç düzlem aynı doğru boyunca kesişir.



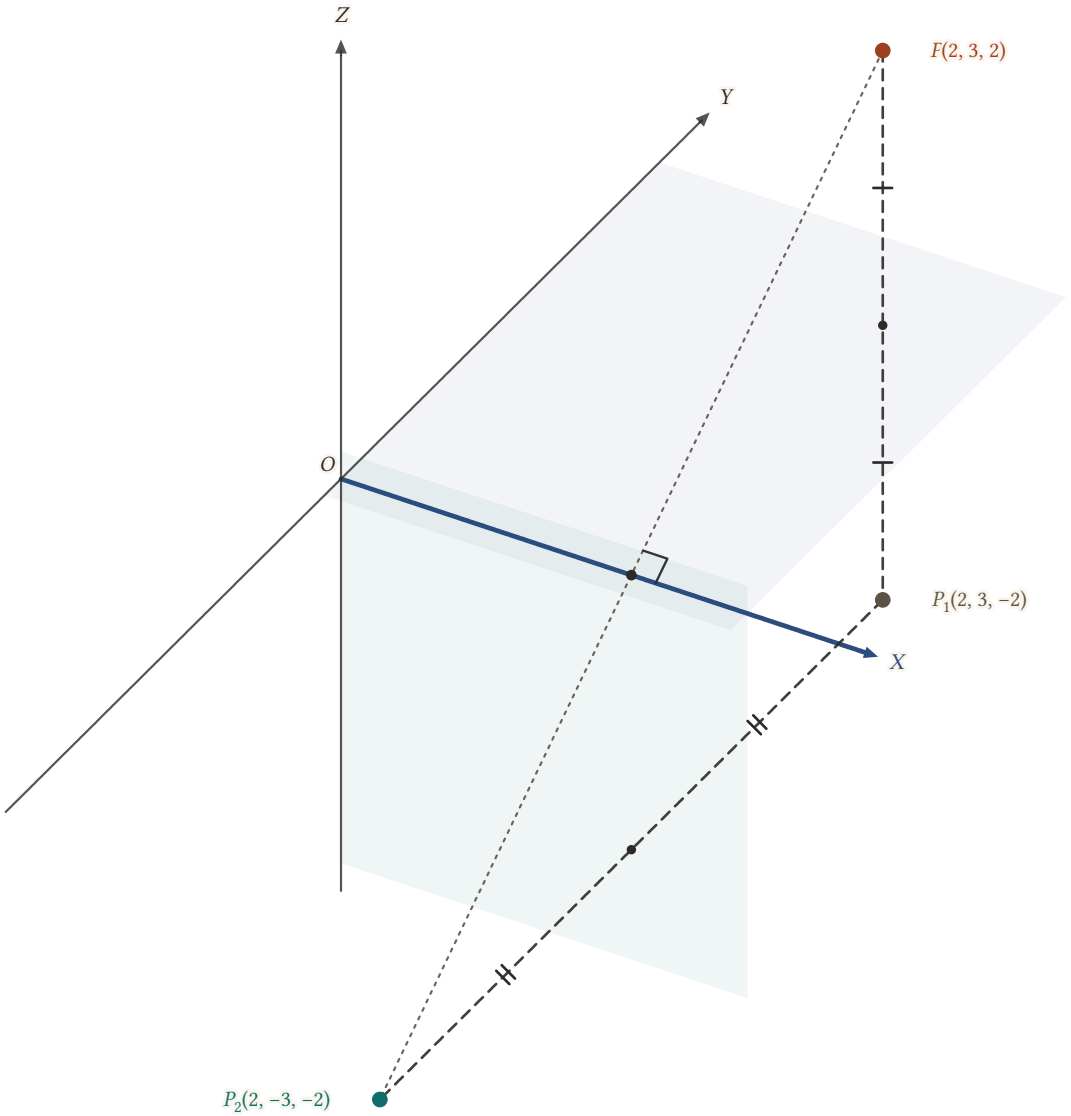
Şekil 15.13: Birinci bölgedeki parçalar: $x + 2y + 3z = 6$ (turuncu), simetriği $2x + y + 3z = 6$ (yeşil) ve ayna $x = y$ (mavi). Üç düzlem kalın çizilen ortak doğru boyunca kesişir; (6, 0, 0) noktasının görüntüsü (0, 6, 0)'dır.

■

Alıştırma 15.6 (İki koordinat düzlemine göre art arda simetri). Bir $P(x_1, y_1, z_1)$ noktasının XY-düzlemine göre simetriği P_1, P_1'in de XZ-düzlemine göre simetriği P_2 olsun. P_2'nin, P'nin X-eksenine göre simetriği olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Birinci simetri. Sonuç 15.2 gereğince XY-düzlemine göre simetri yalnız üçüncü koordinatın işaretini değiştirir: $P_1(x_1, y_1, -z_1)$.
İkinci simetri. Aynı sonuca göre XZ-düzlemine göre simetri yalnız ikinci koordinatın işaretini değiştirir: $P_2(x_1, -y_1, -z_1)$.
Karşılaştırma. Sonuç 15.1 gereğince P'nin X-eksenine göre simetriği de $(x_1, -y_1, -z_1)$ noktasıdır. İki nokta aynı olduğundan iddia doğrudur.
Geometrik olarak X-ekseni, XY- ve XZ-düzlemlerinin kesişim doğrusudur. Birbirine dik iki düzleme göre art arda simetri almak, bu iki düzlemin kesişim doğrusuna göre simetri almakla aynı sonucu verir. Örneğin $P(2,3,2)$ için $P_1(2,3,-2)$ ve $P_2(2,-3,-2)$ bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 15.14: $P(2, 3, 2)$ noktasının XY-düzlemine göre simetriği $P_1(2, 3, -2)$, onun da XZ-düzlemine göre simetriği $P_2(2, -3, -2)$'dir. Noktalı PP_2 parçası X-eksenini $(2, 0, 0)$'da dik keser: P_2, P'nin X-eksenine göre simetriğidir.

■

Bu bölümde uzayda bir noktayı, bir doğruyu ve bir geometrik yeri bir doğruya ya da bir düzleme göre yansıttık. Her hesabın temelinde aynı iki koşul vardı: dikmenin ayağı aynanın üzerindedir ve nokta ile görüntüsünün orta noktasıdır. Sonraki bölümde, Öteleme bölümünde, düzleme dönüp noktaları değil koordinat sistemini hareket ettireceğiz ve bir noktanın eski ve yeni koordinatları arasındaki bağıntıları kuracağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

16. Öteleme

Bir noktanın koordinatları, noktanın kendisine olduğu kadar seçtiğimiz koordinat sistemine de bağlıdır. Koordinat sistemini kaydırırsak ya da döndürürsek aynı noktanın koordinatları değişir. Bu bölümde ve bir sonrakinde, böyle bir değişiklikten sonra bir noktanın eski koordinatlarıyla yeni koordinatları arasındaki bağıntıları kuracağız. İşe en basit dönüşümle, ötelemeyle başlıyoruz: önce noktaları bir vektör kadar kaydıracak, sonra aynı fikri koordinat eksenlerine uygulayacağız.

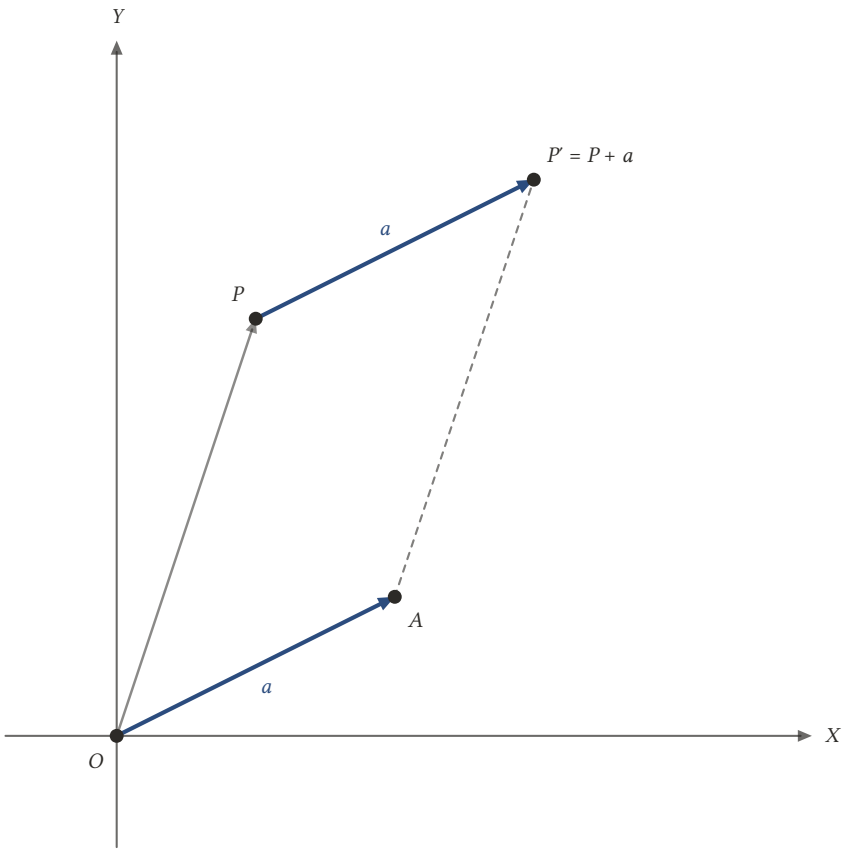
16.1 Noktaların Ötelenmesi

Düzlemdeki her noktayı aynı yönde ve aynı miktarda kaydırmak istiyoruz. Bunun için bir vektör seçip her noktaya bu vektörü eklemek yeter. Bu bölüm boyunca düzlemin bir $P(p_1, p_2)$ noktasını konum vektörü $\overrightarrow{OP} = (p_1, p_2)$ ile özdeşleştiriyoruz (bkz. Tanım 7.9; düzlemde tanım aynıdır, yalnız üçüncü bileşen yoktur). Böylece bir noktaya bir vektör eklemek, koordinatları bileşen bileşen toplamak demektir.

Tanım 16.1 (Öteleme fonksiyonu). $A(a_1, a_2)$, $\mathbb{R}^2$'de sabit bir nokta, $O(0,0)$ başlangıç noktası ve $a = \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ olsun.

$$f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad P \mapsto f_a(P) = P + a = P'$$

biçiminde tanımlanan f_a fonksiyonuna **öteleme vektörü a olan öteleme** denir.



Şekil 16.1: f_a ötelemesi P noktasını $a = OA$ vektörü kadar kaydırır: OA ve PP' okları paralel ve eşit uzunluktadır.

 CC BY-NC-SA 4.0

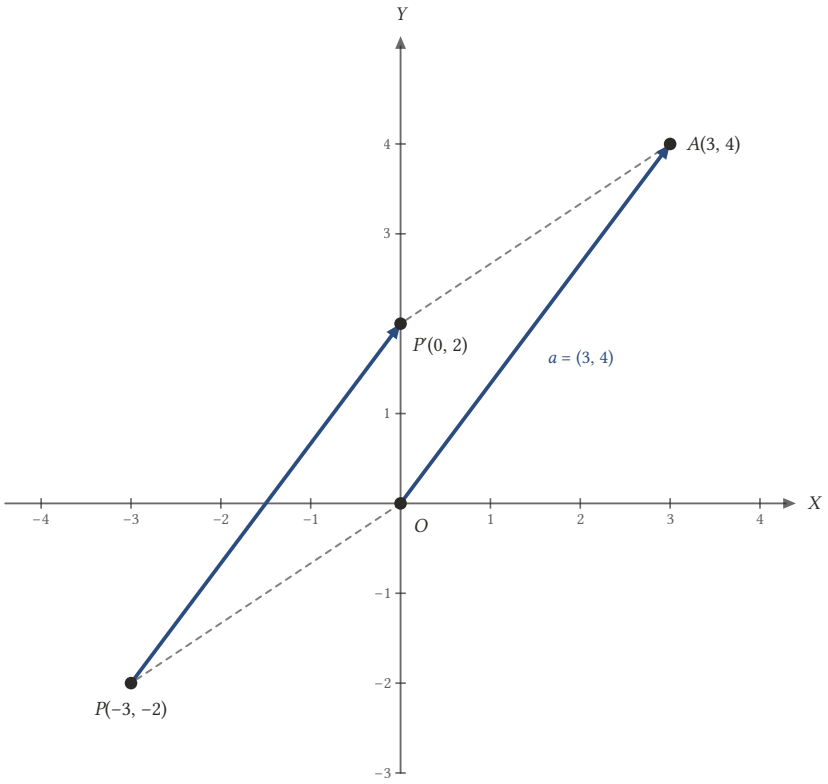
Yani f_a düzlemin her noktasını aynı a vektörü kadar kaydırır: $P(x,y)$ noktası $P'(x+a_1, y+a_2)$ noktasına gider. P ile P''yi birleştiren yönlü doğru parçası her nokta için aynı vektörü, a'yı temsil eder.

Örnek 16.1 (Bir noktanın ötelenmesi). $A(3,4)$ sabit noktası ve $a = \overrightarrow{OA}$ verilsin. f_a ötelemesinin $P(-3,-2)$ noktasını hangi noktaya taşıdığını bulunuz.

Çözüm.
$a = \overrightarrow{OA} = (3,4)$'tür. Tanım gereği P'nin koordinatlarına a'nın bileşenlerini ekleriz:

$$f_a\ (\ (-3,-2)\ ) = (-3,-2) + (3,4) = (-3+3, -2+4) = (0,2).$$

Demek ki f_a, $P(-3,-2)$ noktasını $P'(0,2)$ noktasına öteler.



Şekil 16.2: a = (3, 4) ötelemesi P(−3, −2) noktasını P'(0, 2) noktasına taşır.

■

İki ötelemeyi art arda uygularsak yine bir öteleme elde ederiz; öteleme vektörleri ise toplanır.

Teorem 16.1 (İki ötelemenin bileşkesi). *f_a ve f_b, $\mathbb{R}^2$'de iki öteleme olsun. Bu durumda*

$$f_a \circ f_b = f_{a+b}$$

dir.

İspat.
İki fonksiyonun eşit olduğunu göstermek için her noktada aynı değeri aldıklarını göstermeliyiz. $P \in \mathbb{R}^2$ rastgele bir nokta olsun. Bileşkenin tanımına göre önce f_b, sonra f_a uygulanır:

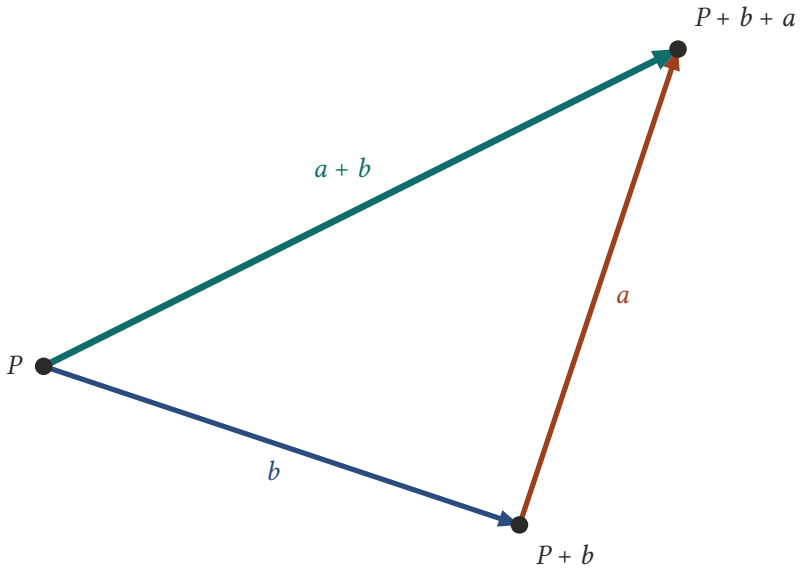
$$(f_a \circ f_b)(P) = f_a\ (\ f_b(P)\ ) = f_a(P+b) = (P+b) + a.$$

Vektör toplamı birleşmeli ve değişmeli olduğundan (bkz. Teorem 7.1) $(P+b)+a = P+(a+b)$'dir. Bu da tanım gereği $f_{a+b}(P)$'dir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(f_a \circ f_b)(P) = P + (a+b) = f_{a+b}(P).$$

P rastgele seçildiğinden $f_a \circ f_b = f_{a+b}$ bulunur.



Şekil 16.3: Önce b, *sonra* a *kadar ötelemek,* a + b *kadar tek bir ötelemeyle aynıdır.*

■

Yani iki ötelemeyi arka arkaya uygulamak, vektörlerin toplamı kadar tek bir öteleme yapmakla aynıdır. Vektör toplamı değişmeli olduğundan uygulama sırası da önemli değildir.

Sonuç 16.1 (Ötelemeler değişmelidir). *$\mathbb{R}^2$'deki her f_a ve f_b ötelemesi için $f_a \circ f_b = f_b \circ f_a$'dır.*

İspat.
Teorem 16.1 iki kez uygulanırsa $f_a \circ f_b = f_{a+b}$ ve $f_b \circ f_a = f_{b+a}$ bulunur. $a + b = b + a$ olduğundan bu iki öteleme aynı vektörle yapılır, yani eşittir.
■

Örnek 16.2 (Bileşkeyi tek ötelemeyle hesaplamak). $a = (1, 2)$ ve $b = (-4, 3)$ olsun. $(f_a \circ f_b)(P)$ noktasını $P(2, 2)$ için hem adım adım hem de tek bir ötelemeyle bulunuz.

Çözüm.
Adım adım. Önce f_b, sonra bu noktaya f_a uygulanır:

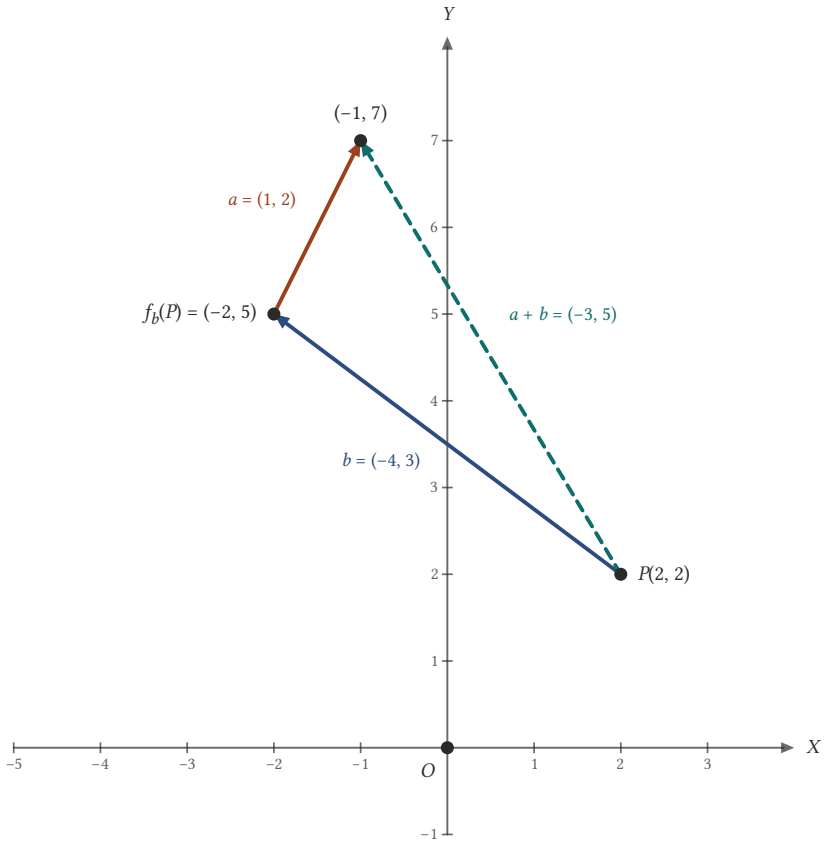
$$f_b\big(\,(2,2)\,\big) = (2-4, 2+3) = (-2, 5),$$
$$f_a\big(\,(-2,5)\,\big) = (-2+1, 5+2) = (-1, 7).$$

Tek ötelemeyle. Teorem 16.1 gereği $f_a \circ f_b = f_{a+b}$ ve $a + b = (1-4, 2+3) = (-3, 5)$'tir. Buradan

$$f_{a+b}\big(\,(2,2)\,\big) = (2-3, 2+5) = (-1, 7)$$

bulunur. İki yol aynı $(-1, 7)$ noktasını verir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.4: $P(2, 2)$ noktasına önce $b = (-4, 3)$, sonra $a = (1, 2)$ ötelemesi uygulanır; sonuç, $a + b = (-3, 5)$ ötelemesinin verdiği $(-1, 7)$ noktasıdır.

■

Bir öteleme hiçbir iki noktayı üst üste düşürmez ve her noktaya bir yerden ulaşır; ötelemenin yaptığını geri almak için de ters yönde ötelemek yeter.

Teorem 16.2 (Ötelemenin tersi). *Her $A \in \mathbb{R}^2$ için $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ötelemesi bire bir ve örtendir. Ayrıca*

$$(f_a)^{-1} = f_{-a}$$

dır.

İspat.
Adım 1: bire birlik. *$P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ için $f_a(P_1) = f_a(P_2)$ olsun. Bu, $P_1 + a = P_2 + a$ demektir. İki yana $-a$ eklersek $P_1 = P_2$ bulunur. Demek ki farklı noktaların görüntüleri de farklıdır; f_a bire birdir.*
Adım 2: örtenlik. *$P' \in \mathbb{R}^2$ rastgele bir nokta olsun. $f_a(P) = P'$ olacak bir P arıyoruz. $P + a = P'$ eşitliğinden $P = P' - a$ olmalıdır. Bu nokta gerçekten $\mathbb{R}^2$'dedir ve*

$$f_a(P' - a) = (P' - a) + a = P'$$

sağlar. Her P' bir noktanın görüntüsü olduğundan f_a örtendir.
Adım 3: ters fonksiyon. *Bire bir ve örten olduğu için f_a'nın $(f_a)^{-1}$ ters fonksiyonu vardır. $Q \in \mathbb{R}^2$ rastgele olsun ve $f_a(P) = Q$ olsun. Ters fonksiyonun tanımı gereği $(f_a)^{-1}(Q) = P$'dir. Adım 2'deki hesaba göre $P = Q - a$ olduğundan*

$$(f_a)^{-1}(Q) = Q - a = Q + (-a) = f_{-a}(Q)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Q rastgele olduğundan $(f_a)^{-1} = f_{-a}$'dır.
■

Hiçbir noktayı kıpırdatmayan öteleme de ötelemelerin arasında özel bir yer tutar.

Tanım 16.2 (Birim öteleme). 0 sıfır vektörünü göstermek üzere her $P \in \mathbb{R}^2$ için $f_0(P) = P + 0 = P$'dir. f_0 ötelemesine **birim (özdeşlik) öteleme** denir ve $f_0 = I$ ile gösterilir.

Yani birim öteleme, sıfır vektörü kadar ötelemedir: her nokta yerinde kalır. Sayılarda 0 toplamanın etkisiz elemanı olduğu gibi, I da bileşkenin etkisiz elemanıdır: Teorem 16.1 gereği $f_a \circ I = f_{a+0} = f_a$ ve $I \circ f_a = f_a$'dır.
Birim öteleme sayesinde ters formülüne (bkz. Teorem 16.2) bileşke kuralıyla da ulaşabiliriz. f_a'nın tersinin de bir öteleme olduğunu, yani bir b vektörü için $(f_a)^{-1} = f_b$ yazılabildiğini kabul edelim; b'yi bileşke kuralı belirler. Bir fonksiyonla tersinin bileşkesi özdeşlik fonksiyonudur, dolayısıyla

$$I = f_0 = (f_a)^{-1} \circ f_a = f_b \circ f_a = f_{b+a}$$

olur. $f_{b+a} = f_0$ eşitliğini O noktasına uygularsak $O + (b + a) = O$, yani $b + a = 0$ bulunur. Buradan $b = -a$ ve yine $(f_a)^{-1} = f_{-a}$ çıkar.

Örnek 16.3 (Görüntüsü verilen noktayı bulmak). $a = (2, -5)$ olsun. f_a ötelemesi altında görüntüsü $P'(1, 1)$ olan P noktasını bulunuz.

Çözüm.
$f_a(P) = P'$ ise Teorem 16.2 gereği $P = (f_a)^{-1}(P') = f_{-a}(P')$'dür. $-a = (-2, 5)$ olduğundan

$$P = (1, 1) + (-2, 5) = (1 - 2, 1 + 5) = (-1, 6)$$

bulunur. Doğrulama:

$$f_a\ (\ (-1, 6)\ ) = (-1 + 2, 6 - 5) = (1, 1).$$

■

Ötelemenin en önemli özelliği, şekillerin boyutunu değiştirmemesidir: bir noktalar çiftini birlikte kaydırdığımızda aralarındaki uzaklık aynı kalır.

Teorem 16.3 (Öteleme uzaklığı korur). *$f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $P \mapsto P + a$ bir öteleme olsun. Her $P, Q \in \mathbb{R}^2$ için*

$$|\ f_a(P)\, f_a(Q)\ | = |\ PQ\ |$$

dir.

İspat.
$a = (a_1, a_2)$, $P(p_1, p_2)$ ve $Q(q_1, q_2)$ olsun. İki nokta arasındaki uzaklık formülüne göre (bkz. Tanım 1.10)

$$|\ PQ\ | = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$

dir. Öte yandan $f_a(P) = (p_1 + a_1, p_2 + a_2)$ ve $f_a(Q) = (q_1 + a_1, q_2 + a_2)$'dir. Bu iki noktanın koordinat farklarında a_1 ve a_2 birbirini götürür:

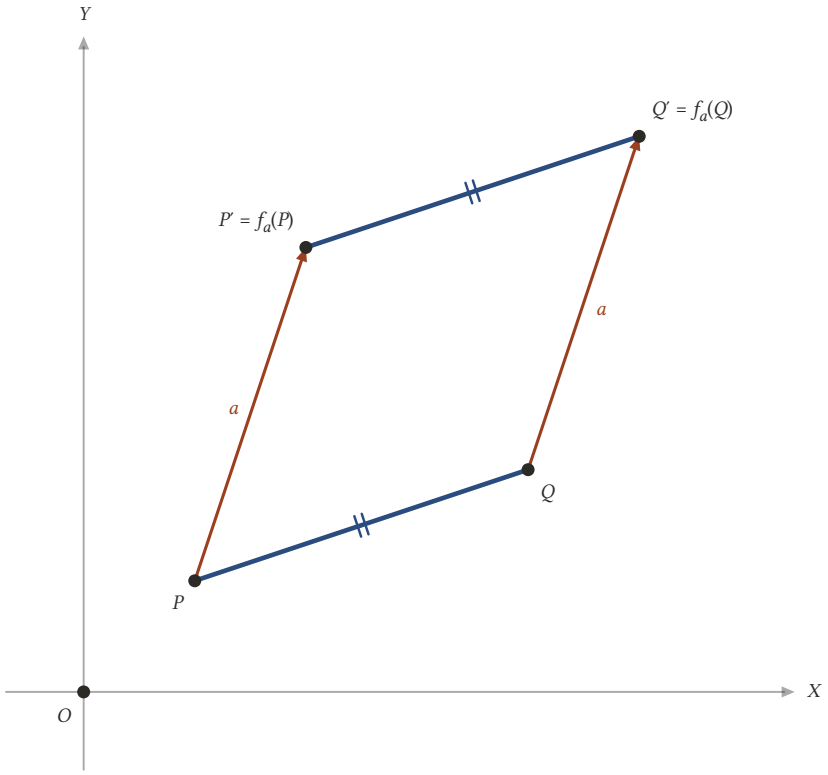
$$(q_1 + a_1) - (p_1 + a_1) = q_1 - p_1, \qquad (q_2 + a_2) - (p_2 + a_2) = q_2 - p_2.$$

Dolayısıyla

$$|\ f_a(P)\, f_a(Q)\ | = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} = |\ PQ\ |$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.5: PQ *parçası* a *kadar ötelenince uzunluğu değişmez:* |P′Q′| = |PQ|.

■

Yani ötelenmiş bir parçanın uzunluğu, parçanın kendi uzunluğuna eşittir. Kanıtta asıl iş gören şey, iki noktanın koordinat farklarının öteleme altında hiç değişmemesidir: $f_a(Q) - f_a(P) = Q - P$. Bu gözlemi bölümün geri kalanında da kullanacağız.

Örnek 16.4 (Ötelemeden önce ve sonra uzaklık). $P(1,2)$, $Q(4,6)$ ve $a = (-3,1)$ olsun. $\mid PQ \mid$ ile $\mid f_a(P)\, f_a(Q) \mid$ uzaklıklarını ayrı ayrı hesaplayıp karşılaştırınız.

Çözüm.
Ötelemeden önce. İki nokta arasındaki uzaklık

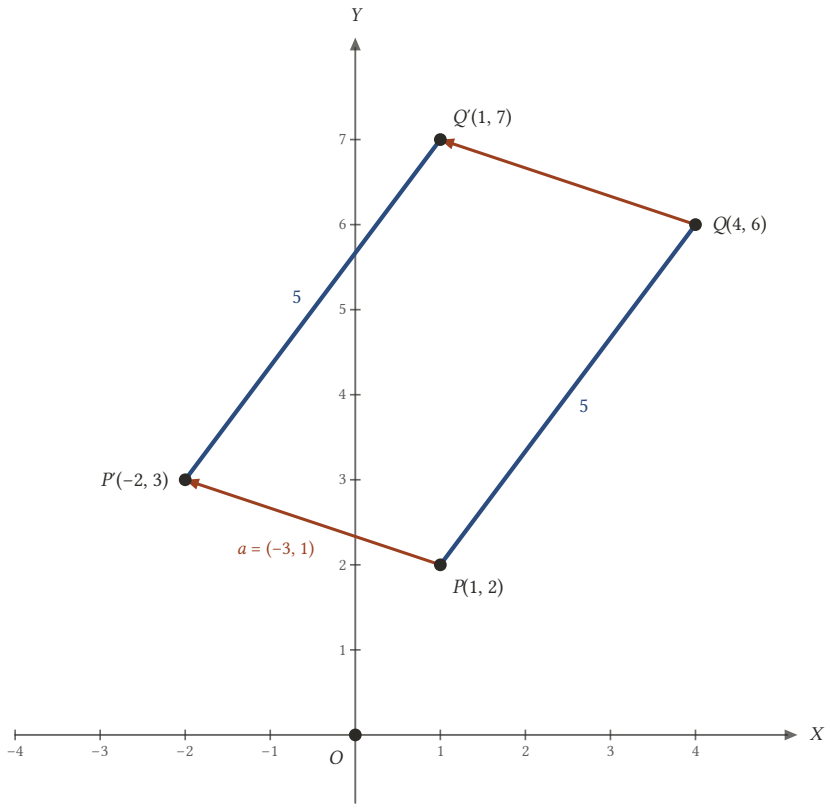
$$\mid PQ \mid = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

olur.
Ötelemeden sonra. $f_a(P) = (1-3, 2+1) = (-2,3)$ ve $f_a(Q) = (4-3, 6+1) = (1,7)$'dir. Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$\sqrt{\big(\,1-(-2)\big)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

olur. İki uzaklık eşittir, Teorem 16.3 ile uyumludur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.6: $a = (-3, 1)$ ötelemesinden önce ve sonra iki nokta arasındaki uzaklık 5'tir.

■

Öteleme noktaları tek tek taşıdığı gibi bir doğrunun bütün noktalarını da birlikte taşır; ortaya çıkan küme yine bir doğrudur.

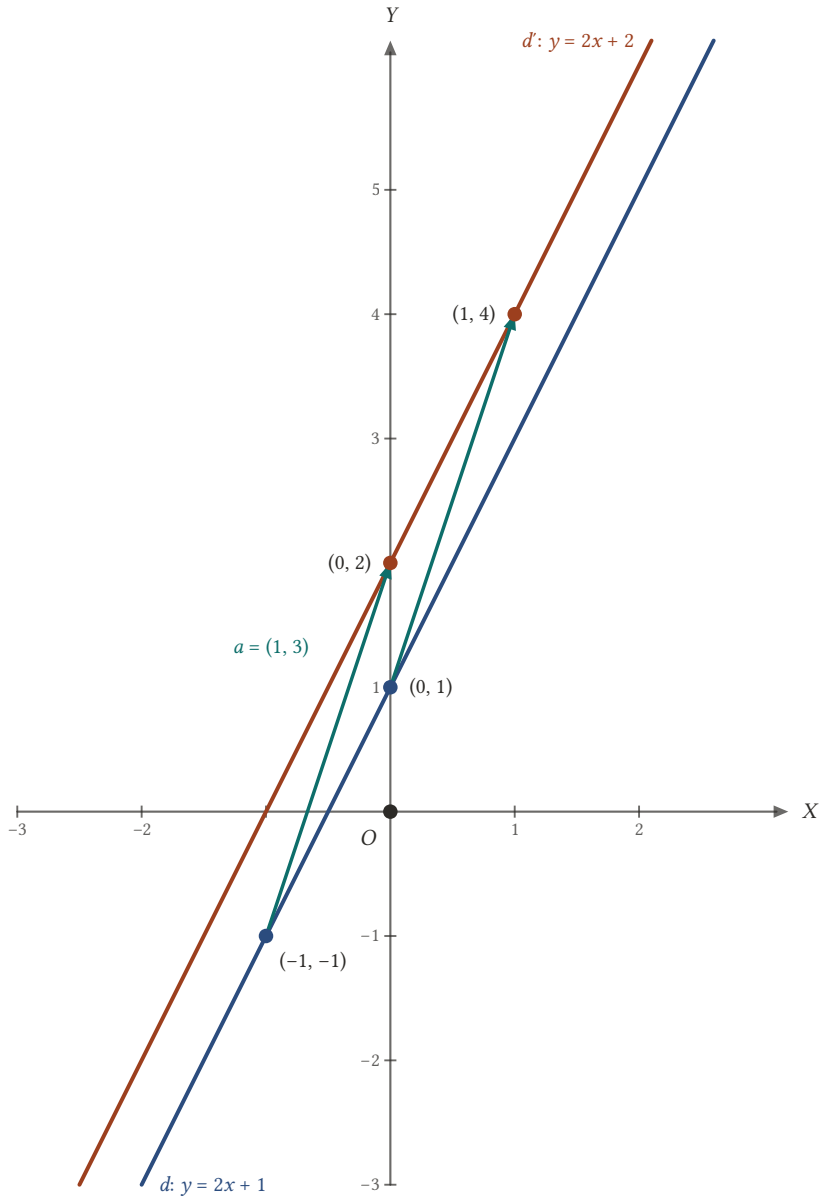
Örnek 16.5 (Bir doğrunun ötelenmesi). $d : y = 2x + 1$ doğrusunun her noktası $a = (1, 3)$ vektörü kadar ötelendiğinde oluşan kümenin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: görüntü noktasının koordinatları. (x, y), d üzerinde bir nokta olsun; görüntüsünü (u, v) ile gösterelim. Öteleme tanımından $u = x + 1$ ve $v = y + 3$'tür. Buradan $x = u - 1$, $y = v - 3$ çıkar.
Adım 2: denklemi aktarmak. (x, y) noktası d üzerinde olduğundan $y = 2x + 1$'dir. Buraya x ve y'nin u, v cinsinden değerlerini yazalım:

$$v - 3 = 2(u - 1) + 1 \quad \Rightarrow \quad v = 2u + 2.$$

Adım 3: sonuç. Tersine, $v = 2u + 2$ sağlayan her (u, v) noktası, d üzerindeki $(u - 1, v - 3)$ noktasının görüntüsüdür. Dolayısıyla görüntü kümesi $d' : y = 2x + 2$ doğrusudur. Eğim değişmediği için d', d'ye paraleldir; yalnız doğru yukarı doğru kaymıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.7: d doğrusunun her noktası $a = (1, 3)$ kadar ötelenince d' doğrusu oluşur; iki doğrunun eğimi aynıdır.

■

16.2 Eksenlerin Ötelenmesi

Şimdiye kadar koordinat sistemini sabit tutup noktaları kaydırdık. Şimdi tersini yapacağız: noktalar yerinde dururken koordinat eksenlerini kaydıracağız. Bu işlem, bir eğrinin denklemini sadeleştirmek için en çok başvurulan araçtır.

$\mathbb{R}^2$'de başlangıç noktası $O(0,0)$ olan dik koordinat sistemine XY diyelim. X eksenini kendisine paralel kalacak biçimde pozitif yönde b kadar, Y eksenini de kendisine paralel kalacak biçimde pozitif yönde a kadar kaydıralım. İki yeni eksen $O'(a,b)$ noktasında dik kesişir; bu yeni dik koordinat sistemine $X'Y'$ diyelim. Koordinat sistemi böylece $\overrightarrow{OO'} = (a,b)$ vektörü kadar ötelenmiş olur. XY sisteminde koordinatları (x,y) olan bir P noktasının $X'Y'$ sistemindeki koordinatlarını (x',y') ile gösterelim.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 16.4 (Eksenlerin ötelenmesinde koordinat bağıntıları). *XY dik koordinat sistemi $\overrightarrow{OO'} = (a, b)$ vektörü kadar ötelenerek $X'Y'$ sistemi elde edilsin. Bir P noktasının eski koordinatları (x, y), yeni koordinatları (x', y') ise*

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ve buna denk olarak

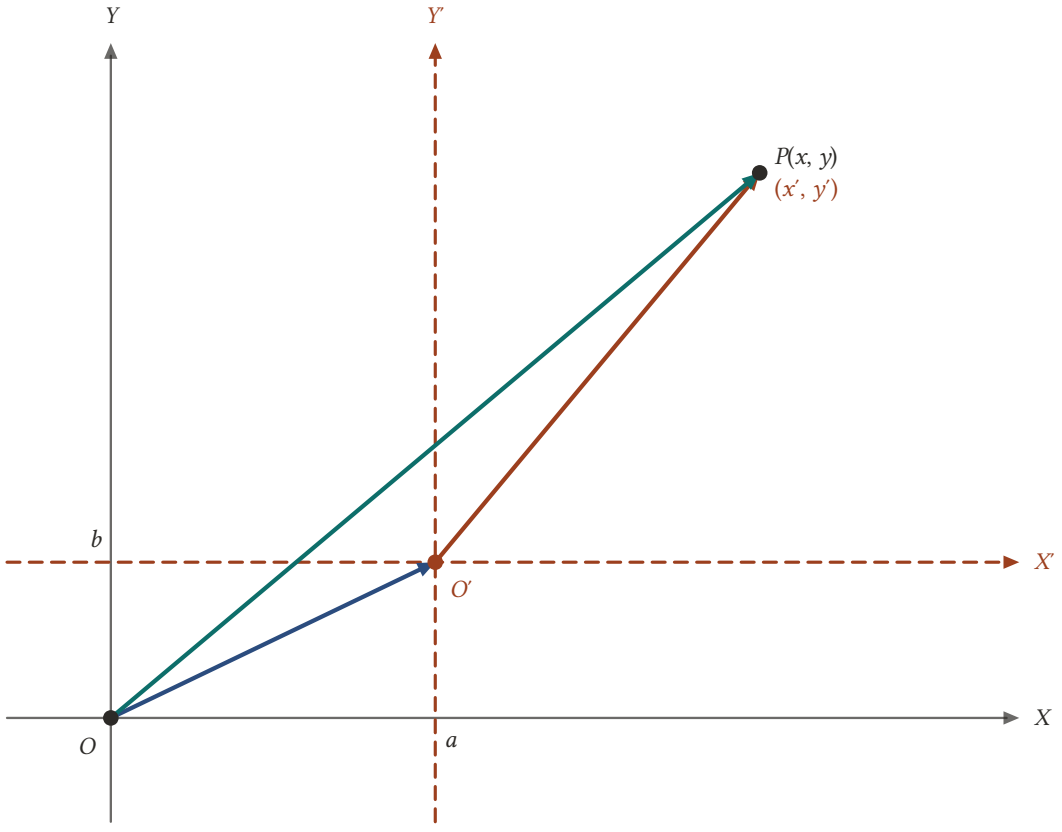
$$\left.\begin{aligned} x' &= x - a \\ y' &= y - b \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dir.

İspat.
Adım 1: vektörlerle ayrışım. *O, O' ve P noktaları için üçgen kuralından (bkz. Önerme 7.5)*

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$$

yazılır.



Şekil 16.8: Eksenler OO′ = (a, b) *kadar ötelenir;* OP = OO′ + O′P *eşitliğinden* x = x′ + a, y = y′ + b *çıkar.*

Adım 2: koordinatlarla yazmak. *$\overrightarrow{OP}$'nin bileşenleri P'nin eski koordinatları, yani (x, y)'dir. $\overrightarrow{OO'} = (a, b)$'dir. X' ve Y' eksenleri X ve Y eksenlerine paralel, aynı yönlü ve aynı birimli olduğundan $\overrightarrow{O'P}$'nin bileşenleri de P'nin yeni sistemdeki koordinatları, yani (x', y')'dür. Böylece*

$$(x, y) = (a, b) + (x', y') = (x' + a, y' + b)$$

olur. Bileşenleri eşitlersek (1) bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: yeni koordinatları çekmek. *(1)'deki eşitliklerden a ve b'yi karşı tarafa atarsak $x' = x - a$, $y' = y - b$, yani (2) elde edilir.*
■

Yani eksenleri (a, b) kadar kaydırmak, her noktanın koordinatlarından (a, b) çıkarmak demektir. (1) bağıntısı "yeni koordinatlardan eskiye", (2) bağıntısı "eskiden yeniye" geçişi verir. Denklemlerle çalışırken genellikle (1)'i kullanırız: eski denklemde x yerine $x' + a$, y yerine $y' + b$ yazarız.

Tanım 16.3 (Eksenleri öteleyen dönüşüm). Koordinat eksenlerini $\overrightarrow{OO'} = (a, b)$ vektörü kadar öteleyen dönüşüm $T_{(a,b)}$ ile gösterilir:

$$T_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto (x', y') = (x - a, y - b).$$

Yani $T_{(a,b)}$, bir noktanın eski koordinatlarını alıp yeni koordinatlarını verir. Noktaların ötelenmesiyle karşılaştırırsak $T_{(a,b)}$, koordinatlar açısından $-(a, b)$ vektörü kadar bir noktalar ötelemesidir: $T_{(a,b)} = f_{(-a,\,-b)}$. Eksenler bir yöne kayınca, noktalar yeni eksenlere göre ters yöne kaymış görünür.

Örnek 16.6 (Yeni sistemde bir noktanın koordinatları). XY, $\mathbb{R}^2$'de başlangıç noktası $O(0, 0)$ olan dik koordinat sistemi olsun. Koordinat eksenleri, yeni başlangıç noktası $P(-3, 5)$ olacak biçimde kendilerine paralel kaydırılıyor. $Q(4, -2)$ noktasının yeni sistemdeki koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Yeni başlangıç noktası $(-3, 5)$ olduğundan eksenler $\overrightarrow{OP} = (-3, 5)$ vektörü kadar ötelenmiştir. Dönüşüm

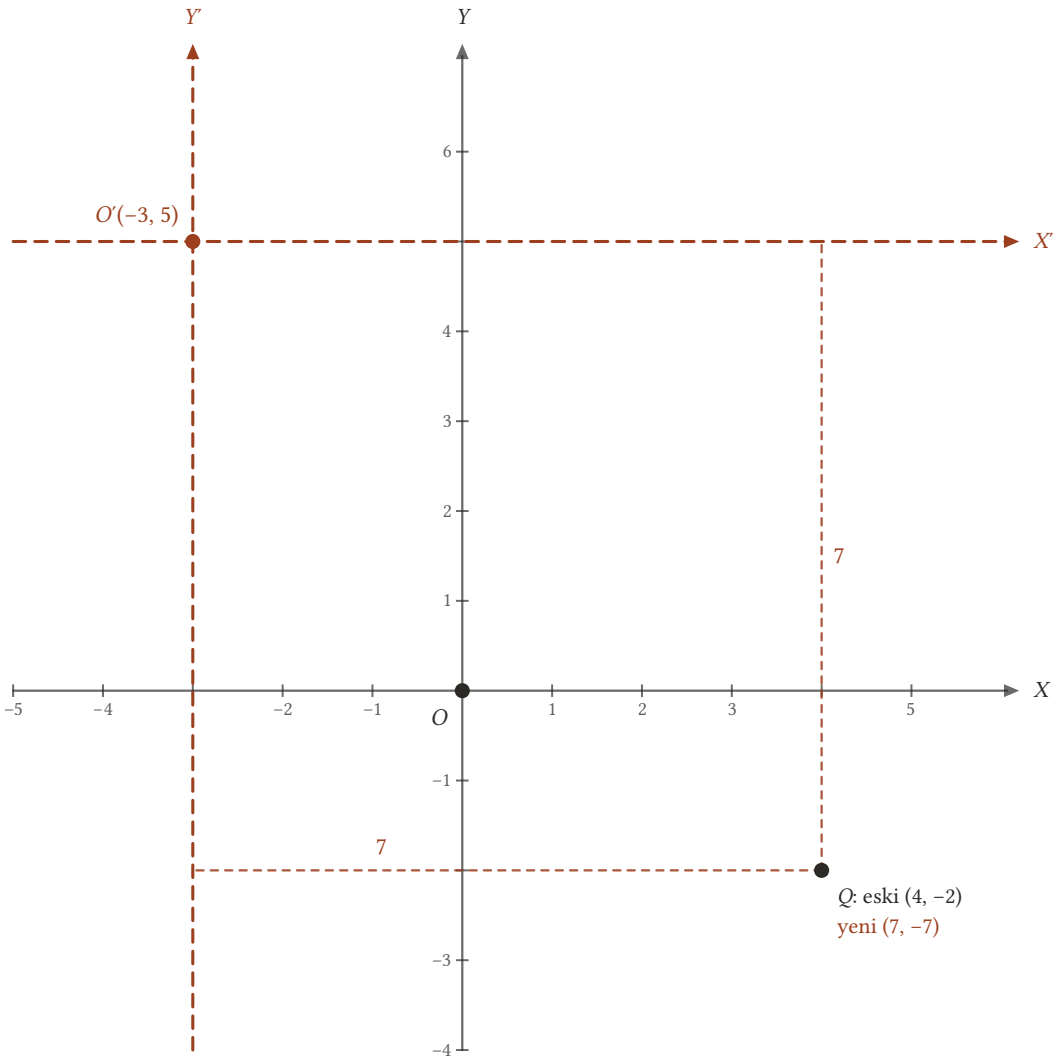
$$T_{(-3,5)} : (x, y) \mapsto (x', y') = \big(\ x - (-3), y - 5\ \big)$$

dir; yani $x' = x + 3$ ve $y' = y - 5$'tir. Q için $x = 4$ ve $y = -2$ yazarsak

$$x' = 4 + 3 = 7, \qquad y' = -2 - 5 = -7$$

bulunur. $Q(4, -2)$ noktasının yeni sistemdeki koordinatları $(7, -7)$'dir; bu noktayı yeni sistemde $Q'(7, -7)$ diye yazarız.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.9: Başlangıç noktası $O'(-3, 5)$ olan yeni sistemde $Q(4, -2)$ noktasının koordinatları $(7, -7)$'dir.

■

Ters yöndeki soru da aynı kolaylıkla çözülür: yeni koordinatlar bilinirken eski koordinatları (1) bağıntısı verir.

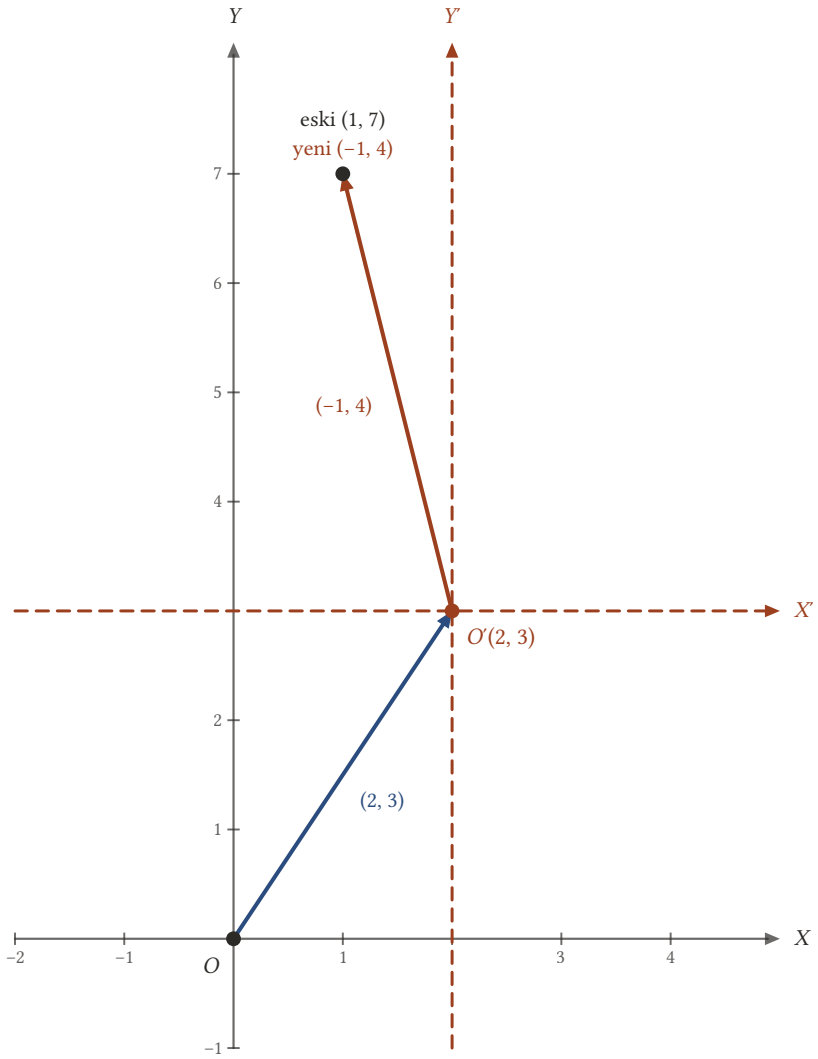
Örnek 16.7 (Yeni koordinatlardan eski koordinatlara). Eksenler $\overrightarrow{OO'} = (2, 3)$ vektörü kadar ötelenmiştir. Yeni sistemdeki koordinatları $(-1, 4)$ olan noktanın eski sistemdeki koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Teorem 16.4 içindeki (1) bağıntısında $a = 2$, $b = 3$, $x' = -1$, $y' = 4$ yazarsak

$$x = -1 + 2 = 1, \qquad y = 4 + 3 = 7$$

bulunur. Nokta eski sistemde $(1, 7)$'dir. Doğrulama: (2) ile $x' = 1 - 2 = -1$ ve $y' = 7 - 3 = 4$ çıkar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.10: Yeni koordinatları (−1, 4) olan nokta, eski sistemde (2, 3) + (−1, 4) = (1, 7) noktasıdır.

■

Noktaların ötelenmesinin uzaklığı koruduğunu görmüştük. Eksenlerin ötelenmesi için de benzer bir sonuç geçerlidir: yeni koordinatlarla hesaplanan uzunluk, açı ve alan, eski koordinatlarla hesaplananlarla aynı çıkar.

Teorem 16.5 (Ötelemede korunan büyüklükler). *Bir $T_{(a,b)}$ öteleme dönüşümünde*

- *uzunluklar,*
- *açılar,*
- *alanlar*

değişmez.

İspat.
Kanıt boyunca şu gözlemi kullanacağız: $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ için

$$T_{(a,b)}(P_1) = (x_1 - a, y_1 - b), \qquad T_{(a,b)}(P_2) = (x_2 - a, y_2 - b)$$

olduğundan yeni koordinatların farkları eskilerinkine eşittir:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(x_2 - a) - (x_1 - a) = x_2 - x_1, \qquad (y_2 - b) - (y_1 - b) = y_2 - y_1.$$

Uzunluklar. *Eski koordinatlarla* $| \ P_1P_2 \ | = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$*'dir. Yeni koordinatlarla hesaplanan uzaklık ise*

$$\begin{aligned} | \ T_{(a,b)}(P_1)\,T_{(a,b)}(P_2) \ | &= \sqrt{\big(\ (x_2 - a) - (x_1 - a)\big)^2 + \big(\ (y_2 - b) - (y_1 - b)\big)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

olur. İkisi eşittir: $| \ P_1P_2 \ | = | \ T_{(a,b)}(P_1)\,T_{(a,b)}(P_2) \ |$.
Açılar. *Düzlemde* $d_1 : y = m_1x + n_1$ *ve* $d_2 : y = m_2x + n_2$ *doğruları verilsin ve* α*,* d_1*'den* d_2*'ye yönlenmiş açı olsun.* $1 + m_1m_2 \neq 0$ *ise Teorem 2.3 gereği*

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}$$

dir. Yeni sistemde bu doğruların denklemlerini bulmak için (1)'deki $x = x' + a$*,* $y = y' + b$ *değerlerini yerine yazarız:*

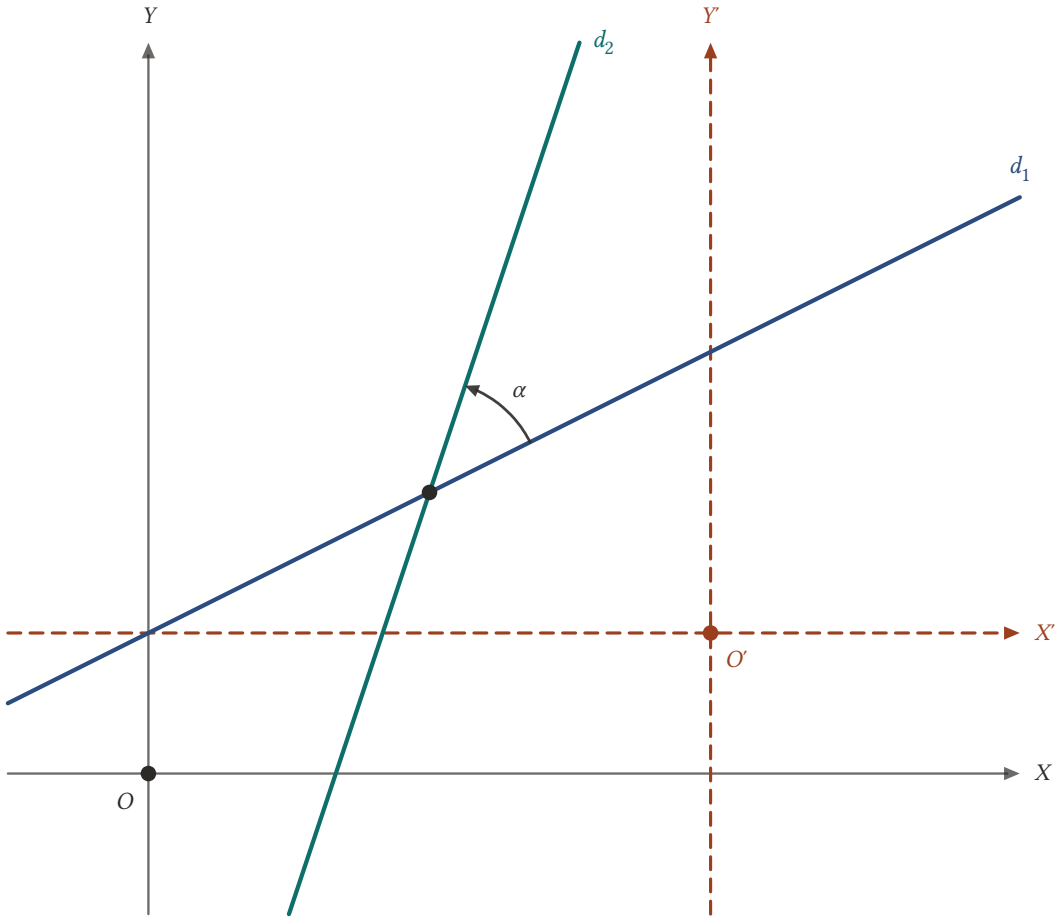
$$\begin{aligned} d_1' &: y' + b = m_1(x' + a) + n_1 \Rightarrow y' = m_1x' + (m_1a + n_1 - b), \\ d_2' &: y' + b = m_2(x' + a) + n_2 \Rightarrow y' = m_2x' + (m_2a + n_2 - b). \end{aligned}$$

Yeni denklemlerde eğimler yine m_1 *ve* m_2*'dir; yalnız sabit terimler değişmiştir. Yeni sistemde* d_1'*'den* d_2'*'ye yönlenmiş açı* α' *ise aynı formülle*

$$\tan\alpha' = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2} = \tan\alpha$$

bulunur. Yönlenmiş açılar $[0, \pi)$ *aralığında olduğundan ve tanjant bu aralıkta (*$\frac{\pi}{2}$ *dışında) bire bir olduğundan* $\alpha' = \alpha$*'dır.* $1 + m_1m_2 = 0$ *ise doğrular her iki sistemde de diktir ve* $\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}$ *olur. Düşey bir doğru* $x = c$ *ise yeni sistemde* $x' = c - a$ *olur, yani yine düşeydir. Düşey doğrular için açı formülleri (bkz. Teorem 2.3) de yalnız eğimlere bağlı olduğundan bu durumda da açı değişmez.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.11: Eksenler ötelenince d_1 ile d_2 doğrularının denklemleri değişir, eğimleri ve aralarındaki α açısı değişmez.

Alanlar. *Köşeleri $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ olan bir üçgen alalım. $u = \overrightarrow{P_1P_2}$ ve $v = \overrightarrow{P_1P_3}$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarı P_2P_3 köşegeni iki eş üçgene ayırır; biri $P_1P_2P_3$ üçgenidir. Üç nokta doğrusalsa alan her iki sistemde de 0'dır; aksi hâlde u ve v lineer bağımsızdır ve Önerme 9.4 uygulanır. Buna göre üçgenin alanı*

$$\mathcal{A}(P_1P_2P_3) = \frac{1}{2}\,\big|\,(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)\,\big|$$

dir. Bu ifade yalnız koordinat farklarını içerir. Kanıtın başındaki gözlem gereği bu farklar yeni koordinatlarda da aynıdır; dolayısıyla yeni koordinatlarla hesaplanan alan da aynı sayıyı verir. Çokgen bölgeler köşegenlerle üçgenlere ayrılabildiği için onların alanı da değişmez. (Aynı sonuca şöyle de varılabilir: kenar uzunlukları ve açılar değişmediğinden üçgen kendisiyle eş kalır, eş üçgenlerin alanları da eşittir.)

■

Yani öteleme bir şeklin yalnız "adresini" değiştirir; boyunu, açılarını ve alanını değiştirmez. Bir problemi çözerken eksenleri istediğimiz gibi kaydırabilir, hesabı daha kolay olan sistemde yapabiliriz. Uzunluklar için bu sonuç, noktaların ötelenmesinde uzaklığın korunmasından (bkz. Teorem 16.3) da çıkar, çünkü $T_{(a,b)} = f_{(-a,\,-b)}$'dir.

Örnek 16.8 (Bir üçgenin alanı iki sistemde). Köşeleri $A(1,1)$, $B(5,2)$ ve $C(2,4)$ olan üçgenin alanını hem XY sisteminde hem de eksenler $(3,-2)$ vektörü kadar ötelendikten sonra yeni sistemde hesaplayınız.

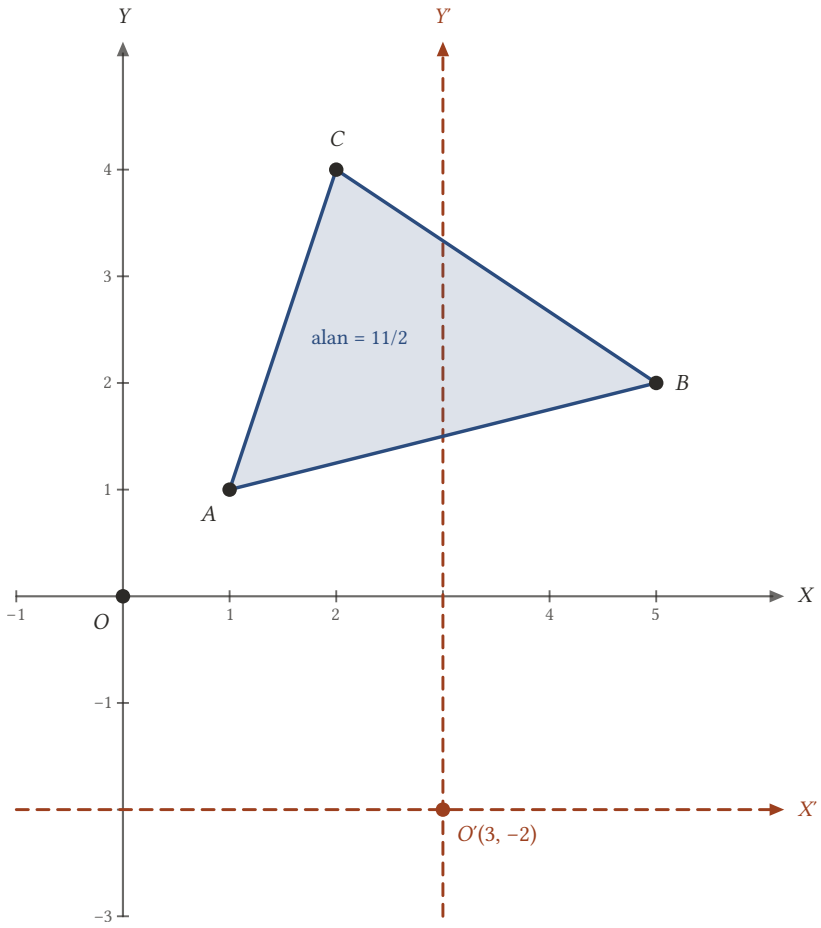
Çözüm.
Eski sistemde. $\overrightarrow{AB} = (4,1)$ ve $\overrightarrow{AC} = (1,3)$'tür. Alan

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \mid 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \mid = \frac{11}{2}$$

dir.
Yeni sistemde. $T_{(3,-2)}$ ile $x' = x - 3$, $y' = y + 2$ olduğundan köşeler $A'(-2,3)$, $B'(2,4)$ ve $C'(-1,6)$ olur. Bu kez

$$\overrightarrow{A'B'} = (2-(-2), 4-3) = (4,1), \qquad \overrightarrow{A'C'} = (-1-(-2), 6-3) = (1,3)$$

bulunur. Vektörler değişmediği için alan yine $\frac{1}{2} \mid 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \mid = \frac{11}{2}$'dir.



Şekil 16.12: ABC üçgeninin alanı eski sistemde de, eksenler (3, −2) kadar ötelendikten sonra da 11/2'dir.

■

Eksenlerin ötelenmesinin asıl kullanım yeri denklemlerdir. Başlangıç noktasını uygun bir yere taşırsak bir eğrinin ya da doğrunun denklemi çok daha sade bir biçim alır.

Örnek 16.9 (Bir doğrunun yeni sistemdeki denklemi). Eksenler $\overrightarrow{OO'} = (1,5)$ vektörü kadar ötelenmiştir. $d : 2x - y + 3 = 0$ doğrusunun yeni sistemdeki denklemini bulunuz.

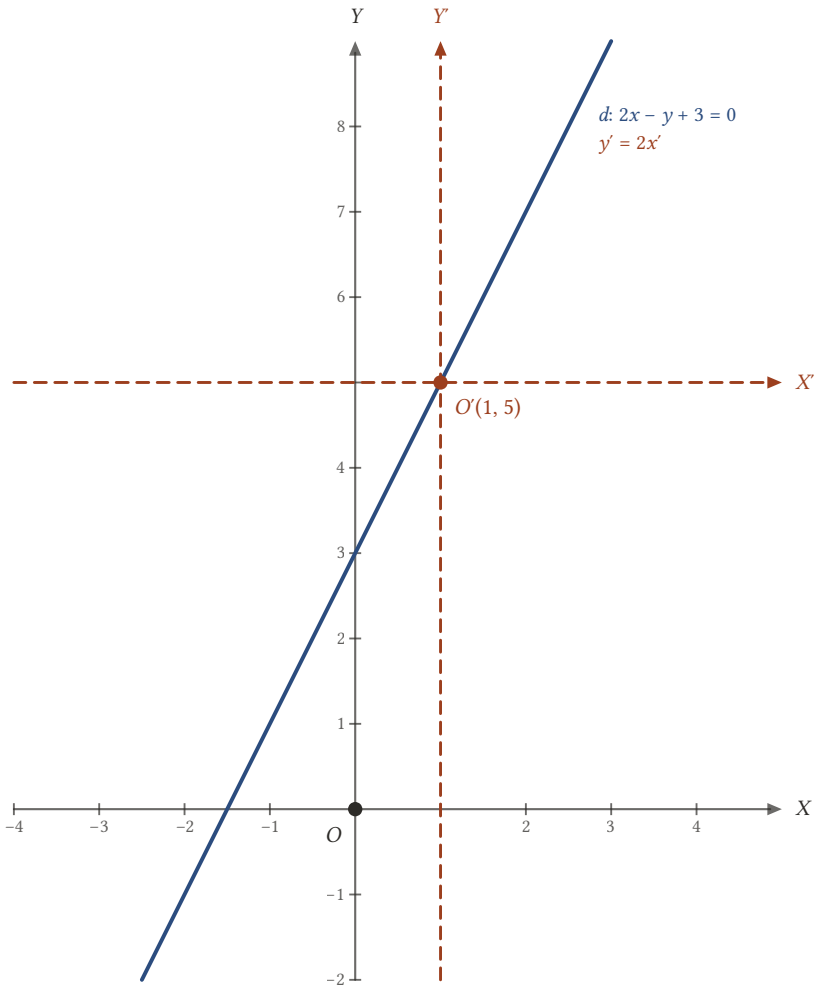
Çözüm.

(1) bağıntısına göre $x = x' + 1$ ve $y = y' + 5$'tir. Bunları d'nin denkleminde yerine yazalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$2(x'+1)-(y'+5)+3=0 \Rightarrow 2x'+2-y'-5+3=0 \Rightarrow 2x'-y'=0.$$

Yeni denklem $y'=2x'$'tür. Sabit terim kaybolmuştur, çünkü yeni başlangıç noktası $O'(1,5)$, d'nin üzerindedir: $2\cdot 1-5+3=0$. Eğim ise iki sistemde de 2'dir.



Şekil 16.13: d doğrusu yeni başlangıç noktası $O'(1,5)$'ten geçtiği için yeni denkleminde sabit terim yoktur.

■

16.3 Denklemleri Ötelemeyle Sadeleştirmek

İkinci dereceden bir denklemde x ve y'nin birinci dereceden terimleri, eğrinin "merkezinin" başlangıç noktasında olmadığını gösterir. Tam kareye tamamlama bu merkezi ortaya çıkarır; eksenleri oraya ötelemek de birinci dereceden terimleri yok eder.

 CC BY-NC-SA 4.0

Eksenleri öteleyerek bir denklemi üç adımda sadeleştirmek

1. x'li terimleri ve y'li terimleri ayrı ayrı gruplayıp her grubu tam kareye tamamlayın: $(x-a)^2$ ve $(y-b)^2$ biçimli ifadeler elde edin (bir değişken yalnız birinci dereceden geçiyorsa onu $k(x-a)$ biçiminde yazın).
2. $x' = x-a$, $y' = y-b$ alın; bu, eksenleri $T_{(a,b)}$ ile $O'(a,b)$ noktasına ötelemektir.
3. Denklemde $x = x'+a$, $y = y'+b$ yazıp sadeleştirin. Tam kareye tamamlanan değişkenlerin birinci dereceden terimleri kaybolur; $k(x-a)$ biçiminde yazılan değişkenin ise sabiti kaybolur, kx' terimi kalır.

Örnek 16.10 (Bir çember denklemini sadeleştirmek). $x^2+y^2-4x+6y-3=0$ denklemini eksenleri öteleyerek birinci dereceden terimleri olmayan bir denkleme dönüştürünüz.

Çözüm.
Adım 1: tam kareye tamamlama. x'li ve y'li terimleri gruplayalım:

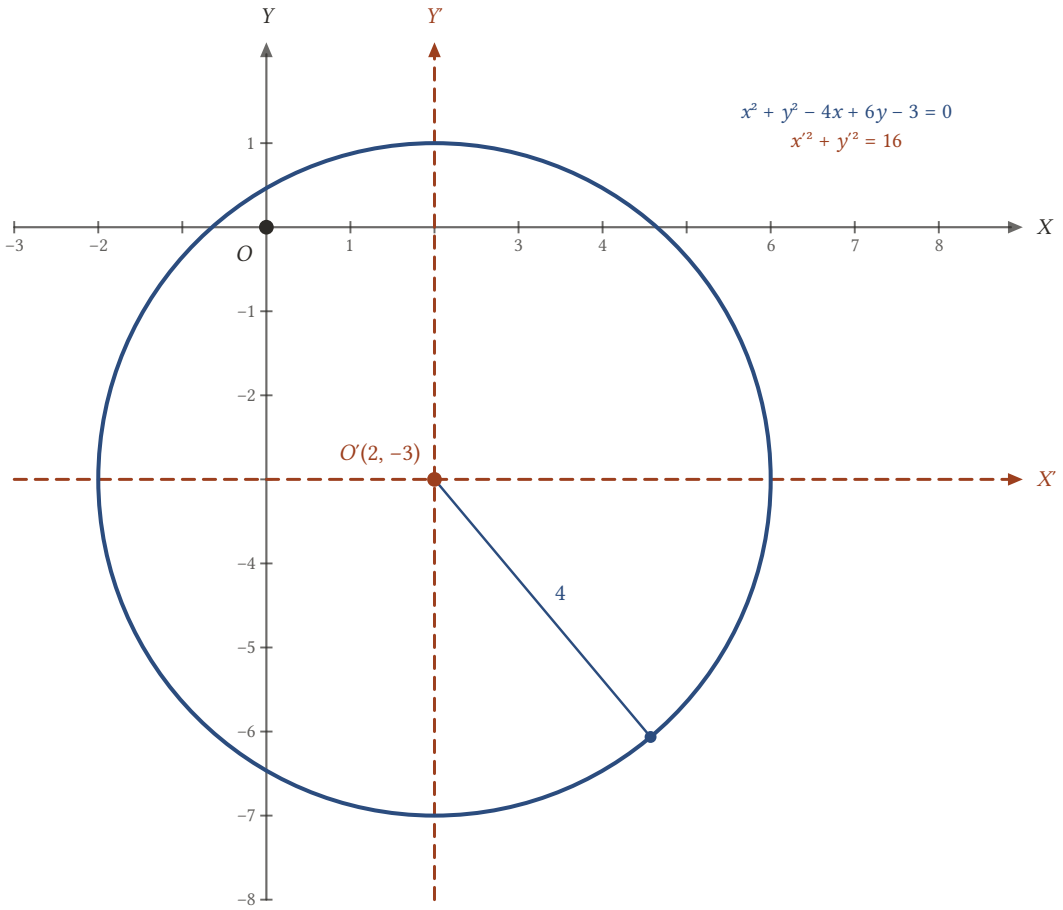
$$(x^2-4x)+(y^2+6y)=3$$
$$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=3+4+9$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2=16.$$

Adım 2: öteleme. $x' = x-2$ ve $y' = y+3$ alalım. Bu, eksenleri $T_{(2,-3)}$ ile $O'(2,-3)$ noktasına ötelemektir.
Adım 3: yeni denklem. $x = x'+2$, $y = y'-3$ yazınca denklem

$$x'^2+y'^2=16$$

olur. Bu, merkezi yeni başlangıç noktası O' ve yarıçapı 4 olan çemberdir (bkz. Tanım 4.2). Eski sistemde merkez $(2,-3)$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.14: Eksenler çemberin merkezi $O'(2,-3)$ noktasına ötelenince denklem $x'^2 + y'^2 = 16$ olur.

■

Tam kareye tamamlamak yerine öteleme vektörünü bilinmeyen alıp katsayılardan da bulabiliriz; bu yol, alıştırmalardaki bazı sorularda kullanılacak.

16.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorular bölümde gördüğümüz iki tür ötelemeyi, noktaların ötelenmesini ve eksenlerin ötelenmesini, birlikte kullanır.

Alıştırma 16.1 (Üç ötelemenin bileşkesi). $A(1,3)$, $B(4,-1)$, $C(-3,-2)$ ve $P(4,2)$ olsun. a, b ve c sırasıyla A, B ve C'nin konum vektörleri olmak üzere $f_{a+b+c}(P)$ noktasını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: bileşkeye ayırmak. Teorem 16.1 iki kez uygulanırsa

$$f_{a+b+c} = f_{a+b} \circ f_c = (f_a \circ f_b) \circ f_c$$

olur. Yani P'ye önce f_c, sonra f_b, en son f_a uygulanır.
Adım 2: üç öteleme art arda. $c = (-3,-2)$, $b = (4,-1)$ ve $a = (1,3)$ olduğundan

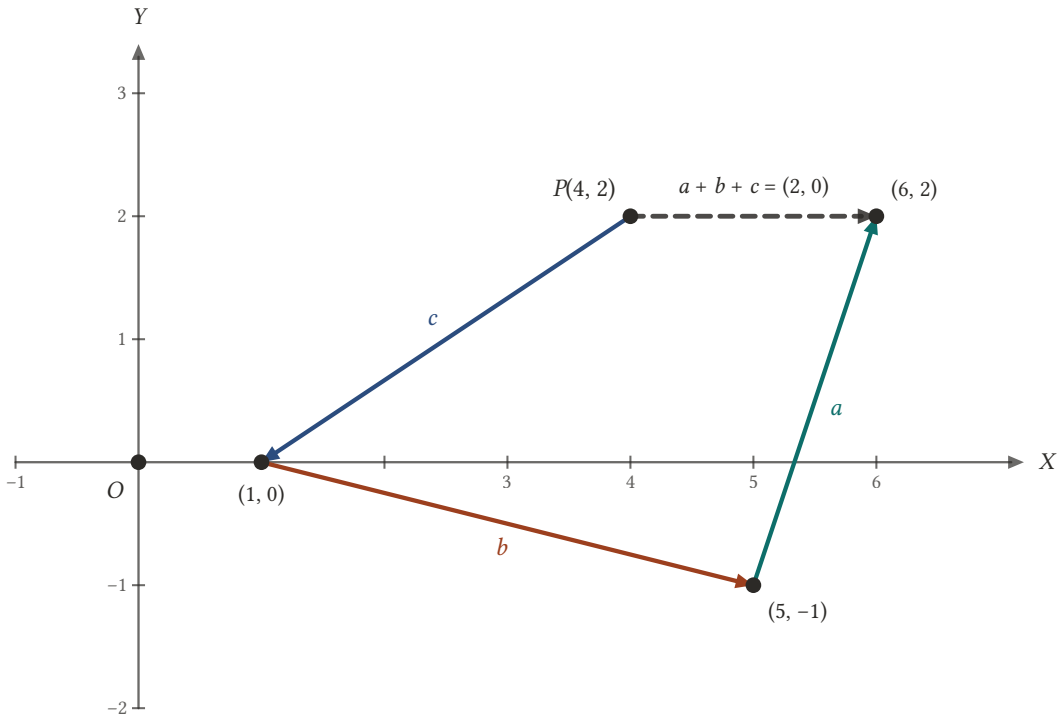
 CC BY-NC-SA 4.0

$$f_c\,\big(\,(4,2)\,\big) = (4-3, 2-2) = (1,0),$$
$$f_b\,\big(\,(1,0)\,\big) = (1+4, 0-1) = (5,-1),$$
$$f_a\,\big(\,(5,-1)\,\big) = (5+1, -1+3) = (6,2)$$

bulunur. Sonuç $f_{a+b+c}(P) = (6,2)$'dir.
Adım 3: kontrol. Tek ötelemeyle de hesaplayalım:

$$a+b+c = (1+4-3, 3-1-2) = (2,0)$$

ve $(4,2)+(2,0) = (6,2)$ bulunur.



Şekil 16.15: $P(4, 2)$ noktasına sırasıyla c, b ve a ötelemeleri uygulanır; sonuç, $a + b + c = (2, 0)$ kadar tek ötelemenin verdiği $(6, 2)$ noktasıdır.

■

Alıştırma 16.2 (İki doğrunun belirlediği yeni sistem). $\mathbb{R}^2$'de başlangıç noktası $O(0,0)$ olan XY dik koordinat sisteminde $P(3,0)$ noktası veriliyor. $y=5$ ve $x=-4$ doğrularının yeni eksenler olarak alındığı koordinat sisteminde P'nin koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: yeni eksenler. $y=5$ doğrusu X eksenine, $x=-4$ doğrusu Y eksenine paraleldir. Bunları sırasıyla X' ve Y' eksenleri olarak alırsak yeni başlangıç noktası iki doğrunun kesişimi $O'(-4,5)$ olur. Eksenler $(-4,5)$ vektörü kadar ötelenmiştir.
Adım 2: dönüşüm. (2) bağıntısından

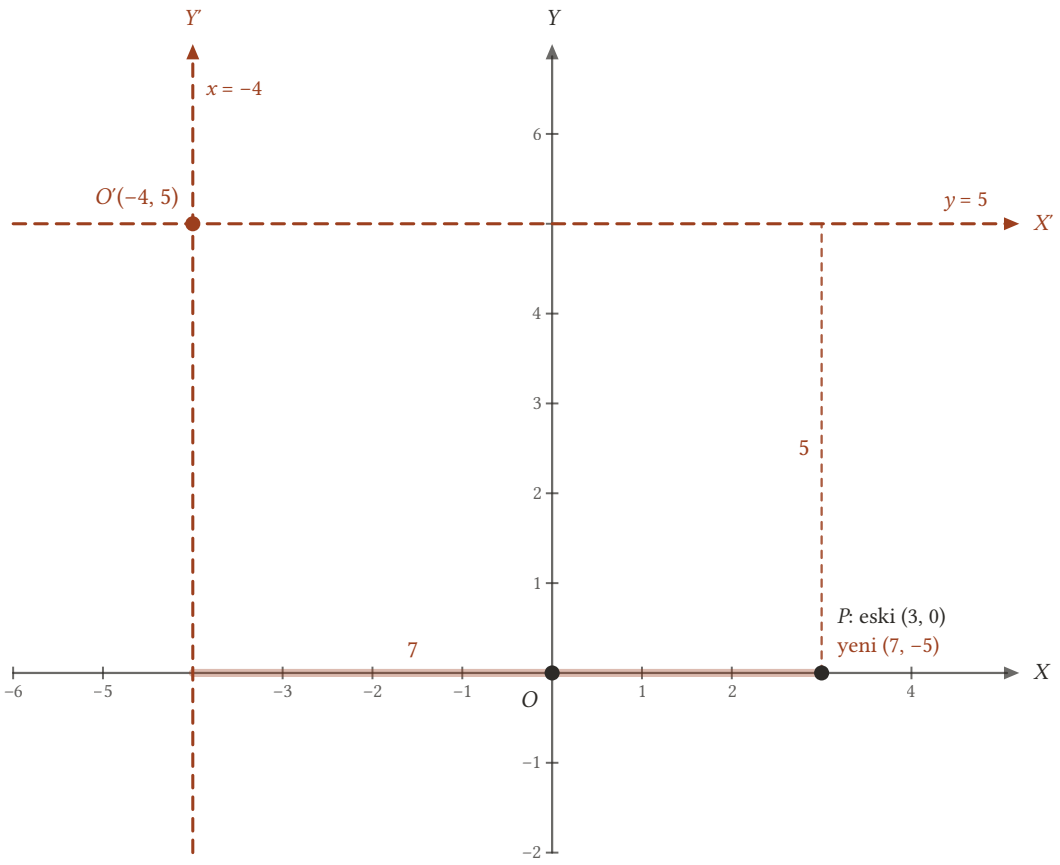
$$x' = x-(-4) = x+4, \qquad y' = y-5$$

yazılır.
Adım 3: P'nin yeni koordinatları. $x=3$ ve $y=0$ için

$$x' = 3+4 = 7, \qquad y' = 0-5 = -5$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. P noktası yeni sistemde $P'(7, -5)$ olarak yazılır.



Şekil 16.16: $y = 5$ ve $x = -4$ doğruları yeni eksenler olunca başlangıç noktası $O'(-4, 5)$ olur; $P(3, 0)$ noktası yeni sistemde $(7, -5)$'tir.

■

Alıştırma 16.3 (Öteleme ile yeni denklem: birinci eğri). $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y = 7$ eğrisinin, eksenler $a = (2, -1)$ vektörü kadar ötelendikten sonraki denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: dönüşüm. (1) bağıntısına göre $x = x' + 2$ ve $y = y' - 1$'dir.
Adım 2: yerine yazmak. Bu değerleri denkleme koyalım:

$$2(x' + 2)^2 + 3(y' - 1)^2 - 8(x' + 2) + 6(y' - 1) = 7.$$

Adım 3: açmak. $(x' + 2)^2 = x'^2 + 4x' + 4$ ve $(y' - 1)^2 = y'^2 - 2y' + 1$ olduğundan

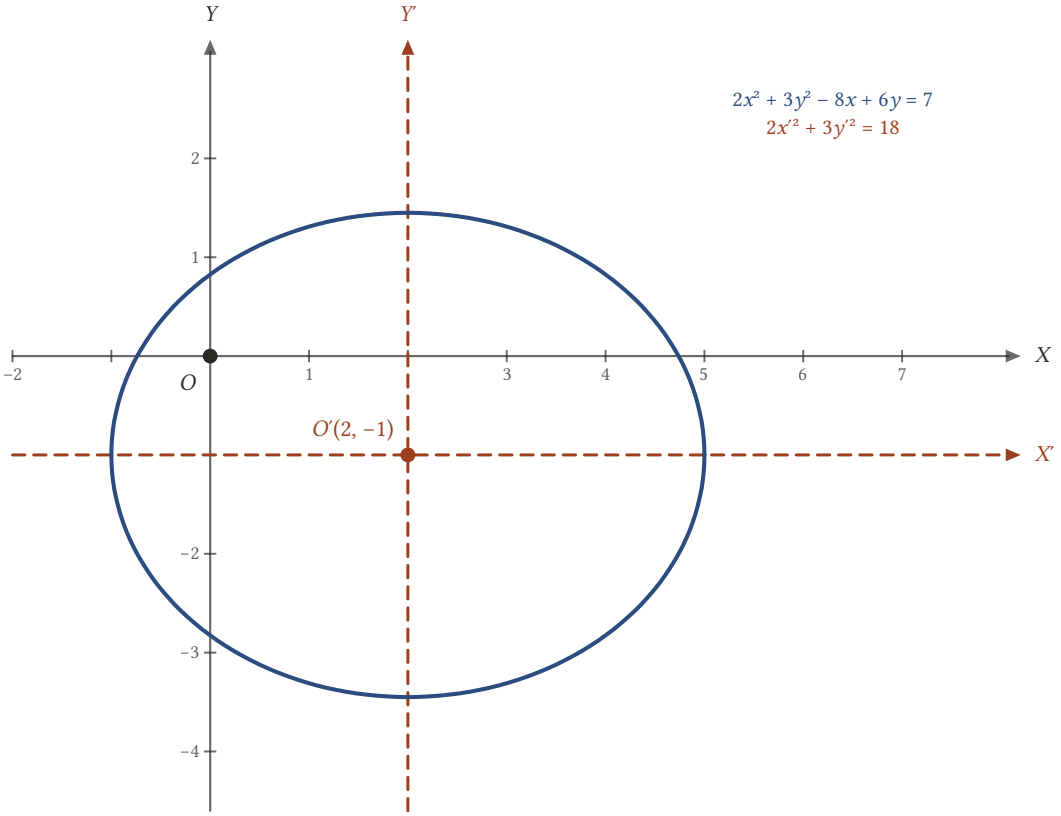
$$2x'^2 + 8x' + 8 + 3y'^2 - 6y' + 3$$
$$-8x' - 16 + 6y' - 6 = 7$$

olur. $8x'$ ile $-8x'$, $-6y'$ ile $6y'$ birbirini götürür; sabitler $8 + 3 - 16 - 6 = -11$ eder. Böylece $2x'^2 + 3y'^2 - 11 = 7$, yani

$$2x'^2 + 3y'^2 = 18$$

bulunur. Yeni denklemde birinci dereceden terim kalmamıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.17: Eksenler $(2, -1)$ kadar ötelenince eğrinin denklemi $2x'^2 + 3y'^2 = 18$ olur; eğri O' etrafında simetriktir.

■

Alıştırma 16.4 (Öteleme ile yeni denklem: ikinci eğri). $-x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ eğrisinin, eksenler $a = (3, 2)$ vektörü kadar ötelendikten sonraki denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: dönüşüm. (1) bağıntısına göre $x = x' + 3$ ve $y = y' + 2$'dir.
Adım 2: yerine yazmak.

$$-(x' + 3)^2 + (y' + 2)^2 + 2(x' + 3) - 2(y' + 2) = 0.$$

Adım 3: açmak. $(x' + 3)^2 = x'^2 + 6x' + 9$ ve $(y' + 2)^2 = y'^2 + 4y' + 4$'tür. Buradan

$$\begin{aligned} &-x'^2 - 6x' - 9 + y'^2 + 4y' + 4 \\ &+2x' + 6 - 2y' - 4 = 0 \end{aligned}$$

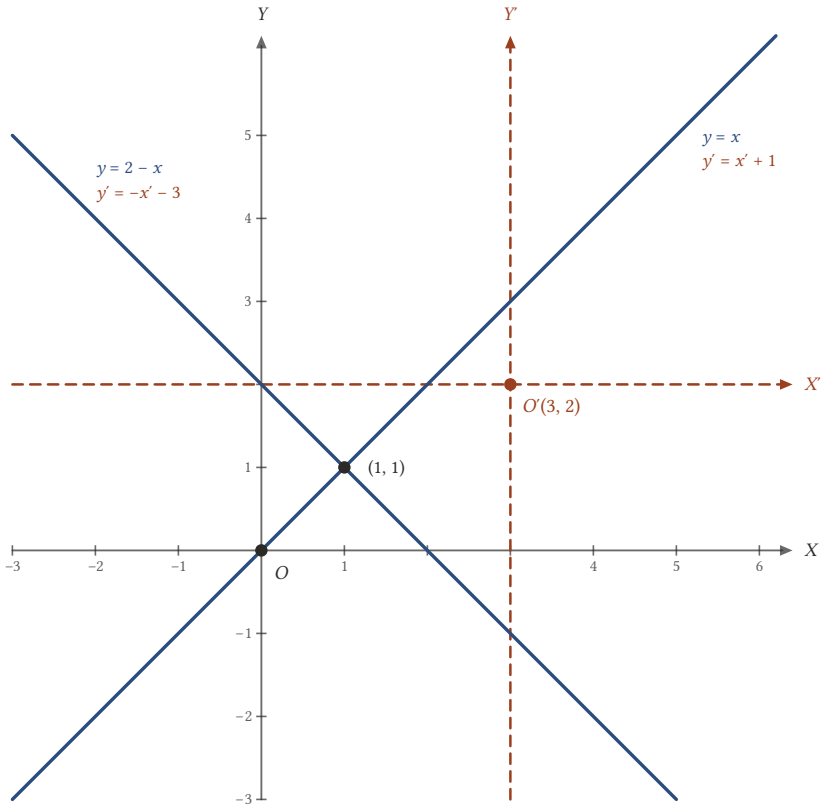
olur. x''li terimler $-6x' + 2x' = -4x'$, y''li terimler $4y' - 2y' = 2y'$, sabitler $-9 + 4 + 6 - 4 = -3$ eder. Yeni denklem

$$-x'^2 + y'^2 - 4x' + 2y' - 3 = 0$$

dır.
Adım 4: bir kontrol. Eski denklem $-(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$ biçiminde yazılabilir; yani $y - 1 = \pm(x - 1)$ ve eğri $y = x$ ile $y = 2 - x$ doğrularından oluşur. Yeni denklem de $(y' + 1)^2 - (x' + 2)^2 = 0$ biçiminde yazılır ve $y' = x' + 1$ ile $y' = -x' - 3$ doğrularına ayrılır. Örneğin $y' = x' + 1$ denkle-

 CC BY-NC-SA 4.0

minde $x' = x - 3$, $y' = y - 2$ yazılırsa $y - 2 = x - 2$, yani $y = x$ çıkar; öteki doğru için de $y = 2 - x$ bulunur. İki sonuç uyumludur.



Şekil 16.18: Eğri $y = x$ ve $y = 2 - x$ doğrularından oluşur; yeni sistemde bu doğrular $y' = x' + 1$ ve $y' = -x' - 3$ olur.

■

Alıştırma 16.5 (Öteleme ile yeni denklem: üçüncü eğri). $2x^2 + 2y^2 - 14x - y - 10 = 0$ eğrisinin, eksenler $a = (2, -1)$ vektörü kadar ötelendikten sonraki denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: dönüşüm. (1) bağıntısına göre $x = x' + 2$ ve $y = y' - 1$'dir.
Adım 2: yerine yazmak.

$$2(x'+2)^2 + 2(y'-1)^2 - 14(x'+2) - (y'-1) - 10 = 0.$$

Adım 3: açmak. $(x'+2)^2 = x'^2 + 4x' + 4$ ve $(y'-1)^2 = y'^2 - 2y' + 1$ olduğundan

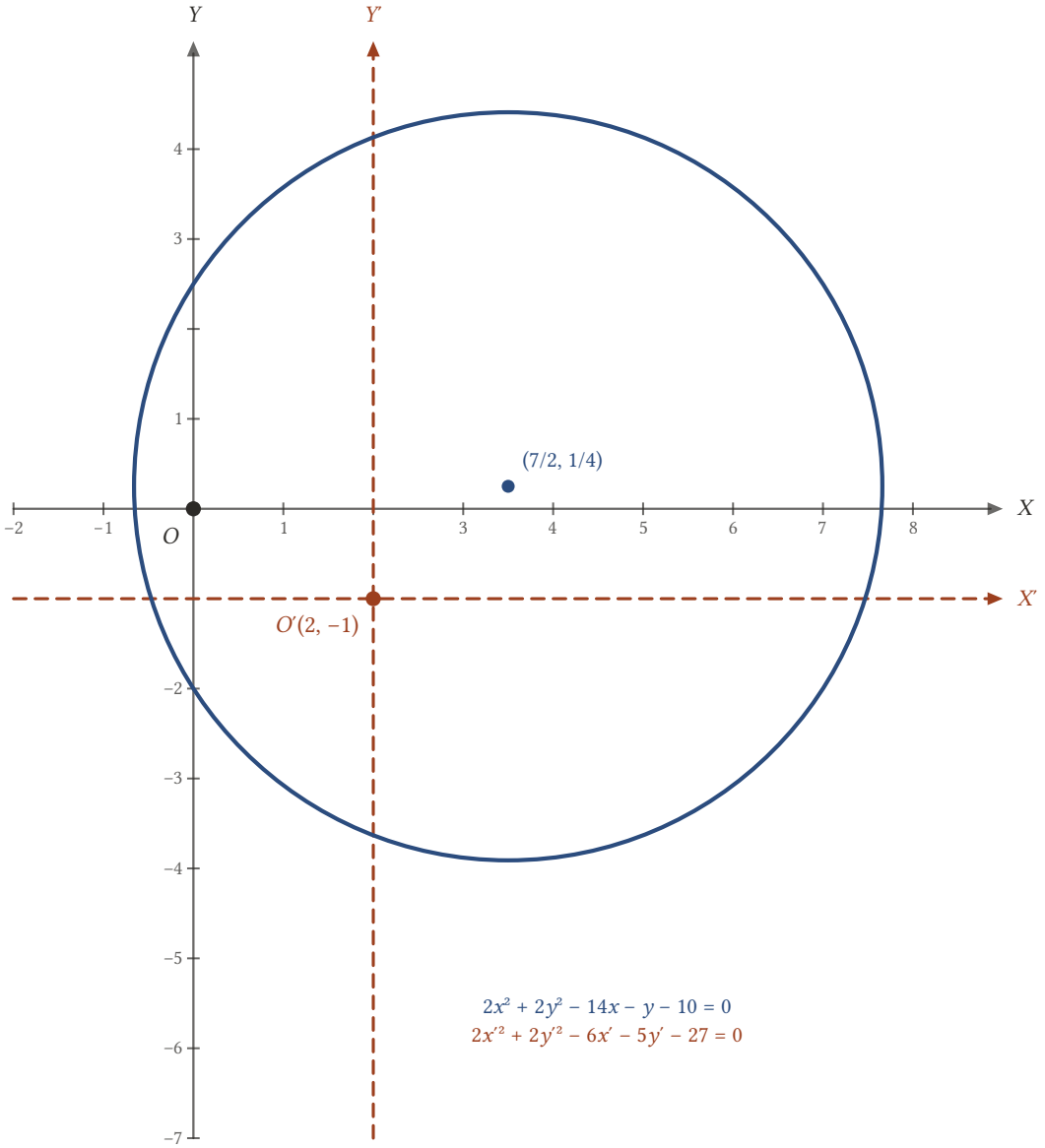
$$\begin{aligned} &2x'^2 + 8x' + 8 + 2y'^2 - 4y' + 2 \\ &-14x' - 28 - y' + 1 - 10 = 0 \end{aligned}$$

olur. x''li terimler $8x' - 14x' = -6x'$, y''li terimler $-4y' - y' = -5y'$, sabitler $8 + 2 - 28 + 1 - 10 = -27$ eder. Yeni denklem

$$2x'^2 + 2y'^2 - 6x' - 5y' - 27 = 0$$

dır. Bu öteleme birinci dereceden terimleri yok etmez, çünkü yeni başlangıç noktası eğrinin merkezi değildir: denklemi 2'ye bölüp tam kareye tamamlarsak eski sistemde merkezin $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right)$ olduğu görülür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.19: Yeni başlangıç noktası $O'(2,-1)$ çemberin merkezi $(7/2,\ 1/4)$ değildir; bu yüzden yeni denklemde birinci dereceden terimler kalır.

■

Alıştırma 16.6 (Birinci dereceden terimleri yok eden öteleme). $3x^2 - 4y^2 + 6x + 24y = 135$ denklemini, birinci dereceden terimlerinin katsayıları 0 olan bir denkleme dönüştüren ötelemeyi belirleyiniz ve yeni denklemi yazınız.

Çözüm.
Adım 1: bilinmeyen öteleme. Aranan öteleme $T_{(a,b)}$ olsun. (1) bağıntısıyla $x = x' + a$ ve $y = y' + b$ yazalım:

$$3(x'+a)^2 - 4(y'+b)^2 + 6(x'+a) + 24(y'+b) = 135.$$

Adım 2: açıp gruplamak. Kareleri açarsak

$$3x'^2 + 6ax' + 3a^2 - 4y'^2 - 8by' - 4b^2$$
$$+6x' + 6a + 24y' + 24b = 135$$

olur. Aynı dereceli terimleri toplayalım:

$$3x'^2 - 4y'^2 + (6a + 6)x' + (24 - 8b)y'$$
$$+3a^2 - 4b^2 + 6a + 24b = 135.$$

Adım 3: katsayıları sıfırlamak. x' ve y''nün katsayıları 0 olmalı:

$$6a + 6 = 0, \qquad 24 - 8b = 0.$$

Buradan $a = -1$ ve $b = 3$ bulunur. Aranan öteleme $T_{(-1,3)}$'tür.
Adım 4: yeni denklem. $a = -1$, $b = 3$ için sabit terimler

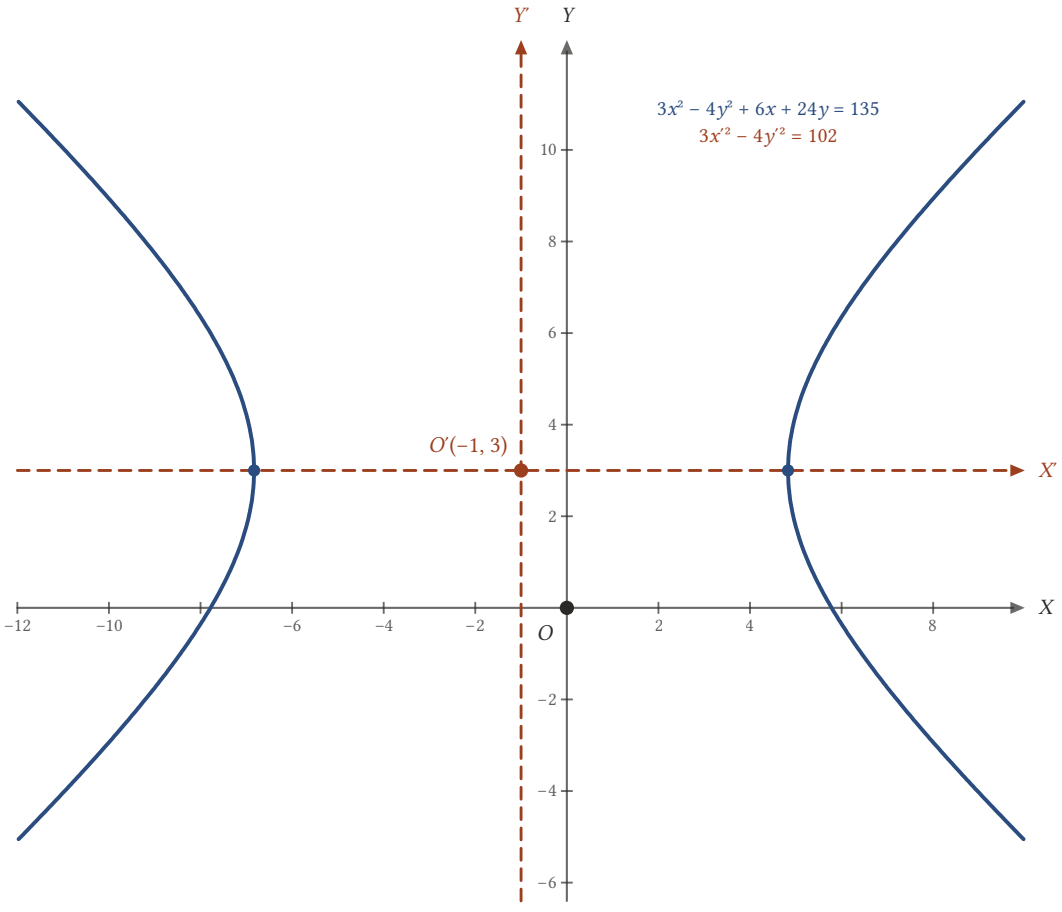
$$3(-1)^2 - 4 \cdot 3^2 + 6(-1) + 24 \cdot 3 = 3 - 36 - 6 + 72 = 33$$

eder. Denklem $3x'^2 - 4y'^2 + 33 = 135$, yani

$$3x'^2 - 4y'^2 = 102$$

olur. Aynı sonuca tam kareye tamamlayarak da ulaşılır:

$$3(x + 1)^2 - 4(y - 3)^2 = 135 + 3 - 36 = 102.$$



Şekil 16.20: Eksenler $O'(-1, 3)$ noktasına ötelenince eğrinin denklemi $3x'^2 - 4y'^2 = 102$ olur.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 16.7 (Eksenleri öteleyerek sadeleştirmek). $y^2 - 8x + 6y + 17 = 0$ denklemini eksenleri öteleyerek sade bir biçime getiriniz.

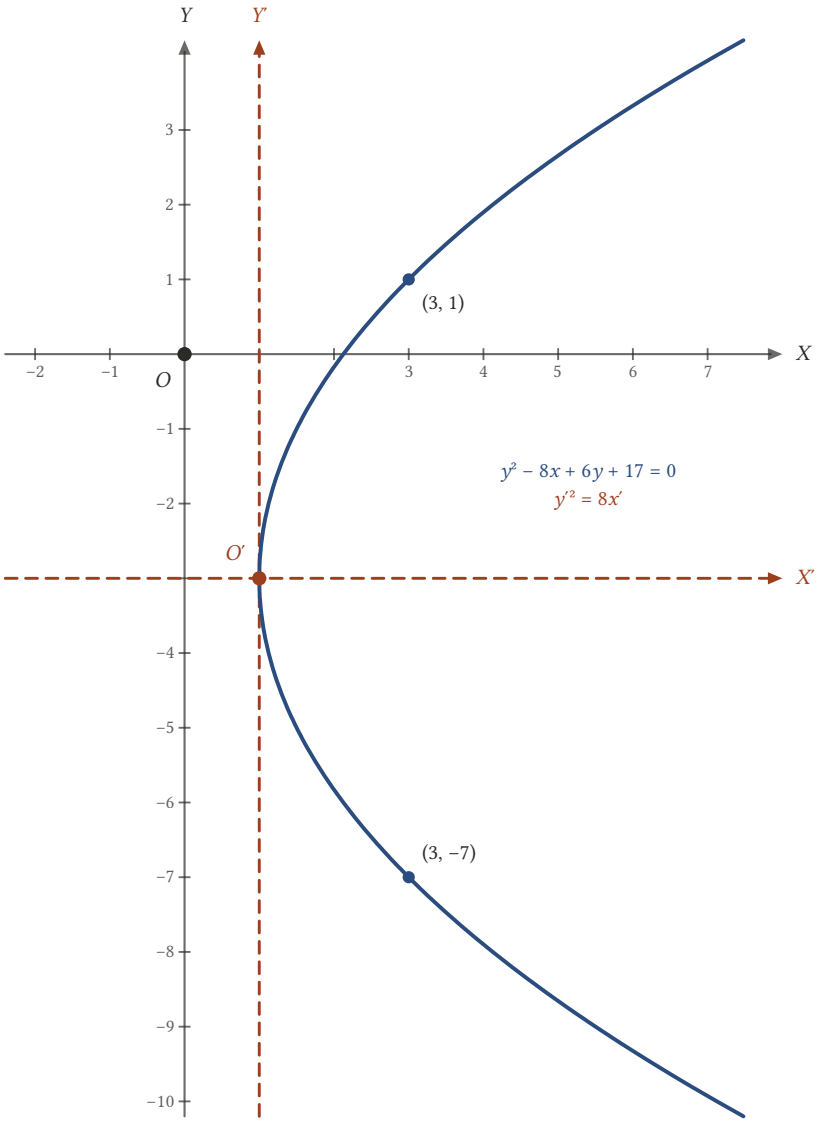
Çözüm.
Adım 1: tam kareye tamamlama. y'li terimleri gruplayıp tam kareye tamamlayalım; x yalnız birinci dereceden geçtiği için onu bir çarpan içine alalım:

$$\begin{aligned} y^2 + 6y - 8x + 17 &= (y^2 + 6y + 9) - 9 - 8x + 17 \\ &= (y+3)^2 - 8x + 8 = (y+3)^2 - 8(x-1). \end{aligned}$$

Denklem $(y+3)^2 - 8(x-1) = 0$ olur.
Adım 2: öteleme. $x' = x - 1$ ve $y' = y + 3$ alalım. (2) bağıntısıyla karşılaştırınca $a = 1$, $b = -3$'tür; eksenler $T_{(1,-3)}$ ile $O'(1,-3)$ noktasına ötelenir.
Adım 3: yeni denklem. Yerine yazınca

$$y'^2 - 8x' = 0, \qquad \text{yani} \qquad y'^2 = 8x'$$

elde edilir.



Şekil 16.21: Eksenler $O'(1,-3)$ noktasına ötelenince denklem $y'^2 = 8x'$ olur; eğri (3, 1) ve (3, −7) noktalarından geçer.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 16.8 (Eksen ötelemelerinin bileşkesi). Düzlemde $T_{(a,b)}$ ve $T_{(c,d)}$ ötelemeleri verilsin.

$$T_{(a,b)} \circ T_{(c,d)} = T_{(a+c,\, b+d)}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: iki aşamalı geçiş. Bir P noktasına önce $T_{(c,d)}$, sonra $T_{(a,b)}$ uygulayalım; böylece sırasıyla $X'Y'$ ve $X''Y''$ sistemlerine geçeriz. P'nin bu üç sistemdeki koordinatları (x, y), (x', y') ve (x'', y'') olsun. Birinci öteleme

$$T_{(c,d)} : (x, y) \mapsto (x', y') = (x - c,\, y - d)$$

olduğundan $x = x' + c$, $y = y' + d$'dir. İkinci öteleme $X'Y'$ sisteminin eksenlerini kaydırır:

$$T_{(a,b)} : (x', y') \mapsto (x'', y'') = (x' - a,\, y' - b),$$

yani $x' = x'' + a$, $y' = y'' + b$'dir.
Adım 2: birleştirmek. İki bağıntıyı birleştirirsek

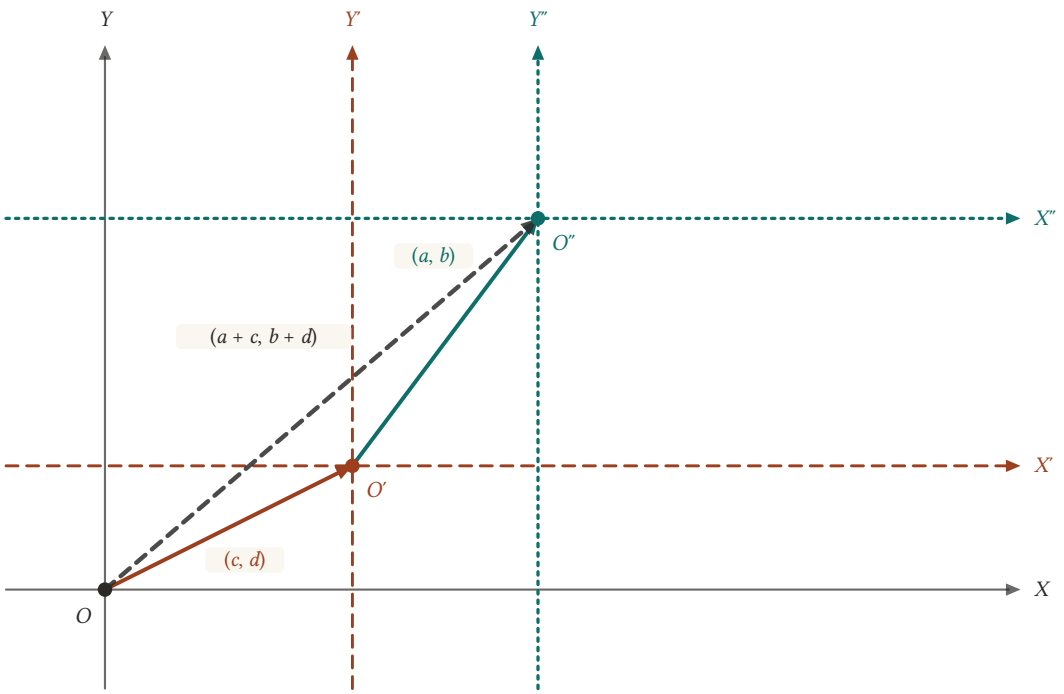
$$x = x'' + a + c, \qquad y = y'' + b + d$$

bulunur. Bu, (1) bağıntısının $(a + c, b + d)$ vektörü için yazılmış hâlidir: $X''Y''$ sistemi, XY sisteminin $(a + c, b + d)$ kadar ötelenmişidir.
Adım 3: fonksiyon olarak. Aynı sonucu doğrudan bileşkeyle de görebiliriz. Her $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$\begin{aligned} \big(T_{(a,b)} \circ T_{(c,d)} \big) \big((x, y) \big) &= T_{(a,b)} \big((x - c, y - d) \big) \\ &= (x - c - a,\, y - d - b) \\ &= \big(x - (a + c),\, y - (b + d) \big) \\ &= T_{(a+c,\, b+d)} \big((x, y) \big) \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $T_{(a,b)} \circ T_{(c,d)} = T_{(a+c,\, b+d)}$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 16.22: Önce $(c,\, d)$, sonra $(a,\, b)$ kadar ötelenen eksenler, $(a + c,\, b + d)$ kadar tek ötelemeyle aynı yere gelir.

■

Alıştırma 16.9 (İki eksen ötelemesinin bileşkesi: birinci sıra). $T_1 = T_{(-2,-3)}$ ve $T_2 = T_{(4,-1)}$ ötelemeleri veriliyor. $(T_1 \circ T_2)\ (\ (x,y)\ )$ noktasını hesaplayınız.

Çözüm.
Önce T_2, sonra bu noktaya T_1 uygulanır:

$$\begin{aligned}(T_1 \circ T_2)\ (\ (x,y)\ ) &= T_1\ (\ T_2((x,y))\ ) \\ &= T_1\ (\ (x-4, y-(-1))\ ) \\ &= T_1\ (\ (x-4, y+1)\ ) \\ &= (\ x-4-(-2), y+1-(-3)\ ) \\ &= (x-2, y+4).\end{aligned}$$

Bu, Alıştırma 16.8 ile uyumludur: $(-2+4, -3-1) = (2,-4)$ ve $T_{(2,-4)}\ (\ (x,y)\ ) = (x-2, y+4)$'tür.
■

Alıştırma 16.10 (İki eksen ötelemesinin bileşkesi: ters sıra). $T_1 = T_{(-2,-3)}$ ve $T_2 = T_{(4,-1)}$ ötelemeleri veriliyor. $(T_2 \circ T_1)\ (\ (x,y)\ )$ noktasını hesaplayıp $(T_1 \circ T_2)\ (\ (x,y)\ )$ ile karşılaştırınız.

Çözüm.
Bu kez önce T_1, sonra T_2 uygulanır:

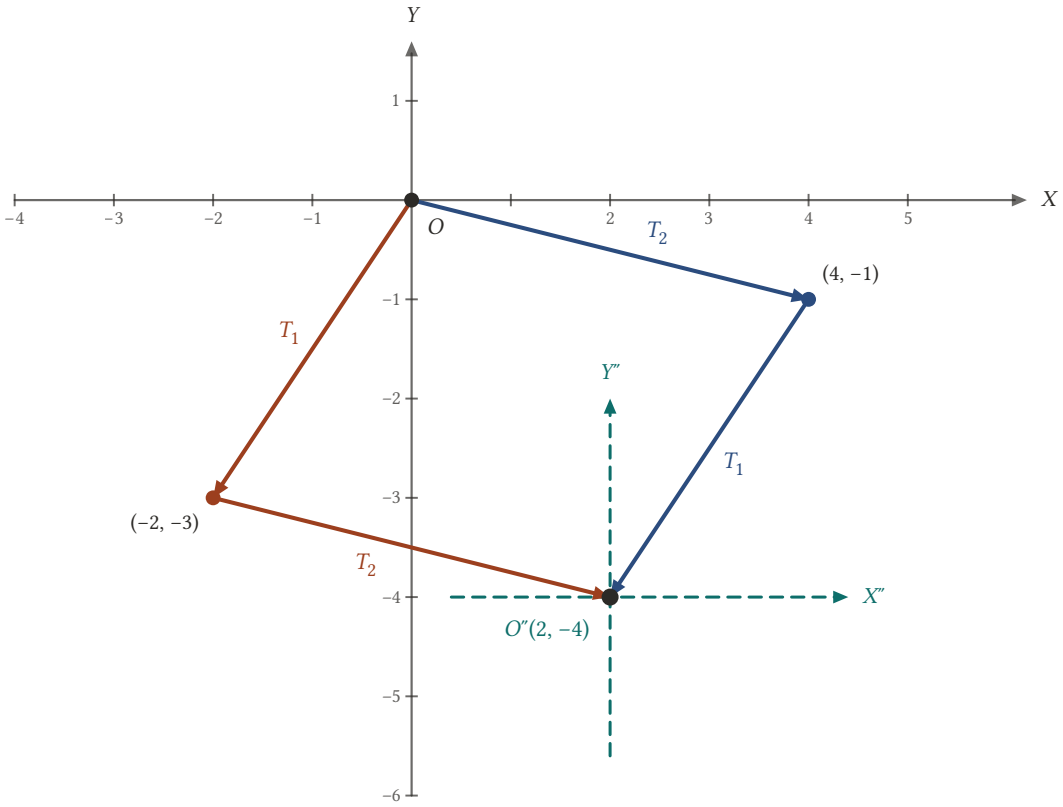
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)\ (\ (x,y)\ ) &= T_2\ (\ T_1((x,y))\ ) \\ &= T_2\ (\ (x-(-2), y-(-3))\ ) \\ &= T_2\ (\ (x+2, y+3)\ ) \\ &= (\ x+2-4, y+3-(-1)\ ) \\ &= (x-2, y+4).\end{aligned}$$

Bir önceki alıştırmada $(T_1 \circ T_2)\ (\ (x,y)\ ) = (x-2, y+4)$ bulmuştuk. Demek ki

$$(T_1 \circ T_2)\ (\ (x,y)\ ) = (T_2 \circ T_1)\ (\ (x,y)\ )$$

dir: iki eksen ötelemesini hangi sırayla yaparsak yapalım yeni başlangıç noktası eski sistemde $(2,-4)$ olur.



Şekil 16.23: Başlangıç noktası önce T_2 sonra T_1 ile de, önce T_1 sonra T_2 ile de aynı $O''(2,-4)$ noktasına taşınır.

■

Ötelemeyle eksenleri kaydırmayı öğrendik; ancak eksenlerin doğrultusu hep aynı kaldı. xy çarpımı içeren bir denklemi sadeleştirmek için eksenleri döndürmek de gerekir. Sıradaki bölümde noktaların ve eksenlerin döndürülmesini inceleyeceğiz: Döndürme ve Paralel Koordinatlara Geçiş.

 CC BY-NC-SA 4.0

17. Döndürme ve Paralel Eksenler

Bir önceki bölümde (Öteleme) düzlemi ve koordinat eksenlerini kendilerine paralel olarak kaydırdık. Bu bölümde ikinci temel hareketi, döndürmeyi ele alıyoruz. Önce bir noktayı sabit bir merkez etrafında döndürüp yeni konumunun koordinatlarını bulacağız. Sonra noktaları yerinde bırakıp eksenleri döndüreceğiz ve aynı noktanın yeni eksenlere göre koordinatlarını hesaplayacağız. İki işlemin aynı formüllerle, yalnız açının işareti değişerek anlatıldığını göreceğiz.
Dönmenin uzunlukları, açıları ve alanları değiştirmediğini gösterdikten sonra bir eğrinin denklemini döndürülmüş eksenlere taşıyacağız. Bu, ileride koniklerin denklemlerindeki xy'li terimi yok etmenin anahtarıdır. Bölümün sonunda eksenleri dik olmayan paralel koordinat sistemine (Paralel ve Kutupsal Koordinatlar) döneceğiz ve dik koordinatlarla eğik koordinatlar arasındaki geçiş formüllerini çıkaracağız.

17.1 Noktaların döndürülmesi

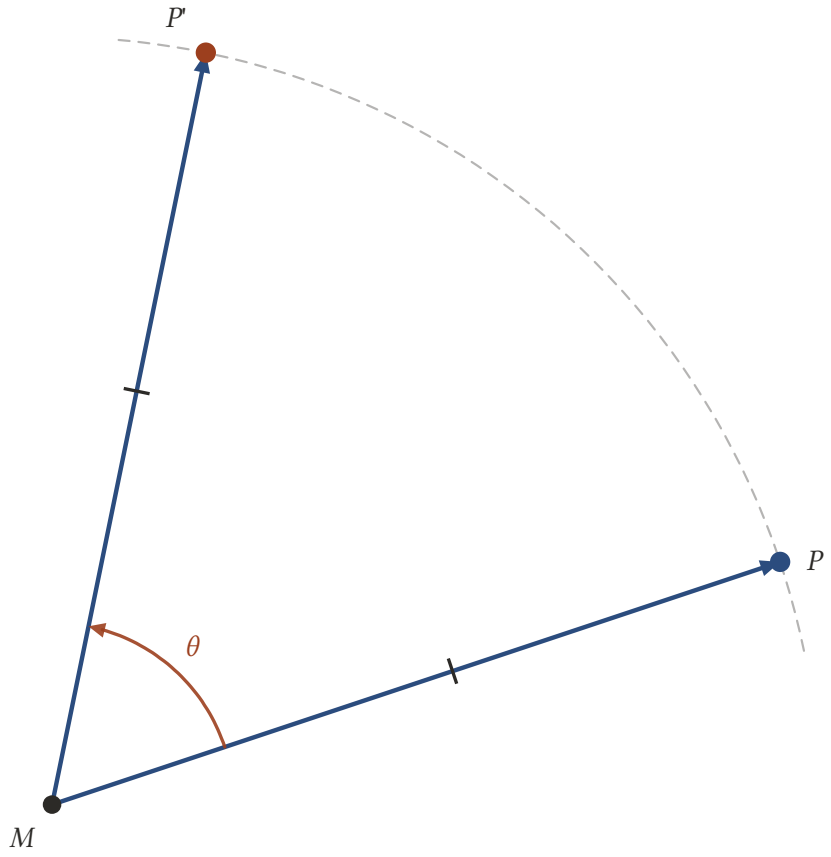
Bir noktayı döndürmek için iki şey gerekir: etrafında döndüreceğimiz bir merkez ve dönme açısı. Açılar her zaman olduğu gibi pozitif yönde, yani saat yönünün tersine ölçülür (Dik Koordinatlar ve Uzaklık).

Tanım 17.1 (Dönme). $M \in \mathbb{R}^2$ sabit bir nokta ve $0 \leq \theta < 2\pi$ olsun. M'yi kendisine, M'den farklı her P noktasını da

$$|\,MP\,| = |\,MP'\,| \qquad \text{ve} \qquad \widehat{PMP'} = \theta$$

olacak biçimde bir P' noktasına götüren fonksiyona $\boldsymbol{M}$ **merkezli ve** $\boldsymbol{\theta}$ **radyanlık dönme** denir. Burada $\widehat{PMP'}$, MP yarı doğrusundan MP' yarı doğrusuna pozitif yönde ölçülen açıdır. P' noktasına P'nin **dönmüşü** ya da **görüntüsü** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.1: M merkezli θ radyanlık dönme P'yi, M'ye uzaklığı aynı kalacak ve MP'den MP'ne açı θ olacak biçimde P'ne götürür.

Yani dönme, P'yi merkezi M ve yarıçapı $|\,MP\,|$ olan çember üzerinde saat yönünün tersine θ açısı kadar kaydırır. Negatif yönde (saat yönünde) θ kadar döndürmek, pozitif yönde $2\pi - \theta$ kadar döndürmekle aynıdır; bunu kısaca $-\theta$ radyanlık dönme diye de anacağız. Sinüs ve kosinüs 2π periyotlu olduğundan aşağıdaki formüllerde θ yerine $-\theta$ yazmak bu dönmeyi verir.
Hesapları kolaylaştırmak için önce merkezi başlangıç noktası olarak seçelim.

Teorem 17.1 (Başlangıç noktası etrafında dönme). *$P(x,y)$ noktasının $O = O(0,0)$ etrafında θ radyan döndürülmesiyle elde edilen nokta $P'(x',y')$ ise*

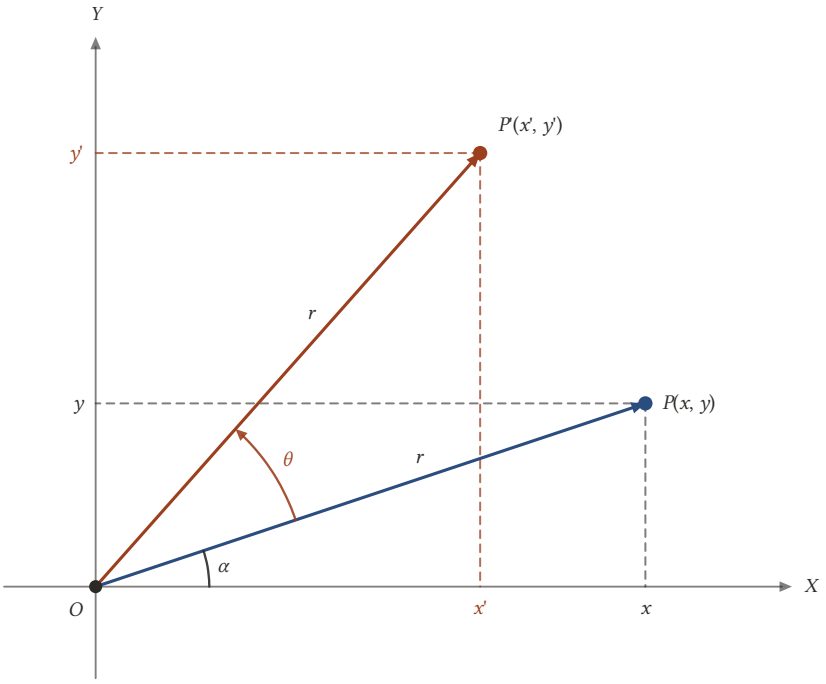
$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \qquad y' = x\sin\theta + y\cos\theta \tag{1}$$

dir.

> ***İspat.***
> *$P = O$ ise $P' = O$ olur ve (1) de $x' = y' = 0$ verir. $P \neq O$ olsun ve $r = |\,OP\,| > 0$ diyelim. P'nin kutupsal açısı α olsun; yani OP yarı doğrusu pozitif X yönüyle α açısı yapsın. Önerme 5.3 gereği*
>
> $$x = r\cos\alpha, \qquad y = r\sin\alpha$$
>
> *dır.*
> *Dönmenin tanımı gereği $|\,OP'\,| = |\,OP\,| = r$ ve OP'den OP''ne olan açı θ'dır. Öyleyse OP' yarı doğrusu pozitif X yönüyle $\alpha + \theta$ açısı yapar ($\alpha + \theta \geq 2\pi$ ise bu açıdan 2π çıkarılır; sinüs ve kosinüs değişmez). Yine Önerme 5.3 ve toplam formülleriyle*
>
> $$x' = r\cos(\alpha+\theta) = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
> $$y' = r\sin(\alpha+\theta) = r\sin\alpha\cos\theta + r\cos\alpha\sin\theta = y\cos\theta + x\sin\theta$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Bu, (1)'in ta kendisidir.



Şekil 17.2: P*'nin kutupsal açısı* α*,* P*'nünkü* α + θ*'dır; ikisinin de* O*'ya uzaklığı* r*'dir.*

■

(1) eşitliklerinin sağ tarafları x ve y'nin birinci dereceden ifadeleridir. Bu yüzden onları matris çarpımıyla (satır ile sütunun karşılıklı terimleri çarpılıp toplanarak) tek bir eşitlik olarak yazabiliriz:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Tanım 17.2 (Dönme matrisi).

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

matrisine $\boldsymbol{\theta}$ **radyanlık dönme matrisi** denir.

Yani O etrafında θ kadar döndürmek, noktanın koordinat sütununu soldan $D(\theta)$ ile çarpmaktır: $P' = D(\theta)P$. Matrisin sütunları da anlamlıdır: birinci sütun $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(1,0)$ noktasının; ikinci sütun $(-\sin\theta, \cos\theta)$, $(0,1)$ noktasının dönmüşüdür.
Bir dönmeyi geri almak için ters yönde aynı açı kadar döndürmek yeter. Bunun matris karşılığı şudur.

Önerme 17.1 (Dönme matrisinin tersi). *$D(\theta)$'nın determinantı 1'dir; dolayısıyla $D(\theta)$'nın tersi vardır ve*

$$D^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = D(-\theta)$$

dır. Buna göre $P(x,y)$ noktasının O etrafında θ kadar döndürülmüşü $P'(x',y')$ ise

$$x = x'\cos\theta + y'\sin\theta, \qquad y = -x'\sin\theta + y'\cos\theta \tag{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.

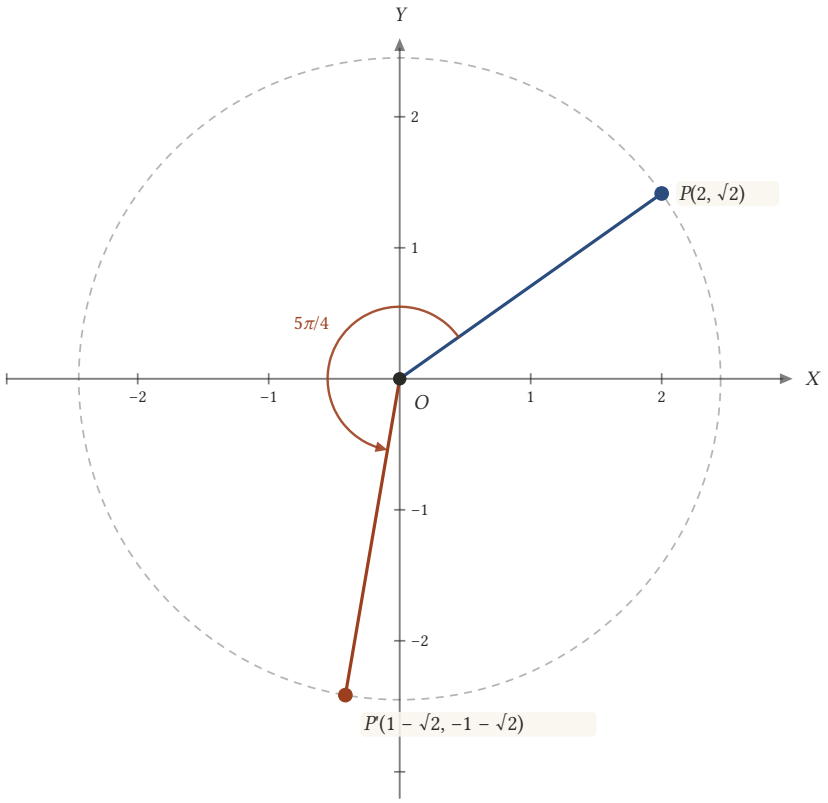
> ***İspat.***
> *Determinant*
>
> $$\mid D(\theta) \mid = \cos\theta \cdot \cos\theta - (-\sin\theta)\cdot\sin\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$$
>
> *dır.* $\cos(-\theta) = \cos\theta$ *ve* $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ *olduğundan yazdığımız matris gerçekten* $D(-\theta)$*'dır. Çarpımı hesaplayalım:*
>
> $$D(\theta)\,D(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
>
> *Aynı hesap* $D(-\theta)\,D(\theta)$*'nın da birim matris olduğunu gösterir; demek ki* $D^{-1}(\theta) = D(-\theta)$*'dır.*
> $P' = D(\theta)P$ *eşitliğinin iki yanını soldan* $D^{-1}(\theta)$ *ile çarparsak* $D^{-1}(\theta)P' = P$*, yani*
>
> $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
>
> *bulunur. Satırları ayrı ayrı yazmak (2)'yi verir.* ■

Yani (2), P''nü O etrafında $-\theta$ kadar döndürerek P'ye geri dönmenin formülüdür; (1)'de θ yerine $-\theta$ yazılıp P ile P''nün rolleri değiştirilmiş hâlidir.

Örnek 17.1 (Başlangıç etrafında beş pi bölü dört dönme). $P(2,\sqrt{2})$ noktasının başlangıç noktası etrafında pozitif yönde $\dfrac{5\pi}{4}$ radyan döndürülmesiyle elde edilen P' noktasının koordinatlarını bulunuz.

> **Çözüm.**
> $\dfrac{5\pi}{4}$ açısı üçüncü bölgededir ve referans açısı $\dfrac{\pi}{4}$'tür; bu yüzden
>
> $$\cos\frac{5\pi}{4} = \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
>
> dir. (1)'de $x = 2$, $y = \sqrt{2}$ ve $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$ yazalım:
>
> $$x' = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + 1,$$
> $$y' = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - 1.$$
>
> Böylece $P'\left(\,1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}\,\right)$ bulunur.
> **Kontrol.** Dönme O'ya uzaklığı korumalıdır. Gerçekten $\mid OP \mid^2 = 4 + 2 = 6$ ve
>
> $$\mid OP' \mid^2 = (1-\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^2 = (3 - 2\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2}) = 6$$
>
> dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.3: $P(2, \sqrt{2})$ noktası O etrafında $5\pi/4$ döndürülünce $P(1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2})$ noktasına gider; iki nokta da yarıçapı $\sqrt{6}$ olan çember üzerindedir.

■

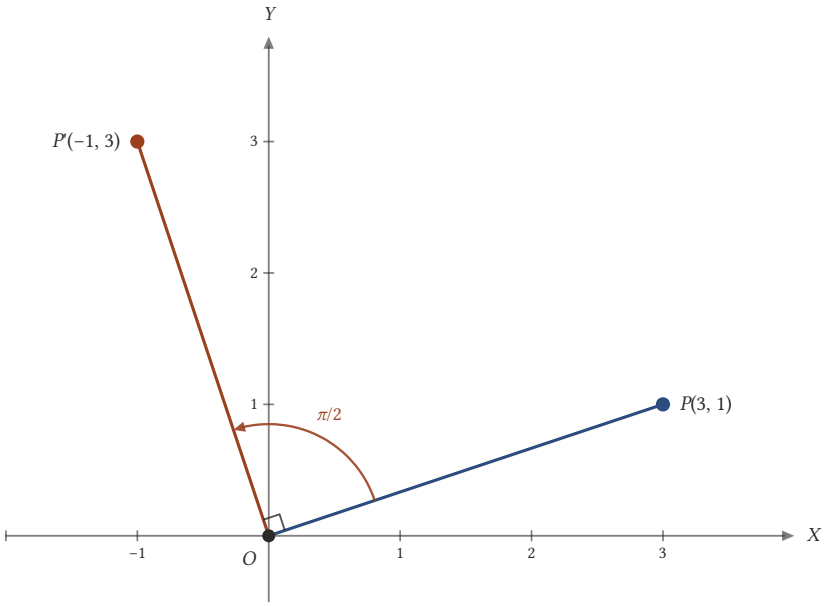
Örnek 17.2 (Dönmüşü bilinen noktayı bulmak). Başlangıç noktası etrafında pozitif yönde $\dfrac{\pi}{2}$ radyan döndürülünce $P'(-1,3)$ noktasına giden P noktasını bulunuz.

Çözüm.
$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ ve $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$'dir. (2)'de $x' = -1$ ve $y' = 3$ yazalım:

$$x = (-1)\cdot 0 + 3\cdot 1 = 3, \qquad y = -(-1)\cdot 1 + 3\cdot 0 = 1.$$

Demek ki $P(3,1)$'dir.
Kontrol. (1) ile $P(3,1)$'i $\dfrac{\pi}{2}$ döndürelim: $x' = 3\cdot 0 - 1\cdot 1 = -1$ ve $y' = 3\cdot 1 + 1\cdot 0 = 3$. Gerçekten $P'(-1,3)$ bulunur. Dik açılı dönmenin kısa kuralı da buradan okunur: $\dfrac{\pi}{2}$ radyanlık dönme (x,y)'yi $(-y,x)$'e götürür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.4: $\pi/2$ radyanlık dönme $P(3,1)$'i $P'(-1,3)$'e götürür; (2) formülleri P'nden P'ye geri döndürür.

■

17.1.1 Bir noktası etrafında döndürme

Şimdi merkez başlangıç noktası olmasın. Yöntem, işi başlangıç noktası etrafındaki dönmeye indirmektir: önce merkezi başlangıca taşırız, orada döndürürüz, sonra geri taşırız.

Teorem 17.2 (Bir M noktası etrafında dönme). *$P(x,y)$ noktasının $M(h,k)$ noktası etrafında θ radyan döndürülmesiyle elde edilen nokta $P'(x',y')$ ise*

$$\begin{aligned} x' &= (x-h)\cos\theta - (y-k)\sin\theta + h, \\ y' &= (x-h)\sin\theta + (y-k)\cos\theta + k \end{aligned} \tag{3}$$

dır.

İspat.
$P = M$ ise $P' = M$ olur ve (3) de $x' = h$, $y' = k$ verir. $P \neq M$ olsun. İşi üç adıma bölelim.
Birinci adım: merkezi başlangıca taşımak. *P noktasını $-\overrightarrow{OM}$ vektörü kadar ötelediğimizde elde edilen noktaya R diyelim. Koordinatları $R(x-h, y-k)$'dir ve $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{MP}$ olur.*
İkinci adım: başlangıç etrafında döndürmek. *R'yi O etrafında θ kadar döndürüp elde edilen noktaya $R'(r_1', r_2')$ diyelim. Teorem 17.1 gereği*

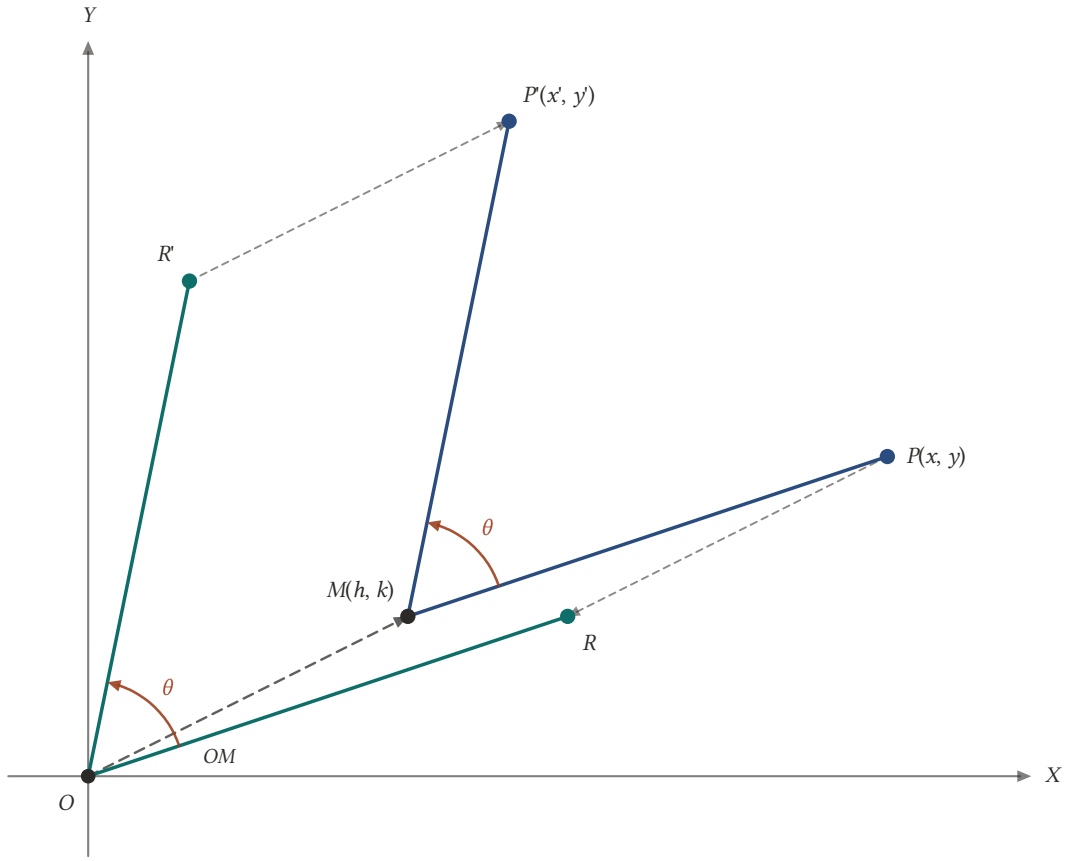
$$r_1' = (x-h)\cos\theta - (y-k)\sin\theta, \qquad r_2' = (x-h)\sin\theta + (y-k)\cos\theta$$

dır.
Üçüncü adım: geri taşımak. *R''nü $\overrightarrow{OM}$ kadar ötelediğimizde elde edilen noktaya P' diyelim. Koordinatları $(r_1'+h, r_2'+k)$'dir; bunlar (3)'ün sağ taraflarıdır. Ayrıca $\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OR'}$ olur.*
Geriye P''nün gerçekten P'nin M etrafındaki dönmüşü olduğunu göstermek kalıyor. Eşit vektörlerin uzunlukları ve yönleri aynıdır. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OR}$ ve $\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OR'}$ olduğundan

$$|\,MP'\,| = |\,OR'\,| = |\,OR\,| = |\,MP\,|$$

dir. Ayrıca MP'den MP''ne olan açı, aynı yönlü OR'den OR''ne olan açıya, yani θ'ya eşittir. Dönmenin tanımı gereği P', P'nin M merkezli θ radyanlık dönmüşüdür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.5: P *önce* –OM *kadar ötelenip* R*'ye,* R *başlangıç etrafında* θ *döndürülüp* R*'ne,* R′ *de* OM *kadar ötelenip* P*'ne götürülür.*

■

Örnek 17.3 (Bir nokta etrafında dik açılı dönme). $P(2,3)$ noktasının $M(1,4)$ noktası etrafında $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ radyan döndürülmesiyle elde edilen $P'(x',y')$ noktasının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Burada $x=2$, $y=3$, $h=1$, $k=4$ ve $\theta = \dfrac{\pi}{2}$'dir. Önce farkları hesaplayalım:

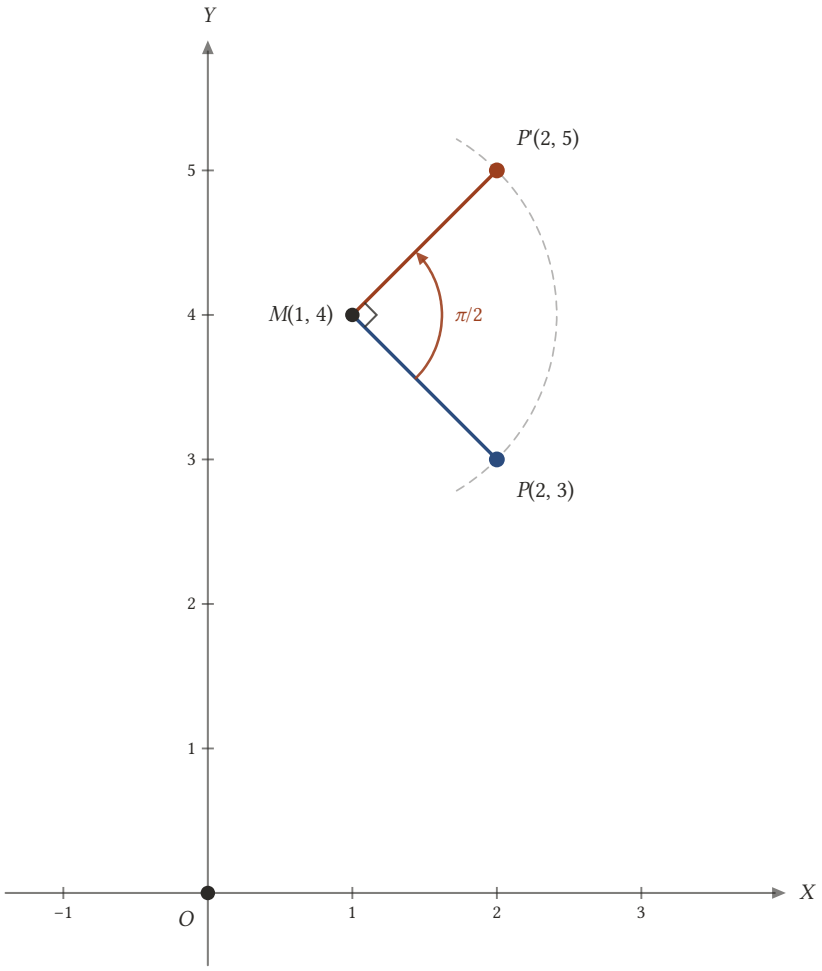
$$x-h = 2-1 = 1, \qquad y-k = 3-4 = -1.$$

$\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ ve $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ olduğundan (3)'ten

$$\begin{aligned} x' &= 0\cdot 1 - 1\cdot(-1) + 1 = 2,\\ y' &= 1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 4 = 5 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $P'(2,5)$ elde edilir.
Kontrol. $\overrightarrow{MP} = (1,-1)$ ve $\overrightarrow{MP'} = (1,1)$'dir. İkisinin de uzunluğu $\sqrt{2}$'dir ve iç çarpımları $1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 0$ olduğundan diktirler.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.6: $P(2,3)$, $M(1,4)$ etrafında $\pi/2$ döndürülünce $P'(2,5)$ olur; MP ile MP' eşit uzunlukta ve diktir.

■

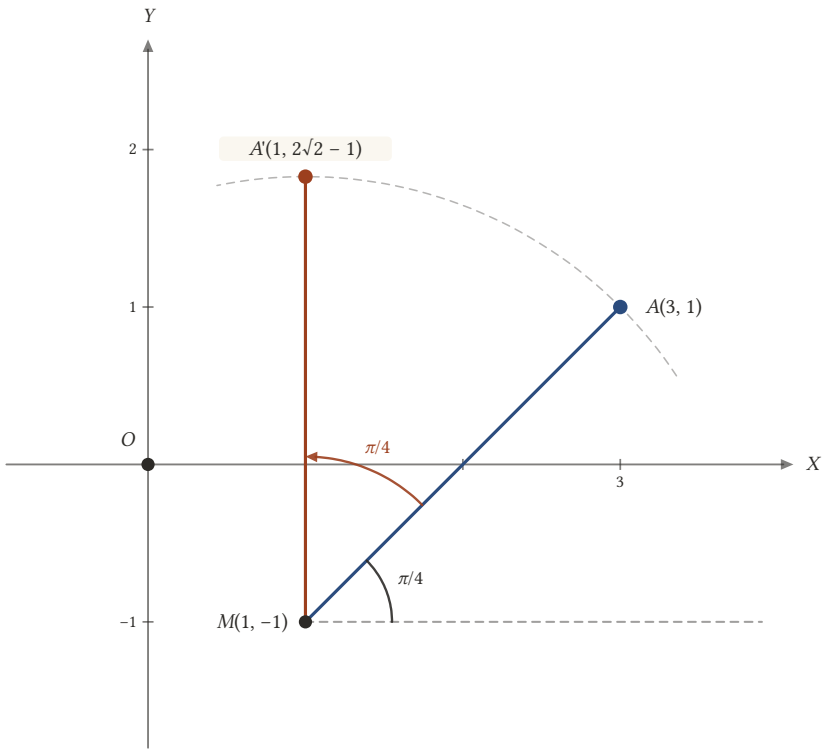
Örnek 17.4 (Bir nokta etrafında pi bölü dört dönme). $A(3,1)$ noktasının $M(1,-1)$ noktası etrafında $\frac{\pi}{4}$ radyan döndürülmesiyle elde edilen A' noktasını bulunuz.

Çözüm.
$x-h=3-1=2$ ve $y-k=1-(-1)=2$'dir. $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ olduğundan (3)'ten

$$x'=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1=1,$$
$$y'=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-1=2\sqrt{2}-1$$

bulunur. Demek ki $A'\left(1,2\sqrt{2}-1\right)$'dir.
Kontrol. $|MA|^2=2^2+2^2=8$ ve $|MA'|^2=0^2+(2\sqrt{2})^2=8$'dir. Ayrıca $\overrightarrow{MA}=(2,2)$ vektörü pozitif X yönüyle $\frac{\pi}{4}$ açısı yapar; $\overrightarrow{MA'}=(0,2\sqrt{2})$ ise tam yukarı bakar, yani $\frac{\pi}{2}$ açısı yapar. Aradaki fark istenen $\frac{\pi}{4}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.7: $A(3,\,1)$, $M(1,\,-1)$ etrafında $\pi/4$ döndürülünce $A'(1,\,2\sqrt{2}-1)$ olur; MA' düşeydir.

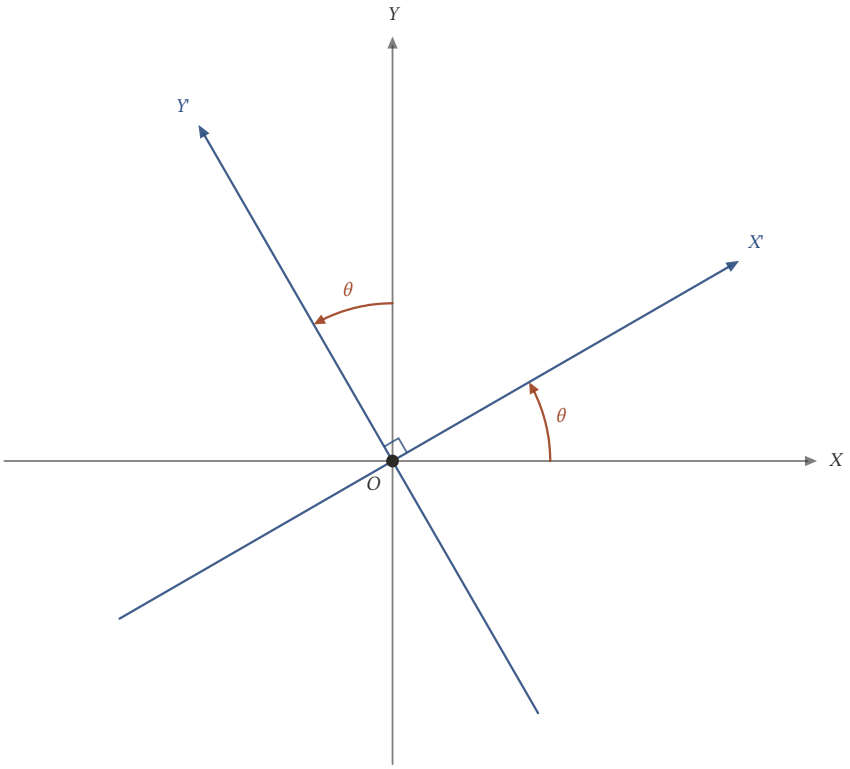
■

17.2 Eksenlerin döndürülmesi

Şimdi bakış açımızı değiştirelim: noktalar yerinde kalsın, koordinat eksenleri dönsün. Aynı noktanın yeni eksenlere göre koordinatları nedir?

Tanım 17.3 (Döndürülmüş dik koordinat sistemi). XY, $\mathbb{R}^2$'de başlangıç noktası $O = O(0,0)$ olan bir dik koordinat sistemi olsun. X- ve Y-eksenlerini O etrafında pozitif yönde θ radyan döndürerek elde edilen X'- ve Y'-eksenlerinin oluşturduğu $X'Y'$ dik koordinat sistemine, $\boldsymbol{XY}$ **sisteminin** $\boldsymbol{\theta}$ **radyanlık açıyla döndürülmüşü** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.8: XY sistemi θ kadar döndürülünce $X'Y'$ sistemi elde edilir; yeni eksenler de birbirine diktir.

Yani döndürülmüş sistem de bir dik koordinat sistemidir: başlangıç noktası ve birim uzunluk aynıdır, eksenler hâlâ diktir ve pozitif X' yönünden pozitif Y' yönüne yine saat yönünün tersine çeyrek dönüşle gidilir. Değişen tek şey eksenlerin doğrultusudur.
Bir P noktasının XY sistemindeki koordinatları (x, y), $X'Y'$ sistemindeki koordinatları (x', y') olsun. Aynı noktanın iki adresini ayırt etmek için kısaca $P(x, y) = P'(x', y')$ yazacağız.

Teorem 17.3 (Eksenler döndürülünce yeni koordinatlar). *XY sisteminin θ radyanlık açıyla döndürülmüşü $X'Y'$ olsun. XY sisteminde $P(x, y)$ olan noktanın $X'Y'$ sistemindeki koordinatları*

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \qquad y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \tag{4}$$

dır.

İspat.
$P = O$ ise iki sistemde de koordinatlar $(0, 0)$'dır ve (4) sağlanır. $P \neq O$ olsun, $r = |\,OP\,| > 0$ ve φ da P'nin XY sistemindeki kutupsal açısı olsun. Önerme 5.3 gereği

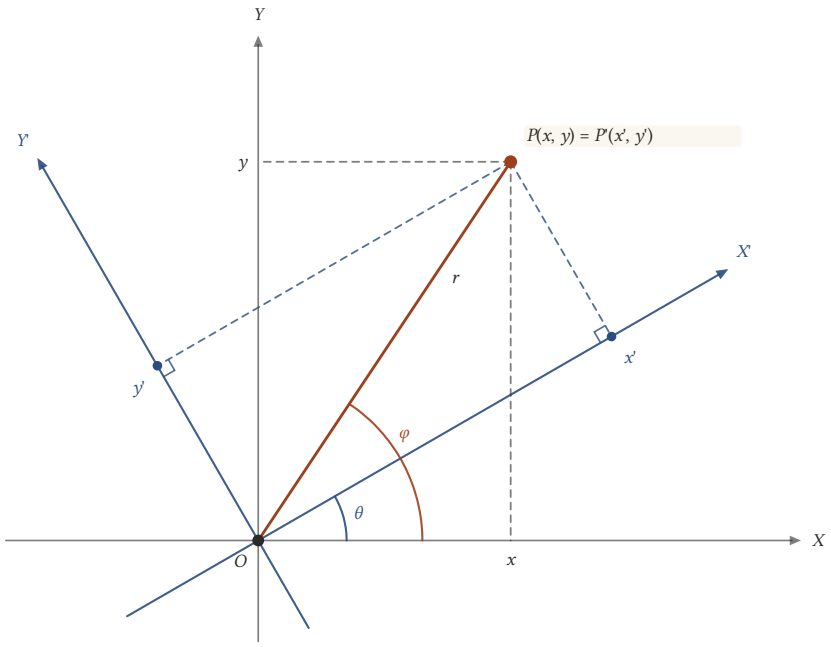
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

dir.
$X'Y'$ de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemidir. Bu sistemde P'nin O'ya uzaklığı yine r'dir. Pozitif X' yönü pozitif X yönüyle θ açısı yaptığından, OP yarı doğrusunun pozitif X' yönüyle yaptığı açı $\varphi - \theta$'dır (negatifse 2π eklenir; sinüs ve kosinüs değişmez). Dik ve kutupsal koordinatlar arasındaki geçişi (Önerme 5.3) bu kez $X'Y'$ sisteminde uygular ve fark formüllerini kullanırsak

$$x' = r\cos(\varphi - \theta) = r\cos\varphi\cos\theta + r\sin\varphi\sin\theta = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$y' = r\sin(\varphi - \theta) = r\sin\varphi\cos\theta - r\cos\varphi\sin\theta = y\cos\theta - x\sin\theta$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.9: Aynı P *noktası:* XY *sisteminde kutupsal açısı* φ, X'Y' *sisteminde* φ − θ; O'*ya uzaklığı iki sistemde de* r'*dir.*

■

(4)'ü (1) ile karşılaştırınca göze çarpan bir benzerlik var: (4), (1)'de θ yerine $-\theta$ yazılmış hâlidir.

Önerme 17.2 (Eksenleri döndürmek ile noktayı ters yönde döndürmek). *XY dik koordinat sisteminde bir $P(x, y)$ noktası verilsin. XY'nin θ radyanlık açıyla döndürülmüşü olan $X'Y'$ sisteminde P'nin koordinatları, P'nin O etrafında negatif yönde θ radyan, yani $-\theta$ kadar döndürülmesiyle elde edilen noktanın XY sistemindeki koordinatlarına eşittir.*

İspat.
P'yi O etrafında $-\theta$ kadar döndürelim ve elde edilen noktanın XY koordinatlarına (x'', y'') diyelim. (1)'de θ yerine $-\theta$ yazarsak, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ *ve* $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ *olduğundan*

$$x'' = x\cos(-\theta) - y\sin(-\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$y'' = x\sin(-\theta) + y\cos(-\theta) = -x\sin\theta + y\cos\theta$$

bulunur. Bunlar (4)'teki x' ve y' ile aynıdır. ■

Yani eksenleri saat yönünün tersine θ kadar döndürmek, eksenlere göre bakıldığında noktayı saat yönünde θ kadar döndürmek gibidir. Trenin penceresinden bakan yolcu için ağaçların geriye kaymasına benzer bir durum.
(4) de matris çarpımıyla yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Tanım 17.4 (Eksenlerin dönme matrisi).

$$D(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

matrisine **eksenlerin θ radyanlık dönme matrisi** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani eksenler θ kadar döndürüldüğünde yeni koordinatlar, eski koordinat sütununun soldan $D(-\theta)$ ile çarpılmasıyla bulunur: $P' = D(-\theta)P$. Bu matris, noktaları döndüren $D(\theta)$ matrisinin (Tanım 17.2) tersidir. Uygulamada çoğu kez ters yöne gitmemiz gerekir: bir eğrinin eski koordinatlarla yazılmış denklemini yeni koordinatlara taşımak için x ve y'yi x' ve y' cinsinden yazmalıyız.

Sonuç 17.1 (Eski koordinatlar yeni koordinatlar cinsinden). *XY sisteminin θ radyanlık açıyla döndürülmüşü $X'Y'$ ise*

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \tag{5}$$

dır.

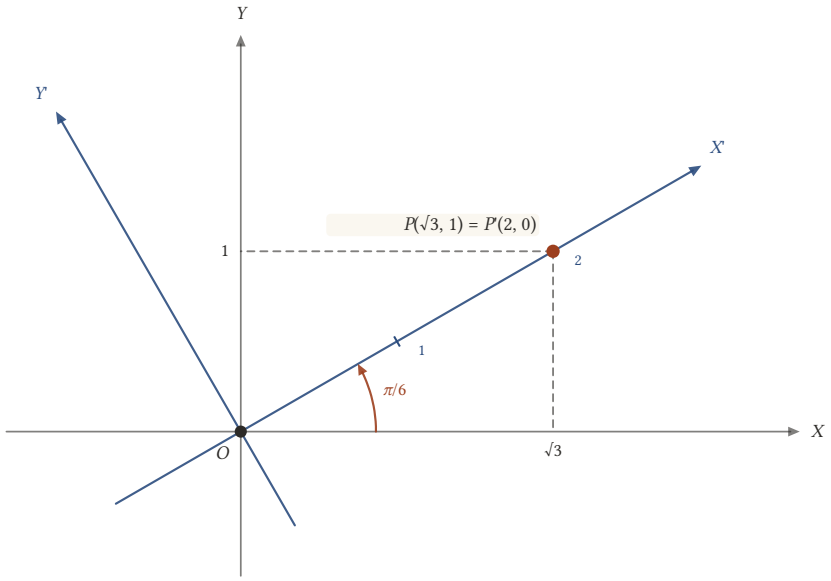
> ***İspat.***
> *$P' = D(-\theta)P$ eşitliğinin iki yanını soldan $D(-\theta)$'nın tersiyle çarpalım. Dönme matrisinin tersine ilişkin önermede (Önerme 17.1) θ yerine $-\theta$ yazarsak $D^{-1}(-\theta) = D(\theta)$ bulunur. Öyleyse*
>
> $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$
>
> *dir; satırları yazmak (5)'i verir.* ■

Yani eski koordinatlar, yeni koordinat ikilisinin θ kadar döndürülmesiyle elde edilir. Bu bölümün geri kalanında en çok (5)'i kullanacağız.

Örnek 17.5 (Yeni eksen üzerine düşen nokta). XY sistemi $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ radyan döndürülüyor. $P(\sqrt{3}, 1)$ noktasının yeni koordinatlarını bulunuz.

> **Çözüm.**
> $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$'dir. (4)'ten
>
> $$x' = \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2,$$
> $$y' = -\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$
>
> bulunur. Demek ki yeni sistemde $P'(2, 0)$'dır; P tam X'-ekseninin üzerindedir.
> Bu sonuç geometriyle de uyumludur. P'nin O'ya uzaklığı $\sqrt{3+1} = 2$'dir ve $\tan\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ olduğundan kutupsal açısı $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$'dır. Yani OP yarı doğrusu tam pozitif X' yönündedir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.10: Eksenler $\pi/6$ döndürülünce $P(\sqrt{3}, 1)$ yeni X'-ekseni üzerine düşer ve yeni koordinatları (2, 0) olur.

■

17.2.1 Dönmede değişmeyenler

Öteleme uzunlukları, açıları ve alanları değiştirmiyordu (Öteleme). Dönme için de aynısı doğrudur.

Teorem 17.4 (Dönmede uzunluk, açı ve alan değişmez). *Bir dönmede*

- *uzunluklar,*
- *doğrular arasındaki yönlenmiş açılar,*
- *alanlar*

değişmez. Yani noktalar bir merkez etrafında döndürüldüğünde iki nokta arasındaki uzaklık, iki doğru arasındaki yönlenmiş açı ve bir üçgenin alanı görüntülerde aynı kalır; eksenler döndürüldüğünde de bu büyüklüklerin yeni koordinatlarla hesaplanan değerleri eski koordinatlarla hesaplananlara eşittir.

İspat.
Neden eksenlerin dönmesi yeter? *Önerme 17.2 gereği noktaları O etrafında θ kadar döndürmenin formülleri, eksenleri $-\theta$ kadar döndürmenin (4) formülleriyle aynıdır. M etrafındaki dönme de, Teorem 17.2 ispatında gördüğümüz gibi, bir öteleme, O etrafında bir dönme ve bir ötelemenin art arda uygulanmasıdır; ötelemeler bu üç büyüklüğü korur. Bu yüzden eksenlerin herhangi bir θ açısıyla döndürülmesinde üç büyüklüğün değişmediğini göstermek yeter.*
Önce (4)'ün farklara nasıl etki ettiğine bakalım. $P_1(x_1, y_1)$ ve $P_2(x_2, y_2)$ noktalarının yeni koordinatları (x_1', y_1') ve (x_2', y_2') olsun; $\Delta x = x_2 - x_1$ ve $\Delta y = y_2 - y_1$ diyelim. (4)'ü iki nokta için yazıp taraf tarafa çıkarırsak

$$x_2' - x_1' = \Delta x \cos\theta + \Delta y \sin\theta, \qquad y_2' - y_1' = -\Delta x \sin\theta + \Delta y \cos\theta \tag{6}$$

bulunur. Yani koordinat farkları da (4)'teki kuralla dönüşür.
Uzunluklar. *(6)'yı kullanarak kareleri açalım:*

$$(x_2' - x_1')^2 = \Delta x^2 \cos^2\theta + 2\,\Delta x\,\Delta y \sin\theta\cos\theta + \Delta y^2 \sin^2\theta,$$
$$(y_2' - y_1')^2 = \Delta x^2 \sin^2\theta - 2\,\Delta x\,\Delta y \sin\theta\cos\theta + \Delta y^2 \cos^2\theta.$$

Toplarken karma terimler birbirini götürür ve $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$'den

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

kalır. Karekök alınırsa uzaklık formülü (Dik Koordinatlar ve Uzaklık) iki sistemde aynı sonucu verir: $|\ P_1'P_2'\ | = |\ P_1P_2\ |$.

Açılar. *Önce bir doğrunun eğim açısının nasıl değiştiğini bulalım. d doğrusunun XY sistemindeki eğim açısı φ olsun. d üzerinde, $\overrightarrow{AB} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ olacak biçimde iki nokta seçelim. (6) gereği bu iki noktanın yeni koordinatlarının farkı*

$$\big(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta, -\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta\big) = \big(\cos(\varphi-\theta), \sin(\varphi-\theta)\big)$$

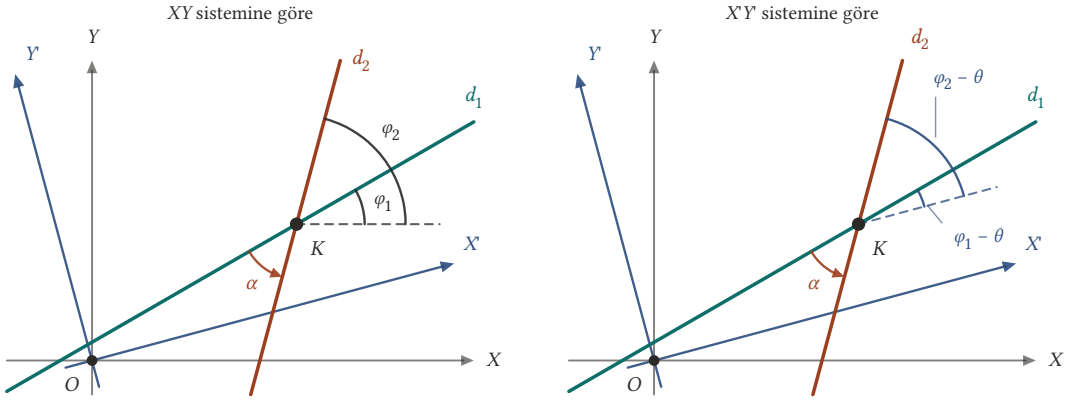
dir. Demek ki $X'Y'$ sisteminde d'nin doğrultusu pozitif X' yönüyle $\varphi - \theta$ açısı yapar. Bir doğrunun eğim açısı $[0, \pi)$ aralığında alındığından, d'nin yeni eğim açısı φ', $\varphi - \theta$'ya π'nin uygun bir tam katı eklenerek bulunur:

$$\varphi' \equiv \varphi - \theta \pmod{\pi}.$$

Şimdi d_1 ve d_2 doğrularının eski eğim açıları φ_1, φ_2 olsun ve α, d_1'den d_2'ye yönlenmiş açı olsun (Tanım 2.7). d_1'i pozitif yönde α kadar döndürmek eğim açısını α kadar artırır; bu yüzden α, $\varphi_1 + \alpha \equiv \varphi_2 \pmod{\pi}$ koşulunu sağlayan $[0, \pi)$'deki tek sayıdır. Yeni sistemde yönlenmiş açı α' ise $\varphi_1' + \alpha' \equiv \varphi_2' \pmod{\pi}$ koşulunu sağlayan $[0, \pi)$'deki tek sayıdır. $\varphi_1' \equiv \varphi_1 - \theta$ ve $\varphi_2' \equiv \varphi_2 - \theta$ olduğundan bu koşul

$$\varphi_1 - \theta + \alpha' \equiv \varphi_2 - \theta \pmod{\pi}, \quad \text{yani} \quad \varphi_1 + \alpha' \equiv \varphi_2 \pmod{\pi}$$

koşuluyla aynıdır. Öyleyse $\alpha' = \alpha$'dır.



Şekil 17.11: Eksenler θ döndürülünce her doğrunun eğim açısı θ kadar azalır; d_1'den d_2'ye yönlenmiş açı α değişmez.

Eğimlerle doğrulama. *Aynı sonucu eğimlerle yapılan bir hesapla da görebiliriz. $d_1 : y = m_1x + n_1$ doğrusunun denkleminde (5)'i yerine yazalım:*

$$x'\sin\theta + y'\cos\theta = m_1(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + n_1,$$

yani

$$(\cos\theta + m_1\sin\theta)\,y' = (m_1\cos\theta - \sin\theta)\,x' + n_1.$$

$\cos\theta \neq 0$ *ve* $\cos\theta + m_1\sin\theta \neq 0$ *ise yeni eğim, pay ve paydayı* $\cos\theta$*'ya bölerek*

$$m_1' = \frac{m_1\cos\theta - \sin\theta}{m_1\sin\theta + \cos\theta} = \frac{m_1 - \tan\theta}{1 + m_1\tan\theta}$$

bulunur; bu, $\tan(\varphi_1 - \theta)$*'nın açılımıdır. Benzer şekilde* $m_2' = \dfrac{m_2 - \tan\theta}{1 + m_2\tan\theta}$*'dır.* $t = \tan\theta$ *diyelim.* $\tan\alpha' = \dfrac{m_2' - m_1'}{1 + m_1'm_2'}$ *kesrinin pay ve paydasını* $(1 + m_1t)(1 + m_2t)$ *ile çarparsak pay*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned}&(m_2-t)(1+m_1t)-(m_1-t)(1+m_2t)\\&=m_2+m_1m_2t-t-m_1t^2-m_1-m_1m_2t+t+m_2t^2\\&=(m_2-m_1)(1+t^2),\end{aligned}$$

payda da

$$\begin{aligned}&(1+m_1t)(1+m_2t)+(m_1-t)(m_2-t)\\&=1+m_1t+m_2t+m_1m_2t^2+m_1m_2-m_1t-m_2t+t^2\\&=(1+m_1m_2)(1+t^2)\end{aligned}$$

olur. $1+t^2\neq 0$ *sadeleşince, Teorem 2.3 gereği* ($1+m_1m_2\neq 0$ *iken)*

$$\tan\alpha'=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\tan\alpha$$

bulunur. Eğimlerle yapılan bu hesap düşey doğruları ve paydaların sıfır olduğu durumları dışarıda bırakır; eğim açılarıyla yaptığımız yukarıdaki gerekçe ise her durumu kapsar.
Alanlar. *Köşeleri* P_1, P_2, P_3 *olan bir üçgen alalım ve* $u=\overrightarrow{P_1P_2}=(u_1,u_2)$, $v=\overrightarrow{P_1P_3}=(v_1,v_2)$ *diyelim. Üçgen,* u *ile* v *üzerine kurulan paralelkenarın yarısı olduğundan Önerme 9.4 gereği alanı*

$$\mathcal{A}(P_1P_2P_3)=\frac{1}{2}\mid u_1v_2-u_2v_1\mid$$

dir. (6) gereği yeni sistemde bu vektörlerin bileşenleri

$$u_1'=u_1\cos\theta+u_2\sin\theta,\qquad u_2'=-u_1\sin\theta+u_2\cos\theta$$

ve v *için de aynı biçimdedir. Kısalık için* $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ *yazarak çarpımları açalım:*

$$\begin{aligned}u_1'v_2'&=(u_1c+u_2s)(-v_1s+v_2c)\\&=-u_1v_1cs+u_1v_2c^2-u_2v_1s^2+u_2v_2sc,\\u_2'v_1'&=(-u_1s+u_2c)(v_1c+v_2s)\\&=-u_1v_1sc-u_1v_2s^2+u_2v_1c^2+u_2v_2cs.\end{aligned}$$

Taraf tarafa çıkarınca u_1v_1 *ve* u_2v_2*'li terimler gider:*

$$u_1'v_2'-u_2'v_1'=u_1v_2(c^2+s^2)-u_2v_1(s^2+c^2)=u_1v_2-u_2v_1.$$

Demek ki üçgenin alanı iki sistemde aynı hesaplanır. Her çokgen üçgenlere bölünebildiğinden çokgenlerin alanları da değişmez. ■

17.2.2 Bir eğrinin yeni sistemdeki denklemi

Eksenler döndürüldüğünde eğriler yerinde kalır; değişen, onları anlatan denklemlerdir. Bir eğri XY sisteminde $F(x,y)=0$ denklemiyle verilmişse, bir noktanın eğri üzerinde olması eski koordinatlarının bu denklemi sağlamasıdır. Eski koordinatları (5) ile yeni koordinatlar cinsinden yazarsak eğrinin $X'Y'$ sistemindeki denklemi

$$F(x'\cos\theta-y'\sin\theta,x'\sin\theta+y'\cos\theta)=0$$

olur. Yani denklemde x ve y yerine (5)'teki ifadeleri yazmak yeter.

Örnek 17.6 (Döndürülen eksenlerde çember). XY sisteminde $x^2+y^2=9$ geometrik yeri veriliyor. X- ve Y-eksenleri pozitif yönde $\frac{\pi}{3}$ radyan döndürülüyor. Bu geometrik yerin yeni $X'Y'$ sistemindeki denklemini bulunuz ve iki sistemi aynı şekilde gösteriniz.

Çözüm.
$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ve $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan (5)

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x = \frac{x'}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y' = \frac{1}{2}\,\left(\,x' - \sqrt{3}\,y'\,\right), \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,x' + \frac{y'}{2} = \frac{1}{2}\,\left(\,\sqrt{3}\,x' + y'\,\right)$$

verir. Kareleri açalım:

$$x^2 = \frac{1}{4}\,\left(\,x'^2 - 2\sqrt{3}\,x'y' + 3y'^2\,\right),$$
$$y^2 = \frac{1}{4}\,\left(\,3x'^2 + 2\sqrt{3}\,x'y' + y'^2\,\right).$$

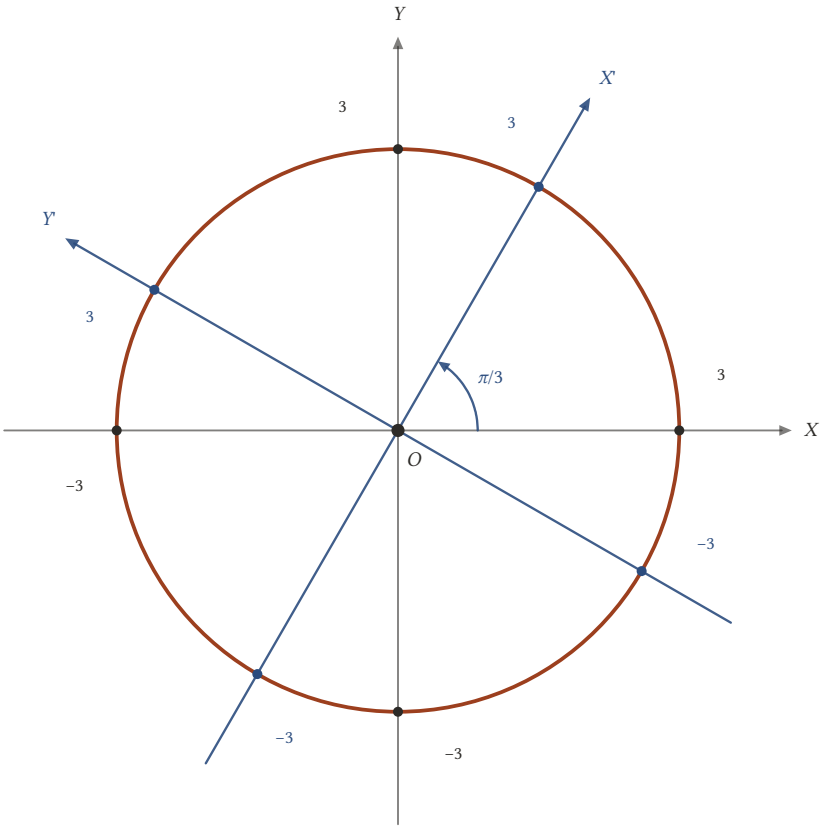
Toplayınca $x'y'$'li terimler birbirini götürür:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\,\left(\,4x'^2 + 4y'^2\,\right) = x'^2 + y'^2.$$

Böylece geometrik yerin yeni denklemi

$$x'^2 + y'^2 = 9$$

dur. Bu hiç şaşırtıcı değildir: $x^2 + y^2 = 9$, O'ya uzaklığı 3 olan noktaların kümesidir ve Teorem 17.4 gereği uzaklıklar dönmeyle değişmez. Merkezi başlangıç noktasında olan bir çemberin denklemi her dönmede aynı kalır.



Şekil 17.12: $x^2 + y^2 = 9$ çemberi eksenler $\pi/3$ döndürüldükten sonra da $x'^2 + y'^2 = 9$ denklemiyle anlatılır.

■

Örnek 17.7 (Dik açılı dönme doğruyu dik doğruya çevirir). XY sisteminde X- ve Y-eksenlerinin pozitif yönde $\dfrac{\pi}{2}$ radyan döndürülmesinin her doğruyu kendisine dik bir doğruya dönüştürdüğünü göste-

riniz. Yani bir doğrunun yeni sistemdeki denklemi XY sisteminde okunduğunda, ilk doğruya dik bir doğru belirtir.

Çözüm.
$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ için $\cos\theta = 0$ ve $\sin\theta = 1$ olduğundan (5)

$$x = -y', \qquad y = x'$$

verir. (4)'e göre de $x' = y$ ve $y' = -x$'tir; yani (x, y) noktasının yeni koordinatları $(x', y') = (y, -x)$'tir.
XY sisteminde $d : ax + by + c = 0$ doğrusu verilsin (a ile b ikisi birden sıfır değil). d'nin yeni sistemdeki karşılığına d' diyelim. Denklemde $x = -y'$ ve $y = x'$ yazarsak

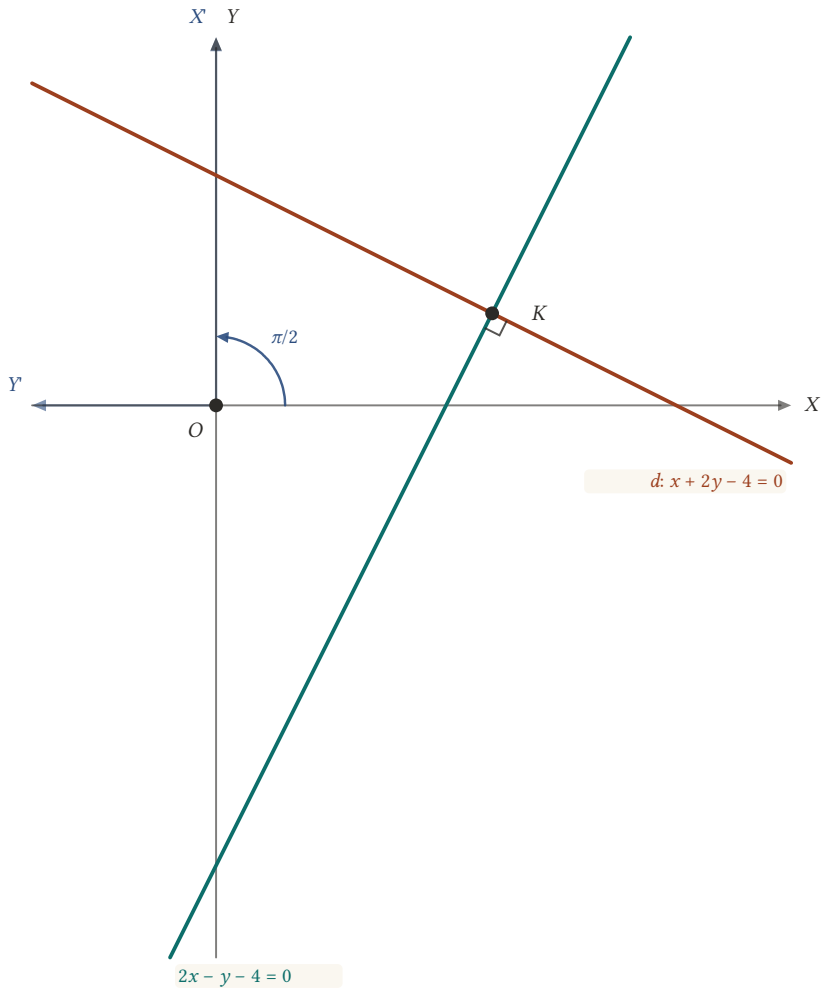
$$d' : a(-y') + bx' + c = 0, \quad \text{yani} \quad bx' - ay' + c = 0$$

bulunur.
Genel durum ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Önerme 3.3 gereği d'nin eğimi $m = -\dfrac{a}{b}$, d''nün eğimi ise $m' = -\dfrac{b}{-a} = \dfrac{b}{a}$'dır. Buna göre

$$m\,m' = \left(-\frac{a}{b}\right)\frac{b}{a} = -1$$

dir; Sonuç 2.2 gereği d' doğrusu d'ye diktir.
Yatay ya da düşey doğrular. $a = 0$ ise $d : by + c = 0$ yataydır, $d' : bx' + c = 0$ ise düşeydir. $b = 0$ ise $d : ax + c = 0$ düşeydir, $d' : -ay' + c = 0$ ise yataydır. Her iki durumda da doğrular diktir.
Somut bir örnek: $d : x + 2y - 4 = 0$ için $d' : 2x' - y' - 4 = 0$ bulunur. XY sisteminde okunduğunda $2x - y - 4 = 0$ doğrusunun eğimi 2, d'ninki $-\dfrac{1}{2}$'dir ve çarpımları -1'dir. Bu iki doğru $\left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$ noktasında dik kesişir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.13: Eksenler $\pi/2$ döndürülünce d'nin yeni denklemi $2x' - y' - 4 = 0$ olur; bu denklem XY'de okunduğunda d'ye dik bir doğru belirtir. İki doğru $K(12/5, 4/5)$'te dik kesişir.

■

Dönmenin en önemli uygulaması, ikinci dereceden bir denklemdeki xy'li terimi, yani karma terimi yok etmektir. Eksenleri uygun bir açıyla döndürünce eğri, eksenlere "düz" oturur ve denklemi sadeleşir.

Karma terimi dönmeyle üç adımda yok etmek

1. (5)'i denklemde yerine yazıp terimleri x'^2, $x'y'$, y'^2, x', y' ve sabit terim diye toplayın. $2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$ ve $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ özdeşlikleri katsayıları sadeleştirir.
2. $x'y'$'nin katsayısını sıfıra eşitleyip $\tan 2\theta$'yı (ya da $\cos 2\theta = 0$ koşulunu) bulun ve $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ aralığında bir çözüm seçin.
3. $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ ve $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ ile $\cos\theta$ ve $\sin\theta$'yı hesaplayıp kalan katsayılara yazın.

Örnek 17.8 (xy = 1 eğrisinde karma terimi yok etmek). $xy = 1$ denklemindeki karma terimi yok eden bir dönme açısı bulunuz ve eğrinin yeni denklemini yazınız.

Çözüm.
Birinci adım. (5)'i yerine yazalım:

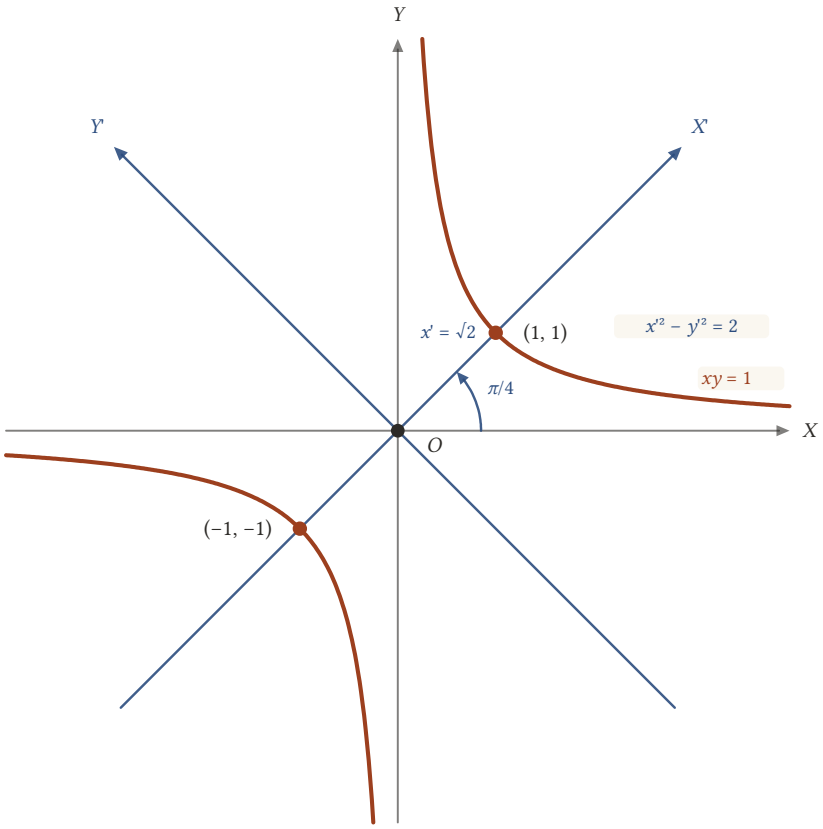
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\begin{aligned} xy &= (x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) \\ &= x'^2\sin\theta\cos\theta + x'y'(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - y'^2\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{\sin 2\theta}{2}x'^2 + \cos 2\theta x'y' - \frac{\sin 2\theta}{2}y'^2. \end{aligned}$$

İkinci adım. Karma terimin katsayısı $\cos 2\theta$'dır. $\cos 2\theta = 0$ ve $0 < 2\theta < \pi$ koşulları $2\theta = \frac{\pi}{2}$, yani $\theta = \frac{\pi}{4}$ verir.
Üçüncü adım. Bu açıda $\sin 2\theta = 1$ olduğundan denklem

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1, \quad \text{yani} \quad x'^2 - y'^2 = 2$$

olur. Eğri X'-eksenini $x' = \pm\sqrt{2}$'de keser. Bu noktalar XY sisteminde (5) ile $(1,1)$ ve $(-1,-1)$'dir; gerçekten ikisi de $xy = 1$'i sağlar. Bu eğrinin bir hiperbol olduğunu konikler kısmında göreceğiz (Hiperbol).



Şekil 17.14: Eksenler $\pi/4$ döndürülünce $xy = 1$ eğrisinin denklemi $x'^2 - y'^2 = 2$ olur; eğri yeni eksenlere göre simetrik durur.

■

17.3 Dik koordinat sisteminden paralel koordinat sistemine geçiş

Şimdi dönmeyi bir adım genelleştiriyoruz. Yeni sistemin eksenleri yalnız dönmüş olmasın, aralarındaki açı da $\frac{\pi}{2}$'den farklı olabilsin. Böylece dik koordinatlarla bir paralel koordinat sisteminin (Paralel ve Kutupsal Koordinatlar) koordinatları arasında gidip gelebileceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Kurulum şöyle olsun. $\mathbb{R}^2$'de başlangıç noktası $O = O(0,0)$ olan bir XY dik koordinat sistemi ve başlangıç noktası yine O olan, eksenleri arasındaki açı α $(0 < \alpha < \pi)$ olan bir $X'Y'$ paralel koordinat sistemi verilsin (Tanım 5.1). İki sistemde birim uzunluk aynıdır. Pozitif X yönünden pozitif X' yönüne olan açıya θ diyelim.
Pozitif X ve Y yönlerindeki birim vektörler $e_1 = (1,0)$ ve $e_2 = (0,1)$'dir; bunlar eksenlerin birim vektörlerinin (Tanım 7.17) düzlemdeki karşılığıdır. Pozitif X' ve Y' yönlerindeki birim vektörlere e_1' ve e_2' diyelim. Pozitif X' yönü pozitif X yönüyle θ, pozitif Y' yönü ise $\theta + \alpha$ açısı yapar. Birim çember üzerindeki bir noktanın koordinatları, o noktanın açısının kosinüsü ve sinüsüdür (Önerme 5.3 ispatındaki U noktası). Bu yüzden

$$e_1' = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad e_2' = \big(\cos(\theta+\alpha), \sin(\theta+\alpha)\big)$$

dır. Bir P noktasının XY sistemindeki dik koordinatları (x,y), $X'Y'$ sistemindeki paralel koordinatları (x',y') olsun ve yine $P(x,y) = P'(x',y')$ yazalım.

Teorem 17.5 (Paralel koordinatlardan dik koordinatlara). *Yukarıdaki kurulumda*

$$x = x'\cos\theta + y'\cos(\theta+\alpha), \qquad y = x'\sin\theta + y'\sin(\theta+\alpha) \tag{7}$$

dır.

İspat.
Konum vektörünün iki yazılışı. *Bir vektörün eksen birim vektörleri cinsinden yazılışının (Önerme 7.13) düzlemdeki karşılığı olarak $\overrightarrow{OP} = xe_1 + ye_2$'dir. Öte yandan paralel koordinatların tanımı gereği P'den Y'-eksenine çizilen paralel X'-eksenini x' noktasında, X'-eksenine çizilen paralel Y'-eksenini y' noktasında keser. Bu noktalara A ve B diyelim; $\overrightarrow{OA} = x'e_1'$ ve $\overrightarrow{OB} = y'e_2'$'dür. $OAPB$ bir paralelkenar olduğundan paralelkenar kuralı (Önerme 7.6) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ verir. (P bir eksen üzerindeyse paralelkenar bir doğru parçasına dönüşür, ama eşitlik yine geçerlidir.) Demek ki*

$$xe_1 + ye_2 = x'e_1' + y'e_2' \tag{8}$$

dür.
Bileşenleri ayırmak. *(8)'in iki yanının e_1 ile iç çarpımını alalım (Tanım 9.4). $\langle e_1, e_1\rangle = 1$, $\langle e_2, e_1\rangle = 0$, $\langle e_1', e_1\rangle = \cos\theta$ ve $\langle e_2', e_1\rangle = \cos(\theta+\alpha)$ olduğundan*

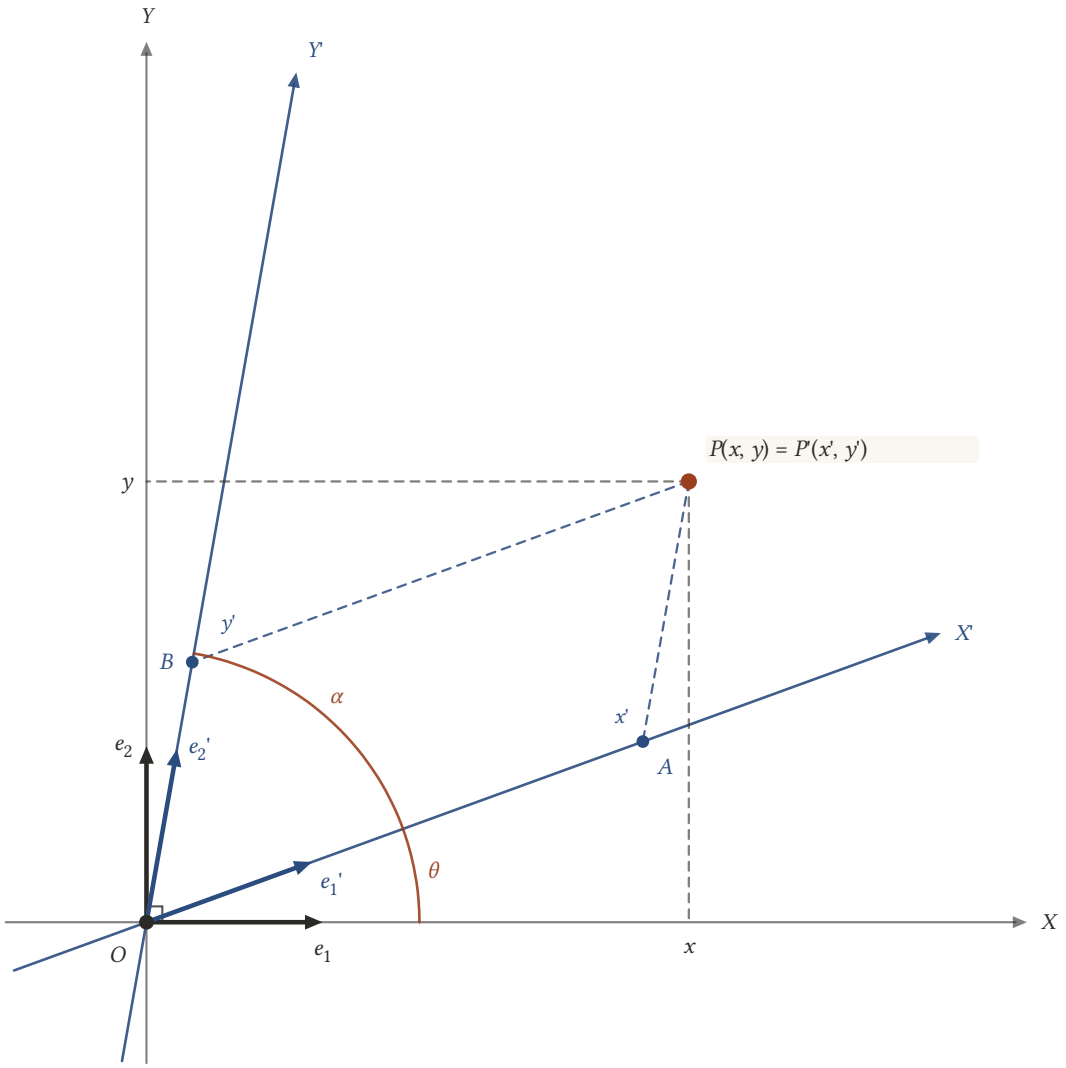
$$x = x'\cos\theta + y'\cos(\theta+\alpha)$$

bulunur. Benzer şekilde e_2 ile iç çarpım alınırsa $\langle e_1, e_2\rangle = 0$, $\langle e_2, e_2\rangle = 1$, $\langle e_1', e_2\rangle = \sin\theta$ ve $\langle e_2', e_2\rangle = \sin(\theta+\alpha)$ olduğundan

$$y = x'\sin\theta + y'\sin(\theta+\alpha)$$

elde edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.15: Dik sistemde P*'nin koordinatları dikmelerle* (x, y)*, eğik sistemde eksenlere paralellerle* (x', y') *okunur;* OP = x e_1 + y e_2 = x' e_1' + y' e_2'.

■

Tersine, dik koordinatları bilinen bir noktanın paralel koordinatlarını bulmak için (8)'i bu kez eğik eksenlerin birim vektörleriyle çarparız.

Teorem 17.6 (Dik koordinatlardan paralel koordinatlara). *Yukarıdaki kurulumda*

$$x' = \frac{x\sin(\theta+\alpha) - y\cos(\theta+\alpha)}{\sin\alpha}, \qquad y' = \frac{-x\sin\theta + y\cos\theta}{\sin\alpha} \tag{9}$$

dır.

İspat.
İki denklem. *Önce eğik birim vektörlerin iç çarpımlarını hesaplayalım.* $\langle e_1', e_1'\rangle = \langle e_2', e_2'\rangle = 1$*'dir ve fark formülüyle*

$$\langle e_1', e_2'\rangle = \cos\theta\cos(\theta+\alpha) + \sin\theta\sin(\theta+\alpha) = \cos\big(\,(\theta+\alpha) - \theta\,\big) = \cos\alpha$$

bulunur. (8)'in iki yanının e_1' *ile iç çarpımını alalım.* $\langle e_1, e_1'\rangle = \cos\theta$ *ve* $\langle e_2, e_1'\rangle = \sin\theta$ *olduğundan*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x\cos\theta + y\sin\theta = x' + y'\cos\alpha \tag{10}$$

elde edilir. e_2' *ile iç çarpım alınırsa* $\langle e_1, e_2'\rangle = \cos(\theta+\alpha)$ *ve* $\langle e_2, e_2'\rangle = \sin(\theta+\alpha)$ *olduğundan*

$$x\cos(\theta+\alpha) + y\sin(\theta+\alpha) = x'\cos\alpha + y' \tag{11}$$

bulunur.

Denklemleri çözmek. *Kısalık için (10)'un sol yanına* A*, (11)'in sol yanına* B *diyelim.* $x' + y'\cos\alpha = A$ *ve* $x'\cos\alpha + y' = B$ *sisteminde ilk denklemden ikincinin* $\cos\alpha$ *katını çıkarırsak*

$$x'(1-\cos^2\alpha) = A - B\cos\alpha, \quad \text{yani} \quad x' = \frac{A - B\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

bulunur. $0 < \alpha < \pi$ *olduğundan* $\sin\alpha \neq 0$*'dır. Pay:*

$$A - B\cos\alpha = x\,\big(\cos\theta - \cos\alpha\cos(\theta+\alpha)\big) + y\,\big(\sin\theta - \cos\alpha\sin(\theta+\alpha)\big)\,.$$

$\theta = (\theta+\alpha) - \alpha$ *yazıp fark formüllerini kullanalım:*

$$\cos\theta = \cos(\theta+\alpha)\cos\alpha + \sin(\theta+\alpha)\sin\alpha,$$
$$\sin\theta = \sin(\theta+\alpha)\cos\alpha - \cos(\theta+\alpha)\sin\alpha.$$

Bunlar paydaki parantezlerin sırasıyla $\sin\alpha\sin(\theta+\alpha)$ *ve* $-\sin\alpha\cos(\theta+\alpha)$ *olduğunu gösterir.* $\sin\alpha$ *sadeleşince (9)'un ilk eşitliği çıkar.*

Benzer şekilde ikinci denklemden birincinin $\cos\alpha$ *katını çıkarırsak* $y' = \dfrac{B - A\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ *bulunur. Toplam formülleriyle*

$$\cos(\theta+\alpha) - \cos\alpha\cos\theta = -\sin\alpha\sin\theta,$$
$$\sin(\theta+\alpha) - \cos\alpha\sin\theta = \sin\alpha\cos\theta$$

olduğundan

$$B - A\cos\alpha = \sin\alpha\,(-x\sin\theta + y\cos\theta)$$

dır. $\sin\alpha$ *sadeleşince (9)'un ikinci eşitliği de çıkar.* ■

Yani (7) ile (9) birbirinin tersidir: biri eğik koordinatlardan dik koordinatlara, öbürü dik koordinatlardan eğik koordinatlara götürür.

Özel olarak $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ise $X'Y'$ bir dik sistemdir ve XY'nin θ kadar döndürülmüşüdür. Bu durumda $\sin\alpha = 1$, $\cos(\theta+\frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$ ve $\sin(\theta+\frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ olur. (7), dönmenin (5) formüllerine; (9) da (4) formüllerine dönüşür. Yani eksenlerin döndürülmesi, burada anlattığımız geçişin eksenleri dik kalan özel hâlidir.

Şekli çizerken $\theta + \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ durumunu, yani iki eğik eksenin de birinci bölgeden geçtiği durumu düşünmek kolaydır. Ama bu kısıtlama formüller için gerekli değildir.

Önerme 17.3 (Geçiş formülleri her açı için geçerlidir).

(7) ve (9) geçiş formülleri $\theta + \alpha > \dfrac{\pi}{2}$ *olduğunda da, genel olarak her* θ *ve her* $0 < \alpha < \pi$ *için geçerlidir.*

İspat.
İki geçiş teoreminin (Teorem 17.5 ve Teorem 17.6) ispatlarında açıların büyüklüğü yalnız bir yerde kullanıldı: e_1' *ve* e_2' *vektörlerinin koordinatlarında. Bir birim vektörün koordinatlarının, pozitif* X *yönüyle yaptığı açının kosinüsü ve sinüsü olması birim çember tanımından gelir ve açı hangi bölgede olursa olsun doğrudur. Dolayısıyla* $\theta + \alpha$ *ikinci, üçüncü ya da dördüncü bölgede olsa da*

$$e_1' = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad e_2' = \big(\cos(\theta+\alpha), \sin(\theta+\alpha)\big)$$

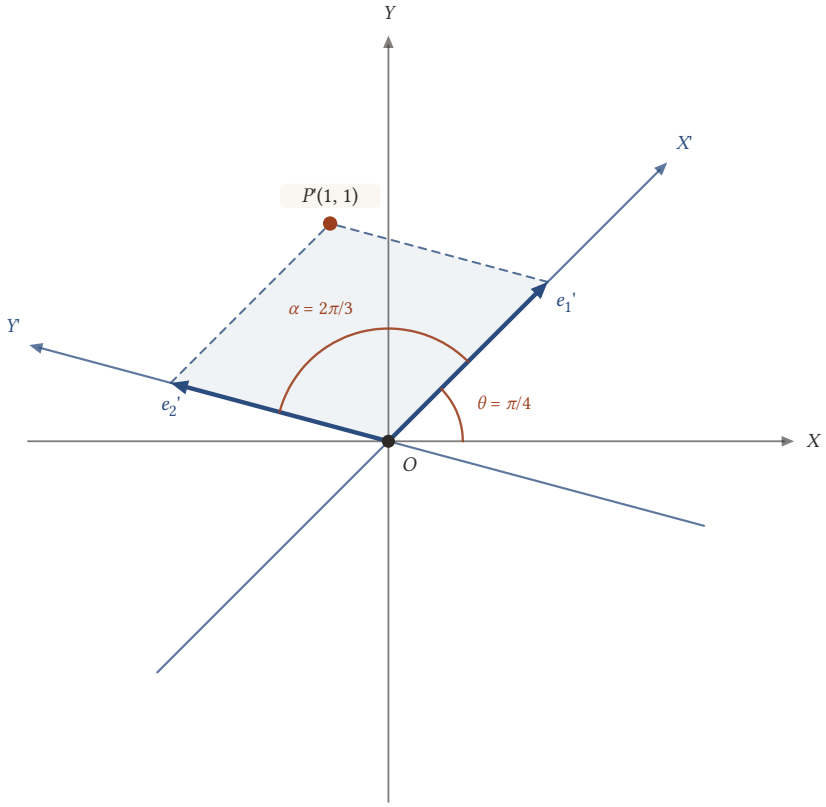
yazılır. İspatın geri kalanı (paralelkenar kuralı, iç çarpımlar, toplam ve fark formülleri, $\sin\alpha \neq 0$*) hiçbir açı kısıtlaması kullanmaz.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Örneğin $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ *ve* $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ *olsun;* $\theta + \alpha = \dfrac{11\pi}{12} > \dfrac{\pi}{2}$*'dir ve* Y'*-ekseninin pozitif yarısı ikinci bölgededir.* $\cos\dfrac{11\pi}{12} = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *ve* $\sin\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ *olduğundan paralel koordinatları* $(1,1)$ *olan nokta için (7)*

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

verir. Bu nokta $e_1' + e_2'$ *vektörünün ucudur ve gerçekten ikinci bölgededir.*



Şekil 17.16: $\theta + \alpha = 11\pi/12 > \pi/2$ *olsa da* $e_2' = (\cos(\theta+\alpha), \sin(\theta+\alpha))$ *yazılır ve (7) formülleri geçerli kalır.*

■

Örnek 17.9 (Eğik sistemdeki bir noktanın dik koordinatları). XY dik sistemiyle aynı başlangıç noktasına sahip bir $X'Y'$ paralel sisteminde $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ ve eksenler arasındaki açı $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$'dır. Paralel koordinatları $(2,1)$ olan noktanın dik koordinatlarını bulunuz ve (9) ile geri dönerek doğrulayınız.

Çözüm.
Burada $\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{3}$'tür. Gerekli değerler

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

dir. (7)'de $x' = 2$ ve $y' = 1$ yazalım:

$$x = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3} + \frac{1}{2}, \qquad y = 2\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

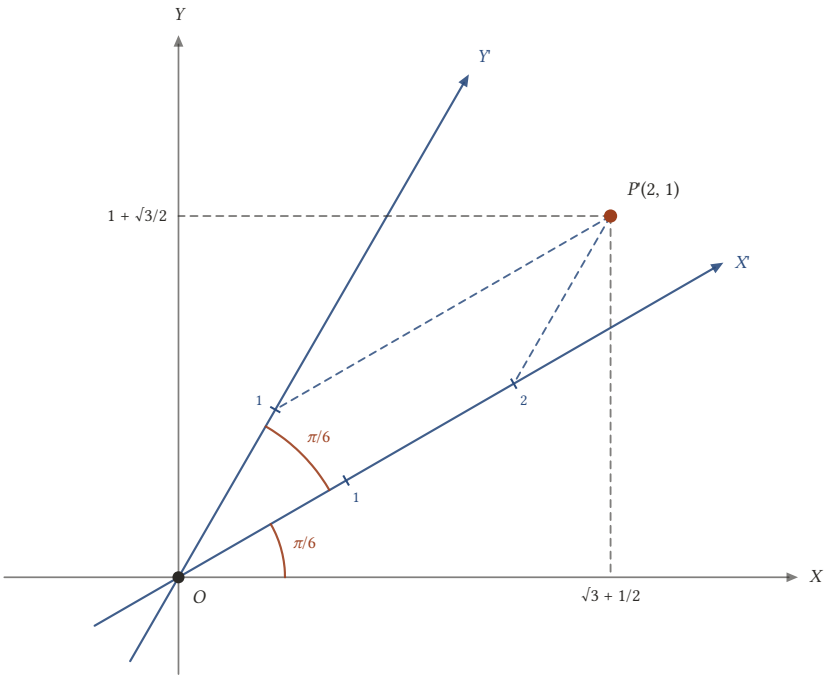
Demek ki nokta $P\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}, 1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$'dir.

Doğrulama. $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ olduğundan (9)'da paydaya bölmek 2 ile çarpmaktır:

$$x' = 2\left[\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}\right] = 2\left[\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right] = 2,$$

$$y' = 2\left[-\left(\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} + \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\right] = 1.$$

Başladığımız $(2,1)$ ikilisine geri döndük.



Şekil 17.17: $\theta = \alpha = \pi/6$ olan eğik sistemde paralel koordinatları (2, 1) olan noktanın dik koordinatları $(\sqrt{3} + 1/2,\ 1 + \sqrt{3}/2)$'dir.

■

İki sistemin başlangıç noktaları farklıysa önce bir öteleme yaparız.

Önerme 17.4 (Başlangıç noktaları farklı olduğunda geçiş). *XY dik sisteminde bir $O'(a,b)$ noktası alalım. $X'Y'$, başlangıç noktası O' olan ve eksenleri arasındaki açı α olan bir paralel koordinat sistemi olsun; pozitif X yönünden pozitif X' yönüne olan açı θ olsun. Bir noktanın XY sistemindeki koordinatları (x,y), $X'Y'$ sistemindeki koordinatları (x',y') ise*

$$x = x'\cos\theta + y'\cos(\theta+\alpha) + a, \qquad y = x'\sin\theta + y'\sin(\theta+\alpha) + b \tag{12}$$

ve

$$\begin{aligned} x' &= \frac{(x-a)\sin(\theta+\alpha) - (y-b)\cos(\theta+\alpha)}{\sin\alpha}, \\ y' &= \frac{-(x-a)\sin\theta + (y-b)\cos\theta}{\sin\alpha} \end{aligned} \tag{13}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dır.

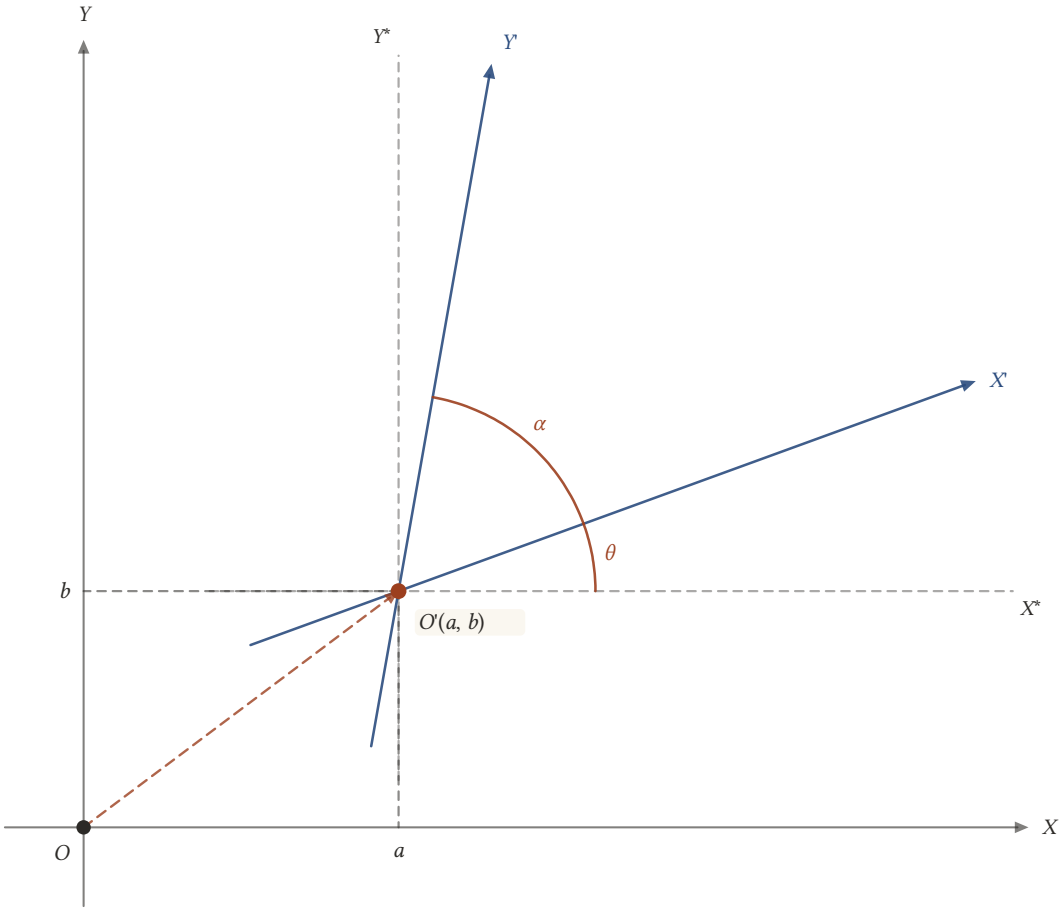
İspat.
XY sisteminin eksenlerini kendilerine paralel kalacak biçimde O' noktasına ötelediğimizde elde edilen dik sisteme X^*Y^* diyelim. Eksenlerin ötelenmesinden (Öteleme) bir noktanın iki sistemdeki koordinatları arasında

$$x = x^* + a, \qquad y = y^* + b \tag{14}$$

bağıntısı vardır. X^*Y^* ile $X'Y'$'nün başlangıç noktası ortaktır (O') ve X^* ekseni X'e paralel ve aynı yönlü olduğundan pozitif X^* yönünden pozitif X' yönüne olan açı yine θ'dır. Öyleyse Teorem 17.5 ve Teorem 17.6 bu iki sisteme uygulanabilir:

$$x^* = x' \cos\theta + y' \cos(\theta + \alpha), \qquad y^* = x' \sin\theta + y' \sin(\theta + \alpha)$$

ve (9)'da x, y yerine x^*, y^* yazılmış eşitlikler geçerlidir. Birinciyi (14)'e yazmak (12)'yi verir. (14)'ten $x^* = x - a$ ve $y^* = y - b$'yi ikinciye yazmak da (13)'ü verir.



*Şekil 17.18: Başlangıçlar farklıysa XY önce O'(a, b)'ye ötelenip X*Y* elde edilir; X*Y* ile eğik X'Y' sisteminin başlangıcı ortaktır.*

■

Örnek 17.10 (Başlangıcı ötelenmiş eğik sistemde koordinatlar). Başlangıç noktası $O'(1, 2)$ olan bir $X'Y'$ paralel sisteminde X'-ekseni X-eksenine paralel ve aynı yönlüdür ($\theta = 0$), eksenler arasındaki açı $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$'tür. XY sisteminde $P(4, 2 + \sqrt{3})$ olan noktanın paralel koordinatlarını bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

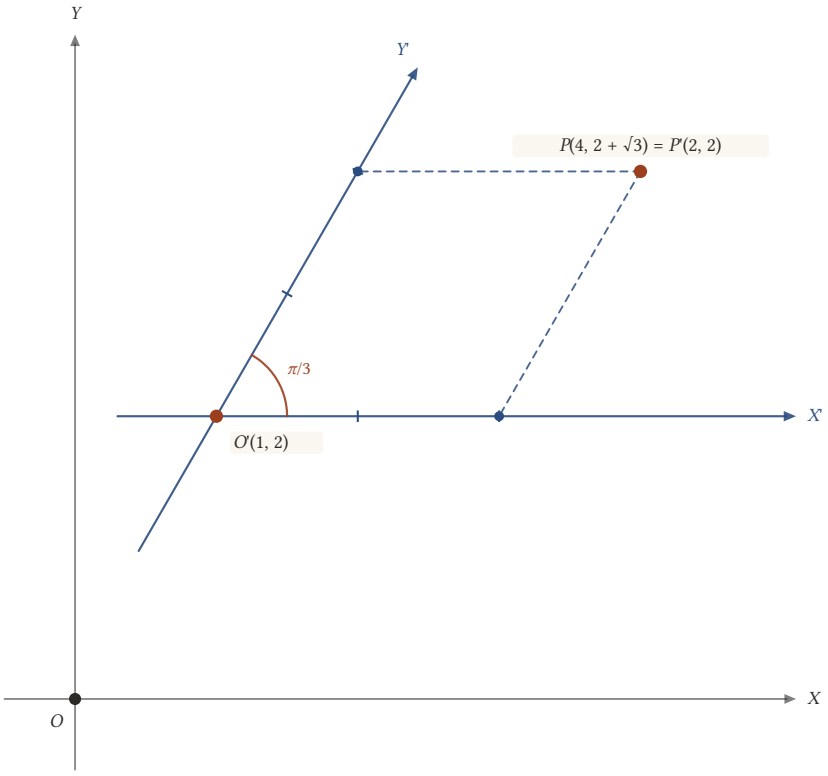
Çözüm.
$a = 1$, $b = 2$ ve $x - a = 3$, $y - b = \sqrt{3}$'tür. $\theta = 0$ olduğundan $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$ ve $\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{3}$'tür; $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$'dir. (13)'ten

$$x' = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{2} = 2,$$

$$y' = \frac{-3 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

bulunur. Demek ki $P'(2, 2)$'dir.

Kontrol. (12)'den $x = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \dfrac{1}{2} + 1 = 4$ ve $y = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2 = 2 + \sqrt{3}$ bulunur; başladığımız noktaya döndük.



Şekil 17.19: Başlangıcı $O'(1, 2)$ ve eksen açısı $\pi/3$ olan eğik sistemde $P(4, 2 + \sqrt{3})$ noktasının paralel koordinatları $(2, 2)$'dir.

■

17.4 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda eksenlerin döndürülmesini, karma terimi yok etmeyi, eğik koordinatlara geçişi ve birinci dereceden terimleri eksenleri öteleyerek yok etmeyi çalışacağız. Hepsinde XY, $\mathbb{R}^2$'de başlangıç noktası $O = O(0, 0)$ olan bir dik koordinat sistemidir.

Alıştırma 17.1 (Görüntüsü verilen noktayı bulmak). Merkezi O ve açısı $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ radyan olan dönmenin denklemlerini yazarak görüntüsü $P'(2, 1)$ olan P noktasını bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.

Dönmenin denklemleri. $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ olduğundan (1) formülleri

$$x'=\frac{\sqrt{3}}{2}\,x-\frac{1}{2}\,y,\qquad y'=\frac{1}{2}\,x+\frac{\sqrt{3}}{2}\,y$$

olur. Görüntüden ilk noktaya dönmek için bu sistemi çözmek yerine (2)'yi kullanabiliriz:

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}\,x'+\frac{1}{2}\,y',\qquad y=-\frac{1}{2}\,x'+\frac{\sqrt{3}}{2}\,y'.$$

Yerine yazmak. $x'=2$ ve $y'=1$ için

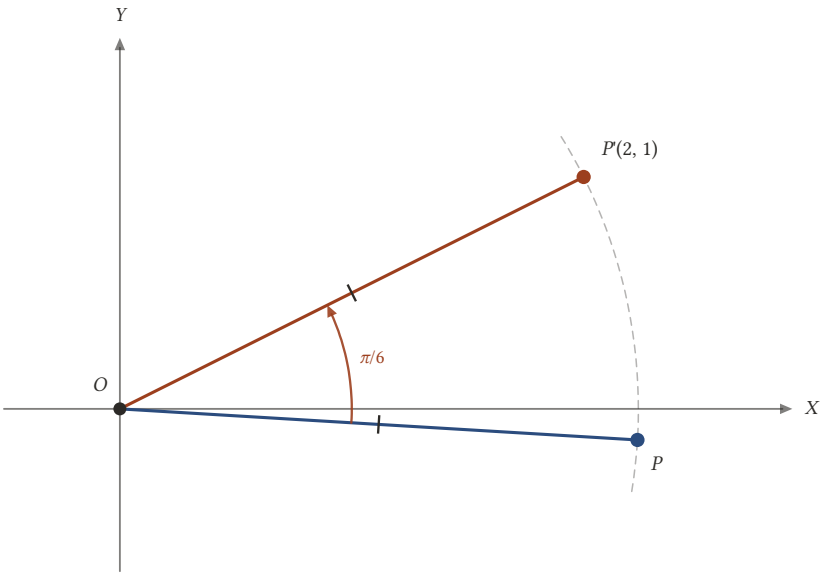
$$x=\sqrt{3}+\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}+1}{2},\qquad y=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$$

bulunur. Demek ki $P\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2},\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$'dir.

Kontrol. Bu noktayı (1) ile $\frac{\pi}{6}$ döndürelim:

$$x'=\frac{2\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}-2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{(6+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-2)}{4}=2,$$
$$y'=\frac{2\sqrt{3}+1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{(2\sqrt{3}+1)+(3-2\sqrt{3})}{4}=1.$$

Gerçekten $P'(2,1)$ bulunur.



Şekil 17.20: O etrafında $\pi/6$ döndürülünce $P'(2,\,1)$'e giden nokta $P((2\sqrt{3}+1)/2,\,(\sqrt{3}-2)/2)$'dir; $|OP|=|OP'|=\sqrt{5}$.

■

Alıştırma 17.2 (Eksenler pi bölü altı döndürülünce yeni koordinatlar). X- ve Y-eksenleri O etrafında $\theta=\frac{\pi}{6}$ radyan döndürülüyor. $P(3,5)$ noktasının yeni koordinatları nedir?

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Eksenler θ kadar döndürülünce yeni koordinatlar (4) ile bulunur. $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ olduğundan

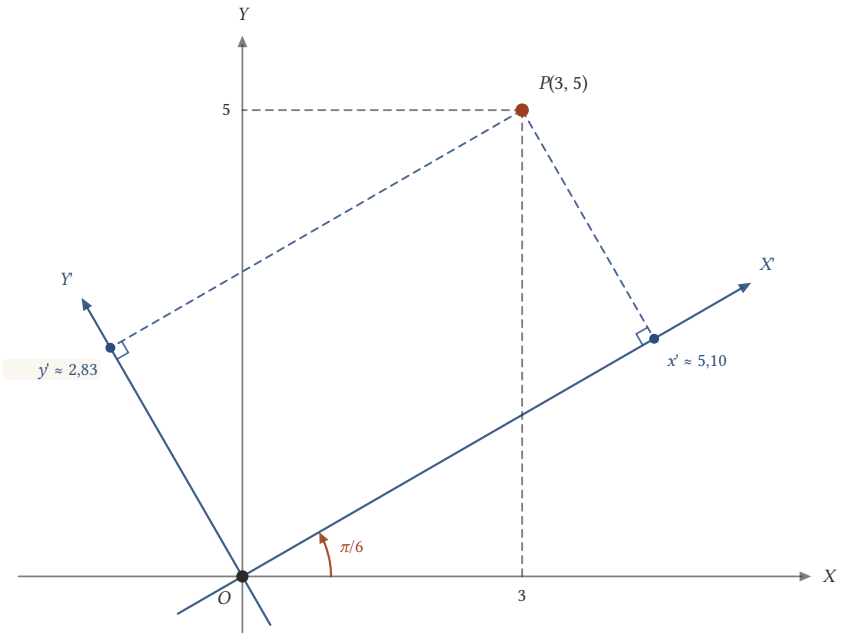
$$x'=3\cos\frac{\pi}{6}+5\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}=\frac{3\sqrt{3}+5}{2},$$
$$y'=-3\sin\frac{\pi}{6}+5\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{3}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}-3}{2}$$

bulunur. Böylece $P'\left(\dfrac{3\sqrt{3}+5}{2},\dfrac{5\sqrt{3}-3}{2}\right)$ elde edilir.

Kontrol. Dönme O'ya uzaklığı korur. $\mid OP\mid^2=9+25=34$'tür ve

$$x'^2+y'^2=\frac{(27+30\sqrt{3}+25)+(75-30\sqrt{3}+9)}{4}=\frac{136}{4}=34$$

dür.



Şekil 17.21: Eksenler $\pi/6$ döndürülünce $P(3,5)$'in yeni koordinatları $((3\sqrt{3}+5)/2, (5\sqrt{3}-3)/2) \approx (5{,}10; 2{,}83)$ olur.

■

Alıştırma 17.3 (Doğrunun yeni eğimi bir olacak biçimde döndürme). Koordinat eksenlerini O etrafında öyle döndürünüz ki $d: x+y-3=0$ doğrusunun yeni $X'Y'$ sistemindeki eğimi 1 olsun. Doğrunun yeni denklemini de yazınız.

Çözüm.
Birinci yol: denklemde yerine yazmak. Eksenler θ kadar döndürülsün. (5)'i d'nin denkleminde yerine yazalım:

$$(x'\cos\theta-y'\sin\theta)+(x'\sin\theta+y'\cos\theta)-3=0,$$

yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(\cos\theta - \sin\theta)\, y' = -(\sin\theta + \cos\theta)\, x' + 3. \tag{15}$$

$\cos\theta - \sin\theta \neq 0$ ise yeni eğim $-\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$'dır. Bunun 1'e eşit olması

$$-\sin\theta - \cos\theta = \cos\theta - \sin\theta, \quad \text{yani} \quad \cos\theta = 0$$

demektir. $[0, 2\pi)$'de bunu sağlayan açılar $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ve $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$'dir; ikisinde de $\cos\theta - \sin\theta = \mp 1 \neq 0$ olduğundan varsayımımız da sağlanır. En küçük pozitif açı $\theta = \dfrac{\pi}{2}$'dir. Bu açıda $\cos\theta = 0$ ve $\sin\theta = 1$ olduğundan (15)

$$-y' = -x' + 3, \quad \text{yani} \quad d' : x' - y' - 3 = 0$$

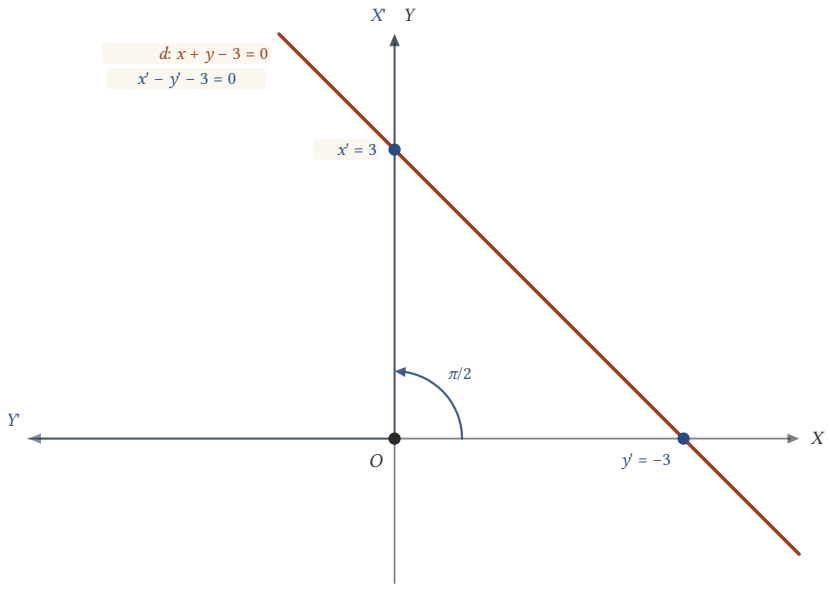
olur.

İkinci yol: eğim açısıyla. d'nin eğimi -1 olduğundan eğim açısı $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$'tür. Dönmede değişmeyenler teoreminin (Teorem 17.4) ispatında gördüğümüz gibi eksenler θ kadar döndürülünce eğim açısı $\varphi - \theta$ olur (π'nin katları dışında). Yeni eğimin 1 olması yeni eğim açısının $\dfrac{\pi}{4}$ olması demektir:

$$\frac{3\pi}{4} - \theta \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}, \quad \text{yani} \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Yine en küçük pozitif çözüm $\theta = \dfrac{\pi}{2}$'dir. Bu açıda (5), $x = -y'$ ve $y = x'$ verir; d'nin denkleminde yerine yazınca $-y' + x' - 3 = 0$ bulunur.

İki yoldan da eksenlerin $\dfrac{\pi}{2}$ radyan döndürülmesi gerektiği ve $d' : x' - y' - 3 = 0$ bulunur. ($\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ seçilirse $d' : -x' + y' - 3 = 0$ bulunur; onun da eğimi 1'dir.)



Şekil 17.22: Eksenler $\pi/2$ döndürülünce $x + y - 3 = 0$ doğrusu $X'Y'$ sisteminde $x' - y' - 3 = 0$ olur ve eğimi 1'dir.

■

Alıştırma 17.4 (Karma terimi yok eden dönme: bir elips). X- ve Y-eksenleri O etrafında hangi açıyla döndürülürse $7x^2 - 6\sqrt{3}\,xy + 13y^2 = 16$ denkleminin yeni $X'Y'$ sistemindeki karşılığında $x'y'$'li terim bulunmaz? Bu açıda yeni denklemi yazınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Birinci adım. Kısalık için $c=\cos\theta$, $s=\sin\theta$ yazalım. (5)'ten $x=x'c-y's$ ve $y=x's+y'c$'dir; buna göre

$$\begin{aligned} x^2 &= x'^2c^2 - 2x'y'sc + y'^2s^2,\\ xy &= x'^2sc + x'y'(c^2-s^2) - y'^2sc,\\ y^2 &= x'^2s^2 + 2x'y'sc + y'^2c^2 \end{aligned}$$

dir. Bunları $7x^2-6\sqrt{3}\,xy+13y^2=16$'da yerine yazıp terimleri toplayalım ve $2sc=\sin 2\theta$, $c^2-s^2=\cos 2\theta$ kullanalım:

$$\begin{aligned} &\left(\,7c^2-3\sqrt{3}\sin 2\theta+13s^2\,\right)x'^2\\ &\quad+\left(\,-7\sin 2\theta-6\sqrt{3}\cos 2\theta+13\sin 2\theta\,\right)x'y'\\ &\quad+\left(\,7s^2+3\sqrt{3}\sin 2\theta+13c^2\,\right)y'^2=16. \end{aligned}$$

İkinci adım. $x'y'$'li terimin bulunmaması için

$$6\sin 2\theta-6\sqrt{3}\cos 2\theta=0$$

olmalıdır. $\cos 2\theta=0$ olsaydı bu eşitlik $\sin 2\theta=0$ da verirdi; ikisi birden sıfır olamaz. Öyleyse $\cos 2\theta\neq 0$'dır ve bölerek $\tan 2\theta=\sqrt{3}$ bulunur. $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ için $2\theta=\dfrac{\pi}{3}$, yani $\theta=\dfrac{\pi}{6}$'dır.
Üçüncü adım. $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ için $c^2=\dfrac{3}{4}$, $s^2=\dfrac{1}{4}$ ve $\sin 2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$'dir. Katsayılar

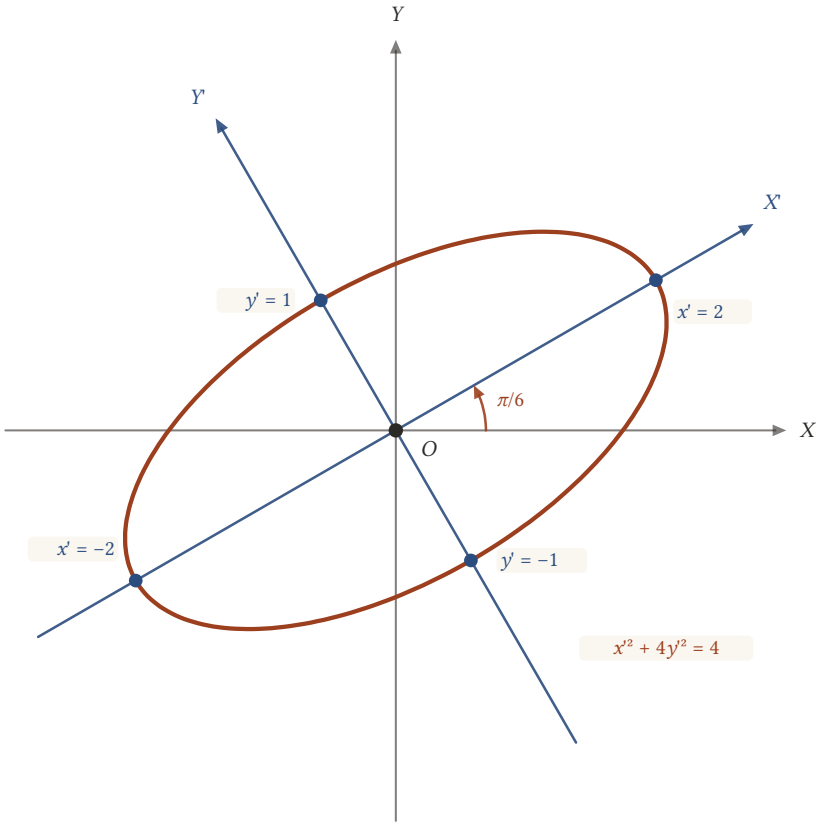
$$\begin{aligned} x'^2 &: 7\cdot\frac{3}{4}-3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+13\cdot\frac{1}{4}=\frac{21}{4}-\frac{18}{4}+\frac{13}{4}=4,\\ y'^2 &: 7\cdot\frac{1}{4}+3\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+13\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{4}+\frac{18}{4}+\frac{39}{4}=16 \end{aligned}$$

olur. Denklem $4x'^2+16y'^2=16$, yani

$$x'^2+4y'^2=4$$

biçimini alır. Eksenlerin $\dfrac{\pi}{6}$ radyan döndürülmesi karma terimi yok eder.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.23: $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$ eğrisi, eksenler $\pi/6$ döndürülünce $x'^2 + 4y'^2 = 4$ denklemiyle yazılır.

■

Alıştırma 17.5 (Karma terimi yok eden dönme: bir parabol). X- ve Y-eksenleri O etrafında hangi açıyla döndürülürse

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 90x - 130y = 0$$

denkleminin yeni $X'Y'$ sistemindeki karşılığında $x'y'$'li terim bulunmaz? Bu açıda yeni denklemi yazınız.

Çözüm.
Birinci adım. Yine $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ yazalım. Önceki alıştırmadaki x^2, xy, y^2 açılımlarını ve

$$90x - 130y = (90c - 130s)\,x' + (-90s - 130c)\,y'$$

eşitliğini kullanarak terimleri toplarsak

$$\begin{aligned}&\left(\,9c^2 + 12\sin 2\theta + 16s^2\,\right)x'^2 + \left(\,-9\sin 2\theta + 24\cos 2\theta + 16\sin 2\theta\,\right)x'y' \\ &\quad + \left(\,9s^2 - 12\sin 2\theta + 16c^2\,\right)y'^2 + (90c - 130s)\,x' - (90s + 130c)\,y' = 0\end{aligned}$$

bulunur.
İkinci adım. $x'y'$'li terimin bulunmaması için

$$7\sin 2\theta + 24\cos 2\theta = 0, \quad \text{yani} \quad \tan 2\theta = -\frac{24}{7}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olmalıdır ($\cos 2\theta = 0$ olsaydı $\sin 2\theta$ da sıfır olurdu). $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ aralığında arıyoruz; o zaman $0 < 2\theta < \pi$'dir ve tanjant negatif olduğundan 2θ ikinci bölgededir. $1 + \tan^2 2\theta = \dfrac{1}{\cos^2 2\theta}$'dan

$$\cos^2 2\theta = \frac{1}{1 + \frac{576}{49}} = \frac{49}{625}, \qquad \cos 2\theta = -\frac{7}{25}, \qquad \sin 2\theta = \frac{24}{25}$$

bulunur.

Üçüncü adım. Yarım açı formülleriyle

$$\cos^2 \theta = \frac{1 - \frac{7}{25}}{2} = \frac{9}{25}, \qquad \sin^2 \theta = \frac{1 + \frac{7}{25}}{2} = \frac{16}{25}$$

ve θ birinci bölgede olduğundan $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$, $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$'tir. Yani aranan açı $\theta = \arctan\dfrac{4}{3}$'tür. Katsayılar:

$$\begin{aligned}
x'^2 &: \frac{9 \cdot 9 + 12 \cdot 24 + 16 \cdot 16}{25} = \frac{81 + 288 + 256}{25} = 25, \\
y'^2 &: \frac{9 \cdot 16 - 12 \cdot 24 + 16 \cdot 9}{25} = \frac{144 - 288 + 144}{25} = 0, \\
x' &: 90 \cdot \frac{3}{5} - 130 \cdot \frac{4}{5} = 54 - 104 = -50, \\
y' &: -\left(90 \cdot \frac{4}{5} + 130 \cdot \frac{3}{5}\right) = -(72 + 78) = -150.
\end{aligned}$$

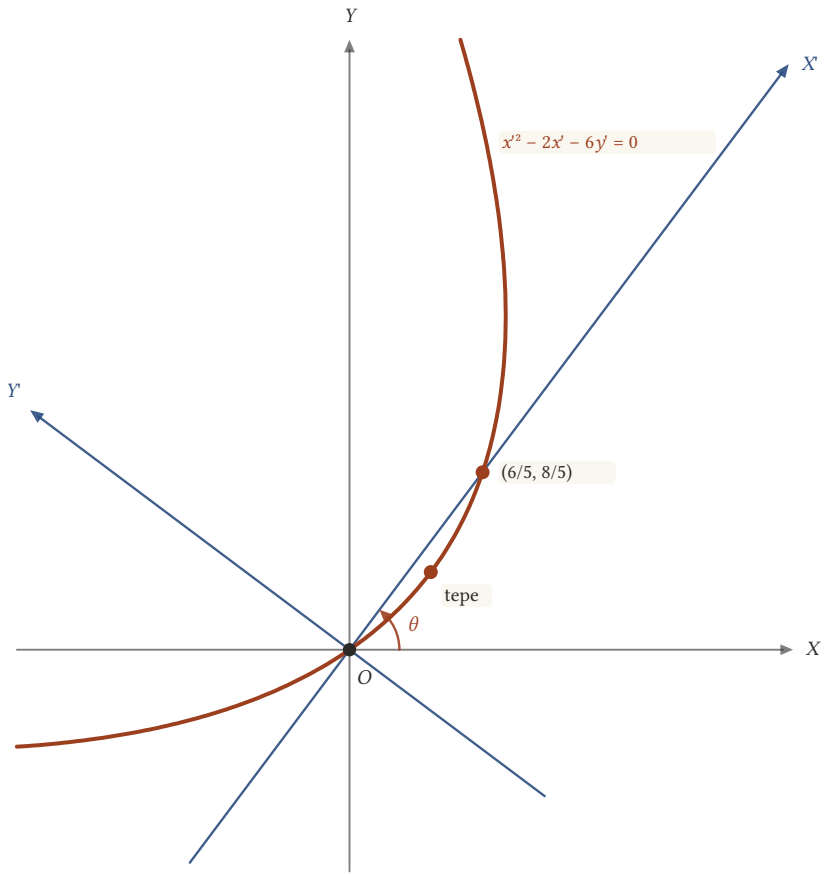
Denklem $25x'^2 - 50x' - 150y' = 0$ olur; 25'e bölünce

$$x'^2 - 2x' - 6y' = 0$$

bulunur. Eksenlerin $\theta = \arctan\dfrac{4}{3}$ radyan döndürülmesi karma terimi yok eder.

$\tan 2\theta = -\dfrac{24}{7}$ denkleminin başka çözümleri de vardır: θ'ya $\dfrac{\pi}{2}$'nin katları eklenebilir. Örneğin $\theta - \dfrac{\pi}{2} = -\arctan\dfrac{3}{4}$ (saat yönünde bir dönme) de karma terimi yok eder; ama eksenlerin rolleri değiştiğinden denklem bu kez y'^2'li bir biçimde çıkar. Pozitif ve dar açıyı seçmek sonucu tek türlü belirler.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.24: Eksenler $\theta = \arctan(4/3)$ kadar döndürülünce $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 90x - 130y = 0$ eğrisi $x'^2 - 2x' - 6y' = 0$ olur; eğrinin simetri ekseni Y'-eksenine paraleldir.

■

Alıştırma 17.6 (Eğik sistemden dik sisteme geçiş). Başlangıç noktası O ve eksenleri arasındaki açı $\frac{\pi}{4}$ olan bir $X'Y'$ paralel koordinat sisteminde $P'(1,2)$ noktası veriliyor. Aynı başlangıç noktasına sahip ve X-ekseni X'-ekseniyle çakışan XY dik sisteminde bu noktanın koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
X ile X' çakıştığından $\theta = 0$'dır; $\alpha = \frac{\pi}{4}$'tür. (7)'de $x' = 1$, $y' = 2$ yazalım:

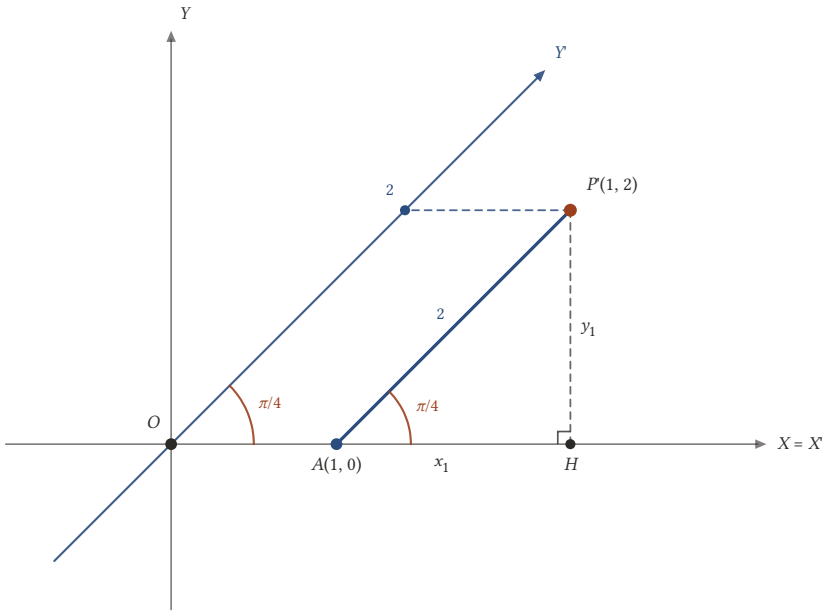
$$x = 1 \cdot \cos 0 + 2\cos\frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}, \qquad y = 1 \cdot \sin 0 + 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$$

Demek ki $P(1+\sqrt{2}, \sqrt{2})$'dir.
Şekilden okuma. Aynı sonuca üçgen çizerek de ulaşabiliriz. P'den Y'-eksenine çizilen paralel X'-eksenini, yani X-eksenini $A(1,0)$ noktasında keser ve $|\,AP\,| = 2$'dir. AP doğru parçası X-ekseniyle $\frac{\pi}{4}$ açısı yapar. P'den X-eksenine inilen dikmenin ayağı H olsun. AHP dik üçgeninde $|\,AH\,| = x_1$ ve $|\,HP\,| = y_1$ dersek

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{x_1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x_1}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{y_1}{2} \Rightarrow y_1 = \sqrt{2}$$

bulunur. Böylece $x = 1 + x_1 = 1 + \sqrt{2}$ ve $y = y_1 = \sqrt{2}$ olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.25: Eksen açısı $\pi/4$ olan eğik sistemde $P(1,\,2)$ noktası; AHP dik üçgeninden $x_1 = y_1 = \sqrt{2}$ ve $P(1 + \sqrt{2},\,\sqrt{2})$ bulunur.

■

Alıştırma 17.7 (Birinci dereceden terimleri öteleyerek yok etmek: 2xy − x − y + 4 = 0). $2xy - x - y + 4 = 0$ denklemini birinci dereceden terimlerinin katsayıları 0 olan bir denkleme dönüştüren eksen ötelemesini belirleyiniz.

Çözüm.
Eksenleri başlangıcı $O'(a, b)$ olacak biçimde ötelediğimizi düşünelim. Eksenlerin ötelenmesinde (Öteleme) eski ve yeni koordinatlar arasında

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b$$

bağıntısı vardır. Bunları denklemde yerine yazıp açalım:

$$\begin{aligned} &2(x'+a)(y'+b) - (x'+a) - (y'+b) + 4 \\ &\quad = 2x'y' + 2bx' + 2ay' + 2ab - x' - a - y' - b + 4 \\ &\quad = 2x'y' + (2b-1)\,x' + (2a-1)\,y' + 2ab - a - b + 4. \end{aligned}$$

Birinci dereceden terimlerin katsayılarının sıfır olması için

$$2b - 1 = 0 \qquad \text{ve} \qquad 2a - 1 = 0,$$

yani $a = b = \dfrac{1}{2}$ olmalıdır. Bu durumda sabit terim

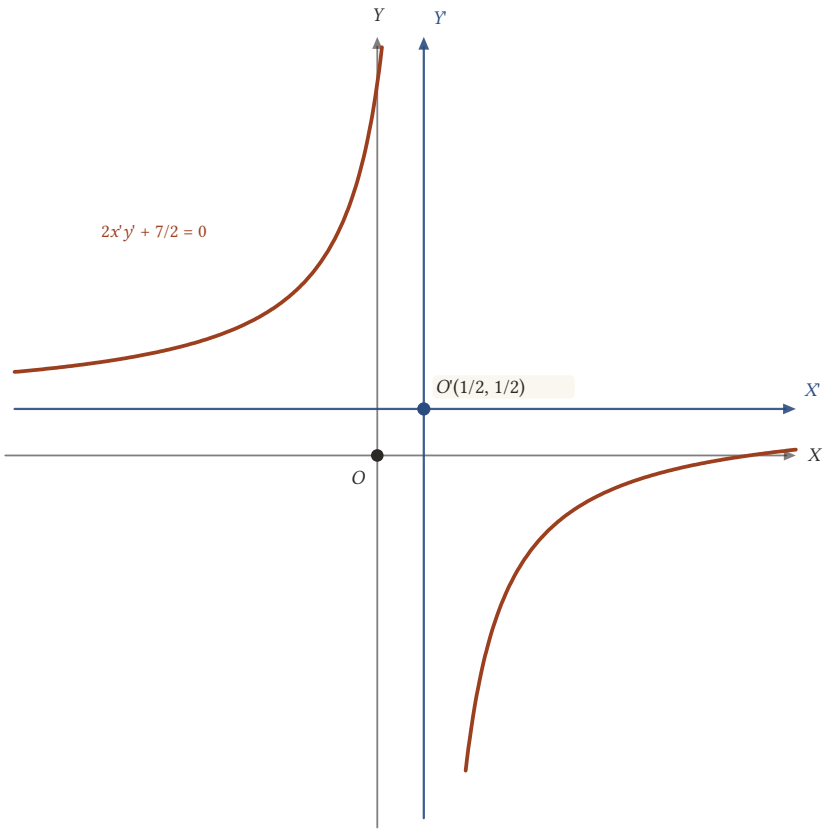
$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 4 = \frac{1}{2} - 1 + 4 = \frac{7}{2}$$

olur. Demek ki eksenler $O'\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ noktasına ötelenmelidir ve denklem

$$2x'y' + \frac{7}{2} = 0$$

biçimine dönüşür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 17.26: Eksenler $O'(1/2,\, 1/2)$'ye ötelenince $2xy - x - y + 4 = 0$ eğrisinin denklemi $2x'y' + 7/2 = 0$ olur.

■

Alıştırma 17.8 (Birinci dereceden terimleri öteleyerek yok etmek: bir elips). $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ denklemini birinci dereceden terimlerinin katsayıları 0 olan bir denkleme dönüştüren eksen ötelemesini belirleyiniz.

Çözüm.
Eksenleri $O'(a, b)$ noktasına öteleyelim; $x = x' + a$ ve $y = y' + b$'dir. Terim terim açalım:

$$\begin{aligned}(x' + a)^2 &= x'^2 + 2ax' + a^2,\\ 2(x' + a)(y' + b) &= 2x'y' + 2bx' + 2ay' + 2ab,\\ 3(y' + b)^2 &= 3y'^2 + 6by' + 3b^2,\\ 2(x' + a) - 4(y' + b) - 1 &= 2x' - 4y' + 2a - 4b - 1.\end{aligned}$$

Toplarsak denklem

$$\begin{aligned}&x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 + 2(a + b + 1)\, x' + 2(a + 3b - 2)\, y'\\ &\quad + a^2 + 2ab + 3b^2 + 2a - 4b - 1 = 0\end{aligned}$$

olur. Birinci dereceden terimlerin katsayılarının sıfır olması için

$$a + b + 1 = 0 \qquad \text{ve} \qquad a + 3b - 2 = 0$$

olmalıdır. İkinciden birinciyi çıkarınca $2b - 3 = 0$, yani $b = \dfrac{3}{2}$ ve buradan $a = -1 - b = -\dfrac{5}{2}$ bulunur. Sabit terim:

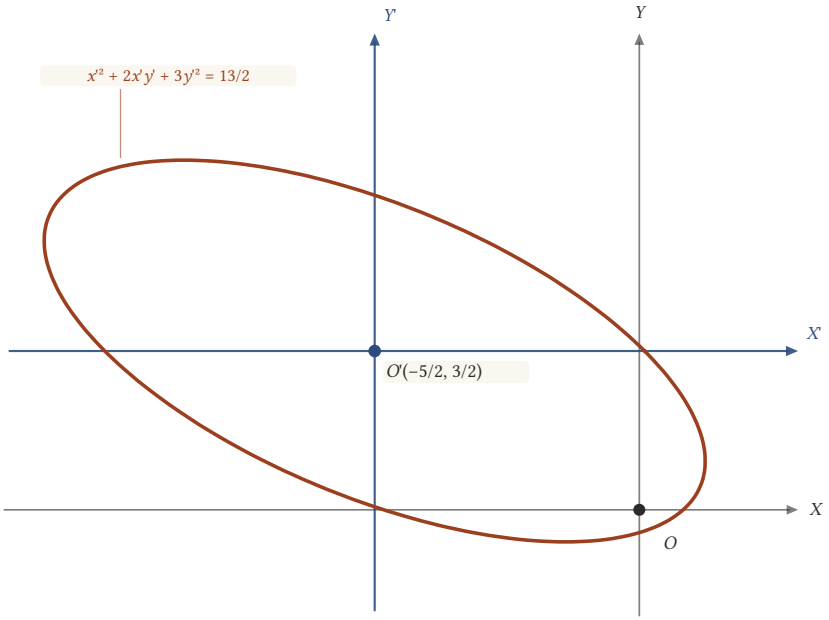
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{25}{4} + 2\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{3}{2} + 3\cdot\frac{9}{4} + 2\left(-\frac{5}{2}\right) - 4\cdot\frac{3}{2} - 1$$
$$= \frac{25}{4} - \frac{30}{4} + \frac{27}{4} - 5 - 6 - 1 = \frac{22}{4} - 12 = -\frac{13}{2}.$$

Demek ki eksenler $O'\left(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ noktasına ötelenmelidir ve denklem

$$x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 - \frac{13}{2} = 0$$

biçimine dönüşür. Karma terim ötelemeyle değişmez; onu yok etmek için ayrıca bir dönme gerekir.



Şekil 17.27: Eksenler $O'(-5/2,\ 3/2)$'ye ötelenince birinci dereceden terimler kaybolur; elipsin merkezi yeni başlangıç noktasıdır.

■

Alıştırma 17.9 (Verilen açıyla döndürülen bir parabol). X- ve Y-eksenleri O etrafında $\theta = \arctan\frac{4}{3}$ radyan döndürülüyor.

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$$

denkleminin yeni $X'Y'$ sistemindeki karşılığını bulunuz.

Çözüm.
$\tan\theta = \frac{4}{3}$ ve $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$'dir. $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$'dan $\cos^2\theta = \frac{1}{1+\frac{16}{9}} = \frac{9}{25}$, yani

$$\cos\theta = \frac{3}{5}, \qquad \sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \frac{4}{5}$$

bulunur. Buradan $\sin 2\theta = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{24}{25}$ ve $\cos 2\theta = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$'tir.
İkinci dereceden kısım bir önceki parabol alıştırmasındakiyle (Alıştırma 17.5) aynıdır; (5)'i yerine yazınca

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left(\,9c^2 + 12\sin 2\theta + 16s^2\,\right) x'^2 + \left(\,7\sin 2\theta + 24\cos 2\theta\,\right) x'y' \\ + \left(\,9s^2 - 12\sin 2\theta + 16c^2\,\right) y'^2 + (80c - 60s)\,x' - (80s + 60c)\,y' = 0$$

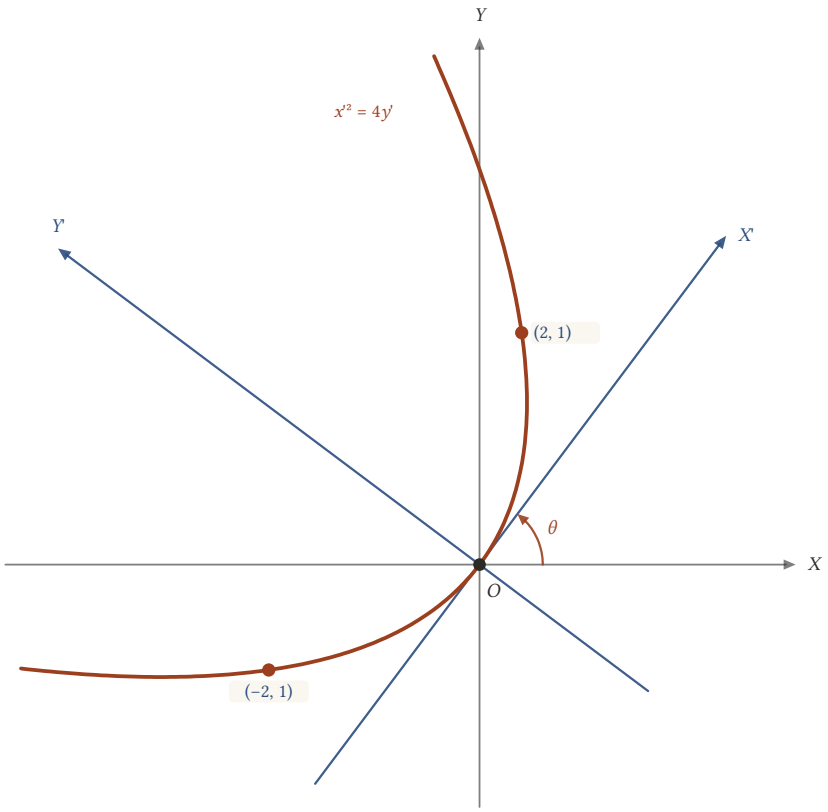
bulunur ($c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$). Değerleri yazalım:

$$\begin{aligned} x'^2 &: \frac{81 + 288 + 256}{25} = 25, \\ x'y' &: 7 \cdot \frac{24}{25} + 24\left(-\frac{7}{25}\right) = 0, \\ y'^2 &: \frac{144 - 288 + 144}{25} = 0, \\ x' &: 80 \cdot \frac{3}{5} - 60 \cdot \frac{4}{5} = 48 - 48 = 0, \\ y' &: -\left(80 \cdot \frac{4}{5} + 60 \cdot \frac{3}{5}\right) = -(64 + 36) = -100. \end{aligned}$$

Denklem $25x'^2 - 100y' = 0$ olur; 25'e bölünce

$$x'^2 - 4y' = 0, \quad \text{yani} \quad x'^2 = 4y'$$

bulunur. Bu dönme hem karma terimi hem de x''lü terimi yok etmiştir.



Şekil 17.28: Eksenler arctan(4/3) döndürülünce $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$ eğrisinin denklemi $x'^2 = 4y'$ olur; parabolün ekseni Y'-eksenidir. İşaretli noktaların yanındaki sayılar yeni (x', y') koordinatlarıdır.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Bu bölümde düzlemin ikinci temel hareketi olan dönmeyi, eksenlerin döndürülmesini ve dik koordinatlardan eğik koordinatlara geçişi öğrendik. Öteleme ile birlikte dönme, ikinci dereceden bir denklemin birinci dereceden terimlerini ve karma terimini yok ederek onu en sade biçimine getirmemizi sağlar. Sonraki bölümde bu sade biçimlerle anlatılan ilk konikle, Elips ile tanışacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

18. Elips

Öteleme ve dönmeyle ikinci dereceden bir denklemi sadeleştirmeyi öğrendik (bkz. Öteleme ve Döndürme ve Paralel Eksenler). Sadeleşmiş denklemlerin karşımıza çıkardığı eğriler hep aynı ailedendi: çember, elips, parabol ve hiperbol. Bu eğrilere topluca **konikler** denir. Bu bölümde önce koniklerin nereden geldiğini sezgisel olarak görecek, sonra ailenin ilk üyesi olan elipsi ayrıntısıyla inceleyeceğiz.

18.1 Konikler

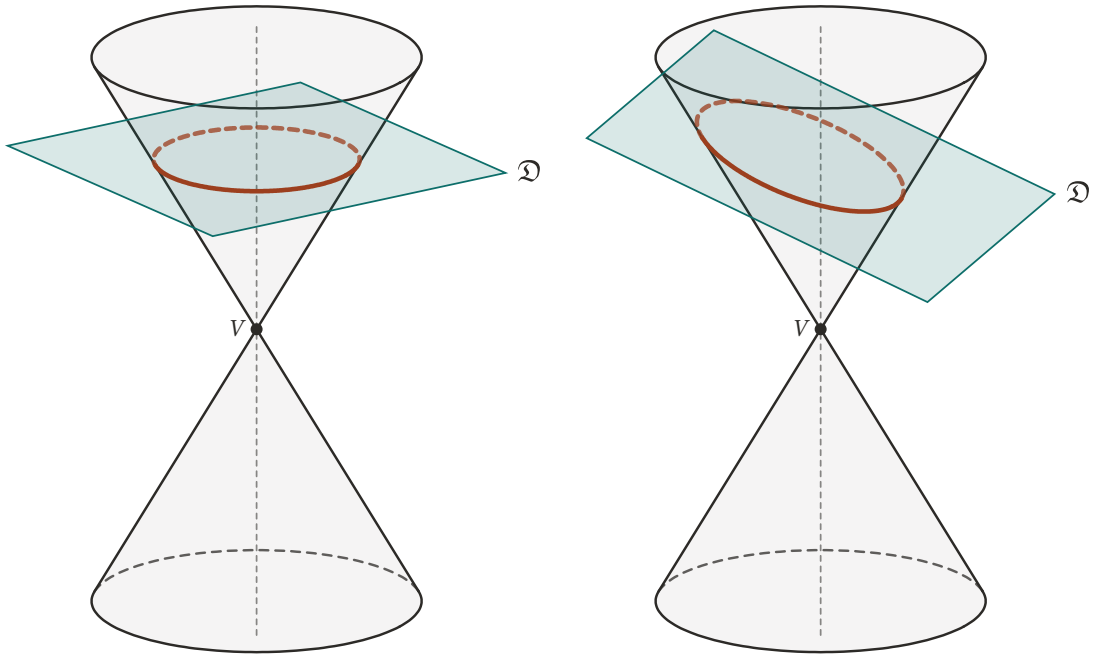
Konikler adını koniden alır. Bir dondurma külahını iki ucundan uzatıp tepesinden kendisinin aynadaki görüntüsüyle birleştirdiğimizi düşünelim: tepe noktasında birleşen iki "külah"tan oluşan bir yüzey elde ederiz. Bu yüzeyi bir düzlemle kestiğimizde düzlemin eğimine göre farklı eğriler ortaya çıkar.

Tanım 18.1 (Konik). Sabit bir doğruyu (eksen) sabit bir noktada (köşe) sabit bir açıyla kesen ve bu eksen etrafında döndürülen bir doğrunun taradığı yüzeye **dik (dairesel) koni yüzeyi** denir; dönen doğrunun her konumuna koninin bir **ana doğrusu** (kenarı) denir. Bir dik koni yüzeyinin bir düzlemle arakesitine **konik** denir.

Yani konik, iki yana uzanan bir koni yüzeyinin düzlemsel bir kesitidir. Koni yüzeyi köşede birleşen iki parçadan oluşur; bir düzlem bu parçalardan yalnız birini ya da ikisini birden kesebilir. Kesitin biçimi düzlemin koninin eksenine ve ana doğrularına göre nasıl durduğuna bağlıdır.
Ana doğruların eksenle yaptığı açıya α, düzlemin eksenle yaptığı açıya β diyelim ($0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$).

- Düzlem köşeden geçmez ve koninin eksenine dikse ($\beta = \frac{\pi}{2}$) arakesit bir **çember**dir.
- Düzlem köşeden geçmez, eksene dik değildir ama ana doğrulardan daha yatıktır ($\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$). Bu durumda yalnız bir parçayı çepeçevre keser; arakesit kapalı, oval bir eğridir: **elips**.

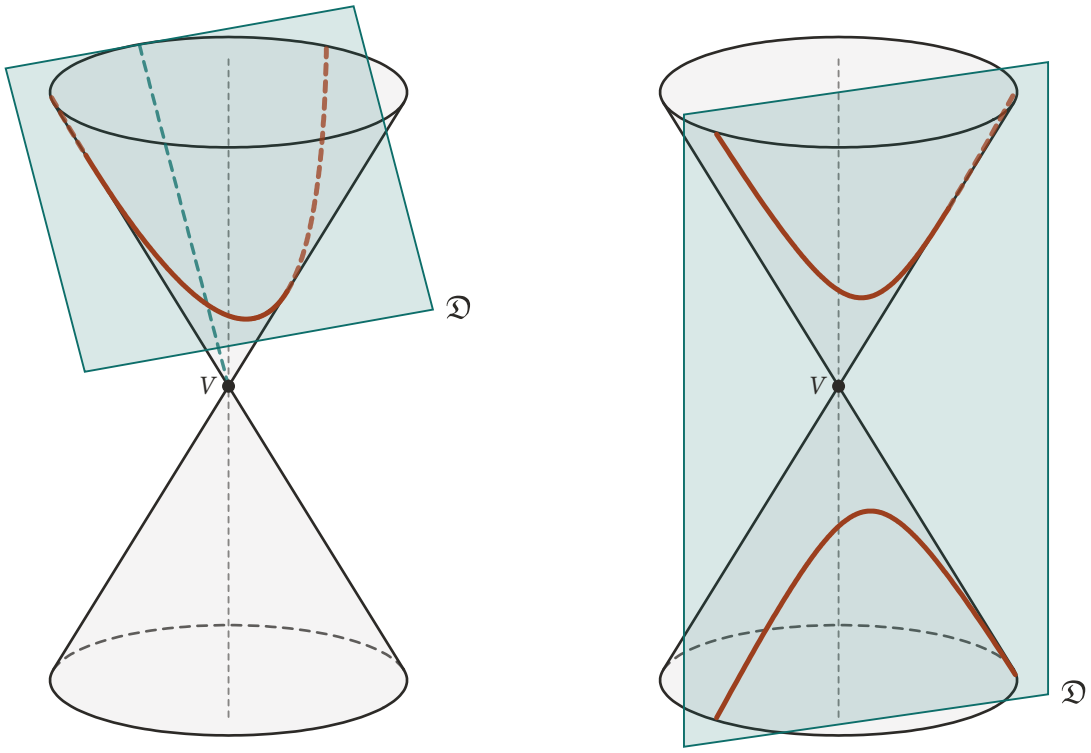
 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.1: Eksene dik bir düzlem koniyi çember boyunca, ana doğrulardan daha yatık bir düzlem ise kapalı bir eğri olan elips boyunca keser.

- Düzlem köşeden geçmez ve koninin bir ana doğrusuna paralelse ($\beta = \alpha$), yalnız bir parçayı keser ama eğri kapanmaz; sonsuza uzanan tek kollu bir eğri çıkar: **parabol**.
- Düzlem köşeden geçmez ve ana doğrulardan daha diktir ($0 \leq \beta < \alpha$). Bu durumda koninin iki parçasını birden keser ve iki koldan oluşan bir eğri çıkar: **hiperbol**. Koninin eksenine paralel düzlemler ($\beta = 0$) bu durumun en tanıdık örneğidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



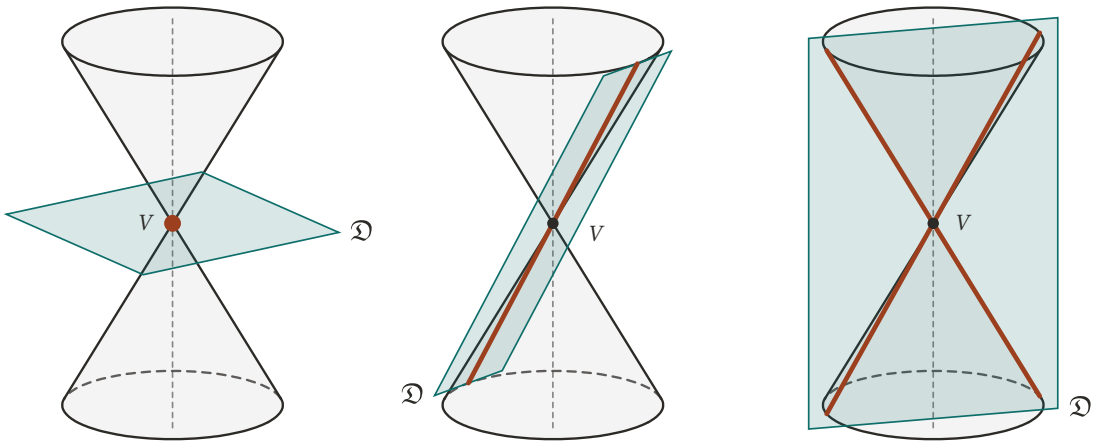
parabol **hiperbol**

Şekil 18.2: Bir ana doğruya paralel düzlem koniyi kapanmayan tek kollu bir eğri, parabol boyunca keser; eksene paralel düzlem ise iki parçayı birden keser ve iki kollu hiperbolü verir.

Düzlem koninin köşesinden geçerse yukarıdakilerin "bozulmuş" hâllerini elde ederiz; bunlara **yozlaşmış konikler** denir.

- Düzlem koniyle yalnız köşede buluşuyorsa arakesit tek bir **nokta**dır.
- Düzlem koniye bir ana doğru boyunca dokunuyorsa (teğet düzlem) arakesit bu ana doğrudur, yani bir **doğru**dur.
- Düzlem köşeden geçip koniyi kesiyorsa arakesit, köşede kesişen iki ana doğrudur: **kesişen iki doğru**.

 CC BY-NC-SA 4.0



nokta **doğru** **kesişen iki doğru**

Şekil 18.3: Düzlem koninin köşesinden geçerse yozlaşmış konikler çıkar: yalnız köşe V, bir ana doğru ya da köşede kesişen iki ana doğru.

Koniklerin düzlem içinde de bir tanımı vardır ve analitik geometride işimize yarayacak olan asıl budur. Çemberi, merkezine uzaklığı sabit olan noktalar diye tanımlamıştık (bkz. Tanım 4.1). Benzer biçimde elips iki sabit noktaya, yani **odaklarına** uzaklıkların toplamı, hiperbol ise odaklarına uzaklıkların farkı sabit olan noktalar diye tanımlanır. Bölümün sonunda göreceğimiz gibi bir başka tanım daha vardır: bir sabit noktaya (odak) ve bir sabit doğruya (**doğrultman**) uzaklıklarının oranı sabit olan noktalar. Bu orana **dış merkezlik** denir ve ailenin üyelerini birbirinden ayırır: oran 1'den küçükse elips, 1'e eşitse parabol, 1'den büyükse hiperbol elde edilir. Bu bölümde elipsi, sonraki bölümlerde Hiperbol ve Parabol'ü inceleyeceğiz.

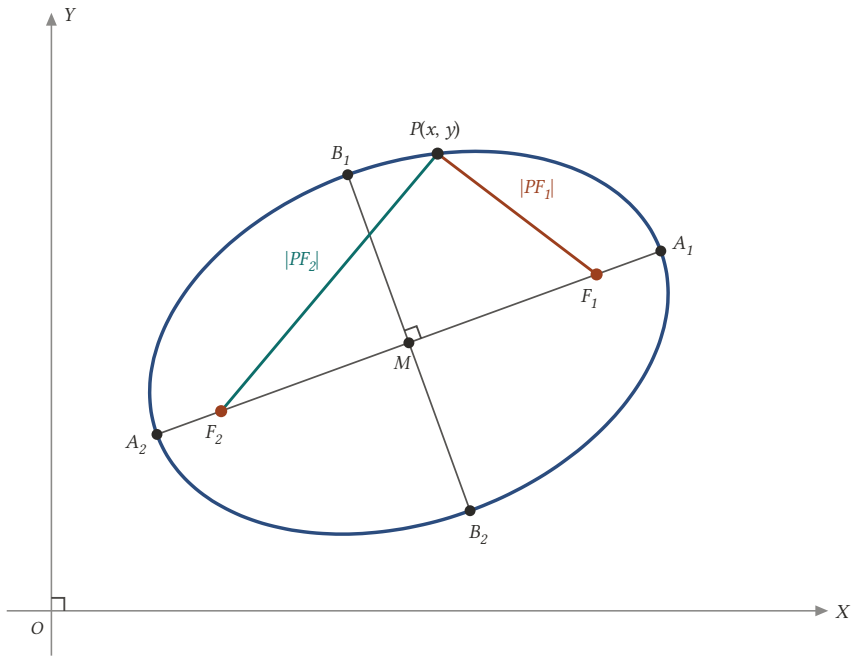
18.2 Elipsin Tanımı

Bir ipin iki ucunu bir kâğıda iki raptiyeyle tutturalım, ipi bir kalemle gerip kalemi ip gergin kalacak biçimde dolaştıralım. Kalemin ucunun iki raptiyeye uzaklıklarının toplamı hep ipin boyuna eşit kalır; çizilen oval eğri bir elipstir.

Tanım 18.2 (Elips). $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ sabit iki nokta ve a, $2a > |\,F_1F_2\,|$ koşulunu sağlayan pozitif bir gerçel sayı olsun. Düzlemde F_1 ve F_2'ye uzaklıklarının toplamı $2a$ olan noktaların geometrik yerine bir **elips** denir ve $\mathcal{E} = \mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ ile gösterilir:

$$\mathcal{E}(F_1, F_2, a) = \left\{\, P \in \mathbb{R}^2 : |\,PF_1\,| + |\,PF_2\,| = 2a \,\right\}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.4: F_1 ve F_2 odaklı elips: her P noktası için $|PF_1| + |PF_2| = 2a$. A_1A_2 ve B_1B_2 elipsin merkezi M'de dik kesişen eksenleridir.

Yani elipsin noktaları, iki odağa uzaklıklarının toplamı hep aynı sayı, $2a$ olan noktalardır. Tanımdaki $2a > | F_1F_2 |$ koşulu keyfî değildir; aşağıdaki önerme bu koşul olmadan ne olacağını söylüyor.

Önerme 18.1 (Uzaklıklar toplamı odaklar arası uzaklıktan büyük olmalıdır). *F_1, F_2 sabit iki nokta ve $k \geq 0$ bir sayı olsun. $| PF_1 | + | PF_2 | = k$ koşulunu sağlayan P noktalarının kümesi*

- *$k < | F_1F_2 |$ ise boş kümedir,*
- *$k = | F_1F_2 |$ ise F_1F_2 doğru parçasıdır.*

> ***İspat.***
> *Her P noktası için üçgen eşitsizliğinden*
>
> $$| F_1F_2 | \leq | F_1P | + | PF_2 |$$
>
> *dir. Demek ki uzaklıklar toplamı hiçbir zaman $| F_1F_2 |$'den küçük olamaz; $k < | F_1F_2 |$ ise koşulu sağlayan nokta yoktur.*
> *Üçgen eşitsizliğinde eşitlik, P noktası F_1F_2 doğru parçası üzerindeyken ve yalnız o zaman gerçekleşir. Gerçekten P bu parçanın üzerindeyse parça P ile iki parçaya bölünür ve uzunluklar toplanır. P parçanın dışındaysa ya F_1, F_2, P bir üçgenin köşeleridir ve eşitsizlik keskindir, ya da P doğrunun üzerinde ama parçanın dışındadır; bu son durumda P'ye yakın olan odak, P ile öbür odak arasında kalır ve toplam $| F_1F_2 |$'yi bu yakın odağa uzaklığın iki katı kadar aşar. Böylece $k = | F_1F_2 |$ ise koşulu sağlayan noktalar tam olarak F_1F_2 parçasının noktalarıdır.*
> ■

Bu yüzden elips tanımında $2a > | F_1F_2 |$ istenir. $2a = | F_1F_2 |$ sınır durumunda "elips" bir doğru parçasına yozlaşır; bu durumu dış merkezliği incelerken yeniden anacağız.

Örnek 18.1 (Bir noktanın elipse ait olup olmadığı). $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ ve $2a = 10$ olsun. $Q\left(4, \frac{12}{5}\right)$ noktasının $\mathcal{E}(F_1, F_2, 5)$ elipsi üzerinde olup olmadığını belirleyiniz.

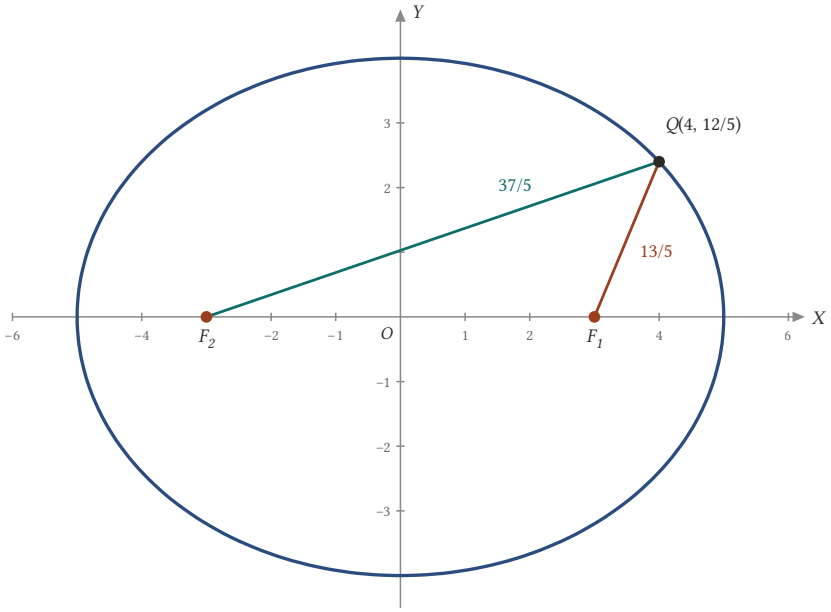
> **Çözüm.**
> Önce tanımdaki koşulun sağlandığına bakalım: $| F_1F_2 | = 6 < 10 = 2a$. Şimdi Q'nun odaklara uzaklıklarını uzaklık formülüyle (bkz. Tanım 1.10) hesaplayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$|\,QF_1\,| = \sqrt{(4-3)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{169}{25}} = \frac{13}{5},$$

$$|\,QF_2\,| = \sqrt{(4+3)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{49 + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{1369}{25}} = \frac{37}{5}.$$

Toplam $\frac{13}{5} + \frac{37}{5} = \frac{50}{5} = 10 = 2a$ olduğundan Q elipsin üzerindedir.



Şekil 18.5: $Q(4, 12/5)$ noktasının odaklara uzaklıkları 13/5 ve 37/5'tir; toplamları $10 = 2a$ olduğundan Q, $x^2/25 + y^2/16 = 1$ elipsinin üzerindedir.

■

Tanımdaki iki sabit noktaya ve aralarındaki noktaya birer ad verelim.

Tanım 18.3 (Odaklar). $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ elipsini belirleyen F_1 ve F_2 noktalarına elipsin **odakları** denir.

Yani odaklar, elipsi çizen ipin raptiyeleridir. Koordinatlarını gerektiğinde $F_1(f_1^1, f_2^1)$ ve $F_2(f_1^2, f_2^2)$ diye yazacağız; üst indis odağın sırasını, alt indis koordinatın sırasını gösterir.

Tanım 18.4 (Merkez). Odakları birleştiren doğru parçasının orta noktası olan

$$M = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)$$

noktasına $\mathcal{E}$ elipsinin **merkezi** denir.

Yani merkez, iki odağın tam ortasıdır (bkz. Sonuç 2.1). $F_1 = F_2$ olursa merkez odakla çakışır ve tanım, merkeze uzaklığı a olan noktaları, yani bir çemberi verir. Bundan sonra aksi söylenmedikçe $F_1 \neq F_2$ olsun.

18.3 Elipsin Köşeleri ve Eksenleri

Bir elipsi incelemek için en elverişli koordinat sistemi, merkezi başlangıç noktasına ve odakları X-eksenine yerleştiren sistemdir. Böyle bir sistemi her zaman seçebiliriz.

Önerme 18.2 (Elips için uygun dik koordinat sistemi). *Her $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ elipsi için, başlangıç noktası elipsin merkezi olan ve X-ekseni odaklardan geçen bir dik koordinat sistemi vardır. Bu sistemde $\mid F_1F_2 \mid = 2c$ olmak üzere*

$$F_1 = (c, 0), \qquad F_2 = (-c, 0), \qquad 0 < c < a$$

dır.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: sistemi kurmak.*** *Önce eksenleri, yeni başlangıç noktası M olacak biçimde öteleyelim; sonra da yeni X-ekseni M'den F_1'e giden yarı doğru üzerine gelecek biçimde döndürelim (bkz. Öteleme ve Döndürme ve Paralel Eksenler). Öteleme ve dönme iki nokta arasındaki uzaklığı değiştirmez. Bu yüzden eski sistemde $\mid PF_1 \mid + \mid PF_2 \mid = 2a$ koşulunu sağlayan noktalar yeni sistemde de aynı koşulu sağlar; elips, yeni sistemde de aynı tanımla verilen elipstir.*
> ***Adım 2: odakların koordinatları.*** *Yeni sistemde F_1 ve F_2, X-ekseni üzerindedir; $F_1 = (f_1^1, 0)$ ve $F_2 = (f_1^2, 0)$ diyelim. Merkez başlangıç noktası olduğundan*
>
> $$(0,0) = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = \frac{1}{2}\left(f_1^1 + f_1^2, 0 \right)$$
>
> *olur; buradan $f_1^1 + f_1^2 = 0$, yani $f_1^2 = -f_1^1$ bulunur.*
> ***Adım 3: c sayısı.*** *$\mid F_1F_2 \mid = 2c$ diyelim. Uzaklık formülüyle*
>
> $$2c = \mid F_1F_2 \mid = \sqrt{(f_1^2 - f_1^1)^2 + (0-0)^2} = \mid -2f_1^1 \mid = 2 \mid f_1^1 \mid$$
>
> *olur. X-ekseni M'den F_1'e doğru yönlendirildiği için $f_1^1 > 0$'dır. Demek ki $f_1^1 = c$ ve $f_1^2 = -c$, yani $F_1 = (c, 0)$ ve $F_2 = (-c, 0)$'dır. $F_1 \neq F_2$ olduğundan $c > 0$, tanımdaki $2a > \mid F_1F_2 \mid = 2c$ koşulundan da $c < a$'dır.*
> ■

Bu bölümün geri kalanında, aksi söylenmedikçe elipsi bu uygun sistemde düşüneceğiz. Şimdi elipsin eksenlerle kesiştiği dört özel noktayı adlandıralım.

Tanım 18.5 (Uzak ve yakın köşeler). $\mathcal{E}$ elipsinin odaklardan geçen doğruyla kesişim noktalarına elipsin **uzak köşeleri** denir ve $A_1(a_1^1, a_2^1)$, $A_2(a_1^2, a_2^2)$ ile gösterilir. Elipsin F_1F_2 doğru parçasının orta dikmesiyle kesişim noktalarına ise **yakın köşeleri** denir ve $B_1(b_1^1, b_2^1)$, $B_2(b_1^2, b_2^2)$ ile gösterilir.

Yani uzak köşeler elipsin merkezden en uzak, yakın köşeler ise merkeze en yakın noktalarıdır (bunu bir sonraki kesimde göreceğiz). Uygun sistemde odaklardan geçen doğru X-ekseni, F_1F_2'nin orta dikmesi Y-eksenidir; dolayısıyla $a_2^1 = a_2^2 = 0$ ve $b_1^1 = b_1^2 = 0$'dır. Köşelerin koordinatlarını yalnız tanımı kullanarak bulabiliriz.

Teorem 18.1 (Köşelerin koordinatları). *Uygun sistemde $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ odaklı $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ elipsini düşünelim ve*

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

diyelim. Bu durumda

- *uzak köşeler $A_1(a, 0)$ ve $A_2(-a, 0)$,*
- *yakın köşeler $B_1(0, b)$ ve $B_2(0, -b)$*

dir. Ayrıca $\mid B_1F_1 \mid = \mid B_1F_2 \mid = a$ olup

$$b^2 + c^2 = a^2, \qquad b < a, \qquad c < a$$

dır.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: uzak köşeler.*** *X-ekseninin bir noktası $P(t, 0)$ olsun. P'nin odaklara uzaklıkları $\mid t - c \mid$ ve $\mid t + c \mid$'dir. Üç durum vardır.*

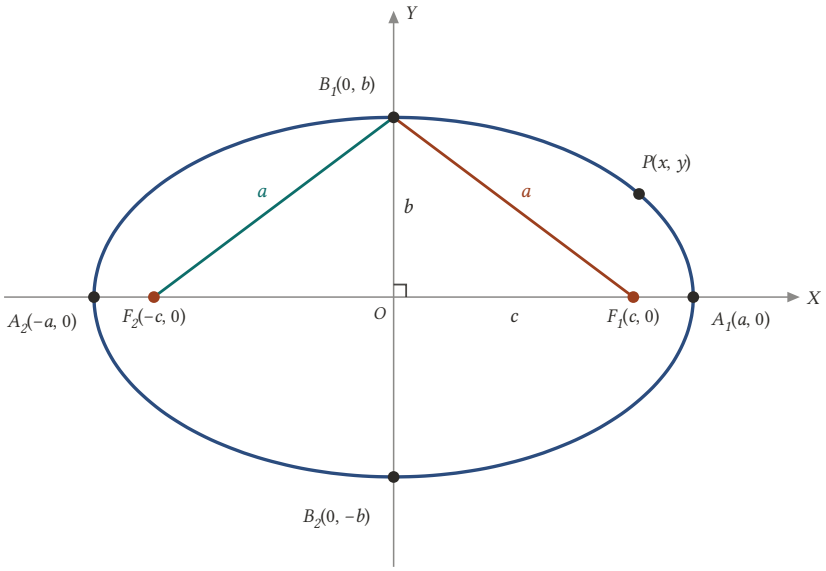
 CC BY-NC-SA 4.0

- $-c \leq t \leq c$ *ise* P, F_1F_2 *parçasının üzerindedir;* $\mid t-c \mid = c-t$ *ve* $\mid t+c \mid = t+c$ *olduğundan toplam* $2c$*'dir.* $2c < 2a$ *olduğundan bu noktalar elipste değildir.*
- $t > c$ *ise* $\mid t-c \mid = t-c$ *ve* $\mid t+c \mid = t+c$ *olduğundan toplam* $2t$*'dir.* $2t = 2a$ *koşulu* $t = a$ *verir;* $a > c$ *olduğundan bu değer gerçekten* $t > c$ *bölgesindedir.*
- $t < -c$ *ise* $\mid t-c \mid = c-t$ *ve* $\mid t+c \mid = -t-c$ *olduğundan toplam* $-2t$*'dir;* $-2t = 2a$ *koşulu* $t = -a$ *verir.*

Demek ki elips X*-eksenini tam iki noktada keser:* $A_1(a,0)$ *ve* $A_2(-a,0)$*.*
Adım 2: yakın köşeler. Y*-ekseninin bir noktası* $P(0,s)$ *olsun. Bu nokta iki odağa eşit uzaklıktadır:*

$$\mid PF_1 \mid = \sqrt{c^2+s^2} = \mid PF_2 \mid .$$

Elipste olma koşulu $2\sqrt{c^2+s^2} = 2a$*, yani* $c^2+s^2 = a^2$*'dir. Buradan* $s^2 = a^2-c^2 = b^2$ *ve* $s = \pm b$ *bulunur. Elips* Y*-eksenini tam iki noktada keser:* $B_1(0,b)$ *ve* $B_2(0,-b)$*.*
Adım 3: bağıntılar. *Adım 2'deki hesap* $\mid B_1F_1 \mid = \mid B_1F_2 \mid = a$ *olduğunu gösterir.* OB_1F_1 *dik üçgeninde dik kenarlar* b *ve* c*, hipotenüs* a*'dır;* $b^2+c^2 = a^2$ *bağıntısı bu üçgenin Pisagor bağıntısıdır.* $c > 0$ *olduğundan* $b^2 = a^2-c^2 < a^2$*, yani* $b < a$*;* $b > 0$ *olduğundan da* $c^2 < a^2$*, yani* $c < a$*'dır.*



*Şekil 18.6: Uzak köşeler (–*a*, 0), (*a*, 0); yakın köşeler (0, ±*b*).* B_1*'den iki odağa uzaklık* a*'dır;* OB_1F_1 *dik üçgeni* $b^2 + c^2 = a^2$ *bağıntısını verir.*

■

Köşeleri birleştiren iki doğru parçası elipsin iki simetri ekseni üzerinde durur.

Tanım 18.6 (Asal ve yedek eksen). Uzak köşeleri birleştiren A_1A_2 doğru parçasına elipsin **asal ekseni** (büyük ekseni), yakın köşeleri birleştiren B_1B_2 doğru parçasına da elipsin **yedek ekseni** (küçük ekseni) denir.

Yani asal eksen odakları da içine alan uzun eksen, yedek eksen ise ona merkezde dik olan kısa eksendir. Bu iki parçanın ve odaklar arasındaki parçanın uzunluklarına da ad verelim.

Tanım 18.7 (Eksen uzunlukları ve odaklar arası uzaklık). $\mid A_1A_2 \mid = 2a$ sayısına elipsin **asal eksen uzunluğu**, $\mid B_1B_2 \mid = 2b$ sayısına **yedek eksen uzunluğu**, $\mid F_1F_2 \mid = 2c$ sayısına da **odakları arasındaki uzaklık** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani a, b ve c sırasıyla asal eksenin, yedek eksenin ve odaklar arasındaki parçanın yarı uzunluklarıdır ve aralarında Teorem 18.1 gereği $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısı vardır. Asal eksenin uzunluğu, tanımdaki uzaklıklar toplamına eşittir. Bu bağıntıyı kolay hatırlamanın yolu B_1'den odaklara çizilen iki eşit parçadır: her biri a uzunluğundadır ve OB_1F_1 dik üçgeninin hipotenüsüdür.

18.4 Elipsin Standart Denklemi

Uygun sistemde elipsin noktalarının koordinatları arasındaki bağıntıyı arıyoruz. İşe bir elips noktasının odaklara uzaklıklarını apsisiyle ifade ederek başlayalım.

Lemma 18.1 (Odaklara uzaklıklar). *Uygun sistemde $P(x,y)$, $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ elipsinin bir noktası ise*

$$|\,PF_1\,| = a - \frac{c}{a}\,x, \qquad |\,PF_2\,| = a + \frac{c}{a}\,x$$

dir.

İspat.
P'den X-eksenine indirilen dikmenin ayağı $H(x,0)$ olsun. PHF_1 ve PHF_2 dik üçgenlerinde Pisagor bağıntısı

$$|\,PF_1\,|^2 = |\,PH\,|^2 + |\,HF_1\,|^2, \qquad |\,PF_2\,|^2 = |\,PH\,|^2 + |\,HF_2\,|^2$$

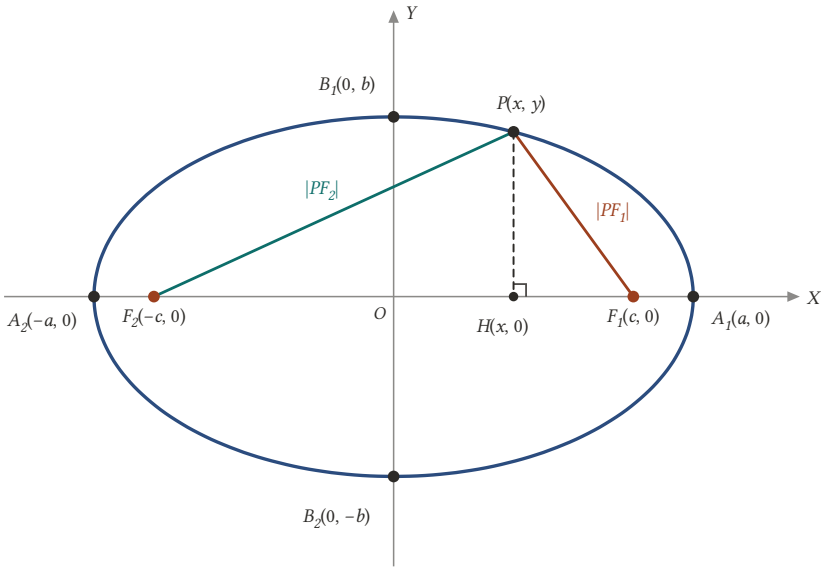
verir. (P X-ekseni üzerindeyse $|\,PH\,| = 0$ olur ve bu eşitlikler yine doğrudur.) Burada $|\,HF_1\,| = |\,c - x\,|$ ve $|\,HF_2\,| = |\,c + x\,|$'tir. İkinci eşitliği birinciden çıkaralım:

$$|\,PF_1\,|^2 - |\,PF_2\,|^2 = (c-x)^2 - (c+x)^2 = -4cx.$$

Sol tarafı iki karenin farkı olarak çarpanlarına ayırıp $|\,PF_1\,| + |\,PF_2\,| = 2a$ olduğunu kullanırsak

$$2a\,\big(\,|\,PF_1\,| - |\,PF_2\,|\,\big) = -4cx, \quad \text{yani} \quad |\,PF_1\,| - |\,PF_2\,| = -\frac{2c}{a}\,x$$

bulunur. Bu eşitliği $|\,PF_1\,| + |\,PF_2\,| = 2a$ ile taraf tarafa toplayıp 2'ye bölersek $|\,PF_1\,| = a - \frac{c}{a}x$ çıkar. Taraf tarafa çıkarıp 2'ye bölersek de $|\,PF_2\,| = a + \frac{c}{a}x$ bulunur.



Şekil 18.7: P'den X-eksenine inen dikmenin ayağı H; PHF_1 ve PHF_2 dik üçgenlerinde Pisagor bağıntısı $|PF_1|$ ve $|PF_2|$'yi x cinsinden verir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani bir elips noktasının odaklara uzaklıkları, noktanın apsisinin doğrusal fonksiyonlarıdır: nokta sağa kaydıkça F_1'e yaklaşır, F_2'den uzaklaşır. Bu uzaklıklara noktanın **odak yarıçapları** da denir. Şimdi elipsin denklemini elde edebiliriz.

Teorem 18.2 (Elipsin denklemi). *Uygun sistemde $F_1(c,0)$ ve $F_2(-c,0)$ odaklı, asal eksen uzunluğu $2a$ olan elips, $b^2 = a^2 - c^2$ olmak üzere*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemiyle verilir. Yani bir $P(x,y)$ noktası elipsin üzerindedir ancak ve ancak koordinatları bu denklemi sağlar.

İspat.
(⇒) $P(x,y)$ elipsin bir noktası olsun. Lemma 18.1 gereği $\mid PF_2 \mid = a + \frac{c}{a}x$'tir. PHF_2 dik üçgeninden $\mid PF_2 \mid^2 = y^2 + (c+x)^2$ olduğundan

$$(c+x)^2 + y^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2$$

yazabiliriz. İki yanı açalım:

$$c^2 + 2cx + x^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}\,x^2.$$

$2cx$ terimleri sadeleşir; x^2'li terimleri bir yanda, sabitleri öbür yanda toplarsak

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

olur. $a^2 - c^2 = b^2$ olduğundan $1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$'dir ve eşitlik

$$\frac{b^2}{a^2}\,x^2 + y^2 = b^2$$

biçimini alır. İki yanı b^2'ye bölmek istenen denklemi verir.
(⇐) $P(x,y)$ denklemi sağlasın. O zaman $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ ve $\frac{x^2}{a^2} \le 1$, yani $\mid x \mid \le a$'dır. $\mid PF_1 \mid^2$'yi hesaplayıp $b^2 = a^2 - c^2$ yazalım:

$$\mid PF_1 \mid^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + (a^2 - c^2)\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$
$$= \frac{c^2}{a^2}\,x^2 - 2cx + a^2 = \left(a - \frac{c}{a}\,x\right)^2.$$

$\mid x \mid \le a$ ve $0 < c < a$ olduğundan $\frac{c}{a}x \le c < a$, yani $a - \frac{c}{a}x > 0$'dır; bu yüzden $\mid PF_1 \mid = a - \frac{c}{a}x$'tir. $F_2(-c,0)$ için aynı hesap c yerine $-c$ yazılarak tekrarlanırsa $\mid PF_2 \mid^2 = \left(a + \frac{c}{a}x\right)^2$ bulunur; $a + \frac{c}{a}x \ge a - c > 0$ olduğundan $\mid PF_2 \mid = a + \frac{c}{a}x$'tir. Toplarsak $\mid PF_1 \mid + \mid PF_2 \mid = 2a$ olur; P elipsin üzerindedir.
■

Tanım 18.8 (Elipsin standart denklemi). $a > b > 0$ olmak üzere

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemine elipsin **standart denklemi** denir.

Yani uygun sistemde bir elipsi yazmak için yalnız iki sayı yeter: asal ve yedek eksenlerin yarı uzunlukları a ve b. Odaklar $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ sayısından okunur. Denklemden elipsin birkaç özelliği hemen görülür:

 CC BY-NC-SA 4.0

- Denklemde yalnız x^2 ve y^2 vardır; (x, y) elipsteyse $(-x, y)$, $(x, -y)$ ve $(-x, -y)$ de elipstedir. Elips iki koordinat eksenine ve başlangıç noktasına göre simetriktir.
- $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ ve $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ olduğundan elipsin her noktası için $\mid x \mid \leq a$ ve $\mid y \mid \leq b$'dir: elips kenarları $2a$ ve $2b$ olan dikdörtgenin içindedir ve bu dikdörtgenin kenarlarına dört köşede dokunur.
- $x^2 + y^2 = b^2 + \frac{c^2}{a^2}\, x^2$ eşitliği (denklemden y^2 çekilerek) bir elips noktasının merkeze uzaklığının $\mid x \mid$ büyüdükçe arttığını gösterir. Merkeze en uzak noktalar A_1, A_2 (uzaklık a), en yakın noktalar B_1, B_2'dir (uzaklık b). Köşelerin adları buradan gelir.

Örnek 18.2 (Uzak köşeleri ve bir noktası verilen elips). Uzak köşeleri $A_1(4, 0)$ ile $A_2(-4, 0)$ olan ve $P\left(2, \sqrt{3}\right)$ noktasından geçen elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Uzak köşeler başlangıç noktasına göre simetrik ve X-ekseni üzerinde olduğundan elipsin merkezi O, asal ekseni X-eksenidir; standart denklem kullanılabilir. Asal eksen uzunluğu

$$2a = \mid A_1A_2 \mid = 8 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

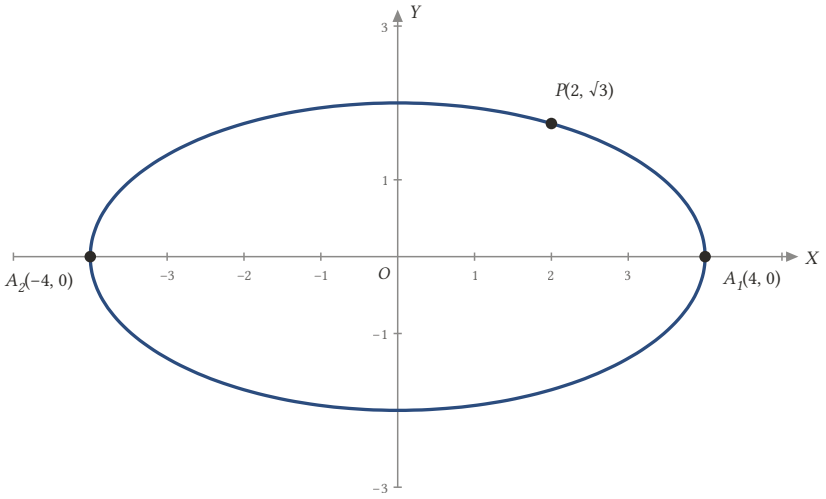
olduğundan denklem $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ biçimindedir. $P\left(2, \sqrt{3}\right)$ elipsin üzerinde olduğundan koordinatları denklemi sağlar:

$$\frac{2^2}{16} + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{3}{b^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow b^2 = 4.$$

Elipsin denklemi

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

dir.



Şekil 18.8: Uzak köşeleri (±4, 0) olan ve $P(2, \sqrt{3})$ noktasından geçen elips: $x^2/16 + y^2/4 = 1$.

■

Örnek 18.3 (Standart denklemden odaklar). $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ elipsinin odaklarını ve odakları arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm.
Denklem standart biçimdedir: $a^2 = 100$ ve $b^2 = 64$, yani $a = 10$ ve $b = 8$'dir. $b^2 + c^2 = a^2$ bağıntısından

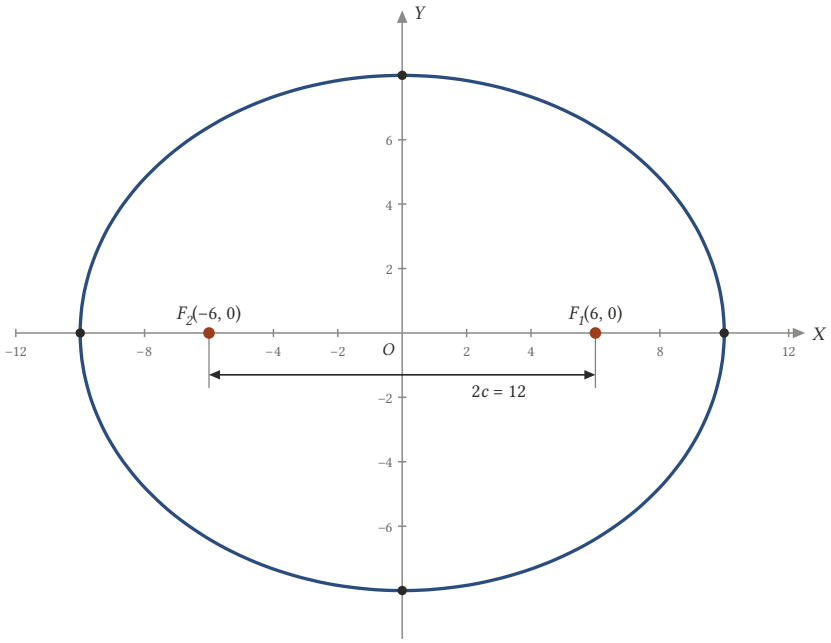
 CC BY-NC-SA 4.0

$$c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36, \qquad c = 6$$

bulunur. Odaklar $F_1(c,0) = F_1(6,0)$ ve $F_2(-c,0) = F_2(-6,0)$'dır. Odakları arasındaki uzaklık

$$|\, F_1F_2 \,| = 2c = 12$$

dir.



Şekil 18.9: $x^2/100 + y^2/64 = 1$ elipsinde $c = 6$: odaklar $F_1(6,0)$ ve $F_2(-6,0)$, aralarındaki uzaklık $2c = 12$.

■

18.5 Eksenleri Koordinat Eksenlerine Paralel Elipsler

Uygulamada elips her zaman uygun sistemde verilmez: odaklar Y-ekseni üzerinde olabilir ya da merkez başlangıç noktasından farklı olabilir. Bu iki durumu da standart denkleme bağlayalım.

Önerme 18.3 (Asal ekseni Y-ekseni olan elips). *Merkezi O olan ve odakları $F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$ olan, asal eksen uzunluğu $2a$ olan elipsin denklemi, $b^2 = a^2 - c^2$ olmak üzere*

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

dir. Bu elipsin uzak köşeleri $(0, \pm a)$, yakın köşeleri $(\pm b, 0)$'dır.

İspat.
$P(x,y)$ noktasının odaklara uzaklıkları

$$|\, PF_1 \,| = \sqrt{x^2 + (y-c)^2}, \qquad |\, PF_2 \,| = \sqrt{x^2 + (y+c)^2}$$

dir. Bu ifadeler, odakları $(\pm c, 0)$ olan elips için yazılan uzaklıklarda x ile y'nin yer değiştirmesiyle elde edilir. Dolayısıyla $|\, PF_1 \,| + |\, PF_2 \,| = 2a$ koşulu, odakları $(\pm c, 0)$ olan elipsin koşulunun x ile y yer değiştirmiş hâlidir ve Teorem 18.2 bu koşulun $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$'e denk olduğunu verir. Köşeler de x ile y yer değiştirilerek köşelerin koordinatları teoreminden (Teorem 18.1) bulunur. (Aynı sonuca eksenleri $\frac{\pi}{2}$ döndürerek de ulaşılır; bkz. Döndürme ve Paralel Eksenler.)

■

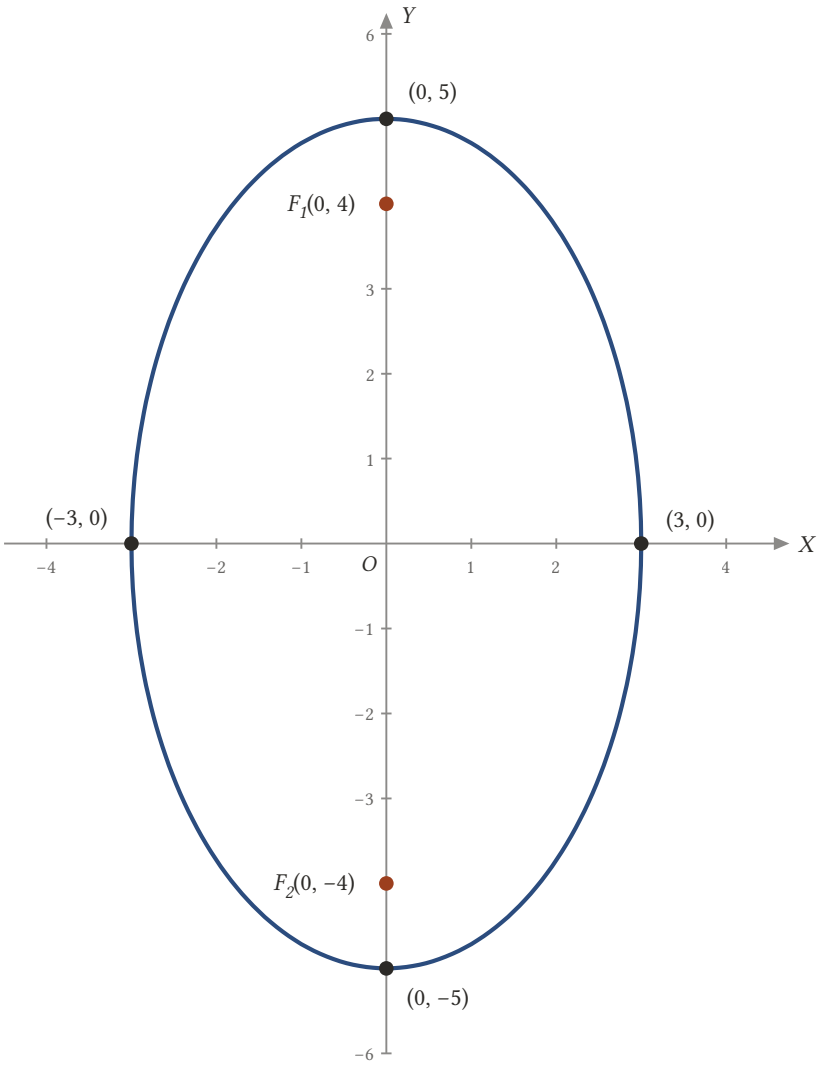
Yani $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=1$ $(p,q>0,\ p\neq q)$ biçimindeki bir denklemde büyük payda asal eksenin yönünü söyler: $p>q$ ise asal eksen X-ekseni, $q>p$ ise Y-eksenidir. Her iki durumda da a^2 büyük payda, b^2 küçük paydadır ve $c^2=a^2-b^2$'dir.

Örnek 18.4 (Asal ekseni düşey olan bir elips). $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ elipsinin köşelerini ve odaklarını bulunuz.

Çözüm.
Büyük payda y^2'nin altında olduğundan asal eksen Y-eksenidir: $a^2=25$, $b^2=9$, yani $a=5$ ve $b=3$'tür. $c^2=a^2-b^2=25-9=16$ olduğundan $c=4$'tür. Önerme 18.3 gereği

- uzak köşeler $(0,5)$ ve $(0,-5)$,
- yakın köşeler $(3,0)$ ve $(-3,0)$,
- odaklar $F_1(0,4)$ ve $F_2(0,-4)$

tür.



Şekil 18.10: $x^2/9 + y^2/25 = 1$ elipsinin asal ekseni Y-eksenidir: uzak köşeler $(0, \pm 5)$, yakın köşeler $(\pm 3, 0)$, odaklar $(0, \pm 4)$.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi merkezi başlangıç noktası olmayan ama eksenleri koordinat eksenlerine paralel olan elipslere geçelim. Burada eksenlerin ötelenmesi işimizi görür.

Önerme 18.4 (Merkezi M olan elips). *Merkezi $M(m_1, m_2)$ olan, asal ekseni X-eksenine paralel ve asal ve yedek eksen uzunlukları $2a$ ve $2b$ olan elipsin denklemi*

$$\frac{(x-m_1)^2}{a^2} + \frac{(y-m_2)^2}{b^2} = 1$$

dir. Odakları $(m_1 \pm c, m_2)$, uzak köşeleri $(m_1 \pm a, m_2)$, yakın köşeleri $(m_1, m_2 \pm b)$'dir; burada $c^2 = a^2 - b^2$'dir. Asal ekseni Y-eksenine paralelse denklemde a^2 ile b^2'nin yeri değişir ve odaklar $(m_1, m_2 \pm c)$ olur.

İspat.
Eksenleri $\overrightarrow{OM} = (m_1, m_2)$ vektörü kadar öteleyelim. Yeni $X'Y'$ sisteminde başlangıç noktası M'dir ve bir noktanın eski ve yeni koordinatları arasında

$$x' = x - m_1, \qquad y' = y - m_2$$

bağıntıları vardır (bkz. Öteleme). Yeni eksenler eskilere paralel olduğundan elips yeni sistemde uygun konumdadır: merkezi başlangıç noktasında, asal ekseni X'-ekseni üzerindedir. Teorem 18.2 gereği yeni sistemdeki denklemi $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$'dir. x' ve y' yerine eski koordinatları yazmak istenen denklemi verir. Yeni sistemde odaklar $(\pm c, 0)$, köşeler $(\pm a, 0)$ ve $(0, \pm b)$'dir; eski koordinatlara $x = x' + m_1$, $y = y' + m_2$ ile dönülür. Asal eksen Y-eksenine paralelse aynı akıl yürütme Önerme 18.3 ile yapılır.
■

Yani merkezi M olan elipsin denklemi, standart denklemde x yerine $x - m_1$, y yerine $y - m_2$ yazılarak elde edilir. Parantezler açılırsa x^2, y^2, x, y ve sabit terim içeren bir denklem çıkar. Tersine, böyle bir denklem verildiğinde kareye tamamlayarak merkezi ve eksenleri bulabiliriz.

Genel denklemden elipsin öğeleri 3 adımda

1. x'li terimleri ve y'li terimleri ayrı ayrı kareye tamamlayıp denklemi $\alpha(x-m_1)^2 + \beta(y-m_2)^2 = \gamma$ biçimine getirin ($\alpha, \beta, \gamma > 0$).
2. İki yanı γ'ya bölün; merkez $M(m_1, m_2)$'dir. Büyük payda a^2, küçük payda b^2'dir ve büyük paydanın bulunduğu değişken asal eksenin yönünü verir.
3. $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ hesaplayın; odakları ve köşeleri merkezden asal eksen boyunca c ve a, yedek eksen boyunca b kadar giderek bulun.

Örnek 18.5 (Kareye tamamlayarak elipsin öğelerini bulmak). $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$ denkleminin bir elips belirttiğini gösterip merkezini, köşelerini ve odaklarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1. Terimleri gruplayıp katsayıları dışarı alalım ve kareye tamamlayalım:

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 2y) &= 11, \\ 4\left[\,(x-2)^2 - 4\,\right] + 9\left[\,(y+1)^2 - 1\,\right] &= 11, \\ 4(x-2)^2 + 9(y+1)^2 &= 11 + 16 + 9 = 36. \end{aligned}$$

Adım 2. İki yanı 36'ya bölelim:

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

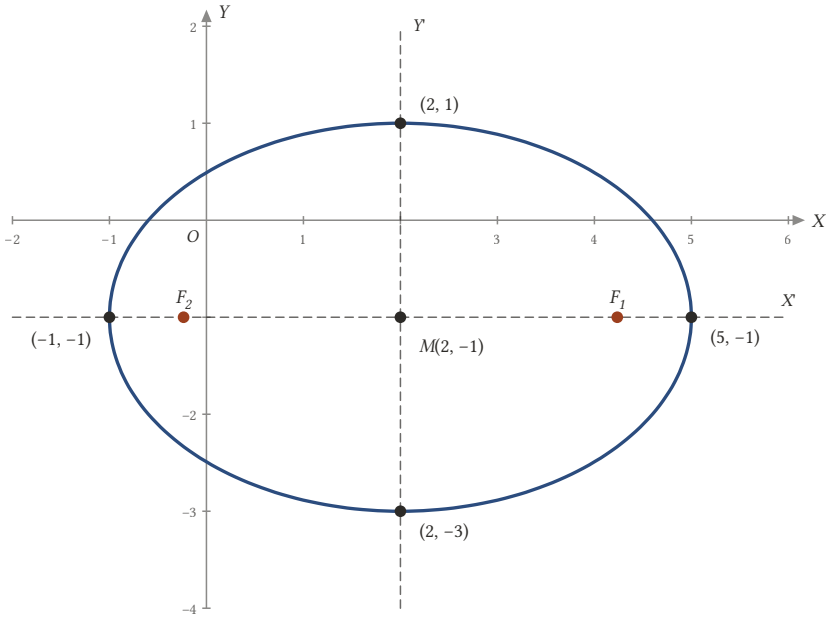
Önerme 18.4 gereği bu, merkezi $M(2, -1)$ olan bir elipstir. Büyük payda 9, $(x-2)^2$'nin altında olduğundan asal eksen X-eksenine paraleldir; $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, yani $a = 3$ ve $b = 2$'dir.
Adım 3. $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$'tir. Buna göre

- uzak köşeler $(2 \pm 3, -1)$, yani $(5, -1)$ ve $(-1, -1)$,
- yakın köşeler $(2, -1 \pm 2)$, yani $(2, 1)$ ve $(2, -3)$,

 CC BY-NC-SA 4.0

- odaklar $\left(\, 2 \pm \sqrt{5}, -1 \,\right)$

dir.



Şekil 18.11: $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$ elipsi: merkez $M(2, -1)$, $a = 3$, $b = 2$, odaklar $(2 \pm \sqrt{5}, -1)$. Kesikli doğrular merkeze ötelenmiş $X'Y'$ eksenleridir.

■

Örnek 18.6 (Merkezi verilen elipsin genel denklemi). Merkezi $M(2, -1)$, asal ekseni X-eksenine paralel, $a = 5$ ve $b = 3$ olan elipsin denklemini parantezleri açılmış biçimde yazınız ve odaklarını bulunuz.

Çözüm.
Önerme 18.4 gereği denklem

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

dir. Paydaları yok etmek için iki yanı 225 ile çarpalım ve parantezleri açalım:

$$\begin{aligned} 9(x-2)^2 + 25(y+1)^2 &= 225, \\ 9x^2 - 36x + 36 + 25y^2 + 50y + 25 &= 225, \\ 9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 &= 0. \end{aligned}$$

$c = \sqrt{25 - 9} = 4$ olduğundan odaklar $(2 \pm 4, -1)$, yani $(6, -1)$ ve $(-2, -1)$'dir.
■

18.6 Elipsin Parametresi

Bir odaktan asal eksene dik çizilen kiriş, elipsin ne kadar "şişkin" olduğunu ölçen bir uzunluktur.

Tanım 18.9 (Elipsin parametresi). Elipsin bir odağından asal eksene dik çizilen kirişin uzunluğuna elipsin **parametresi** denir ve $2p$ ile gösterilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani parametre, odaktan geçen ve asal eksene dik olan kirişin boyudur. Simetri yüzünden iki odak için aynı uzunluk bulunur.

Teorem 18.3 (Parametrenin formülü). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *elipsinin parametresi*

$$2p=\frac{2b^2}{a}$$

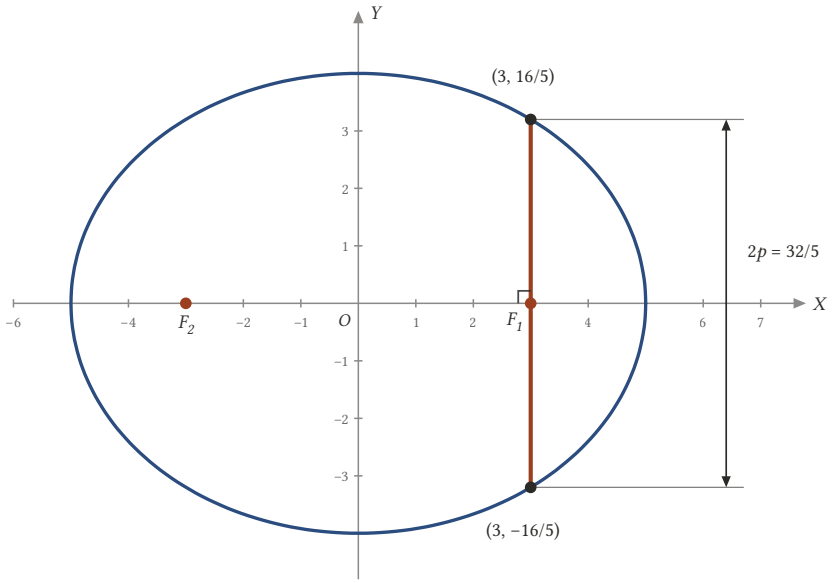
dir.

> ***İspat.***
> *$F_1(c,0)$ odağından asal eksene (X-eksenine) dik çizilen doğru $x=c$ doğrusudur. Bu doğrunun elipsle ortak noktalarını bulmak için denklemde $x=c$ yazalım ve $c^2=a^2-b^2$ olduğunu kullanalım:*
>
> $$y^2=b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=b^2\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^4}{a^2}.$$
>
> *Buradan $y=\pm\frac{b^2}{a}$ bulunur; kirişin uç noktaları $\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$ ve $\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$'dir. Kirişin uzunluğu bu iki noktanın ordinatları farkıdır:*
>
> $$2p=\frac{b^2}{a}-\left(-\frac{b^2}{a}\right)=\frac{2b^2}{a}.$$
>
> *$F_2(-c,0)$ için de $x=-c$ yazılır ve x^2 aynı kaldığından aynı uzunluk bulunur.*
> ■

Örnek 18.7 (Odaklar ve parametre). $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ elipsinin odaklarını ve bir odağından asal eksene dik çizilen kirişin uzunluğunu bulunuz.

> **Çözüm.**
> $a^2=25, b^2=16$, yani $a=5$ ve $b=4$'tür. $a^2=b^2+c^2$ bağıntısından
>
> $$25=16+c^2\Rightarrow c^2=9\Rightarrow c=3$$
>
> bulunur; odaklar $F_1(3,0)$ ve $F_2(-3,0)$'dır. Teorem 18.3 gereği aranan kiriş uzunluğu
>
> $$2p=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 16}{5}=\frac{32}{5}$$
>
> tir. Kirişin uçları $\left(3,\frac{16}{5}\right)$ ve $\left(3,-\frac{16}{5}\right)$'tir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.12: $x^2/25 + y^2/16 = 1$ elipsinde $F_1(3, 0)$ odağından asal eksene dik kirişin uzunluğu $2p = 2b^2/a = 32/5$'tir.

■

18.7 Elipsin Bir Noktasındaki Teğeti ve Normali

Çemberde olduğu gibi (bkz. Tanım 4.6) teğeti, eğriyle tek ortak noktası olan doğru diye tanımlarız.

Tanım 18.10 (Elipsin teğeti). Bir elipsle tek bir ortak noktası olan doğruya elipsin bir **teğeti**, bu ortak noktaya da **değme noktası** denir.

Yani teğet, elipse bir noktada dokunup onu kesmeden geçen doğrudur. Elipsin her noktasında böyle bir doğru vardır; eğimini türevle bulup denklemini yazacağız.

Teorem 18.4 (Bir noktadaki teğetin denklemi). $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *elipsinin* $P(x_0, y_0)$ *noktasındaki teğetinin denklemi*

$$T_d : \quad \frac{x_0\, x}{a^2} + \frac{y_0\, y}{b^2} = 1$$

dir.

İspat.
Adım 1: eğim. *$y_0 \neq 0$ olsun. P'nin yakınında elips, $y = f(x)$ biçiminde türevlenebilir bir fonksiyonun grafiğidir ($y_0 > 0$ ise üst yarı $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, $y_0 < 0$ ise alt yarı). Grafiğin P'deki teğetinin eğimi $m = f'(x_0) = y'(x_0)$'dır. Elips denkleminin iki yanının x'e göre türevini alalım; $(y^2)' = 2yy'$ olduğundan*

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y\, y'}{b^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

bulunur. Buna göre teğetin eğimi $m_{T_d} = -\dfrac{b^2}{a^2} \cdot \dfrac{x_0}{y_0}$'dır. (Sezgisel hesap; kesin doğrulama 4. adımdadır.)
Adım 2: denklem. *Bir noktası ve eğimi bilinen doğrunun denklemi (bkz. Tanım 3.1) teğet için*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

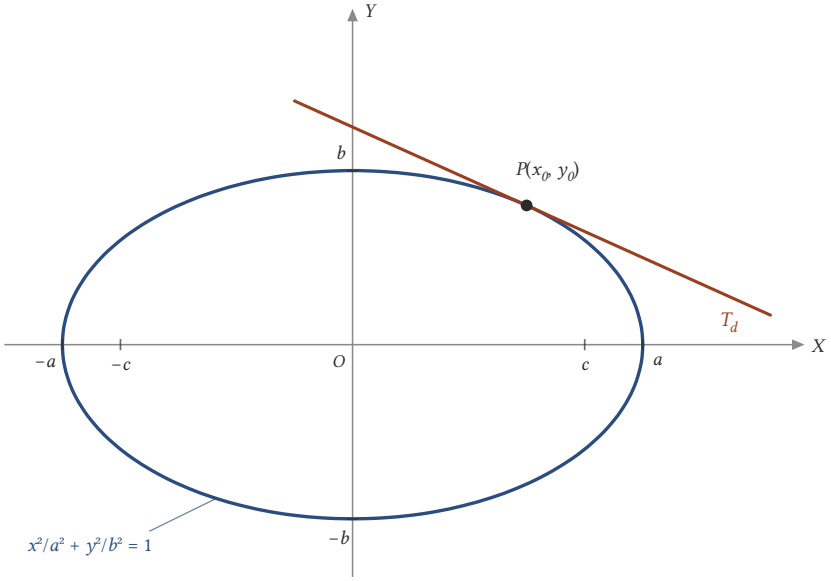
verir. İki yanı $\frac{y_0}{b^2}$ *ile çarpıp düzenleyelim:*

$$\frac{y_0\, y}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{x_0\, x}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2} \Rightarrow \frac{x_0\, x}{a^2} + \frac{y_0\, y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

P elipsin üzerinde olduğundan sağ taraf 1*'dir; istenen denklem elde edilir.*
Adım 3: $\boldsymbol{y_0 = 0}$ ***durumu.*** *Bu durumda P uzak köşelerden biridir,* $x_0 = \pm a$*. Elipsin her noktası* $|\, x\, | \leq a$ *sağladığından* $x = \pm a$ *düşey doğrusu elipse yalnız P'de dokunur, yani teğettir. Formül de* $\frac{\pm a\, x}{a^2} = 1$*, yani* $x = \pm a$ *verir.*
Adım 4: doğru elipsle yalnız $\boldsymbol{P}$***'de buluşur.*** $Q(x, y)$ *hem elipste hem* T_d *üzerinde olsun. Şu kareler toplamını açalım:*

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 \\
&\quad = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\right) - 2\left(\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2}\right) \\
&\quad = 1 + 1 - 2 \cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

İki karenin toplamı 0 *ise ikisi de* 0*'dır;* $x = x_0$ *ve* $y = y_0$*, yani* $Q = P$ *bulunur. Demek ki* T_d *elipsle tek bir ortak noktası olan doğru, yani Tanım 18.10 anlamında bir teğettir.*
P'den geçen başka bir doğru bu özelliği taşımaz. P'den geçen eğimi m olan doğru elipsle ikinci dereceden bir denklemin kökleri kadar noktada buluşur ve bu köklerden biri x_0*'dır; tek ortak nokta olması için* x_0*'ın çift kök olması gerekir. Bu çift kök koşulu tam olarak* $m = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ *eğimini verir, dolayısıyla eğimi farklı her doğru elipsi ikinci bir noktada da keser.* $y_0 \neq 0$ *iken* $|\, x_0\, | < a$*'dır ve düşey* $x = x_0$ *doğrusu elipsi* (x_0, y_0) *ve* $(x_0, -y_0)$ *noktalarında keser. Böylece* T_d*, P'deki tek teğettir.*



Şekil 18.13: Elipsin $\mathrm{P}(\mathrm{x_o}, \mathrm{y_o})$ *noktasındaki teğeti* $\mathrm{x_o x/a^2 + y_o y/b^2 = 1}$ *doğrusudur; elipsle yalnız bu noktada buluşur.*

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani teğet denklemini yazmak için elips denklemindeki x^2'yi x_0x ile, y^2'yi y_0y ile değiştirmek yeter. Aynı kural çember için de geçerlidir: $a = b = r$ alınırsa $x_0x + y_0y = r^2$ bulunur.

Örnek 18.8 (Verilen noktadaki teğet). $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ elipsinin $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Önce P'nin elipste olduğunu doğrulayalım:

$$\frac{3^2}{25} + \frac{(16/5)^2}{16} = \frac{9}{25} + \frac{256}{25 \cdot 16} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1.$$

Teğet formülünde (Teorem 18.4) $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, $x_0 = 3$, $y_0 = \frac{16}{5}$ yazalım:

$$\frac{3x}{25} + \frac{(16/5)\,y}{16} = 1 \Rightarrow \frac{3x}{25} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow 3x + 5y = 25.$$

Teğet $3x + 5y = 25$ doğrusudur; eğimi $-\frac{3}{5}$'tir.
■

Teğete değme noktasında dik olan doğru da eğrinin önemli bir öğesidir.

Tanım 18.11 (Elipsin normali). Elipsin bir P noktasından geçen ve elipsin P'deki teğetine dik olan doğruya elipsin P'deki **normali** denir.

Yani normal, eğriye P'de "dik" duran doğrudur. Eğimleri kullanarak denklemini bulalım.

Önerme 18.5 (Normalin denklemi). $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *elipsinin* $x_0y_0 \neq 0$ *olan bir* $P(x_0, y_0)$ *noktasındaki normalinin denklemi*

$$\frac{a^2\,x}{x_0} - \frac{b^2\,y}{y_0} = a^2 - b^2$$

dir. $y_0 = 0$ *ise normal* X*-ekseni,* $x_0 = 0$ *ise* Y*-eksenidir.*

İspat.
$x_0y_0 \neq 0$ *ise teğetin eğimi* $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$*'dır (Teorem 18.4). Dik doğruların eğimlerinin çarpımı* -1 *olduğundan (bkz. Tanım 2.6) normalin eğimi* $\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$*'dır. Normal* P*'den geçtiğinden*

$$y - y_0 = \frac{a^2\,y_0}{b^2\,x_0}\,(x - x_0)$$

dır. İki yanı $\frac{b^2}{y_0}$ *ile çarpalım:*

$$\frac{b^2y}{y_0} - b^2 = \frac{a^2x}{x_0} - a^2 \Rightarrow \frac{a^2x}{x_0} - \frac{b^2y}{y_0} = a^2 - b^2.$$

$y_0 = 0$ *ise teğet düşey* $x = \pm a$ *doğrusudur ve* $P(\pm a, 0)$*'dan geçen dik doğru* X*-eksenidir.* $x_0 = 0$ *ise* $P = (0, \pm b)$*'de teğet* $y = \pm b$ *yatay doğrusudur ve normal* Y*-eksenidir.*
■

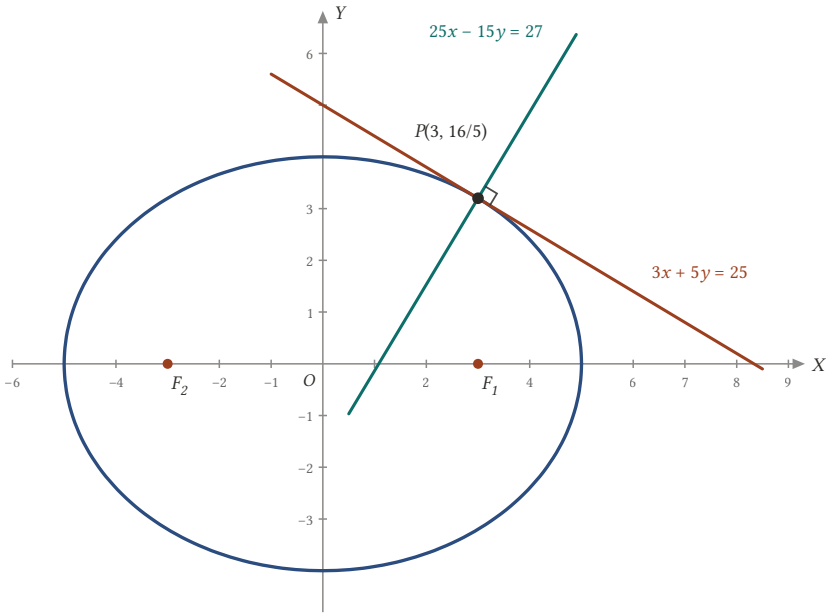
Örnek 18.9 (Verilen noktadaki normal). $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ elipsinin $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$ noktasındaki normalinin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Normal formülünde (Önerme 18.5) $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, $x_0 = 3$, $y_0 = \frac{16}{5}$ yazalım. Sağ taraf $a^2 - b^2 = 9$'dur:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{25x}{3} - \frac{16y}{16/5} = 9 \Rightarrow \frac{25x}{3} - 5y = 9 \Rightarrow 25x - 15y = 27.$$

Doğrulama: P için $25 \cdot 3 - 15 \cdot \frac{16}{5} = 75 - 48 = 27$'dir. Normalin eğimi $\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$, teğetin eğimi ise bir önceki örnekte $-\frac{3}{5}$ bulunmuştu; çarpımları -1'dir.



Şekil 18.14: $x^2/25 + y^2/16 = 1$ elipsinin $P(3, 16/5)$ noktasındaki teğeti $3x + 5y = 25$, normali $25x - 15y = 27$'dir; eğimleri $-3/5$ ve $5/3$.

■

18.8 Elips ile Doğru

Bir doğru ile bir elipsin ortak noktalarını bulmak, iki denklemi birlikte çözmek demektir. Çemberde olduğu gibi (bkz. Teorem 4.3) üç durum vardır ve hangisinin gerçekleştiğini ikinci dereceden bir denklemin diskriminantı söyler.
$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi ile $d : y = mx + n$ doğrusunu düşünelim. Ortak noktalar

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{(i)}, \qquad y = mx + n \quad \text{(ii)}$$

sisteminin çözümleridir. (ii)'yi (i)'de yerine yazıp terimleri x'in kuvvetlerine göre toplayalım:

$$\begin{aligned} & b^2x^2 + a^2(mx+n)^2 = a^2b^2 \\ & \Rightarrow \underbrace{(b^2 + a^2m^2)}_{A}\,x^2 + \underbrace{2a^2mn}_{B}\,x + \underbrace{a^2(n^2 - b^2)}_{C} = 0. \end{aligned}$$

$A = b^2 + a^2m^2 > 0$ olduğundan bu gerçekten ikinci dereceden bir denklemdir ve her kökü, (ii) ile bulunan ordinatıyla birlikte bir ortak nokta verir. Diskriminantı hesaplayalım:

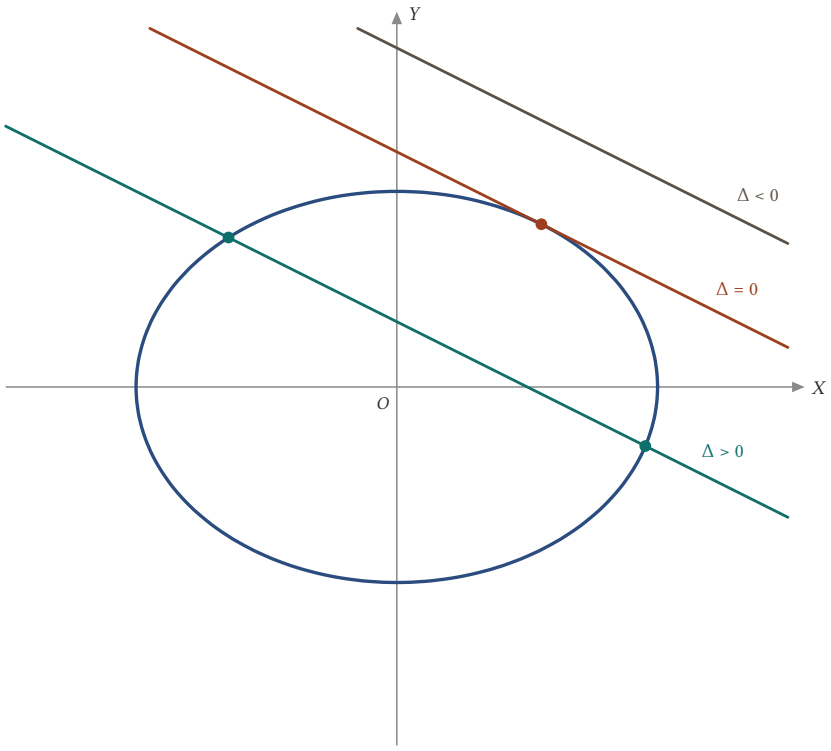
$$\begin{aligned} \Delta = B^2 - 4AC &= 4a^4m^2n^2 - 4(b^2 + a^2m^2)\,a^2(n^2 - b^2) \\ &= 4a^2\left[\, a^2m^2n^2 - b^2n^2 + b^4 - a^2m^2n^2 + a^2m^2b^2 \,\right] \\ &= 4a^2b^2\left(\, a^2m^2 + b^2 - n^2 \,\right). \end{aligned}$$

Teorem 18.5 (Doğru ile elipsin durumu). *$\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi ve $d : y = mx + n$ doğrusu verilsin. Buna göre*

- $a^2m^2 + b^2 - n^2 < 0$ *ise* d *elipsi kesmez;*
- $a^2m^2 + b^2 - n^2 = 0$ *ise* d *elipse teğettir;*
- $a^2m^2 + b^2 - n^2 > 0$ *ise* d *elipsi iki noktada keser.*

İspat.
Yukarıdaki hesaba göre ortak noktaların apsisleri $Ax^2 + Bx + C = 0$ *denkleminin kökleridir ve bu denklemin diskriminantı* $\Delta = 4a^2b^2\left(a^2m^2 + b^2 - n^2\right)$*'dir.* $4a^2b^2 > 0$ *olduğundan* Δ *ile* $a^2m^2 + b^2 - n^2$ *aynı işaretlidir.*

- $\Delta < 0$ *ise denklemin gerçel kökü yoktur; ortak nokta yoktur.*
- $\Delta = 0$ *ise tek (çift) kök vardır; tek ortak nokta vardır ve Tanım 18.10 gereği* d *teğettir.*
- $\Delta > 0$ *ise iki farklı kök, dolayısıyla iki farklı ortak nokta vardır.*



Şekil 18.15: $x^2/16 + y^2/9 = 1$ *elipsi ve eğimi* $-1/2$ *olan üç doğru:* $n = 1$ *iken iki ortak nokta,* $n = \sqrt{13}$ *iken teğet,* $n = 5{,}2$ *iken ortak nokta yok.*

■

Yani doğrunun elipsle durumu $a^2m^2 + b^2$ ile n^2'nin karşılaştırılmasına bağlıdır. Teğet durumu özellikle kullanışlıdır.

Sonuç 18.1 (Teğet olma koşulu ve değme noktası). $d : y = mx + n$ *doğrusu* $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *elipsine ancak ve ancak*

$$a^2m^2 + b^2 = n^2$$

ise teğettir. Bu durumda değme noktası

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{a^2m}{n}, \frac{b^2}{n}\right)$$

dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
Koşul, doğru ile elipsin durumunu veren teoremin (Teorem 18.5) ikinci şıkkıdır. Teğet durumunda $n^2 = a^2m^2 + b^2 \geq b^2 > 0$ *olduğundan* $n \neq 0$*'dır.* $\Delta = 0$ *iken çift kök* $x_0 = -\frac{B}{2A}$*'dır:*

$$x_0 = -\frac{2a^2mn}{2(b^2 + a^2m^2)} = -\frac{a^2mn}{n^2} = -\frac{a^2m}{n}.$$

Bunu (ii)'de yerine yazalım ve yine $n^2 = a^2m^2 + b^2$*'yi kullanalım:*

$$y_0 = m\left(-\frac{a^2m}{n}\right) + n = \frac{n^2 - a^2m^2}{n} = \frac{b^2}{n}.$$

■

Bu sonuç Teorem 18.4 ile uyumludur: (x_0, y_0) noktasındaki teğetin eğimi $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{-a^2m/n}{b^2/n} = m$'dir. Düşey doğrular $y = mx + n$ biçiminde yazılamaz; ama onların durumu kolaydır: elipsin her noktası $|x| \leq a$ sağladığından $x = k$ doğrusu $|k| < a$ ise elipsi iki noktada keser, $|k| = a$ ise köşede teğettir, $|k| > a$ ise kesmez.

Örnek 18.10 (Bir doğrunun elipsi kestiği noktalar). $y = \frac{1}{2}x + 1$ doğrusunun $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ elipsiyle durumunu belirleyip varsa ortak noktalarını bulunuz.

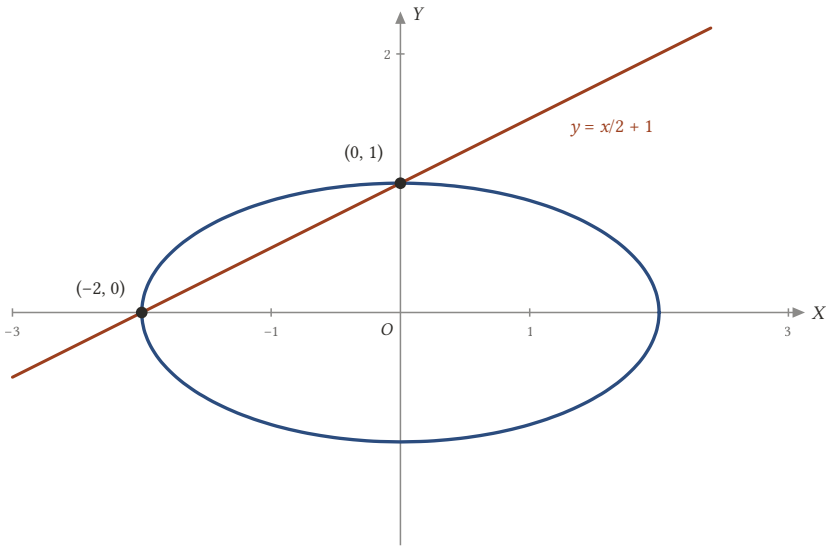
Çözüm.
$a^2 = 4, b^2 = 1, m = \frac{1}{2}, n = 1$'dir. Durum teoremindeki (Teorem 18.5) ifade

$$a^2m^2 + b^2 - n^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 - 1 = 1 > 0$$

olduğundan doğru elipsi iki noktada keser. Noktaları bulmak için $y = \frac{1}{2}x + 1$'i $x^2 + 4y^2 = 4$ denkleminde yerine yazalım:

$$x^2 + 4\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right) = 4 \Rightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow 2x(x + 2) = 0.$$

Kökler $x = 0$ ve $x = -2$'dir; ordinatlar $y = 1$ ve $y = 0$'dır. Ortak noktalar $(0, 1)$ ve $(-2, 0)$'dır; bunlar elipsin bir yakın ve bir uzak köşesidir.



Şekil 18.16: $y = x/2 + 1$ doğrusu $x^2/4 + y^2 = 1$ elipsini $(0, 1)$ ve $(-2, 0)$ noktalarında keser.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 18.11 (Teğet olması için sabit terim). $y = x + n$ doğrusunun $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ elipsine teğet olması için n ne olmalıdır? Bu durumda değme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
$m = 1, a = 5, b = 3$'tür. Teğet olma koşulu (Sonuç 18.1)

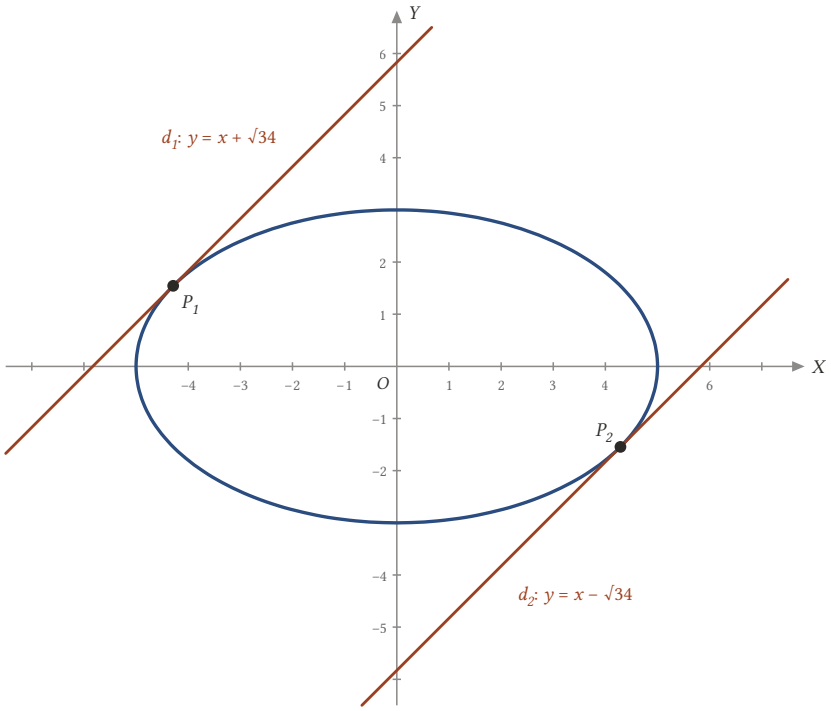
$$a^2m^2 + b^2 = n^2 \Rightarrow 25 + 9 = n^2 \Rightarrow n = \pm\sqrt{34}$$

verir. Değme noktası $\left(-\frac{a^2m}{n}, \frac{b^2}{n}\right) = \left(-\frac{25}{n}, \frac{9}{n}\right)$'dir:

$$d_1 : y = x + \sqrt{34} \Rightarrow P_1 = \left(-\frac{25}{\sqrt{34}}, \frac{9}{\sqrt{34}}\right),$$

$$d_2 : y = x - \sqrt{34} \Rightarrow P_2 = \left(\frac{25}{\sqrt{34}}, -\frac{9}{\sqrt{34}}\right).$$

Doğrulama: P_1 için $\frac{625/34}{25} + \frac{81/34}{9} = \frac{25}{34} + \frac{9}{34} = 1$'dir ve $\frac{9}{\sqrt{34}} = -\frac{25}{\sqrt{34}} + \frac{34}{\sqrt{34}}$ olduğundan P_1, d_1 üzerindedir.



Şekil 18.17: $y = x \pm \sqrt{34}$ doğruları $x^2/25 + y^2/9 = 1$ elipsine $P_1(-25/\sqrt{34}, 9/\sqrt{34})$ ve $P_2(25/\sqrt{34}, -9/\sqrt{34})$ noktalarında teğettir.

■

18.9 Birbirine Dik Teğetler ve Monge Çemberi

Bir elipse dışarıdan iki dik teğet çizelim; bu iki teğetin kesişim noktası nerede olabilir? Şaşırtıcı biçimde bu noktalar hep aynı çemberin üzerindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 18.6 (Dik teğetlerin kesişim noktaları). *Dik koordinat sisteminde denklemi* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *olan* $\mathcal{E}$ *elipsinin birbirine dik teğetlerinin ortak noktalarının geometrik yeri, merkezi* O *olan*

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

çemberidir.

İspat.
İki şey göstereceğiz: dik iki teğetin kesişim noktası bu çemberin üzerindedir, ve çemberin her noktası böyle bir kesişim noktasıdır.
Adım 1: eksenlere paralel olmayan teğetler. *Dik teğetler* $d_1: y=mx+n_1$ *ve* $d_2: y=-\frac{1}{m}x+n_2$ *olsun* ($m\neq 0$; *eğimlerin çarpımı* -1, *bkz. Tanım 2.6*). *İkisi de elipse teğet olduğundan Sonuç 18.1 gereği*

$$n_1^2=a^2m^2+b^2,\qquad n_2^2=\frac{a^2}{m^2}+b^2$$

dir. $P(x,y)\in d_1\cap d_2$ *olsun. İki denklemi eşitleyelim:*

$$mx+n_1=-\frac{1}{m}x+n_2 \Rightarrow \frac{m^2+1}{m}\,x=n_2-n_1 \Rightarrow x=\frac{m(n_2-n_1)}{m^2+1}.$$

Bunu d_2*'de yerine yazalım:*

$$y=-\frac{1}{m}\cdot\frac{m(n_2-n_1)}{m^2+1}+n_2=\frac{-n_2+n_1+m^2n_2+n_2}{m^2+1}=\frac{m^2n_2+n_1}{m^2+1}.$$

Demek ki

$$P(x,y)=\left(\frac{m(n_2-n_1)}{m^2+1},\frac{m^2n_2+n_1}{m^2+1}\right)\qquad(\star)$$

dır. Şimdi x^2+y^2*'yi hesaplayalım. Paylar açıldığında* $\mp 2m^2n_1n_2$ *terimleri birbirini götürür:*

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=\frac{m^2n_2^2-2m^2n_1n_2+m^2n_1^2+m^4n_2^2+2m^2n_1n_2+n_1^2}{(m^2+1)^2}\\&=\frac{m^2n_2^2\,(1+m^2)+n_1^2\,(m^2+1)}{(m^2+1)^2}=\frac{m^2n_2^2+n_1^2}{m^2+1}.\end{aligned}$$

Teğet koşullarından $m^2n_2^2=a^2+b^2m^2$ *ve* $n_1^2=a^2m^2+b^2$*'dir; toplamları* $(a^2+b^2)(m^2+1)$ *olduğundan*

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

bulunur.
Adım 2: eksenlere paralel teğetler. *Teğetlerden biri düşeyse, ona dik olan yataydır. Elipsin düşey teğetleri* $x=\pm a$, *yatay teğetleri* $y=\pm b$*'dir (Teorem 18.4, köşelerde). Kesişim noktaları* $(\pm a,\pm b)$*'dir ve* $a^2+b^2=a^2+b^2$ *olduğundan bunlar da çemberin üzerindedir.*
Adım 3: çemberin her noktası bir kesişim noktasıdır. $Q(x_0,y_0)$, $x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$ *çemberinin bir noktası olsun.* $x_0^2=a^2$ *ise* $y_0^2=b^2$*'dir ve Adım 2'deki noktalardan biri bulunur.* $x_0^2\neq a^2$ *olsun.* Q*'dan geçen eğimi* m *olan doğru* $y=mx+(y_0-mx_0)$*'dır; bu doğrunun teğet olması için Sonuç 18.1 gereği*

$$(y_0-mx_0)^2=a^2m^2+b^2 \Leftrightarrow (x_0^2-a^2)\,m^2-2x_0y_0\,m+(y_0^2-b^2)=0$$

olmalıdır. Bu, m*'ye göre ikinci dereceden bir denklemdir. Diskriminantının dörtte biri*

$$x_0^2y_0^2-(x_0^2-a^2)(y_0^2-b^2)=b^2x_0^2+a^2y_0^2-a^2b^2$$

dir. $b<a$ *olduğundan* $\frac{y_0^2}{b^2}\geq\frac{y_0^2}{a^2}$*'dir;* Q *çember üzerinde olduğundan da*

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\geq\frac{x_0^2+y_0^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}>1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. İki yanı a^2b^2 ile çarparsak $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 > a^2b^2$, yani diskriminantın pozitif olduğu görülür. Demek ki denklemin iki farklı gerçel kökü m_1, m_2 vardır ve kökler çarpımı

$$m_1 m_2 = \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x_0^2)}{x_0^2 - a^2} = -1$$

dir (çember denkleminden $y_0^2 - b^2 = a^2 - x_0^2$). Böylece Q'dan geçen, eğimleri m_1 ve m_2 olan iki teğet birbirine diktir ve Q bunların kesişim noktasıdır.
■

Tanım 18.12 (Monge çemberi). Bir elipsin birbirine dik teğetlerinin kesişim noktalarının oluşturduğu, $(\star)$ ile verilen noktaların çizdiği $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ çemberine elipsin **Monge çemberi** denir.

Yani Monge çemberi, elipsi "dik açıyla gören" noktaların çemberidir: bu çemberin herhangi bir noktasından elipse çizilen iki teğet birbirine diktir. Yarıçapı $\sqrt{a^2 + b^2}$, yani elipsi çevreleyen $2a \times 2b$ dikdörtgenin köşegeninin yarısıdır; dikdörtgenin köşeleri $(\pm a, \pm b)$ bu çemberin üzerindedir.

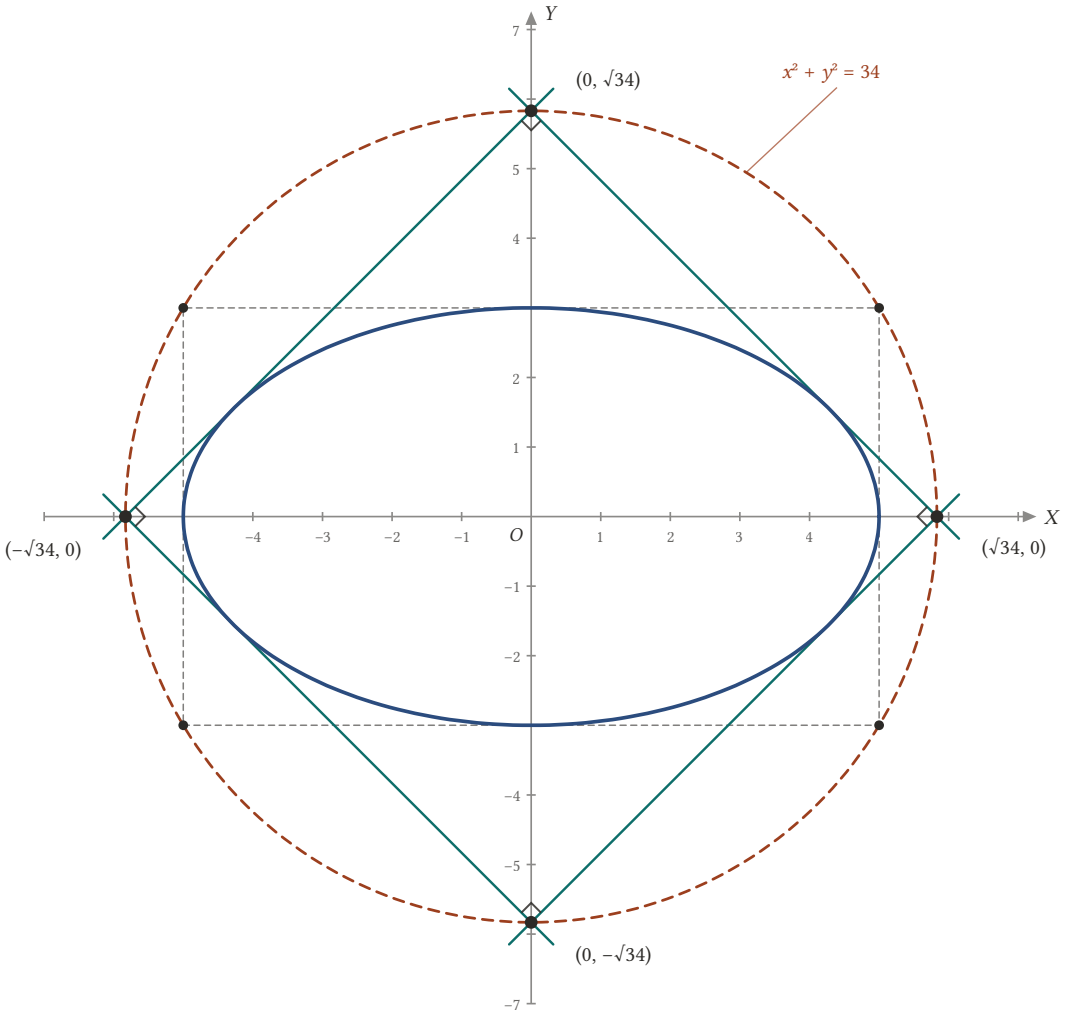
Örnek 18.12 (Monge çemberi ve teğet karesi). $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ elipsinin Monge çemberini yazınız. Eğimi 1 ve -1 olan teğetlerin kesişim noktalarının bu çember üzerinde olduğunu doğrulayınız.

Çözüm.
Teorem 18.6 gereği Monge çemberi $x^2 + y^2 = 25 + 9 = 34$ çemberidir.
Eğimi 1 olan teğetleri bir önceki kesimdeki örnekte (Örnek 18.11) bulduk: $y = x \pm \sqrt{34}$. Eğimi -1 olanlar için Sonuç 18.1 yine $n^2 = 25 \cdot 1 + 9 = 34$ verir: $y = -x \pm \sqrt{34}$. Dört teğet bir kare oluşturur; köşeleri ikişer teğetin kesişimidir. Örneğin

$$y = x + \sqrt{34},\ y = -x + \sqrt{34} \Rightarrow (0, \sqrt{34}),$$
$$y = x + \sqrt{34},\ y = -x - \sqrt{34} \Rightarrow (-\sqrt{34}, 0)$$

ve benzer biçimde $(0, -\sqrt{34})$ ile $(\sqrt{34}, 0)$ bulunur. Dördünün de başlangıç noktasına uzaklığı $\sqrt{34}$'tür; hepsi Monge çemberinin üzerindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.18: $x^2/25 + y^2/9 = 1$ elipsinin eğimi ±1 olan dört teğeti bir kare oluşturur; karenin köşeleri ve 10×6 dikdörtgenin köşeleri Monge çemberi $x^2 + y^2 = 34$ üzerindedir.

■

18.10 Dış Merkezlik

Aynı asal eksene sahip elipslerden bazıları çembere yakın, bazıları basıktır. Bu basıklığı tek bir sayıyla ölçeriz.

Tanım 18.13 (Dış merkezlik). $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinde

$$e = \frac{|\,F_1F_2\,|}{|\,A_1A_2\,|} = \frac{c}{a}$$

sayısına elipsin **dış merkezliği** denir.

Yani dış merkezlik, odaklar arasındaki uzaklığın asal eksen uzunluğuna oranıdır; odakların merkezden ne kadar "dışarı" kaçtığını ölçer.

Önerme 18.6 (Dış merkezlik ve basıklık). *Bir elipsin dış merkezliği*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

dir ve $0 \leq e < 1$ *sağlar.* e *büyüdükçe* $\frac{b}{a}$ *oranı küçülür, yani elips basıklaşır. Özel olarak:*

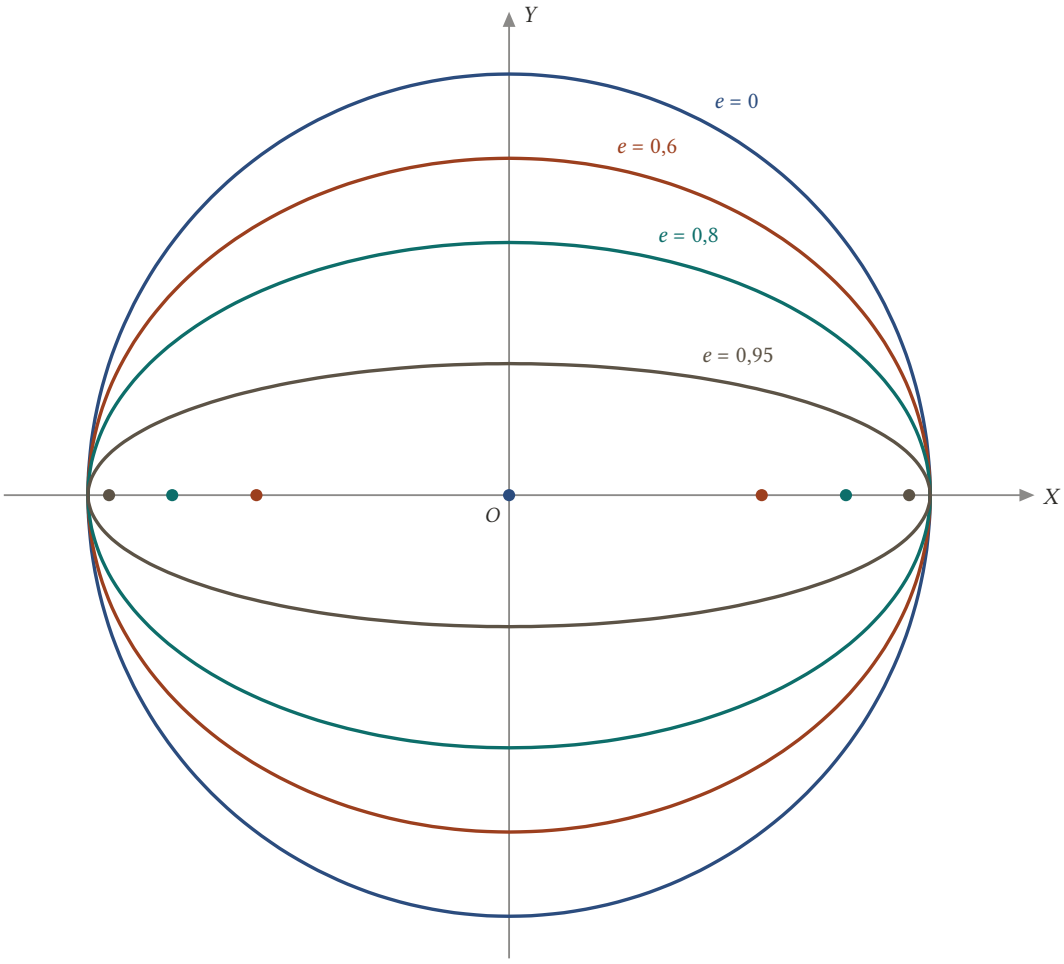
- $e = 0$ *olması* $c = 0$*, yani* $F_1 = F_2$ *olması demektir; bu durumda* $b = a$ *olur ve elips yarıçapı* a *olan bir çembere dönüşür.*
- $e \to 1$ *iken* $c \to a$ *ve* $b \to 0$ *olur;* $e = 1$ *sınır durumu* $|\ F_1F_2\ | = |\ A_1A_2\ |$ *demektir, odaklar uzak köşelerle çakışır ve "elips"* F_1F_2 *doğru parçasına yozlaşır.*

Odaklar birbiriyle ya da uzak köşelerle çakışmadıkça $0 < e < 1$*'dir.*

İspat.
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ *olduğundan*

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

dir. $0 \leq c < a$ *olduğundan* $0 \leq e < 1$*'dir. Formülde* e*,* $\frac{b}{a} \in (0, 1]$ *oranının azalan bir fonksiyonudur:* e*'nin artması, kök içinden çıkarılan* $\left(\frac{b}{a}\right)^2$*'nin, dolayısıyla* $\frac{b}{a}$*'nın küçülmesi demektir.* $e = 0$ *ise* $c = 0$*,* $F_1 = F_2 = M$ *ve* $b = a$*'dır; tanım,* M*'ye uzaklığı* a *olan noktaları verir.* $e = 1$ *için* $2a = 2c = |\ F_1F_2\ |$ *olur ve Önerme 18.1 gereği uzaklıklar toplamı* $2a$ *olan noktalar tam olarak* F_1F_2 *parçasını oluşturur.*



Şekil 18.19: Asal yarı ekseni a *= 5 olan elipsler:* e *büyüdükçe odaklar (±5*e*, 0) uzak köşelere yaklaşır ve elips basıklaşır;* e *= 0 çemberdir.*

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 18.13 (Dış merkezliği hesaplamak). $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{81}=1$ elipsinin dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
$a^2=225$ ve $b^2=81$, yani $a=15$ ve $b=9$'dur. Buradan

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{225-81}=\sqrt{144}=12$$

ve

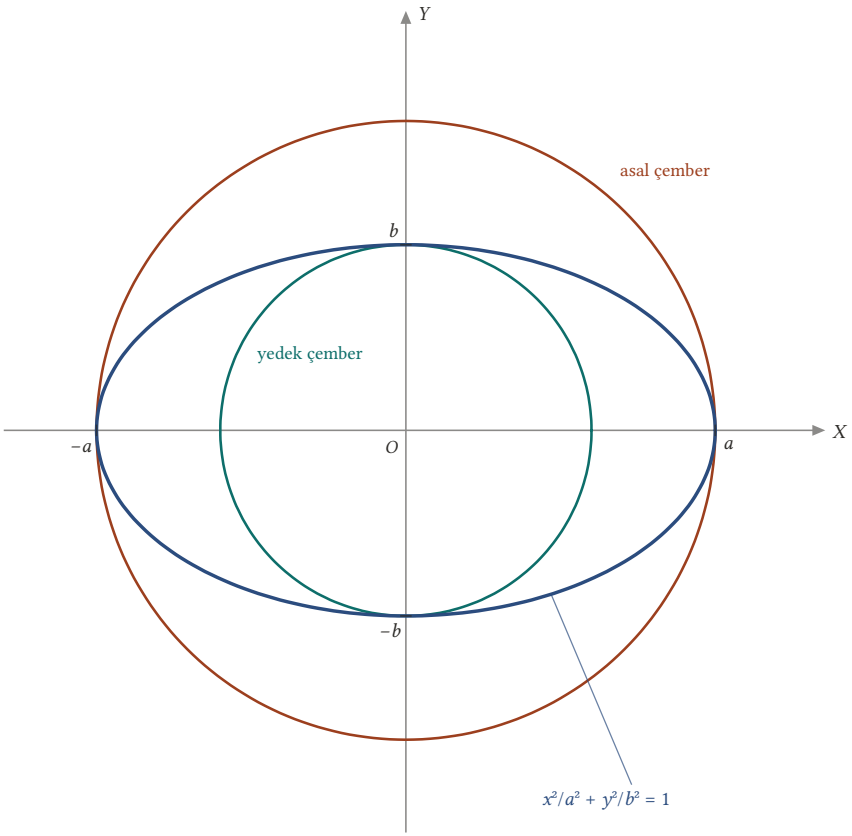
$$e=\frac{c}{a}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

bulunur.
■

18.11 Asal ve Yedek Çember, Parametrik Denklem

Elipsin merkezine yerleştirilmiş iki çember, elipsi bir çemberin "sıkıştırılmışı" olarak görmemizi sağlar.

Tanım 18.14 (Asal ve yedek çember). Merkezi elipsin merkezi, çapı elipsin asal eksen uzunluğu kadar olan çembere elipsin **asal çemberi**; merkezi elipsin merkezi, çapı elipsin yedek eksen uzunluğu kadar olan çembere de elipsin **yedek çemberi** denir.



Şekil 18.20: Elipsin asal çemberi $x^2+y^2=a^2$, yedek çemberi $x^2+y^2=b^2$; elips ikisinin arasında kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani uygun sistemde asal çember $x^2 + y^2 = a^2$, yedek çember $x^2 + y^2 = b^2$'dir. Elips bu iki çemberin arasında kalır: asal çembere uzak köşelerde, yedek çembere yakın köşelerde dokunur. Bu iki çemberden yararlanarak elipsin noktalarını tek bir açıyla ifade edebiliriz.

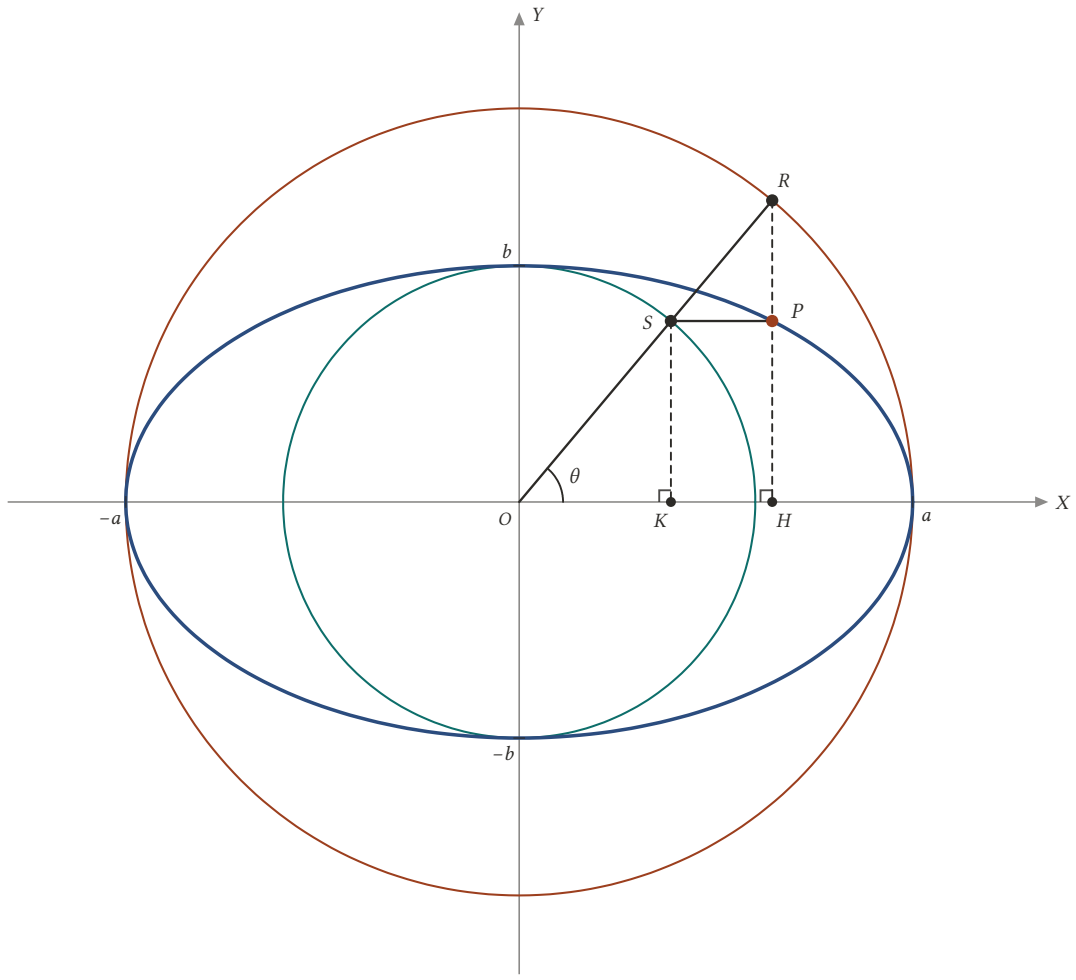
Teorem 18.7 (Elipsin parametrik denklemi). *$\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin noktaları tam olarak*

$$x = a\cos\theta, \qquad y = b\sin\theta, \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

noktalarıdır. Geometrik olarak: OX ile θ açısı yapan yarı doğru asal çemberi R'de, yedek çemberi S'de kessin; R'den asal eksene indirilen dikmenin ayağı H, S'den asal eksene indirilen dikmenin ayağı K olsun. S'den RH'ye indirilen dikmenin RH'yi kestiği P noktası elipsin, θ değerine karşılık gelen noktasıdır.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: yapının verdiği nokta.*** *R asal çember üzerinde ve $|\,OR\,| = a$ olduğundan kutupsal koordinatlarla (bkz. Önerme 5.3) $R = (a\cos\theta, a\sin\theta)$'dır; benzer biçimde $|\,OS\,| = b$ olduğundan $S = (b\cos\theta, b\sin\theta)$'dır. İlk çeyrekte bu, ROH ve SOK dik üçgenlerinden okunur:*
>
> $$\cos\theta = \frac{|\,OH\,|}{|\,OR\,|}, \qquad \sin\theta = \frac{|\,SK\,|}{|\,OS\,|}.$$
>
> *RH düşey doğrudur, yani P'nin apsisi R'ninkiyle aynıdır: $x = |\,OH\,| = a\cos\theta$. SP yataydır, yani P'nin ordinatı S'ninkiyle aynıdır: $y = |\,PH\,| = |\,SK\,| = b\sin\theta$.*
> ***Adım 2: bu noktalar elipstedir.*** *$x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ için*
>
> $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
>
> *dir.*
> ***Adım 3: elipsin her noktası böyle yazılır.*** *(x, y) elipste olsun. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ olduğundan $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ noktası birim çemberin üzerindedir. Birim çemberin her noktası $(\cos\theta, \sin\theta)$ biçiminde tek bir $\theta \in [0, 2\pi)$ ile yazılır; bu θ için $x = a\cos\theta$ ve $y = b\sin\theta$ olur.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.21: P *'nin apsisi* R *'den, ordinatı* S *'den gelir:* P = (a *cos θ,* b *sin θ).*

■

Yani elips, asal çemberin her noktasının ordinatını $\frac{b}{a}$ oranında küçülterek elde edilir: asal çemberin $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ noktası elipsin $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ noktasına iner. Buradaki θ açısı genel olarak OP yarı doğrusunun açısı değildir; OR yarı doğrusunun açısıdır.

Örnek 18.14 (Parametreye karşılık gelen nokta). $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ elipsinin parametrik denklemlerini yazınız ve $\theta=\frac{\pi}{3}$ değerine karşılık gelen noktayı bulunuz.

Çözüm.
$a=5$, $b=3$ olduğundan Teorem 18.7 gereği parametrik denklemler

$$x=5\cos\theta, \qquad y=3\sin\theta, \qquad \theta\in[0,2\pi)$$

dir. $\theta=\frac{\pi}{3}$ için $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ ve $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan nokta

$$\left(\frac{5}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

dir. Doğrulama: $\frac{25/4}{25}+\frac{27/4}{9}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

18.12 Doğrultmanlar ve Elipsin İkinci Tanımı

Girişte koniklerin bir odak ve bir doğrultmanla da tanımlanabileceğini söylemiştik. Şimdi elips için bu doğruları bulalım.

Tanım 18.15 (Doğrultmanlar). $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsinde ($c>0$) odaklar eksenine dik olan ve merkezden $\frac{a^2}{c}$ birim uzaklıkta bulunan

$$\Delta_1 : x=\frac{a^2}{c}, \qquad \Delta_2 : x=-\frac{a^2}{c}$$

doğrularına elipsin **doğrultmanları** denir. Δ_1'e F_1'e ait, Δ_2'ye F_2'ye ait doğrultman denir.

Yani doğrultmanlar, asal eksene dik ve elipsin dışında kalan iki doğrudur: $c<a$ olduğundan $\frac{a^2}{c}>a$'dır, yani her doğrultman merkeze uzak köşeden daha uzaktır. $e=\frac{c}{a}$ olduğundan doğrultmanları $x=\pm\frac{a}{e}$ biçiminde de yazabiliriz.

Teorem 18.8 (Odak–doğrultman oranı). *Elipsin üzerindeki herhangi bir noktanın bir odağa uzaklığının, aynı noktanın bu odağa ait doğrultmana uzaklığına oranı sabittir ve elipsin dış merkezliğine eşittir:*

$$\frac{|\,PF_1\,|}{d(P,\Delta_1)}=\frac{|\,PF_2\,|}{d(P,\Delta_2)}=e<1.$$

İspat.
$P(x,y)$ elipsin bir noktası olsun ve $r=|\,PF_1\,|$, $d=d(P,\Delta_1)$ diyelim. Lemma 18.1 gereği

$$r=a-\frac{c}{a}x$$

dir. Δ_1 düşey $x=\frac{a^2}{c}$ doğrusu olduğundan P'nin ona uzaklığı apsisler farkının mutlak değeridir. $x\le a<\frac{a^2}{c}$ olduğundan bu fark pozitiftir:

$$d=\frac{a^2}{c}-x.$$

Oranı hesaplamak için payı $\frac{c}{a}$ ortak çarpanına ayıralım:

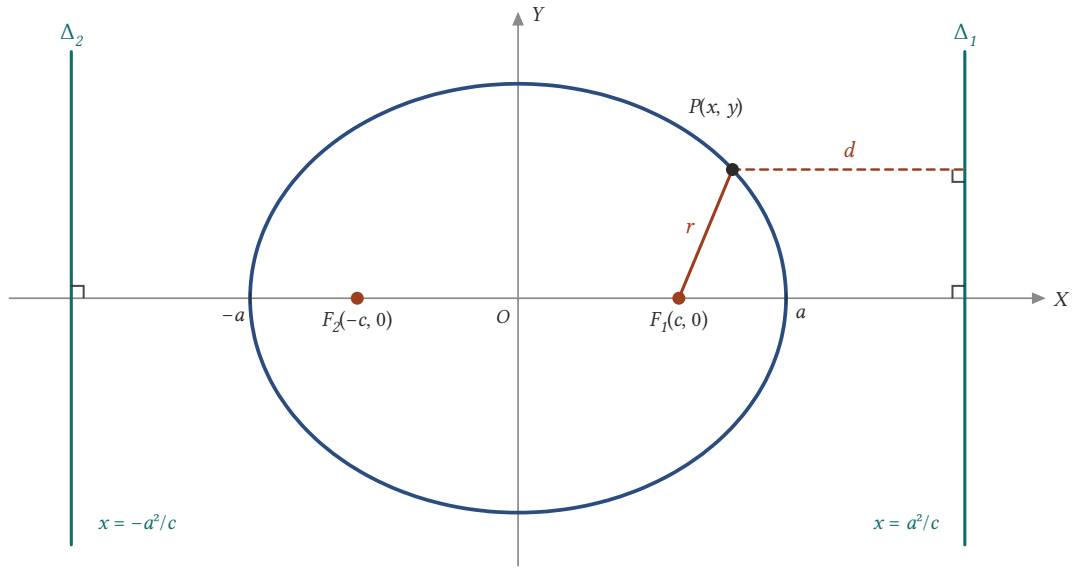
$$\frac{r}{d}=\frac{a-\frac{c}{a}x}{\frac{a^2}{c}-x}=\frac{\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-x\right)}{\frac{a^2}{c}-x}=\frac{c}{a}=e.$$

İkinci odak için Lemma 18.1 $|\,PF_2\,|=a+\frac{c}{a}x$ verir; $\Delta_2 : x=-\frac{a^2}{c}$ doğrusuna uzaklık da $x\ge -a>-\frac{a^2}{c}$ olduğundan $x+\frac{a^2}{c}$'dir. Aynı çarpanlara ayırma

$$\frac{|\,PF_2\,|}{d(P,\Delta_2)}=\frac{\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}+x\right)}{\frac{a^2}{c}+x}=e$$

verir. Önerme 18.6 gereği $e<1$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.22: $x^2/25 + y^2/16 = 1$ elipsinin doğrultmanları $x = \pm 25/3$. Elipsin her P noktası için $r/d = |PF_1|/d(P, \Delta_1) = e = 3/5$.

■

Bu teoremin tersi de doğrudur: bir noktaya ve bir doğruya uzaklıklarının oranı 1'den küçük bir sabit olan noktalar bir elips oluşturur.

Teorem 18.9 (Odak ve doğrultmandan elips). *F bir nokta, Δ da F'den geçmeyen bir doğru ve $0 < e < 1$ olsun. $|PF| = e \cdot d(P, \Delta)$ koşulunu sağlayan P noktalarının kümesi, bir odağı F, bu odağa ait doğrultmanı Δ ve dış merkezliği e olan bir elipstir.*

İspat.
F'nin Δ'ya uzaklığı $h > 0$ olsun. Koordinat sistemini, X-ekseni F'den geçip Δ'ya dik olacak ve Δ, F'nin sağında kalacak biçimde seçelim; başlangıç noktasını da birazdan belirleyeceğimiz bir yere koyalım. Önce

$$a = \frac{he}{1-e^2}, \qquad c = ae$$

sayılarını tanımlayalım. $\frac{a}{e} - ae = \frac{a(1-e^2)}{e} = h$ olduğundan, başlangıç noktası F'nin c birim solunda seçilirse $F = (c, 0)$ ve $\Delta : x = \frac{a}{e}$ olur.
Bu sistemde $P(x, y)$ için koşul $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e\left|\frac{a}{e} - x\right|$'tir. İki yan da negatif olmadığından kareleri alınabilir ve $c = ae$ yazılabilir:

$$(x - ae)^2 + y^2 = (a - ex)^2.$$

Açalım:

$$x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2.$$

$-2aex$ terimleri sadeleşir ve

$$(1 - e^2)\, x^2 + y^2 = a^2(1 - e^2)$$

kalır. $b^2 = a^2(1-e^2) > 0$ diyerek iki yanı $a^2(1-e^2)$'ye bölersek

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. $a^2 - b^2 = a^2e^2 = c^2$ *olduğundan bu, odakları* $(\pm c, 0)$ *olan elipstir (Teorem 18.2);* F *odağına ait doğrultmanı* $x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$*, yani* Δ*, dış merkezliği* $\frac{c}{a} = e$*'dir.*
■

Bu iki teorem, elipsi odaklar yerine bir odak ve bir doğrultmanla tanımlamamıza izin verir.

Tanım 18.16 (Elipsin ikinci tanımı). Sabit bir noktaya ve bu noktadan geçmeyen sabit bir doğruya uzaklıklarının oranı sabit ve 1'den küçük olan noktaların geometrik yerine **elips** denir.

Yani elips, bir odağa, doğrultmanına olduğundan "daha yakın" duran noktalardır; ne kadar daha yakın olduğunu dış merkezlik söyler. Oran 1'e eşit ya da 1'den büyük olsaydı aynı yapı parabol ve hiperbolü verirdi; bunları sonraki bölümlerde göreceğiz.

Örnek 18.15 (Odak ve doğrultmandan elips denklemi). $F(-3,0)$ noktasına ve $x = -\frac{25}{3}$ doğrusuna uzaklıklarının oranı $\frac{3}{5}$ olan noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm.
$P(x,y)$ aranan geometrik yerin bir noktası olsun. P'nin F'ye uzaklığı

$$r = |\ PF\ | = \sqrt{(-3-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

dir. $x = -\frac{25}{3}$ düşey doğrusuna uzaklığı $d = \left|-\frac{25}{3} - x\right| = \left|x + \frac{25}{3}\right|$'tür. Koşul $\frac{r}{d} = \frac{3}{5}$'tir; iki yan da negatif olmadığından karelerini alabiliriz:

$$\frac{(x+3)^2 + y^2}{\left(x + \frac{25}{3}\right)^2} = \frac{9}{25} \Rightarrow 25\ \left[\ (x+3)^2 + y^2\ \right] = 9\left(x + \frac{25}{3}\right)^2.$$

İki yanı açalım:

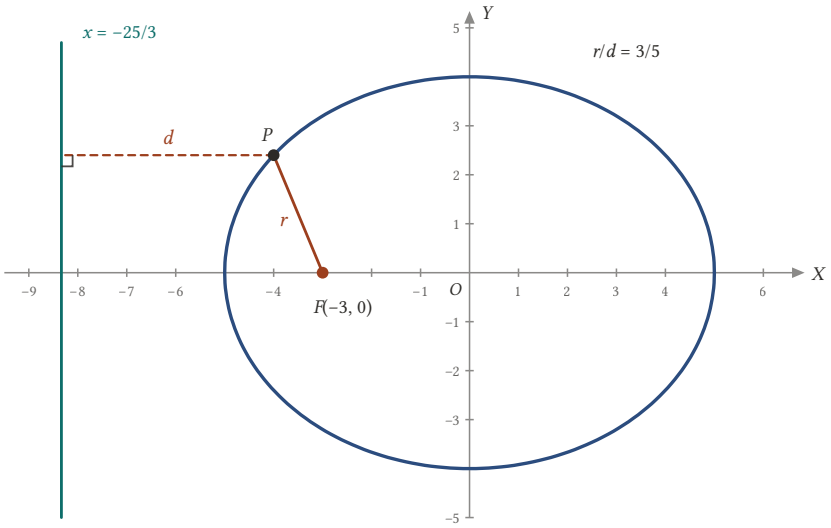
$$25x^2 + 150x + 225 + 25y^2 = 9x^2 + 150x + 625,$$
$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

İki yanı 400'e bölersek aranan geometrik yer

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

elipsi bulunur. Gerçekten bu elipste $a = 5$, $c = 3$, $e = \frac{3}{5}$'tir; $F(-3,0)$ odağına ait doğrultman $x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{25}{3}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.23: $F(-3,\,0)$ noktasına ve $x = -25/3$ doğrusuna uzaklıklarının oranı $3/5$ olan noktalar $x^2/25 + y^2/16 = 1$ elipsini oluşturur.

■

18.13 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda bölümde öğrendiğimiz kavramları uyguluyoruz: kareye tamamlama, elipsin öğelerini denklemden okuma, verilen koşullardan denklem kurma, teğet, bir doğruyla durum ve dış merkezlik.

Alıştırma 18.1 (Birinci dereceden terimleri kaldırmak: birinci denklem). Kareye tamamlama yöntemiyle $x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 8 = 0$ denklemindeki birinci dereceden terimleri kaldırınız.

Çözüm.
x'li ve y'li terimleri ayrı ayrı kareye tamamlayalım:

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4, \qquad 2y^2 + 6y = 2(y^2 + 3y) = 2\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}.$$

Denklemde yerine yazalım:

$$(x-2)^2 - 4 + 2\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} - 8 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + 2\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{33}{2}.$$

İki yanı 2 ile çarparsak $2(x-2)^2 + 4\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 33$ olur. $x' = x - 2$, $y' = y + \frac{3}{2}$ dönüşümüyle, yani eksenleri $\left(2, -\frac{3}{2}\right)$ noktasına öteleyerek

$$2x'^2 + 4y'^2 = 33$$

elde edilir; birinci dereceden terimler kalmamıştır.
■

Alıştırma 18.2 (Birinci dereceden terimleri kaldırmak: ikinci denklem). Kareye tamamlama yöntemiyle $3x^2 - 4y^2 - 6x - 8y - 10 = 0$ denklemindeki birinci dereceden terimleri kaldırınız.

Çözüm.
Kareye tamamlayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$3x^2-6x=3(x-1)^2-3,\qquad -4y^2-8y=-4(y^2+2y)=-4(y+1)^2+4.$$

Denklemde yerine yazalım:

$$3(x-1)^2-3-4(y+1)^2+4-10=0\Rightarrow 3(x-1)^2-4(y+1)^2=9.$$

$x'=x-1$, $y'=y+1$ dönüşümüyle

$$3x'^2-4y'^2=9$$

bulunur. (x'^2 ile y'^2'nin katsayıları zıt işaretli olduğundan bu bir elips değildir; bu tür eğrileri Hiperbol bölümünde inceleyeceğiz.)
■

Alıştırma 18.3 (Birinci dereceden terimleri kaldırmak: üçüncü denklem). Kareye tamamlama yöntemiyle $2x^2+5y^2-12x+10y-17=0$ denklemindeki birinci dereceden terimleri kaldırınız.

Çözüm.
Kareye tamamlayalım:

$$2x^2-12x=2(x-3)^2-18,\qquad 5y^2+10y=5(y+1)^2-5.$$

Denklemde yerine yazalım:

$$2(x-3)^2-18+5(y+1)^2-5-17=0\Rightarrow 2(x-3)^2+5(y+1)^2=40.$$

$x'=x-3$, $y'=y+1$ dönüşümüyle

$$2x'^2+5y'^2=40$$

bulunur. 40'a bölersek $\frac{x'^2}{20}+\frac{y'^2}{8}=1$ olur; bu, merkezi eski sistemde $(3,-1)$ olan bir elipstir.
■

Alıştırma 18.4 (Birinci dereceden terimleri kaldırmak: dördüncü denklem). Kareye tamamlama yöntemiyle $3x^2+3y^2-12x+12y-1=0$ denklemindeki birinci dereceden terimleri kaldırınız.

Çözüm.
Kareye tamamlayalım:

$$3x^2-12x=3(x-2)^2-12,\qquad 3y^2+12y=3(y+2)^2-12.$$

Denklemde yerine yazalım:

$$3(x-2)^2-12+3(y+2)^2-12-1=0\Rightarrow 3(x-2)^2+3(y+2)^2=25.$$

$x'=x-2$, $y'=y+2$ dönüşümüyle

$$3x'^2+3y'^2=25$$

bulunur. Bu, merkezi eski sistemde $(2,-2)$ ve yarıçapı $\frac{5}{\sqrt{3}}$ olan bir çemberdir, yani dış merkezliği 0 olan bir elipstir.
■

Alıştırma 18.5 (Asal eksen uzunluğu: 169 ve 144 paydalı elips). $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$ elipsinin asal eksen uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Denklem $\frac{x^2}{13^2}+\frac{y^2}{12^2}=1$ biçimindedir. Büyük payda x^2'nin altında olduğundan asal eksen X-ekseni üzerindedir ve $a=13$'tür. Asal eksen uzunluğu $2a=2\cdot 13=26$'dır.
■

Alıştırma 18.6 (Yedek eksen uzunluğu: 169 ve 144 paydalı elips). $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$ elipsinin yedek eksen uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.
$b^2=144$, yani $b=12$'dir. Yedek eksen uzunluğu $2b=2\cdot 12=24$'tür.
■

Alıştırma 18.7 (Odaklar: 169 ve 144 paydalı elips). $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$ elipsinin odaklarını bulunuz.

Çözüm.
$a=13$, $b=12$ ve $a^2=b^2+c^2$ olduğundan

$$c^2=169-144=25, \qquad c=5$$

tir. Asal eksen X-ekseni olduğundan odaklar $F_1(5,0)$ ve $F_2(-5,0)$'dır.
■

Alıştırma 18.8 (Dış merkezlik: 169 ve 144 paydalı elips). $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$ elipsinin dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
$a=13$ ve $c=\sqrt{169-144}=5$'tir. Dış merkezlik $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{13}$'tür.
■

Alıştırma 18.9 (Asal eksen uzunluğu: 8 ve 12 paydalı elips). $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1$ elipsinin asal eksen uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.
Büyük payda 12, y^2'nin altındadır; Önerme 18.3 gereği asal eksen Y-ekseni üzerindedir ve

$$a^2=12=\left(2\sqrt{3}\right)^2, \qquad a=2\sqrt{3}$$

tür. Asal eksen uzunluğu $2a=4\sqrt{3}$'tür.
■

Alıştırma 18.10 (Yedek eksen uzunluğu: 8 ve 12 paydalı elips). $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1$ elipsinin yedek eksen uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.
Küçük payda 8, x^2'nin altındadır; yedek eksen X-ekseni üzerindedir ve $b^2=8=\left(2\sqrt{2}\right)^2$, yani $b=2\sqrt{2}$'dir. Yedek eksen uzunluğu $2b=4\sqrt{2}$'dir.
■

Alıştırma 18.11 (Odaklar: 8 ve 12 paydalı elips). $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{12}=1$ elipsinin odaklarını bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Asal eksen Y-ekseni, $a^2 = 12$ ve $b^2 = 8$'dir. $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısından

$$12 = 8 + c^2 \Rightarrow c^2 = 4 \Rightarrow c = 2$$

bulunur. Odaklar asal eksen üzerinde olduğundan $F_1(0, 2)$ ve $F_2(0, -2)$'dir.
■

Alıştırma 18.12 (Dış merkezlik: 8 ve 12 paydalı elips). $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{12} = 1$ elipsinin dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
Asal yarı eksen $a = 2\sqrt{3}$, $c = 2$'dir. Dış merkezlik

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

tür. (Dış merkezlik her zaman odaklar arası uzaklığın asal eksen uzunluğuna oranıdır; asal eksenin hangi koordinat ekseni üzerinde olduğu önemli değildir.)
■

Alıştırma 18.13 (Asal eksen uzunluğu: 225x² + 289y² = 65025). $225x^2 + 289y^2 = 65025$ elipsinin asal eksen uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.
Önce standart biçime getirelim. $65025 = 225 \cdot 289$ olduğundan iki yanı 65025'e bölersek

$$\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1$$

bulunur. Büyük payda x^2'nin altındadır: $a^2 = 289$, $a = 17$. Asal eksen uzunluğu $2a = 34$'tür.
■

Alıştırma 18.14 (Yedek eksen uzunluğu: 225x² + 289y² = 65025). $225x^2 + 289y^2 = 65025$ elipsinin yedek eksen uzunluğunu bulunuz.

Çözüm.
İki yanı $65025 = 225 \cdot 289$'a bölersek $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1$ olur. $b^2 = 225$, $b = 15$'tir. Yedek eksen uzunluğu $2b = 30$'dur.
■

Alıştırma 18.15 (Odaklar: 225x² + 289y² = 65025). $225x^2 + 289y^2 = 65025$ elipsinin odaklarını bulunuz.

Çözüm.
Standart biçim $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1$'dir; $a = 17$, $b = 15$'tir. $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısından

$$289 = 225 + c^2 \Rightarrow c^2 = 64 \Rightarrow c = 8$$

bulunur. Asal eksen X-ekseni olduğundan odaklar $F_1(8, 0)$ ve $F_2(-8, 0)$'dır.
■

Alıştırma 18.16 (Dış merkezlik: 225x² + 289y² = 65025). $225x^2 + 289y^2 = 65025$ elipsinin dış merkezliğini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Standart biçimden $a = 17$, $b = 15$ ve $c = \sqrt{289 - 225} = 8$'dir. Dış merkezlik $e = \frac{c}{a} = \frac{8}{17}$'dir.
■

Alıştırma 18.17 (Odakları ve uzak köşeleri verilen elips). Odakları $(\pm 4, 0)$ ve uzak köşeleri $(\pm 5, 0)$ olan merkezil elipsin standart denklemini bulunuz.

Çözüm.
Odaklar $F_1(4,0)$ ve $F_2(-4,0)$ olduğundan asal eksen X-eksenidir ve $c = 4$'tür. Uzak köşeler $A_1(5,0)$ ve $A_2(-5,0)$ olduğundan $a = 5$'tir. $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısından

$$25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

bulunur. Elipsin standart denklemi

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

dir.
■

Alıştırma 18.18 (Odakları ve uzak köşeleri Y-ekseninde olan elips). Odakları $F_{1,2}(0, \pm 8)$ ve uzak köşeleri $(0, \pm 17)$ olan merkezil elipsin standart denklemini bulunuz.

Çözüm.
Odaklar ve uzak köşeler Y-ekseni üzerinde olduğundan asal eksen Y-eksenidir. $c = 8$ ve $a = 17$'dir. $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısından

$$289 = b^2 + 64 \Rightarrow b^2 = 225 \Rightarrow b = 15$$

bulunur. Önerme 18.3 gereği a^2 bu kez y^2'nin altına yazılır:

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{289} = 1.$$

■

Alıştırma 18.19 (Yedek ekseni ve uzak köşeleri verilen elips). Yedek eksen uzunluğu 10 birim ve uzak köşeleri $(\pm 10, 0)$ olan merkezil elipsin standart denklemini bulunuz.

Çözüm.
Yedek eksen uzunluğu $2b = 10$ olduğundan $b = 5$'tir. Uzak köşeler $A_1(10,0)$ ve $A_2(-10,0)$ olduğundan asal eksen X-eksenidir ve $a = 10$'dur. Standart denklem

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1, \quad \text{yani} \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

dir.
■

Alıştırma 18.20 (Odakları ve yedek ekseni verilen elips). Odakları $(0, \pm 6)$ ve yedek eksen uzunluğu 16 birim olan merkezil elipsin standart denklemini bulunuz.

Çözüm.
Odaklar Y-ekseni üzerinde olduğundan asal eksen Y-eksenidir ve $c = 6$'dır. Yedek eksen uzunluğu $2b = 16$ olduğundan $b = 8$'dir. $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısından

$$a^2 = 64 + 36 = 100, \qquad a = 10$$

bulunur. Önerme 18.3 gereği standart denklem

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

dir.
■

Alıştırma 18.21 (Odakları ve dış merkezliği verilen elips). Odakları $(\pm 5, 0)$ ve dış merkezliği $\frac{5}{8}$ olan merkezil elipsin standart denklemini bulunuz.

Çözüm.
Odaklar $F_1(5,0)$ ve $F_2(-5,0)$ olduğundan asal eksen X-eksenidir ve $c = 5$'tir. Dış merkezlikten

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{a} = \frac{5}{8} \Rightarrow a = 8$$

bulunur. $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısından $b^2 = 64 - 25 = 39$'dur. Standart denklem

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

dir.
■

Alıştırma 18.22 (İki noktası verilen elips). Odakları X-ekseni üzerinde ve merkezi başlangıç noktası olan, $\left(-3, 2\sqrt{3}\right)$ ile $\left(4, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$ noktalarından geçen elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Elipsin denklemi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ biçimindedir. İki bilinmeyeni kolay bulmak için $u = \frac{1}{a^2}$ ve $v = \frac{1}{b^2}$ diyelim; denklem $ux^2 + vy^2 = 1$ olur ve u, v'ye göre doğrusaldır.
$\left(-3, 2\sqrt{3}\right)$ noktası için $(-3)^2 = 9$ ve $\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12$ olduğundan

$$9u + 12v = 1 \qquad \text{(i)}$$

dir. $\left(4, \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)$ noktası için $4^2 = 16$ ve $\left(\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{80}{9}$ olduğundan

$$16u + \frac{80}{9}v = 1 \qquad \text{(ii)}$$

dir. (i)'den $u = \frac{1-12v}{9}$ bulunur; bunu (ii)'de yerine yazıp iki yanı 9 ile çarpalım:

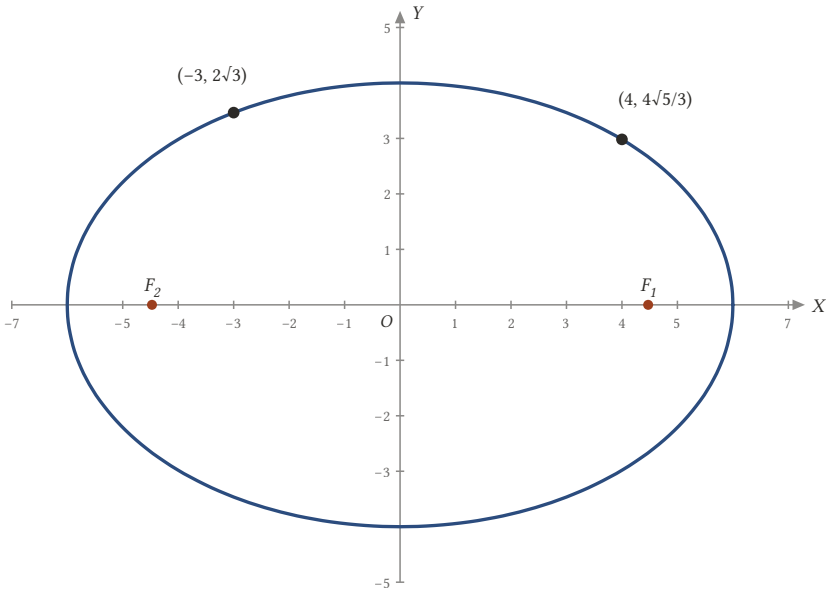
$$16(1 - 12v) + 80v = 9 \Rightarrow 16 - 192v + 80v = 9 \Rightarrow 112v = 7 \Rightarrow v = \frac{1}{16}.$$

Buradan $u = \frac{1-12/16}{9} = \frac{1/4}{9} = \frac{1}{36}$ bulunur. Demek ki $a^2 = 36$ ve $b^2 = 16$'dır; $a > b$ olduğundan odaklar gerçekten X-ekseni üzerindedir. Elipsin denklemi

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

dir. Doğrulama: $\frac{9}{36} + \frac{12}{16} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ve $\frac{16}{36} + \frac{80/9}{16} = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.24: $(-3, 2\sqrt{3})$ ve $(4, 4\sqrt{5}/3)$ noktalarından geçen $x^2/36 + y^2/16 = 1$ elipsi; odakları $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$.

■

Alıştırma 18.23 (Odakları ve uzaklıklar toplamı verilen geometrik yer). $F_1(3,1)$ ve $F_2(-5,1)$ noktalarına uzaklıklarının toplamı 10 birim olan noktaların geometrik yerinin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Odaklar arasındaki uzaklık

$$| F_1F_2 | = \sqrt{(-5-3)^2 + (1-1)^2} = 8 < 10$$

olduğundan Tanım 18.2 gereği aranan geometrik yer bir elipstir. Öğelerini bulalım.

- $| PF_1 | + | PF_2 | = 2a = 10$ olduğundan $a = 5$'tir.
- $2c = | F_1F_2 | = 8$ olduğundan $c = 4$'tür.
- $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısından $25 = b^2 + 16$, yani $b = 3$'tür.

Merkez odakların orta noktasıdır:

$$M = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = \frac{1}{2}\left((3,1) + (-5,1) \right) = \frac{1}{2}(-2,2) = (-1,1).$$

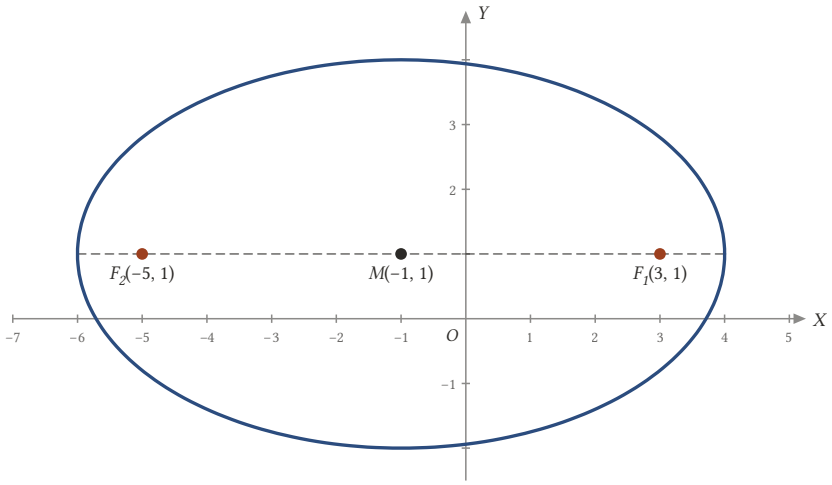
Odaklar $y = 1$ yatay doğrusu üzerinde olduğundan asal eksen X-eksenine paraleldir. Önerme 18.4 gereği elipsin denklemi

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

dir. Parantezleri açmak için iki yanı 225 ile çarpalım:

$$\begin{aligned} 9(x+1)^2 + 25(y-1)^2 &= 225, \\ 9x^2 + 18x + 9 + 25y^2 - 50y + 25 &= 225, \\ 9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 191 &= 0. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.25: $F_1(3,\,1)$ ve $F_2(-5,\,1)$ noktalarına uzaklıkları toplamı 10 olan noktalar: merkezi $M(-1,\,1)$ olan $(x+1)^2/25 + (y-1)^2/9 = 1$ elipsi.

■

Alıştırma 18.24 (Asal eksen uzunluğu: $x^2 + 4y^2 = 4$). $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsinin asal eksen uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm.
İki yanı 4'e bölersek $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ olur; $a^2 = 4$, $a = 2$'dir. Asal eksen uzunluğu $2a = 4$'tür.
■

Alıştırma 18.25 (Yedek eksen uzunluğu: $x^2 + 4y^2 = 4$). $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsinin yedek eksen uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm.
Standart biçim $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$'dir; $b^2 = 1$, $b = 1$'dir. Yedek eksen uzunluğu $2b = 2$'dir.
■

Alıştırma 18.26 (Odaklar: $x^2 + 4y^2 = 4$). $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsinin odaklarını hesaplayınız.

Çözüm.
Standart biçim $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$'dir; $a = 2$, $b = 1$'dir. $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$ olduğundan $c = \sqrt{3}$'tür. Asal eksen X-ekseni olduğundan odaklar $F_1\left(\sqrt{3}, 0\right)$ ve $F_2\left(-\sqrt{3}, 0\right)$'dır.
■

Alıştırma 18.27 (Odaklar arası uzaklık: $x^2 + 4y^2 = 4$). $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsinin odakları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm.
Standart biçim $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$'den $c = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ bulunur. Odakları arasındaki uzaklık $2c = 2\sqrt{3}$'tür.
■

Alıştırma 18.28 (Asal eksen uzunluğu: $16x^2 + 25y^2 = 400$). $16x^2 + 25y^2 = 400$ elipsinin asal eksen uzunluğunu hesaplayınız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
İki yanı 400'e bölersek $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ olur; $a = 5$'tir. Asal eksen uzunluğu $2a = 10$'dur.
■

Alıştırma 18.29 (Yedek eksen uzunluğu: 16x² + 25y² = 400). $16x^2 + 25y^2 = 400$ elipsinin yedek eksen uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm.
Standart biçim $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$'dir; $b = 4$'tür. Yedek eksen uzunluğu $2b = 8$'dir.
■

Alıştırma 18.30 (Odaklar: 16x² + 25y² = 400). $16x^2 + 25y^2 = 400$ elipsinin odaklarını hesaplayınız.

Çözüm.
Standart biçim $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$'dir. $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$, yani $c = 3$'tür. Odaklar $F_1(3, 0)$ ve $F_2(-3, 0)$'dır.
■

Alıştırma 18.31 (Odaklar arası uzaklık: 16x² + 25y² = 400). $16x^2 + 25y^2 = 400$ elipsinin odakları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm.
Standart biçimden $c = \sqrt{25 - 16} = 3$ bulunur. Odakları arasındaki uzaklık $2c = 6$'dır.
■

Alıştırma 18.32 (Parametrik noktanın elips üzerinde olması). Koordinatları θ parametresine bağlı $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ noktası verilsin. θ'nın her değeri için P'nin $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi üzerinde olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
P'nin koordinatlarını elips denkleminin sol tarafında yerine yazalım:

$$\frac{(a\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(b\sin\theta)^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Her θ için sonuç 1 olduğundan P elips denklemini sağlar, yani elipsin üzerindedir. (Tersine, elipsin her noktasının bu biçimde yazılabildiğini parametrik denklem teoreminde (Teorem 18.7) gördük.)
■

Alıştırma 18.33 (Odakları ve asal eksen uzunluğu verilen elips). Odakları $(-3, 2)$ ve $(3, 2)$, asal eksen uzunluğu 10 birim olan elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Merkez odakların orta noktasıdır:

$$M = \frac{1}{2}\,\big(\,(-3,2) + (3,2)\,\big) = (0, 2).$$

$2a = 10$ olduğundan $a = 5$'tir. Odaklar arası uzaklık

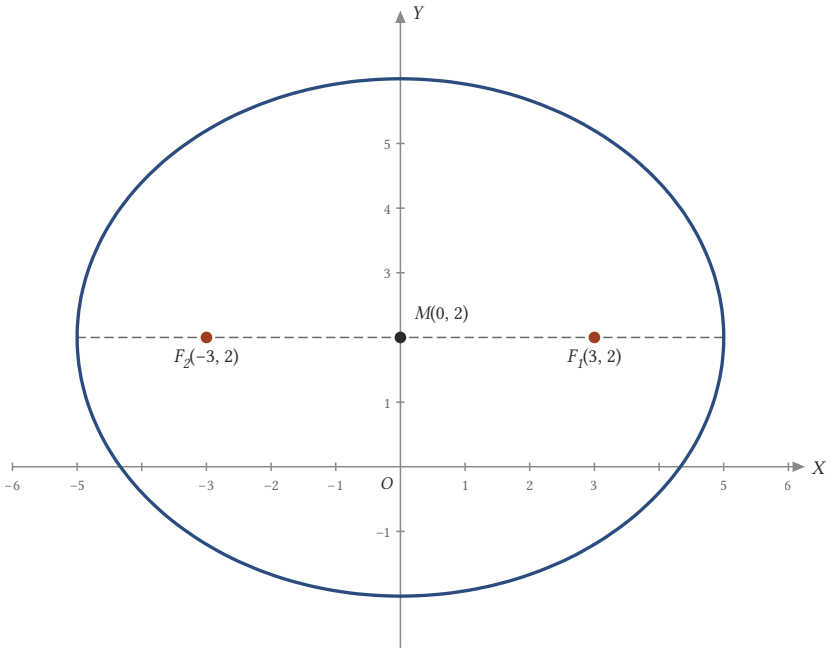
$$2c = |\,F_1F_2\,| = \sqrt{(3-(-3))^2 + (2-2)^2} = 6$$

olduğundan $c = 3$'tür. $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$, yani $b = 4$'tür. Odaklar $y = 2$ yatay doğrusu üzerinde olduğundan asal eksen X-eksenine paraleldir; Önerme 18.4 gereği

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

bulunur.



Şekil 18.26: Odakları (−3, 2), (3, 2) ve asal eksen uzunluğu 10 olan elips: $x^2/25 + (y-2)^2/16 = 1$.

■

Alıştırma 18.34 (Dört köşesi verilen elips). Köşeleri $(0,0)$, $(10,0)$, $(5,4)$ ve $(5,-4)$ olan elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm.
$(0,0)$ ile $(10,0)$ arasındaki uzaklık $\sqrt{10^2} = 10$, $(5,4)$ ile $(5,-4)$ arasındaki uzaklık $\sqrt{(5-5)^2 + (-4-4)^2} = 8$'dir. Uzun olan parça asal eksen, kısa olan yedek eksendir:

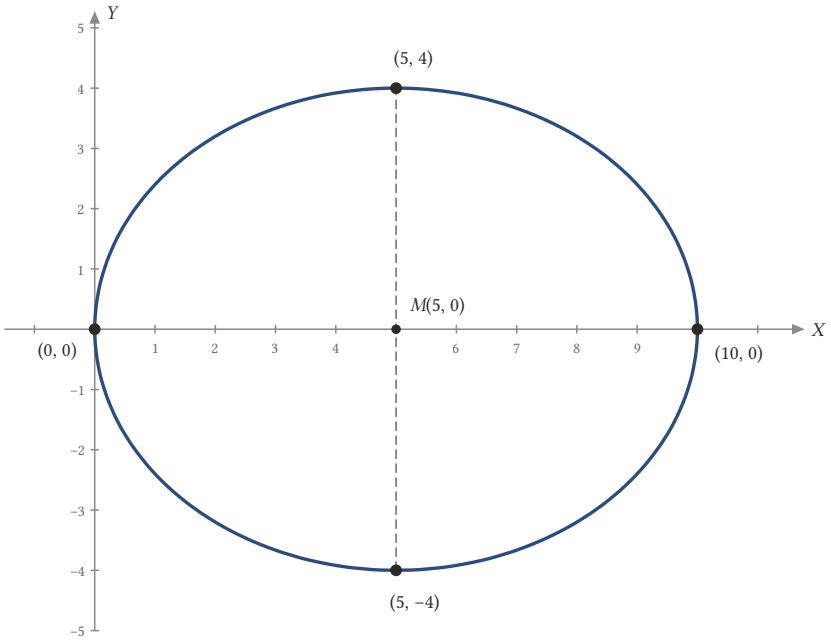
$$2a = 10 \Rightarrow a = 5, \qquad 2b = 8 \Rightarrow b = 4.$$

İki eksen merkezde kesişir; merkez $(0,0)$ ile $(10,0)$'ın (ve $(5,\pm 4)$'ün) orta noktası olan $M(5,0)$'dır. Asal eksen X-ekseni üzerinde olduğundan Önerme 18.4 gereği

$$\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.27: Köşeleri (0, 0), (10, 0), (5, 4), (5, −4) olan elipsin merkezi $M(5,0)$: $(x-5)^2/25 + y^2/16 = 1$.

■

Alıştırma 18.35 (Merkezi ve eksen uzunlukları verilen elips). Merkezi $(0,0)$, asal eksen uzunluğu 20 birim ve yedek eksen uzunluğu 10 birim olan (eksenleri koordinat eksenleri üzerinde) elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm.
$2a = 20$ ve $2b = 10$ olduğundan $a = 10$ ve $b = 5$'tir. Asal eksen X-ekseni üzerindeyse standart denklem

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$$

dir. Soru asal eksenin hangi koordinat ekseni üzerinde olduğunu belirtmediğinden, asal eksen Y-ekseni üzerindeyse Önerme 18.3 gereği $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$ elipsi de koşulları sağlar.
■

Alıştırma 18.36 (Uzaklıklar toplamı 6 olan noktalar). $F_1(-2,0)$ ve $F_2(2,0)$ noktalarına uzaklıklarının toplamı 6 birim olan noktaların geometrik yeri nedir?

Çözüm.
$|\,F_1F_2\,| = 4 < 6$ olduğundan aranan geometrik yer bir elipstir. Denklemini doğrudan tanımdan çıkaralım. $P(x,y)$ bu geometrik yerin bir noktası olsun:

$$\sqrt{(x+2)^2+y^2} + \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 6.$$

İkinci kökü sağa atıp iki yanın karesini alalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(x+2)^2+y^2 = 36 - 12\sqrt{(x-2)^2+y^2} + (x-2)^2 + y^2,$$
$$x^2+4x+4 = 36 - 12\sqrt{(x-2)^2+y^2} + x^2 - 4x + 4,$$
$$8x - 36 = -12\sqrt{(x-2)^2+y^2}.$$

İki yanı -4'e bölüp yeniden kare alalım:

$$(9-2x)^2 = 9\,\big[\,(x-2)^2+y^2\,\big],$$
$$81 - 36x + 4x^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2,$$
$$45 = 5x^2 + 9y^2.$$

İki yanı 45'e bölersek

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

bulunur. Aynı sonucu Teorem 18.2 de verir: $2a = 6$, $2c = 4$, yani $a = 3$, $c = 2$ ve $b^2 = 9 - 4 = 5$'tir. ■

Alıştırma 18.37 (Bir noktadaki teğet: 12 ve 8 paydalı elips). $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ elipsine $P\left(2, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm.
Önce P'nin elipste olduğunu doğrulayalım: $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3}$ olduğundan

$$\frac{4}{12} + \frac{16/3}{8} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Teğet formülünde (Teorem 18.4) $a^2 = 12$, $b^2 = 8$, $x_0 = 2$, $y_0 = \frac{4}{\sqrt{3}}$ yazalım:

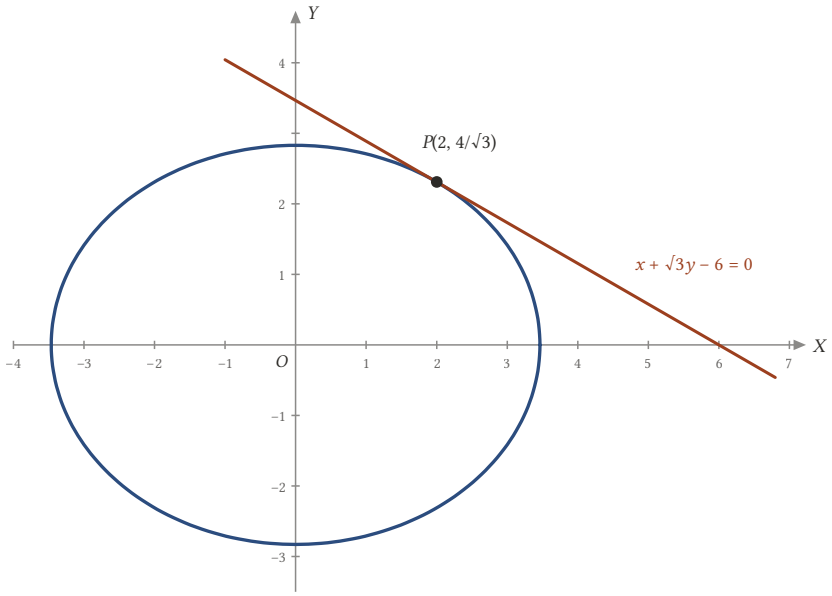
$$\frac{2x}{12} + \frac{\frac{4}{\sqrt{3}}\,y}{8} = 1 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{2\sqrt{3}} = 1.$$

İki yanı 6 ile çarparsak $x + \frac{6}{2\sqrt{3}}y = 6$, yani $x + \sqrt{3}\,y = 6$ olur. Teğet

$$x + \sqrt{3}\,y - 6 = 0$$

doğrusudur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.28: $x^2/12 + y^2/8 = 1$ elipsinin $P(2, 4/\sqrt{3})$ noktasındaki teğeti $x + \sqrt{3}y - 6 = 0$.

■

Alıştırma 18.38 (Bir doğru ailesinin elipse göre durumu). $d : y = -x + n$ doğrusu ile $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ elipsinin birbirine göre durumunu n'ye göre irdeleyiniz.

Çözüm.
Durum teoremine (Teorem 18.5) göre diskriminant $\Delta = 4a^2b^2\,(a^2m^2 + b^2 - n^2)$'dir ve $4a^2b^2 > 0$ olduğundan işaretini $a^2m^2 + b^2 - n^2$ belirler. Burada $a^2 = 20$, $b^2 = 5$, $m = -1$'dir:

$$a^2m^2 + b^2 - n^2 = 20 \cdot (-1)^2 + 5 - n^2 = 25 - n^2.$$

$25 - n^2$, $n = \pm 5$'te sıfırdır, $-5 < n < 5$ için pozitif, $n < -5$ ya da $n > 5$ için negatiftir. Buna göre

- $n < -5$ ya da $n > 5$ ise d elipsi kesmez;
- $n = -5$ ya da $n = 5$ ise d elipse teğettir;
- $-5 < n < 5$ ise d elipsi iki noktada keser.

■

Alıştırma 18.39 (Teğet durumunda değme noktaları). $d : y = -x + n$ doğrusunun $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ elipsine teğet olduğu durumlarda değme noktalarının koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Sonuç 18.1 gereği teğet olma koşulu $n^2 = a^2m^2 + b^2 = 20 + 5 = 25$, yani $n = \pm 5$'tir. Değme noktalarını denklemleri birlikte çözerek bulalım; elips denkleminin iki yanını 100 ile çarparak onu $5x^2 + 20y^2 - 100 = 0$ biçiminde kullanalım.
$n = -5$ için. $y = -x - 5$'i yerine yazalım:

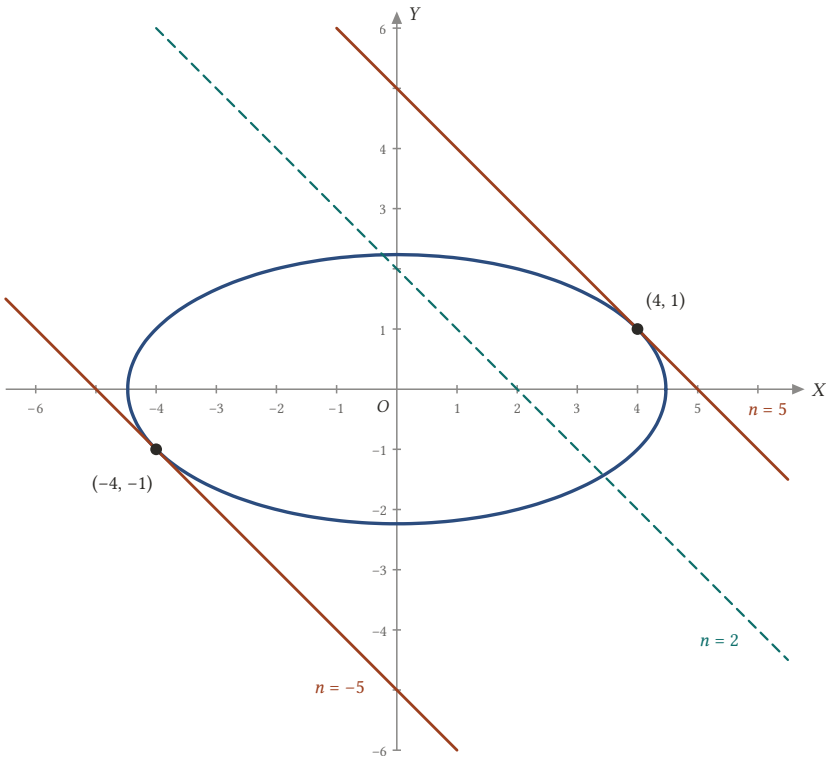
$$\begin{aligned} 5x^2 + 20(-x - 5)^2 - 100 &= 0, \\ 5x^2 + 20(x^2 + 10x + 25) - 100 &= 0, \\ 25x^2 + 200x + 400 &= 0. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

25'e bölersek $x^2+8x+16=(x+4)^2=0$, yani çift kök $x=-4$ bulunur; $y=-(-4)-5=-1$'dir. Değme noktası $(-4,-1)$'dir.
$n=5$ için. $y=-x+5$'i yerine yazalım:

$$\begin{aligned} 5x^2+20(-x+5)^2-100&=0,\\ 5x^2+20(x^2-10x+25)-100&=0,\\ 25x^2-200x+400&=0. \end{aligned}$$

25'e bölersek $(x-4)^2=0$, yani $x=4$ ve $y=-4+5=1$ bulunur. Değme noktası $(4,1)$'dir.
Aynı noktaları değme noktası formülü (Sonuç 18.1) de verir: $\left(-\frac{a^2m}{n},\frac{b^2}{n}\right)=\left(\frac{20}{n},\frac{5}{n}\right)$; $n=5$ için $(4,1)$, $n=-5$ için $(-4,-1)$.



Şekil 18.29: $y=-x+n$ doğruları $x^2/20+y^2/5=1$ elipsine $n=\pm5$ iken $(4,1)$ ve $(-4,-1)$ noktalarında teğettir; $n=2$ doğrusu elipsi keser.

■

Alıştırma 18.40 (Odakların yedek ekseni gördüğü açı). Merkezil bir elipste odaklar, yedek ekseni $\frac{\pi}{3}$'lük açı altında görmektedir. Elipsin dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
Elipsi uygun sistemde düşünelim. $F_1(c,0)$ odağı yedek ekseni B_1B_2'yi $\widehat{B_1F_1B_2}=\frac{\pi}{3}$ açısı altında görür. X-ekseni bu açının açıortayıdır, çünkü B_1 ve B_2 X-eksenine göre simetriktir; dolayısıyla

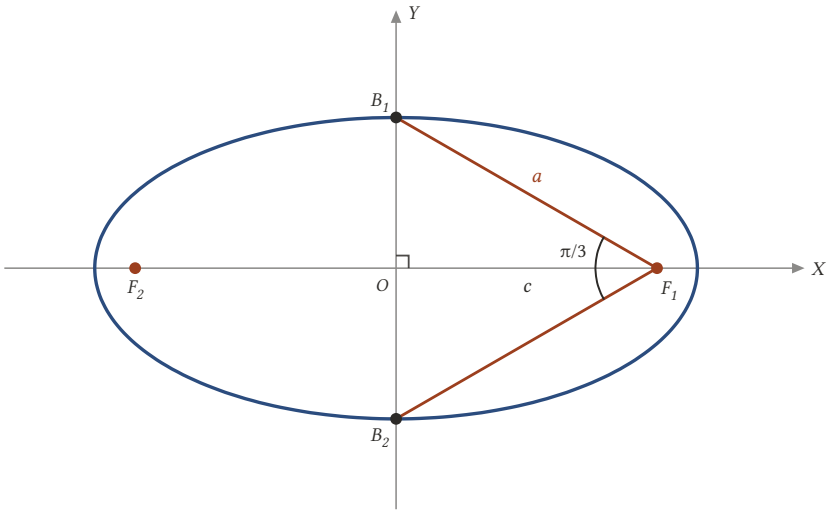
$$\widehat{OF_1B_1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

dır. OF_1B_1 dik üçgeninde komşu dik kenar $|\,OF_1\,|=c$, hipotenüs Teorem 18.1 gereği $|\,F_1B_1\,|=a$'dır:

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{c}{a}\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Simetri yüzünden F_2'den bakıldığında da aynı açı görülür.



Şekil 18.30: F_1 odağı yedek ekseni $\pi/3$ açısı altında görür; OF_1B_1 dik üçgeninde $\cos(\pi/6) = c/a = e = \sqrt{3}/2$.

■

Alıştırma 18.41 (Yakın köşenin odakları gördüğü açı). Merkezil bir elipste yedek eksenin B_1 ucu, F_2F_1 doğru parçasını dik açı altında görmektedir. Elipsin dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
Uygun sistemde $B_1(0,b)$, $F_1(c,0)$ ve $F_2(-c,0)$'dır; koşul $\widehat{F_2B_1F_1} = \frac{\pi}{2}$'dir. Y-ekseni bu açının açıortayıdır (F_1 ile F_2, Y-eksenine göre simetrik), dolayısıyla

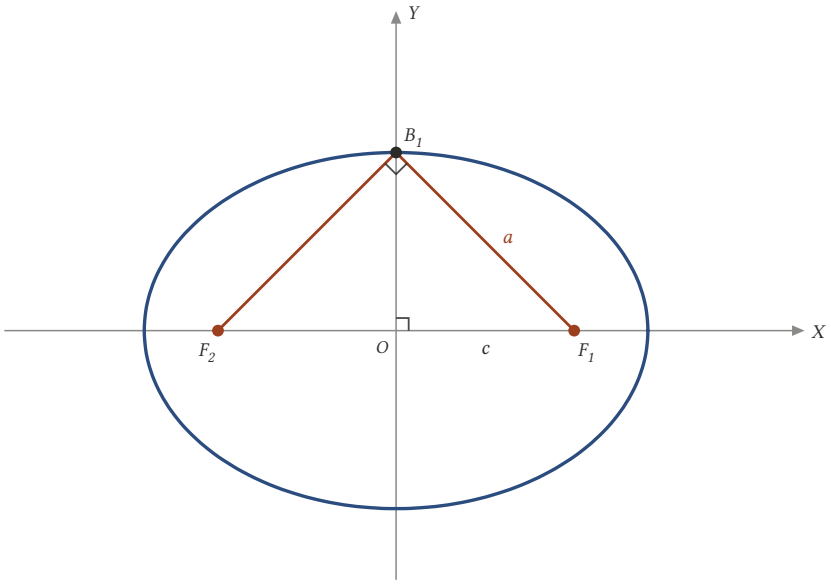
$$\widehat{OB_1F_1} = \frac{\pi}{4}$$

tür. OB_1F_1 dik üçgeninde bu açının karşısındaki dik kenar $|\,OF_1\,| = c$, hipotenüs $|\,B_1F_1\,| = a$'dır (Teorem 18.1):

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bu elipste $b = c$'dir; çünkü OB_1F_1 ikizkenar dik üçgendir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.31: B_1, F_2F_1 parçasını dik açı altında görür; OB_1F_1 ikizkenar dik üçgeninde $\sin(\pi/4) = c/a = e = \sqrt{2}/2$.

■

Alıştırma 18.42 (Uzak köşesi, merkezi ve dış merkezliği verilen elips). Uzak köşelerinden biri $A_1(5,-1)$, dış merkezliği $\frac{2}{3}$ ve merkezi $M(-1,-1)$ olan elipsin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Merkezden uzak köşeye uzaklık asal yarı eksendir:

$$a = |\, MA_1 \,| = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-1-(-1))^2} = \sqrt{6^2+0^2} = 6.$$

Dış merkezlikten

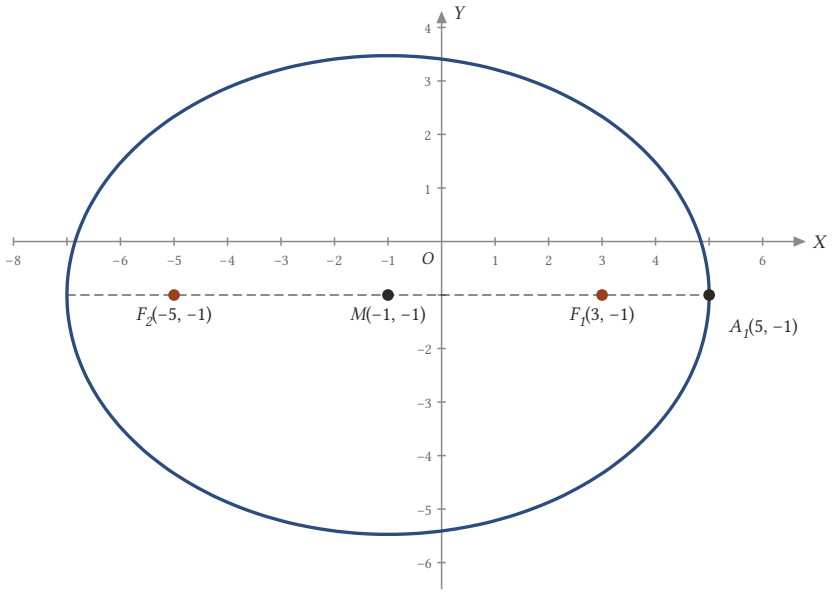
$$e = \frac{c}{a} = \frac{c}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow c = 4$$

bulunur. $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$'dir. M ile A_1 aynı $y=-1$ yatay doğrusu üzerinde olduğundan asal eksen X-eksenine paraleldir; Önerme 18.4 gereği

$$\frac{(x+1)^2}{36} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.32: Merkezi $M(-1,-1)$, uzak köşesi $A_1(5,-1)$, dış merkezliği $2/3$ olan elips: $(x+1)^2/36 + (y+1)^2/20 = 1$.

■

Alıştırma 18.43 (İki elipsi birbirine dönüştüren dönme). $9x^2+4y^2=36$ ve $4x^2+9y^2=36$ elipslerini birbirine dönüştüren bir dönme bulunuz.

Çözüm.
Önce iki denklemi standart biçime getirelim:

$$9x^2+4y^2=36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \qquad 4x^2+9y^2=36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

İlk elipsin asal ekseni Y-ekseni, ikincisininki X-eksenidir; iki elipsin yarı eksenleri aynıdır (3 ve 2). Asal ekseni Y-ekseninden X-eksenine götürmek için eksenleri $\frac{\pi}{2}$ döndürmeyi deneyelim.
Eksenler θ kadar döndürülünce eski ve yeni koordinatlar arasında $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$, $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ bağıntıları vardır (bkz. Döndürme ve Paralel Eksenler). $\theta=\frac{\pi}{2}$ için $\cos\frac{\pi}{2}=0, \sin\frac{\pi}{2}=1$ olduğundan

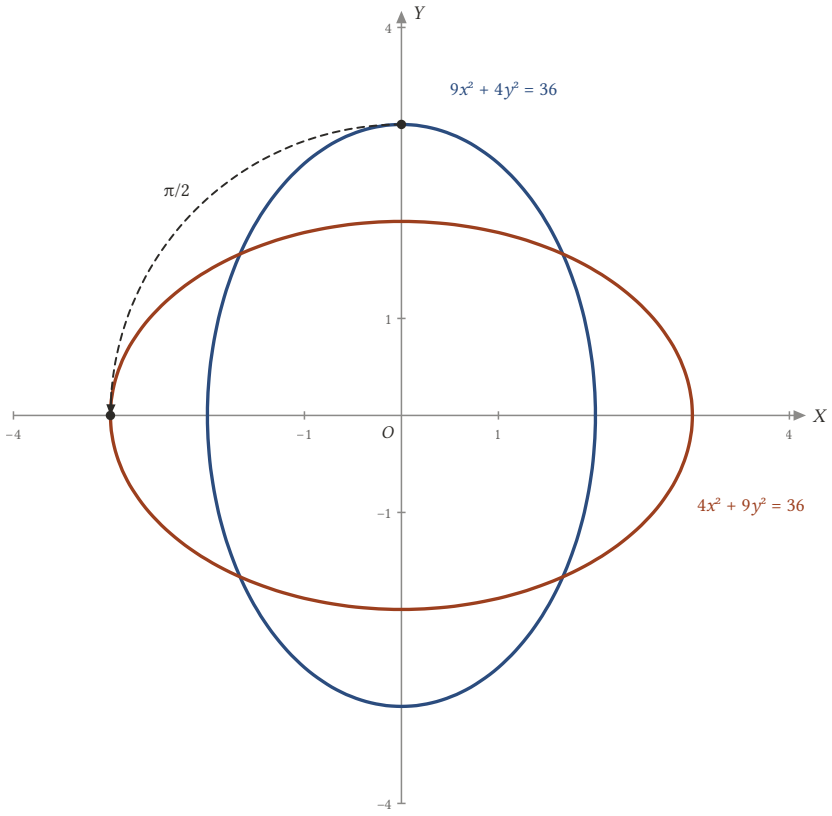
$$x=-y', \qquad y=x'$$

dür; buna denk olarak eksenlerin $\frac{\pi}{2}$ döndürülmesi $D(\frac{\pi}{2}):(x,y)\mapsto(x',y')=(y,-x)$ ile verilir. $x=-y'$ ve $y=x'$'i ilk elipsin denkleminde yerine yazalım:

$$9(-y')^2+4x'^2=36 \Rightarrow 4x'^2+9y'^2=36.$$

Demek ki eksenler $\frac{\pi}{2}$ döndürülünce $9x^2+4y^2=36$ elipsinin yeni sistemdeki denklemi $4x'^2+9y'^2=36$ olur; bu, ikinci elipsin denklemidir. Aynı sonuç nokta dönmesiyle de söylenebilir: düzlemin noktalarını başlangıç noktası etrafında $\frac{\pi}{2}$ döndürmek (ya da $-\frac{\pi}{2}$) ilk elipsi ikincisinin üzerine taşır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 18.33: $9x^2 + 4y^2 = 36$ elipsi başlangıç noktası etrafında $\pi/2$ döndürülünce $4x^2 + 9y^2 = 36$ elipsine gelir; $(0, 3)$ noktası $(-3, 0)$ noktasına taşınır.

■

Bu bölümde elipsi iki odağa uzaklıklar toplamıyla tanımladık; standart denklemini, köşelerini, eksenlerini, teğet ve normalini, bir doğruyla durumunu, Monge çemberini, dış merkezliğini, parametrik denklemini ve doğrultmanlarını inceledik. Sonraki bölümde uzaklıkların toplamı yerine farkının sabit olduğu eğriyi, Hiperbol'ü ele alacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

19. Hiperbol

Elips bölümünde iki sabit noktaya uzaklıklarının **toplamı** sabit olan noktaları incelemiştik. Toplam yerine **farkı** alırsak bambaşka bir eğri çıkar: birbirinden ayrı iki koldan oluşan, uzaklara gittikçe iki doğruya yapışan bir eğri. Bu eğri hiperboldür ve koniklerin ikincisidir; bir dik koni yüzeyini, koninin eksenine paralel bir düzlemle kestiğimizde ortaya çıkar (böyle bir düzlem koninin iki yaprağını da keser) (konik kavramı için bkz. Elips). Bu bölümde hiperbolü önce geometrik olarak tanımlayacak, sonra uygun bir koordinat sisteminde standart denklemini kuracak ve bu denklemden asimptotlarını, teğetlerini, dış merkezliğini ve parametrik gösterimini çıkaracağız.

19.1 Hiperbolün Tanımı ve Temel Öğeleri

Bir düzlemde iki sabit nokta alalım. Bu iki noktaya olan uzaklıklarının farkı hep aynı kalan noktalar nerede durur? Tanım bu soruyu sorar.

Tanım 19.1 (Hiperbol). Bir düzlemde sabit iki noktaya olan uzaklıklarının farkının mutlak değeri sabit olan noktaların geometrik yerine **hiperbol** denir.
$F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ farklı iki sabit nokta, $|\,F_1F_2\,| = 2c$ ve $0 < a < c$ olmak üzere, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ ile gösterilen hiperbol

$$\mathcal{H} = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 : \big|\,|\,PF_1\,| - |\,PF_2\,|\,\big| = 2a \right\}$$

kümesidir.

Yani bir P noktası hiperbolün üzerindeyse, P'den iki sabit noktaya olan uzaklıklardan büyüğü küçüğünü tam $2a$ kadar geçer. Hangisinin büyük olduğu önemli değildir: $|\,PF_1\,| - |\,PF_2\,| = 2a$ olan noktalar bir parça, $|\,PF_2\,| - |\,PF_1\,| = 2a$ olan noktalar başka bir parça oluşturur. Hiperbolün iki ayrı kolu olmasının nedeni budur.
Tanımda $a < c$ koşulunu koyduk. Bu keyfi bir seçim değildir; aşağıdaki önerme, farkın $2c$'ye ulaştığı ya da onu aştığı durumda eğri diye bir şey kalmadığını gösterir.

Önerme 19.1 (Uzaklık farkı odaklar arası uzaklığı geçemez). *$F_1 \neq F_2$ ve $|\,F_1F_2\,| = 2c$ olsun. Düzlemdeki her P noktası için*

$$\big|\,|\,PF_1\,| - |\,PF_2\,|\,\big| \leq 2c$$

dir. Eşitlik yalnız P, F_1F_2 doğrusu üzerinde ve F_1 ile F_2 arasındaki açık doğru parçasının dışında olduğunda sağlanır. Buna göre $a > c$ ise $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ boş kümedir, $a = c$ ise bu küme F_1F_2 doğrusunun F_1'den ve F_2'den dışarı doğru çıkan iki ışınıdır.

> ***İspat.***
> *PF_1F_2 "üçgeninde" üçgen eşitsizliği $|\,PF_1\,| \leq |\,PF_2\,| + |\,F_2F_1\,|$ ve $|\,PF_2\,| \leq |\,PF_1\,| + |\,F_1F_2\,|$ verir. Bu iki eşitsizlik*
>
> $$-2c \leq |\,PF_1\,| - |\,PF_2\,| \leq 2c$$
>
> *demektir; bu da istenen eşitsizliktir.*
> *Eşitlik durumuna bakalım. $|\,PF_1\,| - |\,PF_2\,| = 2c$, yani $|\,PF_1\,| = |\,PF_2\,| + |\,F_2F_1\,|$ olması, F_2'nin P ile F_1'i birleştiren doğru parçası üzerinde bulunması demektir. Bu da P'nin F_1F_2 doğrusu üzerinde, F_2'den başlayıp F_1'den uzaklaşan ışın üzerinde olmasıdır. Benzer biçimde $|\,PF_2\,| - |\,PF_1\,| = 2c$ eşitliği, P'nin F_1'den başlayıp F_2'den uzaklaşan ışın üzerinde olmasıdır.*
> *Böylece $a > c$ iken $2a > 2c$ olduğundan koşulu sağlayan nokta yoktur; $a = c$ iken koşulu sağlayan noktalar tam bu iki ışındır.*
> ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Hiperbolün adlandırılmış noktaları ve doğruları elipstekilere çok benzer.

Tanım 19.2 (Odaklar). Hiperbolün tanımındaki (Tanım 19.1) F_1 ve F_2 noktalarına $\mathcal{H}$ hiperbolünün **odakları** denir.

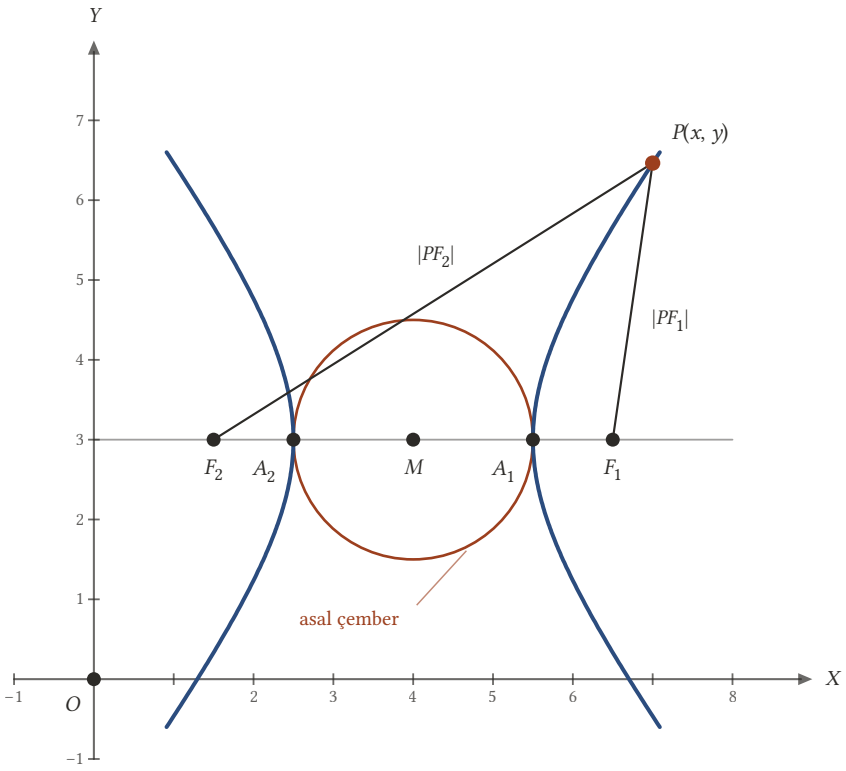
Tanım 19.3 (Merkez). $M = \dfrac{1}{2}(F_1 + F_2)$ noktasına, yani $[F_1F_2]$ doğru parçasının orta noktasına, $\mathcal{H}$ hiperbolünün **merkezi** denir.

Tanım 19.4 (Asal eksen). $\mathcal{H}$ hiperbolünün F_1 ve F_2 odaklarını birleştiren doğruya hiperbolün **asal ekseni** denir.

Tanım 19.5 (Köşeler). $\mathcal{H}$ hiperbolünün asal ekseni kestiği A_1 ve A_2 noktalarına hiperbolün **köşeleri** denir.

Tanım 19.6 (Asal çember). $[A_1A_2]$ doğru parçasını çap kabul eden çembere $\mathcal{H}$ hiperbolünün **asal çemberi** denir.

Yani odaklar hiperbolü belirleyen iki sabit nokta, merkez bu ikisinin tam ortası, asal eksen ikisinden geçen doğrudur. Köşeler hiperbolün asal eksen üzerindeki noktalarıdır; birazdan her kolda tam bir köşe bulunduğunu ve köşelerin odakların arasında kaldığını göreceğiz. Asal çember de merkezi M olan ve iki köşeden geçen çemberdir.



Şekil 19.1: Odakları F_1, F_2 olan hiperbol: sağ kolun her P noktasında $|PF_2| - |PF_1| = 2a$.

Koordinat hesabı yapmak için hiperbolü rahat bir konuma yerleştirelim. Öteleme ve dönme ile (Öteleme, Döndürme ve Paralel Eksenler) koordinat sistemini, merkezi $O(0,0)$ başlangıç noktasına ve asal ekseni

 CC BY-NC-SA 4.0

X-eksenine gelecek biçimde seçebiliriz. Bu işlemler uzaklıkları değiştirmediğinden hiperbolün tanımı etkilenmez.

Teorem 19.1 (Odakların ve köşelerin koordinatları). *XY dik koordinat sisteminde $\mathcal{H} = \mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ hiperbolünün merkezi $O(0,0)$ ve asal ekseni X-ekseni olsun. Bu durumda odaklar*

$$F_1(c,0), \qquad F_2(-c,0)$$

ve köşeler

$$A_1(a,0), \qquad A_2(-a,0)$$

noktalarıdır (adlar, F_1 pozitif tarafta kalacak biçimde verilmiştir). Özellikle hiperbol X-eksenini tam iki noktada keser ve köşeler iki odağın arasındadır.

İspat.
Adım 1: odaklar. *Odaklar asal eksen, yani X-ekseni üzerinde olduğundan $F_1(f_1,0)$ ve $F_2(f_2,0)$ biçimindedir. Merkez başlangıç noktası olduğundan*

$$(0,0) = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = \frac{1}{2}(f_1 + f_2, 0)$$

olur; buradan $f_2 = -f_1$ çıkar. Ayrıca

$$2c = \mid F_1F_2 \mid = \sqrt{(f_2 - f_1)^2 + (0-0)^2} = \mid -2f_1 \mid = 2 \mid f_1 \mid$$

olduğundan $\mid f_1 \mid = c$'dir. F_1'i pozitif tarafta seçersek $f_1 = c$ ve $f_2 = -c$ bulunur.
Adım 2: köşeler. *X-ekseni üzerindeki bir $P(t,0)$ noktası için*

$$\mid PF_1 \mid = \mid t - c \mid, \qquad \mid PF_2 \mid = \mid t + c \mid$$

dir. İki durum vardır.

- *$\mid t \mid \leq c$ ise $t - c \leq 0 \leq t + c$ olduğundan*

  $$\mid PF_1 \mid - \mid PF_2 \mid = (c - t) - (c + t) = -2t$$

  olur. Koşul $\mid -2t \mid = 2a$, yani $t = a$ ya da $t = -a$ verir. $0 < a < c$ olduğundan bu iki değer gerçekten $\mid t \mid \leq c$ aralığındadır.

- *$\mid t \mid > c$ ise $t - c$ ile $t + c$ aynı işaretlidir ve*

  $$\big|\, \mid t - c \mid - \mid t + c \mid \,\big| = \mid (t-c) - (t+c) \mid = 2c$$

  olur. $2c \neq 2a$ olduğundan bu noktalar hiperbolde değildir.

Demek ki hiperbol X-eksenini yalnız $A_1(a,0)$ ve $A_2(-a,0)$ noktalarında keser ve $-c < -a < a < c$ olduğundan köşeler odakların arasındadır.
■

19.2 Standart Denklem

Artık hiperbolün denklemini kurabiliriz. Hesabın sonunda $c^2 - a^2$ ifadesi kendiliğinden ortaya çıkacak; $a < c$ olduğundan bu sayı pozitiftir ve onu bir karenin adıyla anmak denklemi sadeleştirir.

Teorem 19.2 (Hiperbolün standart denklemi). *Merkezi $O(0,0)$, asal ekseni X-ekseni, odakları $F_1(c,0)$ ve $F_2(-c,0)$ olan $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ hiperbolünü alalım ve*

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0$$

diyelim. Bir $P(x,y)$ noktasının $\mathcal{H}$ üzerinde olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olmasıdır.

İspat.
Adım 1: tanımdan denkleme. *$P(x,y) \in \mathcal{H}$ olsun. Uzaklık formülüyle tanımdaki koşul*

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$$

olur. İkinci kökü sağa geçirip iki tarafın karesini alalım:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2.$$

Kareleri açınca x^2, y^2 ve c^2 terimleri iki tarafta da aynıdır ve sadeleşir:

$$-2cx = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + 2cx.$$

Buradan

$$-4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

yani

$$cx + a^2 = \mp a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

bulunur. Bir kez daha kare alalım:

$$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2\left(x^2 + 2cx + c^2 + y^2\right).$$

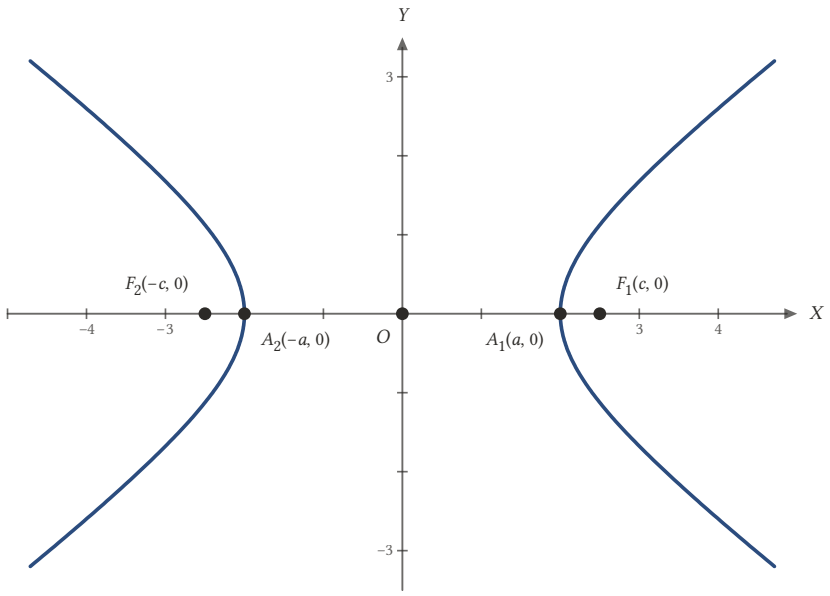
$2a^2cx$ terimleri sadeleşir ve kalan terimler düzenlenince

$$(c^2-a^2)\,x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2-a^2)$$

elde edilir. $c^2 - a^2 = b^2$ yazarsak $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ olur; iki taraf a^2b^2'ye bölünerek

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bulunur.



Şekil 19.2: Merkezi O*, asal ekseni* X*-ekseni olan hiperbol: köşeler (±*a*, 0), odaklar (±*c*, 0).*

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: denklemden tanıma. *Tersine, $P(x,y)$ standart denklemi sağlasın. Denklemden $y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)$ ve $b^2 = c^2 - a^2$ olduğundan*

$$\begin{aligned} |\,PF_1\,|^2 &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ &= x^2 - 2cx + c^2 + \frac{c^2-a^2}{a^2}\,x^2 - c^2 + a^2 \\ &= \frac{c^2}{a^2}\,x^2 - 2cx + a^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 \end{aligned}$$

olur. Aynı hesapta $-2cx$ yerine $+2cx$ yazılarak $|\,PF_2\,|^2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2$ bulunur. Denklemden $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$, yani $|\,x\,| \geq a$ çıkar; o zaman $\frac{c}{a}\,|\,x\,| \geq c > a$ olur.

- *$x \geq a$ ise $\frac{c}{a}x - a > 0$ ve $\frac{c}{a}x + a > 0$ olduğundan $|\,PF_2\,| - |\,PF_1\,| = 2a$ olur.*
- *$x \leq -a$ ise $\frac{c}{a}x + a < 0$ ve $\frac{c}{a}x - a < 0$ olduğundan*

$$|\,PF_1\,| - |\,PF_2\,| = \left(a - \frac{c}{a}x\right) - \left(-\frac{c}{a}x - a\right) = 2a$$

olur.

İki durumda da $\big|\,|\,PF_1\,| - |\,PF_2\,|\,\big| = 2a$, yani $P \in \mathcal{H}$'dir.
■

İspatın ikinci adımı, tanımdan denkleme giderken kare almanın fazladan nokta eklemediğini güvenceye alır.

Tanım 19.7 (Standart denklem). $a, b > 0$ olmak üzere

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

denklemine hiperbolün **standart denklemi** denir. Burada $c^2 = a^2 + b^2$ olup odaklar $(\pm c, 0)$, köşeler $(\pm a, 0)$ noktalarıdır.

Yani standart denklemi gören biri hemen a'yı ve b'yi okur, odakları da $c = \sqrt{a^2+b^2}$ bağıntısıyla bulur. Elipsteki $a^2 = b^2 + c^2$ bağıntısıyla karıştırmamak gerekir: hiperbolde c en büyüğüdür, $c^2 = a^2 + b^2$'dir. Ayrıca elipsin aksine hiperbolde a ile b arasında büyüklük sırası yoktur; $a < b$, $a = b$ ya da $a > b$ olabilir. İspatın ikinci adımında $|\,PF_1\,|$ ve $|\,PF_2\,|$ için bulduğumuz ifadeleri ileride de kullanacağız; bunları ayrıca kaydedelim.

Sonuç 19.1 (Odak uzaklıkları). $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *hiperbolünün bir $P(x,y)$ noktası için*

$$|\,PF_1\,| = \left|\,\frac{c}{a}x - a\,\right|, \qquad |\,PF_2\,| = \left|\,\frac{c}{a}x + a\,\right|$$

dir. Sağ kolda $(x \geq a)$ $|\,PF_1\,| = \frac{c}{a}x - a$, sol kolda $(x \leq -a)$ $|\,PF_1\,| = a - \frac{c}{a}x$ olur.

İspat.
Teorem 19.2 ispatının ikinci adımında $|\,PF_1\,|^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2$ ve $|\,PF_2\,|^2 = \left(\frac{c}{a}x + a\right)^2$ bulundu. Uzaklıklar negatif olmadığından karekök alınca mutlak değerli ifadeler çıkar. İşaretler de aynı yerde incelendi: $x \geq a$ iken $\frac{c}{a}x - a > 0$, $x \leq -a$ iken $\frac{c}{a}x - a < 0$'dır.
■

Standart denklem hiperbolün biçimi hakkında hemen bilgi verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç 19.2 (Simetri ve iki kol). $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *hiperbolü*

1. X*-eksenine,* Y*-eksenine ve başlangıç noktasına göre simetriktir;*
2. $-a < x < a$ *şeridinde hiç noktası olmayan, biri* $x \geq a$ *yarı düzleminde (**sağ kol**), öteki* $x \leq -a$ *yarı düzleminde (**sol kol**) duran iki parçadan oluşur;*
3. Y*-eksenini kesmez.*

> ***İspat.***
> *Denklemde yalnız* x^2 *ve* y^2 *geçer. Bu yüzden* (x, y) *denklemi sağlıyorsa* $(x, -y)$, $(-x, y)$ *ve* $(-x, -y)$ *de sağlar; bunlar sırasıyla* X*-eksenine,* Y*-eksenine ve başlangıç noktasına göre simetrik noktalardır.*
> *Denklemden* $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{y^2}{b^2} \geq 1$ *olduğundan her noktada* $\mid x \mid \geq a$*'dır. Demek ki* $-a < x < a$ *şeridinde nokta yoktur; özellikle* $x = 0$ *doğrusu, yani* Y*-ekseni hiperbolü kesmez. Öte yandan her* x *(*$\mid x \mid \geq a$*) için* $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ *iki (ya da* $\mid x \mid = a$ *iken bir) nokta verir; böylece iki yarı düzlemin her birinde eğrinin bir parçası vardır.*
> ■

19.3 Asimptotlar

Hiperbolün kolları sonsuza uzanır. Uzaklara gittikçe bir kolun bir parçası, merkezden geçen bir doğruya gittikçe daha çok yaklaşır. Bu doğrular hiperbolü çizmenin anahtarıdır.

Tanım 19.8 (Asimptot). Bir hiperbolün merkezinden geçen ve hiperbolün kollarının sonsuzda yaklaştığı doğrulara, yani bir kol parçasının $y = f(x)$ grafiği olarak yazıldığında bu grafiğin eğik asimptotu olan doğrulara hiperbolün **asimptotları** denir.

Yani asimptot, kolun sonsuzda "teğet olduğu" doğrudur: eğri ona hiçbir zaman değmez ama aradaki fark sıfıra gider. Analizden hatırlayalım: $y = f(x)$ grafiğinin $x \to \infty$ iken eğik asimptotu, limitler var olduğunda

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad n = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - mx \big)$$

olmak üzere $y = mx + n$ doğrusudur.

Teorem 19.3 (Hiperbolün asimptotları). $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *hiperbolünün asimptotları*

$$y = \frac{b}{a}\,x \qquad \text{ve} \qquad y = -\frac{b}{a}\,x$$

doğrularıdır.

> ***İspat.***
> ***Adım 1: kolları fonksiyon olarak yazmak.*** *Denklemden*
>
> $$y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$
>
> *bulunur. Önce sağ kolun üst yarısını, yani* $x \geq a$ *için* $f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ *fonksiyonunu inceleyelim.*
> ***Adım 2: eğim.*** $x > 0$ *iken* $\sqrt{x^2} = x$ *olduğundan*
>
> $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}\cdot\frac{1}{x}\sqrt{x^2\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = \frac{b}{a}\end{aligned}$$
>
> *olur. Demek ki* $m_1 = \dfrac{b}{a}$*'dır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: kesen. *Eşleniğiyle genişletelim:*

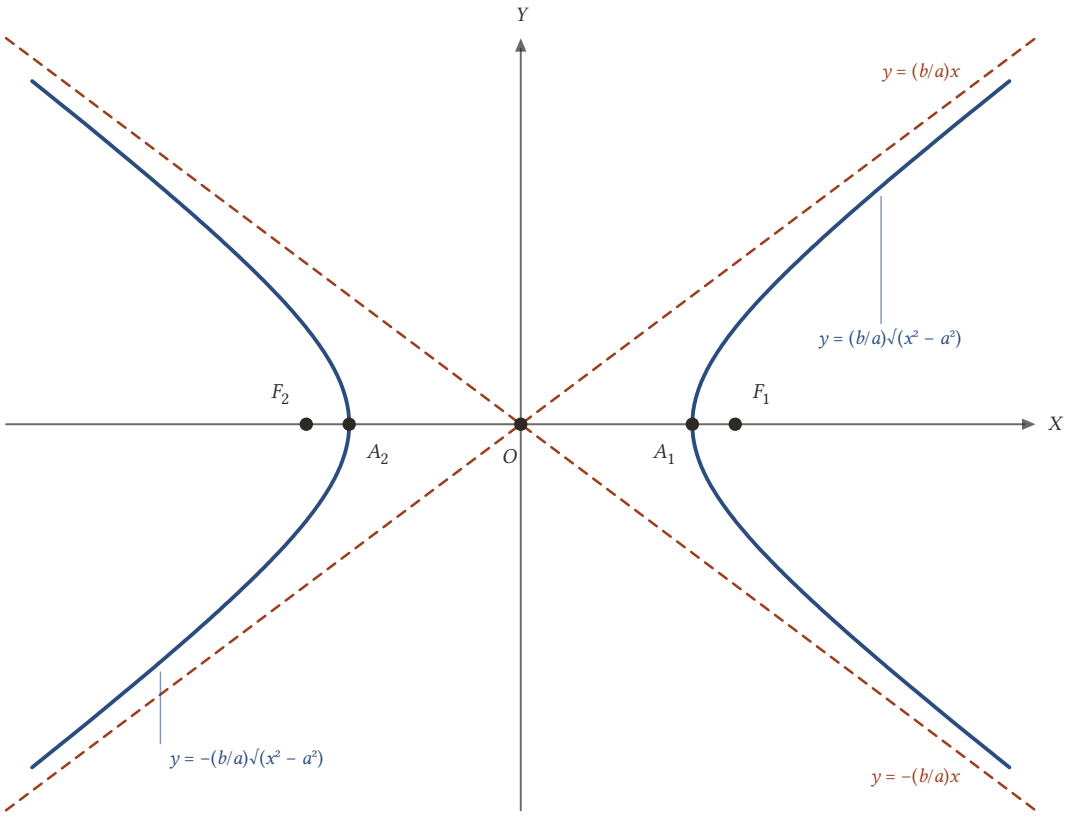
$$\begin{aligned} f(x) - \frac{b}{a}x &= \frac{b}{a}\left(\sqrt{x^2-a^2} - x\right) \\ &= \frac{b}{a}\cdot\frac{(x^2-a^2)-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} \\ &= \frac{b}{a}\cdot\frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}. \end{aligned}$$

$x \geq a$ iken payda $\sqrt{x^2-a^2}+x \geq x > 0$ olduğundan

$$-\frac{a^2}{x} \leq \frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} \leq 0$$

dır. Sol taraf $x \to \infty$ iken 0'a gider; sıkıştırma teoreminden ortadaki ifade de 0'a gider. Böylece $n_1 = 0$ ve sağ kolun üst yarısının asimptotu $y = \frac{b}{a}x$'tir.

Adım 4: öteki parçalar. *Sağ kolun alt yarısı $-f(x)$ grafiğidir; aynı hesap $m_2 = -\frac{b}{a}$ ve $n_2 = 0$ verir, yani asimptotu $y = -\frac{b}{a}x$'tir. Sol kolun parçaları sağ koldakilerin başlangıç noktasına göre simetriğidir (Sonuç 19.2); başlangıca göre simetri, orijinden geçen bir doğruyu kendine götürdüğünden sol kolun asimptotları da aynı iki doğrudur. İki doğru merkezden, yani O'dan geçer.*



Şekil 19.3: Kollar uzaklaştıkça merkezden geçen iki asimptota yaklaşır.

■

Asimptotlar kolların "yönünü" verir, ama kollara hiç değmez.

 CC BY-NC-SA 4.0

Sonuç 19.3 (Asimptotlar hiperbolü kesmez). *$y = \pm\frac{b}{a}x$ asimptotlarının $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolüyle ortak noktası yoktur. Ayrıca hiperbolün bütün noktaları, iki asimptotun ayırdığı dört açısal bölgeden X-eksenini içeren ikisinde, yani $|y| < \frac{b}{a}|x|$ bölgesinde bulunur.*

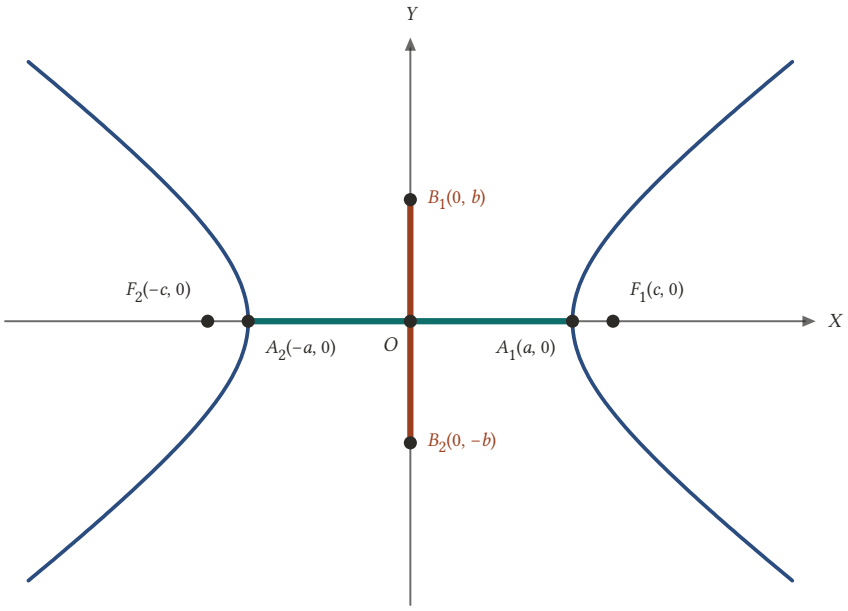
> ***İspat.***
> *$y = \pm\frac{b}{a}x$ denklemde yerine yazılırsa sol taraf $\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$ olur; $0 = 1$ olamayacağından ortak nokta yoktur.*
> *Hiperbolün her noktasında $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 < \frac{x^2}{a^2}$ olduğundan $|y| < \frac{b}{a}|x|$'tir.*
> ■

19.4 Yedek Eksen ve Hiperbolü Çizmek

Elipste iki eksen vardı. Hiperbolde asal eksen odaklardan geçer; ona dik olan ikinci eksen ise hiperbolü kesmez ama b sayısına geometrik bir anlam verir.

Tanım 19.9 (Yedek eksen). Hiperbolün merkezinde asal eksene dik olan ve uç noktaları merkezden $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ birim uzakta bulunan doğru parçasına hiperbolün **yedek ekseni** denir.

Yani $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünde yedek eksen, uçları $B_1(0, b)$ ve $B_2(0, -b)$ olan $[B_1B_2]$ doğru parçasıdır; uzunluğu $2b$'dir. Asal eksen uzunluğu ise $|A_1A_2| = 2a$'dır. Yedek eksenin uçları hiperbolün noktaları değildir, çünkü hiperbol Y-eksenini kesmez (Sonuç 19.2).



Şekil 19.4: Asal eksen uzunluğu $2a$, yedek eksen uzunluğu $2b$; B_1 ve B_2 hiperbolün üzerinde değildir.

Yedek eksen, asimptotları çizmenin en pratik yolunu verir.

Önerme 19.2 (Asimptotlar temel dikdörtgenin köşegenleridir). *Kenarları eksenlere paralel olan ve köşeleri $(\pm a, \pm b)$ noktaları olan dikdörtgene hiperbolün **temel dikdörtgeni** diyelim. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünün asimptotları bu dikdörtgenin köşegenlerini taşıyan doğrulardır. Ayrıca dikdörtgenin köşegen uzunluğunun yarısı c'dir.*

> ***İspat.***

 CC BY-NC-SA 4.0

(a,b) ile $(-a,-b)$ köşelerinden geçen doğru orijinden geçer ve eğimi $\frac{b}{a}$'dır; bu $y=\frac{b}{a}x$ asimptotudur. $(-a,b)$ ile $(a,-b)$ köşelerinden geçen doğru orijinden geçer ve eğimi $-\frac{b}{a}$'dır; bu da $y=-\frac{b}{a}x$ asimptotudur (Teorem 19.3). Köşegenin yarısı, O ile (a,b) arasındaki uzaklıktır: $\sqrt{a^2+b^2}=c$.
■

Son cümle, odakları pergelle bulmayı da sağlar: merkezi O, yarıçapı temel dikdörtgenin yarı köşegeni olan çember asal ekseni tam odaklarda keser.

Hiperbolü 4 adımda çizmek

1. Standart denklemden a'yı ve b'yi okuyun; köşeleri $(\pm a,0)$ ve yedek eksenin uçlarını $(0,\pm b)$ işaretleyin.
2. Köşeleri $(\pm a,\pm b)$ olan temel dikdörtgeni kesikli çizin.
3. Dikdörtgenin köşegenlerini uzatın; bunlar $y=\pm\frac{b}{a}x$ asimptotlarıdır.
4. Kolları köşelerden başlatıp dışa doğru, asimptotlara yaklaşacak biçimde çizin; odakları $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ile $(\pm c,0)$'a koyun.

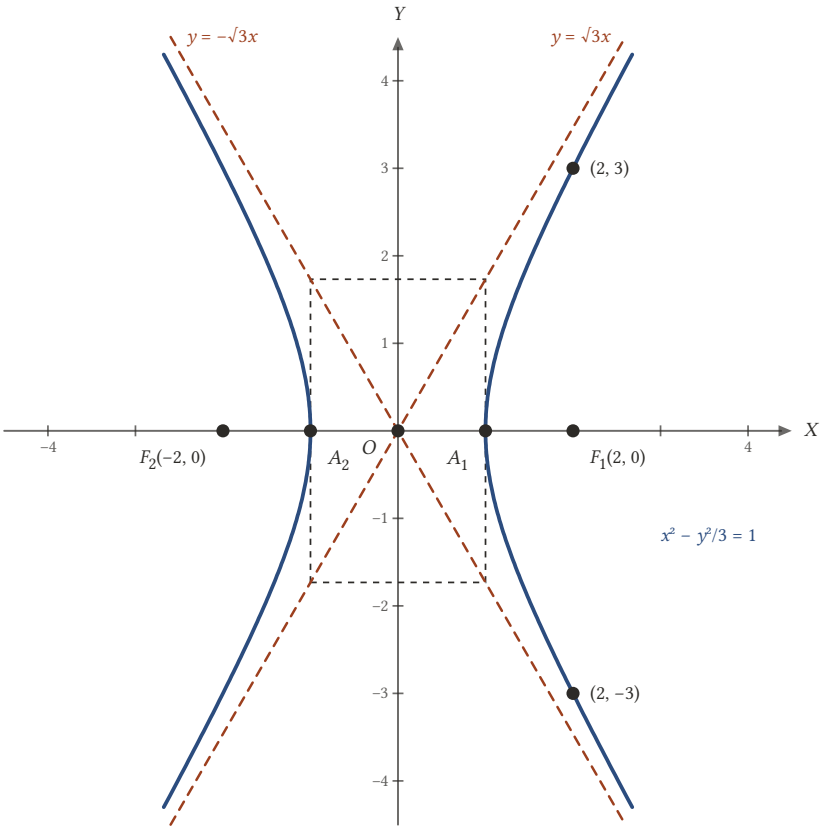
Örnek 19.1 (Bir hiperbolü çizmek). $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ hiperbolünü çiziniz.

Çözüm.
Adım 1: a ve b. Denklem $\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=1$ biçimindedir; $a=1$ ve $b=\sqrt{3}$'tür. Köşeler $A_1(1,0)$ ve $A_2(-1,0)$'dır.
Adım 2: odaklar. $c^2=a^2+b^2=1+3=4$ olduğundan $c=2$'dir; odaklar $F_1(2,0)$ ve $F_2(-2,0)$'dır.
Adım 3: asimptotlar. $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$ olduğundan asimptotlar

$$y=\sqrt{3}\,x \qquad \text{ve} \qquad y=-\sqrt{3}\,x$$

doğrularıdır. Temel dikdörtgenin köşeleri $(\pm 1,\pm\sqrt{3})$'tür.
Adım 4: kollar. Sağ kol A_1'den başlar ve $y=\pm\sqrt{3}\sqrt{x^2-1}$ ile verilir; örneğin $x=2$ iken $y=\pm 3$ olur. Sol kol bunun Y-eksenine göre simetriğidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.5: $x^2 - y^2/3 = 1$ hiperbolü: köşeler $(\pm 1, 0)$, odaklar $(\pm 2, 0)$, asimptotlar $y = \pm\sqrt{3}x$.

■

19.5 Odakları Y-Ekseninde ya da Merkezi Kaymış Hiperbol

Hiperbolü her zaman asal ekseni X-ekseni olacak biçimde yerleştirmek zorunda değiliz. Asal eksen Y-ekseni olursa x ile y'nin rolleri değişir.

Önerme 19.3 (Odakları Y-ekseninde olan hiperbol). *Merkezi $O(0,0)$, odakları $F_1(0,c)$ ve $F_2(0,-c)$ olan ve $\big|\,|PF_1| - |PF_2|\,\big| = 2a$ $(0 < a < c)$ koşuluyla tanımlanan hiperbolün denklemi, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ olmak üzere*

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

dir. Bu hiperbolün köşeleri $A_1(0,a)$ ve $A_2(0,-a)$, yedek ekseninin uçları $B_1(b,0)$ ve $B_2(-b,0)$, yedek eksen uzunluğu $2b$, asimptotları da

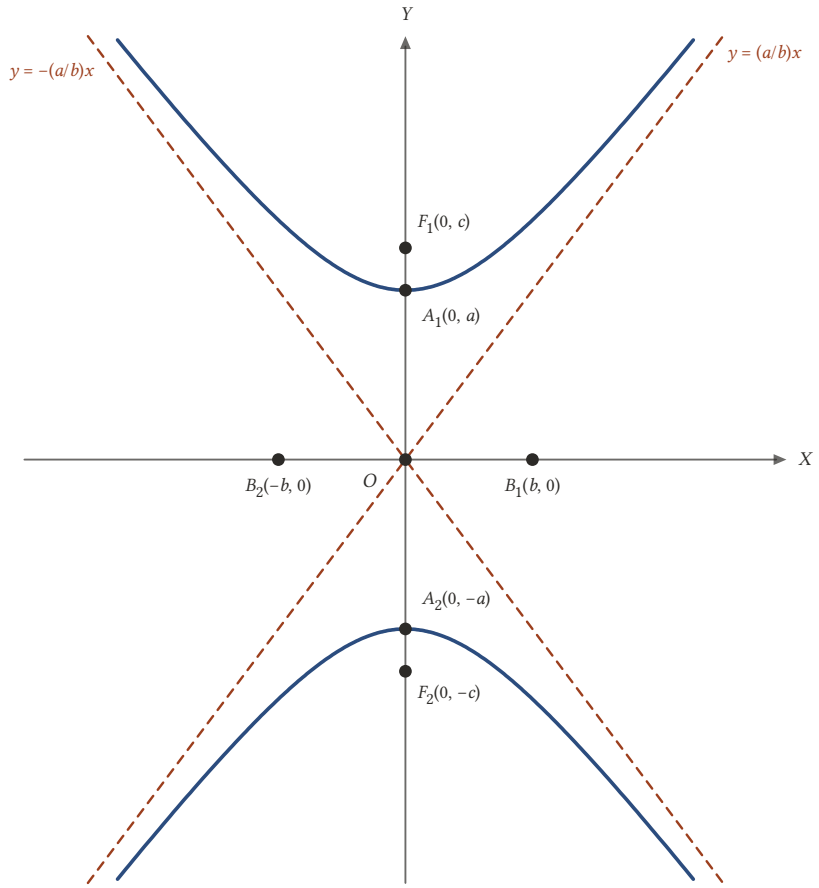
$$y = \frac{a}{b}\,x \qquad \text{ve} \qquad y = -\frac{a}{b}\,x$$

doğrularıdır.

İspat.
$(x,y) \mapsto (y,x)$ yer değiştirmesi, yani $y = x$ doğrusuna göre yansıma, uzaklıkları korur ve $(0,\pm c)$ odaklarını $(\pm c, 0)$ noktalarına götürür. Bu yüzden bir $P(x,y)$ noktası verilen hiperbolün üzerindedir ancak ve ancak $P'(y,x)$ noktası odakları $(\pm c, 0)$ olan hiperbolün üzerindedir. Teorem 19.2 gereğince bu

 CC BY-NC-SA 4.0

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ *demektir. Köşeler, yedek eksenin uçları ve asimptotlar da aynı yer değiştirmeyle* $(\pm a, 0) \mapsto (0, \pm a)$, $(0, \pm b) \mapsto (\pm b, 0)$ *ve* $y = \pm\frac{b}{a}x \mapsto x = \pm\frac{b}{a}y$, *yani* $y = \pm\frac{a}{b}x$ *olarak elde edilir.*



Şekil 19.6: Odakları Y*-ekseninde olan hiperbol: kollar yukarı ve aşağı açılır.*

■

Örnek 19.2 (Kolları yukarı ve aşağı açılan hiperbol). $9y^2 - 16x^2 = 144$ hiperbolünün köşelerini, odaklarını ve asimptotlarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: standart biçim. İki tarafı 144'e bölelim:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

Pozitif işaretli terim y^2'li terim olduğundan asal eksen Y-eksenidir; $a^2 = 16$, $b^2 = 9$, yani $a = 4$ ve $b = 3$'tür.
Adım 2: köşeler ve odaklar. Köşeler $A_1(0, 4)$ ve $A_2(0, -4)$'tür. $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$ olduğundan $c = 5$ ve odaklar $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$'tir.
Adım 3: asimptotlar. Önerme 19.3 gereğince asimptotlar $y = \pm\frac{a}{b}x$, yani

$$y = \frac{4}{3}x \qquad \text{ve} \qquad y = -\frac{4}{3}x$$

doğrularıdır. Kontrol olarak denklemde $9y^2 = 16x^2$ yazıp sağ taraftaki 144'ü yok sayarsak aynı doğrular çıkar.
■

Son kontroldeki gözlem genel bir kısayoldur: standart denklemde sağ taraftaki 1 yerine 0 yazılırsa $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, yani $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0$ olur ve bu tam iki asimptotun birleşimidir.
Merkez başlangıç noktasında değilse eksenleri ötelemek yeterlidir.

Önerme 19.4 (Merkezi başlangıçta olmayan hiperbol). *Merkezi $M(m_1, m_2)$ olan ve asal ekseni X-eksenine paralel olan hiperbolün denklemi*

$$\frac{(x-m_1)^2}{a^2} - \frac{(y-m_2)^2}{b^2} = 1$$

dir. Odakları $(m_1 \pm c, m_2)$, köşeleri $(m_1 \pm a, m_2)$ ve asimptotları

$$y - m_2 = \pm\frac{b}{a}(x - m_1)$$

doğrularıdır. Asal eksen Y-eksenine paralelse x ile y'nin rolleri Önerme 19.3 içindeki gibi değişir.

İspat.
Eksenleri $\overrightarrow{OM} = (m_1, m_2)$ vektörü kadar öteleyelim. Teorem 16.4 gereğince yeni koordinatlar $x' = x - m_1$, $y' = y - m_2$'dir. Yeni $X'Y'$ sisteminde hiperbolün merkezi başlangıç noktası, asal ekseni de X'-eksenidir; öteleme uzaklıkları koruduğundan hiperbolün a, b, c sayıları değişmez. Teorem 19.2 gereğince yeni sistemde denklem $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$'dir; bu sistemde odakların koordinatları $(\pm c, 0)$, köşelerinki $(\pm a, 0)$, asimptotlar da $y' = \pm\frac{b}{a}x'$'tür. $x' = x - m_1$, $y' = y - m_2$ yazılınca iddialar elde edilir.
■

Örnek 19.3 (Tam kareye tamamlayarak merkezi bulmak). $9x^2 - 4y^2 - 36x - 8y - 4 = 0$ denkleminin bir hiperbol belirttiğini gösteriniz; merkezini, köşelerini, odaklarını ve asimptotlarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: tam kareye tamamlama. x'li ve y'li terimleri gruplayalım:

$$\begin{aligned} 9(x^2 - 4x) - 4(y^2 + 2y) &= 4 \\ 9(x-2)^2 - 36 - 4(y+1)^2 + 4 &= 4 \\ 9(x-2)^2 - 4(y+1)^2 &= 36. \end{aligned}$$

İki tarafı 36'ya bölersek

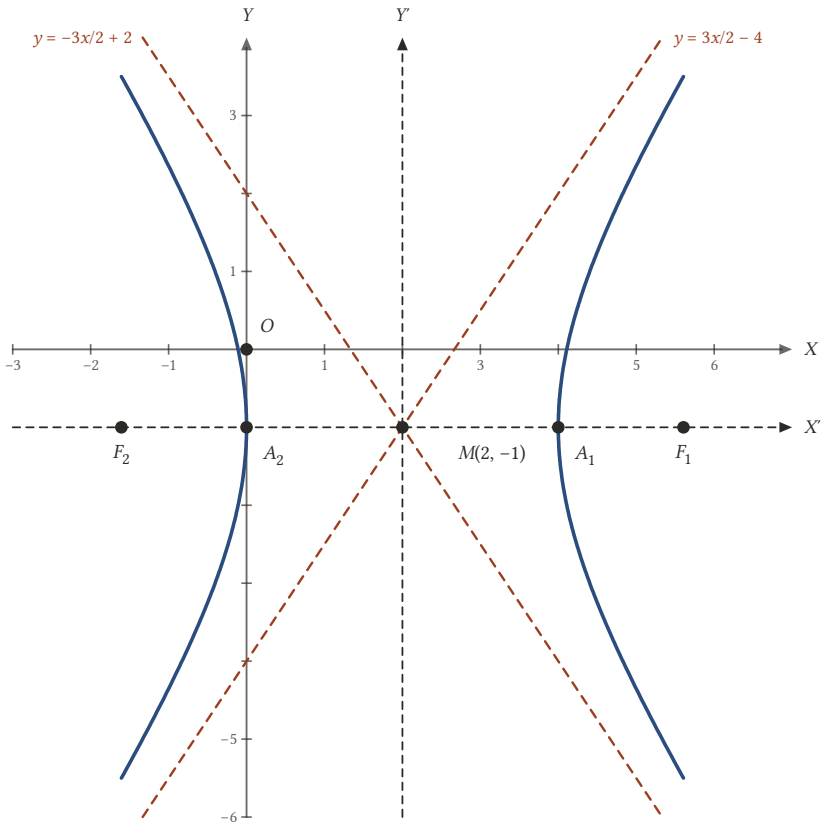
$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

bulunur. Bu, Önerme 19.4 içindeki biçimdir: $M(2,-1)$, $a = 2$, $b = 3$.
Adım 2: köşeler ve odaklar. Köşeler $(2 \pm 2, -1)$, yani $(4,-1)$ ve $(0,-1)$'dir. $c^2 = 4 + 9 = 13$ olduğundan odaklar $\left(2 + \sqrt{13}, -1\right)$ ve $\left(2 - \sqrt{13}, -1\right)$'dir.
Adım 3: asimptotlar. $y + 1 = \pm\frac{3}{2}(x-2)$, yani

$$y = \frac{3}{2}x - 4 \qquad \text{ve} \qquad y = -\frac{3}{2}x + 2$$

doğrularıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.7: Merkezi $M(2,-1)$ olan hiperbol: öteleme ile $x'^2/4 - y'^2/9 = 1$ olur.

■

19.6 İkizkenar Hiperbol

a ile b eşit olduğunda temel dikdörtgen bir kareye döner ve hiperbol özellikle simetrik bir biçim alır.

Tanım 19.10 (İkizkenar hiperbol). Asal eksen uzunluğu ile yedek eksen uzunluğu eşit, yani $a = b$ olan hiperbole **ikizkenar hiperbol** (eşkenar hiperbol) denir.

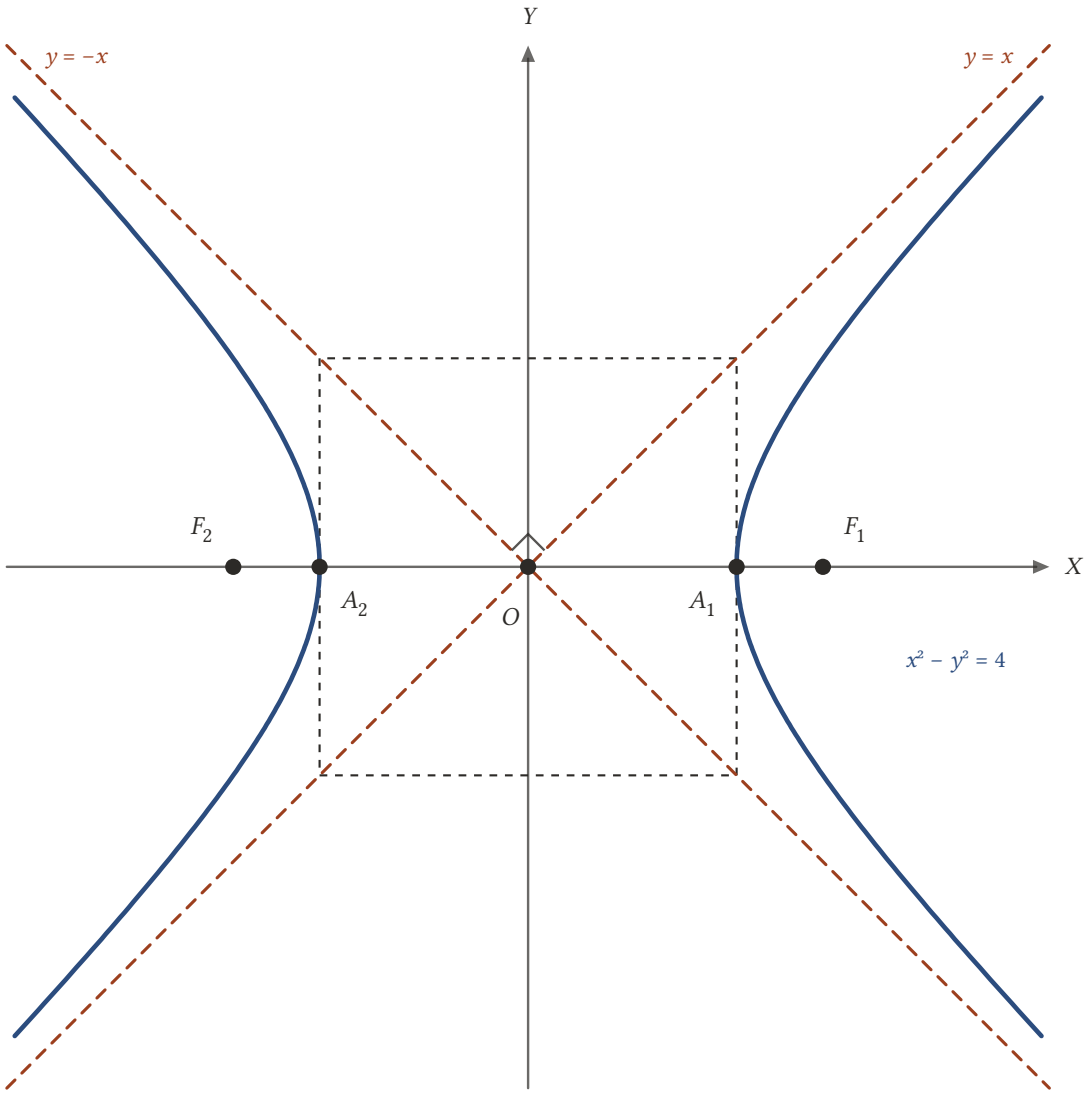
Yani ikizkenar hiperbolün standart denklemi $x^2 - y^2 = a^2$ biçimindedir; temel dikdörtgeni kenarı $2a$ olan bir karedir.

Sonuç 19.4 (İkizkenar hiperbolün asimptotları). *Bir ikizkenar hiperbolün, standart konumda, asimptotları $y = x$ ve $y = -x$ doğrularıdır; bu iki asimptot birbirine diktir.*

İspat.
$a = b$ iken Teorem 19.3 içindeki $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ doğruları $y = \pm x$ olur. Eğimlerin çarpımı $1 \cdot (-1) = -1$ olduğundan doğrular diktir.
■

Asimptotları dik olduğu için ikizkenar hiperbolü $\dfrac{\pi}{4}$ döndürüp asimptotlarını koordinat eksenleri yapabiliriz. Döndürme ve Paralel Eksenler bölümündeki Örnek 17.8 tam bunu tersinden gösterir: $xy = 1$ eğrisi, eksenler $\dfrac{\pi}{4}$ döndürülünce $x'^2 - y'^2 = 2$ olur. Demek ki $xy = 1$, asimptotları X- ve Y-eksenleri olan, $a = b = \sqrt{2}$ olan bir ikizkenar hiperboldür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.8: İkizkenar hiperbolde temel dikdörtgen karedir ve asimptotlar birbirine diktir.

19.7 Hiperbolün Parametresi

Elipste olduğu gibi, odaktan asal eksene dik çizilen kiriş hiperbolün ne kadar "açık" olduğunu ölçer.

Tanım 19.11 (Hiperbolün parametresi). $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünün $F_1(c, 0)$ odağından asal eksene çizilen dikmenin hiperbolü kestiği noktalar M_1 ve M_2 olsun. $|\, M_1M_2 \,|$ uzunluğuna hiperbolün **parametresi** denir.

Yani parametre, odaktan geçen ve asal eksene dik olan kirişin uzunluğudur. Hiperbol Y-eksenine göre simetrik olduğundan öteki odak da aynı uzunlukta bir kiriş verir.

Teorem 19.4 (Parametrenin değeri). $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *hiperbolünün parametresi*

$$|\, M_1M_2 \,| = \frac{2b^2}{a}$$

dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

İspat.
$F_1(c,0)$'dan asal eksene (X-eksenine) dik çizilen doğru $x=c$ doğrusudur. Bu doğrunun hiperbolle kesişim noktaları $M_1(c,y_1)$ ve $M_2(c,-y_1)$ olsun ($y_1>0$). M_1 hiperbolde olduğundan ve $c^2-a^2=b^2$ olduğundan

$$y_1=\frac{b}{a}\sqrt{c^2-a^2}=\frac{b}{a}\cdot b=\frac{b^2}{a}$$

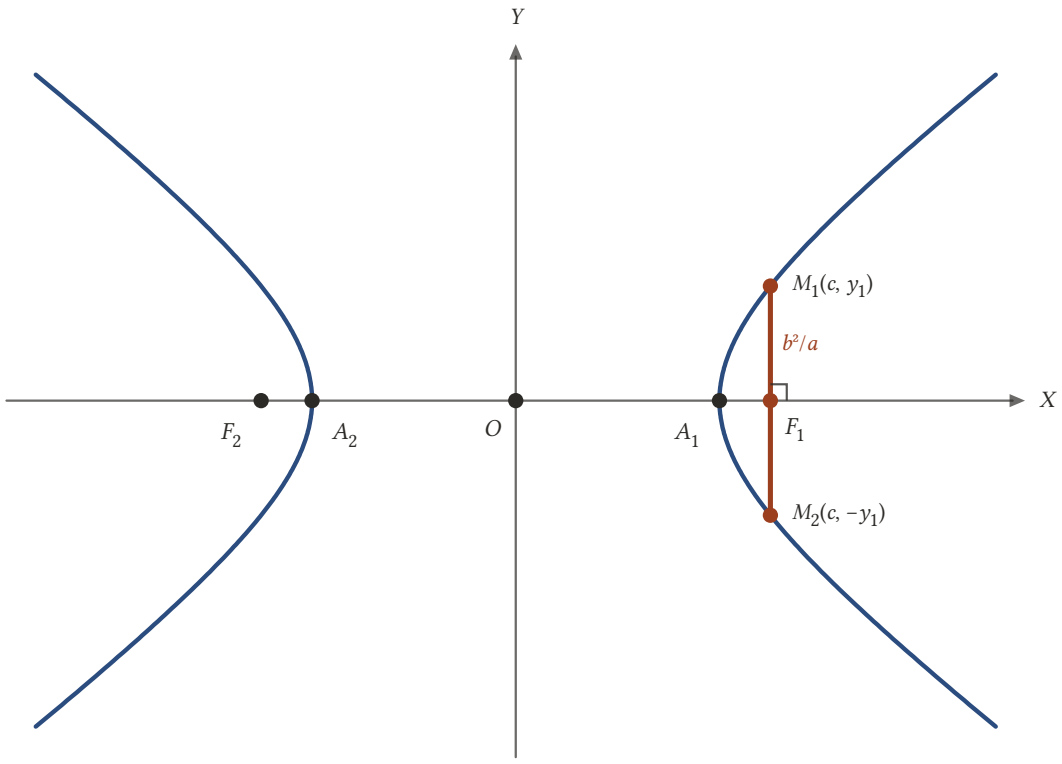
bulunur. M_1 ile F_1'in apsisleri aynı olduğundan

$$|\ M_1F_1\ |=\sqrt{(c-c)^2+(y_1-0)^2}=y_1$$

dir. Simetriden $|\ M_2F_1\ |=y_1$ olur ve

$$|\ M_1M_2\ |=2\,|\ M_1F_1\ |=\frac{2b^2}{a}$$

elde edilir.



Şekil 19.9: Odaktan asal eksene dik kiriş: $|M_1M_2| = 2b^2/a$.

■

19.8 Teğet ve Normal

Hiperbolün bir noktasındaki teğeti bulmak için kolun o noktanın çevresindeki parçasını bir fonksiyonun grafiği olarak düşünür ve türev alırız. $y=f(x)$ grafiğinin x_0'daki teğetinin eğimi $m=f'(x_0)$'dır. y'yi x'in fonksiyonu sayıp denklemin iki tarafının türevini alırken zincir kuralından $(y^2)'=2yy'$ olduğunu kullanacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 19.5 (Bir noktadaki teğetin denklemi). $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *hiperbolünün bir* $P(x_0,y_0)$ *noktasındaki teğetinin* (T_d) *denklemi*

$$\frac{x_0\,x}{a^2}-\frac{y_0\,y}{b^2}=1$$

dir.

İspat.
Adım 1: $y_0\neq 0$ ***durumu.*** *Denklemin iki tarafının* x*'e göre türevini alalım:*

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y\,y'}{b^2}=0\Rightarrow y'=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Buna göre P*'deki teğetin eğimi* $m_{T_d}=\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x_0}{y_0}$ *ve teğetin denklemi*

$$y-y_0=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\,(x-x_0)$$

dir. İki tarafı $\dfrac{y_0}{b^2}$ *ile çarpıp düzenleyelim:*

$$\frac{y_0\,y}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{x_0\,x}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}\Rightarrow\frac{x_0\,x}{a^2}-\frac{y_0\,y}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}.$$

P *hiperbolde olduğundan sağ taraf* 1*'dir.*
Adım 2: $y_0=0$ ***durumu.*** *O zaman* P *bir köşedir,* $x_0=\pm a$*'dır. Köşenin çevresinde kolu* y*'nin fonksiyonu olarak yazalım. Denklemden* $x^2=a^2\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ *olduğundan sağ kolda* $+$*, sol kolda* $-$ *işaretiyle*

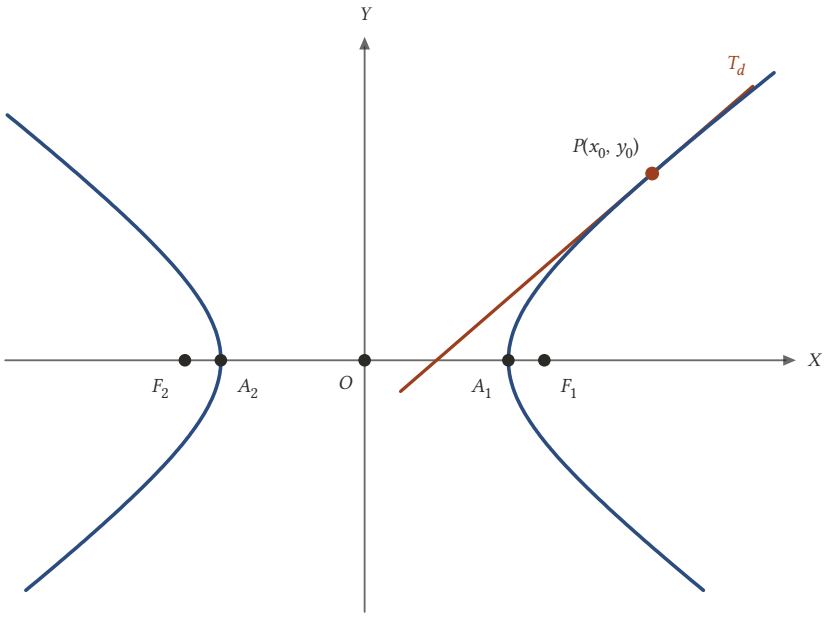
$$x=\pm a\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}$$

bulunur. Türev alırsak

$$\frac{dx}{dy}=\pm\frac{a\,y}{b^2\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2}}}$$

olur ve $y=0$*'da* $\dfrac{dx}{dy}=0$*'dır. Yani köşede* x*,* y*'ye göre değişmez; teğet* Y*-eksenine paraleldir, yani düşeydir ve köşeden geçtiği için* $x=\pm a$ *doğrusudur. Formül de* $\dfrac{\pm a\,x}{a^2}=1$*, yani* $x=\pm a$ *verir. Böylece formül bu durumda da doğrudur.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.10: P(x$_o$, y$_o$) *noktasındaki teğet:* x$_o$x/a^2 − y$_o$y/b^2 = 1.

■

Formülü hatırlamanın kolay yolu: standart denklemde x^2 yerine x_0x, y^2 yerine y_0y yazmak.

Örnek 19.4 (Verilen noktadaki teğet). $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ hiperbolünün $P\left(5, \frac{16}{3}\right)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: nokta hiperbolde mi? $\frac{25}{9} - \frac{256/9}{16} = \frac{25}{9} - \frac{16}{9} = 1$ olduğundan P hiperbolün üzerindedir.
Adım 2: formül. $a^2 = 9, b^2 = 16, x_0 = 5, y_0 = \frac{16}{3}$ için Teorem 19.5

$$\frac{5x}{9} - \frac{(16/3)\,y}{16} = 1 \Rightarrow \frac{5x}{9} - \frac{y}{3} = 1$$

verir. İki tarafı 9 ile çarparsak teğet $5x - 3y = 9$ doğrusudur.
Adım 3: kontrol. $5 \cdot 5 - 3 \cdot \frac{16}{3} = 25 - 16 = 9$ olduğundan doğru P'den geçer.
■

Teğet formülü, hiperbolün dışındaki bir noktadan çizilen teğetleri bulmakta da işe yarar: değme noktası (x_0, y_0) bilinmeyen alınır ve teğetin verilen noktadan geçmesi istenir.

Örnek 19.5 (Bir noktadan çizilen teğetler). $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolüne $P(1, 0)$ noktasından çizilen teğetlerin denklemlerini ve değme noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: değme noktasının apsisi. Değme noktası (x_0, y_0) olsun. Bu noktadaki teğet $\frac{x_0x}{4} - \frac{y_0y}{9} = 1$'dir. Teğet $P(1, 0)$'dan geçtiğinden

$$\frac{x_0 \cdot 1}{4} - \frac{y_0 \cdot 0}{9} = 1 \Rightarrow x_0 = 4$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.
Adım 2: değme noktasının ordinatı. $(4, y_0)$ hiperbolde olduğundan

$$\frac{16}{4} - \frac{y_0^2}{9} = 1 \Rightarrow y_0^2 = 27 \Rightarrow y_0 = \pm 3\sqrt{3}$$

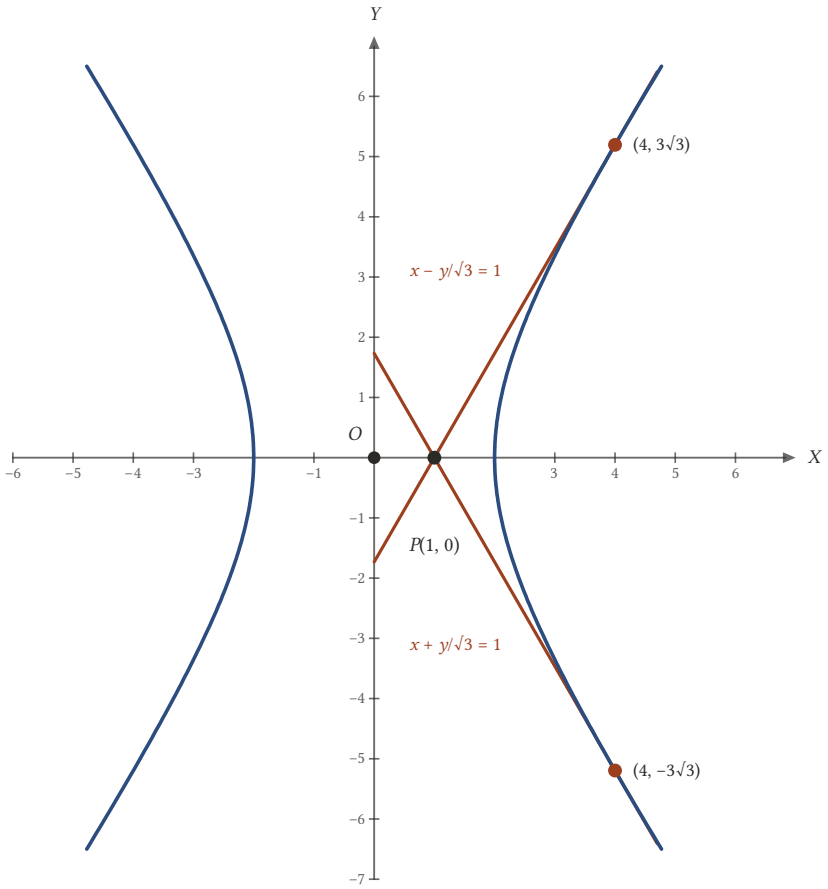
bulunur. Değme noktaları $\left(\, 4, 3\sqrt{3} \,\right)$ ve $\left(\, 4, -3\sqrt{3} \,\right)$'tür.
Adım 3: teğetler. $\left(\, 4, 3\sqrt{3} \,\right)$ için teğet

$$\frac{4x}{4} - \frac{3\sqrt{3}\,y}{9} = 1 \Rightarrow x - \frac{y}{\sqrt{3}} = 1$$

ve $\left(\, 4, -3\sqrt{3} \,\right)$ için teğet

$$\frac{4x}{4} + \frac{3\sqrt{3}\,y}{9} = 1 \Rightarrow x + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1$$

doğrusudur. İkisi de $x = 1, y = 0$ için sağlanır, yani P'den geçer.



Şekil 19.11: $P(1, 0)$'dan hiperbole çizilen iki teğet, sağ kola $(4, \pm 3\sqrt{3})$'te değer.

■

Bir noktadaki teğete o noktada dik olan doğru, eğrinin o noktadaki **normali**dir. Teğet formülünden normali hemen yazabiliriz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 19.5 (Bir noktadaki normalin denklemi). $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ *hiperbolünün bir* $P(x_0,y_0)$ *noktasındaki normalinin denklemi*

$$a^2y_0\,x+b^2x_0\,y=c^2x_0y_0$$

dir. $y_0\neq 0$ *ise bu denklem*

$$\frac{a^2x}{x_0}+\frac{b^2y}{y_0}=c^2$$

biçiminde de yazılabilir; $y_0=0$ *ise normal* X*-eksenidir.*

İspat.
Teğet $\dfrac{x_0}{a^2}x-\dfrac{y_0}{b^2}y=1$ *doğrusudur; katsayılarından oluşan* $\left(\dfrac{x_0}{a^2},-\dfrac{y_0}{b^2}\right)$ *vektörü teğete diktir. Normal,* P*'den geçen ve bu vektöre paralel olan doğrudur. Bu vektörün* a^2b^2 *katı olan* $(b^2x_0,-a^2y_0)$ *vektörü de aynı doğrultudadır. Bu vektöre paralel ve* P*'den geçen doğrunun noktaları için* $(x-x_0,y-y_0)$ *vektörü* $(b^2x_0,-a^2y_0)$ *ile paraleldir, yani*

$$-a^2y_0\,(x-x_0)-b^2x_0\,(y-y_0)=0$$

olur. Düzenlersek

$$a^2y_0\,x+b^2x_0\,y=a^2x_0y_0+b^2x_0y_0=c^2x_0y_0$$

bulunur; burada $a^2+b^2=c^2$ *kullanıldı.* $y_0\neq 0$ *ise* $|\,x_0\,|\geq a>0$ *olduğundan iki taraf* x_0y_0*'a bölünebilir ve ikinci biçim çıkar.* $y_0=0$ *ise denklem* $b^2x_0\,y=0$*, yani* $y=0$ *olur.*
■

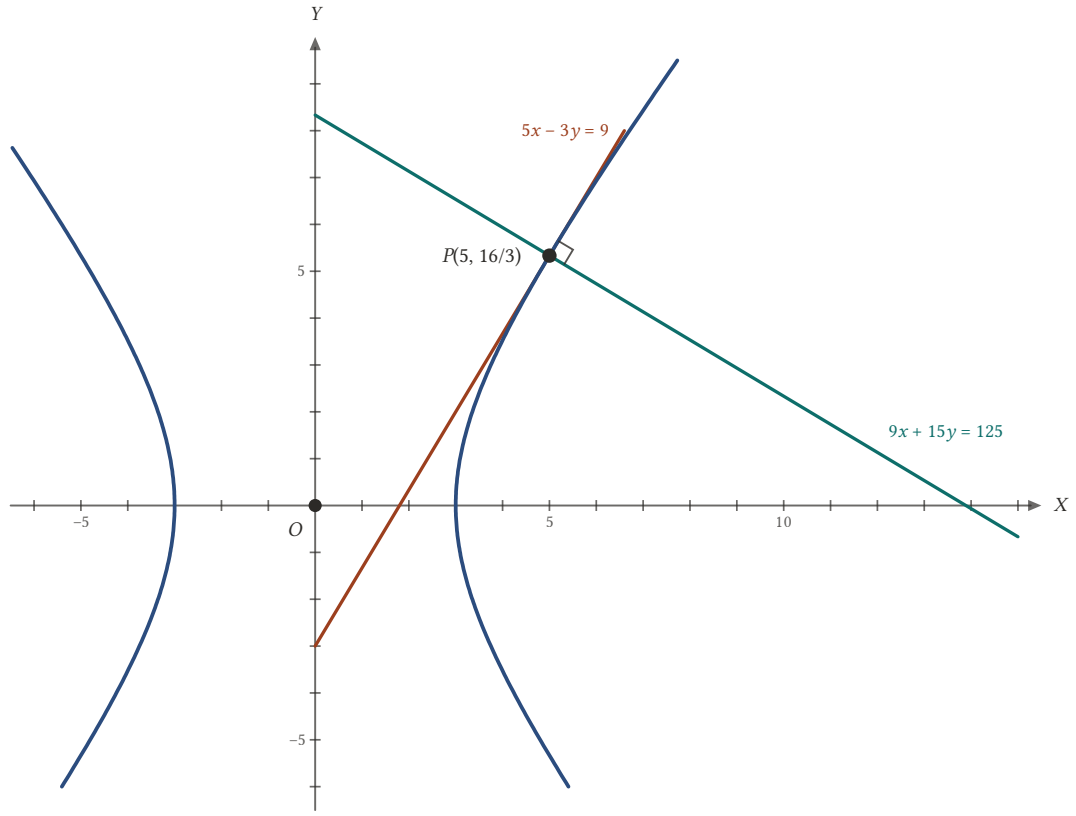
Örnek 19.6 (Verilen noktadaki normal). $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ hiperbolünün $P\left(5,\dfrac{16}{3}\right)$ noktasındaki normalinin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: veriler. $a^2=9$, $b^2=16$ ve $c^2=9+16=25$'tir. P'nin hiperbolde olduğunu Örnek 19.4 içinde gördük.
Adım 2: formül. Önerme 19.5 içindeki ikinci biçimle

$$\frac{9x}{5}+\frac{16\,y}{16/3}=25\Rightarrow\frac{9x}{5}+3y=25$$

bulunur. 5 ile çarparsak normal $9x+15y=125$ doğrusudur.
Adım 3: kontrol. $9\cdot 5+15\cdot\dfrac{16}{3}=45+80=125$ olduğundan doğru P'den geçer. Normalin eğimi $-\dfrac{9}{15}=-\dfrac{3}{5}$, Örnek 19.4 içinde bulunan $5x-3y=9$ teğetinin eğimi $\dfrac{5}{3}$'tür; çarpımları -1 olduğundan iki doğru diktir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.12: P'deki teğet ve normal birbirine diktir.

■

19.9 Hiperbol ile Doğru

Bir doğrunun hiperbolle kaç ortak noktası olduğunu, tıpkı çemberde ve elipste olduğu gibi, doğru denklemini hiperbol denkleminde yerine yazıp çıkan ikinci dereceden denklemin diskriminantıyla anlarız. Hiperbolde bir fark vardır: asimptotlara paralel doğrularda denklemin ikinci dereceden terimi kaybolur.

Teorem 19.6 (Doğru ile hiperbolün ortak noktaları). *$\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolü ve $d : y = mx + n$ doğrusu verilsin.*

1. *$m = \pm\dfrac{b}{a}$, yani d bir asimptota paralel ise: $n \neq 0$ için d hiperbolü tek noktada keser; $n = 0$ için d asimptottur ve hiperbolle ortak noktası yoktur.*
2. *$m \neq \pm\dfrac{b}{a}$ ise:*
   - *$n^2 > a^2m^2 - b^2$ olduğunda d hiperbolü iki noktada keser;*
   - *$n^2 = a^2m^2 - b^2$ olduğunda d hiperbole teğettir;*
   - *$n^2 < a^2m^2 - b^2$ olduğunda d ile hiperbolün ortak noktası yoktur.*

İspat.
Adım 1: kesişme denklemi. *$y = mx + n$'yi $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ denkleminde yerine yazalım:*

$$b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2mnx + n^2) = a^2b^2,$$

yani

$$(b^2 - a^2m^2)\,x^2 - 2a^2mn\,x - a^2(n^2 + b^2) = 0.$$

 CC BY-NC-SA 4.0

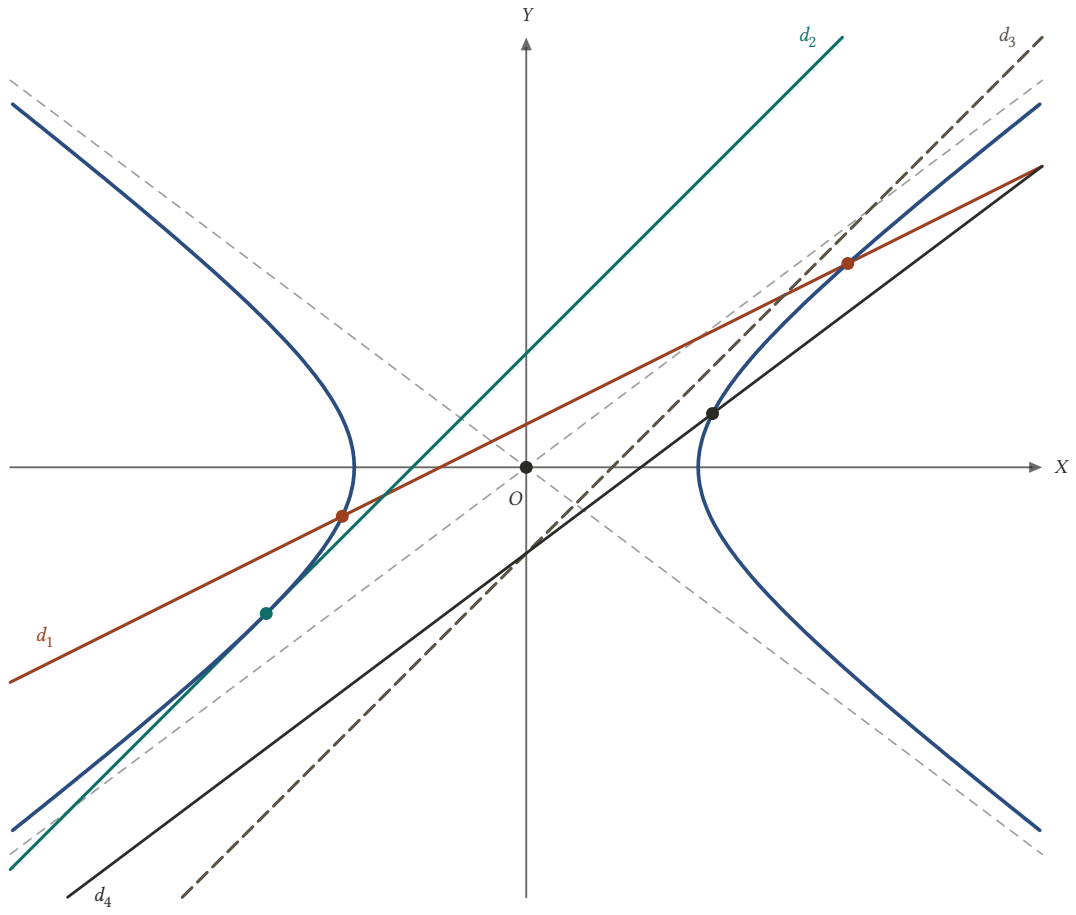
Ortak noktaların apsisleri bu denklemin kökleridir ve her apsis tek bir ortak nokta verir.

Adım 2: asimptota paralel doğru. $m = \pm\dfrac{b}{a}$ *ise* $b^2 - a^2m^2 = 0$ *olur ve denklem* $-2a^2mn\,x = a^2(n^2+b^2)$ *biçimine iner.* $n \neq 0$ *ise* $m \neq 0$ *olduğundan tek bir kök vardır.* $n = 0$ *ise sol taraf* 0*, sağ taraf* $a^2b^2 > 0$ *olur ve kök yoktur (Sonuç 19.3).*

Adım 3: diskriminant. $m \neq \pm\dfrac{b}{a}$ *ise denklem gerçekten ikinci derecedendir. Diskriminantın dörtte biri*

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{4} &= a^4m^2n^2 + a^2(b^2 - a^2m^2)(n^2+b^2)\\ &= a^2\left(\,a^2m^2n^2 + b^2n^2 + b^4 - a^2m^2n^2 - a^2b^2m^2\,\right)\\ &= a^2b^2\left(\,n^2 + b^2 - a^2m^2\,\right)\end{aligned}$$

dir. $a^2b^2 > 0$ *olduğundan* Δ*'nın işareti* $n^2 - (a^2m^2 - b^2)$*'nin işaretidir.* $\Delta > 0$ *iki farklı kök,* $\Delta = 0$ *çakışık iki kök, yani tek bir değme noktası,* $\Delta < 0$ *ise kök olmaması demektir.*



Şekil 19.13: Bir doğru hiperbolü iki noktada kesebilir (d_1)*, ona teğet olabilir* (d_2)*, onunla hiç buluşmayabilir* (d_3)*; bir asimptota paralelse tek noktada keser* (d_4)*.*

■

Teğet durumunu ayrıca kaydedelim; değme noktasını da verelim.

Sonuç 19.5 (Teğet olma koşulu). $y = mx + n$ *doğrusunun* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *hiperbolüne teğet olması için gerek ve yeter koşul*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$a^2m^2 - b^2 = n^2 \neq 0$$

olmasıdır. Bu durumda değme noktası $\left(-\frac{a^2m}{n}, -\frac{b^2}{n}\right)$*'dir. Özellikle bir teğetin eğimi* $|\ m\ | > \frac{b}{a}$*'yı sağlar.*

İspat.
Teorem 19.6 gereğince teğetlik, $m \neq \pm\frac{b}{a}$ *ve* $n^2 = a^2m^2 - b^2$ *olmasıdır.* $n^2 = a^2m^2 - b^2$ *iken* $m = \pm\frac{b}{a}$ *olması* $n = 0$ *demektir; tersine* $n \neq 0$ *ise* $a^2m^2 - b^2 = n^2 > 0$*, yani* $|\ m\ | > \frac{b}{a}$ *olur. Böylece iki koşul birlikte* $a^2m^2 - b^2 = n^2 \neq 0$*'a denktir.*
Değme noktasında çift kök

$$x = \frac{2a^2mn}{2(b^2 - a^2m^2)} = \frac{a^2mn}{-n^2} = -\frac{a^2m}{n}$$

dir; burada $b^2 - a^2m^2 = -n^2$ *kullanıldı. Ordinat*

$$y = mx + n = -\frac{a^2m^2}{n} + n = \frac{n^2 - a^2m^2}{n} = -\frac{b^2}{n}$$

olur.
■

Düşey doğrular $y = mx + n$ biçiminde yazılamaz; onlar için durum kolaydır: $x = k$ doğrusu $|\ k\ | > a$ iken hiperbolü iki noktada keser, $|\ k\ | = a$ iken köşede teğettir, $|\ k\ | < a$ iken hiperbolle buluşmaz (Sonuç 19.2).

Örnek 19.7 (Eğimi verilen teğetler). $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolünün eğimi 2 olan teğetlerini ve değme noktalarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: koşul. $a^2 = 4$, $b^2 = 9$, $m = 2$ için Sonuç 19.5

$$n^2 = a^2m^2 - b^2 = 4 \cdot 4 - 9 = 7$$

verir. $n = \sqrt{7}$ ya da $n = -\sqrt{7}$'dir; teğetler $y = 2x + \sqrt{7}$ ve $y = 2x - \sqrt{7}$ doğrularıdır.
Adım 2: değme noktaları. $n = \sqrt{7}$ için değme noktası

$$\left(-\frac{4 \cdot 2}{\sqrt{7}}, -\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = \left(-\frac{8}{\sqrt{7}}, -\frac{9}{\sqrt{7}}\right),$$

$n = -\sqrt{7}$ için $\left(\frac{8}{\sqrt{7}}, \frac{9}{\sqrt{7}}\right)$'dir.
Adım 3: kontrol. $\frac{64/7}{4} - \frac{81/7}{9} = \frac{16}{7} - \frac{9}{7} = 1$ olduğundan noktalar hiperboldedir.
Eğimi 1 olan bir teğet ise yoktur: $a^2 \cdot 1 - b^2 = 4 - 9 < 0$ olduğundan $n^2 = -5$ olamaz. Gerçekten $1 < \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$'dir; asimptotlardan daha yatık bir doğru hiperbole teğet olamaz.
■

19.10 Dış Merkezlik ve Doğrultmanlar

Elipsin ne kadar basık olduğunu dış merkezlikle ölçmüştük (Elips). Aynı oran hiperbolde de kullanılır; bu kez değeri hep 1'den büyüktür.

Önerme 19.6 (Hiperbolün dış merkezliği). $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *hiperbolünün dış merkezliği*

$$e = \frac{|\ F_1F_2\ |}{|\ A_1A_2\ |} = \frac{c}{a}$$

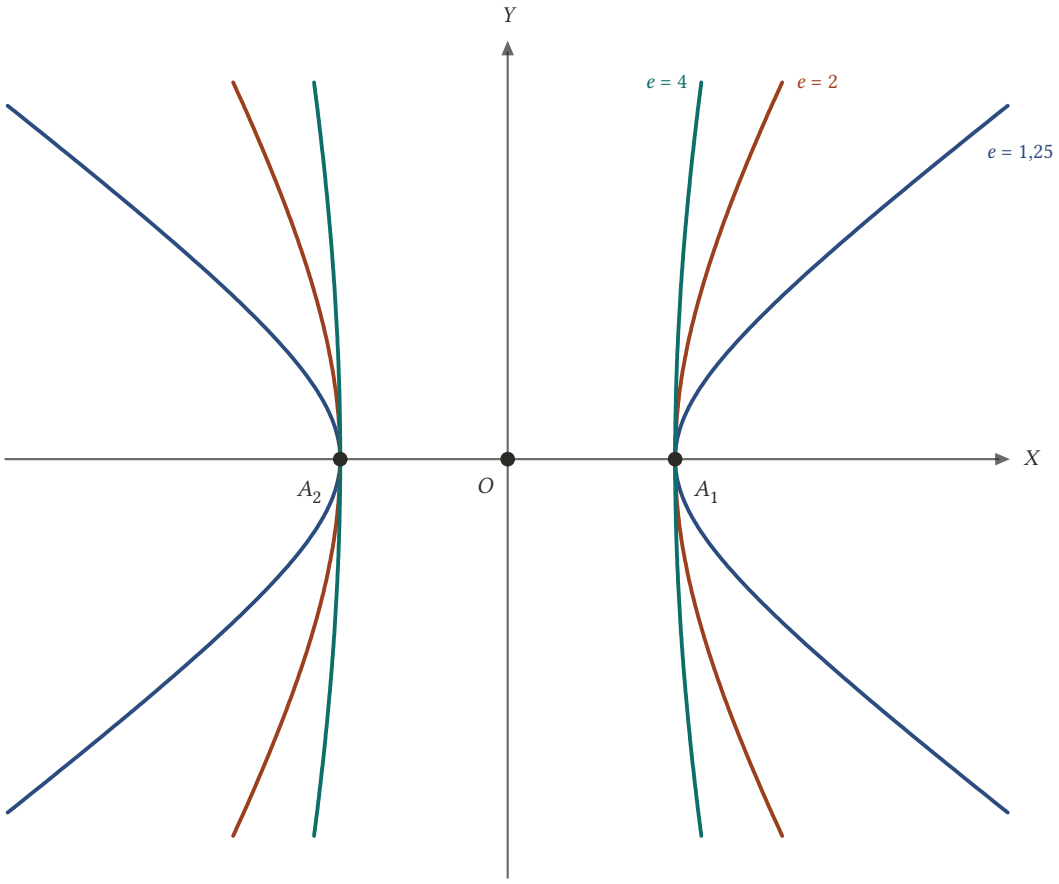
 CC BY-NC-SA 4.0

sayısıdır ve $e > 1$*'dir. Ayrıca asimptotların eğimi için*

$$\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$$

bağıntısı vardır.

İspat.
$|\, F_1F_2 \,| = 2c$ *ve* $|\, A_1A_2 \,| = 2a$ *olduğundan oran* $\dfrac{2c}{2a} = \dfrac{c}{a}$*'dır. Tanımda* $0 < a < c$ *olduğundan* $e > 1$*'dir.* $b^2 = c^2 - a^2$ *eşitliğini* a^2*'ye bölersek* $\dfrac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$ *bulunur.*



Şekil 19.14: Köşeler aynıyken e *büyüdükçe asimptotlar dikleşir ve kollar açılır;* e *1'e yaklaştıkça kollar asal eksene doğru kapanır.*

■

Yani e, asimptotların ne kadar dik olduğunu belirler. e büyüdükçe $\dfrac{b}{a}$ büyür: asimptotlar dikleşir ve kollar asal eksenden uzaklaşıp geniş açılır, hiperbol yassılaşır. e 1'e yaklaştıkça $\dfrac{b}{a}$ sıfıra gider ve kollar asal eksene doğru daralır. İkizkenar hiperbolde $a = b$ olduğundan $e = \sqrt{2}$'dir.
Elipste olduğu gibi, her odağa bir doğru eşlenir.

Tanım 19.12 (Hiperbolün doğrultmanları). $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolü için

$$\Delta_1 : x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}, \qquad \Delta_2 : x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

doğrularına hiperbolün **doğrultmanları** denir. Δ_1'e $F_1(c,0)$ odağına ait doğrultman, Δ_2'ye $F_2(-c,0)$ odağına ait doğrultman denir.

Yani doğrultmanlar asal eksene dik iki doğrudur. $\dfrac{a^2}{c} < a$ olduğundan (çünkü $a < c$) doğrultmanlar iki köşenin arasında, hiperbolün hiç noktası olmayan şeritte kalır; her doğrultman kendi odağıyla aynı taraftadır.

Teorem 19.7 (Odak ve doğrultman özelliği). *Düzlemdeki bir $P(x,y)$ noktasının $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolü üzerinde olması için gerek ve yeter koşul, bu noktanın hiperbolün bir odağına olan uzaklığının o odağa ait doğrultmana olan uzaklığına oranının e'ye eşit olmasıdır.*

İspat.
$F_1(c,0)$ odağını ve ona ait $\Delta_1 : x = \dfrac{a^2}{c}$ doğrultmanını alalım; F_2 ile Δ_2 için hesap, Y-eksenine göre simetriyle aynıdır. P'den Δ_1'e inilen dikmenin ayağı H olsun; $H = \left(\dfrac{a^2}{c}, y\right)$ ve

$$|\,PH\,| = \left| x - \frac{a^2}{c} \right| = \left| x - \frac{a}{e} \right| = \frac{1}{e}\,|\,ex - a\,|$$

dir. Göstereceğimiz şey: $P \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \dfrac{|\,PF_1\,|}{|\,PH\,|} = e$.
(⇒) P hiperbolde olsun. Sonuç 19.1 gereğince $|\,PF_1\,| = \left| \dfrac{c}{a}x - a \right| = |\,ex - a\,|$'dır. $|\,x\,| \geq a$ ve $\dfrac{a}{e} < a$ olduğundan $x \neq \dfrac{a}{e}$, yani $|\,PH\,| \neq 0$'dır. Buna göre

$$\frac{|\,PF_1\,|}{|\,PH\,|} = \frac{|\,ex - a\,|}{\frac{1}{e}\,|\,ex - a\,|} = e$$

olur.
(⇐) $x \neq \dfrac{a^2}{c}$ ve $\dfrac{|\,PF_1\,|}{|\,PH\,|} = e$ olsun. İki tarafın karesini alıp paydaları eşitleyelim:

$$(x-c)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a^2}{c}\right)^2.$$

$e = \dfrac{c}{a}$ olduğundan sağ taraf

$$e^2x^2 - 2\,\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{c}\,x + \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^4}{c^2} = e^2x^2 - 2cx + a^2$$

dir. Sol tarafı açarsak

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2x^2 - 2cx + a^2$$

ve $-2cx$ terimleri sadeleşince

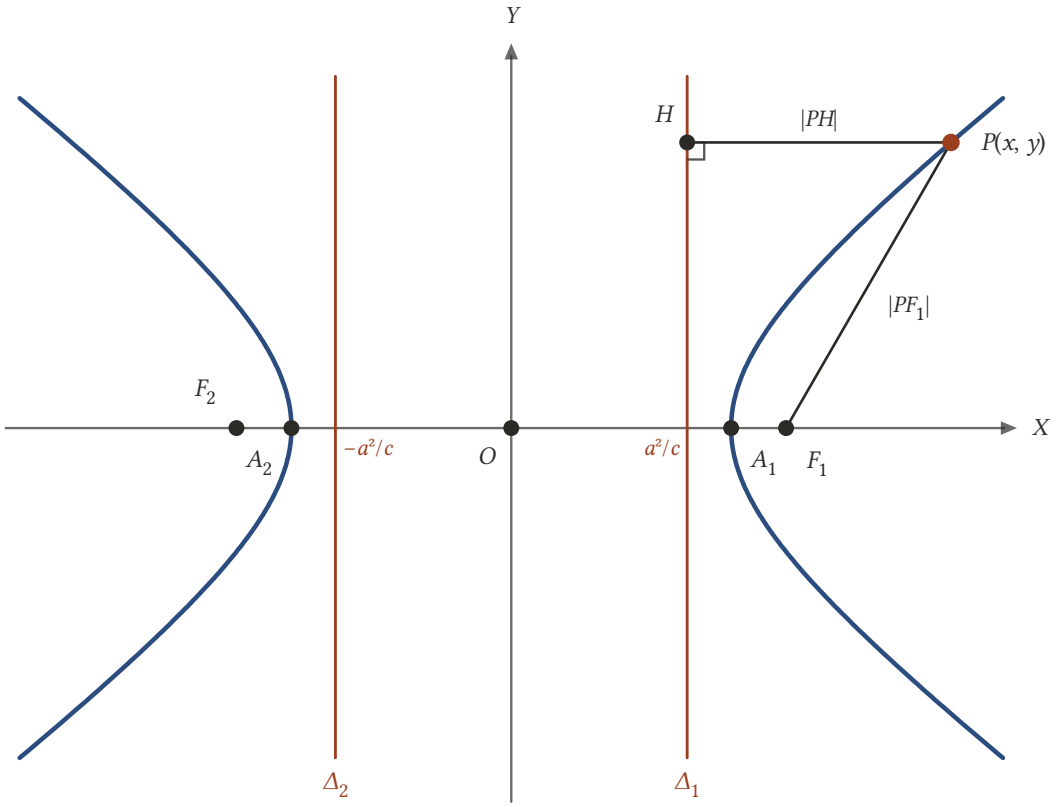
$$(1-e^2)\,x^2 + y^2 = a^2 - c^2$$

bulunur. $1 - e^2 = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2} = -\dfrac{b^2}{a^2}$ ve $a^2 - c^2 = -b^2$ olduğundan

$$-\frac{b^2}{a^2}\,x^2 + y^2 = -b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

elde edilir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.15: Hiperbolün her noktasında $|PF_1| = e \cdot |PH|$.

■

Bu teorem hiperbolü odaklar çifti yerine tek bir odak ve tek bir doğru ile anlatmamızı sağlar.

Sonuç 19.6 (Hiperbolün ikinci tanımı). *Sabit bir F noktası, F'den geçmeyen sabit bir Δ doğrusu ve $e > 1$ sayısı verilsin. Bir noktaya olan uzaklığının Δ'ya olan uzaklığına oranı e olan noktaların geometrik yeri bir hiperboldür; F bu hiperbolün bir odağı, Δ o odağa ait doğrultmanı, e de dış merkezliğidir.*

İspat.
F'nin Δ'ya uzaklığı $p > 0$ olsun. $a = \dfrac{pe}{e^2 - 1}$ ve $c = ae$ alalım; $e > 1$ olduğundan $0 < a < c$'dir ve

$$c - \frac{a^2}{c} = ae - \frac{a}{e} = a\,\frac{e^2 - 1}{e} = p$$

olur. Koordinat sistemini, X-ekseni F'den geçip Δ'ya dik olacak, $F = (c, 0)$ olacak ve Δ, F'nin sol tarafında kalacak biçimde seçelim (öteleme ve dönme uzaklıkları korur). O zaman Δ doğrusu $x = c - p = \dfrac{a^2}{c}$ doğrusudur. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ile $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünün dış merkezliği $\dfrac{c}{a} = e$, F odağı ve Δ bu odağa ait doğrultmanıdır. Teorem 19.7 gereğince verilen oran koşulunu sağlayan noktalar tam bu hiperbolün noktalarıdır.

■

Yani hiperbol, "odağa uzaklık, doğrultmana uzaklığın e katı" olan noktalardan oluşur. Elipste aynı tanım $e < 1$ ile yapılır; bir sonraki bölümde parabolün tam $e = 1$ durumu olduğunu göreceğiz.

Örnek 19.8 (Odağı ve doğrultmanı verilen hiperbol). Bir odağı $F(4, 0)$, bu odağa ait doğrultmanı $x = 1$ doğrusu ve dış merkezliği $e = 2$ olan hiperbolün denklemini bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

Çözüm.
Adım 1: oran koşulu. $P(x,y)$ için $\mid PF \mid = 2 \mid x-1 \mid$ olmalıdır. İki tarafın karesini alalım:

$$(x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2.$$

Adım 2: sadeleştirme. Açarsak $x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4$, yani

$$3x^2 - y^2 = 12 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

bulunur.
Adım 3: kontrol. $a = 2$, $b^2 = 12$ ve $c^2 = 4 + 12 = 16$, yani $c = 4$'tür. Odak gerçekten $(4,0)$'dır, $e = \frac{c}{a} = 2$'dir ve doğrultman $x = \frac{a^2}{c} = \frac{4}{4} = 1$'dir.
■

19.11 Parametrik Denklem

Elipsi $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ ile parametrelemiştik (Elips). Hiperbolde $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ özdeşliğinin yerini $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ özdeşliği alır.

Teorem 19.8 (Hiperbolün parametrik denklemi). $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *hiperbolü*

$$x = a\sec\theta, \qquad y = b\tan\theta$$

parametrik denklemleriyle verilir. $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *sağ kolu,* $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ *sol kolu bir kez tarar.*

İspat.
Adım 1: geometrik anlam. *Hiperbolün sağ kolunda, üst yarıda bir* $P(x,y)$ *noktası alalım ve* $H(x,0)$ *onun* X*-eksenindeki izdüşümü olsun.* H*'den asal çembere* ($x^2 + y^2 = a^2$) *çizilen teğetin üst yarıdaki değme noktası* T *olsun ve* $\theta = \widehat{TOH}$ *diyelim. Yarıçap teğete dik olduğundan* OTH *dik üçgeninde*

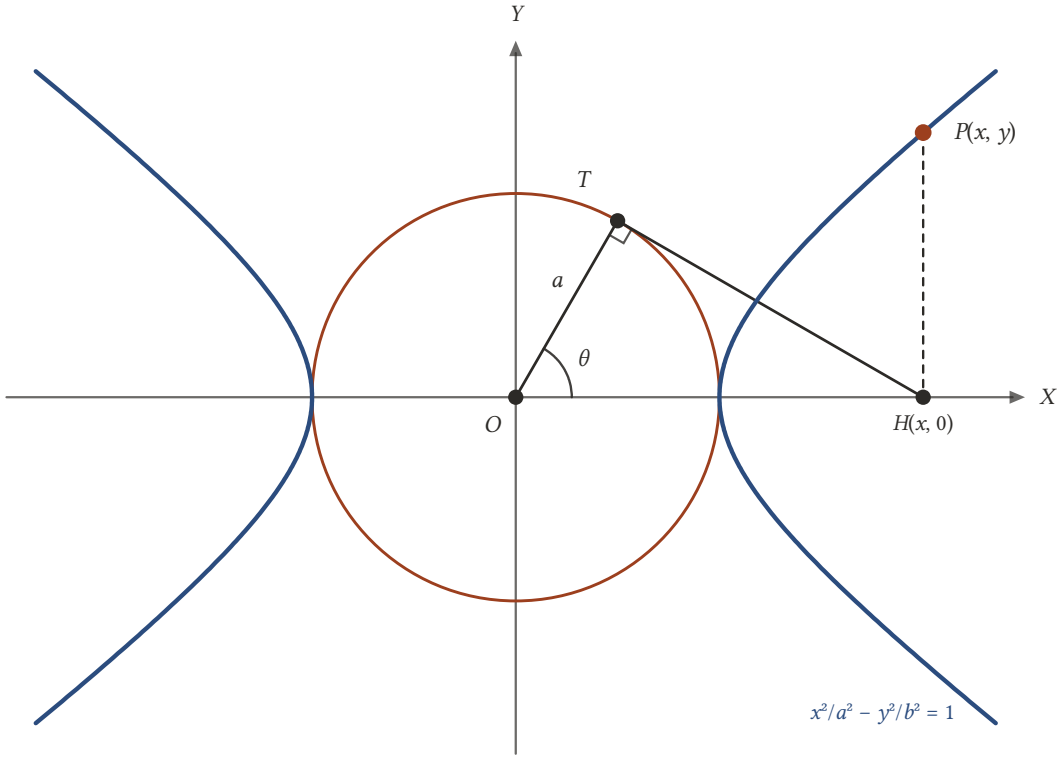
$$\cos\theta = \frac{\mid OT \mid}{\mid OH \mid} = \frac{a}{x} \Rightarrow x = \frac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} &= \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\theta} - a^2} \\ &= \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}} = b\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = b\tan\theta \end{aligned}$$

bulunur ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ *iken* $\sin\theta > 0, \cos\theta > 0$*).*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.16: OTH *dik üçgeninde* cosθ = a/x *olduğundan* x = a *sec*θ, y = b *tan*θ.

Adım 2: denklemi sağlama. *Her* θ *için* $(\cos\theta \neq 0)$

$$\frac{a^2\sec^2\theta}{a^2} - \frac{b^2\tan^2\theta}{b^2} = \sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 1$$

olduğundan $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ *noktası hiperboldedir.*
Adım 3: her noktanın bir parametresi var. *Hiperbolün bir* (x, y) *noktası verilsin. Sağ kolda* $(x \geq a)$ $\frac{a}{x} \in (0,1]$ *olduğundan* $\cos\theta = \frac{a}{x}$ *koşulu* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *aralığında işaretçe zıt iki çözüm (ya da* $x = a$ *iken yalnız* $\theta = 0$*) verir. Bunlar için* $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2}$ *olduğundan* $|\, b\tan\theta \,| = |\, y \,|$*'dir;* $\tan\theta$*,* θ *ile aynı işaretli olduğundan işareti* y*'ninkine uyan* θ *seçilir ve* $b\tan\theta = y$ *olur. Bu aralıkta* $\sec\theta$ *çift,* $\tan\theta$ *tek ve artan olduğundan her nokta tek bir* θ*'ya karşılık gelir. Sol kolda* $(x \leq -a)$ θ *yerine* $\theta + \pi$ *alınır:* $\sec(\theta+\pi) = -\sec\theta$ *ve* $\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$ *olduğundan* $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ *aralığı sol kolu aynı biçimde tarar.*
■

Örnek 19.9 (Parametrik denklemden nokta bulmak). $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolünün $\theta = \frac{\pi}{3}$ parametresine karşılık gelen noktasını bulunuz ve bu noktadaki teğeti yazınız.

Çözüm.
Adım 1: nokta. $a = 2$, $b = 3$ ve $\sec\frac{\pi}{3} = 2$, $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ olduğundan

$$x = 2\cdot 2 = 4, \qquad y = 3\sqrt{3}$$

bulunur. Nokta $\left(\, 4, 3\sqrt{3} \,\right)$'tür; kontrol: $\frac{16}{4} - \frac{27}{9} = 4 - 3 = 1$.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 2: teğet. Teorem 19.5 ile $\frac{4x}{4} - \frac{3\sqrt{3}\,y}{9} = 1$, yani $x - \frac{y}{\sqrt{3}} = 1$ bulunur. Bu, Örnek 19.5 içinde $P(1,0)$'dan çizilen teğetlerden biridir.
■

19.12 Alıştırmalar

Aşağıdaki sorularda hiperbolün öğelerini standart denklemden okuyacak, teğet koşulunu ve diskriminantı kullanacağız. İlk soru, dış merkezlik ve doğrultman kavramlarının elipsteki karşılıklarını hatırlatır.

Alıştırma 19.1 (Odağı ve dış merkezliği verilen elips: standart denklem). Odaklarından biri $F_1(8,0)$ olan ve dış merkezliği $\frac{4}{5}$ olan, merkezi başlangıç noktasında ve asal ekseni X-ekseni olan elipsin standart denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: *a*. Elipste $e = \frac{c}{a}$'dır (Elips). $c = 8$ olduğundan

$$\frac{8}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow a = 10$$

bulunur.
Adım 2: *b*. Elipste $a^2 = b^2 + c^2$ olduğundan $b^2 = 100 - 64 = 36$, yani $b = 6$'dır.
Adım 3: denklem. Elipsin standart denklemi

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

dir.
■

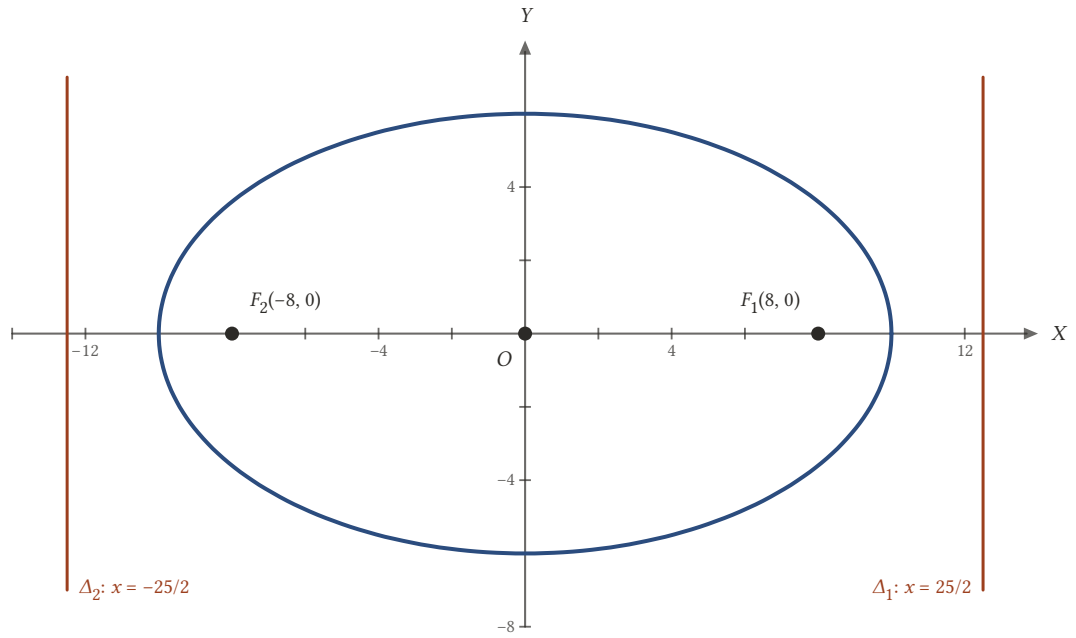
Alıştırma 19.2 (Odağı ve dış merkezliği verilen elips: doğrultmanlar). Odaklarından biri $F_1(8,0)$ olan ve dış merkezliği $\frac{4}{5}$ olan, merkezi başlangıç noktasında ve asal ekseni X-ekseni olan elipsin doğrultmanlarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: elips. Bir önceki alıştırmada $a = 10$, $c = 8$ ve elipsin $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ olduğunu bulduk.
Adım 2: doğrultmanlar. Elipsin doğrultmanları $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$ doğrularıdır (Elips). Buna göre

$$\Delta_1 : x = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}, \qquad \Delta_2 : x = -\frac{25}{2}$$

bulunur; Δ_1, $F_1(8,0)$ odağına aittir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.17: Elipsin doğrultmanları elipsin dışında, $x = \pm 25/2$'de durur.

■

Alıştırma 19.3 (Hiperbol $4x^2 - 45y^2 = 180$: köşeler). $4x^2 - 45y^2 = 180$ hiperbolünün köşelerini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: standart biçim. İki tarafı 180'e bölelim:

$$\frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Pozitif işaretli terim x^2'li terim olduğundan asal eksen X-eksenidir; $a^2 = 45$ ve $b^2 = 4$, yani $a = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ ve $b = 2$'dir.
Adım 2: köşeler. Köşeler $(\pm a, 0)$ noktalarıdır (Teorem 19.1):

$$A_1\left(3\sqrt{5}, 0\right), \qquad A_2\left(-3\sqrt{5}, 0\right).$$

Kontrol: $4 \cdot 45 - 45 \cdot 0 = 180$.
■

Alıştırma 19.4 (Hiperbol $4x^2 - 45y^2 = 180$: odaklar). $4x^2 - 45y^2 = 180$ hiperbolünün odaklarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: a ve b. İki tarafı 180'e bölünce $\frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{4} = 1$ bulunur; asal eksen X-eksenidir, $a^2 = 45$ ve $b^2 = 4$'tür.
Adım 2: odaklar. Hiperbolde $c^2 = a^2 + b^2$ olduğundan

$$c^2 = 45 + 4 = 49 \Rightarrow c = 7$$

ve odaklar

 CC BY-NC-SA 4.0

$$F_1(7,0), \qquad F_2(-7,0)$$

noktalarıdır.
■

Alıştırma 19.5 (Hiperbol 4x² − 45y² = 180: dış merkezlik). $4x^2 - 45y^2 = 180$ hiperbolünün dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: a ve c. Standart biçim $\dfrac{x^2}{45} - \dfrac{y^2}{4} = 1$'dir; $a = 3\sqrt{5}$ ve $c = \sqrt{45+4} = 7$'dir.
Adım 2: dış merkezlik. Önerme 19.6 gereğince

$$e = \frac{c}{a} = \frac{7}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{15}$$

bulunur. $e \approx 1{,}04$'tür; 1'e çok yakın olduğundan kollar asal eksene doğru dar açılır.
■

Alıştırma 19.6 (Hiperbol 4x² − 45y² = 180: asimptotlar). $4x^2 - 45y^2 = 180$ hiperbolünün asimptotlarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: a ve b. Standart biçim $\dfrac{x^2}{45} - \dfrac{y^2}{4} = 1$'dir; $a = 3\sqrt{5}$ ve $b = 2$'dir.
Adım 2: asimptotlar. Teorem 19.3 gereğince asimptotlar $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ doğrularıdır. $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{15}$ olduğundan

$$y = \frac{2\sqrt{5}}{15}\,x \qquad \text{ve} \qquad y = -\frac{2\sqrt{5}}{15}\,x$$

bulunur. Kontrol: sağ taraftaki 180 yerine 0 yazarsak $4x^2 = 45y^2$, yani $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{45}}\,x$ çıkar; bu aynı iki doğrudur.
■

Alıştırma 19.7 (Hiperbol 49y² − 16x² = 784: köşeler). $49y^2 - 16x^2 = 784$ hiperbolünün köşelerini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: standart biçim. İki tarafı 784'e bölelim; $784 = 49 \cdot 16$ olduğundan

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$$

bulunur. Pozitif işaretli terim y^2'li terim olduğundan asal eksen Y-eksenidir. Önerme 19.3 içindeki gösterimle $a^2 = 16$ ve $b^2 = 49$, yani $a = 4$ ve $b = 7$'dir. Burada $a < b$ olduğuna dikkat edelim; hiperbolde a her zaman asal eksene ait sayıdır, büyük olan değil.
Adım 2: köşeler. Köşeler $(0, \pm a)$ noktalarıdır:

$$A_1(0,4), \qquad A_2(0,-4).$$

Kontrol: $49 \cdot 16 - 16 \cdot 0 = 784$.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 19.8 (Hiperbol 49y² − 16x² = 784: odaklar). $49y^2 - 16x^2 = 784$ hiperbolünün odaklarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: a ve b. Standart biçim $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{49} = 1$'dir; asal eksen Y-eksenidir, $a^2 = 16$ ve $b^2 = 49$'dur.
Adım 2: odaklar. $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 49 = 65$ olduğundan $c = \sqrt{65}$'tir. Odaklar asal eksen, yani Y -ekseni üzerindedir (Önerme 19.3):

$$F_1\left(0, \sqrt{65}\right), \qquad F_2\left(0, -\sqrt{65}\right).$$

■

Alıştırma 19.9 (Hiperbol 49y² − 16x² = 784: dış merkezlik). $49y^2 - 16x^2 = 784$ hiperbolünün dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: a ve c. Standart biçim $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{49} = 1$'dir; $a = 4$ ve $c = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$'tir.
Adım 2: dış merkezlik. Dış merkezlik odaklar arası uzaklığın köşeler arası uzaklığa oranıdır (Önerme 19.6); bu oran asal eksenin hangi eksen olduğuna bağlı değildir. Buna göre

$$e = \frac{|\,F_1F_2\,|}{|\,A_1A_2\,|} = \frac{2\sqrt{65}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{65}}{4}$$

bulunur; $e \approx 2{,}02$'dir.
■

Alıştırma 19.10 (Hiperbol 49y² − 16x² = 784: asimptotlar). $49y^2 - 16x^2 = 784$ hiperbolünün asimptotlarını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: a ve b. Standart biçim $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{49} = 1$'dir; $a = 4$ ve $b = 7$'dir.
Adım 2: asimptotlar. Asal eksen Y-ekseni olduğundan Önerme 19.3 gereğince asimptotlar $y = \pm\dfrac{a}{b}x$, yani

$$y = \frac{4}{7}\,x \qquad \text{ve} \qquad y = -\frac{4}{7}\,x$$

doğrularıdır. Bunlar $x = \pm\dfrac{7}{4}\,y$ biçiminde de yazılabilir. Kontrol: sağ taraftaki 784 yerine 0 yazarsak $49y^2 = 16x^2$, yani $7y = \pm 4x$ çıkar.
■

Alıştırma 19.11 (x² − y² = 25: köşeler). $x^2 - y^2 = 25$ hiperbolünün köşelerini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: standart biçim. İki tarafı 25'e bölersek

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$$

bulunur. Asal eksen X-eksenidir ve $a = b = 5$'tir; yani hiperbol bir ikizkenar hiperboldür (Tanım 19.10).
Adım 2: köşeler. Köşeler $(\pm a, 0)$ noktalarıdır:

$$A_1(5, 0), \qquad A_2(-5, 0).$$

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 19.12 ($x^2 - y^2 = 25$: odaklar). $x^2 - y^2 = 25$ hiperbolünün odaklarını bulunuz.

Çözüm.
Standart biçim $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{25} = 1$'dir; $a^2 = b^2 = 25$'tir. $c^2 = a^2 + b^2 = 50$ olduğundan $c = 5\sqrt{2}$ ve odaklar

$$F_1\left(\,5\sqrt{2}, 0\,\right), \qquad F_2\left(\,-5\sqrt{2}, 0\,\right)$$

noktalarıdır.
■

Alıştırma 19.13 ($x^2 - y^2 = 25$: dış merkezlik). $x^2 - y^2 = 25$ hiperbolünün dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
Standart biçimden $a = 5$, $c = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$ bulunur. Buna göre

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{2}}{5} = \sqrt{2}$$

dir. Bu, her ikizkenar hiperbol için geçerli olan $e = \sqrt{2}$ değeridir.
■

Alıştırma 19.14 ($x^2 - y^2 = 25$: asimptotlar). $x^2 - y^2 = 25$ hiperbolünün asimptotlarını bulunuz.

Çözüm.
$a = b = 5$ olduğundan $\dfrac{b}{a} = 1$'dir ve Sonuç 19.4 gereğince asimptotlar

$$y = x \qquad \text{ve} \qquad y = -x$$

doğrularıdır; bu iki doğru birbirine diktir.
■

Alıştırma 19.15 (Asal eksen uzunluğu ve odakları verilen hiperbol). Asal eksen uzunluğu 8 birim, odakları $F_1(5, 0)$ ve $F_2(-5, 0)$ olan hiperbolün denklemini yazınız.

Çözüm.
Adım 1: merkez ve asal eksen. Merkez $[F_1F_2]$'nin orta noktası $O(0, 0)$'dır ve asal eksen X-eksenidir. Bu yüzden denklem $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ biçimindedir.
Adım 2: *a, c, b*. Asal eksen uzunluğu $2a = 8$ olduğundan $a = 4$'tür; köşeler $A_1(4, 0)$ ve $A_2(-4, 0)$'dır. Odaklardan $c = 5$'tir. Buna göre

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9.$$

Adım 3: denklem.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Kontrol: odaktan geçen $x = 5$ doğrusu üzerindeki $\left(5, \dfrac{9}{4}\right)$ noktası için $\dfrac{25}{16} - \dfrac{81/16}{9} = \dfrac{25}{16} - \dfrac{9}{16} =$ 1'dir; bu noktanın odaklara uzaklıkları $\dfrac{9}{4}$ ve $\sqrt{100 + \dfrac{81}{16}} = \dfrac{41}{4}$ olup farkları $8 = 2a$'dır.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 19.16 (Yedek eksen uzunluğu ve odakları verilen hiperbol). Yedek eksen uzunluğu 24 birim, odakları $F_1(0,13)$ ve $F_2(0,-13)$ olan hiperbolün denklemini yazınız.

Çözüm.
Adım 1: merkez ve asal eksen. Merkez $[F_1F_2]$'nin orta noktası $O(0,0)$'dır; odaklar Y-ekseni üzerinde olduğundan asal eksen Y-eksenidir. Önerme 19.3 gereğince denklem $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$ biçimindedir.
Adım 2: *b, c, a*. Yedek eksen uzunluğu $2b=24$ olduğundan $b=12$'dir. Odaklardan $c=13$'tür. Buna göre

$$a^2=c^2-b^2=169-144=25 \Rightarrow a=5.$$

Adım 3: denklem.

$$\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{144}=1.$$

Köşeler $(0,\pm 5)$ noktalarıdır. Kontrol: odaktan geçen $y=13$ doğrusu üzerindeki $\left(\dfrac{144}{5},13\right)$ noktası için

$$\frac{169}{25}-\frac{144^2/25}{144}=\frac{169}{25}-\frac{144}{25}=1$$

bulunur.
■

Alıştırma 19.17 (Merkezi, bir odağı ve bir köşesi verilen hiperbol). Merkezi $O(0,0)$, bir odağı $F_1(8,0)$ ve bir köşesi $A_1(6,0)$ olan hiperbolün denklemini yazınız.

Çözüm.
Adım 1: asal eksen. Merkez, odak ve köşe X-ekseni üzerindedir; asal eksen X-eksenidir ve denklem $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ biçimindedir.
Adım 2: *a, c, b*. Köşe merkezden a, odak merkezden c uzaklıkta olduğundan $a=6$ ve $c=8$'dir. Buna göre

$$b^2=c^2-a^2=64-36=28.$$

Adım 3: denklem.

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1.$$

Öteki odak $F_2(-8,0)$, öteki köşe $A_2(-6,0)$'dır.
■

Alıştırma 19.18 (Odak, köşe, asimptot ve çizim). $3x^2-4y^2=12$ hiperbolünün odaklarını, köşelerini ve asimptotlarını bulup şeklini çiziniz.

Çözüm.
Adım 1: standart biçim. İki tarafı 12'ye bölelim:

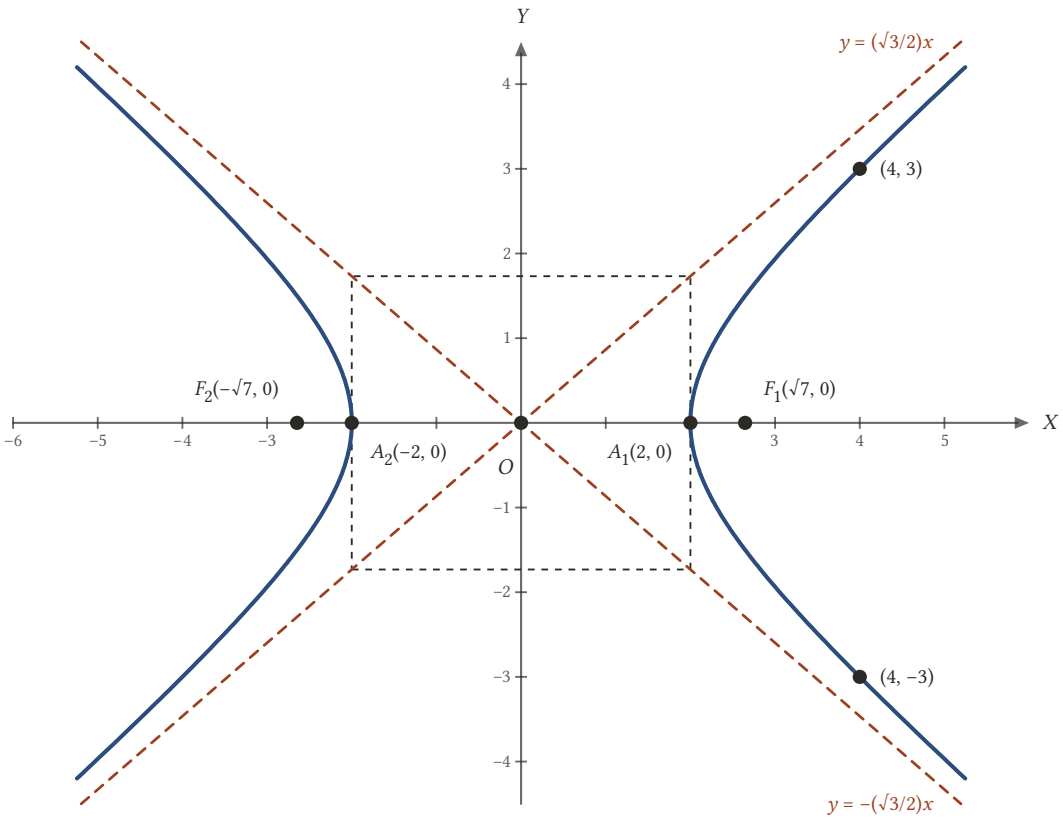
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1.$$

Buna göre $a^2=4$, $b^2=3$, yani $a=2$ ve $b=\sqrt{3}$'tür; asal eksen X-eksenidir.
Adım 2: köşeler ve odaklar. Köşeler $A_1(2,0)$ ve $A_2(-2,0)$'dır. $c^2=a^2+b^2=4+3=7$ olduğundan $c=\sqrt{7}$ ve odaklar $F_1\left(\sqrt{7},0\right)$, $F_2\left(-\sqrt{7},0\right)$'dır.
Adım 3: asimptotlar. $y=\pm\dfrac{b}{a}x$, yani

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}\,x \qquad \text{ve} \qquad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,x$$

doğrularıdır.
Adım 4: çizim. Köşeleri $(\pm 2, \pm\sqrt{3})$ olan temel dikdörtgeni çizip köşegenlerini uzatırız; kolları $(\pm 2, 0)$ köşelerinden başlatıp asimptotlara yaklaştırırız. Örneğin $x = 4$ iken $y^2 = 3\left(\frac{16}{4} - 1\right) = 9$, yani $y = \pm 3$'tür.



Şekil 19.18: $3x^2 - 4y^2 = 12$ hiperbolü, temel dikdörtgeni ve asimptotları.

■

Alıştırma 19.19 (Odakları ve köşeleri verilen hiperbol). Odakları $F_1(4,1)$ ve $F_2(-8,1)$, köşeleri $A_1(2,1)$ ve $A_2(-6,1)$ olan hiperbolün denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: asal eksen ve merkez. Odakların ordinatları aynı olduğundan asal eksen $y = 1$ doğrusudur; yani asal eksen X-eksenine paraleldir. Merkez

$$M = \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = \frac{1}{2}(4 - 8, 1 + 1) = (-2, 1)$$

dir.
Adım 2: *a, b, c*.

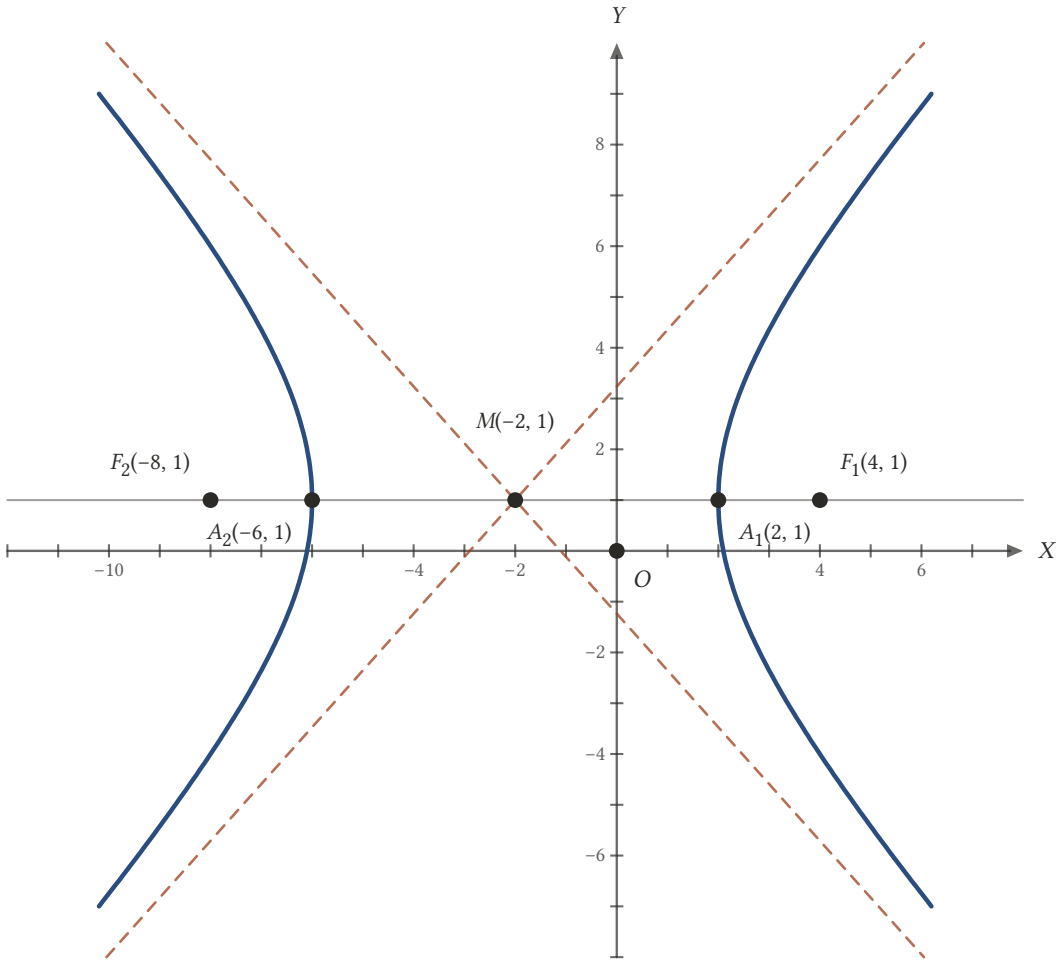
$$\begin{aligned} 2c &= |\ F_1F_2\ | = |\ 4 - (-8)\ | = 12 \Rightarrow c = 6, \\ 2a &= |\ A_1A_2\ | = |\ 2 - (-6)\ | = 8 \Rightarrow a = 4, \\ b^2 &= c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: denklem. Önerme 19.4 gereğince hiperbolün denklemi

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{20} = 1$$

dir. Paydaları kaldırıp açarsak $5x^2 - 4y^2 + 20x + 8y - 64 = 0$ biçimi de elde edilir.
Adım 4: kontrol. $A_1(2,1)$ için $\frac{16}{16} - 0 = 1$; $A_2(-6,1)$ için $\frac{16}{16} - 0 = 1$'dir.



Şekil 19.19: Odakları ve köşeleri $y = 1$ doğrusu üzerinde olan, merkezi $M(-2, 1)$ hiperbol.

■

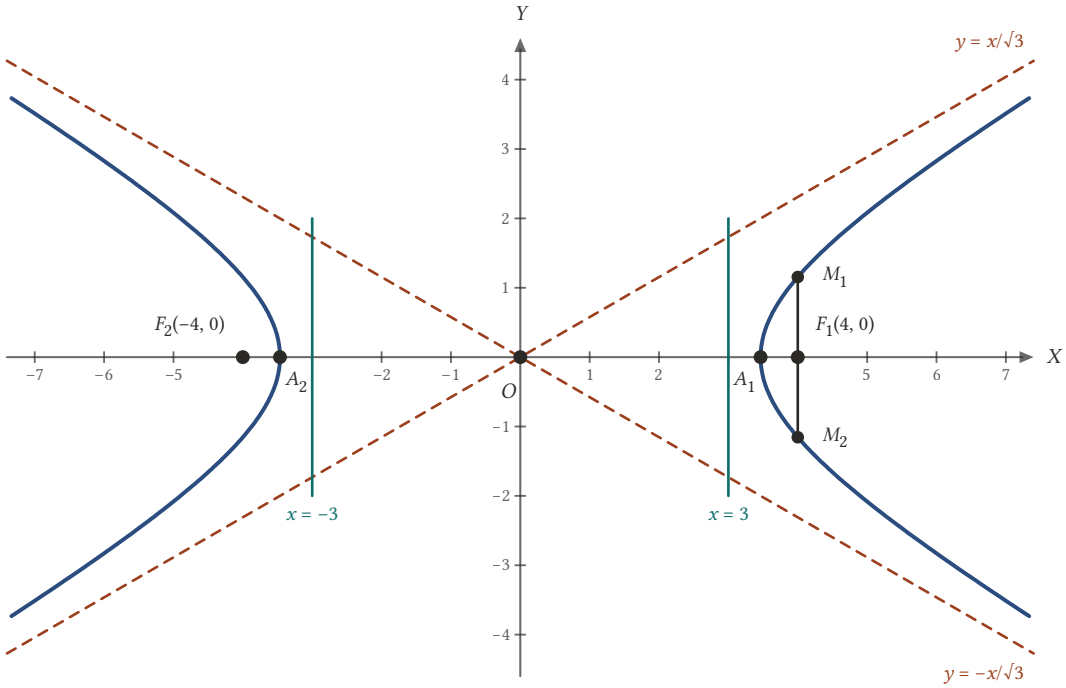
Alıştırma 19.20 (Birinci hiperbol: odaklar). $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ hiperbolünün odaklarını bulunuz.

Çözüm.
$a^2 = 12$ ve $b^2 = 4$ olduğundan $c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$, yani $c = 4$'tür. Asal eksen X-ekseni olduğundan odaklar

$$F_1(4,0), \qquad F_2(-4,0)$$

noktalarıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.20: $x^2/12 - y^2/4 = 1$: odaklar $(\pm 4, 0)$, asimptotlar $y = \pm x/\sqrt{3}$, doğrultmanlar $x = \pm 3$.

■

Alıştırma 19.21 (Birinci hiperbol: dış merkezlik). $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ hiperbolünün dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
$a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ve $c = \sqrt{12+4} = 4$'tür. Önerme 19.6 gereğince

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

bulunur. $\dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15 > 1$'dir.

■

Alıştırma 19.22 (Birinci hiperbol: parametre). $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ hiperbolünün parametresini bulunuz.

Çözüm.
Parametre, $F_1(4,0)$ odağından asal eksene dik çizilen kirişin uzunluğudur ve Teorem 19.4 gereğince $\dfrac{2b^2}{a}$'ya eşittir. $a = 2\sqrt{3}$, $b^2 = 4$ olduğundan

$$|\, M_1M_2 \,| = \frac{2\cdot 4}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

bulunur. Doğrudan kontrol: $x = 4$ için $y^2 = 4\left(\dfrac{16}{12} - 1\right) = \dfrac{4}{3}$, yani $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ve kirişin uzunluğu $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 19.23 (Birinci hiperbol: asimptotlar). $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ hiperbolünün asimptotlarını bulunuz.

Çözüm.
$a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$ olduğundan $\frac{b}{a} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$'tür. Teorem 19.3 gereğince asimptotlar

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\,x \qquad \text{ve} \qquad y = -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x$$

doğrularıdır. Bunlar X-ekseniyle $\frac{\pi}{6}$ ve $-\frac{\pi}{6}$ açısı yapar.
■

Alıştırma 19.24 (Birinci hiperbol: doğrultmanlar). $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ hiperbolünün doğrultmanlarını bulunuz.

Çözüm.
Tanım 19.12 gereğince doğrultmanlar $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$ doğrularıdır. $a^2 = 12$ ve $c = 4$ olduğundan

$$\Delta_1 : x = \frac{12}{4} = 3, \qquad \Delta_2 : x = -3$$

bulunur. Gerçekten $3 < a = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ olduğundan doğrultmanlar köşelerin arasındadır.
■

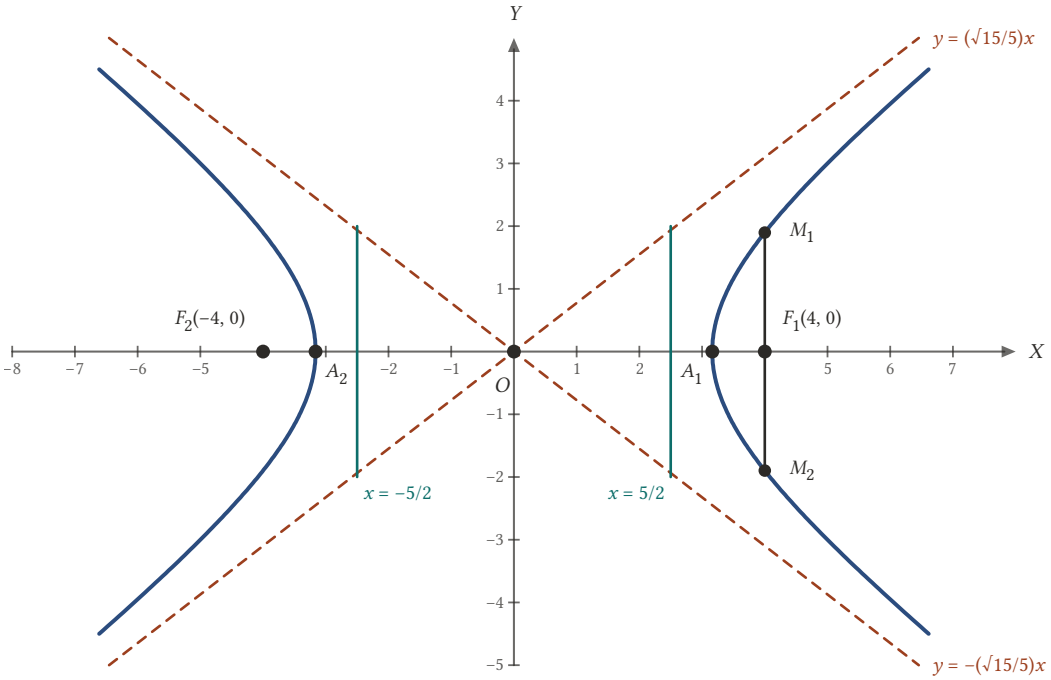
Alıştırma 19.25 (İkinci hiperbol: odaklar). $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$ hiperbolünün odaklarını bulunuz.

Çözüm.
$a^2 = 10$ ve $b^2 = 6$ olduğundan $c^2 = 10 + 6 = 16$, yani $c = 4$'tür. Odaklar

$$F_1(4, 0), \qquad F_2(-4, 0)$$

noktalarıdır. Bu hiperbolün odakları bir önceki gruptaki $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ hiperbolünün odaklarıyla aynıdır; iki hiperbol aynı odaklı, farklı a'lı iki hiperboldür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.21: $x^2/10 - y^2/6 = 1$: odaklar $(\pm 4, 0)$, asimptotlar $y = \pm(\sqrt{15}/5)x$, doğrultmanlar $x = \pm 5/2$.

■

Alıştırma 19.26 (İkinci hiperbol: dış merkezlik). $\dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{6} = 1$ hiperbolünün dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
$a = \sqrt{10}$ ve $c = 4$ olduğundan

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

bulunur; $e \approx 1{,}26$'dır.
■

Alıştırma 19.27 (İkinci hiperbol: parametre). $\dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{6} = 1$ hiperbolünün parametresini bulunuz.

Çözüm.
Teorem 19.4 gereğince parametre $\dfrac{2b^2}{a}$'dır. $a = \sqrt{10}$, $b^2 = 6$ olduğundan

$$|\, M_1M_2 \,| = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{10}}{10} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

bulunur. Doğrudan kontrol: $x = 4$ için $y^2 = 6\left(\dfrac{16}{10} - 1\right) = \dfrac{18}{5}$, yani $|\, y \,| = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}$ ve kirişin uzunluğu $\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$'tir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 19.28 (İkinci hiperbol: asimptotlar). $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{6}=1$ hiperbolünün asimptotlarını bulunuz.

Çözüm.
$\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ olduğundan asimptotlar

$$y=\frac{\sqrt{15}}{5}\,x \qquad \text{ve} \qquad y=-\frac{\sqrt{15}}{5}\,x$$

doğrularıdır.
■

Alıştırma 19.29 (İkinci hiperbol: doğrultmanlar). $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{6}=1$ hiperbolünün doğrultmanlarını bulunuz.

Çözüm.
Doğrultmanlar $x=\pm\dfrac{a^2}{c}$ doğrularıdır. $a^2=10$ ve $c=4$ olduğundan

$$\Delta_1: x=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}, \qquad \Delta_2: x=-\frac{5}{2}$$

bulunur.
■

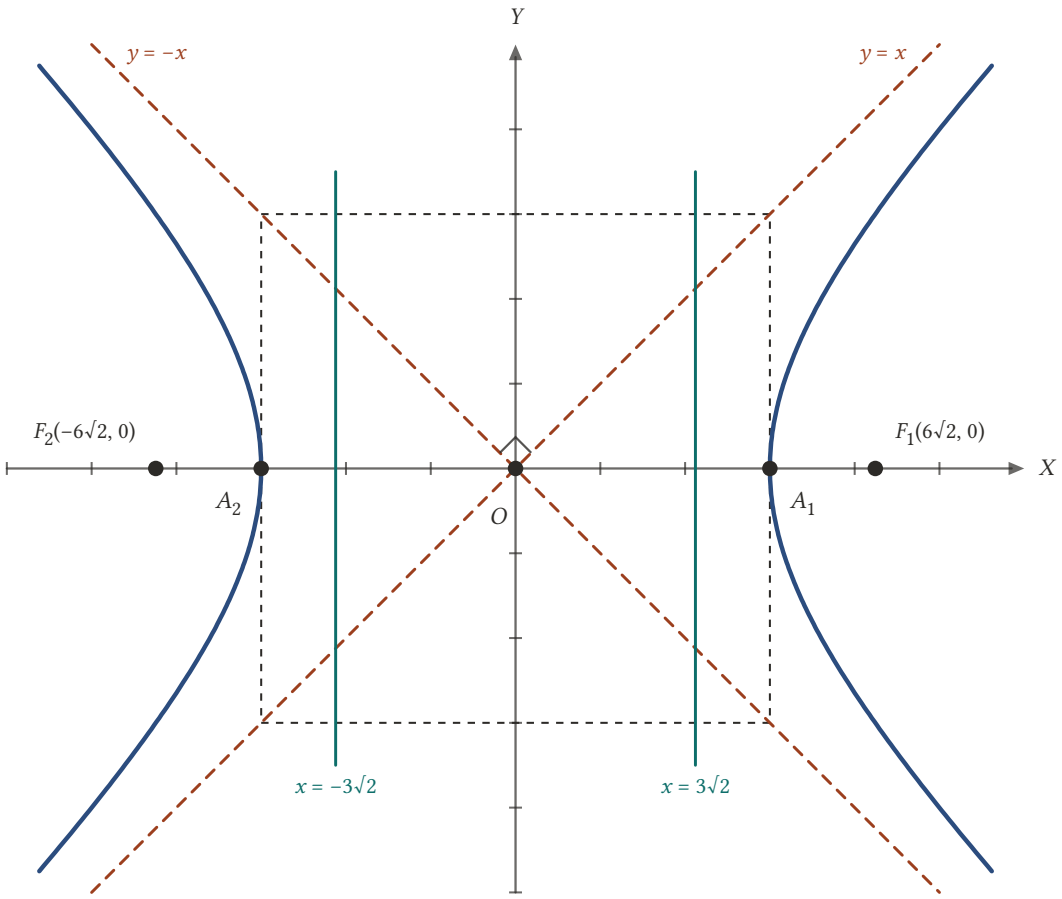
Alıştırma 19.30 ($x^2-y^2=36$: odaklar). $x^2-y^2=36$ hiperbolünün odaklarını bulunuz.

Çözüm.
İki tarafı 36'ya bölersek $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{36}=1$ olur; $a^2=b^2=36$, yani $a=b=6$'dır. $c^2=a^2+b^2=72$ olduğundan $c=6\sqrt{2}$ ve odaklar

$$F_1\left(\,6\sqrt{2},0\,\right), \qquad F_2\left(\,-6\sqrt{2},0\,\right)$$

noktalarıdır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.22: $x^2 - y^2 = 36$ bir ikizkenar hiperboldür: $a = b = 6$, asimptotlar $y = \pm x$.

■

Alıştırma 19.31 ($x^2 - y^2 = 36$: dış merkezlik). $x^2 - y^2 = 36$ hiperbolünün dış merkezliğini bulunuz.

Çözüm.
$a = 6$ ve $c = 6\sqrt{2}$ olduğundan

$$e = \frac{c}{a} = \frac{6\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}$$

bulunur.
■

Alıştırma 19.32 ($x^2 - y^2 = 36$: asimptotlar). $x^2 - y^2 = 36$ hiperbolünün asimptotlarını bulunuz.

Çözüm.
$a = b = 6$ olduğundan $\frac{b}{a} = 1$'dir ve asimptotlar

$$y = x \qquad \text{ve} \qquad y = -x$$

doğrularıdır. Aynı sonuca denklemde sağ taraftaki 36 yerine 0 yazarak da ulaşırız: $x^2 - y^2 = 0$ denklemi $(x - y)(x + y) = 0$ demektir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 19.33 ($x^2 - y^2 = 36$: doğrultmanlar). $x^2 - y^2 = 36$ hiperbolünün doğrultmanlarını bulunuz.

Çözüm.
Doğrultmanlar $x = \pm\dfrac{a}{e} = \pm\dfrac{a^2}{c}$ doğrularıdır. $a^2 = 36$ ve $c = 6\sqrt{2}$ olduğundan

$$\frac{a^2}{c} = \frac{36}{6\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

ve doğrultmanlar $\Delta_1 : x = 3\sqrt{2}$, $\Delta_2 : x = -3\sqrt{2}$'dir.
■

Alıştırma 19.34 ($x^2 - y^2 = 36$: ikizkenar mı). $x^2 - y^2 = 36$ hiperbolünün ikizkenar hiperbol olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
Standart biçim $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{36} = 1$'dir; $a = 6$ ve $b = 6$'dır. Asal eksen uzunluğu $2a = 12$, yedek eksen uzunluğu $2b = 12$ olup eşittir. Tanım 19.10 gereğince hiperbol ikizkenardır. Bununla uyumlu olarak asimptotları $y = \pm x$ birbirine diktir (Sonuç 19.4) ve dış merkezliği $\sqrt{2}$'dir.
■

Alıştırma 19.35 (Bir doğru hiperbole teğet mi). $3x - 4y - 5 = 0$ doğrusunun $x^2 - 4y^2 = 5$ hiperbolüne teğet olup olmadığını araştırınız.

Çözüm.
Adım 1: standart biçimler. Doğru $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{4}$ biçiminde yazılır; $m = \dfrac{3}{4}$, $n = -\dfrac{5}{4}$'tür. Hiperbolün iki tarafını 5'e bölersek

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5/4} = 1$$

bulunur; $a^2 = 5$, $b^2 = \dfrac{5}{4}$'tür.
Adım 2: teğet koşulu. Sonuç 19.5 gereğince teğetlik için $a^2m^2 - b^2 = n^2 \neq 0$ olmalıdır.

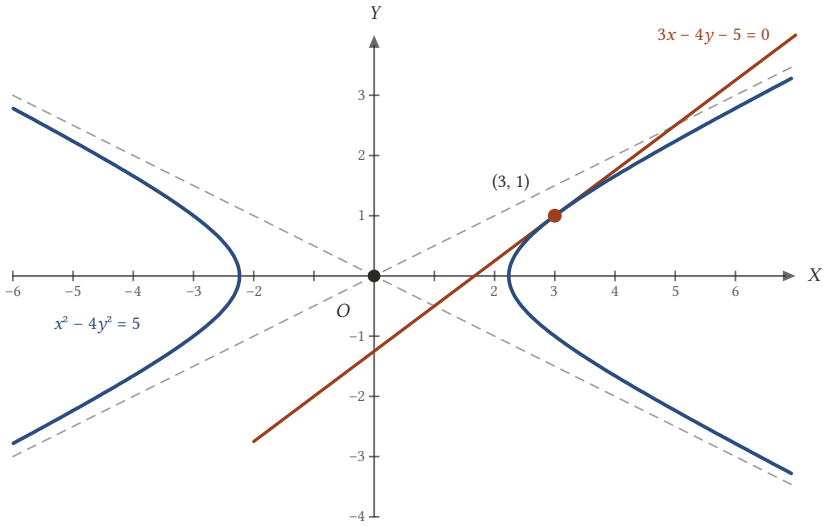
$$a^2m^2 - b^2 = 5 \cdot \frac{9}{16} - \frac{5}{4} = \frac{45}{16} - \frac{20}{16} = \frac{25}{16}, \qquad n^2 = \Big(-\frac{5}{4}\Big)^2 = \frac{25}{16}.$$

İki değer eşit ve sıfırdan farklı olduğundan doğru hiperbole teğettir.
Adım 3: değme noktası. Değme noktası

$$\Big(-\frac{a^2m}{n}, -\frac{b^2}{n}\Big) = \Big(-\frac{5 \cdot 3/4}{-5/4}, -\frac{5/4}{-5/4}\Big) = (3, 1)$$

dir. Kontrol: $3 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 5 = 0$ ve $9 - 4 \cdot 1 = 5$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.23: $3x - 4y - 5 = 0$ doğrusu hiperbole $(3, 1)$ noktasında teğettir.

■

Alıştırma 19.36 (Parametreye göre doğru ile hiperbolün durumu). $5x - 2y + \lambda = 0$ doğrusu ile $4x^2 - y^2 = 36$ hiperbolünün birbirine göre durumunu λ parametresinin değerlerine göre inceleyiniz.

Çözüm.
Adım 1: kesişme denklemi. Doğrudan $y = \dfrac{5x + \lambda}{2}$ bulunur. Bunu hiperbolde yerine yazalım:

$$4x^2 - \frac{(5x + \lambda)^2}{4} = 36.$$

İki tarafı 4 ile çarpıp açalım:

$$16x^2 - 25x^2 - 10\lambda x - \lambda^2 = 144,$$

yani

$$9x^2 + 10\lambda x + \lambda^2 + 144 = 0.$$

Hiperbolün standart biçimi $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$ olduğundan $a = 3$, $b = 6$ ve asimptotların eğimleri $\pm\dfrac{b}{a} = \pm 2$'dir. Doğrunun eğimi $\dfrac{5}{2}$ olup hiçbir asimptota paralel olmadığından denklem gerçekten ikinci derecedendir; nitekim x^2'nin katsayısı $9 \neq 0$'dır.
Adım 2: diskriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= (10\lambda)^2 - 4 \cdot 9\,(\lambda^2 + 144) \\ &= 100\lambda^2 - 36\lambda^2 - 5184 \\ &= 64\lambda^2 - 5184 = 64\,(\lambda^2 - 81).\end{aligned}$$

Adım 3: işaret incelemesi. $\lambda^2 - 81 = (\lambda - 9)(\lambda + 9)$ olduğundan

λ	$(-\infty, -9)$	-9	$(-9, 9)$	9	$(9, \infty)$
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

tablosu çıkar. Buna göre:

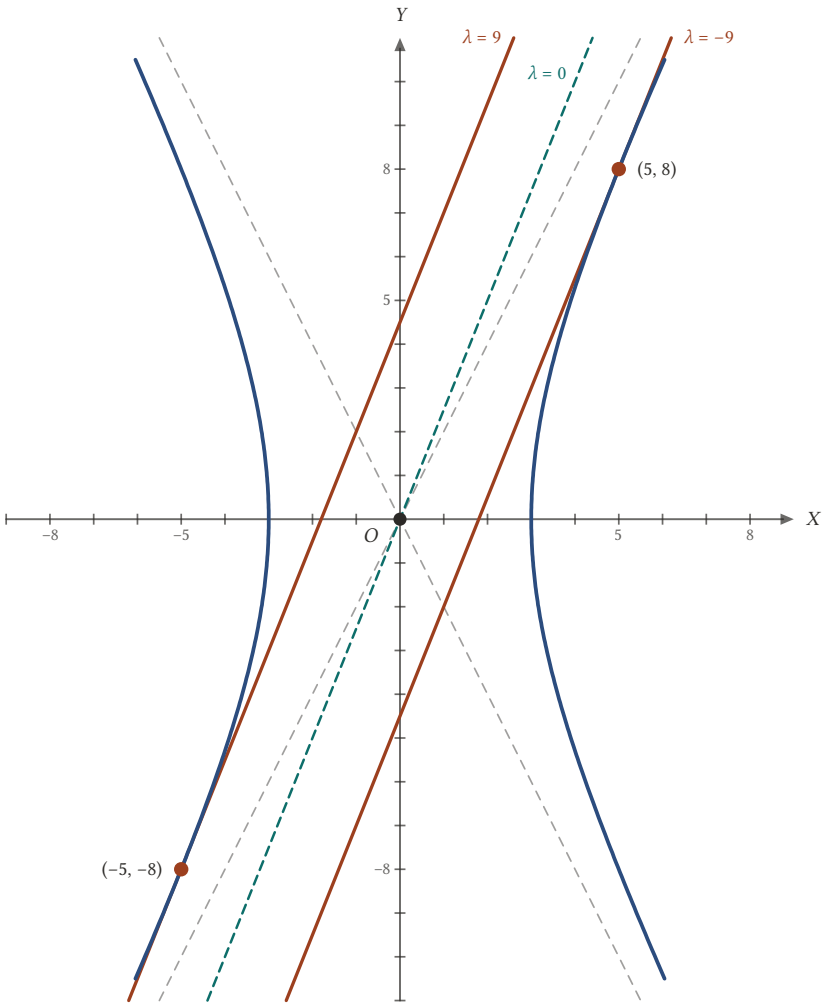
 CC BY-NC-SA 4.0

- $-9 < \lambda < 9$ ise doğru hiperbolü kesmez;
- $\lambda < -9$ ya da $\lambda > 9$ ise doğru hiperbolü iki noktada keser;
- $\lambda = -9$ ya da $\lambda = 9$ ise doğru hiperbole teğettir.

Adım 4: değme noktaları. Çift kök $x = -\dfrac{10\lambda}{2 \cdot 9} = -\dfrac{5\lambda}{9}$'dur.

- $\lambda = -9$ için $x = 5$ ve $y = \dfrac{5 \cdot 5 - 9}{2} = 8$; değme noktası $(5, 8)$'dir.
- $\lambda = 9$ için $x = -5$ ve $y = \dfrac{5 \cdot (-5) + 9}{2} = -8$; değme noktası $(-5, -8)$'dir.

Kontrol: $4 \cdot 25 - 64 = 36$.



Şekil 19.24: $\lambda = \pm 9$'da doğru hiperbole teğet; $-9 < \lambda < 9$ iken hiperbolü kesmez.

■

Alıştırma 19.37 (Bir noktadan çizilen teğetler). $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 16$ hiperbolüne $P(-1, -7)$ noktasından çizilen teğetlerin denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: iki koşul. Aranan teğet $y = mx + n$ olsun. (Düşey bir teğet $x = \pm 4$ olurdu; bunlar P'den geçmez.) Teğet P'den geçtiğinden

 CC BY-NC-SA 4.0

$$-7 = m\cdot(-1) + n \Rightarrow n = m - 7$$

olur. Ayrıca kesişme denkleminin çift kökü olmalıdır.
Adım 2: kesişme denklemi ve diskriminant. $x^2 - (mx+n)^2 = 16$, yani

$$(1-m^2)\,x^2 - 2mn\,x - (n^2+16) = 0.$$

Diskriminantın dörtte biri

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{4} &= m^2n^2 + (1-m^2)(n^2+16)\\ &= m^2n^2 + n^2 + 16 - m^2n^2 - 16m^2\\ &= n^2 + 16 - 16m^2\end{aligned}$$

dir. Bu, Sonuç 19.5 içindeki $n^2 = a^2m^2 - b^2$ koşulunun $a^2 = b^2 = 16$ için yazılmış hâlidir.
Adım 3: eğimler. $n = m - 7$ yazıp sıfıra eşitleyelim:

$$(m-7)^2 - 16m^2 + 16 = 0 \Rightarrow 15m^2 + 14m - 65 = 0.$$

Diskriminant

$$14^2 + 4\cdot 15\cdot 65 = 196 + 3900 = 4096 = 64^2$$

olduğundan

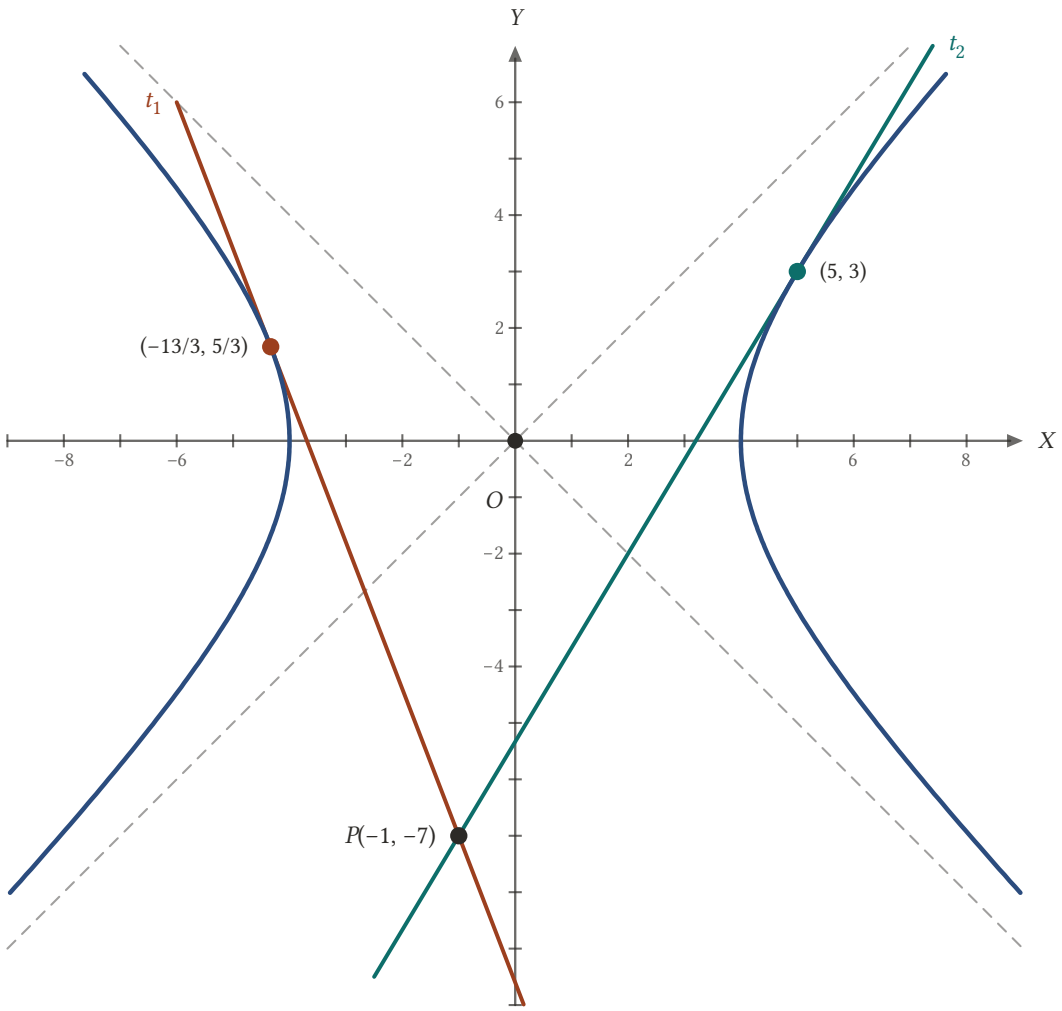
$$m = \frac{-14 \pm 64}{30}, \qquad m_1 = -\frac{13}{5}, \quad m_2 = \frac{5}{3}$$

bulunur. İkisi de ± 1'den farklıdır, yani teğetler asimptotlara paralel değildir.
Adım 4: teğetler. $m_1 = -\dfrac{13}{5}$ için $n_1 = -\dfrac{13}{5} - 7 = -\dfrac{48}{5}$; $m_2 = \dfrac{5}{3}$ için $n_2 = \dfrac{5}{3} - 7 = -\dfrac{16}{3}$'tür. Teğetler

$$t_1 : y = -\frac{13}{5}x - \frac{48}{5}, \qquad t_2 : y = \frac{5}{3}x - \frac{16}{3}$$

doğrularıdır.
Adım 5: değme noktaları. Sonuç 19.5 içindeki $\left(-\dfrac{a^2m}{n}, -\dfrac{b^2}{n}\right)$ formülü t_1 için $\left(-\dfrac{13}{3}, \dfrac{5}{3}\right)$, t_2 için $(5,3)$ verir. Kontrol: $\dfrac{169}{9} - \dfrac{25}{9} = 16$ ve $25 - 9 = 16$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 19.25: $P(-1,-7)$'den çizilen iki teğetten biri sol kola, öteki sağ kola değer.

■

Bu bölümde hiperbolü iki odağa uzaklık farkıyla tanımladık, standart denklemini kurduk ve asimptotlarından dış merkezliğine kadar bütün öğelerini bu denklemden okuduk. Dış merkezliğin $e > 1$ olduğunu ve odak–doğrultman özelliğini gördükten sonra sıra, bu özelliğin $e = 1$ durumuna, yani Parabol bölümüne geliyor.

 CC BY-NC-SA 4.0

20. Parabol

Konikler ailesinin üçüncü üyesine geldik. Elips ve Hiperbol bölümlerinde her iki eğriyi önce iki odakla tanımlamış, sonra onları bir odak ve bir doğrultmanla yeniden tanımlayabileceğimizi görmüştük: elipste bir noktanın odağa uzaklığının doğrultmana uzaklığına oranı 1'den küçük, hiperbolde 1'den büyük bir sabittir. Aradaki sınır durumu, yani oranın tam 1 olduğu durum, parabolü verir. Bu bölümde parabolün denklemini, teğetlerini ve bir doğruyla karşılıklı durumunu inceleyecek, sonra üç koniği tek bir kutupsal denklemde birleştireceğiz.

20.1 Parabolün Tanımı ve Öğeleri

Bir fener yansıtıcısının kesiti, bir top atışının yörüngesi ya da bir asma köprünün kablosu aynı eğrinin örnekleridir. Bu eğriyi geometrik olarak tek bir eşitlik tanımlar: noktanın sabit bir noktaya ve sabit bir doğruya uzaklıkları aynıdır.

Tanım 20.1 (Parabol). Düzlemde sabit bir F noktası ve F'den geçmeyen sabit bir Δ doğrusu verilsin. F'ye ve Δ'ya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerine **parabol** denir.

Yani bir P noktası, P'den Δ'ya inilen dikmenin ayağı K olmak üzere $|\,PF\,| = |\,PK\,|$ ise parabol üzerindedir. F'nin Δ üzerinde olmaması gerekir: $F \in \Delta$ olsaydı bu koşulu F'den geçen ve Δ'ya dik olan doğrunun noktaları sağlardı ve bir eğri elde etmezdik.

Tanım 20.2 (Odak ve doğrultman). Parabolün tanımındaki (Tanım 20.1) sabit F noktasına parabolün **odağı**, sabit Δ doğrusuna da parabolün **doğrultmanı** denir.

Yani odak ve doğrultman, parabolü belirleyen iki veridir. Parabolün odağını hep F ile, doğrultmanını hep Δ ile göstereceğiz.

Tanım 20.3 (Parabolün parametresi). Bir parabolün odağının doğrultmanına uzaklığına parabolün **parametresi** denir ve p ile gösterilir.

Yani $p > 0$ sayısı odak ile doğrultmanın birbirinden ne kadar uzak olduğunu söyler. Birazdan göreceğimiz gibi p büyüdükçe parabol "açılır".

Tanım 20.4 (Asal eksen). Bir parabolün odağından geçen ve doğrultmanına dik olan doğruya parabolün **asal ekseni** denir.

Yani asal eksen, odaktan doğrultmana inilen dikmenin taşıyıcı doğrusudur.

Tanım 20.5 (Köşe). Parabolün asal ekseni kestiği noktaya parabolün **köşesi** denir.

Yani köşe, parabolün asal eksen üzerindeki noktasıdır. Bu tanım asal eksenin parabolü tek bir noktada kestiğini varsayıyor; bunu hemen doğrulayalım.

Önerme 20.1 (Köşe, odak ile doğrultman arasının orta noktasıdır). *Asal eksenin doğrultmanı kestiği nokta H olsun. Asal eksen parabolü tek bir A noktasında keser ve bu nokta HF doğru parçasının orta noktasıdır:*

$$|\,AH\,| = |\,AF\,| = \frac{p}{2}.$$

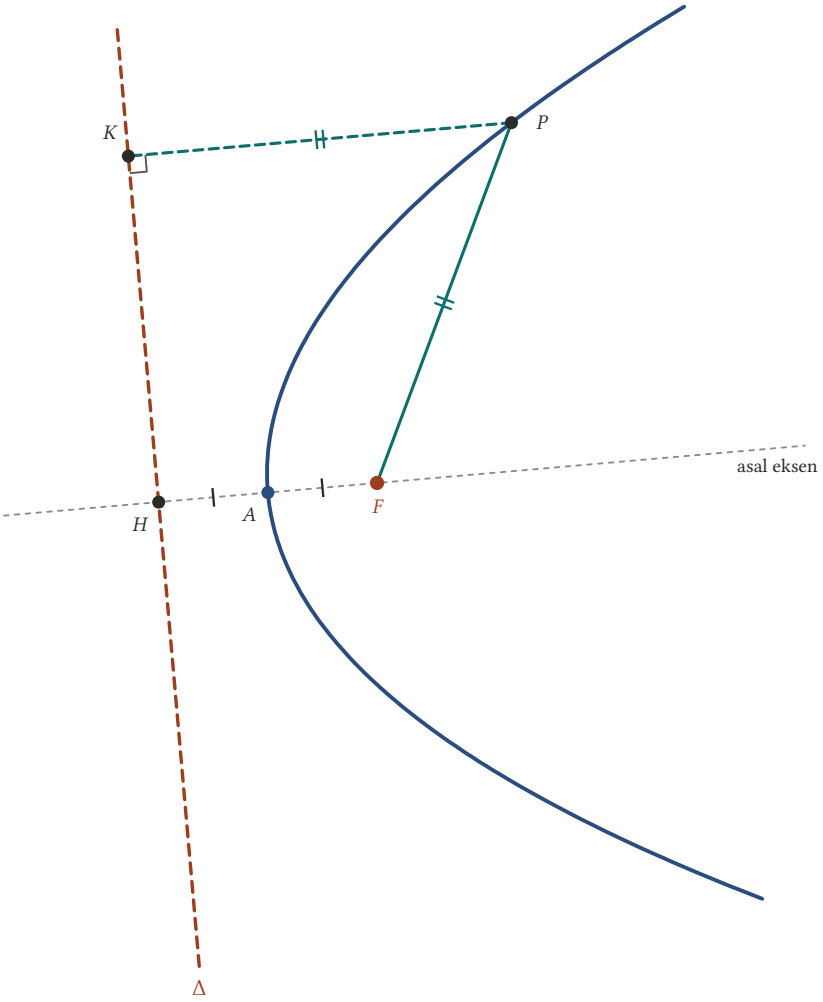
İspat.

 CC BY-NC-SA 4.0

A asal eksen üzerinde bir nokta olsun. Asal eksen Δ'ya dik olduğundan A'dan Δ'ya inilen dikme asal eksenin kendisi boyuncadır; dikmenin ayağı H'dir. Buna göre A'nın Δ'ya uzaklığı $|\,AH\,|$'dir ve A'nın parabol üzerinde olması

$$|\,AH\,| = |\,AF\,|$$

olması demektir. H ile F aynı doğru üzerinde iki farklı nokta olduğundan, bu doğru üzerinde H'ye ve F'ye eşit uzaklıkta bulunan tek nokta HF parçasının orta noktasıdır. Öyleyse asal eksen parabolü yalnızca bu orta noktada keser. $|\,HF\,| = p$ olduğundan $|\,AH\,| = |\,AF\,| = \frac{p}{2}$ bulunur.



Şekil 20.1: Parabolün öğeleri: odak F*, doğrultman* Δ*, köşe* A*. Her* P *noktası için* |PF| = |PK|*; köşe* HF *parçasının orta noktasıdır.*

■

20.2 Parabolün Standart Denklemi

Bir parabolün denklemini en sade biçimde yazmak için koordinat sistemini parabole göre yerleştiririz: köşeyi başlangıç noktasına, asal ekseni de koordinat eksenlerinden birine koyarız. Köşe, odak ile doğrultman arasının orta noktası olduğundan (Önerme 20.1) bu durumda odak ile doğrultman köşenin iki yanında, köşeden $\frac{p}{2}$ uzaklıkta kalır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 20.1 (Parabolün standart denklemi). *XY dik koordinat sisteminde parametresi p olan bir parabolün asal ekseni Y-ekseni, köşesi $O(0,0)$, odağı $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ ve doğrultmanı*

$$\Delta : y = -\frac{p}{2}$$

olsun. Bir $P(x,y)$ noktasının bu parabol üzerinde olması için gerek ve yeter koşul

$$x^2 = 2py$$

olmasıdır.

İspat.
$P(x,y)$ herhangi bir nokta olsun. P'den Δ'ya inilen dikmenin ayağı $H\left(x,-\frac{p}{2}\right)$'dir; dolayısıyla P'nin Δ'ya uzaklığı $\mid PH \mid = \left|y+\frac{p}{2}\right|$'dir. İki nokta arasındaki uzaklık formülünden (Dik Koordinatlar ve Uzaklık)

$$\mid PF \mid = \sqrt{(0-x)^2 + \left(\frac{p}{2}-y\right)^2}$$

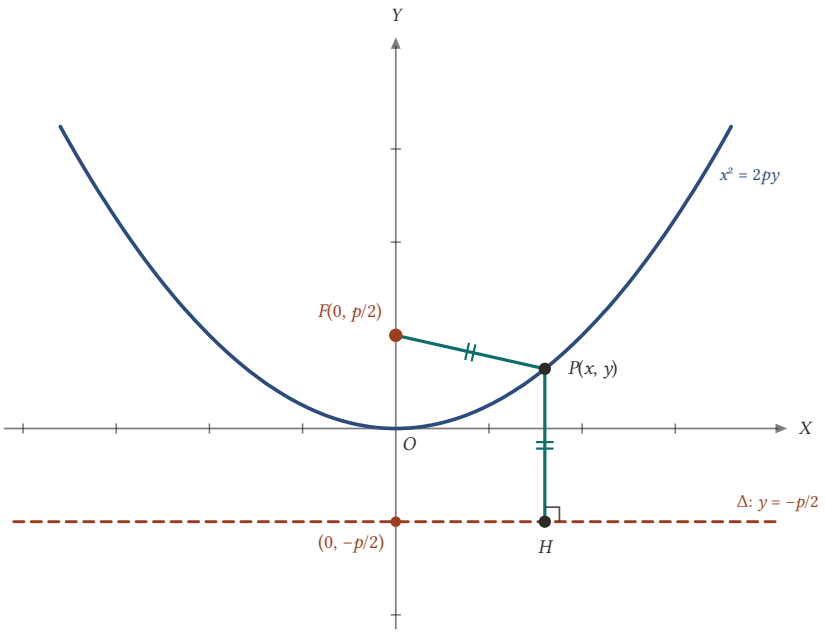
olur. P'nin parabol üzerinde olması $\mid PF \mid = \mid PH \mid$ demektir:

$$\sqrt{x^2 + \left(\frac{p}{2}-y\right)^2} = \left|y+\frac{p}{2}\right|.$$

İki taraf da negatif olmayan sayılar olduğundan bu eşitlik, iki tarafın karelerinin eşitliğine denktir:

$$x^2 + \left(\frac{p}{2}-y\right)^2 = \left(y+\frac{p}{2}\right)^2$$
$$x^2 + \frac{p^2}{4} - py + y^2 = y^2 + py + \frac{p^2}{4}$$
$$x^2 = 2py.$$

Her adım tersine çevrilebildiği için $\mid PF \mid = \mid PH \mid$ ile $x^2 = 2py$ denktir.



Şekil 20.2: Asal ekseni Y-ekseni olan parabol: |PF| = |PH| koşulu $x^2 = 2py$ denklemine denktir.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Tanım 20.6 (Standart denklem). $x^2 = 2py$ denklemine parabolün **standart denklemi** denir.

Yani köşesi başlangıç noktasında ve asal ekseni koordinat eksenlerinden biri olan bir parabolün denklemi, bu biçimde ya da birazdan göreceğimiz üç benzerinden birinde yazılır. Denklemde x yerine $-x$ yazınca denklem değişmediği için parabol asal eksenine göre simetriktir. Ayrıca $p > 0$ olduğundan $y = \dfrac{x^2}{2p} \geq 0$'dır, yani parabol tümüyle doğrultmanın odak tarafında, X-ekseninin üstünde kalır ve yukarı doğru açılır.
Asal eksen X-ekseni seçilirse ya da parabol ters yöne açılırsa aynı hesap, x ile y'nin rolleri ya da işaretler değişmiş olarak tekrarlanır.

Önerme 20.2 (Standart denklemin dört biçimi). *Parametresi p ve köşesi $O(0,0)$ olan, asal ekseni bir koordinat ekseni olan parabolün denklemi, odağına ve doğrultmanına göre aşağıdakilerden biridir:*

Denklem	*Odak*	*Doğrultman*	*Açıldığı yön*
$x^2 = 2py$	$(0, \frac{p}{2})$	$y = -\frac{p}{2}$	*yukarı*
$x^2 = -2py$	$(0, -\frac{p}{2})$	$y = \frac{p}{2}$	*aşağı*
$y^2 = 2px$	$(\frac{p}{2}, 0)$	$x = -\frac{p}{2}$	*sağa*
$y^2 = -2px$	$(-\frac{p}{2}, 0)$	$x = \frac{p}{2}$	*sola*

İspat.
İlk satır Teorem 20.1 ile kanıtlandı. Diğerlerini aynı yolla çıkaralım.
Aşağı açılan parabol. *$F\left(0, -\dfrac{p}{2}\right)$ ve $\Delta : y = \dfrac{p}{2}$ ise $\mid PF \mid = \mid PH \mid$ koşulu*

$$x^2 + \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{p}{2}\right)^2$$

olur. Parantezleri açınca $x^2 + py = -py$, yani $x^2 = -2py$ bulunur.
Sağa açılan parabol. *$F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ ve $\Delta : x = -\dfrac{p}{2}$ ise $P(x,y)$'nin Δ'ya uzaklığı $\left|x + \dfrac{p}{2}\right|$ olur ve koşul*

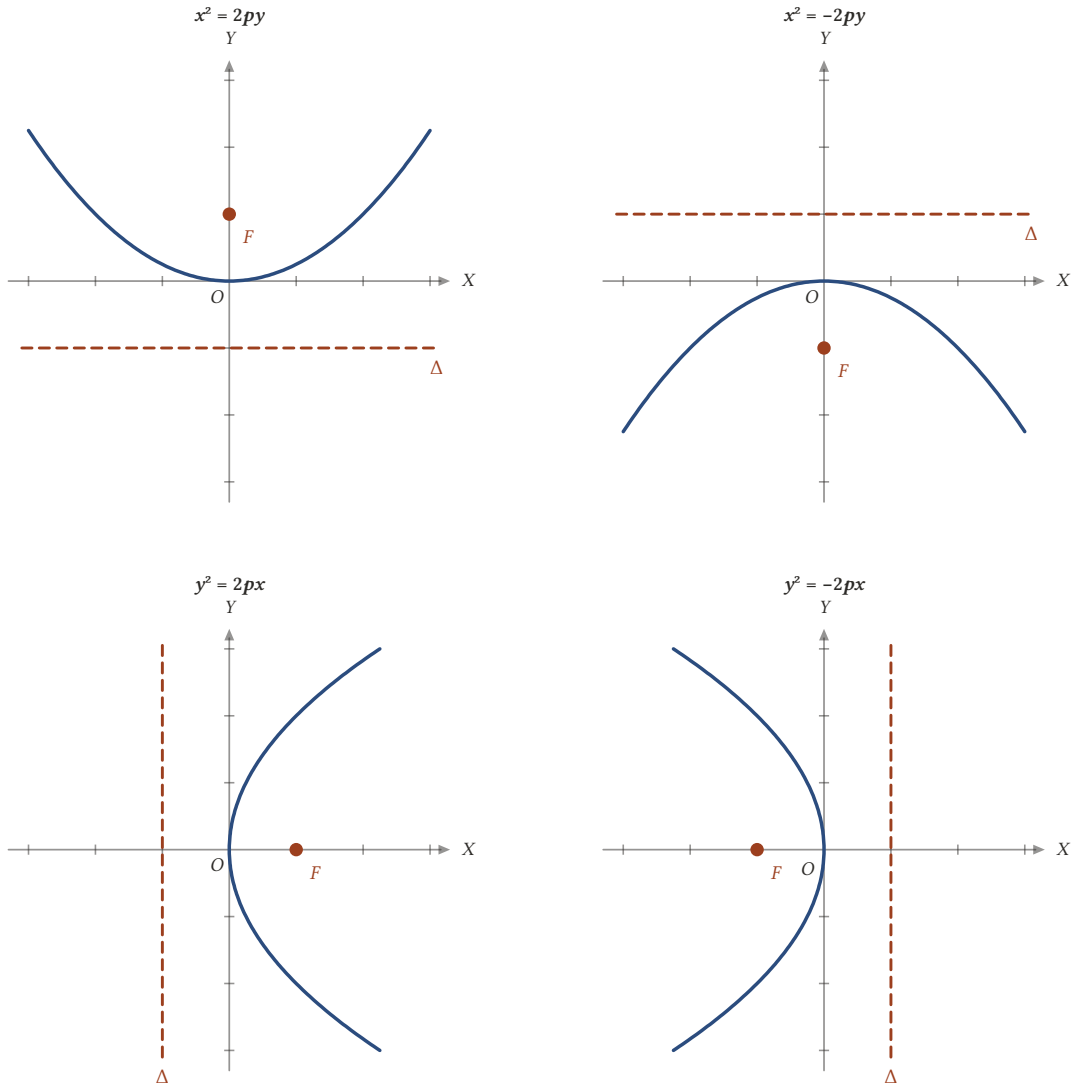
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

biçimini alır. Açınca $-px + y^2 = px$, yani $y^2 = 2px$ elde edilir.
Sola açılan parabol. *$F\left(-\dfrac{p}{2}, 0\right)$ ve $\Delta : x = \dfrac{p}{2}$ için koşul*

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

olur; buradan $px + y^2 = -px$, yani $y^2 = -2px$ çıkar. Her durumda iki taraf negatif olmadığından kare almak denkliği bozmaz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 20.3: Köşesi başlangıç noktasında olan parabolün dört konumu (p = 2): birinci dereceden geçen değişken asal ekseni söyler, işaret açılma yönünü belirler.

■

Tabloyu okumanın kısa yolu şudur: denklemde birinci dereceden geçen değişken asal ekseni söyler (y ise asal eksen Y-ekseni, x ise X-ekseni), o değişkenin katsayısının işareti de parabolün hangi yöne açıldığını gösterir. Katsayının mutlak değeri $2p$'dir; odak köşeden açılma yönünde $\frac{p}{2}$ uzaklıkta, doğrultman da ters yönde $\frac{p}{2}$ uzaklıktadır.

Örnek 20.1 ($x^2 = 12y$ parabolünün odağı ve doğrultmanı). $x^2 = 12y$ parabolünün odağını ve doğrultmanını bulunuz.

Çözüm.
Denklem $x^2 = 2py$ biçimindedir; y birinci dereceden geçtiği için asal eksen Y-ekseni, köşe $O(0,0)$'dır. Katsayıları karşılaştırırsak

$$2p = 12 \Longrightarrow p = 6$$

 CC BY-NC-SA 4.0

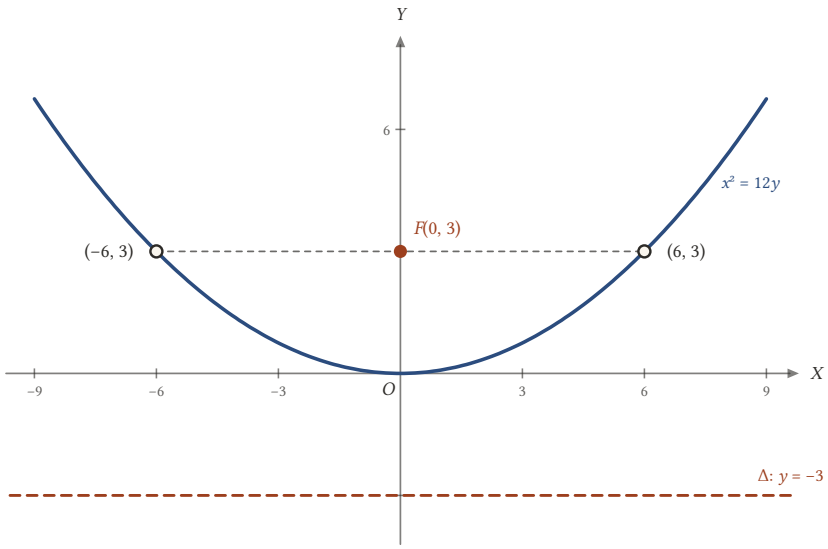
bulunur. Standart denklemin dört biçimine göre (Önerme 20.2) odak $F\left(0, \frac{p}{2}\right) = F(0,3)$, doğrultman da $\Delta : y = -\frac{p}{2}$, yani $\Delta : y = -3$'tür.
■

Örnek 20.2 ($x^2 = 12y$ parabolünün grafiği). $x^2 = 12y$ parabolünün grafiğini çiziniz.

Çözüm.
Önceki örnekte $p = 6$, $F(0,3)$ ve $\Delta : y = -3$ bulduk. Grafiği çizmek için birkaç nokta yeter:

- Köşe $O(0,0)$'dır ve parabol Y-eksenine göre simetriktir.
- $y = \frac{x^2}{12} \geq 0$ olduğundan parabol yukarı açılır.
- Odaktan geçen yatay doğru üzerinde $y = 3$ için $x^2 = 36$, yani $x = \pm 6$ bulunur: $(-6,3)$ ve $(6,3)$ noktaları parabol üzerindedir. Bu iki nokta parabolün odak hizasında ne kadar açık olduğunu gösterir; aralarındaki uzaklık $12 = 2p$'dir.
- $x = \pm 3$ için $y = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ olur.

Bu noktaları köşeden geçen, simetrik ve yukarı açılan bir eğriyle birleştiririz.



Şekil 20.4: $x^2 = 12y$: köşe O, odak $F(0,3)$, doğrultman $y = -3$; odak hizasındaki kirişin uzunluğu $2p = 12$.

■

Örnek 20.3 ($y^2 = 8x$ parabolünün odağı ve doğrultmanı). $y^2 = 8x$ parabolünün odağını ve doğrultmanını bulunuz.

Çözüm.
Bu kez x birinci dereceden geçiyor; asal eksen X-ekseni, köşe $O(0,0)$'dır ve denklem $y^2 = 2px$ biçimindedir. Katsayılardan

$$2p = 8 \Longrightarrow p = 4$$

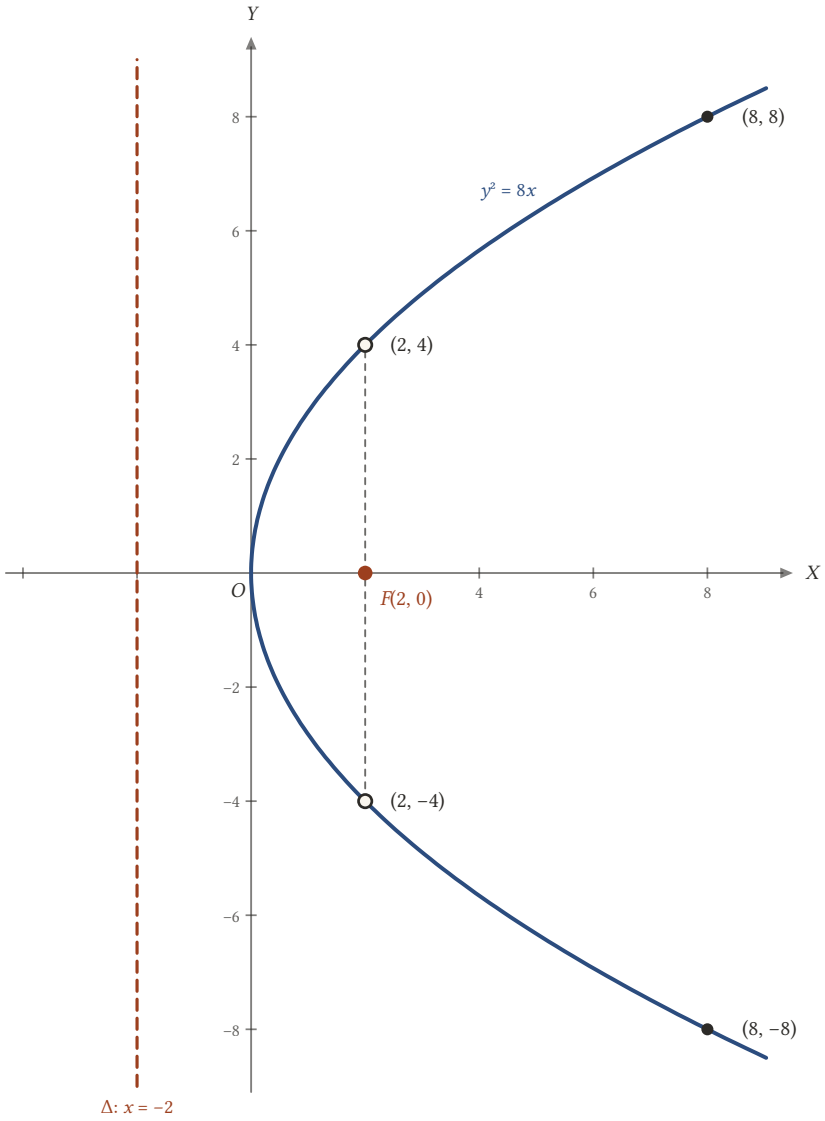
bulunur. Buna göre odak $F\left(\frac{p}{2}, 0\right) = F(2,0)$, doğrultman da $\Delta : x = -2$'dir.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 20.4 (y² = 8x parabolünün grafiği). $y^2 = 8x$ parabolünün grafiğini çiziniz.

Çözüm.
Önceki örnekte $p = 4$, $F(2, 0)$ ve $\Delta : x = -2$ bulduk.

- Köşe $O(0, 0)$'dır ve parabol X-eksenine göre simetriktir (y yerine $-y$ yazınca denklem değişmez).
- $x = \dfrac{y^2}{8} \geq 0$ olduğundan parabol sağa açılır.
- Odaktan geçen dikey doğru üzerinde $x = 2$ için $y^2 = 16$, yani $y = \pm 4$'tür: $(2, -4)$ ve $(2, 4)$ parabol üzerindedir.
- $x = 8$ için $y^2 = 64$, yani $y = \pm 8$ olur.



Şekil 20.5: $y^2 = 8x$: köşe O, odak $F(2, 0)$, doğrultman $x = -2$.

■

Tersine, parabol üzerindeki birkaç noktadan denklemi de bulabiliriz.

Örnek 20.5 (İki noktası verilen parabol). Köşesi başlangıç noktasında, asal ekseni koordinat eksenlerinden biri olan ve $P_1(2, -2)$ ile $P_2(2, 2)$ noktalarından geçen parabolün denklemini, odağını ve doğrultmanını bulunuz.

 CC BY-NC-SA 4.0

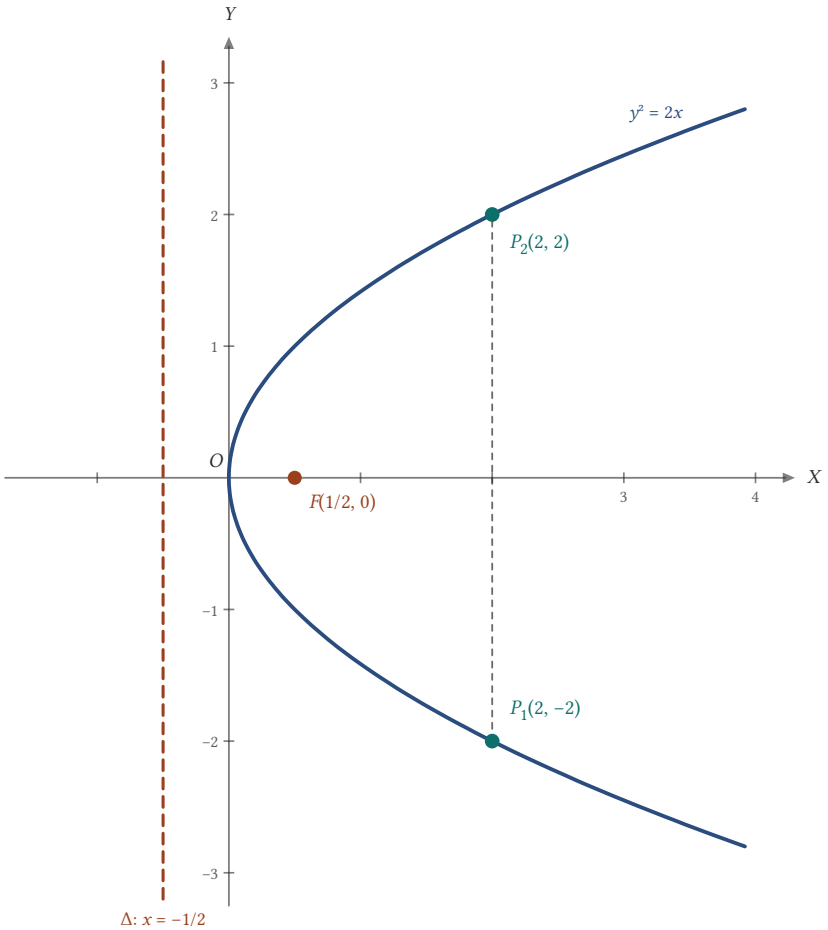
Çözüm.
Adım 1: asal ekseni belirleme. Asal eksen Y-ekseni olsaydı denklem $x^2 = \pm 2py$ biçiminde olurdu; bu durumda $y = \pm\dfrac{x^2}{2p}$ değeri x tarafından tek türlü belirlenirdi ve aynı $x = 2$ apsisli iki farklı nokta parabol üzerinde olamazdı. Öyleyse asal eksen X-eksenidir. Zaten P_1 ile P_2 X-eksenine göre simetriktir.
Adım 2: açılma yönü. Denklem $y^2 = 2px$ ya da $y^2 = -2px$ biçimindedir. Noktaların apsisi $2 > 0$ olduğundan parabol sağa açılır ve denklem $y^2 = 2px$'tir.
Adım 3: p'yi bulma. $P_2(2, 2)$ denklemi sağlamalıdır:

$$2^2 = 2p \cdot 2 \Longrightarrow 4 = 4p \Longrightarrow p = 1.$$

$P_1(2, -2)$ de $(-2)^2 = 4$ olduğundan aynı denklemi sağlar. Böylece aranan parabol

$$y^2 = 2x$$

olur. Odağı $F\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, doğrultmanı $\Delta : x = -\dfrac{1}{2}$'dir.



Şekil 20.6: P_1 ile P_2 X-eksenine göre simetrik olduğundan asal eksen X-eksenidir; parabol $y^2 = 2x$.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

20.3 Köşesi Başka Bir Noktada Olan Paraboller

Asal ekseni koordinat eksenlerinden birine paralel olan ama köşesi başlangıç noktasında olmayan bir parabolün denklemi, eksenleri köşeye öteleyerek standart biçime getirilir (Öteleme). Okuldan tanıdığımız $y = ax^2 + bx + c$ eğrileri tam olarak bu türdendir.

Örnek 20.6 (y = ax² + bx + c parabolünün köşesi). $a \neq 0$ olmak üzere denklemi $y = ax^2 + bx + c$ olan eğrinin, köşesi

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

noktası olan bir parabol olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
Adım 1: tam kareye tamamlama. a'yı ortak paranteze alıp tamamlayalım:

$$\begin{aligned} y &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}. \end{aligned}$$

$h = -\dfrac{b}{2a}$ ve $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ dersek denklem $y - k = a(x - h)^2$ olur.
Adım 2: öteleme. Eksenleri $O'(h, k)$ noktasına öteleyelim: $x' = x - h$, $y' = y - k$. Yeni $X'Y'$ sisteminde denklem

$$y' = ax'^2, \quad \text{yani} \quad x'^2 = \frac{1}{a}\,y'$$

olur.
Adım 3: standart biçimi tanıma. $a > 0$ ise bu denklem $p = \dfrac{1}{2a}$ ile $x'^2 = 2py'$ biçimindedir; $a < 0$ ise $p = -\dfrac{1}{2a} = \dfrac{1}{2\mid a \mid}$ ile $x'^2 = -2py'$ biçimindedir. Her iki durumda da eğri, asal ekseni Y'-ekseni ve köşesi O' olan bir paraboldür (Önerme 20.2). O''nün eski sistemdeki koordinatları (h, k) olduğundan köşe

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

noktasıdır. Asal eksen $x = -\dfrac{b}{2a}$ dikey doğrusudur; parabol $a > 0$ ise yukarı, $a < 0$ ise aşağı açılır.
Odak ve doğrultman. İki durumda da $X'Y'$ sisteminde odak $\left(0, \dfrac{1}{4a}\right)$, doğrultman $y' = -\dfrac{1}{4a}$'dır ($a > 0$ iken $\dfrac{p}{2} = \dfrac{1}{4a}$, $a < 0$ iken $-\dfrac{p}{2} = \dfrac{1}{4a}$). Eski sisteme dönersek odak $\left(h, k + \dfrac{1}{4a}\right)$, doğrultman $y = k - \dfrac{1}{4a}$ olur.
■

 CC BY-NC-SA 4.0

Parabolün köşesini, odağını ve doğrultmanını üç adımda bulmak

1. Karesi alınan değişkenin terimlerini tam kareye tamamlayın, öbür değişkeni ve sabiti karşı tarafta k katsayısıyla toplayın: $(x-h)^2 = k(y-v)$ ya da $(y-v)^2 = k(x-h)$.
2. Eksenleri köşeye öteleyin: $x' = x-h$, $y' = y-v$. Denklem $x'^2 = ky'$ ya da $y'^2 = kx'$ olur; $|\,k\,| = 2p$'dir ve k'nın işareti açılma yönünü verir.
3. Odağı ve doğrultmanı yeni sistemde dört biçim tablosundan (Önerme 20.2) okuyun, sonra $x = x' + h$, $y = y' + v$ ile eski sisteme geri dönün.

Örnek 20.7 (y = x² − 4x + 1 parabolü). $y = x^2 - 4x + 1$ parabolünün köşesini, odağını ve doğrultmanını bulunuz.

Çözüm.
Adım 1. Tam kareye tamamlayalım: $x^2 - 4x = (x-2)^2 - 4$ olduğundan

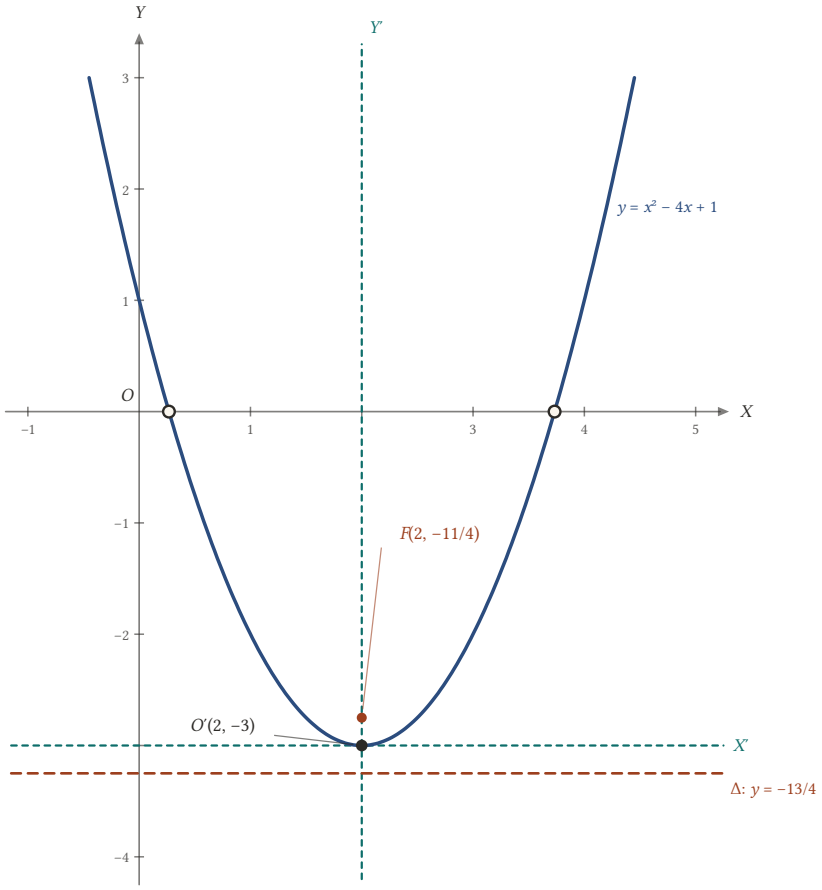
$$y = (x-2)^2 - 3, \quad \text{yani} \quad (x-2)^2 = y + 3.$$

Adım 2. $x' = x-2$, $y' = y+3$ ötelemesiyle denklem $x'^2 = y'$ olur. Köşe $O'(2,-3)$'tür. $x'^2 = 2py'$ ile karşılaştırınca $2p = 1$, yani $p = \dfrac{1}{2}$ bulunur; parabol yukarı açılır.
Adım 3. Yeni sistemde odak $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$, doğrultman $y' = -\dfrac{1}{4}$'tür. Eski sisteme dönersek

$$F\left(2, -3 + \frac{1}{4}\right) = F\left(2, -\frac{11}{4}\right), \qquad \Delta : y = -3 - \frac{1}{4} = -\frac{13}{4}$$

bulunur. Köşe formülüyle de $a=1$, $b=-4$, $c=1$ için $-\dfrac{b}{2a} = 2$ ve $\dfrac{4ac-b^2}{4a} = \dfrac{4-16}{4} = -3$ çıkar.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 20.7: Eksenleri köşe $O'(2,-3)$'e ötelemek denklemi $x'^2 = y'$ standart biçimine getirir; odak $F(2,-11/4)$, doğrultman $y=-13/4$.

■

20.4 Parabolün Parametrik Denklemleri

Parabolün noktalarını tek bir parametreyle taramak, özellikle çizim ve hesaplarda işe yarar. $y^2=2px$ parabolünde her y değerine tek bir $x=\dfrac{y^2}{2p}$ karşılık geldiğinden y'nin kendisi doğal bir parametredir.

Önerme 20.3 (Parabolün parametrik denklemleri). *$y^2=2px$ parabolü*

$$x=\frac{t^2}{2p},\qquad y=t\qquad (t\in\mathbb{R})$$

parametrik denklemleriyle verilir. Parabolün üst yarısı $x=t$, $y=\sqrt{2pt}$; alt yarısı $x=t$, $y=-\sqrt{2pt}$ ($t\geq 0$) biçiminde de yazılabilir.

İspat.
Her t için $\left(\dfrac{t^2}{2p},t\right)$ noktası $y^2=t^2=2p\cdot\dfrac{t^2}{2p}=2px$ eşitliğini sağlar. Tersine $P(x,y)$ parabol üzerindeyse $t=y$ alınırsa $x=\dfrac{y^2}{2p}=\dfrac{t^2}{2p}$ olur. Böylece $t\in\mathbb{R}$ parabolün her noktasını tam bir kez verir.

 CC BY-NC-SA 4.0

İkinci biçim için: parabol üzerinde $x = \dfrac{y^2}{2p} \geq 0$'dır ve $y^2 = 2px$ denkleminin y'ye göre çözümü $y = \pm\sqrt{2px}$'tir. $x = t \geq 0$ denirse $y \geq 0$ olan noktalar $y = \sqrt{2pt}$, $y \leq 0$ olan noktalar $y = -\sqrt{2pt}$ ile verilir. İkisi yalnız köşede ($t = 0$) ortaktır. ■

Yani tek kökle yazılan $x = t$, $y = \sqrt{2pt}$ denklemleri parabolün yalnız yarısını çizer; bütün parabolü tek parçada elde etmek için ilk biçimi kullanırız. $x^2 = 2py$ parabolü için rolleri değiştirerek $x = t$, $y = \dfrac{t^2}{2p}$ ($t \in \mathbb{R}$) yazılır.

20.5 Parabolün Bir Noktasındaki Teğet

Çemberde teğeti, çemberle tek ortak noktası olan doğru olarak tanımlamıştık (Tanım 4.6). Parabolde bu tanımı olduğu gibi kullanamayız: asal eksene paralel her doğru parabolü tek bir noktada keser ama parabolün "içine" girip devam eder. Örneğin $y = 2$ doğrusu $y^2 = 8x$ parabolüyle yalnız $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ noktasında buluşur, yine de bu doğruyu teğet saymak istemeyiz. Bu yüzden eksene paralel doğruları ayırırız.

Tanım 20.7 (Parabolün teğeti). Bir parabolün asal eksenine paralel olmayan ve parabolle tek bir ortak noktası bulunan doğruya parabolün **teğeti**, ortak noktaya da **değme noktası** denir.

Yani teğet parabole bir noktada dokunur ve parabolü kesip öbür tarafına geçmez. Bir noktadaki teğetin denklemini bulmak için önce eğimini türevle hesaplayacak, sonra bulduğumuz doğrunun tanımdaki koşulları sağladığını doğrudan göstereceğiz.

Teorem 20.2 (Parabolün bir noktasındaki teğet). *$P(x_0, y_0)$ noktası $y^2 = 2px$ parabolü üzerinde olsun. Parabolün P'deki teğeti tektir ve denklemi*

$$y_0\, y = p\,(x + x_0)$$

dır.

İspat.
Adım 1: eğimi türevle bulma ($y_0 \neq 0$). *(Sezgisel hesap; kesin doğrulama 2. adımdadır.) P'nin yakınında parabol, $y_0 > 0$ ise üst yarı $y = \sqrt{2px}$, $y_0 < 0$ ise alt yarı $y = -\sqrt{2px}$ olarak bir $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğidir. Teğetin eğimi $m = f'(x_0) = y'(x_0)$'dır. $y^2 = 2px$ eşitliğinin iki tarafının x'e göre türevini alalım; zincir kuralından $(y^2)' = 2yy'$ olduğundan*

$$2y\,y' = 2p \Longrightarrow y' = \frac{p}{y}$$

bulunur. Buna göre teğetin eğimi $m = \dfrac{p}{y_0}$'dır ve teğet

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

doğrusudur. İki tarafı y_0 ile çarparsak $y_0 y - y_0^2 = px - px_0$ olur. P parabol üzerinde olduğundan $y_0^2 = 2px_0$'dır; yerine yazınca

$$y_0 y = px - px_0 + 2px_0 = p(x + x_0)$$

elde edilir.
Adım 2: tanımı doğrulama (her y_0 için). *Asal eksen X-ekseni olduğundan eksene paralel doğrular $y = \text{sabit}$ biçimindeki yatay doğrulardır. $y_0 y = p(x + x_0)$ doğrusunda x'in katsayısı $p \neq 0$ olduğundan bu doğru yatay değildir. Ortak noktaları bulalım: doğrudan $px = y_0 y - px_0$ çekip $y^2 = 2px$ denkleminde yerine yazarsak*

$$y^2 = 2y_0 y - 2px_0 = 2y_0 y - y_0^2 \Longrightarrow (y - y_0)^2 = 0$$

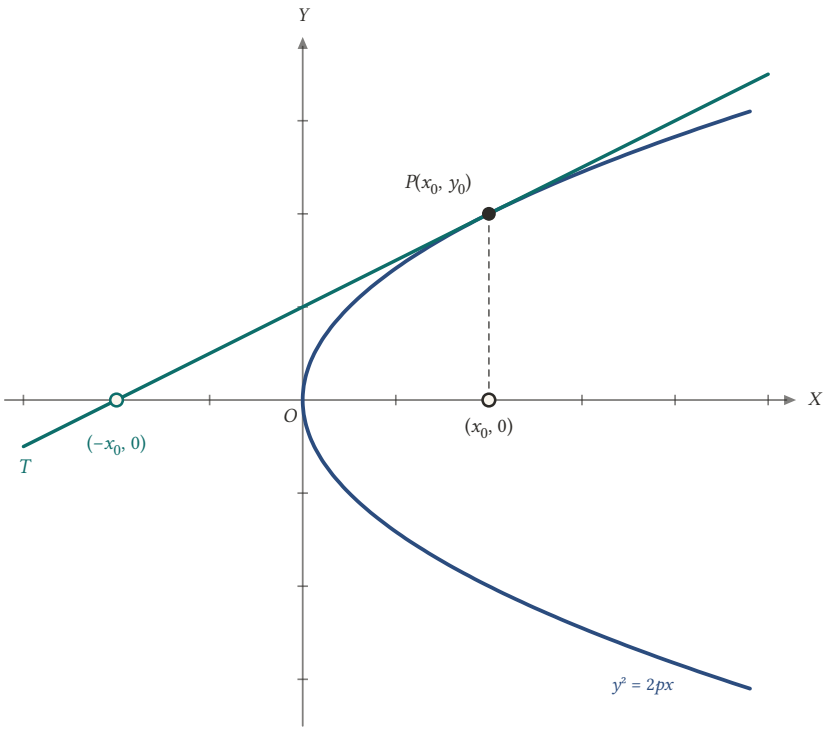
 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Tek çözüm $y = y_0$'dır ve buna $x = x_0$ karşılık gelir. Yani doğrunun parabolle tek ortak noktası P'dir; doğru P'deki bir teğettir. Bu adım $y_0 = 0$ durumunu da kapsar: köşede ($x_0 = y_0 = 0$) denklem $x = 0$, yani Y-ekseni olur.

Adım 3: teklik. *P'den geçen ve yatay olmayan her doğru $x - x_0 = k(y - y_0)$ biçiminde yazılabilir. Bunu $y^2 = 2px$'te yerine koyarsak*

$$y^2 - 2pk\,y + 2pk\,y_0 - y_0^2 = 0$$

olur. Bu denklemin kökleri y_0 ve $2pk - y_0$'dır (çarpımları $2pky_0 - y_0^2$, toplamları $2pk$). Doğrunun parabolle tek ortak noktası olması için iki kökün çakışması, yani $2pk - y_0 = y_0$, $k = \dfrac{y_0}{p}$ olması gerekir. Bu k ile doğru $px - px_0 = y_0y - y_0^2$, yani yine $y_0y = p(x + x_0)$ olur. Öyleyse P'deki teğet tektir.



Şekil 20.8: $y^2 = 2px$ *parabolünün* $P(x_o, y_o)$ *noktasındaki teğeti* $y_oy = p(x + x_o)$*; teğet* X*-eksenini* $(-x_o, 0)$*'da keser (çizimde* $p = 1$*,* $P(2, 2)$*).*

■

Teğet denklemini hatırlamanın kolay bir yolu var: $y^2 = 2px$ denkleminde y^2 yerine y_0y, $2x$ yerine $x + x_0$ yazılır. Teğette $y = 0$ alınırsa $x = -x_0$ bulunur; yani teğet asal ekseni, değme noktasının asal eksen üzerindeki izdüşümünün köşeye göre simetriğinde keser.

Sonuç 20.1 ($x^2 = 2py$ parabolünün teğeti). *$P(x_0, y_0)$ noktası $x^2 = 2py$ parabolü üzerinde ise parabolün P'deki teğeti*

$$x_0\,x = p\,(y + y_0)$$

doğrusudur.

İspat.
Teğet teoreminin (Teorem 20.2) ispatında x ile y'nin rolleri değiştirilir. Asal eksen bu kez Y-ekseni olduğundan eksene paralel doğrular dikey doğrulardır; $x_0x = p(y + y_0)$ doğrusunda y'nin katsayısı $p \neq$

0 olduğundan doğru dikey değildir. Doğrudan $py = x_0x - py_0$ *çekip* $x^2 = 2py$*'de yerine yazınca,* $x_0^2 = 2py_0$ *olduğundan*

$$x^2 = 2x_0x - 2py_0 = 2x_0x - x_0^2 \Longrightarrow (x - x_0)^2 = 0$$

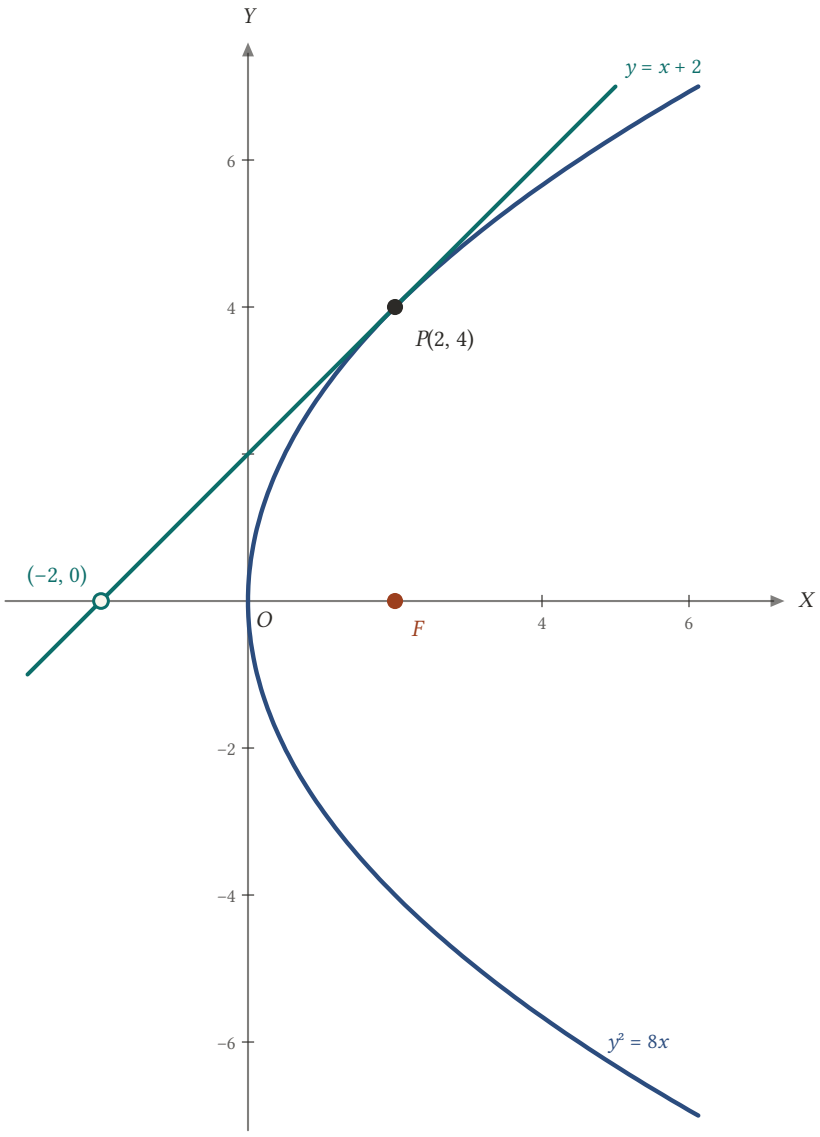
bulunur. Tek ortak nokta P*'dir. Teklik de teğet teoreminin (Teorem 20.2) 3. adımındaki gibi,* P*'den geçen dikey olmayan doğrular* $y - y_0 = k(x - x_0)$ *biçiminde yazılarak gösterilir.* ■

Örnek 20.8 ($y^2 = 8x$ parabolüne (2, 4)'te teğet). $y^2 = 8x$ parabolünün $P(2, 4)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Önce P'nin parabol üzerinde olduğunu kontrol edelim: $4^2 = 16 = 8 \cdot 2$. $2p = 8$ olduğundan $p = 4$'tür. Teğet denkleminde (Teorem 20.2) $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ yazarsak

$$4y = 4(x + 2) \Longrightarrow y = x + 2$$

bulunur. Teğetin eğimi 1'dir ve teğet X-eksenini $(-2, 0)$ noktasında, yani $(-x_0, 0)$'da keser.



Şekil 20.9: $y^2 = 8x$ parabolünün $P(2, 4)$ noktasındaki teğeti $y = x + 2$.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Örnek 20.9 (x² = 12y parabolüne (6, 3)'te teğet). $x^2 = 12y$ parabolünün $P(6,3)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Çözüm.
$6^2 = 36 = 12 \cdot 3$ olduğundan P parabol üzerindedir. $2p = 12$, yani $p = 6$'dır. $x^2 = 2py$ parabolünün teğet denkleminde (Sonuç 20.1) $x_0 = 6$, $y_0 = 3$ yazarsak

$$6x = 6(y+3) \Longrightarrow y = x - 3$$

bulunur. $P(6,3)$, odak hizasındaki kirişin ucudur (bkz. Örnek 20.2). Teğet Y-eksenini $(0,-3)$'te keser; bu nokta doğrultman $y = -3$ üzerindedir.
■

20.6 Parabol ile Doğru

Bir doğru ile parabolün ortak noktalarını bulmak, çemberde olduğu gibi iki denklemi birlikte çözmek demektir. Doğrunun denklemini parabolünkinde yerine yazınca ikinci dereceden bir denklem çıkar ve karşılıklı durumu bu denklemin diskriminantı belirler.

Teorem 20.3 (Doğru ile parabolün ortak noktaları). *$y^2 = 2px$ parabolü ile $m \neq 0$ olmak üzere $d : y = mx + n$ doğrusu verilsin ve*

$$\delta = 4p\,(p - 2mn)$$

olsun. Buna göre:

- *$\delta > 0$ ise d parabolü iki noktada keser;*
- *$\delta = 0$ ise d parabole teğettir;*
- *$\delta < 0$ ise d parabolü kesmez.*

$m = 0$ ise d asal eksene paraleldir ve parabolü tek bir noktada keser. Dikey bir $x = k$ doğrusu $k > 0$ ise parabolü iki noktada keser, $k = 0$ ise köşedeki teğettir, $k < 0$ ise parabolü kesmez.

İspat.
Kesişim denklemi. *(x, y) ortak nokta ise $y = mx + n$ ve $y^2 = 2px$'tir. Birinciyi ikinciye yazalım:*

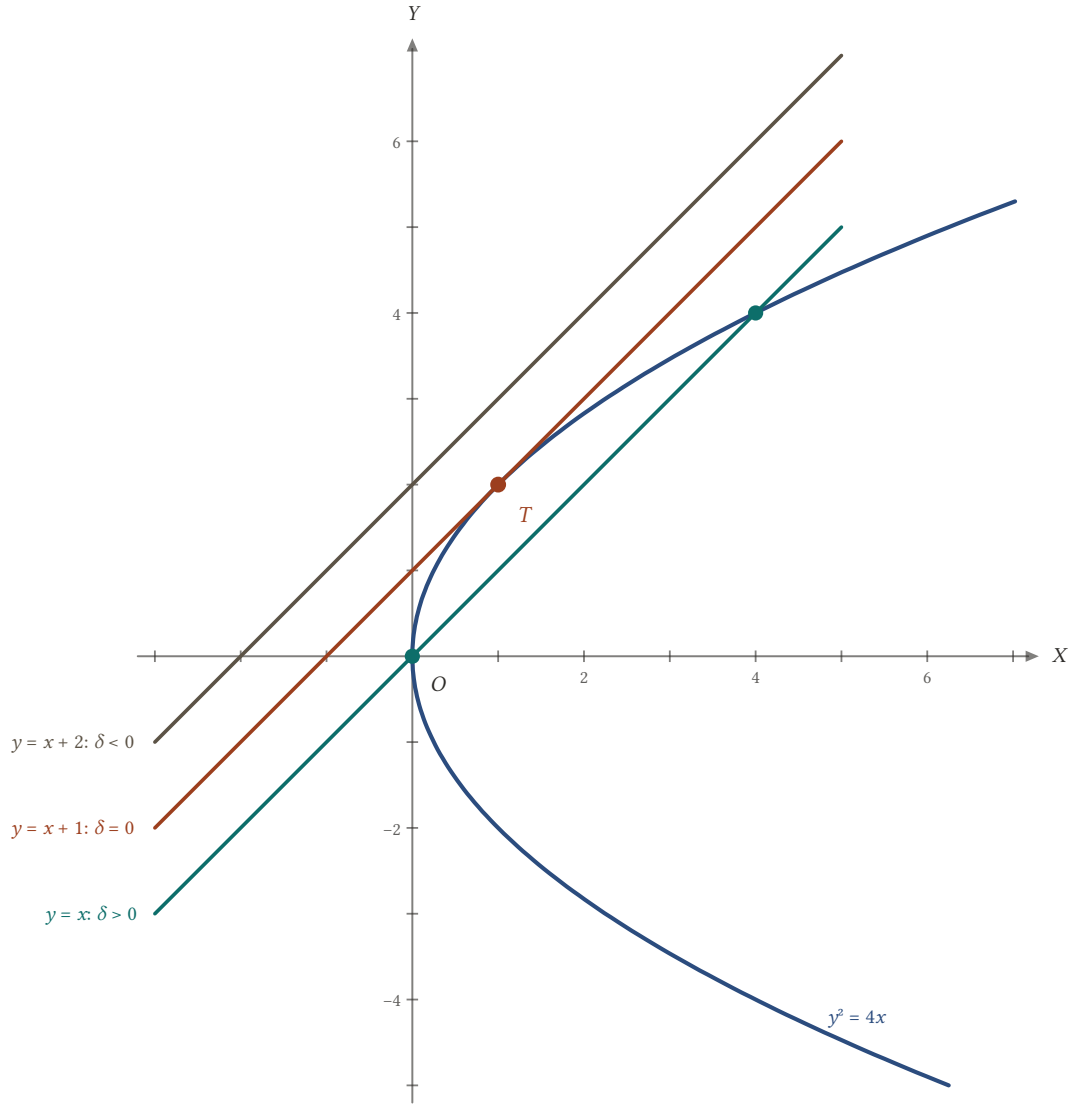
$$\begin{aligned} 2px = (mx+n)^2 &= m^2x^2 + 2mn\,x + n^2 \\ 0 &= m^2x^2 + 2(mn - p)\,x + n^2. \end{aligned}$$

Tersine bu denklemin her x kökü için $y = mx + n$ alınırsa $y^2 = (mx+n)^2 = 2px$ olur. Yani ortak noktalar, bu denklemin kökleriyle bire bir eşlenir.
Diskriminant. *$m \neq 0$ iken denklem ikinci derecedendir ve diskriminantı*

$$\begin{aligned} \delta &= \big(\,2(mn-p)\big)^2 - 4m^2n^2 \\ &= 4m^2n^2 - 8mnp + 4p^2 - 4m^2n^2 \\ &= 4p\,(p - 2mn) \end{aligned}$$

olur. $\delta > 0$ ise iki farklı kök, dolayısıyla iki ortak nokta vardır. $\delta < 0$ ise reel kök, dolayısıyla ortak nokta yoktur. $\delta = 0$ ise tek (çift katlı) kök, dolayısıyla tek ortak nokta vardır; $m \neq 0$ olduğundan d asal eksene paralel değildir ve teğet tanımı (Tanım 20.7) gereği teğettir.
Özel doğrular. *$m = 0$ ise kesişim denklemi $-2px + n^2 = 0$ birinci dereceden denklemine döner; tek çözümü $x = \dfrac{n^2}{2p}$'dir ve ortak nokta $\left(\dfrac{n^2}{2p}, n\right)$'dir. d asal eksene paralel olduğundan bu nokta bir değme noktası değildir. $x = k$ doğrusu için $y^2 = 2pk$ denklemi $k > 0$ iken $y = \pm\sqrt{2pk}$ olmak üzere iki, $k = 0$ iken yalnız $y = 0$ çözümünü verir, $k < 0$ iken çözümü yoktur. $x = 0$ doğrusu asal eksene paralel değildir ve köşedeki teğettir (Teorem 20.2).*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 20.10: $y^2 = 4x$ *parabolü ve eğimi 1 olan üç doğru:* $\delta = 4p(p - 2mn) = 8(2 - 2n)$ *işaretine göre kesen, teğet (değme noktası* $T(1, 2)$*) ve kesmeyen doğru.*

■

Şekildeki doğrular için $p = 2$, $m = 1$ olduğundan $\delta = 8(2 - 2n)$'dir: $n = 0$ için $\delta = 16 > 0$, $n = 1$ için $\delta = 0$, $n = 2$ için $\delta = -16 < 0$.

Sonuç 20.2 (Teğetlik koşulu). *$m \neq 0$ olmak üzere $y = mx + n$ doğrusunun $y^2 = 2px$ parabolüne teğet olması için gerek ve yeter koşul*

$$2mn = p$$

olmasıdır. Bu durumda değme noktası $\left(\frac{n}{m}, 2n\right)$*'dir.*

İspat.
$p > 0$ olduğundan $\delta = 4p(p - 2mn) = 0$ koşulu $p = 2mn$'ye denktir; ilk kısım doğru ile parabolün ortak noktalarını veren teoremden (Teorem 20.3) çıkar. $\delta = 0$ iken kesişim denkleminin çift katlı kökü

$$x_0 = -\frac{2(mn-p)}{2m^2} = \frac{p-mn}{m^2}$$

dir. $p = 2mn$ *yazarsak* $x_0 = \dfrac{2mn-mn}{m^2} = \dfrac{n}{m}$ *olur. Buna karşılık gelen ordinat* $y_0 = m \cdot \dfrac{n}{m} + n = 2n$*'dir.* ■

Yani eğimi m olan teğet tektir: $n = \dfrac{p}{2m}$ olmak zorundadır.

Örnek 20.10 (Eğimi verilen teğet). $y^2 = 8x$ parabolünün eğimi 2 olan teğetinin denklemini ve değme noktasını bulunuz.

Çözüm.
$2p = 8$, yani $p = 4$'tür. Teğet $y = 2x + n$ biçimindedir ve teğetlik koşuluna (Sonuç 20.2) göre

$$2 \cdot 2 \cdot n = 4 \Longrightarrow n = 1$$

olmalıdır. Teğet $y = 2x + 1$'dir. Değme noktası $\left(\dfrac{n}{m}, 2n\right) = \left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$'dir.

Sağlama. $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ parabol üzerindedir: $2^2 = 4 = 8 \cdot \dfrac{1}{2}$. Teğet denklemine (Teorem 20.2) göre bu noktadaki teğet $2y = 4\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$, yani $y = 2x + 1$'dir.

■

20.7 Koniklerin Kutupsal Denklemi

Elipsin ve hiperbolün ikinci tanımlarını (Elips, Hiperbol) parabolün tanımıyla yan yana koyalım. Üçünde de bir F odağı ve ona ait bir Δ doğrultmanı vardır ve eğrinin her P noktası için, H noktası P'den Δ'ya inilen dikmenin ayağı olmak üzere

$$\frac{|\,PF\,|}{|\,PH\,|} = e$$

oranı sabittir. Elipste ve hiperbolde bu sabit, koniğin dış merkezliğidir; parabolde ise tanım gereği $e = 1$'dir. Bu ortak yapıya bir ad verelim.

Tanım 20.8 (Odak ve doğrultmanla konik). F bir nokta, Δ da F'den geçmeyen bir doğru ve $e > 0$ olsun. H, P'den Δ'ya inilen dikmenin ayağı olmak üzere $|\,PF\,| = e\,|\,PH\,|$ koşulunu sağlayan P noktalarının kümesine **dış merkezliği e olan konik** denir.

Yani parabol $e = 1$ olan koniktir: parabolün tanımındaki (Tanım 20.1) eşit uzaklık koşulu $|\,PF\,| = 1 \cdot |\,PH\,|$ demektir. Bu yüzden parabolün dış merkezliği 1 kabul edilir. Şimdi öbür değerlere bakalım: odak–doğrultman koşulu, e'nin değerine göre her zaman bu üç konikten birini verir.

Önerme 20.4 (Odak ve doğrultmanla konikler). *F bir nokta, Δ da F'den geçmeyen bir doğru ve $e > 0$ olsun. H, P'den Δ'ya inilen dikmenin ayağı olmak üzere $|\,PF\,| = e\,|\,PH\,|$ koşulunu sağlayan P noktalarının kümesi*

- *$e < 1$ ise dış merkezliği e olan bir elips,*
- *$e = 1$ ise bir parabol,*
- *$e > 1$ ise dış merkezliği e olan bir hiperboldür.*

Her üç durumda F koniğin bir odağı, Δ da bu odağa ait doğrultmandır.

İspat.
Koordinatların seçimi. *p, F'nin Δ'ya uzaklığı olsun. Başlangıç noktasını F'ye, X-eksenini F'den Δ'ya inilen dikmenin taşıyıcı doğrusuna koyalım ve pozitif yönü Δ'dan uzaklaşan yön seçelim. Böylece $F(0,0)$ ve $\Delta : x = -p$ olur. $P(x,y)$ için $|\,PF\,|^2 = x^2 + y^2$, $|\,PH\,| = |\,x + p\,|$ olduğundan koşul (iki taraf negatif olmadığı için karesiyle denk olarak)*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x^2 + y^2 = e^2(x+p)^2$$

biçimini alır. Açıp düzenlersek

$$(1-e^2)\,x^2 - 2e^2p\,x + y^2 = e^2p^2. \tag{1}$$

e = 1 durumu. *(1) denklemi* $y^2 = 2px + p^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$ *olur.* $x' = x + \frac{p}{2}$ *ötelemesiyle* $y^2 = 2px'$ *elde edilir: köşesi* $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ *olan, parametresi* p *olan bir parabol. Zaten* $e = 1$ *iken koşul, parabolün tanımının (Tanım 20.1) kendisidir.*

e ≠ 1 durumu. *(1)'de* x*'li terimleri tam kareye tamamlayalım.* $x_0 = \frac{e^2p}{1-e^2}$ *dersek*

$$(1-e^2)(x-x_0)^2 + y^2 = \frac{e^2p^2}{1-e^2} \tag{2}$$

bulunur (açınca sabit terimler $e^2p^2 + (1-e^2)x_0^2 = \frac{e^2p^2}{1-e^2}$ *olur).* $x' = x - x_0$ *ötelemesini yapalım.*

- $e < 1$ *ise (2)'nin iki tarafını* $\frac{e^2p^2}{1-e^2} > 0$*'a bölersek*

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a = \frac{ep}{1-e^2}, \quad b^2 = a^2(1-e^2)$$

elde edilir. Bu bir elipstir; $c^2 = a^2 - b^2 = a^2e^2$ *olduğundan* $c = ae$ *ve dış merkezlik* $\frac{c}{a} = e$*'dir. Merkez* $X'Y'$ *sisteminin başlangıcı, yani* $(x_0, 0)$ *noktasıdır.* $c = ae = \frac{e^2p}{1-e^2} = x_0$ *olduğundan* $(x_0 - c, 0) = (0,0) = F$ *bir odaktır. Bu odağa ait doğrultman merkezden* $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{e} = \frac{p}{1-e^2}$ *uzaklıktaki* $x = x_0 - \frac{p}{1-e^2} = -p$ *doğrusu, yani* Δ*'dır.*
- $e > 1$ *ise* $1 - e^2 < 0$*'dır. (2)'nin iki tarafını* $\frac{e^2p^2}{1-e^2} < 0$*'a bölersek*

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a = \frac{ep}{e^2-1}, \quad b^2 = a^2(e^2-1)$$

bulunur. Bu bir hiperboldür; $c^2 = a^2 + b^2 = a^2e^2$ *olduğundan dış merkezlik* $\frac{c}{a} = e$*'dir. Bu kez* $x_0 = -\frac{e^2p}{e^2-1} = -c$ *olduğundan* $(x_0 + c, 0) = F$ *bir odaktır. Bu odağa ait doğrultman merkezden* $\frac{a}{e} = \frac{p}{e^2-1}$ *uzaklıkta, odak tarafındaki*

$$x = x_0 + \frac{a}{e} = \frac{-e^2p + p}{e^2-1} = -p$$

doğrusu, yani yine Δ*'dır.*

■

Yani elips, parabol ve hiperbol aynı ailenin üyeleridir ve onları birbirinden ayıran tek sayı dış merkezliktir:

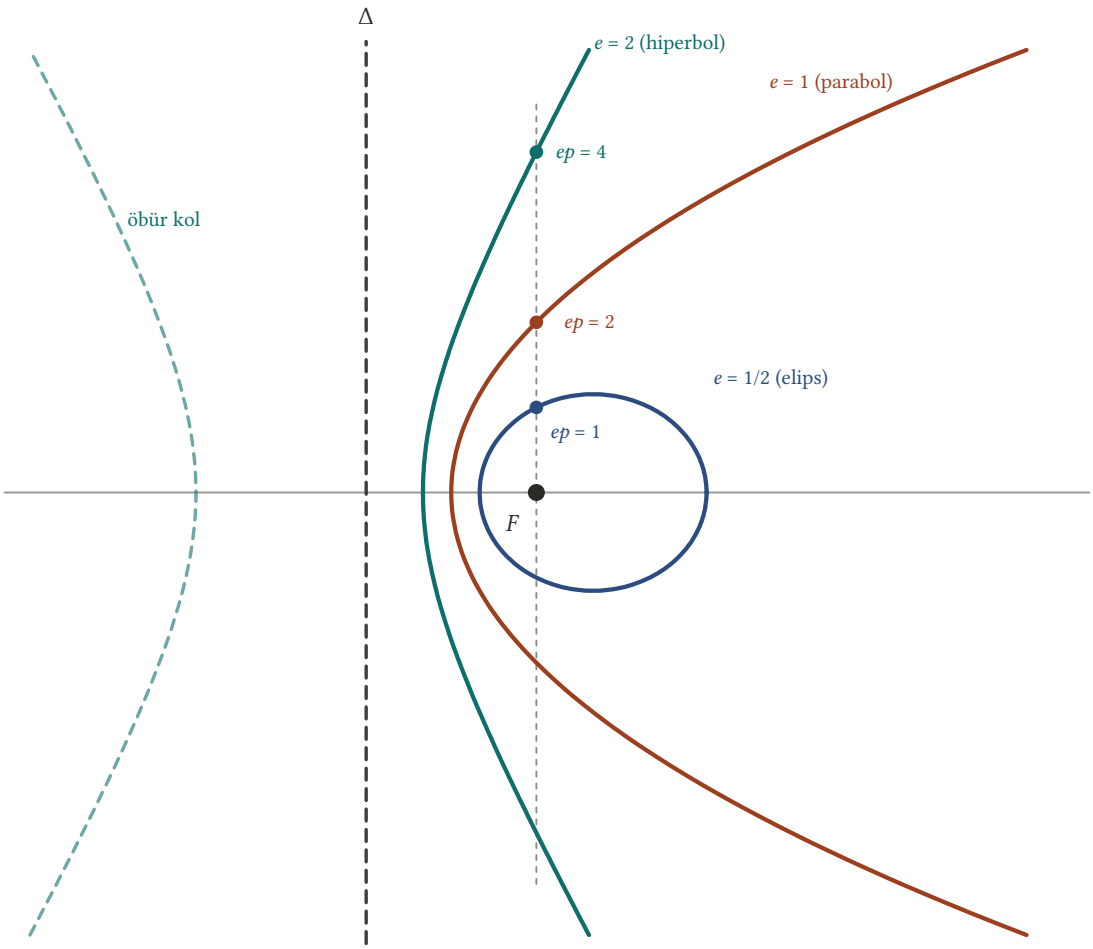
$$e < 1 \Leftrightarrow \text{elips}, \qquad e = 1 \Leftrightarrow \text{parabol}, \qquad e > 1 \Leftrightarrow \text{hiperbol}\ .$$

Tersine her elips ve her hiperbol, bir odağı ve ona ait doğrultmanıyla bu biçimde elde edilir; bu, Elips ve Hiperbol bölümlerindeki ikinci tanımların içeriğidir. Bu ortak yapı, üç koniği kutupsal koordinatlarda (Paralel ve Kutupsal Koordinatlar) tek bir denklemle yazmamızı sağlar. Bunun için kutup noktasını odağa, kutupsal ekseni de asal eksene yerleştiririz.

Teorem 20.4 (Koniğin kutupsal denklemi). *Odağı* F*, bu odağa ait doğrultmanı* Δ*, dış merkezliği* e *olan bir konik verilsin ve* p*,* F*'nin* Δ*'ya uzaklığı olsun. Kutup noktası* F*, kutupsal eksen de asal eksen üzerinde* F*'den* Δ*'dan uzaklaşan yönde çıkan yarı doğru olsun. Koniğin* Δ*'ya göre* F *ile aynı tarafta kalan noktaları, tam olarak*

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \qquad (1 - e\cos\theta > 0)$$

denklemini sağlayan (r, θ) noktalarıdır. $e \leq 1$ ise koniğin bütün noktaları bu taraftadır, yani denklem elipsin ya da parabolün tamamını verir. $e > 1$ ise denklem hiperbolün F'yi saran kolunu verir.
Aynı F ve Δ ile e büyüdükçe konik açılır: $e < 1$ iken kapalı bir elips, $e = 1$ iken bir yöne sonsuza açılan parabol, $e > 1$ iken iki kollu hiperbol elde edilir. Kutupsal eksene dik doğrultuda ($\theta = \frac{\pi}{2}$) $r = ep$ olduğundan $p = 2$ için üç koniğin odaktan geçen dikey doğruyu kestiği noktalar F'den 1, 2 ve 4 birim uzaktadır.



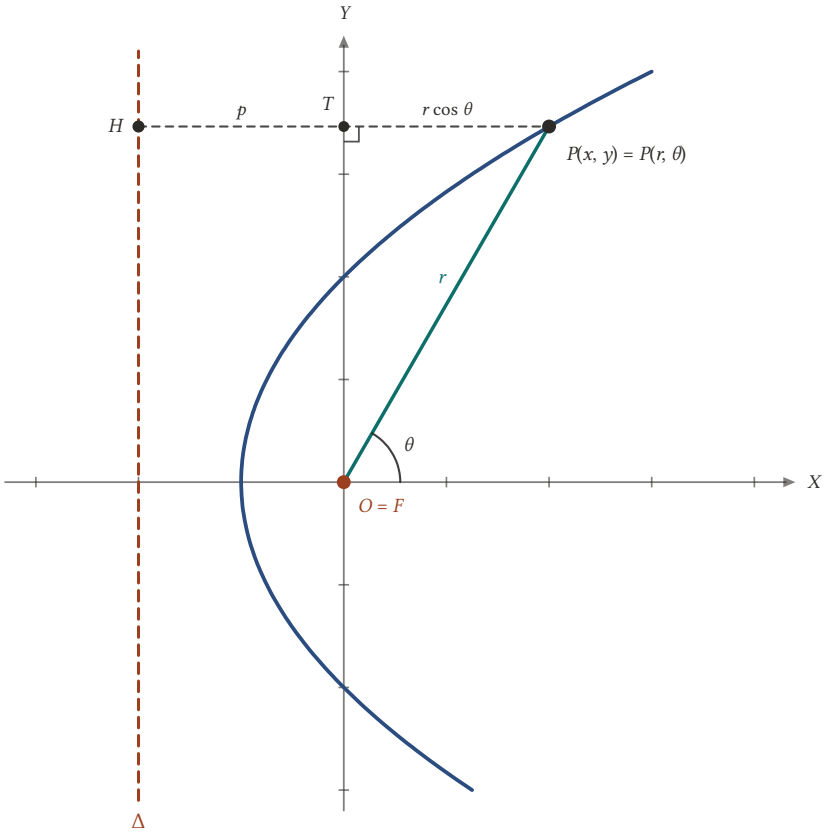
Şekil 20.11: Aynı odak F ve doğrultman Δ ile üç konik (p = 2): e < 1 elips, e = 1 parabol, e > 1 hiperbol. Kutupsal denklem Δ'nın F tarafında kalan kısmı verir; hiperbolün öbür kolu (kesikli) Δ'nın öbür yanındadır.

İspat.
Adım 1: $|\,PH\,|$'yi kutupsal koordinatlarla yazma. *Kutupsal eksen boyunca yönelmiş bir X-ekseni ve F'den geçen dik bir Y-ekseni alalım; bu dik sistemde $F = O(0,0)$ ve $\Delta : x = -p$'dir. $P(r,\theta)$ noktasının dik koordinatları $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$'dır (Önerme 5.3). P'den Δ'ya inilen dikmenin ayağı H ise*

$$|\,PH\,| = |\,x + p\,| = |\,p + r\cos\theta\,|$$

olur. P, Δ'ya göre F ile aynı taraftaysa $x > -p$, yani $p + r\cos\theta > 0$'dır ve $|\,PH\,| = p + r\cos\theta$ olur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 20.12: Kutup odakta: |PF| = r ve |PH| = p + r cos θ. |PF| = e|PH| koşulu r = ep/(1 − e cos θ) verir (çizimde p = 2, e = 1).

Adım 2: denklemi çıkarma. $|\,PF\,| = r$ *olduğundan,* F *tarafındaki bir* P *için* $|\,PF\,| = e\,|\,PH\,|$ *koşulu*

$$r = e\,(p + r\cos\theta) = ep + er\cos\theta$$
$$r\,(1 - e\cos\theta) = ep$$

olur. $r > 0$ *ve* $ep > 0$ *olduğundan* $1 - e\cos\theta > 0$*'dır ve* $r = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$ *bulunur. Tersine* $1 - e\cos\theta > 0$ *ve* $r = \dfrac{ep}{1 - e\cos\theta}$ *ise* $r = e(p + r\cos\theta)$ *olur; buradan* $p + r\cos\theta = \dfrac{r}{e} > 0$ *çıkar. Yani* P Δ*'ya göre* F *tarafındadır,* $|\,PH\,| = p + r\cos\theta$ *ve* $|\,PF\,| = e\,|\,PH\,|$*'dir:* P *konik üzerindedir.*

Adım 3: $e \le 1$ ***iken bütün noktalar*** F ***tarafında.*** P *koniğin bir noktası olsun.* $P \in \Delta$ *olsaydı* $|\,PH\,| = 0$ *ve* $|\,PF\,| = 0$*, yani* $P = F \in \Delta$ *olurdu; bu olamaz.* P*,* Δ*'nın* F *ile ters tarafında olsaydı* PF *parçası* Δ*'yı* F*'den farklı bir* Q *noktasında keserdi ve*

$$|\,PF\,| = |\,PQ\,| + |\,QF\,| > |\,PQ\,| \ge |\,PH\,|$$

olurdu (bir noktanın doğruya uzaklığı, doğrunun noktalarına uzaklıklarının en küçüğüdür). O zaman $e = \dfrac{|\,PF\,|}{|\,PH\,|} > 1$ *olurdu. Öyleyse* $e \le 1$ *iken koniğin her noktası* F *tarafındadır ve denklem koniğin tamamını verir.*

Adım 4: $e > 1$ ***iken hiperbolün kolları.*** *Odak ve doğrultmanla elde edilen hiperbolün (Önerme 20.4) merkezi* $(x_0, 0) = (-c, 0)$*, köşeleri* $x = -c \pm a$ *noktalarıdır; orada* $a = \dfrac{ep}{e^2 - 1}$ *ve* $c = ae = \dfrac{e^2 p}{e^2 - 1}$*'dir. Buna göre*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$-c+a=\frac{-e^2p+ep}{e^2-1}=-\frac{ep}{e+1}>-p,$$
$$-c-a=\frac{-e^2p-ep}{e^2-1}=-\frac{ep}{e-1}<-p$$

olur; çünkü $\frac{e}{e+1}<1<\frac{e}{e-1}$*'dir. Hiperbolün sağ kolu* $x\geq -c+a$*, sol kolu* $x\leq -c-a$ *bölgesindedir. Öyleyse sağ kol tümüyle* $x>-p$*, yani* Δ*'nın* F *tarafında; sol kol tümüyle* $x<-p$*, yani karşı taraftadır.* $-c+a<0$ *olduğundan* $F=O$ *sağ kolun sardığı bölgededir. Denklem tam olarak sağ kolu verir.*
■

Hiperbolün öbür kolu da aynı yolla yazılabilir. Bu koldaki noktalar için $p+r\cos\theta<0$ ve $\mid PH\mid=-(p+r\cos\theta)$ olduğundan koşul $r(1+e\cos\theta)=-ep$ olur; yani öbür kol $1+e\cos\theta<0$ olan açılarda

$$r=-\frac{ep}{1+e\cos\theta}$$

denklemiyle verilir.
Denklemde iki farklı p ile karşılaşmamak için bir noktaya dikkat edelim: burada p her zaman odağın doğrultmana uzaklığıdır. Parabolde bu sayı parabolün parametresiyle aynıdır. Elips ve hiperbolde ise paydaki ep sayısı, $\theta=\frac{\pi}{2}$ için $r=ep$ olduğundan, odaktan asal eksene dik çizilen kirişin yarı uzunluğudur.
Bir koniğin kutupsal denklemi verildiğinde paydayı $1-e\cos\theta$ biçimine getirmek (sabit terimi 1 yapmak) yeter: $\cos\theta$'nın katsayısı e'yi, pay da ep'yi verir.

Örnek 20.11 (Kutupsal denklemi verilen bir konik). $r=\dfrac{16}{4-2\cos\theta}$ denklemiyle verilen koniğin tipini belirleyip kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm.
Adım 1: tipi belirleme. Paydanın sabit terimini 1 yapmak için pay ve paydayı 4'e bölelim:

$$r=\frac{16}{4-2\cos\theta}=\frac{4}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}.$$

Teorem 20.4 ile karşılaştırınca $e=\dfrac{1}{2}<1$ bulunur; konik bir elipstir. Ayrıca $ep=4$ olduğundan $\frac{1}{2}p=4$, yani $p=8$'dir: doğrultman odaktan 8 birim uzaktaki $x=-8$ doğrusudur.
Adım 2: kartezyen denklem. Kutup başlangıç noktası, kutupsal eksen pozitif X-ekseni olsun. Denklemi $r(4-2\cos\theta)=16$ biçiminde yazıp $r\cos\theta=x$ koyarsak $4r-2x=16$, yani

$$r=4+\frac{x}{2}$$

bulunur. $r=\sqrt{x^2+y^2}$ olduğundan iki tarafın karesini alalım:

$$x^2+y^2=16+4x+\frac{x^2}{4}$$
$$3x^2-16x+4y^2=64.$$

Kare alma geri alınabilir: bu denklemi sağlayan her noktada $x\geq -\dfrac{8}{3}$ olduğu (aşağıdaki standart biçimden görülür) için $4+\dfrac{x}{2}>0$'dır ve $r=4+\dfrac{x}{2}$ eşitliği geri gelir.
Adım 3: standart biçim. x'li terimleri tam kareye tamamlayalım: $3x^2-16x=3\left(x-\dfrac{8}{3}\right)^2-\dfrac{64}{3}$. Buna göre

$$3\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+4y^2=\frac{256}{3}\Leftrightarrow\frac{\frac{\left(x-\frac{8}{3}\right)^2}{256}}{9}+\frac{\frac{y^2}{64}}{3}=1$$

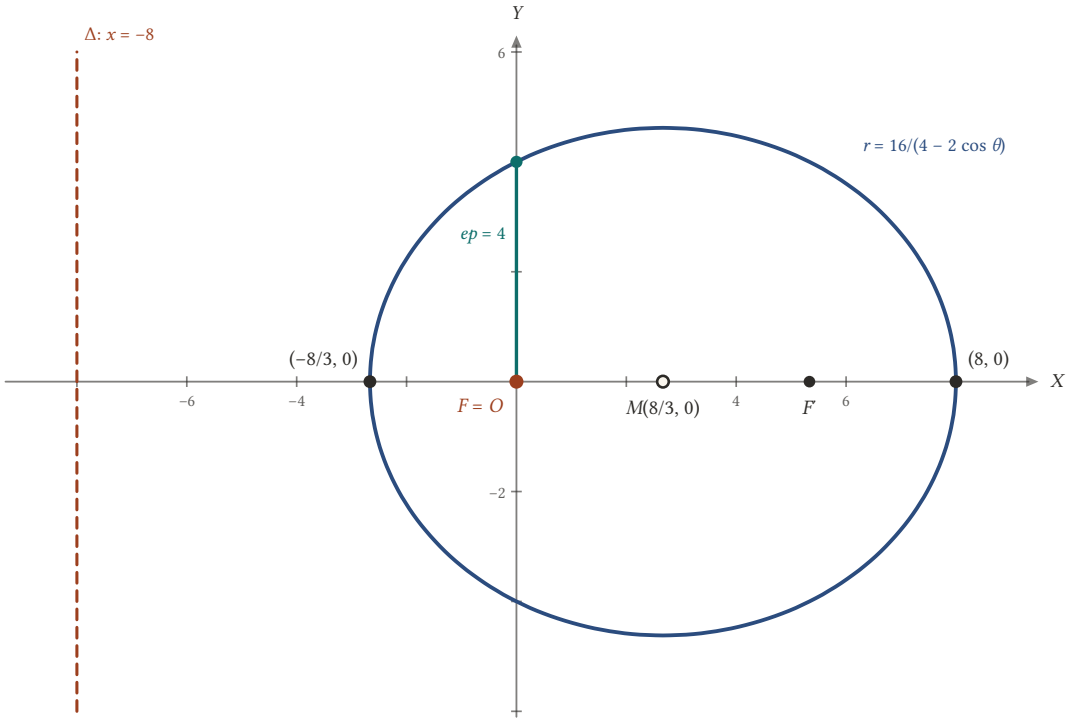
 CC BY-NC-SA 4.0

bulunur. Elipsin merkezi $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$, $a = \frac{16}{3}$, $b^2 = \frac{64}{3}$ ve $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{256}{9} - \frac{192}{9} = \frac{64}{9}$, yani $c = \frac{8}{3}$'tür. Merkeze ötelenmiş $X'Y'$ sisteminde ($x' = x - \frac{8}{3}$, $y' = y$) denklem

$$\frac{9x'^2}{256} + \frac{3y'^2}{64} = 1$$

olur.

Sağlama. $e = \frac{c}{a} = \frac{8/3}{16/3} = \frac{1}{2}$ ve odaktan doğrultmana uzaklık $\frac{a^2}{c} - c = \frac{32}{3} - \frac{8}{3} = 8 = p$'dir. Merkez odaktan $c = \frac{8}{3}$ uzaktadır, yani kutup gerçekten sol odaktır. $\theta = 0$ için $r = 8$, $\theta = \pi$ için $r = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$ olduğundan asal köşeler $(8, 0)$ ve $\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$'dır; bunların orta noktası merkezdir.



Şekil 20.13: $r = 16/(4 - 2\cos\theta)$: $e = 1/2$, kutup sol odakta; kartezyen denklem $3x^2 - 16x + 4y^2 = 64$.

■

Örnek 20.12 (Bir hiperbolün kutupsal denklemi). Kartezyen denklemi $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ olan hiperbolün, kutup noktası $F(5, 0)$ odağında ve kutupsal ekseni pozitif X yönünde olan kutupsal denklemini bulunuz.

Çözüm.

Adım 1: hiperbolün öğeleri. $a^2 = 16$ ve $b^2 = 9$ olduğundan $a = 4$, $b = 3$'tür. Hiperbolde $c^2 = a^2 + b^2 = 25$, yani $c = 5$'tir; odaklar $(\pm 5, 0)$'dır. Dış merkezlik

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dür. $F(5,0)$ odağına ait doğrultman $x = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{16}{5}$ doğrusudur ve F'nin solunda kalır; kutupsal eksen F'den bu doğrultmandan uzaklaşan yöndedir, yani kutupsal denklem teoreminin (Teorem 20.4) koşulu sağlanır.

Adım 2: p'yi bulma. Odak ile doğrultman arasındaki uzaklık

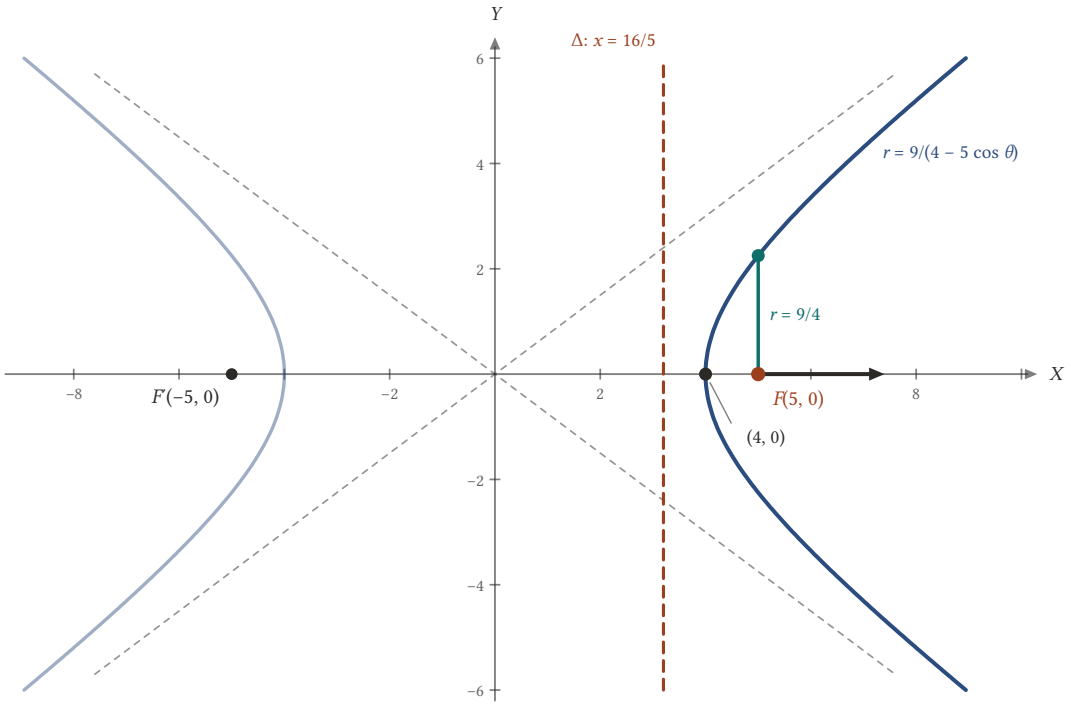
$$p = c - \frac{a^2}{c} = 5 - \frac{16}{5} = \frac{9}{5}$$

tir. Buna göre $ep = \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{9}{5} = \dfrac{9}{4}$ olur.

Adım 3: kutupsal denklem. Kutupsal denklem teoreminden (Teorem 20.4)

$$r = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{5}{4}\cos\theta} = \frac{9}{4 - 5\cos\theta}$$

bulunur. Bu denklem $4 - 5\cos\theta > 0$, yani $\cos\theta < \dfrac{4}{5}$ olan açılarda tanımlıdır ve hiperbolün F'yi saran sağ kolunu verir. Örneğin $\theta = \pi$ için $r = 1$ ve nokta $(5-1, 0) = (4, 0)$ sağ köşedir; $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ için $r = \dfrac{9}{4}$ ve nokta $\left(5, \dfrac{9}{4}\right)$'tür: $\dfrac{25}{16} - \dfrac{81}{144} = \dfrac{25}{16} - \dfrac{9}{16} = 1$. Sol kol, $4 + 5\cos\theta < 0$ olan açılarda $r = -\dfrac{9}{4 + 5\cos\theta}$ ile verilir; $\theta = \pi$ için $r = 9$ ve nokta $(-4, 0)$ sol köşedir.



Şekil 20.14: Kutup sağ odakta: $r = 9/(4 - 5\cos\theta)$ sağ kolu verir; sol kol (soluk) doğrultmanın öbür yanındadır. Ok kutupsal ekseni gösterir.

■

Örnek 20.13 (Bir parabolün kutupsal denklemi). $y^2 = 8x$ parabolünün, kutup noktası odağında ve kutupsal ekseni pozitif X yönünde olan kutupsal denklemini bulunuz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Odağı $F(2,0)$, doğrultmanı $x=-2$ olarak bulmuştuk (Örnek 20.3). Odağın doğrultmana uzaklığı $p=4$'tür ve parabolde $e=1$'dir. Kutupsal eksen F'den doğrultmandan uzaklaşan yöndedir. Kutupsal denklem teoreminden (Teorem 20.4)

$$r=\frac{4}{1-\cos\theta}\qquad(0<\theta<2\pi)$$

bulunur. $\theta=0$ hariçtir, çünkü asal eksen boyunca sağa giden yarı doğru parabolü kesmez.
Sağlama. $\theta=\pi$ için $r=2$ ve nokta $(2-2,0)=(0,0)$ köşedir. $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ için $r=4$ ve nokta $(2,4)$'tür: $4^2=16=8\cdot 2$. Genel olarak kutup $F(2,0)$ olduğundan $x-2=r\cos\theta$'dır; denklem $r=4+r\cos\theta=x+2$ olur ve kare alınınca $(x-2)^2+y^2=(x+2)^2$, yani $y^2=8x$ geri gelir.
■

20.8 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalar tam kareye tamamlama ve ötelemeyle parabolün öğelerini bulmayı, doğru ile parabolün karşılıklı durumunu incelemeyi kullanır.

Alıştırma 20.1 ($x^2=12y$ parabolünün odağı ve doğrultmanı). $x^2=12y$ parabolünün odağını ve doğrultmanını bulun.

Çözüm.
Denklemde y birinci dereceden geçtiği için asal eksen Y-ekseni, köşe başlangıç noktasıdır; denklem $x^2=2py$ biçimindedir. $2p=12$'den $p=6$ bulunur. Buna göre (Önerme 20.2)

$$F\Big(0,\frac{p}{2}\Big)=F(0,3),\qquad \Delta: y=-\frac{p}{2}=-3$$

olur. Grafiği daha önce çizmiştik (Örnek 20.2).
■

Alıştırma 20.2 (Köşesi ötelenmiş, sağa açılan parabol). $y^2-8y-12x-8=0$ parabolünün odağını ve doğrultmanını bulun.

Çözüm.
Adım 1: tam kareye tamamlama. y ikinci dereceden geçiyor; y'li terimleri bir tarafta toplayalım:

$$\begin{aligned} y^2-8y &= 12x+8\\ y^2-8y+16 &= 12x+8+16\\ (y-4)^2 &= 12(x+2). \end{aligned}$$

Adım 2: öteleme. Eksenleri $O'(-2,4)$ noktasına öteleyelim:

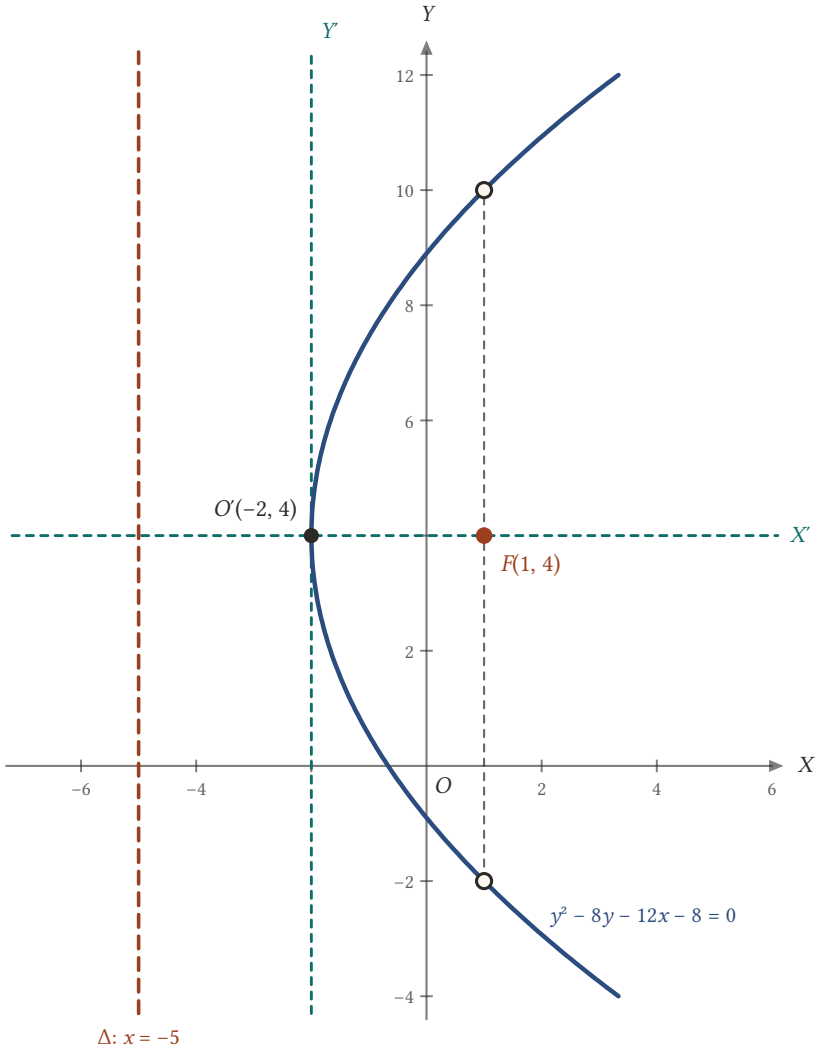
$$\left.\begin{aligned} x' &= x+2\\ y' &= y-4 \end{aligned}\right\}\Leftrightarrow \begin{aligned} x&=x'-2\\ y&=y'+4 \end{aligned}$$

Yeni $X'Y'$ sisteminde denklem $y'^2=12x'$ olur. x' birinci dereceden geçtiği için asal eksen X'-eksenidir, yani eski X-eksenine paralel $y=4$ doğrusudur. Köşe $O'(-2,4)$'tür.
Adım 3: odak ve doğrultman. $2p=12$'den $p=6$'dır ve parabol sağa açılır. $X'Y'$ sisteminde odak $\left(\frac{p}{2},0\right)=(3,0)$, doğrultman $x'=-3$'tür. Eski sisteme dönelim:

$$x=3-2=1,\quad y=0+4=4\Longrightarrow F(1,4),$$

doğrultman için de $x=-3-2=-5$, yani $\Delta: x=-5$ bulunur.
Sağlama. Köşe $(-2,4)$, odak $(1,4)$ ile doğrultman $x=-5$ arasının orta noktasıdır: $\dfrac{1+(-5)}{2}=-2$ (Önerme 20.1).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 20.15: Köşe $O'(-2,\,4)$'e öteleme denklemi $y'^2 = 12x'$ yapar; odak $F(1,\,4)$, doğrultman $x = -5$.

■

Alıştırma 20.3 (Köşesi ötelenmiş, aşağı açılan parabol). $x^2 + 6x + 16y - 7 = 0$ parabolünün odağını ve doğrultmanını bulun.

Çözüm.
Adım 1: tam kareye tamamlama. Bu kez x ikinci dereceden geçiyor:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= -16y + 7 \\ x^2 + 6x + 9 &= -16y + 16 \\ (x+3)^2 &= -16(y-1). \end{aligned}$$

Adım 2: öteleme. $x' = x + 3$, $y' = y - 1$, yani $x = x' - 3$, $y = y' + 1$ ötelemesiyle denklem

$$x'^2 = -16y'$$

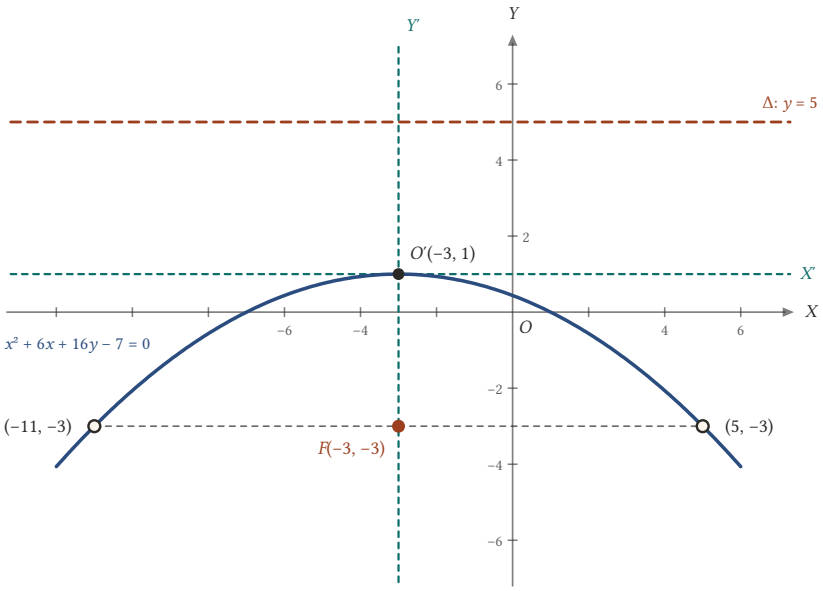
olur. Köşe $O'(-3,\,1)$'dir; asal eksen Y'-ekseni, yani eski sistemde $x = -3$ dikey doğrusudur. Denklem $x'^2 = -2py'$ biçiminde olduğundan parabol aşağı açılır.

 CC BY-NC-SA 4.0

Adım 3: odak ve doğrultman. $2p = 16$'dan $p = 8$ bulunur. Dört biçim tablosuna (Önerme 20.2) göre $X'Y'$ sisteminde odak $\left(0, -\frac{p}{2}\right) = (0, -4)$, doğrultman $y' = \frac{p}{2} = 4$'tür. Eski sisteme dönersek

$$x = 0 - 3 = -3, \quad y = -4 + 1 = -3 \Longrightarrow F(-3, -3),$$

doğrultman için $y = 4 + 1 = 5$, yani $\Delta : y = 5$ bulunur.
Sağlama. Köşe $(-3, 1)$, odak ile doğrultmanın tam ortasındadır: $\frac{-3+5}{2} = 1$. Ayrıca F hizasında $(y = -3)$ $(x+3)^2 = 64$, yani $x = 5$ ya da $x = -11$ bulunur; $(5, -3)$ noktasının odağa uzaklığı 8, doğrultmana uzaklığı $5 - (-3) = 8$'dir.



Şekil 20.16: Köşe $O'(-3, 1)$'e öteleme denklemi $x'^2 = -16y'$ yapar; parabol aşağı açılır, odak $F(-3, -3)$, doğrultman $y = 5$.

■

Alıştırma 20.4 (Eğimi değişen bir doğru ile parabol). $m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $d : y = mx + 2$ doğrusu ile $y^2 = 4x$ parabolünün birbirine göre durumunu m'ye göre inceleyin.

Çözüm.
Kesişim denklemi. $y = mx + 2$'yi $y^2 = 4x$'te yerine yazalım:

$$\begin{aligned} (mx + 2)^2 &= 4x \\ m^2x^2 + 4mx + 4 &= 4x \\ m^2x^2 + 4(m-1)\,x + 4 &= 0. \end{aligned}$$

$m = 0$ durumu. Denklem $-4x + 4 = 0$ olur ve tek çözüm $x = 1$'dir. $d : y = 2$ doğrusu parabolü yalnız $(1, 2)$ noktasında keser; asal eksene (X-eksenine) paralel olduğundan teğet değildir.
$m \neq 0$ durumu. Denklem ikinci derecedendir ve diskriminantı

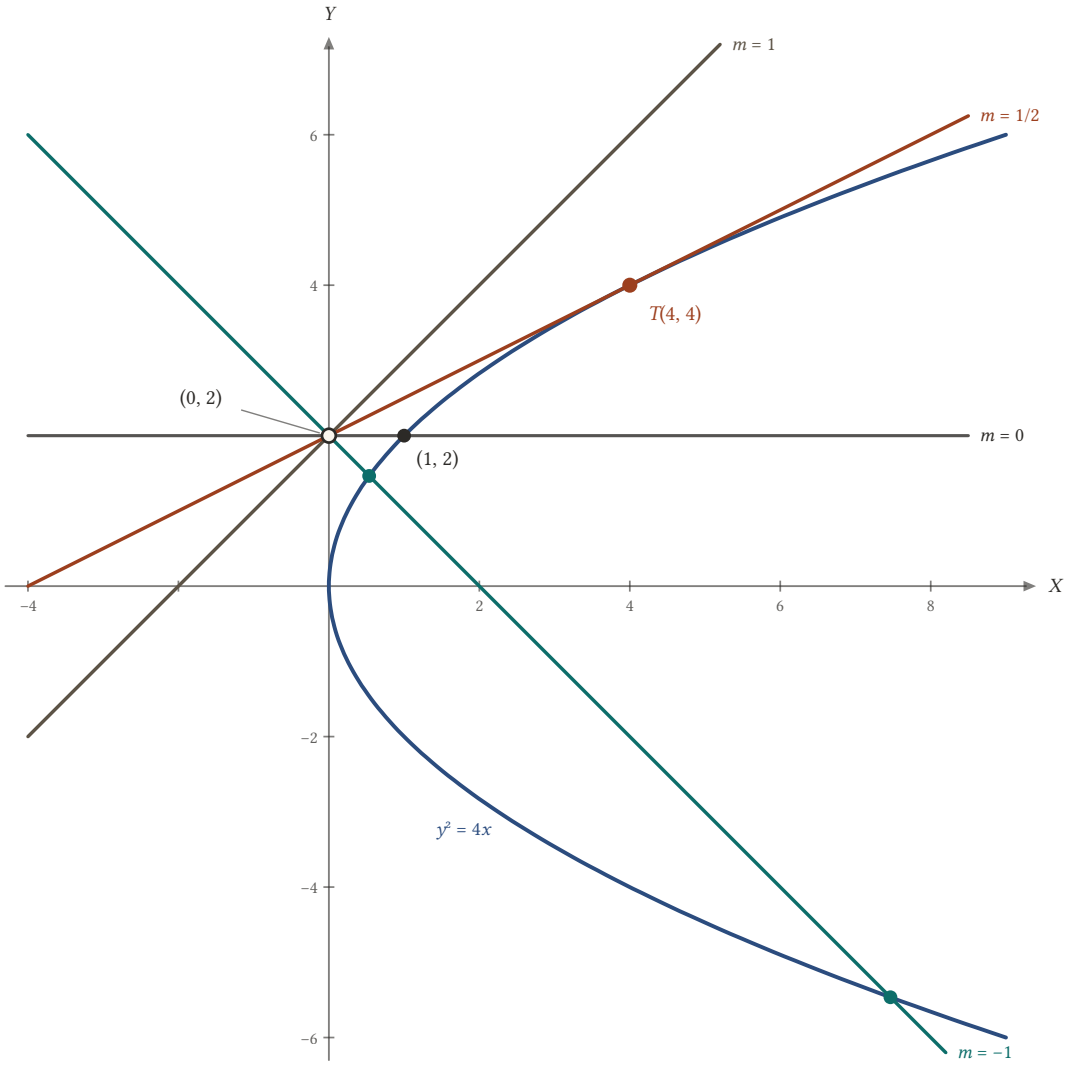
$$\begin{aligned} \delta &= 16(m-1)^2 - 16m^2 \\ &= 16\left(\,(m-1)^2 - m^2\,\right) = 16(1-2m) \end{aligned}$$

dir. δ'nın işareti $1 - 2m$'nin işaretiyle aynıdır. (Teorem 20.3 ile de $p = 2$, $n = 2$ için $\delta = 8(2 - 4m) = 16(1 - 2m)$ bulunur.) Buna göre:

 CC BY-NC-SA 4.0

- $m > \dfrac{1}{2}$ ise $\delta < 0$'dır ve d parabolü kesmez;
- $m < \dfrac{1}{2}$ ve $m \neq 0$ ise $\delta > 0$'dır ve d parabolü iki noktada keser;
- $m = \dfrac{1}{2}$ ise $\delta = 0$'dır ve d parabole teğettir.

$m = 0$ durumu ikinci maddenin aralığında kalmasına rağmen ayrıdır: orada tek bir ortak nokta vardır.



Şekil 20.17: $y = mx + 2$ doğruları: $m > 1/2$ kesmez, $m = 1/2$ teğet, $m < 1/2$ ($m \neq 0$) iki noktada keser; $m = 0$ eksene paraleldir ve tek noktada keser.

■

Alıştırma 20.5 (Değme noktasını bulmak). $y = mx + 2$ doğrusunun $y^2 = 4x$ parabolüne teğet olduğu durumda değme noktasının koordinatlarını bulun.

Çözüm.
Önceki alıştırmada teğetlik durumunun $m = \dfrac{1}{2}$ olduğunu gördük. Bu durumda kesişim denklemi $m^2x^2 + 4(m-1)x + 4 = 0$,

$$\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0$$

olur. Çift katlı kök $x = 4$'tür; buna karşılık $y = \frac{1}{2}\cdot 4 + 2 = 4$ bulunur. Değme noktası $T(4,4)$'tür.

Sağlama. $4^2 = 16 = 4\cdot 4$ olduğundan T parabol üzerindedir. Sonuç 20.2 ile $p = 2$, $m = \frac{1}{2}$, $n = 2$ için $2mn = 2 = p$ ve değme noktası $\left(\frac{n}{m}, 2n\right) = (4,4)$'tür. Ayrıca teğet denklemine (Teorem 20.2) göre T'deki teğet $4y = 2(x+4)$, yani $y = \frac{1}{2}x + 2$'dir.

■

Böylece üç koniği hem ayrı ayrı standart denklemleriyle hem de odak ve doğrultmana dayanan ortak bir bakışla tanımış olduk. Standart denklemlerin hepsi x ve y'de ikinci dereceden denklemlerdir. Bir sonraki bölümde, Koniklerin Sınıflandırılması bölümünde, bu yolun tersini yürüyecek, ikinci dereceden genel bir denklemin hangi koniği belirttiğini öteleme ve dönmeyle bulacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

21. Koniklerin Sınıflandırılması

Önceki üç bölümde elipsi, hiperbolü ve parabolü (Elips, Hiperbol, Parabol) geometrik tanımlarından yola çıkarak inceledik ve her birine eksenleri "düz oturan" bir standart denklem bulduk. Bu bölümde soruyu tersinden soruyoruz: elimizde x ve y'ye göre ikinci dereceden rastgele bir denklem olsun. Bu denklem hangi eğriyi anlatır?
Cevap için gereken iki hareketi biliyoruz: eksenleri ötelemek (Öteleme) ve döndürmek (Döndürme ve Paralel Eksenler). Dönme xy'li terimi, öteleme birinci dereceden terimleri yok eder; geriye standart denklemlerden biri kalır. Ama bunu her seferinde uzun hesaplarla yapmak zorunda değiliz. Katsayılardan hesaplanan ve eksenler döndürülünce değişmeyen iki sayı, karakteristik ve diskriminant, eğrinin cinsini hesap yapmadan söyler. Bölümün sonunda bütün durumları tek bir tabloda toplayacağız.

21.1 İkinci dereceden genel denklem

Bir koniğin standart denklemi, eksenler iyi seçildiğinde çok sadedir. Eksenler eğik ya da kaymış olunca aynı eğrinin denklemine xy'li terim ve birinci dereceden terimler karışır. Bütün bu denklemleri tek bir kalıpta toplayalım.

Tanım 21.1 (İkinci dereceden denklem). Düzlemde bir dik koordinat sisteminde a_{11}, a_{12} ve a_{22}'nin en az biri 0'dan farklı olmak üzere

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{1}$$

biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden denklem** ya da **kuadratik denklem** denir. $2a_{12}xy$ terimine **karma terim** denir.

Yani ikinci dereceden bir denklemde en az bir ikinci derece terim (x^2, xy ya da y^2) bulunur; birinci dereceden terimler ve sabit terim olabilir de olmayabilir de. Karma terimin ve birinci dereceden terimlerin katsayılarını 2 ile çarpılmış yazmamız bir alışkanlıktır: ileride katsayıları simetrik bir tabloya dizdiğimizde (a_{12} hem birinci satırda hem ikinci sütunda) formüller bu sayede sade çıkacak. Bir denklemden katsayıları okurken bu 2'yi unutmamak gerekir: örneğin $x^2 - 2xy + 12x + 2 = 0$ denkleminde $a_{12} = -1$ ve $a_{13} = 6$'dır.
Konikler kısmında gördüğümüz standart denklemlerin hepsi bu sınıftandır. Aşağıdaki tabloda her birinin sıfırdan farklı katsayıları var ($a, b, r > 0$ ve $p \neq 0$):

Eğri	Denklem	Sıfırdan farklı katsayılar
Çember	$x^2 + y^2 = r^2$	$a_{11} = a_{22} = 1, a_{33} = -r^2$
Elips	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a_{11} = \frac{1}{a^2}, a_{22} = \frac{1}{b^2}, a_{33} = -1$
Hiperbol	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$a_{11} = \frac{1}{a^2}, \quad a_{22} = -\frac{1}{b^2}, \quad a_{33} = -1$
Parabol	$y^2 = 2px$	$a_{22} = 1, a_{13} = -p$

Çemberin genel denklemi (Tanım 4.3) de $a_{11} = a_{22}$ ve $a_{12} = 0$ olan özel bir ikinci dereceden denklemdir. Bu bölümün amacı, (1) biçimindeki bir denklemin bu eğrilerden hangisini, ya da hangi "bozulmuş" durumunu belirttiğini katsayılardan okumaktır.

21.2 Karma terim yoksa öteleme yeter

Önce kolay durumu ele alalım: denklemde karma terim olmasın, yani $a_{12} = 0$ olsun. Bu durumda tam kareye tamamlamak (Öteleme) birinci dereceden terimleri yok eder.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 21.1 (Karma terimsiz denklemin ötelenmesi). *(1)'de $a_{12} = 0$ ve $a_{11}a_{22} \neq 0$ olsun. Eksenler*

$$x' = x + \frac{a_{13}}{a_{11}}, \qquad y' = y + \frac{a_{23}}{a_{22}}$$

ötelemesiyle $O'\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}, -\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)$ noktasına taşınırsa denklem

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0$$

biçimini alır; birinci dereceden terimler kaybolur.

İspat.
$a_{12} = 0$ olduğundan denklem

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

dır. x'li terimleri a_{11} parantezine, y'li terimleri a_{22} parantezine alalım ($a_{11}, a_{22} \neq 0$ olduğundan bölmeler geçerlidir):

$$a_{11}\left(x^2 + \frac{2a_{13}}{a_{11}}\,x\right) + a_{22}\left(y^2 + \frac{2a_{23}}{a_{22}}\,y\right) + a_{33} = 0.$$

Her parantezi tam kareye tamamlayalım: $x^2 + 2kx = (x+k)^2 - k^2$ özdeşliğinden

$$a_{11}\left[\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2}{a_{11}^2}\right] + a_{22}\left[\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{23}^2}{a_{22}^2}\right] + a_{33} = 0$$

ve köşeli parantezleri dağıtınca

$$a_{11}\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + a_{22}\left(y + \frac{a_{23}}{a_{22}}\right)^2 + a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 0$$

bulunur. Parantez içlerine x' ve y' dersek istenen denklem çıkar. $x' = x - \left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)$ ve $y' = y - \left(-\frac{a_{23}}{a_{22}}\right)$ olduğundan bu, eksenlerin söylenen O' noktasına ötelenmesidir. ■

Yani karma terim yoksa ve iki kare terim de varsa, eğrinin "merkezi" tam kareye tamamlamayla hemen bulunur ve eksenler oraya taşınınca denklem $a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 = c$ biçimini alır. a_{11} ile a_{22}'den biri sıfırsa, örneğin $a_{11} = 0$ ise, x en fazla birinci dereceden geçer; bu durumda yalnız y'li terimler tamamlanabilir. $a_{13} \neq 0$ ise bir parabol denklemi elde edilir (Parabol); $a_{13} = 0$ durumunu bölümün ilerisinde ele alacağız.

Örnek 21.1 (Ötelemeyle standart biçime gelen bir elips). $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$ denkleminin belirttiği eğriyi eksenleri öteleyerek standart biçime getiriniz.

Çözüm.
Karma terim yoktur: $a_{11} = 4$, $a_{22} = 9$, $a_{13} = -8$, $a_{23} = 27$, $a_{33} = 61$. Tam kareye tamamlayalım:

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 6y) + 61 &= 0 \\ 4\,[\,(x-2)^2 - 4\,] + 9\,[\,(y+3)^2 - 9\,] + 61 &= 0 \\ 4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 - 16 - 81 + 61 &= 0 \\ 4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 &= 36. \end{aligned}$$

Önermedeki formülle de aynı sabit çıkar:

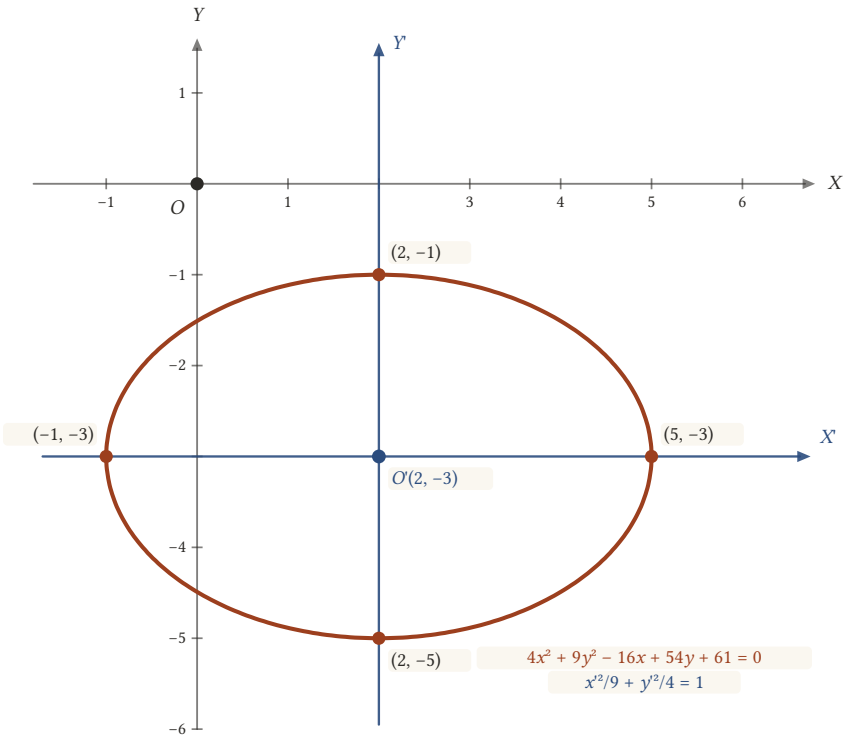
 CC BY-NC-SA 4.0

$$a_{33} - \frac{a_{13}^2}{a_{11}} - \frac{a_{23}^2}{a_{22}} = 61 - 16 - 81 = -36.$$

$x' = x - 2$, $y' = y + 3$ ötelemesi eksenleri $O'(2, -3)$ noktasına taşır ve denklem $4x'^2 + 9y'^2 = 36$, yani

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$$

olur. Bu, yeni sistemde büyük yarı ekseni 3 (X' boyunca), küçük yarı ekseni 2 (Y' boyunca) olan bir elipstir (Elips). Eski sistemde merkezi $(2, -3)$, köşeleri $(-1, -3)$, $(5, -3)$, $(2, -5)$ ve $(2, -1)$'dir.



Şekil 21.1: Eksenler $O'(2, -3)$'e ötelenince birinci dereceden terimler kaybolur ve elipsin standart denklemi ortaya çıkar.

■

Karma terim varsa öteleme işe yaramaz. Bunun nedeni, ötelemenin ikinci dereceden terimlere hiç dokunmamasıdır.

Önerme 21.2 (Öteleme ikinci derece katsayıları değiştirmez).

(1) denkleminde eksenler herhangi bir $O'(x_0, y_0)$ noktasına ötelenirse, yani $x = x' + x_0$ ve $y = y' + y_0$ yazılırsa, yeni denklemin x'^2, $x'y'$ ve y'^2 katsayıları yine a_{11}, $2a_{12}$ ve a_{22}'dir.

İspat.
İkinci derece terimleri açalım:

$$\begin{aligned} a_{11}(x' + x_0)^2 &= a_{11}x'^2 + 2a_{11}x_0x' + a_{11}x_0^2, \\ 2a_{12}(x' + x_0)(y' + y_0) &= 2a_{12}x'y' + 2a_{12}y_0x' + 2a_{12}x_0y' + 2a_{12}x_0y_0, \\ a_{22}(y' + y_0)^2 &= a_{22}y'^2 + 2a_{22}y_0y' + a_{22}y_0^2. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Birinci dereceden terimler $2a_{13}(x'+x_0)+2a_{23}(y'+y_0)$ ve sabit terim yalnız birinci dereceden terimlere ve sabite katkı verir. Öyleyse x'^2, $x'y'$ ve y'^2 yalnız yukarıdaki satırlarda ve sırasıyla a_{11}, $2a_{12}$, a_{22} katsayılarıyla geçer. ■

Yani $a_{12}\neq 0$ ise hangi öteleme yapılırsa yapılsın karma terim kalır. Örneğin $xy=1$ eğrisinin denklemi hiçbir ötelemeyle standart bir konik denklemine dönüşmez; onu sadeleştirmek için eksenleri döndürmek gerekir. Döndürme ve Paralel Eksenler bölümünde eksenleri $\dfrac{\pi}{4}$ döndürünce bu denklemin $x'^2-y'^2=2$ biçimini aldığını görmüştük.

21.3 Karma terimi dönmeyle yok etmek

XY, başlangıç noktası $O=O(0,0)$ olan bir dik koordinat sistemi olsun ve eksenleri pozitif yönde θ radyan döndürerek $X'Y'$ sistemini elde edelim. Eski koordinatlar yeni koordinatlar cinsinden

$$x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\qquad y=x'\sin\theta+y'\cos\theta$$

ile verilir (Döndürme ve Paralel Eksenler). Bunları (1)'de yerine yazıp katsayıları genel olarak hesaplayalım.

Teorem 21.1 (Dönmede yeni katsayılar).

(1) denkleminde eksenler θ radyan döndürülürse denklem

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{13}x'+2a'_{23}y'+a'_{33}=0 \tag{2}$$

biçimini alır; burada $c=\cos\theta$ ve $s=\sin\theta$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
a'_{11}&=a_{11}c^2+2a_{12}cs+a_{22}s^2,\\
a'_{12}&=(a_{22}-a_{11})\,cs+a_{12}(c^2-s^2),\\
a'_{22}&=a_{11}s^2-2a_{12}cs+a_{22}c^2,\\
a'_{13}&=a_{13}c+a_{23}s,\\
a'_{23}&=-a_{13}s+a_{23}c,\\
a'_{33}&=a_{33}\}
\end{aligned} \tag{3}$$

dir.

İspat.
$x=x'c-y's$ ve $y=x's+y'c$'yi yerine yazalım. İkinci derece terimler:

$$\begin{aligned}
x^2&=c^2x'^2-2cs\,x'y'+s^2y'^2,\\
xy&=cs\,x'^2+(c^2-s^2)\,x'y'-cs\,y'^2,\\
y^2&=s^2x'^2+2cs\,x'y'+c^2y'^2.
\end{aligned}$$

Bunları sırasıyla a_{11}, $2a_{12}$, a_{22} ile çarpıp toplayalım.

- *x'^2'nin katsayısı $a_{11}c^2+2a_{12}cs+a_{22}s^2=a'_{11}$'dir.*
- *$x'y'$'nin katsayısı $2(a_{22}-a_{11})cs+2a_{12}(c^2-s^2)$'dir; bu $2a'_{12}$'dür.*
- *y'^2'nin katsayısı $a_{11}s^2-2a_{12}cs+a_{22}c^2=a'_{22}$'dir.*

Birinci dereceden terimler:

$$2a_{13}x+2a_{23}y=2(a_{13}c+a_{23}s)\,x'+2(-a_{13}s+a_{23}c)\,y'=2a'_{13}x'+2a'_{23}y'.$$

Sabit terim değişmez: $a'_{33}=a_{33}$. Böylece denklem (2) biçimini alır. ■

Yani dönme ikinci derece katsayıları kendi aralarında, birinci derece katsayıları da kendi aralarında karıştırır; sabit terime dokunmaz. Birinci derece katsayılar (a_{13},a_{23}) ikilisi, bir noktanın koordinatları gibi dönüşür. Şimdi karma terimi yok eden açıyı bulalım.

 CC BY-NC-SA 4.0

Teorem 21.2 (Karma terimi yok eden dönme açısı). *(1)'de $a_{12} \neq 0$ olsun. Eksenler θ radyan döndürüldüğünde karma terimin kaybolması, yani $a'_{12} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul*

$$(a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta = 0 \tag{4}$$

olmasıdır. Bu koşulu sağlayan ve $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ aralığında olan bir tek θ vardır:
i) $a_{11} = a_{22}$ ise $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ ve dönme $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$ olur;
ii) $a_{11} \neq a_{22}$ ise θ, $0 < 2\theta < \pi$ olmak üzere

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

eşitliğiyle belirlenir.

İspat.
$2cs = \sin 2\theta$ *ve* $c^2 - s^2 = \cos 2\theta$ *olduğundan (3)'teki ifade*

$$a'_{12} = \frac{1}{2}\left[\, (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12} \cos 2\theta \,\right]$$

biçiminde yazılır. Buradan $a'_{12} = 0$ ile (4) denktir.
$a_{11} = a_{22}$ ise. *(4), $2a_{12} \cos 2\theta = 0$'a indirgenir; $a_{12} \neq 0$ olduğundan $\cos 2\theta = 0$, yani*

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

olmalıdır. Bunların $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ aralığındaki tek değeri $\theta = \dfrac{\pi}{4}$'tür. Bu açıda $\cos\theta = \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ olduğundan dönme formülleri söylenen biçimi alır.
$a_{11} \neq a_{22}$ ise. $\cos 2\theta = 0$ *olsaydı* $\sin 2\theta = \pm 1$ *olur ve (4),* $a_{22} - a_{11} = 0$ *verirdi; bu varsayıma aykırıdır. Öyleyse* $\cos 2\theta \neq 0$*'dır ve (4)'ü* $\cos 2\theta$*'ya bölüp düzenleyince*

$$(a_{11} - a_{22}) \tan 2\theta = 2a_{12}, \quad \text{yani} \quad \tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

bulunur. Tanjant fonksiyonu $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ üzerinde her sıfırdan farklı değeri tam bir kez alır; sağ taraf $a_{12} \neq 0$ olduğundan sıfırdan farklıdır. Böylece $0 < 2\theta < \pi$ olan bir tek 2θ, dolayısıyla $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ olan bir tek θ vardır. ■

Yani karma terimi yok etmek için $\tan 2\theta$'yı hesaplayıp dar bir açı seçmek yeter; $a_{11} = a_{22}$ ise açı her zaman $\dfrac{\pi}{4}$'tür. Açının kendisini bilmek de gerekmez: (3)'te yalnız $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ geçer, onlar da $\tan 2\theta$'dan hesaplanır.

Genel denklemde karma terimi dört adımda yok etmek

1. Katsayıları okuyun; karma terimin ve birinci dereceden terimlerin katsayılarını 2'ye bölmeyi unutmayın.
2. $a_{11} = a_{22}$ ise $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ alın. Değilse $\tan 2\theta = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$'yi hesaplayın ve $1 + \tan^2 2\theta = \dfrac{1}{\cos^2 2\theta}$'dan $\cos 2\theta$'yı bulun; $0 < 2\theta < \pi$ olduğundan $\cos 2\theta$'nın işareti $\tan 2\theta$'nınkiyle aynıdır.
3. $\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\theta}{2}}$ ve $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\theta}{2}}$ (θ dar açı olduğundan ikisi de pozitiftir).
4. Yeni katsayıları (3) ile hesaplayın ya da dönme formüllerini doğrudan denkleme yazın.

Örnek 21.2 (Dönmeyle sadeleşen bir denklem). $x^2 + y^2 - 2xy + 12x + 2 = 0$ denklemiyle verilen koniği standart biçime getiriniz.

Çözüm.

 CC BY-NC-SA 4.0

Katsayılar. $a_{11} = 1, 2a_{12} = -2$ olduğundan $a_{12} = -1$, $a_{22} = 1$, $a_{13} = 6$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = 2$'dir. $a_{12} \neq 0$ olduğundan eksenleri döndürmemiz gerekir.
Dönme. $a_{11} = a_{22} = 1$ olduğundan Teorem 21.2 gereği $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ alırız:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

İkinci derece kısım $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$'dir ve

$$x - y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y' - x' - y') = -\sqrt{2}\, y'$$

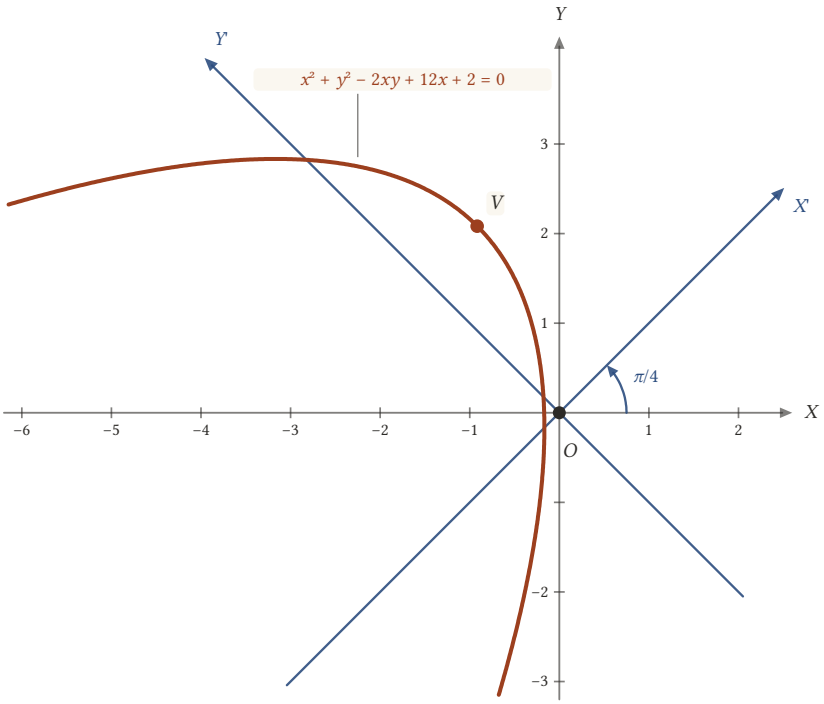
olduğundan $(x - y)^2 = 2y'^2$ bulunur. Birinci derece terim

$$12x = \frac{12}{\sqrt{2}}(x' - y') = 6\sqrt{2}\,(x' - y')$$

dür. Denklem

$$2y'^2 + 6\sqrt{2}\, x' - 6\sqrt{2}\, y' + 2 = 0, \quad \text{yani} \quad y'^2 + 3\sqrt{2}\, x' - 3\sqrt{2}\, y' + 1 = 0$$

olur. Karma terim kaybolmuştur ve x' yalnız birinci dereceden geçtiği için bu bir parabol denklemidir.



Şekil 21.2: Eksenler $\pi/4$ döndürülünce karma terim kaybolur: $y'^2 + 3\sqrt{2}x' - 3\sqrt{2}y' + 1 = 0$.

Öteleme. y''li terimleri tam kareye tamamlayalım:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$y'^2 - 3\sqrt{2}\,y' = \left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{9}{2},$$

$$\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 3\sqrt{2}\,x' + 1 = 0,$$

$$\left(y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -3\sqrt{2}\,x' + \frac{7}{2} = -3\sqrt{2}\left(x' - \frac{7\sqrt{2}}{12}\right).$$

Son adımda $\dfrac{7}{2} = 3\sqrt{2}\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{12}$ eşitliğini kullandık. Şimdi

$$x'' = x' - \frac{7\sqrt{2}}{12}, \qquad y'' = y' - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ötelemesini yapalım. Denklem

$$y''^2 = -3\sqrt{2}\,x''$$

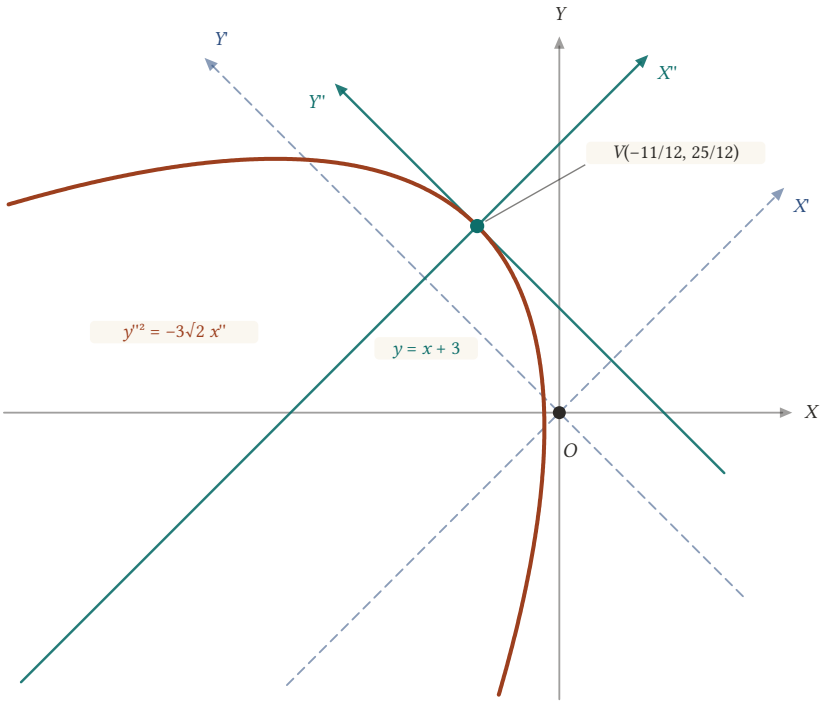
olur. Bu, tepe noktası yeni başlangıç noktası ve ekseni X''-ekseni olan, negatif X'' yönüne açılan bir paraboldür (Parabol).

Tepe noktası eski sistemde. $X'Y'$ sisteminde tepe $\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{12}, \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\dfrac{7\sqrt{2}}{12}, \dfrac{18\sqrt{2}}{12}\right)$'dir. Dönme formülleriyle

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(7-18)\sqrt{2}}{12} = -\frac{11}{12}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{(7+18)\sqrt{2}}{12} = \frac{25}{12}$$

bulunur. Denetim: $x - y = -3$ ve $12x = -11$ olduğundan $(x-y)^2 + 12x + 2 = 0$'dır. Parabolün ekseni $y'' = 0$, yani $y' = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ doğrusudur; $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$ olduğundan eski sistemde bu $y = x + 3$ doğrusudur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 21.3: Eksenler tepe noktasına ötelenince parabolün standart denklemi $y''^2 = -3\sqrt{2}\,x''$ elde edilir.

■

21.4 Dönmede değişmeyen büyüklükler

Yukarıdaki örnekte dönmeden önce $a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2$'ydi. Dönmeden sonra, denklemi 2'ye bölmeden önce, x'^2 ile y'^2'nin katsayıları 0 ve 2 idi; toplamları yine 2'dir. Bu bir rastlantı değil: bazı katsayı birleşimleri eksenler nasıl döndürülürse döndürülsün aynı kalır.

Teorem 21.3 (Dönmede değişmeyen iki ifade).

(1) denkleminde eksenler herhangi bir θ açısıyla döndürülürse (3)'teki yeni katsayılar için

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} \qquad \text{ve} \qquad {a'_{12}}^2 - a'_{11}a'_{22} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

dir.

İspat.
Toplam. *(3)'ten a'_{11} ile a'_{22}'yi toplayalım; $\pm 2a_{12}cs$ terimleri birbirini götürür:*

$$a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(c^2 + s^2) + a_{22}(s^2 + c^2) = a_{11} + a_{22}.$$

İkinci ifade. *Yarım açı formülleri $c^2 = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$, $s^2 = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ ve $2cs = \sin 2\theta$ ile kısaltmalar*

$$S = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}, \qquad T = \frac{a_{11} - a_{22}}{2}$$

yazarsak (3)'teki ilk üç katsayı

$$\begin{aligned} a'_{11} &= S + T\cos 2\theta + a_{12}\sin 2\theta, \\ a'_{22} &= S - T\cos 2\theta - a_{12}\sin 2\theta, \\ a'_{12} &= -T\sin 2\theta + a_{12}\cos 2\theta \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur. $P = T\cos 2\theta + a_{12}\sin 2\theta$ *dersek* $a'_{11} = S + P$, $a'_{22} = S - P$ *ve* $a'_{11}a'_{22} = S^2 - P^2$ *'dir. Öyleyse*

$$a'^{\,2}_{12} - a'_{11}a'_{22} = (-T\sin 2\theta + a_{12}\cos 2\theta)^2 + P^2 - S^2$$

dir. İki karenin toplamını açalım; karma çarpımlar $-2Ta_{12}\sin 2\theta\cos 2\theta$ *ve* $+2Ta_{12}\sin 2\theta\cos 2\theta$ *birbirini götürür ve* $\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ *'den*

$$(-T\sin 2\theta + a_{12}\cos 2\theta)^2 + P^2 = T^2 + a_{12}^2$$

kalır. Böylece

$$\begin{aligned} a'^{\,2}_{12} - a'_{11}a'_{22} &= T^2 + a_{12}^2 - S^2 = a_{12}^2 - \frac{(a_{11}+a_{22})^2 - (a_{11}-a_{22})^2}{4} \\ &= a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \end{aligned}$$

bulunur. ■

İkinci ifadeye bir ad verelim.

Tanım 21.2 (Karakteristik).

(1) denklemi için

$$d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

sayısına denklemin **karakteristiği** denir.

Yani karakteristik yalnız ikinci derece katsayılardan hesaplanır ve karma terimin katsayısının yarısının karesinden x^2 ile y^2 katsayılarının çarpımı çıkarılarak bulunur. Örneğin $x^2 + y^2 - 2xy + 12x + 2 = 0$ için $d = (-1)^2 - 1\cdot 1 = 0$'dır.

Sonuç 21.1 (Dönme altında değişmezler). *Eksenlerin döndürülmesi altında* $a_{11} + a_{22}$ *toplamı ve* d *karakteristiği değişmez.*

İspat.
Önceki teoremin (Teorem 21.3) iki eşitliği tam olarak bunu söyler: ikinci eşitliğin sağ tarafı d*, sol tarafı döndürülmüş denklemin karakteristiği* d' *'dür.* ■

Değişmezlerin en kullanışlı sonucu, karma terimi yok eden dönmeden sonra yeni kare katsayılarını hiç dönme yapmadan bulmamızı sağlamasıdır.

Sonuç 21.2 (Karma terimsiz biçimin kare katsayıları). *Eksenler karma terim kaybolacak biçimde, yani* $a'_{12} = 0$ *olacak biçimde döndürülürse*

$$-a'_{11}a'_{22} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = d \qquad \text{ve} \qquad a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$$

dir. Dolayısıyla a'_{11} *ve* a'_{22}*,* $t^2 - (a_{11}+a_{22})\,t - d = 0$ *denkleminin iki köküdür.*

İspat.
Değişmezlere ilişkin sonuçta (Sonuç 21.1) $a'_{12} = 0$ *yazmak ilk iki eşitliği verir. Toplamı* $a_{11} + a_{22}$ *ve çarpımı* $-d$ *olan iki sayı* $t^2 - (a_{11}+a_{22})\,t + (-d) = 0$ *denkleminin kökleridir (Viète bağıntıları): gerçekten*

$$(t - a'_{11})(t - a'_{22}) = t^2 - (a'_{11} + a'_{22})\,t + a'_{11}a'_{22} = t^2 - (a_{11}+a_{22})\,t - d$$

dir ve sol taraf tam olarak $t = a'_{11}$ *ile* $t = a'_{22}$ *'de sıfır olur.* ■

Yani karma terimi yok eden dönmeden sonra kare katsayıları, sırası dışında, önceden bellidir. Sıra, seçilen açıya bağlıdır: θ yerine $\theta + \frac{\pi}{2}$ alınırsa eksenlerin rolleri ve a'_{11} ile a'_{22} yer değiştirir. Hangi kökün a'_{11} olduğunu bulmak gerekirse (3)'ün ilk satırı kullanılır.

21.5 Koniğin türü: eliptik, hiperbolik, parabolik

Artık her ikinci dereceden denklemi bir dönmeyle karma terimsiz biçime getirebiliriz. Bu biçimi tam kareye tamamlayarak inceleyince karşımıza elips, hiperbol ve parabolün yanında onların "bozulmuş" kardeşleri de çıkar.

Tanım 21.3 (Sanal elips). $a, b > 0$ olmak üzere $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ biçimine getirilebilen bir ikinci dereceden denklemin çözüm kümesi boş kümedir. Böyle bir denkleme, elips denklemine benzediği için **sanal elips** denir.

Yani sanal elips düzlemde hiçbir nokta belirtmez; yalnız denklemin biçimi elipsinkine benzer.

Tanım 21.4 (Yozlaşmış konik). Çözüm kümesi elips, hiperbol ya da parabol olmayan bir ikinci dereceden denkleme **yozlaşmış konik** denir. Bunlar kesişen iki doğru, paralel iki doğru, çakışık iki doğru (tek bir doğru), tek bir nokta ve boş kümedir. Boş küme veren denklemler, benzedikleri denkleme göre **sanal elips** ya da **sanal iki doğru** diye adlandırılır.

Yani yozlaşmış konik, ikinci dereceden bir denklemin eğri yerine daha basit bir küme belirttiği durumdur. Örneğin $x^2 - y^2 = 0$ kesişen iki doğru ($y = \pm x$), $x^2 = 1$ paralel iki doğru ($x = \pm 1$), $x^2 = 0$ çakışık iki doğru (yalnız $x = 0$), $x^2 + y^2 = 0$ tek nokta (O) ve $x^2 = -1$ sanal iki doğrudur.
Eksenler karma terimi yok edecek biçimde döndürülünce $a'_{11}a'_{22} = -d$ çarpımı, Sonuç 21.2 gereği hangi dönme seçilirse seçilsin aynıdır. Koniğin türünü bu çarpımın işaretine göre adlandırıyoruz.

Tanım 21.5 (Eliptik konik).

(1) denklemi eksenler döndürülerek karma terimsiz

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

biçimine getirildiğinde $a'_{11}a'_{22} > 0$ ise koniğe **eliptik** denir.

Tanım 21.6 (Hiperbolik konik). Aynı karma terimsiz biçimde $a'_{11}a'_{22} < 0$ ise koniğe **hiperbolik** denir.

Tanım 21.7 (Parabolik konik). Aynı karma terimsiz biçimde $a'_{11}a'_{22} = 0$ ise koniğe **parabolik** denir.

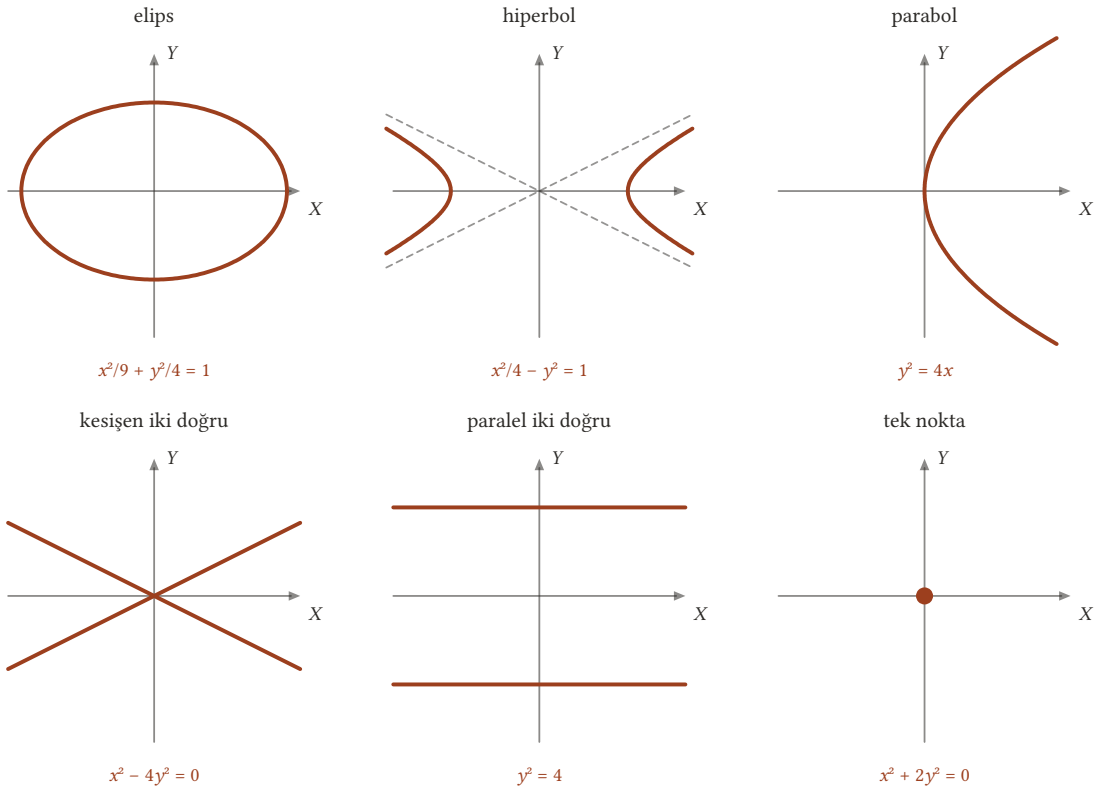
Yani tür, iki kare katsayısının aynı işaretli, ters işaretli ya da birinin sıfır olmasıyla belirlenir. Aşağıdaki önerme, her türün içinde hangi kümelerin çıkabileceğini söylüyor.

Önerme 21.3 (Karma terimsiz denklemlerin sınıflandırılması). $(a'_{11}, a'_{22}) \neq (0,0)$ *olmak üzere*

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

denklemi verilsin.
i) $a'_{11}a'_{22} > 0$ *(eliptik) ise denklem bir elips, tek bir nokta ya da sanal elips belirtir. Özel olarak* $a'_{13} = a'_{23} = 0$ *iken* a'_{33}*'nün işareti* a'_{11}*'nünkinin tersiyse elips,* $a'_{33} = 0$ *ise tek nokta,* a'_{33} *ile* a'_{11} *aynı işaretliyse sanal elips elde edilir.*
ii) $a'_{11}a'_{22} < 0$ *(hiperbolik) ise denklem bir hiperbol ya da kesişen iki doğru belirtir.*
iii) $a'_{11}a'_{22} = 0$ *(parabolik) ise denklem bir parabol, paralel iki doğru, çakışık iki doğru ya da sanal iki doğru belirtir.*

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 21.4: İkinci dereceden denklemlerin belirttiği kümeler: üç konik ve üç yozlaşmış durum (sanal elips ile sanal iki doğru boş kümedir, çizilmez).

İspat.
i) $\boldsymbol{a'_{11}a'_{22} > 0}$**.** *İki kare katsayısı da sıfırdan farklı olduğundan karma terimsiz denklemin ötelenmesindeki gibi (Önerme 21.1) tam kareye tamamlayabiliriz:*

$$a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 = k, \qquad X = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}, \quad Y = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}},$$

burada $k = \dfrac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} + \dfrac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}} - a'_{33}$*'dür.* a'_{11} *ile* a'_{22} *aynı işaretlidir; gerekirse denklemi* -1 *ile çarparak ikisinin de pozitif olduğunu varsayabiliriz (*k*'nın işareti de değişir).*

- $k > 0$ *ise* $\dfrac{X^2}{k/a'_{11}} + \dfrac{Y^2}{k/a'_{22}} = 1$ *bir elipstir (Elips); paydalar pozitiftir.*
- $k = 0$ *ise* $a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 = 0$*'dır; iki negatif olmayan terimin toplamı ancak ikisi de sıfırsa sıfırdır, yani yalnız* $X = Y = 0$ *noktası sağlar.*
- $k < 0$ *ise sol taraf negatif olamayacağından çözüm yoktur; denklem* $\dfrac{X^2}{-k/a'_{11}} + \dfrac{Y^2}{-k/a'_{22}} = -1$ *biçimindeki bir sanal elipstir.*

$a'_{13} = a'_{23} = 0$ *ise* $X = x'$, $Y = y'$ *ve* $k = -a'_{33}$ *olur;* k*'nın* a'_{11} *ile aynı işaretli olması* a'_{33}*'nün* a'_{11}*'ye ters işaretli olması demektir. Bu, özel durumdaki ifadeyi verir.*
ii) $\boldsymbol{a'_{11}a'_{22} < 0}$**.** *Yine tam kareye tamamlayıp* $a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 = k$ *elde ederiz; gerekirse* -1 *ile çarparak* $a'_{11} > 0 > a'_{22}$ *alabiliriz.* $k \neq 0$ *ise*

$$\frac{X^2}{k/a'_{11}} - \frac{Y^2}{k/(-a'_{22})} = 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dir; iki payda aynı işaretli olduğundan bu, $k > 0$ iken asal ekseni X doğrultusunda, $k < 0$ iken (-1 ile çarpınca) asal ekseni Y doğrultusunda bir hiperboldür (Hiperbol). $k = 0$ ise $\alpha = \sqrt{a'_{11}}$, $\beta = \sqrt{-a'_{22}}$ dersek

$$\alpha^2 X^2 - \beta^2 Y^2 = (\alpha X - \beta Y)(\alpha X + \beta Y) = 0$$

olur; bu, $\alpha X - \beta Y = 0$ ve $\alpha X + \beta Y = 0$ doğrularının birleşimidir. İki doğru $X = Y = 0$ noktasında kesişir ve eğimleri farklıdır.
***iii)* $a'_{11}a'_{22} = 0$.** *Kare katsayılarından tam olarak biri sıfırdır; $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$ alalım (öteki durum x' ile y''nün rolleri değiştirilerek aynı biçimde incelenir). Denklem*

$$a'_{22}{y'}^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

dır; y''li terimleri tamamlarsak

$$a'_{22}Y^2 + 2a'_{13}x' + m = 0, \qquad Y = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}, \quad m = a'_{33} - \frac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}}$$

bulunur.

- *$a'_{13} \neq 0$ ise $Y^2 = -\dfrac{2a'_{13}}{a'_{22}}\left(x' + \dfrac{m}{2a'_{13}}\right)$ olur; bu, bir ötelemeyle $Y^2 = 2pX$ biçimine gelen bir parabol-dür (Parabol).*
- *$a'_{13} = 0$ ise denklem $Y^2 = -\dfrac{m}{a'_{22}}$'dür. Sağ taraf pozitifse $Y = \pm\sqrt{-m/a'_{22}}$ paralel iki doğru, sıfırsa $Y = 0$ çakışık iki doğru, negatifse boş küme (sanal iki doğru) elde edilir.* ■

Tür, dönme yapmadan doğrudan karakteristikten okunur.

Teorem 21.4 (Tür ve karakteristik).

(1) koniği

i) $d = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix} > 0$ ise hiperbolik,
ii) $d < 0$ ise eliptik,
iii) $d = 0$ ise paraboliktir.

İspat.
Önce d'nin bu determinantla aynı olduğunu görelim: $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = d$'dir.
$a_{12} = 0$ ise dönmeye gerek yoktur ($\theta = 0$ alınır). $a_{12} \neq 0$ ise Teorem 21.2 karma terimi yok eden bir dönme verir. Her iki durumda da karma terimsiz biçimde Sonuç 21.2 gereği $a'_{11}a'_{22} = -d$'dir. Buna göre $d > 0 \Leftrightarrow a'_{11}a'_{22} < 0$, $d < 0 \Leftrightarrow a'_{11}a'_{22} > 0$ ve $d = 0 \Leftrightarrow a'_{11}a'_{22} = 0$'dır. Tanımlar (Tanım 21.6, Tanım 21.5, Tanım 21.7) sonucu verir. $(a'_{11}, a'_{22}) \neq (0,0)$'dır, çünkü ikisi birden sıfır olsaydı $a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22} = 0$ ve $d = 0$, yani $a_{11} = -a_{22}$ ve $a_{12}^2 = a_{11}a_{22} = -a_{11}^2$ olur; buradan $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$ çıkardı, bu da (1)'in varsayımına aykırıdır. ■

Yani $x^2 - 2xy + y^2 + 12x + 2 = 0$ koniği ($d = 0$) paraboliktir; gerçekten bu denklemden bir parabol bulduk (bkz. Örnek 21.2). Ama tür, koniği tam belirlemez: hiperbolik bir denklem hiperbol de olabilir, kesişen iki doğru da. Aradaki farkı ikinci bir sayı söyleyecek.

21.6 Diskriminant

Karakteristik yalnız ikinci derece katsayılara bakar. Koniğin hangi alt durumda olduğunu anlamak için bütün katsayıları kullanan bir sayıya ihtiyacımız var.

Tanım 21.8 (Diskriminant).

(1) denkleminin katsayılarıyla kurulan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

determinantına denklemin **diskriminantı** ya da **ayıracı** denir.

Yani diskriminant, katsayıları simetrik bir 3×3 tabloya dizip determinantını almaktır: köşegende kare katsayıları ve sabit terim, köşegen dışında karma ve birinci derece katsayıların yarıları durur. Koniğin cinsini tam olarak belirlemek için d'nin yanında D'nin işaretini de bilmek gerekir. Önce D'nin de eksen değişiminden etkilenmediğini gösterelim. Bunun için denklemi matrislerle yazmak işimizi çok kolaylaştırır.

Önerme 21.4 (Denklemin matris biçimi).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere $F(x,y) = \mathbf{u}^T A\,\mathbf{u}$*'dur. Burada* $\mathbf{u}^T = (xy1)$, $\mathbf{u}$*'nun satır biçimidir.*

> ***İspat.***
> *Önce* $A\mathbf{u}$*'yu hesaplayalım:*
>
> $$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} \end{pmatrix}.$$
>
> *Soldan* $(xy1)$ *ile çarparsak*
>
> $$\begin{aligned} \mathbf{u}^T A\mathbf{u} &= x(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}) + y(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}) \\ &\quad + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}) \\ &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} \end{aligned}$$
>
> *bulunur; bu* $F(x,y)$*'dir.* ∎

Yani $D = \det A$'dır ve A'nın simetrik olması, karma ve birinci derece katsayıları neden 2 ile çarpılmış yazdığımızı açıklar: her biri tabloda iki kez yer alır.

Teorem 21.5 (Diskriminant dönmede ve ötelemede değişmez).

(1) denkleminde eksenler döndürülür ya da ötelenirse yeni denklemin diskriminantı D'*, eski diskriminant* D*'ye eşittir.*

> ***İspat.***
> *Her iki dönüşümde de eski koordinatlar yeni koordinatlardan bir matris çarpımıyla elde edilir.* $\mathbf{u}' = (x'y'1)^T$ *olsun.*
> ***Dönme.*** $x = x'c - y's$, $y = x's + y'c$ *eşitlikleri*
>
> $$\mathbf{u} = R\,\mathbf{u}', \qquad R = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
>
> *biçiminde yazılır.* ***Öteleme.*** $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$ *eşitlikleri de*
>
> $$\mathbf{u} = T\,\mathbf{u}', \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

biçimindedir. Her iki durumda M bu matrislerden biri olsun. Lineer cebirden bilinen, çarpımın devriğine ilişkin $(M\mathbf{u}')^T = \mathbf{u}'^T M^T$ eşitliğini kullanırsak matris biçiminden (Önerme 21.4)

$$F(x,y) = \mathbf{u}^T A\,\mathbf{u} = \mathbf{u}'^T \left(M^T A M \right) \mathbf{u}'$$

bulunur. $A' = M^T A M$ simetrik bir matristir ($(M^T AM)^T = M^T A^T M = M^T AM$) ve son satırının son girişi 1 olan $\mathbf{u}'$ ile bu biçimde yazıldığından, yeni denklemin katsayı matrisi odur: köşegen girişleri kare katsayıları ve sabit terimi, köşegen dışındakiler ise yeni denklemdeki karma ve birinci derece katsayılarının yarılarıdır. Lineer cebirden bilinen iki özellikten, determinantın çarpım kuralından ($\det(MN) = \det M \det N$) ve $\det M^T = \det M$ eşitliğinden

$$D' = \det A' = \det M^T \det A \det M = (\det M)^2\, D$$

dir. $\det R = c^2 + s^2 = 1$ (üçüncü satıra göre açılım) ve $\det T = 1$ (üçgen matris, köşegen çarpımı) olduğundan $D' = D$ bulunur. ■

Yani eksenleri döndürmek ya da ötelemek eğrinin kendisini değiştirmediği gibi D'yi de değiştirmez. Aynı hesap, 3×3 matrisin sol üst 2×2 köşesine uygulanırsa d'nin değişmezliğini de verir; biz onu yukarıda doğrudan gösterdik.
Şimdi $d \neq 0$ olan konikler için ana indirgeme sonucunu kanıtlayabiliriz.

Teorem 21.6 (Merkezli koniklerin indirgenmiş biçimi).

(1) denkleminde $d \neq 0$ olsun. Karma terimi yok eden bir dönmeden sonra uygun bir öteleme yapılırsa denklem

$$a'_{11} x''^2 + a'_{22} y''^2 = \frac{D}{d} \tag{5}$$

biçimini alır. Burada a'_{11} ve a'_{22} dönmeden sonraki kare katsayılarıdır.

İspat.
Dönmeden sonra denklem

$$a'_{11} x'^2 + a'_{22} y'^2 + 2a'_{13} x' + 2a'_{23} y' + a'_{33} = 0$$

biçimindedir ve Sonuç 21.2 gereği $a'_{11} a'_{22} = -d \neq 0$'dır; yani iki kare katsayısı da sıfırdan farklıdır. Karma terimsiz denklemin ötelenmesindeki (Önerme 21.1) tam kareye tamamlama

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}\left(y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}\right)^2 + a'_{33} - \frac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} - \frac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}} = 0$$

verir. Sabit terimi tek kesirde toplayalım:

$$a'_{33} - \frac{{a'_{13}}^2}{a'_{11}} - \frac{{a'_{23}}^2}{a'_{22}} = \frac{a'_{11}a'_{22}a'_{33} - a'_{22}{a'_{13}}^2 - a'_{11}{a'_{23}}^2}{a'_{11}a'_{22}}.$$

Payın, dönmüş denklemin diskriminantı D' olduğunu görelim. $a'_{12} = 0$ olduğundan D''yü birinci satıra göre açarsak

$$\begin{aligned} D' &= \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} = a'_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} + a'_{13} \begin{vmatrix} 0 & a'_{22} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} \\ &= a'_{11}\left(a'_{22}a'_{33} - {a'_{23}}^2\right) - {a'_{13}}^2 a'_{22} \end{aligned}$$

bulunur; bu tam olarak paydır. Teorem 21.5 gereği $D' = D$, Sonuç 21.2 gereği de $a'_{11}a'_{22} = -d$'dir. Öyleyse sabit terim $\dfrac{D}{-d} = -\dfrac{D}{d}$'dir.

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{a'_{11}}, \qquad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{a'_{22}}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ötelemesiyle denklem $a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 - \dfrac{D}{d} = 0$, *yani (5) olur.* ■

Yani $d \neq 0$ ise koniğin denklemi, iki uygun eksen değişiminden sonra, katsayıları a'_{11}, a'_{22} ve $\dfrac{D}{d}$ olan çok sade bir biçime iner. a'_{11} ile a'_{22}'nün işaretleri d'ye, sağ tarafın işareti de D'ye bağlıdır. Şimdi bütün durumları sırayla inceleyelim.

21.7 Merkezli koniklerin sınıflandırılması

Bu kısımda $d \neq 0$'dır ve (5) biçimini kullanıyoruz. Önce hiperbolik koniklere bakalım.

Teorem 21.7 (Hiperbolik konikler).

(1) denkleminde $d > 0$ *olsun.*

i) $D \neq 0$ *ise denklem bir hiperbol belirtir. (5)'te* a'_{11} *ve* a'_{22}*'den* D *ile aynı işaretli olanın değişkeninin ekseni, hiperbolün asal eksenidir.*
ii) $D = 0$ *ise denklem kesişen iki doğru belirtir.*

İspat.
$d > 0$ *olduğundan* $a'_{11}a'_{22} = -d < 0$*'dır; kare katsayıları ters işaretlidir.* $a, b > 0$ *olmak üzere iki durum vardır.*
$\boldsymbol{a'_{11} = -a^2,\ a'_{22} = b^2}$ ***ise*** *(5),* $-a^2x''^2 + b^2y''^2 = \dfrac{D}{d}$ *olur.* $D > 0$ *ise sağ taraf pozitiftir ve her iki yanı* $\dfrac{D}{d}$*'ye bölünce*

$$\frac{y''^2}{D/(b^2d)} - \frac{x''^2}{D/(a^2d)} = 1$$

elde edilir: bu, asal ekseni Y''*-ekseni olan bir hiperboldür.* $D < 0$ *ise sağ taraf negatiftir ve* $-\dfrac{D}{d} > 0$*'a bölünce* $\dfrac{x''^2}{-D/(a^2d)} - \dfrac{y''^2}{-D/(b^2d)} = 1$*, yani asal ekseni* X''*-ekseni olan bir hiperbol bulunur.*
$\boldsymbol{a'_{11} = a^2,\ a'_{22} = -b^2}$ ***ise*** *aynı hesap* $D > 0$ *iken asal ekseni* X''*-ekseni,* $D < 0$ *iken asal ekseni* Y''*-ekseni olan bir hiperbol verir.*
Dört durumda da asal eksen, katsayısı D *ile (dolayısıyla* $\dfrac{D}{d}$ *ile, çünkü* $d > 0$*) aynı işaretli olan değişkenin eksenidir.*
$\boldsymbol{D = 0}$ ***ise*** *(5),* $a'_{11}x''^2 + a'_{22}y''^2 = 0$*'dır.* $a'_{11} = a^2$*,* $a'_{22} = -b^2$ *alabiliriz (gerekirse denklemi* -1 *ile çarparız). Bu durumda*

$$a^2x''^2 - b^2y''^2 = (ax'' + by'')(ax'' - by'') = 0$$

dır ve çözüm kümesi $ax'' + by'' = 0$ *ile* $ax'' - by'' = 0$ *doğrularının birleşimidir. Bu iki doğru yeni başlangıç noktasında kesişir.* ■

Yani $d > 0$ olan bir denklem, D sıfır değilse hiperbol, sıfırsa hiperbolün asimptotlarına benzeyen kesişen iki doğrudur. İkinci durumda doğruları bulmanın en kısa yolu, denklemi x'e göre ikinci dereceden bir denklem gibi çözmektir.

Örnek 21.3 (Kesişen iki doğru belirten bir denklem). $x^2 - xy - 2y^2 + x + 4y - 2 = 0$ denkleminin belirttiği kümeyi bulunuz.

Çözüm.
Tür. $a_{11} = 1, a_{12} = -\dfrac{1}{2}, a_{22} = -2, a_{13} = \dfrac{1}{2}, a_{23} = 2, a_{33} = -2$'dir.

$$d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} > 0$$

olduğundan konik hiperboliktir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Diskriminant. Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned} D &= 1\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot(4-4) + \frac{1}{2}(1-1) + \frac{1}{2}(-1+1) = 0. \end{aligned}$$

Burada ikinci terimin işareti, açılımdaki $-a_{12}$ çarpanından gelir: $-a_{12} = \dfrac{1}{2}$. $d > 0$ ve $D = 0$ olduğundan Teorem 21.7 gereği denklem kesişen iki doğru belirtir.

Doğrular. Denklemi x'e göre düzenleyelim:

$$x^2 + (1-y)\,x + (-2y^2 + 4y - 2) = 0.$$

Bu ikinci derece denklemin diskriminantı

$$(1-y)^2 - 4(-2y^2+4y-2) = 9y^2 - 18y + 9 = 9(y-1)^2$$

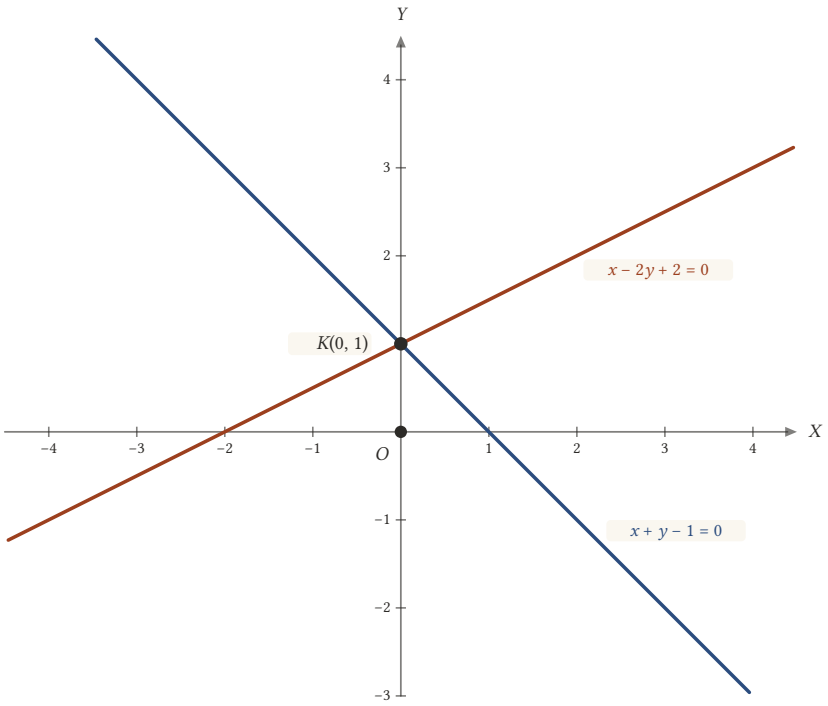
bir tam karedir; bu, $D = 0$ olmasının cebirsel yüzüdür. Kökler

$$x = \frac{-(1-y) \pm 3(y-1)}{2}, \quad \text{yani} \quad x = 2y - 2 \quad \text{ya da} \quad x = -y + 1$$

dir. Demek ki

$$x^2 - xy - 2y^2 + x + 4y - 2 = (x - 2y + 2)(x + y - 1)$$

ve denklem $x - 2y + 2 = 0$ ile $x + y - 1 = 0$ doğrularının birleşimini belirtir. Doğruların eğimleri $\dfrac{1}{2}$ ve -1'dir; $(0, 1)$ noktasında kesişirler.



Şekil 21.5: $d > 0$ ve $D = 0$: $x^2 - xy - 2y^2 + x + 4y - 2 = 0$ denklemi $K(0, 1)$'de kesişen iki doğrudur.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Şimdi eliptik koniklere geçelim. Burada D'nin yanında $a_{11}+a_{22}$ toplamının işareti de rol oynar.

Teorem 21.8 (Eliptik konikler).

(1) denkleminde $d<0$ olsun.

i) D ile $a_{11}+a_{22}$ ters işaretliyse denklem bir elips belirtir.
ii) D ile $a_{11}+a_{22}$ aynı işaretliyse denklem bir sanal elipstir; çözüm kümesi $\varnothing$'dir.
iii) $D=0$ ise denklem tek bir nokta belirtir.

İspat.
$d<0$ olduğundan $a'_{11}a'_{22}=-d>0$'dır; kare katsayıları aynı işaretlidir ve ortak işaretleri, toplamları $a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22}$'nin (Sonuç 21.1) işaretidir. Bu toplam sıfır olamaz. Ayrıca $d<0$ olduğundan $\dfrac{D}{d}$'nin işareti D'nin işaretinin tersidir.

$a_{11}+a_{22}<0$ ise *$a'_{11}=-a^2$, $a'_{22}=-b^2$ $(a,b>0)$ yazabiliriz ve (5), $-a^2x''^2-b^2y''^2=\dfrac{D}{d}$ olur. Sol taraf hiçbir zaman pozitif değildir.*

- *$D>0$ ise $\dfrac{D}{d}<0$'dır; iki yanı $-\dfrac{D}{d}>0$'a bölünce $\dfrac{x''^2}{-D/(a^2d)}+\dfrac{y''^2}{-D/(b^2d)}=1$ elipsi bulunur.*
- *$D<0$ ise $\dfrac{D}{d}>0$'dır ve pozitif olmayan bir sayı pozitif bir sayıya eşit olamaz: çözüm yoktur, denklem sanal elipstir.*

$a_{11}+a_{22}>0$ ise *$a'_{11}=a^2$, $a'_{22}=b^2$ yazabiliriz ve (5), $a^2x''^2+b^2y''^2=\dfrac{D}{d}$ olur. Sol taraf hiçbir zaman negatif değildir.*

- *$D<0$ ise $\dfrac{D}{d}>0$'dır ve $\dfrac{x''^2}{D/(a^2d)}+\dfrac{y''^2}{D/(b^2d)}=1$ elipsi bulunur.*
- *$D>0$ ise $\dfrac{D}{d}<0$'dır ve çözüm yoktur; denklem sanal elipstir.*

İki durumda da elips, D ile $a_{11}+a_{22}$ ters işaretliyken; sanal elips aynı işaretliyken çıkar.
$D=0$ ise *(5), $a'_{11}x''^2+a'_{22}y''^2=0$'dır. İki katsayı aynı işaretli ve sıfırdan farklı olduğundan iki terim de aynı işaretlidir ve toplamları ancak ikisi de sıfırken sıfırdır. Tek çözüm $(x'',y'')=(0,0)$'dır; denklem yeni başlangıç noktasını belirtir.* ■

Yani $d<0$ iken $D=0$ olan denklem bir noktaya "büzülmüş" bir elipstir. İki örnek görelim; ikisinin ikinci derece kısmı aynıdır, yalnız sabit terimleri farklıdır.

Örnek 21.4 (Tek bir nokta belirten denklem). $x^2+xy+y^2-3x-3y+3=0$ denkleminin belirttiği kümeyi bulunuz.

Çözüm.
Tür. $a_{11}=1, a_{12}=\dfrac{1}{2}, a_{22}=1, a_{13}=-\dfrac{3}{2}, a_{23}=-\dfrac{3}{2}, a_{33}=3$'tür ve

$$d=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}<0$$

olduğundan konik eliptiktir.
Diskriminant. Birinci satıra göre açalım:

$$\begin{aligned}D&=1\left(3-\frac{9}{4}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{9}{4}\right)-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)\\&=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{9}{8}=0.\end{aligned}$$

Teorem 21.8 gereği denklem tek bir nokta belirtir.
Nokta. $a_{11}=a_{22}$ olduğundan $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ ile döndürelim: $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'),\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$. (3)'ten

 CC BY-NC-SA 4.0

$$a'_{11} = \frac{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}{2} = \frac{3}{2}, a'_{22} = \frac{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}}{2} = \frac{1}{2},$$
$$a'_{13} = \frac{a_{13} + a_{23}}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}}, \qquad a'_{23} = \frac{-a_{13} + a_{23}}{\sqrt{2}} = 0$$

bulunur ve denklem

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - 3\sqrt{2}\,x' + 3 = 0$$

olur.

$$\frac{3}{2}\left(x'^2 - 2\sqrt{2}\,x'\right) = \frac{3}{2}(x' - \sqrt{2})^2 - 3$$

olduğundan

$$\frac{3}{2}(x' - \sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 0$$

elde edilir. Tek çözüm $x' = \sqrt{2}$, $y' = 0$'dır. Eski sistemde bu nokta $x = \dfrac{\sqrt{2} - 0}{\sqrt{2}} = 1$, $y = \dfrac{\sqrt{2} + 0}{\sqrt{2}} = 1$, yani $(1, 1)$'dir. Denetim: $1 + 1 + 1 - 3 - 3 + 3 = 0$.
■

Örnek 21.5 (Hiçbir nokta belirtmeyen denklem). $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 4 = 0$ denkleminin belirttiği kümeyi bulunuz.

Çözüm.
İkinci derece katsayılar ve birinci derece katsayılar önceki örnektekiyle (Örnek 21.4) aynıdır; yalnız $a_{33} = 4$'tür. Yine $d = -\dfrac{3}{4} < 0$'dır. Diskriminantı yine birinci satıra göre açalım; a_{33} ilk iki küçük determinantta geçer:

$$D = 1\left(4 - \frac{9}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{9}{4}\right) - \frac{3}{2}\left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right)$$
$$= \frac{7}{4} + \frac{1}{8} - \frac{9}{8} = \frac{3}{4} > 0.$$

$a_{11} + a_{22} = 2 > 0$ ve $D > 0$ aynı işaretli olduğundan Teorem 21.8 gereği denklem bir sanal elipstir. Aynı sonuca önceki örnekteki dönmeyle de ulaşırız: sabit terim 1 arttığı için denklem

$$\frac{3}{2}(x' - \sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}y'^2 = -1$$

olur. Sol taraf negatif olamaz; çözüm kümesi $\varnothing$'dir.
■

21.8 Parabol: karakteristiği sıfır, diskriminantı sıfırdan farklı

$d = 0$ olunca (5) kullanılamaz, çünkü kare katsayılarından biri sıfırdır. Bu durumda doğrudan karma terimsiz biçimle çalışırız.

Teorem 21.9 (Parabol durumu).

(1) denkleminde $d = 0$ ve $D \neq 0$ ise denklem bir parabol belirtir.

İspat.
Karma terimi yok eden bir dönmeden sonra (gerekmiyorsa $\theta = 0$) denklem

 CC BY-NC-SA 4.0

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

olur ve Sonuç 21.2 gereği $a'_{11}a'_{22} = -d = 0$'dır. Tür teoreminin ispatında (Teorem 21.4) gördüğümüz gibi a'_{11} ile a'_{22} ikisi birden sıfır olamaz; tam olarak biri sıfırdır.
***$a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$ ise** denklem*

$$a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

dır. Diskriminantı birinci satıra göre açalım:

$$D' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} = a'_{13}\begin{vmatrix} 0 & a'_{22} \\ a'_{13} & a'_{23} \end{vmatrix} = -{a'_{13}}^2 a'_{22}.$$

Teorem 21.5 gereği $D' = D \neq 0$ olduğundan $a'_{13} \neq 0$'dır. Öyleyse x' denklemde birinci dereceden gerçekten geçer ve karma terimsiz denklemlerin sınıflandırılmasındaki (Önerme 21.3) iii) şıkkının hesabı, denklemin bir parabol belirttiğini gösterir: y''li terimler tamamlanıp uygun bir öteleme yapılınca denklem $y''^2 = 2px''$ biçimine gelir.
***$a'_{22} = 0$, $a'_{11} \neq 0$ ise** x' ile y''nün rolleri değişir: $D' = -{a'_{23}}^2 a'_{11} \neq 0$'dan $a'_{23} \neq 0$ çıkar ve denklem $x''^2 = 2py''$ biçimine gelen bir paraboldür.* ■

Yani parabolün kare katsayılarından biri dönmeden sonra kaybolur; $D \neq 0$ koşulu, geri kalan değişkenin birinci derece teriminin kaybolmadığını, dolayısıyla eğrinin bir doğru çiftine bozulmadığını garanti eder. Dönmeyle sadeleşen örnekte (Örnek 21.2) $d = 0$ idi; diskriminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 6 \cdot (0 - 6) = -36 \neq 0$$

dır ve gerçekten bir parabol bulmuştuk.

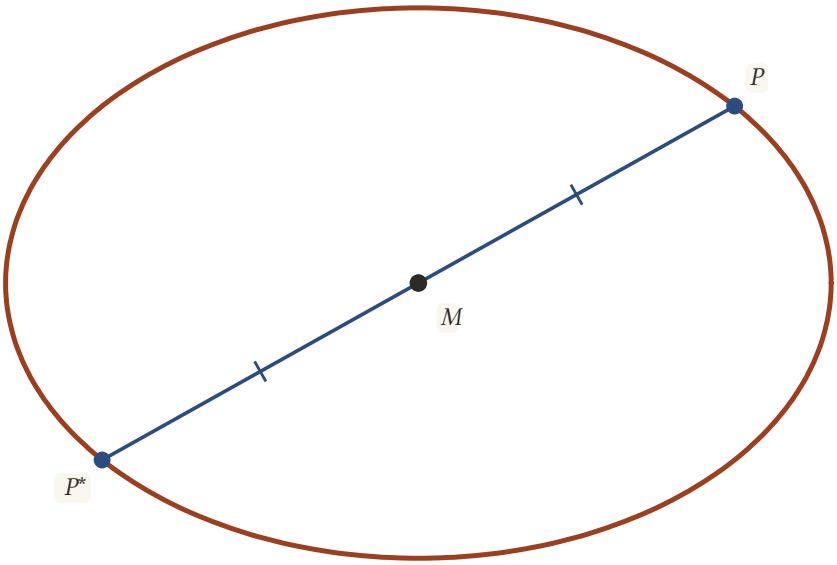
21.9 Koniğin merkezi

Geriye $d = 0$ ve $D = 0$ durumu kaldı. Onu incelemek için koniklerin simetri merkezini ele alacağız. Bu kavram tek başına da çok kullanışlıdır: merkezi bilinen bir koniğin birinci dereceden terimleri, eksenleri merkeze öteleyerek doğrudan yok edilir.

Tanım 21.9 (Koniğin merkezi).

(1) denklemiyle verilen koniğin her noktasının bir $M(x_0, y_0)$ noktasına göre simetriği de koniğin üzerindeyse M'ye koniğin **merkezi** ya da **simetri merkezi** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 21.6: M, koniğin merkezidir: koniğin her P noktasının M'ye göre simetriği P^* de konik üzerindedir.

Yani merkez, koniği kendi etrafında yarım tur döndürdüğümüzde koniğin kendisiyle çakıştığı noktadır. M'ye göre simetri $P \mapsto P^*$, M'nin PP^* doğru parçasının orta noktası olmasıdır: $P^* = (2x_0 - x, 2y_0 - y)$.

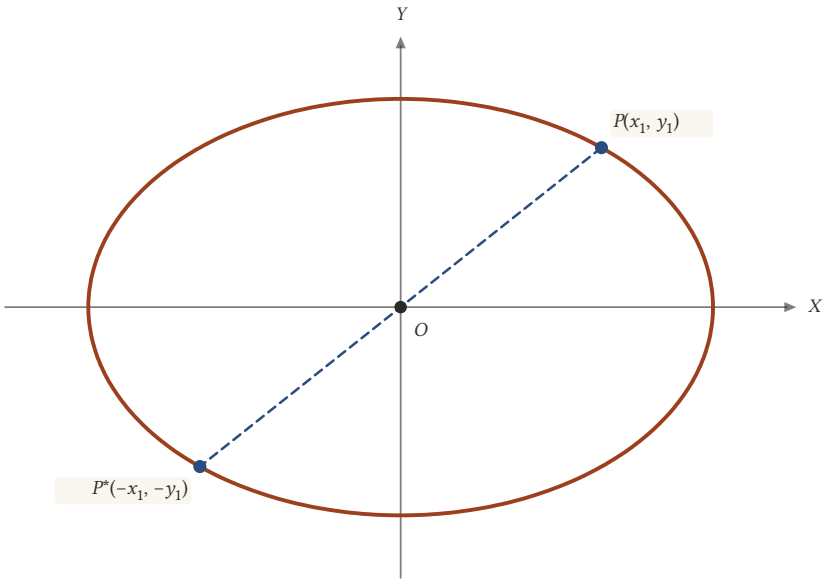
Örnek 21.6 (Elipsin merkezi). $a, b > 0$ olmak üzere $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinde $O(0,0)$ noktasının bir merkez olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
O'ya göre simetri (x, y) noktasını $(-x, -y)$ noktasına götürür. $P(x_1, y_1)$ elips üzerinde olsun, yani $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1$ olsun. $(-x_1)^2 = x_1^2$ ve $(-y_1)^2 = y_1^2$ olduğundan

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

dir; yani $P^*(-x_1, -y_1)$ de elips üzerindedir. Öyleyse O elipsin merkezidir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 21.7: Elipsin her noktasının O'ya göre simetriği de elips üzerindedir.

■

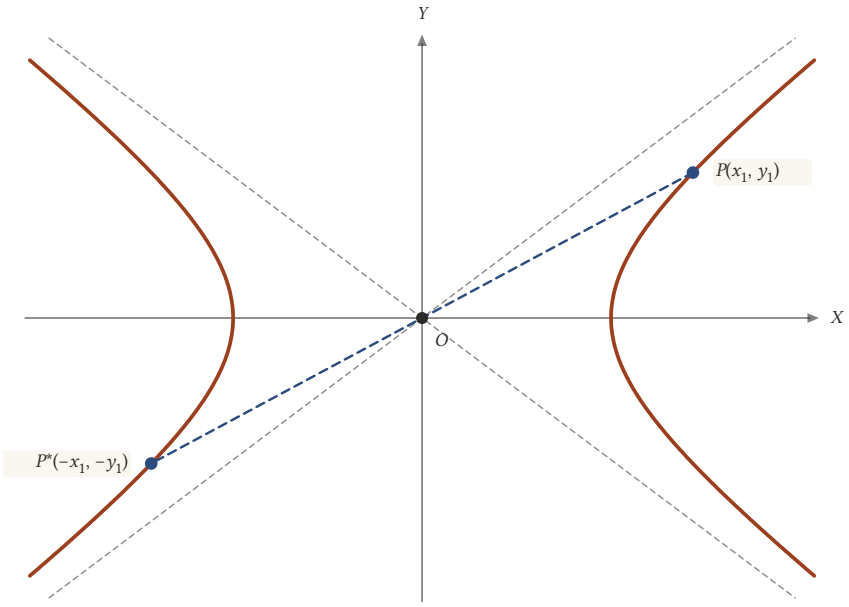
Örnek 21.7 (Hiperbolün merkezi). $a, b > 0$ olmak üzere $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünde $O(0,0)$ noktasının bir merkez olduğunu gösteriniz.

Çözüm.
$P(x_1, y_1)$ hiperbol üzerinde olsun. Denklemde yalnız x^2 ve y^2 geçtiğinden, elipsteki gibi

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} - \frac{(-y_1)^2}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

dir. $P^*(-x_1, -y_1)$ de hiperbol üzerindedir; O hiperbolün merkezidir. Simetrik nokta hiperbolün öbür kolundadır: $x_1 \geq a$ ise $-x_1 \leq -a$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 21.8: Hiperbolün bir kolundaki her noktanın O'ya göre simetriği öbür koldadır.

■

Genel bir denklemde merkezi bulmak için eksenleri bir $M(x_0, y_0)$ noktasına öteleyip katsayıların nasıl değiştiğine bakalım.

Lemma 21.1 (Merkezin denklemleri).

(1) denkleminde eksenler $M(x_0, y_0)$ noktasına ötelenirse, yani $x = x' + x_0, y = y' + y_0$ yazılırsa denklem

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0$$

olur; burada

$$\begin{aligned} a'_{13} &= a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}, \\ a'_{23} &= a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}, \\ a'_{33} &= F(x_0, y_0)\} \end{aligned} \tag{6}$$

dır. Buna göre:

i) $M(x_0, y_0)$

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 &= -a_{13}, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 &= -a_{23}\} \end{aligned} \tag{7}$$

sistemini sağlıyorsa koniğin bir merkezidir.
ii) Koniğin noktaları tek bir doğru üzerinde toplanmıyorsa, tersine, koniğin her merkezi (7)'yi sağlar.

İspat.
Katsayılar. *İkinci derece katsayıların değişmediğini daha önce gördük (Önerme 21.2). O ispattaki açılımlardan x''nün katsayısı $2a_{11}x_0 + 2a_{12}y_0 + 2a_{13}$, y''nün katsayısı $2a_{12}x_0 + 2a_{22}y_0 + 2a_{23}$'tür; bu a'_{13} ve a'_{23}'yü verir. Sabit terim, $x' = y' = 0$ yazıldığında kalan değer, yani $F(x_0, y_0)$'dır.*
i) *M (7)'yi sağlıyorsa $a'_{13} = a'_{23} = 0$'dır ve yeni denklem*

$$G(x', y') = a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dır. $G(-x', -y') = G(x', y')$ olduğundan (x', y') konik üzerindeyse $(-x', -y')$ de üzerindedir. Yeni sistemde $(x', y') \mapsto (-x', -y')$, yeni başlangıç noktası M'ye göre simetridir. Öyleyse M bir merkezdir.
ii) *M bir merkez olsun. Yeni sistemde konik üzerindeki her (x', y') için $(-x', -y')$ de konik üzerindedir; iki noktada da yeni denklem sağlanır. İki eşitliği taraf tarafa çıkaralım. İkinci derece terimler ve sabit terim işaret değiştirmediğinden birbirini götürür ve*

$$4\,\left(\, a'_{13}x' + a'_{23}y' \,\right) = 0$$

kalır. Yani koniğin her noktası $a'_{13}x' + a'_{23}y' = 0$ eşitliğini sağlar. $(a'_{13}, a'_{23}) \neq (0,0)$ olsaydı bu eşitlik (yeni sistemde) bir doğru belirtirdi ve koniğin bütün noktaları bu doğru üzerinde toplanırdı; varsayıma aykırı. Öyleyse $a'_{13} = a'_{23} = 0$'dır; (6)'daki ilk iki eşitlik bu durumda (7)'yi verir. ■

Yani merkez, eksenleri oraya ötelediğimizde birinci dereceden terimlerin kaybolduğu noktadır ve (7) doğrusal sisteminin çözümüdür. ii) şıkkındaki koşul yalnız sıradan olmayan durumları ayıklar: örneğin boş kümenin her nokta "merkezidir", ama bu bilgi işe yaramaz. Elips, hiperbol ve parabol hiçbir doğru üzerinde toplanmadığından onlar için (7) tam olarak merkezleri verir.

Sonuç 21.3 (Merkezin tekliği).

(7) sisteminin bir tek çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$-d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

olmasıdır. Bu durumda (7)'nin çözümü

$$x_0 = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad y_0 = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}$$

dir.

İspat.
Lineer cebirden bilindiği gibi, iki bilinmeyenli iki doğrusal denklemden oluşan bir sistemin tek çözümü olması için gerek ve yeter koşul, katsayılar determinantının sıfırdan farklı olmasıdır; bu durumda tek çözüm Cramer kuralıyla verilir. (7)'nin katsayılar determinantı $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -d$'dir. Öyleyse $d \neq 0$ iken katsayılar determinantı sıfırdan farklı olduğundan tek çözüm vardır ve Cramer kuralıyla

$$x_0 = \frac{1}{-d}\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}$$

bulunur; ilk sütunu -1 ile çarpmak determinantın işaretini değiştirir. y_0 için hesap aynıdır. ■

Bu sonuç, bölümün başından beri kullandığımız bir adı açıklıyor.

Tanım 21.10 (Merkezli konik). Karakteristiği $d \neq 0$ olan (1) koniğine **merkezli konik** denir; (7)'nin tek çözümü $M(x_0, y_0)$ bu koniğin merkezidir.

Yani elipsler, hiperboller, sanal elipsler, tek noktalar ve kesişen doğru çiftleri merkezli koniklerdir; tek nokta durumunda merkez o noktanın kendisi, kesişen iki doğru durumunda kesişim noktasıdır. Parabollerin ise hiç merkezi yoktur.

Önerme 21.5 (Parabolün merkezi yoktur). *$d = 0$ ve $D \neq 0$ ise (7) sisteminin çözümü yoktur; dolayısıyla bir parabolün merkezi yoktur.*

İspat.
(7)'nin bir (x_0, y_0) çözümü olduğunu varsayalım ve eksenleri $M(x_0, y_0)$'a öteleyelim. Lemma 21.1 gereği yeni denklemde $a'_{13} = a'_{23} = 0$'dır ve diskriminantı, üçüncü satıra göre açılınca

 CC BY-NC-SA 4.0

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = a'_{33}\,(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = -a'_{33}\,d = 0$$

olur. Oysa Teorem 21.5 gereği $D' = D \neq 0$'dır. Bu çelişki (7)'nin çözümü olmadığını gösterir. Parabol bir doğru üzerinde toplanmadığından merkez lemmasının (Lemma 21.1) ii) şıkkı gereği her merkezi (7)'yi sağlamalıdır; öyleyse merkezi yoktur. ■

Merkez bulunduktan sonra eksenleri oraya ötelemek, birinci dereceden terimleri hesap yapmadan yok eder.

Sonuç 21.4 (Merkeze öteleme).

(1) koniğinin (7)'yi sağlayan bir $M(x_0, y_0)$ merkezi varsa, $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$ ötelemesi birinci dereceden terimleri yok eder ve denklem

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + a'_{33} = 0, \qquad a'_{33} = F(x_0, y_0)$$

biçimini alır.

İspat.
Merkez lemmasındaki (Lemma 21.1) (6) formüllerinde (7) kullanılırsa $a'_{13} = a'_{23} = 0$ bulunur; sabit terim $F(x_0, y_0)$'dır. ■

Yeni sabit terimi $F(x_0, y_0)$'ı hesaplamanın daha kısa bir yolu var.

Sonuç 21.5 (Merkeze ötelemede sabit terim). *$M(x_0, y_0)$, (7)'nin bir çözümü ise*

$$a'_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} \tag{8}$$

dir. Ayrıca $d \neq 0$ ise $a'_{33} = -\dfrac{D}{d}$'dir.

İspat.
$F(x_0, y_0)$'ı terimleri gruplayarak yazalım:

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33} \\ &= x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) + y_0(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) \\ &\quad + a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}. \end{aligned}$$

(7) gereği ilk iki parantez sıfırdır; (8) bulunur.
$d \neq 0$ ise merkezin tekliğine ilişkin sonuçtaki (Sonuç 21.3) x_0 ve y_0'ı (8)'de yerine yazalım:

$$\begin{aligned} a'_{33} &= \frac{a_{13}(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23}) + a_{23}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})}{d} + a_{33} \\ &= \frac{a_{13}^2a_{22} - 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{11}a_{23}^2 + a_{12}^2a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33}}{d}. \end{aligned}$$

Öte yandan D'yi üçüncü sütuna göre açarsak

$$\begin{aligned} D &= a_{13}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{13}^2a_{22} - a_{11}a_{23}^2 + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}^2a_{33} \end{aligned}$$

bulunur. Bu, yukarıdaki payın tam -1 katıdır; öyleyse $a'_{33} = -\dfrac{D}{d}$'dir. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani merkezli bir konikte merkezi bulup eksenleri oraya ötelemek, denklemi $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = \dfrac{D}{d}$ biçimine getirir; bundan sonra karma terimi yok eden dönme doğrudan (5)'i verir. Bu yol, indirgenmiş biçim teoremindeki (Teorem 21.6) "önce döndür, sonra ötele" yolunun tersidir ve sonuç aynıdır.

21.10 Karakteristiği ve diskriminantı sıfır olan konikler

Son durumda $d = 0$ ve $D = 0$'dır. Önce bu iki koşulun katsayılar arasında ne söylediğini açalım.

Lemma 21.2 (Karakteristiğin ve diskriminantın birlikte sıfır olması).

$$d = 0 \text{ ve } D = 0 \Leftrightarrow a_{12}^2 = a_{11}a_{22}, \quad a_{12}a_{13} = a_{11}a_{23} \text{ ve } a_{13}a_{22} = a_{12}a_{23}.$$

İspat.
($\Rightarrow$) $d = 0$ olsun; bu $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ demektir. D'yi üçüncü sütuna göre açalım; son terimin çarpanı $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = -d = 0$'dır:

$$0 = D = a_{13}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{23}(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}). \tag{9}$$

(9)'un sağ tarafını a_{11} ile çarpıp $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ yazalım:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{11}a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{22}a_{13}^2 - a_{11}^2a_{23}^2 + a_{11}a_{12}a_{13}a_{23} \\ &= 2a_{11}a_{12}a_{13}a_{23} - a_{12}^2a_{13}^2 - a_{11}^2a_{23}^2 = -(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})^2. \end{aligned}$$

Bir gerçel sayının karesi ancak sayı sıfırsa sıfırdır; $a_{12}a_{13} = a_{11}a_{23}$ bulunur. (9)'u a_{22} ile çarpıp yine $a_{11}a_{22} = a_{12}^2$ yazarsak

$$\begin{aligned} 0 &= a_{22}a_{12}a_{13}a_{23} - a_{13}^2a_{22}^2 - a_{12}^2a_{23}^2 + a_{22}a_{12}a_{13}a_{23} \\ &= -(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})^2 \end{aligned}$$

olur ve $a_{13}a_{22} = a_{12}a_{23}$ çıkar.
($\Leftarrow$) Üç eşitlik sağlansın. Birincisi $d = 0$ demektir. İkincisi ve üçüncüsü (9)'daki iki parantezi sıfır yapar: $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} = 0$ ve $a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} = 0$. D'nin üçüncü sütuna göre açılımının üç terimi de sıfır olduğundan $D = 0$'dır. ■

Yani $d = D = 0$ iken ikinci derece katsayılar ile birinci derece katsayılar "orantılıdır". Bu durumda (7)'nin iki denklemi aynı doğruyu anlatır ve koniğin sonsuz çok merkezi vardır.

Teorem 21.10 (Paralel, çakışık ve sanal doğru çiftleri).

(1) denkleminde $d = 0$ ve $D = 0$ olsun. Denklem gerekirse -1 ile çarpılarak $a_{11} + a_{22} > 0$ yapılabilir; bunu varsayalım. O zaman (7)'nin çözümleri bir doğru oluşturur, bu doğrunun herhangi bir $M(x_0, y_0)$ noktasına yapılan öteleme denklemi

$$\left(\sqrt{a_{11}}\,x' + \varepsilon\sqrt{a_{22}}\,y'\right)^2 + a'_{33} = 0 \tag{10}$$

biçimine getirir ($a_{12} \geq 0$ ise $\varepsilon = 1$, $a_{12} < 0$ ise $\varepsilon = -1$) ve a'_{33} seçilen M'ye bağlı değildir:

$$a'_{33} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2 + a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{11} + a_{22}}.$$

Buna göre:

i) $a'_{33} < 0$ ise denklem paralel iki doğru belirtir;
ii) $a'_{33} > 0$ ise çözüm kümesi $\varnothing$'dir (sanal iki doğru);
iii) $a'_{33} = 0$ ise denklem çakışık iki doğru, yani tek bir doğru belirtir.

İspat.
İşaretler. *$a_{11}a_{22} = a_{12}^2 \geq 0$ olduğundan a_{11} ile a_{22} aynı işaretlidir ya da biri sıfırdır. İkisi birden sıfır olsaydı $a_{12}^2 = 0$ çıkar ve (1)'in varsayımı bozulurdu; öyleyse $a_{11} + a_{22} \neq 0$'dır. Denklemi -1 ile çarpmak*

 CC BY-NC-SA 4.0

çözüm kümesini değiştirmez ve lemmadaki eşitlikleri bozmaz; böylece $a_{11}+a_{22}>0$, dolayısıyla $a_{11}\geq 0$ ve $a_{22}\geq 0$ alabiliriz.
Merkezler. *$a_{11}>0$ olsun. (7)'nin ikinci denklemini a_{11} ile çarpıp lemmadaki (Lemma 21.2) $a_{11}a_{22}=a_{12}^2$ ve $a_{11}a_{23}=a_{12}a_{13}$ eşitliklerini kullanalım:*

$$a_{11}a_{12}x_0+a_{12}^2y_0=-a_{12}a_{13},\quad \text{yani}\quad a_{12}(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13})=0.$$

Bu, birinci denklemin bir sonucudur. Öyleyse (7), tek başına birinci denkleme, yani $a_{11}x_0+a_{12}y_0=-a_{13}$ doğrusuna denktir. $a_{11}=0$ ise $a_{12}^2=0$, $a_{22}>0$ ve $a_{13}a_{22}=a_{12}a_{23}=0$'dan $a_{13}=0$'dır; (7)'nin birinci denklemi $0=0$ olur ve sistem $a_{22}y_0=-a_{23}$ doğrusuna denktir. Her iki durumda (7)'nin çözümleri bir doğrudur.
Sabit terim. *$M(x_0,y_0)$ bu doğrudan bir nokta olsun. Sonuç 21.4 gereği öteleme denklemi*

$$a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2+a'_{33}=0$$

biçimine getirir ve (8)'e göre $a'_{33}=a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}$'tür. Bu eşitliği a_{11} ile çarpıp $a_{11}a_{23}=a_{12}a_{13}$ ve (7)'yi kullanalım:

$$\begin{aligned}a_{11}a'_{33}&=a_{11}a_{13}x_0+a_{12}a_{13}y_0+a_{11}a_{33}\\&=a_{13}(a_{11}x_0+a_{12}y_0)+a_{11}a_{33}=a_{11}a_{33}-a_{13}^2.\end{aligned}$$

Benzer biçimde a_{22} ile çarpıp $a_{13}a_{22}=a_{12}a_{23}$ kullanırsak

$$\begin{aligned}a_{22}a'_{33}&=a_{12}a_{23}x_0+a_{22}a_{23}y_0+a_{22}a_{33}\\&=a_{23}(a_{12}x_0+a_{22}y_0)+a_{22}a_{33}=a_{22}a_{33}-a_{23}^2\end{aligned}$$

bulunur. (a_{12} ile çarpınca da aynı yoldan $a_{12}a'_{33}=a_{12}a_{33}-a_{13}a_{23}$ çıkar.) İlk ikisini toplayıp $a_{11}+a_{22}>0$'a bölersek a'_{33} için verilen formül elde edilir; formülde x_0 ve y_0 geçmediğinden a'_{33} merkezin seçimine bağlı değildir.
Tam kare. *ε söylendiği gibi seçilirse $\varepsilon\sqrt{a_{11}a_{22}}=\varepsilon\mid a_{12}\mid=a_{12}$'dir. Öyleyse*

$$\left(\sqrt{a_{11}}\,x'+\varepsilon\sqrt{a_{22}}\,y'\right)^2=a_{11}x'^2+2a_{12}x'y'+a_{22}y'^2$$

dir ve denklem (10) biçimini alır. $(\sqrt{a_{11}},\sqrt{a_{22}})\neq(0,0)$ olduğundan $\ell(x',y')=\sqrt{a_{11}}\,x'+\varepsilon\sqrt{a_{22}}\,y'$ için $\ell=k$ denklemleri paralel doğrulardır.
i) *$a'_{33}<0$ ise $-a'_{33}=k^2$ $(k>0)$ yazalım. (10), $\ell^2=k^2$, yani $\ell=k$ ya da $\ell=-k$ olur: iki farklı paralel doğru.*
ii) *$a'_{33}>0$ ise (10), $\ell^2=-a'_{33}<0$ verir; bir gerçel sayının karesi negatif olamaz, çözüm yoktur. Denklem doğru denklemlerine benzediğinden bu duruma sanal iki doğru denir.*
iii) *$a'_{33}=0$ ise (10), $\ell^2=0$, yani $\ell=0$ olur: iki doğru çakışır.* ■

Yani $d=D=0$ iken denklem, bir doğrusal ifadenin karesi artı bir sabite indirgenir; sabitin işareti, iki paralel doğru mu, tek doğru mu, hiç nokta mı olduğunu söyler. a'_{33}'yü hesaplarken $a_{11}\neq 0$ ise kısaca $a'_{33}=\dfrac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{a_{11}}$, $a_{22}\neq 0$ ise $a'_{33}=\dfrac{a_{22}a_{33}-a_{23}^2}{a_{22}}$ de kullanılabilir. Bu formüller, $a_{11}+a_{22}>0$ olacak biçimde işaretlenmiş denklem için geçerlidir.

Örnek 21.8 (Paralel iki doğru belirten bir denklem). $x^2+4xy+4y^2+2x+4y-3=0$ denkleminin belirttiği kümeyi bulunuz.

Çözüm.
Katsayılar ve değişmezler. $a_{11}=1$, $a_{12}=2$, $a_{22}=4$, $a_{13}=1$, $a_{23}=2$, $a_{33}=-3$'tür. $d=4-4=0$'dır. Lemmadaki (Lemma 21.2) eşitlikler sağlanır:

$$a_{12}a_{13}=2=a_{11}a_{23},\qquad a_{13}a_{22}=4=a_{12}a_{23};$$

öyleyse $D=0$'dır.
Sabit terim. $a_{11}+a_{22}=5>0$'dır ve $a_{11}\neq 0$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

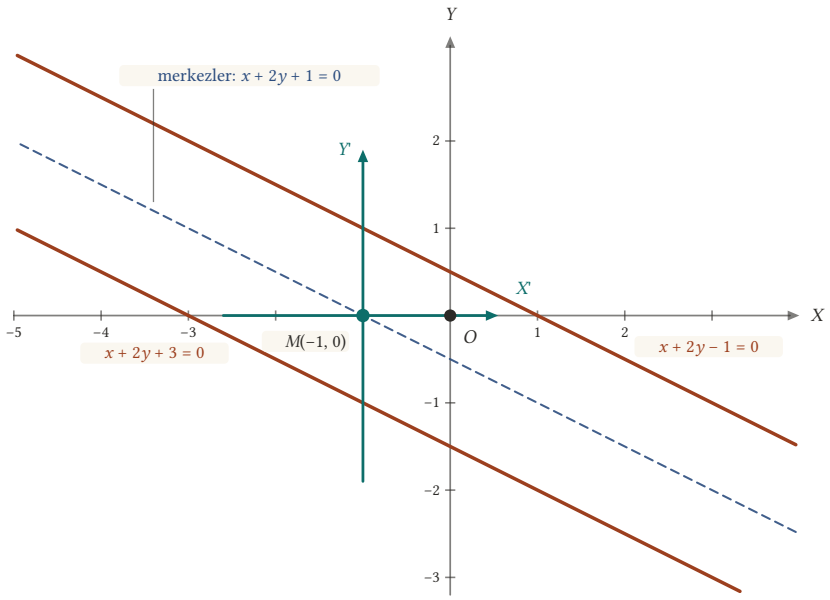
$$a'_{33} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{11}} = \frac{-3-1}{1} = -4 < 0$$

bulunur. Teorem 21.10 gereği denklem paralel iki doğru belirtir.
Doğrular. Merkezler (7)'nin birinci denklemi $x_0 + 2y_0 = -1$ doğrusudur; örneğin $M(-1,0)$'ı seçelim. $x = x' - 1$, $y = y'$ ötelemesiyle denklem $(x' + 2y')^2 - 4 = 0$ olur ($\varepsilon = 1$, çünkü $a_{12} > 0$). Buradan $x' + 2y' = \pm 2$, eski koordinatlarla $x + 1 + 2y = \pm 2$, yani

$$x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{ve} \qquad x + 2y + 3 = 0$$

doğruları bulunur. Denetim:

$$\begin{aligned}(x + 2y - 1)(x + 2y + 3) &= (x + 2y)^2 + 2(x + 2y) - 3 \\ &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y - 3.\end{aligned}$$



Şekil 21.9: $d = D = 0$ ve $a'_{33} = -4 < 0$: denklem paralel iki doğrudur; merkezler aralarındaki orta doğrudadır.

■

21.11 Sınıflandırma tablosu

Şimdi bütün sonuçları bir arada görebiliriz. d, D, $a_{11} + a_{22}$ ve gerektiğinde a'_{33}'nün işaretleri, dönme ya da öteleme yapmadan koniğin cinsini söyler.

d	D	$a_{11} + a_{22}$	a'_{33}	Konik	Tür
$+$	$+$			Hiperbol	Hiperbolik
$+$	$-$			Hiperbol	Hiperbolik
$+$	0			Kesişen iki doğru	Hiperbolik
$-$	$+$	$+$		Sanal elips	Eliptik
$-$	$+$	$-$		Elips	Eliptik
$-$	$-$	$+$		Elips	Eliptik

 CC BY-NC-SA 4.0

d	D	$a_{11}+a_{22}$	a'_{33}	Konik	Tür
$-$	$-$	$-$		Sanal elips	Eliptik
$-$	0			Tek nokta	Eliptik
0	$+$			Parabol	Parabolik
0	$-$			Parabol	Parabolik
0	0	$+$	$+$	Sanal iki doğru	Parabolik
0	0	$+$	$-$	Paralel iki doğru	Parabolik
0	0	$+$	0	Çakışık iki doğru	Parabolik

Son üç satırda denklem önce $a_{11}+a_{22}>0$ olacak biçimde işaretlenir ($a_{11}+a_{22}<0$ ise -1 ile çarpılır); a'_{33} ise Teorem 21.10 içindeki formülle hesaplanır. Boş satırlar, o sütunun sonucu etkilemediğini gösterir.

Bir koniği beş adımda sınıflandırmak

1. Katsayıları okuyun: a_{12}, a_{13}, a_{23} ilgili terimin katsayısının yarısıdır.
2. $d=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$'yi hesaplayın; bu, türü (hiperbolik, eliptik, parabolik) verir.
3. D'yi hesaplayın. $d<0$ ise $a_{11}+a_{22}$'nin işaretine, $d=D=0$ ise a'_{33}'nün işaretine de bakın ve tablodan koniği okuyun.
4. $d\neq 0$ ise merkezi (7)'den bulun; eksenleri oraya ötelemek birinci dereceden terimleri yok eder ve sabit terim $-\dfrac{D}{d}$ olur.
5. Karma terimi dönme açısı teoremindeki (Teorem 21.2) açıyla yok edin; $d\neq 0$ ise sonuç (5)'tir.

Örnek 21.9 (Bir parametreye bağlı konikler).

$$mx^2-2xy+my^2-2mx+2y+2=0$$

denkleminin belirttiği konikleri m'nin değerlerine göre sınıflandırınız.

Çözüm.
Katsayılar. $a_{11}=m$, $a_{12}=-1$, $a_{22}=m$, $a_{13}=-m$, $a_{23}=1$, $a_{33}=2$'dir.
Karakteristik.

$$d=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=1-m^2=(1-m)(1+m).$$

Diskriminant. Birinci satıra göre açalım:

$$D=\begin{vmatrix} m & -1 & -m \\ -1 & m & 1 \\ -m & 1 & 2 \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -m & 2 \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} -1 & m \\ -m & 1 \end{vmatrix}.$$

İkinci terimde $a_{12}=-1$ olduğundan açılımdaki $-a_{12}$ çarpanı $+1$'dir. Küçük determinantlar $2m-1$, $-2+m$ ve $-1+m^2$'dir:

$$\begin{aligned} D &= m(2m-1)+(m-2)-m(m^2-1) \\ &= 2m^2-m+m-2-m^3+m=-m^3+2m^2+m-2 \\ &= -m(m^2-1)+2(m^2-1)=(m^2-1)(2-m) \\ &= (1-m)(1+m)(m-2). \end{aligned}$$

İz. $a_{11}+a_{22}=2m$'dir.
İşaret tablosu. d'nin kökleri ± 1, D'nin kökleri ± 1 ve 2, izin kökü 0'dır. Aralıklarda bir değer deneyerek işaretleri buluruz:

 CC BY-NC-SA 4.0

m	$m<-1$	$-1<m<0$	$0<m<1$	$1<m<2$	$m>2$
d	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
D	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
$a_{11}+a_{22}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
Konik	Elips	Hiperbol	Hiperbol	Sanal elips	Elips

Tabloya göre:

- $m<-1$ ise elips ($d<0$, $D>0$, iz negatif),
- $-1<m<1$ ise hiperbol ($d>0$, $D<0$; $m=0$ da aşağıda),
- $1<m<2$ ise sanal elips ($d<0$, $D>0$, iz pozitif),
- $m>2$ ise elips ($d<0$, $D<0$, iz pozitif).

Sınır değerleri. $m=-1$ için $d=0$ ve $D=0$'dır. İz $-2<0$ olduğundan denklemi -1 ile çarpalım: $x^2+2xy+y^2-2x-2y-2=0$. Şimdi $a_{11}=1$, $a_{13}=-1$, $a_{33}=-2$ ve

$$a'_{33}=\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{a_{11}}=-2-1=-3<0$$

olduğundan konik paralel iki doğrudur. Gerçekten denklem $(x+y)^2-2(x+y)-2=0$'dır ve $x+y=1\pm\sqrt{3}$ doğrularını verir.
$m=0$ için $d=1>0$ ve $D=-2<0$'dır; konik bir hiperboldür. Denklem $-2xy+2y+2=0$, yani $y(x-1)=1$'dir.
$m=1$ için $d=0$ ve $D=0$'dır. İz $2>0$'dır; $a_{11}=1$, $a_{13}=-1$, $a_{33}=2$ ile

$$a'_{33}=\frac{2-1}{1}=1>0$$

olduğundan konik sanal iki doğrudur. Gerçekten denklem

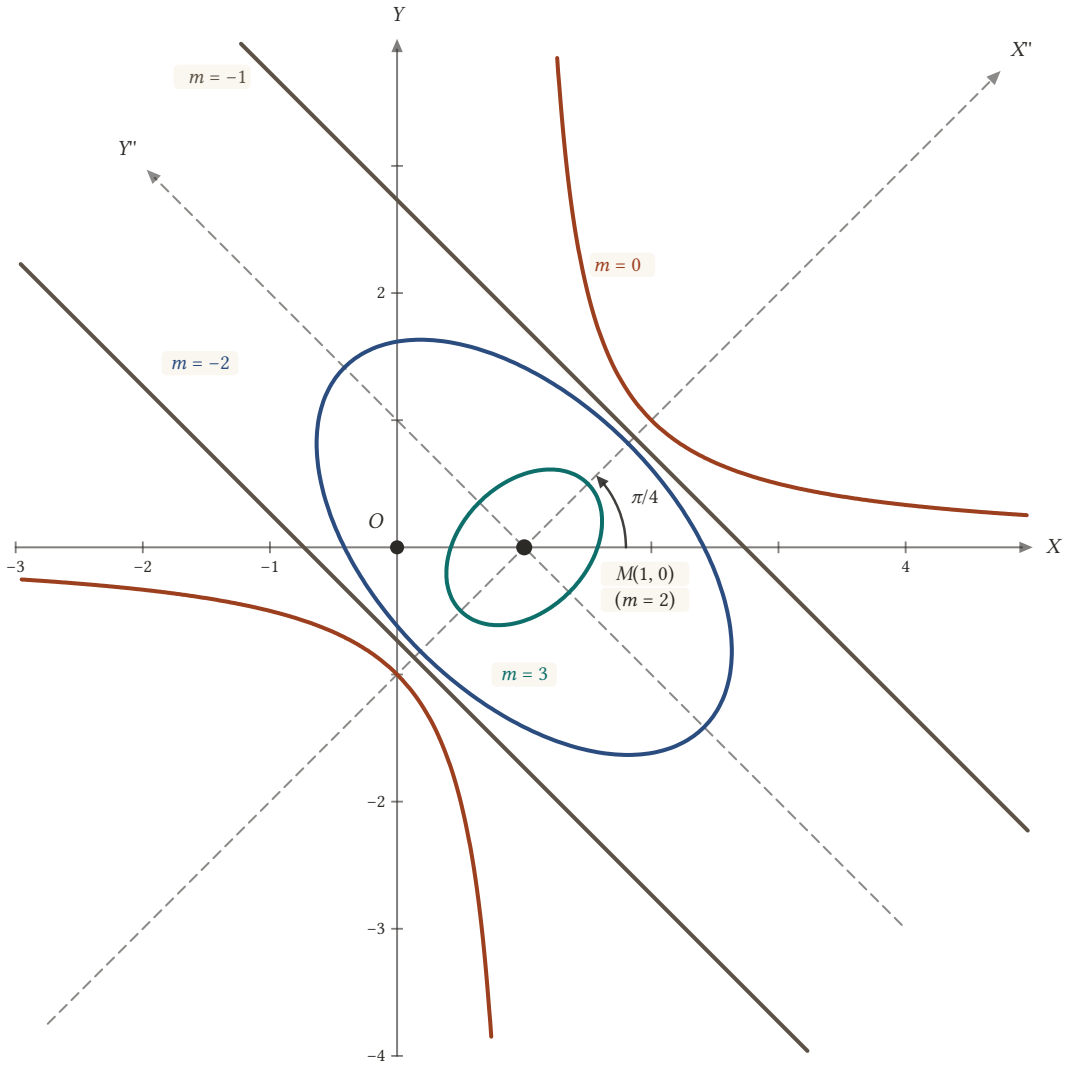
$$(x-y)^2-2(x-y)+2=\big[\,(x-y)-1\big]^2+1=0$$

dır ve hiçbir nokta sağlamaz.
$m=2$ için $d=-3<0$ ve $D=0$'dır; konik tek bir noktadır.
Denetim. $m\neq\pm1$ iken $d\neq0$'dır ve (7) sistemi $mx_0-y_0=m$, $-x_0+my_0=-1$'dir. İkinciden $x_0=my_0+1$; birincide yerine yazınca $(m^2-1)\,y_0=0$, yani $y_0=0$ ve $x_0=1$ bulunur. Bütün merkezli üyelerin merkezi $M(1,0)$'dır ve Sonuç 21.5 gereği $a'_{33}=-\dfrac{D}{d}=2-m$'dir. Eksenleri M'ye öteleyip ($x=x'+1$, $y=y'$) sonra $\dfrac{\pi}{4}$ döndürürsek ($a_{11}=a_{22}$) kare katsayıları $\dfrac{a_{11}\pm2a_{12}+a_{22}}{2}=m\mp1$ olur ve denklem

$$(m-1)\,x''^2+(m+1)\,y''^2=m-2$$

biçimini alır. Buradan da okunur: $m=2$ için $x''^2+3y''^2=0$ yalnız $M(1,0)$ noktasıdır; $m=-2$ için $3x''^2+y''^2=4$ bir elipstir; $1<m<2$ için sol taraf pozitif, sağ taraf negatiftir (sanal elips); $-1<m<1$ için kare katsayıları ters işaretlidir (hiperbol).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 21.10: $mx^2 - 2xy + my^2 - 2mx + 2y + 2 = 0$ ailesinin bazı üyeleri; merkezli üyelerin hepsi $M(1, 0)$ merkezlidir ve eksenleri $\pi/4$ döndürülmüş doğrultudadır.

■

21.12 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda karma terimi dönmeyle yok edeceğiz, konikleri değişmezlerle sınıflandıracağız ve merkezleri bulacağız.

Alıştırma 21.1 (Dönmeyle standart biçime gelen parabol).

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}\,x - 16\sqrt{5}\,y = 0$$

koniğini uygun bir dönme yardımıyla standart biçime getiriniz.

Çözüm.
Açı. $a_{11} = 4$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = 1$, $a_{13} = -4\sqrt{5}$, $a_{23} = -8\sqrt{5}$, $a_{33} = 0$'dır. $a_{11} \neq a_{22}$ olduğundan

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-4}{3}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dir. $0 < 2\theta < \pi$ ve tanjant negatif olduğundan 2θ ikinci bölgededir; $\cos^2 2\theta = \dfrac{1}{1+\frac{16}{9}} = \dfrac{9}{25}$'ten $\cos 2\theta = -\dfrac{3}{5}$ ve $\sin 2\theta = \dfrac{4}{5}$ bulunur. Yarım açı formülleriyle

$$\cos^2\theta = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{1}{5}, \qquad \sin^2\theta = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{4}{5},$$

yani $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$'tir ($\theta = \arctan 2$).

Dönme. Dönme formülleri

$$x = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}, \qquad y = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}$$

dir. İkinci derece kısım $4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$'dir ve

$$2x - y = \frac{2x' - 4y' - 2x' - y'}{\sqrt{5}} = \frac{-5y'}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5}\,y'$$

olduğundan $(2x-y)^2 = 5y'^2$'dir. Birinci derece kısım:

$$\begin{aligned} -8\sqrt{5}\,x - 16\sqrt{5}\,y &= -8(x' - 2y') - 16(2x' + y') \\ &= -40x' + (16 - 16)\,y' = -40x'. \end{aligned}$$

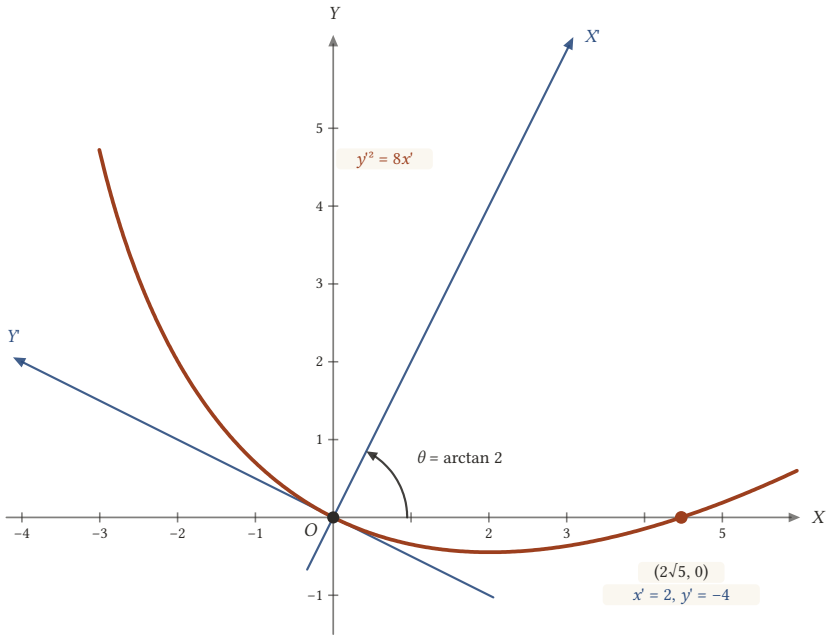
Denklem $5y'^2 - 40x' = 0$, yani

$$y'^2 = 8x'$$

olur. Bu, tepe noktası O, ekseni X'-ekseni olan ve pozitif X' yönüne açılan bir paraboldür; $y^2 = 2px$ biçiminde $p = 4$'tür (Parabol). Eski sistemde X'-ekseni, O'dan $(1, 2)$ doğrultusunda geçen $y = 2x$ doğrusudur.

Denetim. $d = 4 - 4 = 0$ ve $D = -2000 \neq 0$ olduğundan konik gerçekten bir paraboldür. İz $a_{11} + a_{22} = 5 = 0 + 5$'tir. Parabol X-eksenini $4x^2 - 8\sqrt{5}\,x = 0$'dan $x = 0$ ve $x = 2\sqrt{5}$'te keser; $(2\sqrt{5}, 0)$ noktasının yeni koordinatları $x' = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2$, $y' = \dfrac{-2\cdot 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -4$'tür ve $(-4)^2 = 8\cdot 2$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 21.11: Eksenler arctan 2 kadar döndürülünce $4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$ parabolü $y'^2 = 8x'$ olur; parabolün ekseni $y = 2x$ doğrusudur.

■

Alıştırma 21.2 (Dönme ve ötelemeyle standart biçime gelen hiperbol). $xy - 2y - 4x = 0$ koniğini uygun bir dönme yardımıyla standart biçime getiriniz.

Çözüm.
Dönme. $a_{11} = a_{22} = 0$ ve $a_{12} = \dfrac{1}{2} \neq 0$ olduğundan Teorem 21.2 gereği $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ alırız:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

Yerine yazalım:

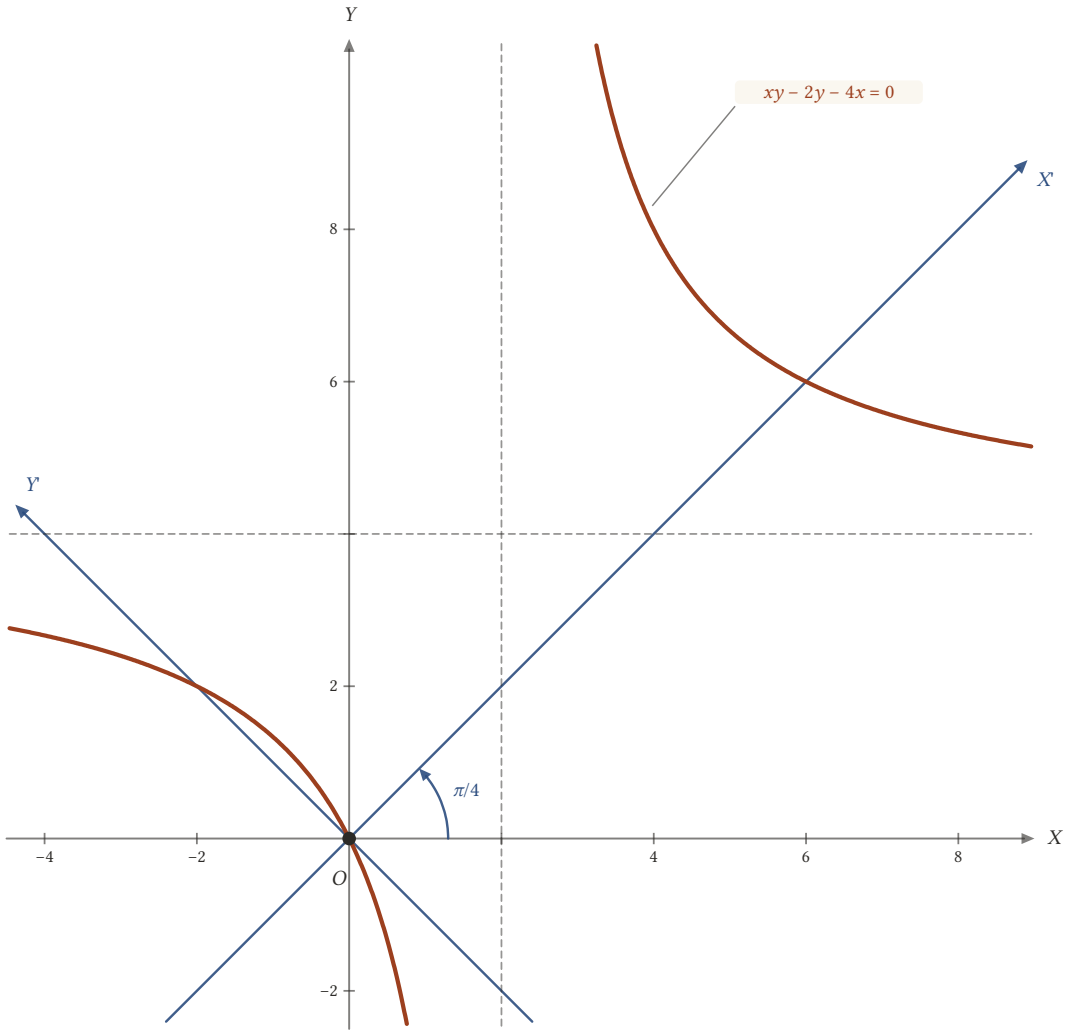
$$xy = \frac{1}{2}(x' - y')(x' + y') = \frac{1}{2}\left(x'^2 - y'^2 \right),$$
$$-2y - 4x = -\frac{2}{\sqrt{2}}(x' + y') - \frac{4}{\sqrt{2}}(x' - y') = -\frac{6}{\sqrt{2}}\,x' + \frac{2}{\sqrt{2}}\,y'.$$

$\dfrac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ ve $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$'dir. Denklemi 2 ile çarparsak

$$x'^2 - y'^2 - 6\sqrt{2}\,x' + 2\sqrt{2}\,y' = 0$$

bulunur. $a'_{11} = 1$ ve $a'_{22} = -1$ ters işaretli olduğundan konik hiperboliktir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 21.12: Eksenler $\pi/4$ döndürülünce karma terim kaybolur: $x'^2 - y'^2 - 6\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' = 0$.

Öteleme. Tam kareye tamamlayalım:

$$x'^2 - 6\sqrt{2}\,x' = \left(x' - 3\sqrt{2}\right)^2 - 18,$$
$$-y'^2 + 2\sqrt{2}\,y' = -\left(y' - \sqrt{2}\right)^2 + 2.$$

Denklem

$$\left(x' - 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(y' - \sqrt{2}\right)^2 - 16 = 0$$

olur. $x'' = x' - 3\sqrt{2}$, $y'' = y' - \sqrt{2}$ ötelemesiyle

$$x''^2 - y''^2 = 16$$

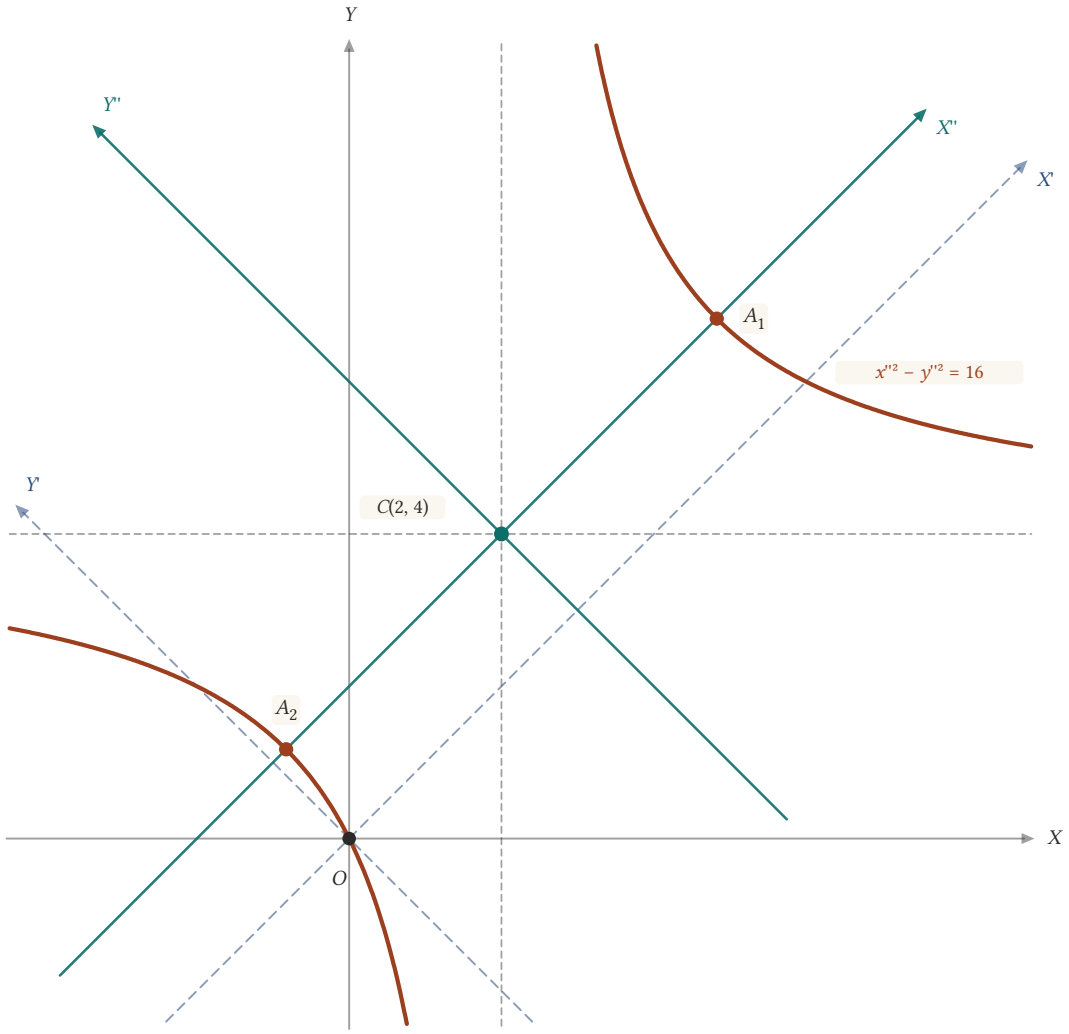
bulunur. Bu, $a = b = 4$ olan bir ikizkenar hiperboldür; asal ekseni X''-eksenidir (Hiperbol).

Eski sistemde. Merkez $X'Y''$'de $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$'dir; eski sistemde $x = \dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$, $y = \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$, yani $C(2, 4)$'tür. Köşeler $x'' = \pm 4$, $y'' = 0$'dadır, yani $x' = 3\sqrt{2} \pm 4$, $y' = \sqrt{2}$; eski sistemde

$$\left(2 + 2\sqrt{2}, 4 + 2\sqrt{2}\right) \qquad \text{ve} \qquad \left(2 - 2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2}\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dir. Denetim: denklem $(x-2)(y-4)=8$ biçiminde de yazılabilir ve köşeler için $(\pm 2\sqrt{2})(\pm 2\sqrt{2}) = 8$'dir. Değişmezler de uyar: $d = \dfrac{1}{4} > 0$ ve $D = 2 \neq 0$'dır.



Şekil 21.13: Eksenler merkez $C(2,4)$'e ötelenince ikizkenar hiperbolün standart denklemi $x''^2 - y''^2 = 16$ elde edilir.

■

Alıştırma 21.3 (Koniğin cinsi: dönmüş bir hiperbol). $3x^2 - 10xy + 3y^2 + x - 32 = 0$ denklemiyle verilen koniğin cinsini belirleyiniz.

Çözüm.
Değişmezler. $a_{11}=3$, $a_{12}=-5$, $a_{22}=3$, $a_{13}=\dfrac{1}{2}$, $a_{23}=0$, $a_{33}=-32$'dir. Karakteristik

$$d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 25 - 9 = 16 > 0$$

dır. Diskriminantı üçüncü sütuna göre açalım ($a_{23}=0$ olduğundan orta terim yoktur):

 CC BY-NC-SA 4.0

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 & \frac{1}{2} \\ -5 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -32 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} - 32\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) - 32(9-25).$$

Buradan $D = -\frac{3}{4} + 512 = \frac{2045}{4} > 0$ bulunur. $d > 0$ ve $D > 0$ olduğundan Teorem 21.7 gereği konik bir hiperboldür.

İndirgenmiş biçim. $a_{11} = a_{22}$ olduğundan dönme açısı $\frac{\pi}{4}$'tür ve (3)'ten

$$a'_{11} = \frac{a_{11} + 2a_{12} + a_{22}}{2} = \frac{3 - 10 + 3}{2} = -2, \qquad a'_{22} = \frac{a_{11} - 2a_{12} + a_{22}}{2} = 8$$

bulunur. Denetim: $a'_{11} + a'_{22} = 6 = a_{11} + a_{22}$ ve $-a'_{11}a'_{22} = 16 = d$'dir. $\frac{D}{d} = \frac{2045}{64}$ olduğundan (5)

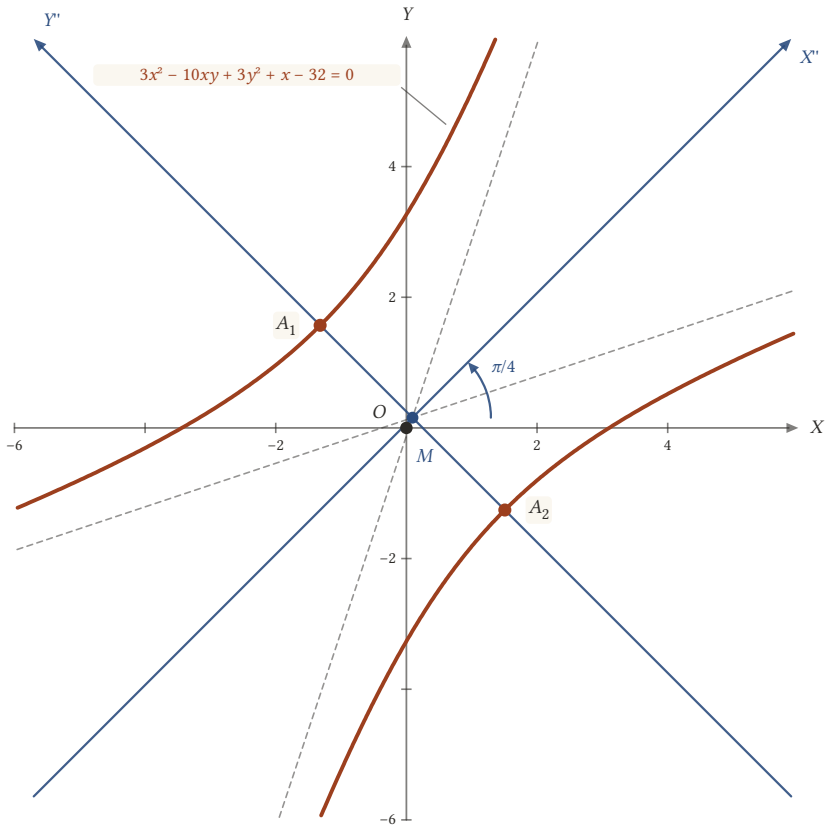
$$-2x''^2 + 8y''^2 = \frac{2045}{64}$$

verir. Katsayısı D ile aynı işaretli (pozitif) olan y'' olduğundan asal eksen Y''-eksenidir.

Merkez. (7) sistemi $3x_0 - 5y_0 = -\frac{1}{2}$, $-5x_0 + 3y_0 = 0$'dır. İkinciden $y_0 = \frac{5}{3}x_0$; birincide yerine yazınca $\left(3 - \frac{25}{3}\right)x_0 = -\frac{1}{2}$, yani $x_0 = \frac{3}{32}$ ve $y_0 = \frac{5}{32}$ bulunur. (8)'den

$$a'_{33} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{32} - 32 = -\frac{2045}{64} = -\frac{D}{d}$$

olur; bu, Sonuç 21.5 ile uyumludur.



Şekil 21.14: $d = 16 > 0$, $D = 2045/4 > 0$: konik, asal ekseni Y''-ekseni olan bir hiperboldür.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 21.4 (Koniğin cinsi: dönmüş bir elips). $41x^2 - 84xy + 76y^2 = 168$ denklemiyle verilen koniğin cinsini belirleyiniz.

Çözüm.
Değişmezler. Denklemi $41x^2 - 84xy + 76y^2 - 168 = 0$ diye yazarsak $a_{11} = 41$, $a_{12} = -42$, $a_{22} = 76$, $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = -168$'dir.

$$d = (-42)^2 - 41 \cdot 76 = 1764 - 3116 = -1352 < 0$$

dır. Diskriminant üçüncü satıra göre açılınca

$$D = \begin{vmatrix} 41 & -42 & 0 \\ -42 & 76 & 0 \\ 0 & 0 & -168 \end{vmatrix} = -168\,(41 \cdot 76 - 42^2) = -168 \cdot 1352 < 0$$

bulunur. $a_{11} + a_{22} = 117 > 0$'dır. $d < 0$ ve D ile iz ters işaretli olduğundan Teorem 21.8 gereği konik bir elipstir.
İndirgenmiş biçim. $\tan 2\theta = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \dfrac{-84}{-35} = \dfrac{12}{5}$,'tir. $\cos^2 2\theta = \dfrac{1}{1 + \frac{144}{25}} = \dfrac{25}{169}$ ve 2θ birinci bölgede olduğundan $\cos 2\theta = \dfrac{5}{13}$'tür. Buradan

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \frac{5}{13}}{2} = \frac{9}{13}, \qquad \sin^2\theta = \frac{4}{13}, \qquad \cos\theta \sin\theta = \frac{6}{13}$$

dır ($\theta = \arctan \dfrac{2}{3}$). (3)'ten

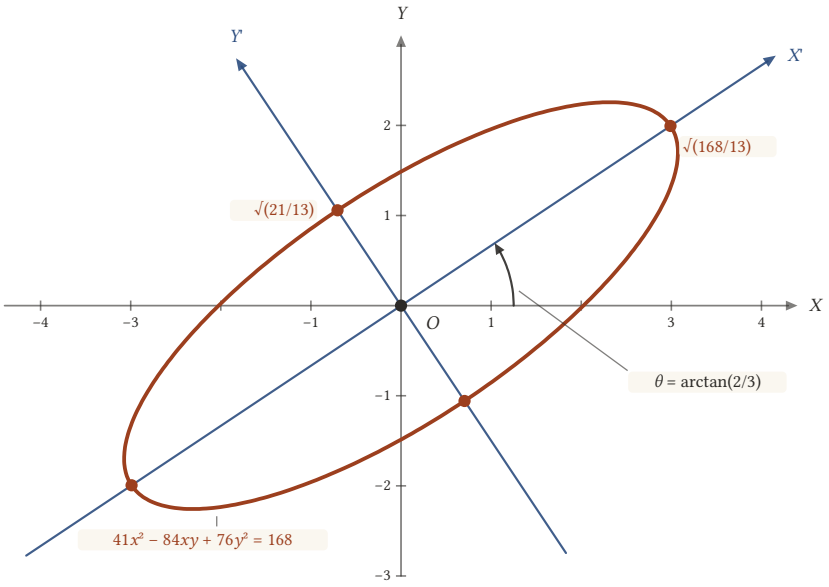
$$a'_{11} = \frac{41 \cdot 9 - 84 \cdot 6 + 76 \cdot 4}{13} = \frac{369 - 504 + 304}{13} = 13,$$
$$a'_{22} = \frac{41 \cdot 4 + 84 \cdot 6 + 76 \cdot 9}{13} = \frac{164 + 504 + 684}{13} = 104$$

bulunur. Birinci derece terim olmadığından öteleme gerekmez ve denklem

$$13x'^2 + 104y'^2 = 168, \quad \text{yani} \quad \frac{x'^2}{168/13} + \frac{y'^2}{21/13} = 1$$

olur. Denetim: $\dfrac{D}{d} = \dfrac{-168 \cdot 1352}{-1352} = 168$'dir ve $13 + 104 = 117$, $13 \cdot 104 = 1352 = -d$'dir. Elipsin yarı eksenleri $\sqrt{168/13} \approx 3{,}595$ (X' boyunca) ve $\sqrt{21/13} \approx 1{,}271$'dir ($Y'$ boyunca).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 21.15: Eksenler arctan(2/3) döndürülünce elipsin denklemi $13x'^2 + 104y'^2 = 168$ olur.

■

Alıştırma 21.5 (Koniğin cinsi: dönmüş bir parabol).

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x + 40y = 0$$

denklemiyle verilen koniğin cinsini belirleyiniz.

Çözüm.
Değişmezler. $a_{11} = 16, a_{12} = 12, a_{22} = 9, a_{13} = -15, a_{23} = 20, a_{33} = 0$'dır.

$$d = 12^2 - 16 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$$

dır; konik paraboliktir. Diskriminantı üçüncü sütuna göre açalım ($a_{33} = 0$ olduğundan son terim yoktur):

$$D = -15\begin{vmatrix} 12 & 9 \\ -15 & 20 \end{vmatrix} - 20\begin{vmatrix} 16 & 12 \\ -15 & 20 \end{vmatrix} = -15\,(240 + 135) - 20\,(320 + 180).$$

Buradan

$$D = -15 \cdot 375 - 20 \cdot 500 = -5625 - 10000 = -15625 \neq 0$$

bulunur. $d = 0$ ve $D \neq 0$ olduğundan Teorem 21.9 gereği konik bir paraboldür.
Standart biçim. $\tan 2\theta = \dfrac{24}{16-9} = \dfrac{24}{7}$ ve $\cos^2 2\theta = \dfrac{1}{1+\frac{576}{49}} = \dfrac{49}{625}$'ten $\cos 2\theta = \dfrac{7}{25}$'tir. Buradan $\cos^2\theta = \dfrac{16}{25}$, $\sin^2\theta = \dfrac{9}{25}$, yani $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$, $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ ve $\cos\theta\sin\theta = \dfrac{12}{25}$'tir. (3)'ten

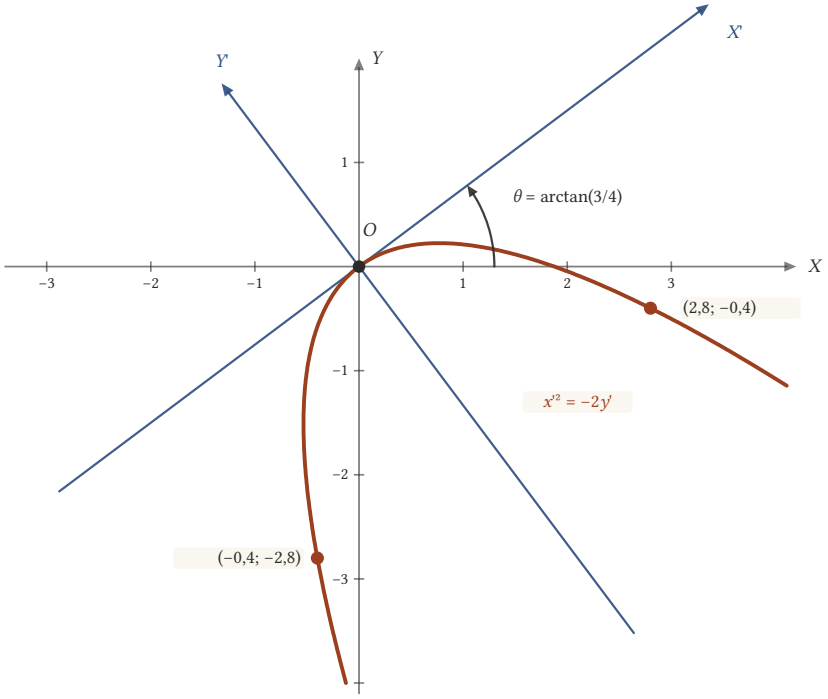
$$a'_{11} = \frac{16 \cdot 16 + 24 \cdot 12 + 9 \cdot 9}{25} = \frac{625}{25} = 25, a'_{22} = \frac{16 \cdot 9 - 24 \cdot 12 + 9 \cdot 16}{25} = 0,$$

$$a'_{13} = -15 \cdot \frac{4}{5} + 20 \cdot \frac{3}{5} = 0, \qquad a'_{23} = 15 \cdot \frac{3}{5} + 20 \cdot \frac{4}{5} = 25$$

bulunur. Denklem $25x'^2 + 50y' = 0$, yani

$$x'^2 = -2y'$$

olur. Bu, tepe noktası O, ekseni Y'-ekseni olan ve negatif Y' yönüne açılan bir paraboldür. Denetim: $D' = -a'_{23}{}^2 a'_{11} = -15625$'tir ve bu D'ye eşittir.



Şekil 21.16: Eksenler arctan(3/4) döndürülünce $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 30x + 40y = 0$ parabolü $x'^2 = -2y'$ olur.

■

Alıştırma 21.6 (Bir parametreye bağlı konikler: merkezli durum).

$$mx^2 + 2(m-2)xy + (m-3)y^2 - 4 = 0$$

denkleminin belirttiği konikleri m'nin değerlerine göre irdeleyiniz.

Çözüm.
Katsayılar. $a_{11} = m$, $a_{12} = m-2$, $a_{22} = m-3$, $a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{33} = -4$'tür.
Karakteristik.

$$d = (m-2)^2 - m(m-3) = m^2 - 4m + 4 - m^2 + 3m = 4 - m.$$

Diskriminant. Üçüncü satıra göre açılınca

$$D = -4\left(\, m(m-3) - (m-2)^2 \,\right) = -4\,(m-4) = 16 - 4m$$

bulunur. Ayrıca $a_{11} + a_{22} = 2m - 3$'tür.
İşaret tablosu.

m	$m < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < m < 4$	$m > 4$
d	$+$	$+$	$-$
D	$+$	$+$	$-$

 CC BY-NC-SA 4.0

m	$m < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < m < 4$	$m > 4$
$a_{11} + a_{22}$	$-$	$+$	$+$
Konik	Hiperbol	Hiperbol	Elips

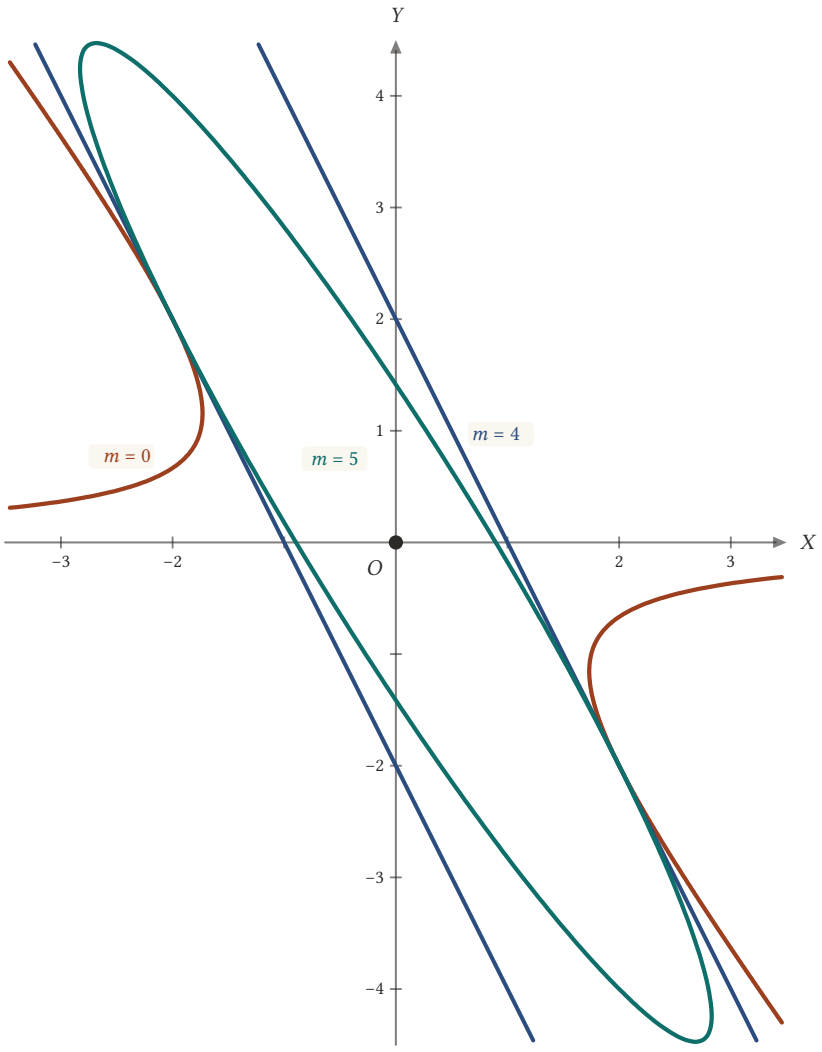
$m < 4$ iken $d > 0$ ve $D > 0$ olduğundan konik her zaman bir hiperboldür; izin işareti bu durumda sonucu etkilemez. $m > 4$ iken $d < 0$, $D < 0$ ve iz pozitif, yani D ile iz ters işaretlidir; konik bir elipstir. **Sınır değerleri.** $m = \dfrac{3}{2}$ için $d = \dfrac{5}{2} > 0$ ve $D = 10 > 0$'dır; konik bir hiperboldür. $m = 4$ için $d = 0$ ve $D = 0$'dır. İz $5 > 0$'dır ve $a_{22} = 1 \neq 0$ olduğundan

$$a'_{33} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{22}} = \frac{1 \cdot (-4) - 0}{1} = -4 < 0$$

bulunur; konik paralel iki doğrudur. Gerçekten $m = 4$ için denklem

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 4 = (2x + y)^2 - 4 = 0$$

dır ve $2x + y = 2$, $2x + y = -2$ doğrularını verir.



Şekil 21.17: $mx^2 + 2(m-2)xy + (m-3)y^2 - 4 = 0$ ailesi: $m < 4$ için hiperbol, $m = 4$ için paralel iki doğru, $m > 4$ için elips.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

Alıştırma 21.7 (Bir hiperbolün merkezi).

$$3x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x - 8y - 7 = 0$$

koniğinin, varsa, merkezini bulunuz.

Çözüm.
$a_{11} = 3$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = -2$, $a_{13} = 1$, $a_{23} = -4$, $a_{33} = -7$'dir.

$$d = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 - 4) = 10 \neq 0$$

olduğundan Sonuç 21.3 gereği koniğin bir tek merkezi vardır. $M(x_0, y_0)$ (7)'yi sağlamalıdır:

$$3x_0 - 2y_0 = -1, \qquad -2x_0 - 2y_0 = 4.$$

Birinciden ikinciyi çıkarınca $5x_0 = -5$, yani $x_0 = -1$; ikinciden $y_0 = \dfrac{4 + 2x_0}{-2} = \dfrac{4-2}{-2} = -1$ bulunur. Merkez $M(-1, -1)$'dir.
Eksenleri M'ye ötelersek (8)'den

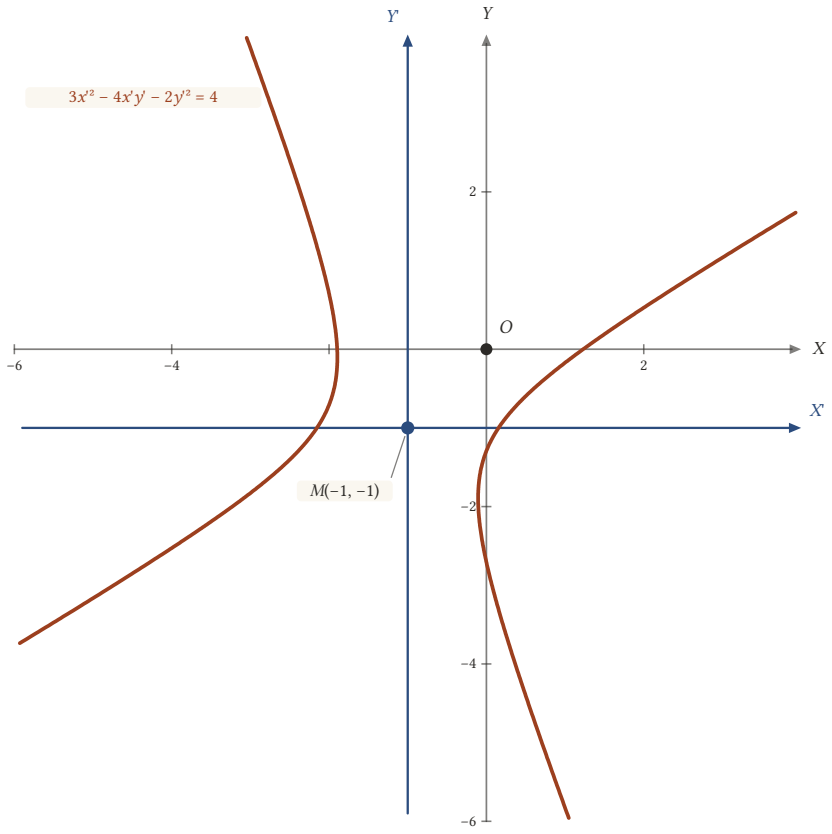
$$a'_{33} = 1 \cdot (-1) + (-4)(-1) - 7 = -4$$

bulunur ve denklem

$$3x'^2 - 4x'y' - 2y'^2 - 4 = 0$$

olur. Sonuç 21.5 gereği $-\dfrac{D}{d} = -4$, yani $D = 40$'tır; $d > 0$ ve $D \neq 0$ olduğundan konik bir hiperboldür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 21.18: Hiperbolün merkezi $M(-1,-1)$; eksenler M'ye ötelenince birinci dereceden terimler kaybolur.

■

Alıştırma 21.8 (Merkeze öteleyerek birinci derece terimleri yok etmek).

$$2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$$

koniğinin merkezini bulunuz. Eksenleri öteleyerek birinci dereceden terimleri yok ediniz.

Çözüm.
Merkez. $a_{11}=2$, $a_{12}=-3$, $a_{22}=5$, $a_{13}=11$, $a_{23}=-18$, $a_{33}=11$'dir. $d = 9-10 = -1 \neq 0$ olduğundan tek bir merkez vardır. (7):

$$2x_0 - 3y_0 = -11, \qquad -3x_0 + 5y_0 = 18.$$

Birinciyi 5, ikinciyi 3 ile çarpıp toplarsak $10x_0 - 9x_0 = -55 + 54$, yani $x_0 = -1$; birinciden $-3y_0 = -11 + 2 = -9$, yani $y_0 = 3$ bulunur. Merkez $M(-1,3)$'tür.
Öteleme. $x = x' - 1$ ve $y = y' + 3$ yazalım. Sonuç 21.4 gereği ikinci derece katsayılar aynı kalır, birinci derece terimler kaybolur. Sabit terim (8)'den

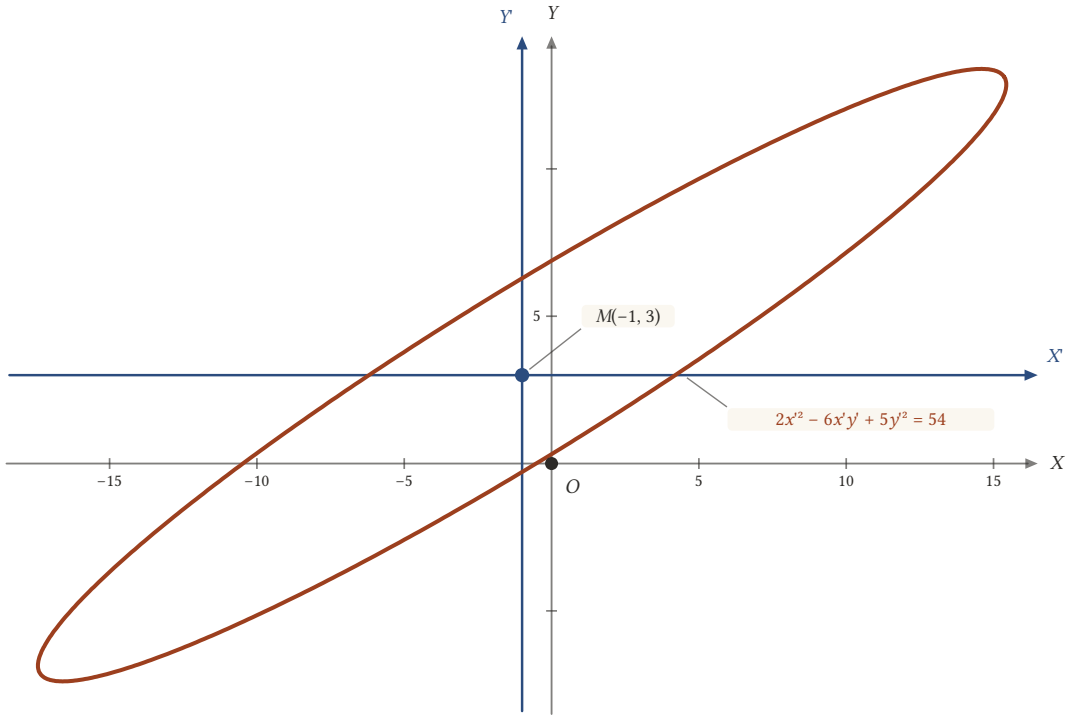
$$a'_{33} = 11 \cdot (-1) + (-18) \cdot 3 + 11 = -11 - 54 + 11 = -54$$

dür. Doğrudan yerine yazarak da görelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$
\begin{aligned}
&2(x'-1)^2 - 6(x'-1)(y'+3) + 5(y'+3)^2 + 22(x'-1) - 36(y'+3) + 11 \\
&= 2x'^2 - 6x'y' + 5y'^2 + (-4 - 18 + 22)\,x' + (6 + 30 - 36)\,y' \\
&\quad + (2 + 18 + 45 - 22 - 108 + 11) \\
&= 2x'^2 - 6x'y' + 5y'^2 - 54.
\end{aligned}
$$

Denklem $2x'^2 - 6x'y' + 5y'^2 - 54 = 0$ olur. $d < 0$, $D = -d \cdot a'_{33} = -54 < 0$ ve iz $7 > 0$ olduğundan konik bir elipstir.



Şekil 21.19: Elipsin merkezi $M(-1, 3)$; eksenler M'ye ötelenince birinci dereceden terimler kaybolur.

■

Alıştırma 21.9 (Merkezleri bir doğru oluşturan konik). $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$ koniğinin, varsa, merkezini bulunuz.

Çözüm.
Merkezler. $a_{11} = 1, a_{12} = -1, a_{22} = 1, a_{13} = -3, a_{23} = 3, a_{33} = -3$'tür. $d = 1 - 1 = 0$ olduğundan (7)'nin tek çözümü yoktur. Sistem

$$x_0 - y_0 = 3, \qquad -x_0 + y_0 = -3$$

dir; ikinci denklem birincinin -1 katıdır. Öyleyse $x_0 - y_0 - 3 = 0$ doğrusunun her noktası (7)'yi sağlar: $x_0 = t$ dersek $(t, t-3)$ biçimindeki her nokta bir merkezdir. Bunlardan biri $(0, -3)$'tür.
Öteleme. $x = x'$, $y = y' - 3$ ötelemesini yapalım. (8)'den

$$a'_{33} = -3 \cdot 0 + 3 \cdot (-3) - 3 = -12$$

bulunur ve denklem

$$x'^2 - 2x'y' + y'^2 - 12 = 0, \quad \text{yani} \quad (x' - y')^2 = 12$$

olur. Buradan

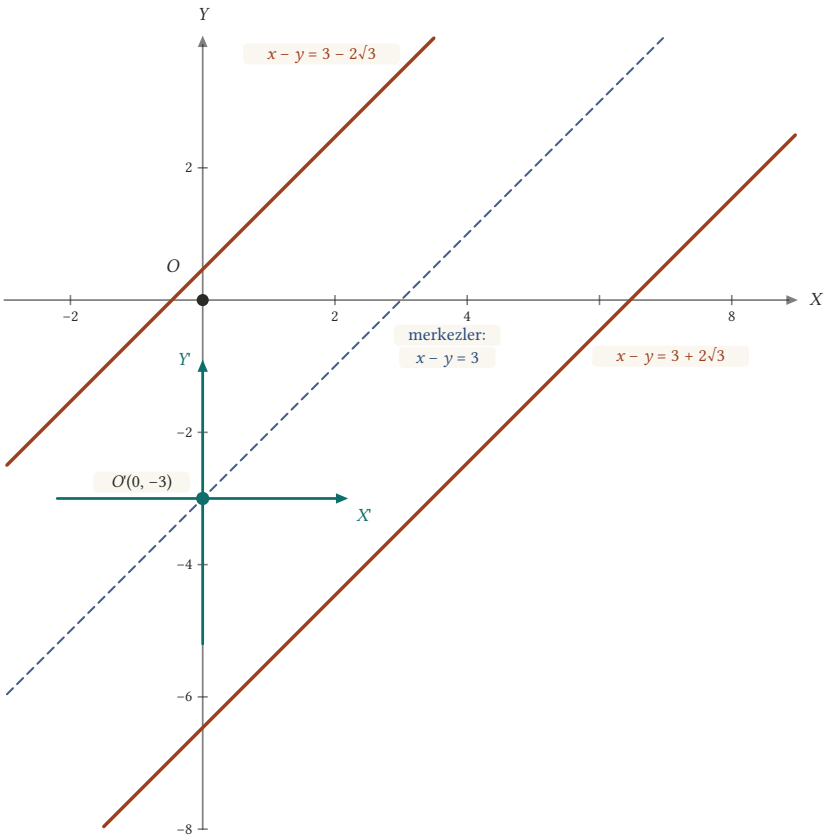
 CC BY-NC-SA 4.0

$$\left(x' - y' - 2\sqrt{3} \right) \left(x' - y' + 2\sqrt{3} \right) = 0$$

bulunur. Eski koordinatlarla $x' - y' = x - y - 3$ olduğundan konik, $x - y = 3 + 2\sqrt{3}$ ve $x - y = 3 - 2\sqrt{3}$ paralel doğrularıdır.
Denetim. $d = 0$ ve $D = 0$'dır (Lemma 21.2 eşitlikleri: $a_{12}a_{13} = 3 = a_{11}a_{23}$, $a_{13}a_{22} = -3 = a_{12}a_{23}$). İz $2 > 0$'dır ve Teorem 21.10 içindeki formül

$$a'_{33} = \frac{(-3-9) + (-3-9)}{2} = -12 < 0$$

verir: paralel iki doğru. Merkezler doğrusu $x - y = 3$, iki doğrunun tam ortasındadır.



Şekil 21.20: $d = D = 0$: konik paralel iki doğrudur ve $(t, t-3)$ biçimindeki her nokta bir merkezdir.

■

Alıştırma 21.10 (Cinsi paralel iki doğru olan konik).

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 7y + 3 = 0$$

denkleminin belirttiği koniğin cinsini belirleyiniz.

Çözüm.
Değişmezler. $a_{11} = 2$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = 2$, $a_{13} = \frac{7}{2}$, $a_{23} = -\frac{7}{2}$, $a_{33} = 3$'tür. $d = 4 - 4 = 0$'dır. Lemmadaki (Lemma 21.2) eşitlikler sağlanır:

$$a_{12}a_{13} = -7 = a_{11}a_{23}, \qquad a_{13}a_{22} = 7 = a_{12}a_{23};$$

öyleyse $D = 0$'dır.

 CC BY-NC-SA 4.0

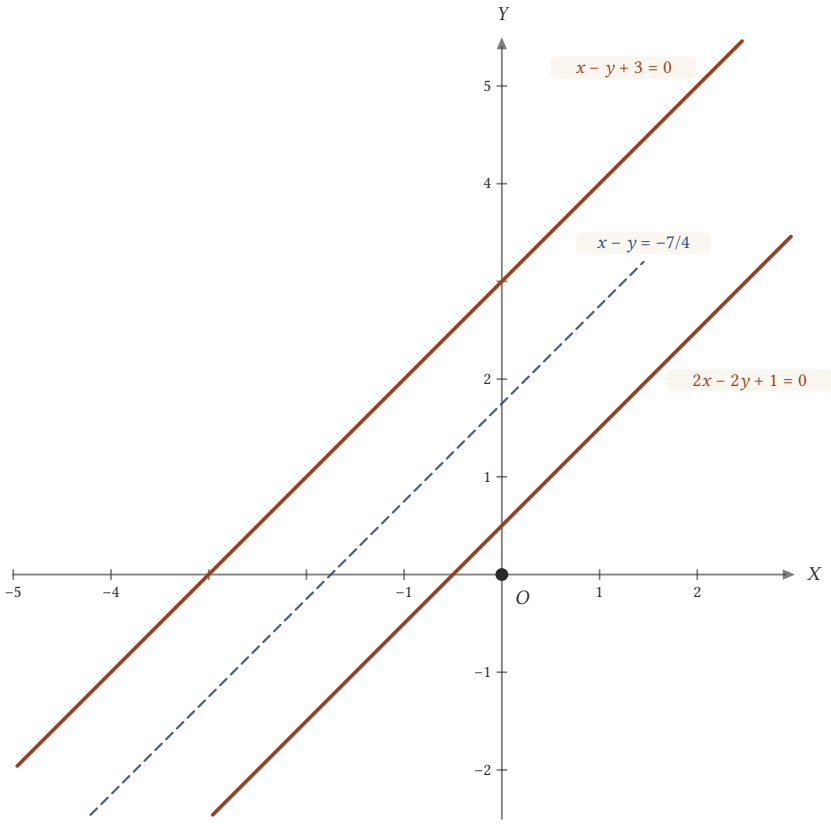
Sabit terim. İz $4 > 0$'dır ve $a_{22} = 2 \neq 0$ olduğundan

$$a'_{33} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{22}} = \frac{2 \cdot 3 - \frac{49}{4}}{2} = \frac{-\frac{25}{4}}{2} = -\frac{25}{8} < 0$$

bulunur. Teorem 21.10 gereği konik paralel iki doğrudur.
Doğrular. $u = x - y$ dersek denklem $2u^2 + 7u + 3 = 0$, yani $(u + 3)(2u + 1) = 0$'dır. Öyleyse

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 7y + 3 = (x - y + 3)(2x - 2y + 1)$$

ve konik $x - y + 3 = 0$ ile $2x - 2y + 1 = 0$ paralel doğrularıdır. Merkezleri (7)'den $x_0 - y_0 = -\frac{7}{4}$ doğrusudur; bu, iki doğrunun ($x - y = -3$ ve $x - y = -\frac{1}{2}$) tam ortasıdır.



Şekil 21.21: $d = D = 0$ ve $a'_{33} = -25/8 < 0$: denklem paralel iki doğrudur.

■

Bu bölümde ikinci dereceden her denklemin, eksenlerin döndürülmesi ve ötelenmesiyle bir elips, hiperbol ya da parabole, ya da bunların yozlaşmış bir biçimine indiğini gördük; karakteristik ve diskriminant, hangisi olduğunu hesap yapmadan söyledi. Sonraki bölümde düzlemden uzaya geçip dik koordinatların yanında kullanılan iki yeni koordinat sistemini, Silindirik ve Küresel Koordinatlar'ı tanıyacağız.

 CC BY-NC-SA 4.0

22. Silindirik ve Küresel Koordinatlar

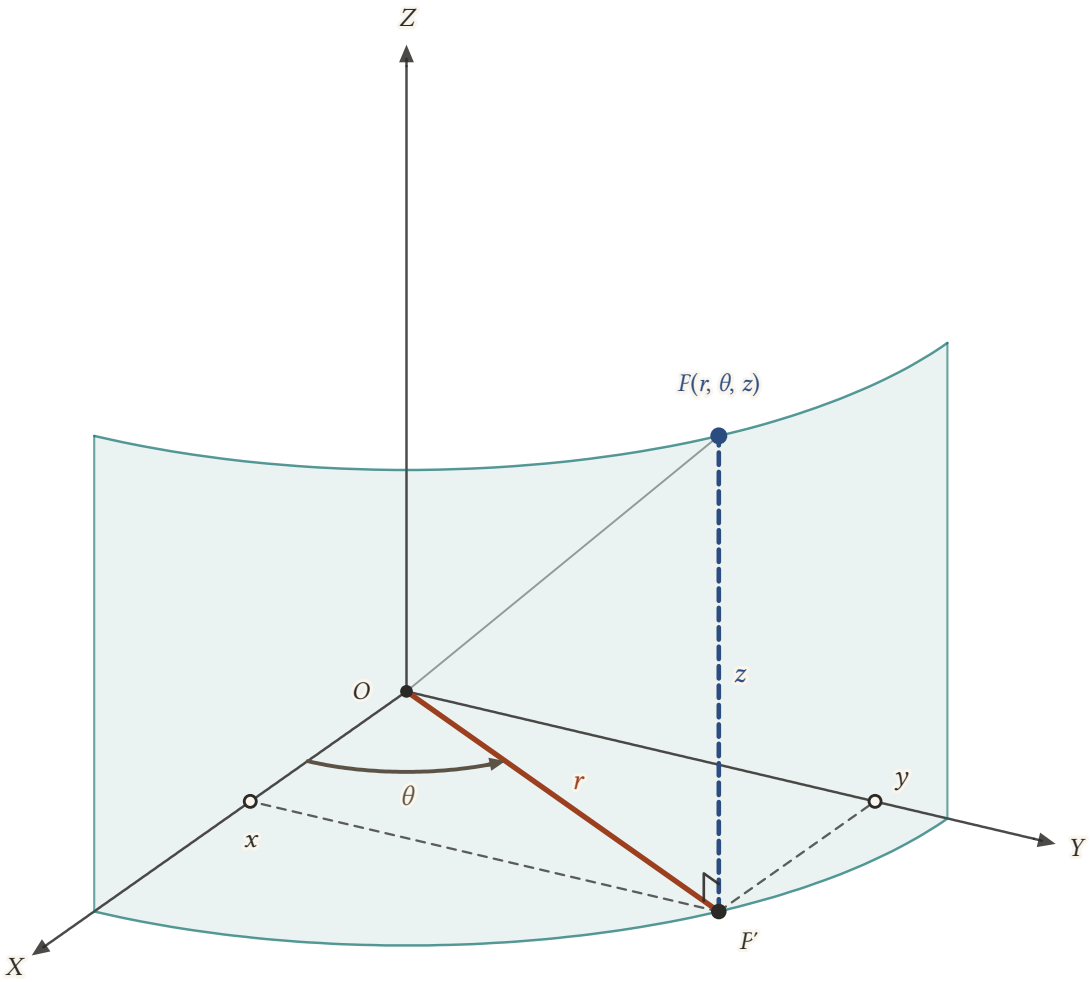
Uzayda bir noktanın adresini şimdiye kadar hep üç dik eksene göre, (x, y, z) üçlüsüyle yazdık (Uzayda Dik Koordinat Sistemi). Bu adres her zaman en kullanışlısı değildir. Düzlemde de aynı durumla karşılaşmıştık: başlangıç noktası etrafında dönen ya da ona göre simetrik olan eğrilerin denklemleri kutupsal koordinatlarda çok daha sade çıkıyordu (Paralel ve Kutupsal Koordinatlar).
Bu bölümde aynı fikri uzaya taşıyacağız. Bir doğruya göre simetrik olan geometrik yerler için **silindirik koordinatları**, bir noktaya göre simetrik olanlar için **küresel koordinatları** kuracağız. Son olarak bir noktayı başlangıç noktasına uzaklığı ve üç eksenle yaptığı açılarla tarif eden **uzayda kutupsal koordinatlara** kısaca değineceğiz. Her sistemde aynı iki soruyu soracağız: dik koordinatlarla bu sistem arasında nasıl gidip gelinir ve bir yüzeyin denklemi yeni sistemde neye dönüşür?

22.1 Silindirik koordinatlar

Silindirik koordinatların fikri basittir: noktanın kotunu olduğu gibi bırakırız, yalnız XY-düzlemindeki izdüşümünü kutupsal koordinatlarla yazarız. Bu yüzden Z-ekseni etrafında simetrik olan geometrik yerler bu sistemde sade denklemlere sahiptir.
Uzayda başlangıç noktası $O(0, 0, 0)$ olan bir XYZ dik koordinat sistemi alalım ve $P(x, y, z)$ bir nokta olsun. P'den XY-düzlemine inilen dikmenin ayağı $P'(x, y, 0)$ noktasıdır. XY-düzleminde kutup noktası olarak O'yu, kutupsal eksen olarak da pozitif X-eksenini seçelim (Tanım 5.2). P' noktasının bu düzlemdeki kutupsal koordinatları (r, θ) olsun (Tanım 5.3). Yani $r = |\, OP' \,|$'dür ve θ, pozitif X-ekseninden OP' yarı doğrusuna saat yönünün tersine ölçülen açıdır. P'nin kotu z ise P'nin XY-düzleminden yönlü uzaklığıdır.

Tanım 22.1 (Silindirik koordinatlar). Yukarıdaki gibi elde edilen (r, θ, z) sıralı üçlüsüne P noktasının **silindirik koordinatları** denir. Burada $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ ve $z \in \mathbb{R}$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 22.1: Silindirik koordinatlar: P', P'nin XY-düzlemindeki izdüşümüdür; (r, θ) onun kutupsal koordinatları, z de P'nin kotudur. Soluk yüzey, P'nin üzerinde bulunduğu $r = 3$ silindirinin bir parçasıdır (şekilde $\theta = \pi/3$, $z = 2{,}5$).

Yani r, P'nin Z-eksenine uzaklığıdır; θ, P'nin Z-ekseni etrafında hangi yönde durduğunu söyler; z ise dik koordinatlardaki kotun aynısıdır. P'yi Z-ekseni etrafında döndürürsek yalnız θ değişir, r ile z değişmez. Silindirik koordinatları Z-ekseni etrafında simetrik yerler için kullanışlı kılan da budur.
Z-ekseni üzerindeki bir noktanın izdüşümü $P' = O$ olduğundan $r = 0$'dır ve θ bir yön belirtmez. Düzlemdeki kutup noktasında olduğu gibi, $(0, \theta, z)$ üçlülerinin her biri, θ ne olursa olsun, $(0, 0, z)$ noktasının silindirik koordinatları sayılabilir.

Önerme 22.1 (Dik ve silindirik koordinatlar arasında geçiş). *P noktasının dik koordinatları (x, y, z), silindirik koordinatları (r, θ, z) olsun. Silindirik koordinatlardan dik koordinatlara geçiş*

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z$$

denklemleriyle, dik koordinatlardan silindirik koordinatlara geçiş de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r} \quad (r > 0), \qquad z = z$$

denklemleriyle yapılır. Özel olarak $x \neq 0$ ise $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$'tir.

> ***İspat.***
> *Kot iki sistemde de aynı sayı olduğundan yalnız ilk iki koordinata bakmak yeter. $P'(x, y, 0)$ noktasının XY-düzlemindeki dik koordinatları (x, y), kutupsal koordinatları (r, θ)'dır.*

 CC BY-NC-SA 4.0

$P' \neq O$ ise, yani $r > 0$ ise, düzlemde dik ve kutupsal koordinatlar arasındaki geçiş formülleri (Önerme 5.3) P' noktasına uygulanır ve

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}$$

verir; $x \neq 0$ için $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ de aynı yerden gelir.
$P' = O$ ise $x = y = 0$ ve $r = 0$'dır. Bu durumda $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ ve $r = \sqrt{x^2+y^2}$ eşitlikleri her θ için sağlanır. ■

Dik koordinatlardan geçerken θ çoğu kez kısaca $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$ diye yazılır. Düzlemde gördüğümüz uyarı burada da geçerlidir: arctan yalnız $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ aralığında değer alır, bu yüzden açıyı seçerken P' noktasının XY-düzleminde hangi bölgede olduğuna bakılır (Paralel ve Kutupsal Koordinatlar bölümündeki üç adımlık yol). Aşağıdaki iki örnek iki yöndeki geçişi gösteriyor.

Örnek 22.1 (Silindirik koordinatlardan dik koordinatlara). Silindirik koordinatları $\left(2, \dfrac{2\pi}{3}, -1\right)$ olan noktanın dik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
$\cos\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$ ve $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ olduğundan geçiş formülleri (Önerme 22.1)

$$x = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1, \qquad y = 2\sin\frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}, \qquad z = -1$$

verir. Noktanın dik koordinatları $(-1, \sqrt{3}, -1)$'dir.
Kontrol: $x^2 + y^2 = 1 + 3 = 4 = r^2$'dir. Ayrıca $x < 0, y > 0$ olduğundan izdüşüm ikinci bölgededir; bu da $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{2\pi}{3} < \pi$ ile uyumludur. ■

Örnek 22.2 (Dik koordinatlardan silindirik koordinatlara). Dik koordinatları $(-3, -3, 5)$ olan noktanın silindirik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
Kot değişmez: $z = 5$. İlk iki koordinat için $(-3, -3)$ noktasının düzlemdeki kutupsal koordinatlarını buluruz.

1. $r = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2}$, yani $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.
2. $x = -3 < 0$ ve $y = -3 < 0$ olduğundan izdüşüm üçüncü bölgededir, yani $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ olmalıdır.
3. $\tan\theta = \dfrac{-3}{-3} = 1$'dir. Tanjantı 1 olan açılar $\dfrac{\pi}{4}$ ve $\dfrac{5\pi}{4}$'tür; üçüncü bölgedeki $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$'tür.

Buna göre noktanın silindirik koordinatları $\left(3\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}, 5\right)$'tir. $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$ değerini olduğu gibi alsaydık $(3, 3, 5)$ noktasını bulurduk.
Kontrol:

$$3\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{4} = 3\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3, \qquad 3\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4} = 3\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -3.$$

■

Bir yüzeyi silindirik koordinatlarla anlatırken, Z-ekseni üzerindeki noktaların birden çok silindirik üçlüsü olduğunu hesaba katmalıyız. Bu yüzden silindirik denklemi, düzlemdeki kutupsal denklem (Tanım 5.4) gibi tanımlarız.

 CC BY-NC-SA 4.0

Tanım 22.2 (Silindirik denklem). $F(r,\theta,z)=0$ bir denklem olsun. Silindirik üçlülerinden en az biri bu denklemi sağlayan noktaların kümesine denklemin **grafiği** denir. Bir geometrik yer bu biçimde bir denklemin grafiği ise $F(r,\theta,z)=0$ denklemine o geometrik yerin **silindirik denklemi** denir.

Yani dik denklemden silindirik denkleme geçmek için x yerine $r\cos\theta$, y yerine $r\sin\theta$ yazmak yeterlidir. Tersine, silindirik denklemden dik denkleme geçerken $r\cos\theta$ yerine x, $r\sin\theta$ yerine y, r^2 yerine de x^2+y^2 yazarız. Denklemi sadeleştirirken r ile bölmek gerekirse Z-ekseninin noktalarını ($r=0$) ayrıca kontrol ederiz.

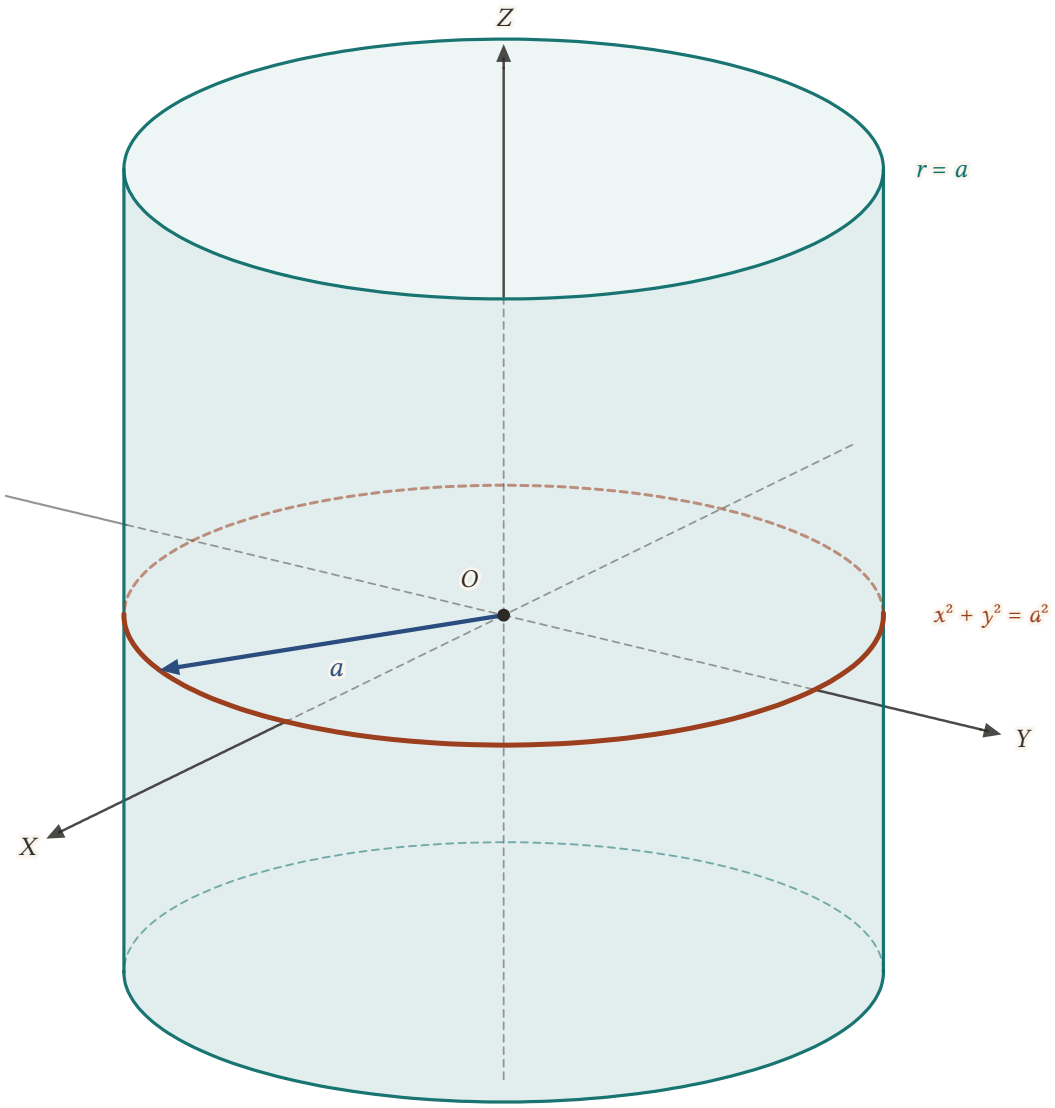
Örnek 22.3 (Sabit uzaklıklı noktalar: silindir). Uzayda silindirik denklemi $r=a$ ($a>0$ sabit) olan geometrik yerin dik koordinatlardaki denklemini bulunuz ve geometrik yeri tanımlayınız.

Çözüm.
Geometrik yerin bir noktasının silindirik koordinatları (r,θ,z) olsun. $r=\sqrt{x^2+y^2}$ olduğundan

$$r=a \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=a \Leftrightarrow x^2+y^2=a^2$$

bulunur. İkinci denklikte iki taraf da negatif olmadığı için kare almak bilgi kaybettirmez.
XY-düzleminde $x^2+y^2=a^2$ denklemi, merkezi O ve yarıçapı a olan çemberin denklemidir (Çember). Öte yandan denklemde z hiç geçmez; z serbesttir: $-\infty<z<\infty$. Yani bu çember Z-ekseni boyunca yukarı ve aşağı sınırsızca kaydırılır. Geometrik yer, ekseni Z-ekseni ve yarıçapı a olan **dik dairesel silindir** yüzeyidir. (Bu silindirin $a=1$ için iç noktalarıyla birlikte ele alındığı durumu daha önce görmüştük: Örnek 6.6.)

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 22.2: $r = a$ denkleminin grafiği: ekseni Z-ekseni, yarıçapı a olan dik dairesel silindir (şekilde $a = 2$ ve $-2 \le z \le 2{,}5$ parçası). Kalın çember XY-düzlemindeki $x^2 + y^2 = a^2$ çemberidir; silindirin arkasında kalan çizgiler kesiklidir.

■

Silindirik koordinatlar adını bu örnekten alır: sabit r değerli noktalar bir silindir oluşturur. Öteki iki koordinatı sabit tutarsak ne olur? $z = c$ koşulu açıkça XY-düzlemine paralel bir düzlem verir. Sabit θ ise biraz daha dikkat ister.

Örnek 22.4 (Sabit açılı noktalar: yarım düzlem). Silindirik denklemi $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ olan geometrik yeri bulunuz ve dik koordinatlarda yazınız.

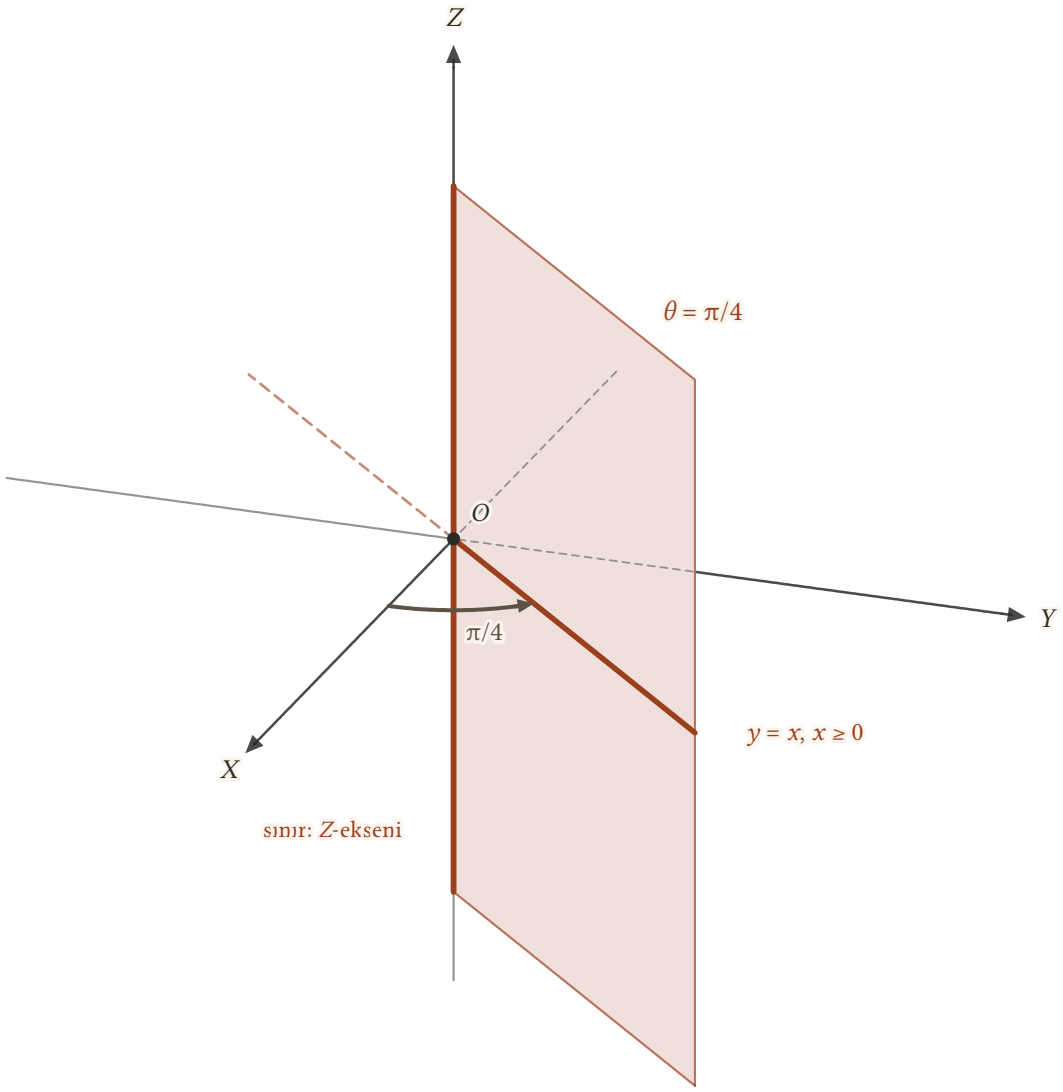
Çözüm.
***Z*-ekseni dışındaki noktalar.** $r > 0$ olan bir noktanın izdüşümü P', XY-düzleminde pozitif X-ekseniyle $\dfrac{\pi}{4}$ açı yapan yarı doğru üzerindedir. Bu yarı doğru, $y = x$ doğrusunun $x > 0$ olan parçasıdır, çünkü $\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} > 0$ olduğundan $x = y > 0$ olur. Kot serbesttir, yani nokta bu yarı doğrunun tam üstünde ya da altında herhangi bir yerde olabilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

***Z*-ekseninin noktaları.** $(0, 0, z)$ noktasının silindirik üçlülerinden biri $\left(0, \frac{\pi}{4}, z\right)$'dir ve bu üçlü denklemi sağlar. Grafiğin tanımı (Tanım 22.2) gereği Z-ekseninin bütün noktaları geometrik yere aittir. İki durumu birleştirirsek geometrik yer

$$\{(x, y, z) \mid y = x, x \geq 0\}$$

kümesidir: Z-ekseniyle sınırlanan ve $y = x$, $x > 0$ yarı doğrusunu içeren **yarım düzlem**.
$\tan\theta = \frac{y}{x}$ bağıntısına bakıp yalnız $y = x$ yazmak yanlış olurdu: $y = x$ düzlemi, $\theta = \frac{5\pi}{4}$ yarım düzlemini de içerir. İki yarım düzlem birlikte $y = x$ düzlemini oluşturur.



Şekil 22.3: $\theta = \pi/4$ denkleminin grafiği: Z-ekseniyle sınırlanan yarım düzlem ($-2 \leq z \leq 2$ parçası). XY-düzlemindeki izi $y = x$, $x \geq 0$ yarı doğrusudur; kesikli yarı doğru $y = x$ doğrusunun öbür yarısıdır ve $\theta = 5\pi/4$ yarım düzlemine aittir.

■

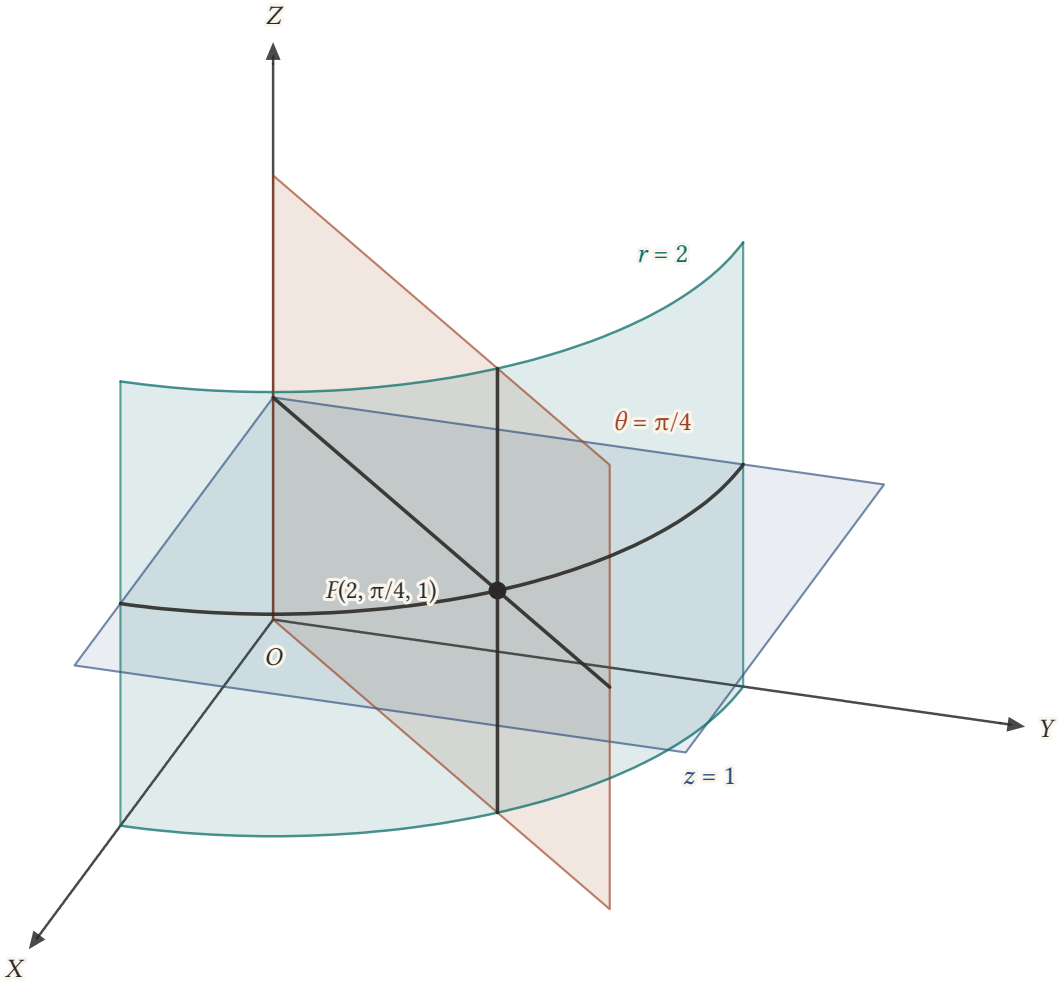
Bu iki örneğin sonucunu, üç koordinatın her biri için tek bir önermede toplayabiliriz.

Önerme 22.2 (Silindirik koordinat yüzeyleri). *$a > 0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ ve $c \in \mathbb{R}$ sabitler olsun.*

 CC BY-NC-SA 4.0

1. *$r = a$ denkleminin grafiği, ekseni Z-ekseni ve yarıçapı a olan dik dairesel silindirdir.*
2. *$\theta = \theta_0$ denkleminin grafiği, Z-ekseniyle sınırlanan ve pozitif X-ekseniyle θ_0 açısı yapan yarı doğruyu içeren yarım düzlemdir.*
3. *$z = c$ denkleminin grafiği, XY-düzlemine paralel olan $z = c$ düzlemidir.*

İspat.
Birinci madde daha önce gösterildi (Örnek 22.3). İkinci madde için sabit açılı noktalar örneğindeki (Örnek 22.4) akıl yürütmeyi $\frac{\pi}{4}$ yerine θ_0 ile tekrarlarız: $r > 0$ olan noktaların izdüşümü θ_0 açılı yarı doğru üzerindedir ve kot serbesttir; Z-ekseninin noktaları ise $(0, \theta_0, z)$ üçlüsüyle denklemi sağlar. Üçüncü madde, kotun iki sistemde de aynı olmasından hemen çıkar.
Böylece bir P noktasının silindirik koordinatları (r_0, θ_0, z_0) $(r_0 > 0)$ ise P, $r = r_0$ silindiri, $\theta = \theta_0$ yarım düzlemi ve $z = z_0$ düzlemi üzerindedir. Bu üç yüzeyin ortak noktası yalnız P'dir, çünkü üçünü birden sağlayan bir noktanın r, θ ve z değerleri P'ninkilerle aynıdır.



Şekil 22.4: Silindirik koordinat yüzeyleri: r = 2 silindiri, θ = π/4 yarım düzlemi ve z = 1 düzlemi (birinci bölgedeki parçaları). Koyu çizgiler ikişer ikişer kesişimlerdir; üçü birden yalnız silindirik koordinatları (2, π/4, 1) olan P(√2, √2, 1) noktasında buluşur.

■

Şimdi dik ve silindirik denklemler arasında her iki yönde çeviri yapalım.

Örnek 22.5 (Silindirik denklemden bir düzleme). Silindirik koordinatlardaki denklemi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$5r\cos\theta + 4r\sin\theta = 4z$$

olan geometrik yerin dik koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
Geçiş formüllerine (Önerme 22.1) göre $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$ ve kot iki sistemde aynıdır. Bunları denklemde yerine yazarsak

$$5x + 4y = 4z, \qquad \text{yani} \qquad 5x + 4y - 4z = 0$$

bulunur. Bu, başlangıç noktasından geçen ve normal vektörü $(5, 4, -4)$ olan bir düzlemin denklemidir (Uzayda Düzlem Denklemleri).
Değiştirme her iki yönde de geçerli olduğundan kayıp ya da fazlalık yoktur: Z-ekseninin noktaları için ($r = 0$) iki denklem de $z = 0$ koşuluna iner, yani iki taraf da Z-ekseninden yalnız O'yu içerir. ■

Örnek 22.6 (Silindirik denklemden bir küreye). Silindirik denklemi

$$r^2 + z^2 = -2r\cos\theta - 16r\sin\theta + 8z$$

olan yüzeyin dik koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
$r^2 = x^2 + y^2$, $r\cos\theta = x$ ve $r\sin\theta = y$ yazarsak

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2x - 16y + 8z$$

olur. Bütün terimleri sol tarafa toplayıp her değişken için tam kareye tamamlayalım:

$$\begin{aligned} &(x^2 + 2x) + (y^2 + 16y) + (z^2 - 8z) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &(x+1)^2 - 1 + (y+8)^2 - 64 + (z-4)^2 - 16 = 0 \\ \Leftrightarrow\ &(x+1)^2 + (y+8)^2 + (z-4)^2 = 81. \end{aligned}$$

$81 = 9^2$ olduğundan bu, merkezi $M(-1, -8, 4)$ ve yarıçapı 9 olan küre yüzeyinin denklemidir (Tanım 6.6).
Kontrol: O noktası için sol taraf $1 + 64 + 16 = 81$ verir; gerçekten de silindirik denklem $r = 0$, $z = 0$ için $0 = 0$ olur, yani küre başlangıç noktasından geçer. ■

Ters yönde, dik koordinatlarda verilen bir denklemin silindirik karşılığını bulmak için $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ yazar ve mümkün olduğunca $x^2 + y^2 = r^2$ özdeşliğini ve iki kat açı formüllerini kullanırız:

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta, \qquad 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta.$$

Aşağıdaki beş örnek bu çeviriyi gösteriyor.

Örnek 22.7 (Silindirik karşılık: dördüncü dereceden bir yüzey). Dik koordinatlarda denklemi $z^2(x^2 + y^2) = (x^2 - y^2)^2$ olan yüzeyin silindirik koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
$x^2 + y^2 = r^2$ ve

$$x^2 - y^2 = r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = r^2\cos 2\theta$$

olduğundan denklem

$$z^2 r^2 = \left(r^2\cos 2\theta\right)^2, \qquad \text{yani} \qquad r^2 z^2 = r^4\cos^2 2\theta$$

biçimini alır. Bu, yüzeyin silindirik denklemidir. Sadeleştirmek için iki durumu ayıralım.
$r = 0$ ise iki taraf da 0'dır; yani Z-ekseninin bütün noktaları yüzeyin üzerindedir. Dik denklemde de $x = y = 0$ için $0 = 0$ bulunur.
$r \neq 0$ ise iki tarafı r^2 ile bölebiliriz:

 CC BY-NC-SA 4.0

$$z^2 = r^2\cos^2 2\theta \Leftrightarrow z = r\cos 2\theta \quad \text{ya da} \quad z = -r\cos 2\theta.$$

Buna göre yüzey, Z-ekseni ile $z^2 = r^2\cos^2 2\theta$ yüzeyinin birleşimidir. İki işaretten birini atmak yüzeyin bir kısmını kaybettirir. Örneğin $(1, 0, -1)$ noktası yüzeyin üzerindedir, çünkü $1 \cdot 1 = 1^2$'dir. Bu noktada $r = 1, \theta = 0$ ve $z = -1$'dir. $r\cos 0 = 1 \neq z$ ama $-r\cos 0 = -1 = z$ olduğundan nokta yalnız ikinci denklemi sağlar. ■

Örnek 22.8 (Silindirik karşılık: z kare eşittir 4xy). Dik koordinatlarda denklemi $z^2 = 4xy$ olan yüzeyin silindirik koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
$xy = r\cos\theta \cdot r\sin\theta = r^2\sin\theta\cos\theta$ olduğundan iki kat açı formülüyle

$$z^2 = 4xy = 4r^2\sin\theta\cos\theta = 2r^2 \cdot 2\sin\theta\cos\theta = 2r^2\sin 2\theta$$

bulunur. Silindirik denklem $z^2 = 2r^2\sin 2\theta$'dır. Burada hiçbir bölme yapılmadığı için iki denklem tam olarak aynı noktaları belirtir. ■

Örnek 22.9 (Silindirik karşılık: dönel bir yüzey). Dik koordinatlarda denklemi $x^2 + y^2 - z^2 = 4$ olan yüzeyin silindirik koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
$x^2 + y^2 = r^2$ yazmak yeterlidir:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 4 \Leftrightarrow r^2 - z^2 = 4.$$

Denklemde θ hiç geçmez. Bu, yüzeyin Z-ekseni etrafında döndürüldüğünde kendi üzerine geldiğini söyler: her z yüksekliğinde yüzeyin kesiti, yarıçapı $r = \sqrt{4 + z^2}$ olan bir çemberdir. Bu yüzeyi Özel Yüzeyler bölümünde ayrıntılı inceleyeceğiz. ■

Örnek 22.10 (Silindirik karşılık: xy eşittir 5). Dik koordinatlarda denklemi $xy = 5$ olan yüzeyin silindirik koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
$xy = r^2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}r^2\sin 2\theta$ olduğundan

$$xy = 5 \Leftrightarrow r^2\sin\theta\cos\theta = 5 \Leftrightarrow r^2\sin 2\theta = 10$$

bulunur. Son adımda iki tarafı 2 ile çarptık. Denklemde z geçmediği için yüzey, XY-düzlemindeki $xy = 5$ hiperbolünün Z-eksenine paralel olarak kaydırılmasıyla oluşur. ■

Örnek 22.11 (Silindirik karşılık: bir küre). Dik koordinatlarda denklemi $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ olan yüzeyin silindirik koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
Yine $x^2 + y^2 = r^2$ yazarız:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Leftrightarrow r^2 + z^2 = 9.$$

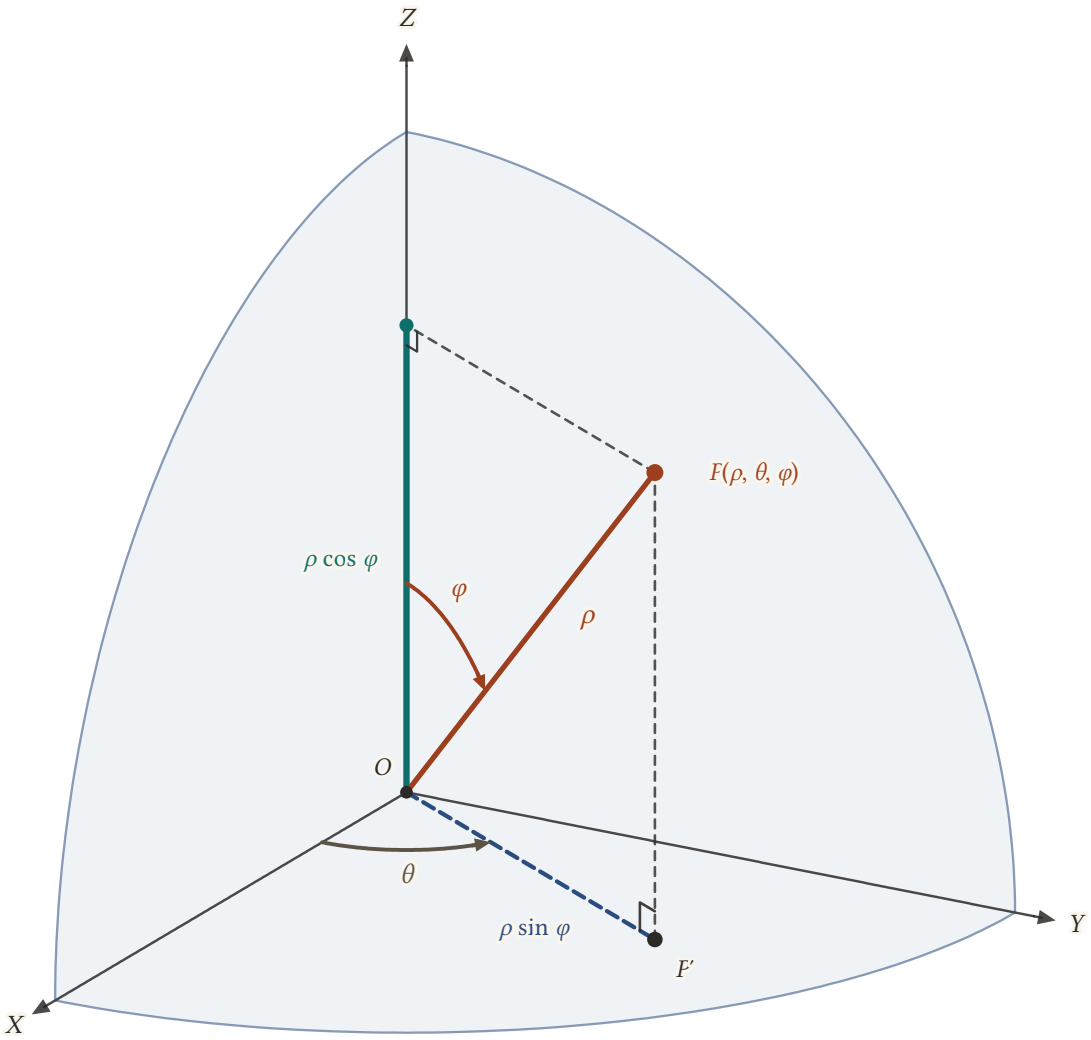
Bu yüzey, merkezi O ve yarıçapı 3 olan küredir. Silindirik denklem, dik denklemden yalnız biraz daha kısadır. Küre bir noktaya göre simetrik olduğundan, onun için asıl uygun sistem sıradaki küresel koordinat sistemidir. Orada aynı kürenin denklemi $\rho = 3$ olacak. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

22.2 Küresel koordinatlar

Bir noktaya göre simetrik olan geometrik yerlerle ilgili problemlerde küresel koordinatları kullanmak daha uygundur. Bu sistemde noktanın adresini üç soruyla belirleriz: başlangıç noktasına ne kadar uzak, Z-ekseninin pozitif yönünden ne kadar sapmış ve Z-ekseni etrafında hangi yönde?
$P(x, y, z)$ noktası ve $P'(x, y, 0)$ izdüşümü silindirik koordinatlardaki gibi olsun. $\rho = |\ OP\ |$ diyelim. $P \neq O$ için φ, $\overrightarrow{OP}$ vektörünün Z-ekseninin pozitif yönüyle, yani $e_3 = (0, 0, 1)$ ile yaptığı açı olsun (Tanım 8.2). İki vektör arasındaki açı olduğu için $0 \leq \varphi \leq \pi$'dir. θ ise silindirik koordinatlardakiyle aynı açıdır: pozitif X-ekseninden OP' yarı doğrusuna ölçülen açı.

Tanım 22.3 (Küresel koordinatlar). Yukarıdaki gibi elde edilen (ρ, θ, φ) sıralı üçlüsüne P noktasının **küresel koordinatları** denir. Burada $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$ ve $\varphi \in [0, \pi]$'dir.



Şekil 22.5: Küresel koordinatlar: $\rho = |OP|$, φ pozitif Z-ekseni ile OP arasındaki açı, θ silindirik koordinatlardaki açıdır. $OP'P$ dik üçgeninden $|OP'| = \rho \sin \varphi$ ve $z = \rho \cos \varphi$ okunur. Soluk yüzey, $\rho = 3$ küresinin birinci bölgedeki parçasıdır (şekilde $\theta = \pi/3$, $\varphi = \pi/4$).

Yani ρ, P'nin başlangıç noktasına uzaklığıdır; φ, $\overrightarrow{OP}$ doğrultusunun "kuzey" yönünden, yani pozitif Z-ekseninden ne kadar saptığını ölçer; θ da silindirik koordinatlardaki gibi Z-ekseni etrafındaki yönü verir. Dünya haritasıyla karşılaştırırsak θ boylama benzer; φ ise enlemin kendisi değil, kuzey kutbundan ölçülen

 CC BY-NC-SA 4.0

kutup uzaklığıdır: enlem λ ise $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \lambda$'dır. Pozitif Z-ekseni üzerinde $\varphi = 0$, XY-düzleminde $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, negatif Z-ekseni üzerinde $\varphi = \pi$'dir.
Özel noktalarda koordinatlardan bazıları belirsiz kalır. O için $\rho = 0$'dır; θ ve φ ne olursa olsun $(0, \theta, \varphi)$ üçlüsü O'yu gösterir. Z-ekseninin O'dan farklı noktalarında $\varphi = 0$ ya da $\varphi = \pi$'dir ve θ belirsizdir.

Önerme 22.3 (Dik ve küresel koordinatlar arasında geçiş). *P noktasının dik koordinatları (x, y, z), küresel koordinatları (ρ, θ, φ) olsun. Küresel koordinatlardan dik koordinatlara geçiş*

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \qquad z = \rho \cos\varphi$$

denklemleriyle yapılır. Tersine

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{z}{\rho} \quad (\rho > 0)$$

olur ve θ, silindirik koordinatlardaki gibi (Önerme 22.1) bulunur.

> ***İspat.***
> *$\rho = |\,OP\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ eşitliği uzayda uzaklık formülünden (Teorem 6.1) gelir. $P = O$ ise $\rho = 0$'dır ve $x = y = z = 0$ olduğundan üç geçiş denklemi de her θ, φ için sağlanır. Bundan sonra $P \neq O$ alalım.*
> ***z koordinatı.*** *φ açısı, $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ vektörünün e_3 ile yaptığı açıdır, yani üçüncü doğrultu açısıdır (Tanım 8.6). Doğrultman kosinüslerinin formülü (Teorem 8.4)*
>
> $$\cos\varphi = \frac{z}{\|\,\overrightarrow{OP}\,\|} = \frac{z}{\rho}, \qquad \text{yani} \qquad z = \rho\cos\varphi$$
>
> *verir.*
> ***$|\,OP'\,|$ uzunluğu.*** *$P'(x, y, 0)$ olduğundan*
>
> $$|\,OP'\,|^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 - z^2 = \rho^2 - \rho^2\cos^2\varphi = \rho^2\sin^2\varphi$$
>
> *olur. $\varphi \in [0, \pi]$ olduğundan $\sin\varphi \geq 0$'dır; karekök alırsak $|\,OP'\,| = \rho\sin\varphi$ bulunur. Geometrik olarak: $P'P$ kenarı Z-eksenine paralel olduğundan $OP'P$ dik üçgeninin P'deki açısı φ'dir ($z < 0$ için $\pi - \varphi$, sinüsü aynı); hipotenüs ρ olduğundan bu açının karşısındaki dik kenar $|\,OP'\,| = \rho\sin\varphi$'dir.*
> ***x ve y koordinatları.*** *$|\,OP'\,|$, P'nin silindirik koordinatlarındaki r sayısıdır. Silindirik geçiş formülleri (Önerme 22.1)*
>
> $$x = |\,OP'\,|\cos\theta = \rho\sin\varphi\cos\theta, \qquad y = |\,OP'\,|\sin\theta = \rho\sin\varphi\sin\theta$$
>
> *verir.* ■

İspatın ortasında silindirik ve küresel koordinatlar arasındaki köprüyü de bulduk. Bunu ayrıca yazalım; denklemleri bir sistemden ötekine çevirirken çok işe yarar.

Sonuç 22.1 (Silindirik ve küresel koordinatlar arasında geçiş). *Bir noktanın silindirik koordinatları (r, θ, z), küresel koordinatları (ρ, θ, φ) ise (θ iki sistemde aynıdır)*

$$r = \rho\sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi, \qquad \rho = \sqrt{r^2 + z^2}$$

olur.

> ***İspat.***
> *İlk iki eşitlik küresel geçiş formüllerinin ispatında (Önerme 22.3) gösterildi: $r = |\,OP'\,| = \rho\sin\varphi$ ve $z = \rho\cos\varphi$. Üçüncüsü için bunların karelerini toplarız:*
>
> $$r^2 + z^2 = \rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = \rho^2.$$
>
> *$\rho \geq 0$ olduğundan $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$'dir.* ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Küresel denklem de silindirik denklem gibi tanımlanır; burada birden çok küresel üçlüsü olan noktalar Z -ekseninin noktalarıdır.

Tanım 22.4 (Küresel denklem). $G(\rho, \theta, \varphi) = 0$ bir denklem olsun. Küresel üçlülerinden en az biri bu denklemi sağlayan noktaların kümesine denklemin **grafiği** denir. Bir geometrik yer bu biçimde bir denklemin grafiği ise $G(\rho, \theta, \varphi) = 0$ denklemine o geometrik yerin **küresel denklemi** denir.

Yani dik denklemden küresel denkleme geçmek için x, y, z yerine $\rho \sin\varphi \cos\theta$, $\rho \sin\varphi \sin\theta$ ve $\rho\cos\varphi$ yazarız; $x^2 + y^2 + z^2$ gördüğümüz yerde doğrudan ρ^2, $x^2 + y^2$ gördüğümüz yerde $\rho^2 \sin^2\varphi$ yazmak hesabı kısaltır.

Örnek 22.12 (Küresel koordinatlardan dik koordinatlara). Küresel koordinatları $\left(2, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ olan noktanın dik koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
$\rho = 2, \theta = \frac{3\pi}{4}, \varphi = \frac{\pi}{4}$'tür. Gereken değerler

$$\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

olduğundan geçiş formülleri (Önerme 22.3)

$$x = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1,$$
$$y = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,$$
$$z = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

verir. Noktanın dik koordinatları $(-1, 1, \sqrt{2})$'dir.
Kontrol: $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 1 + 2 = 4$ bulunur ve bu sayı ρ^2'ye eşittir. ■

Örnek 22.13 (Dik koordinatlardan küresel koordinatlara). Dik koordinatları $P(\sqrt{3}, 3, 2)$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
ρ.

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{3 + 9 + 4} = \sqrt{16} = 4.$$

θ. $x = \sqrt{3} > 0$ ve $y = 3 > 0$ olduğundan izdüşüm $P'(\sqrt{3}, 3, 0)$ birinci bölgededir. Burada arctan'ın verdiği değer doğrudan kullanılabilir:

$$\theta = \arctan\frac{3}{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

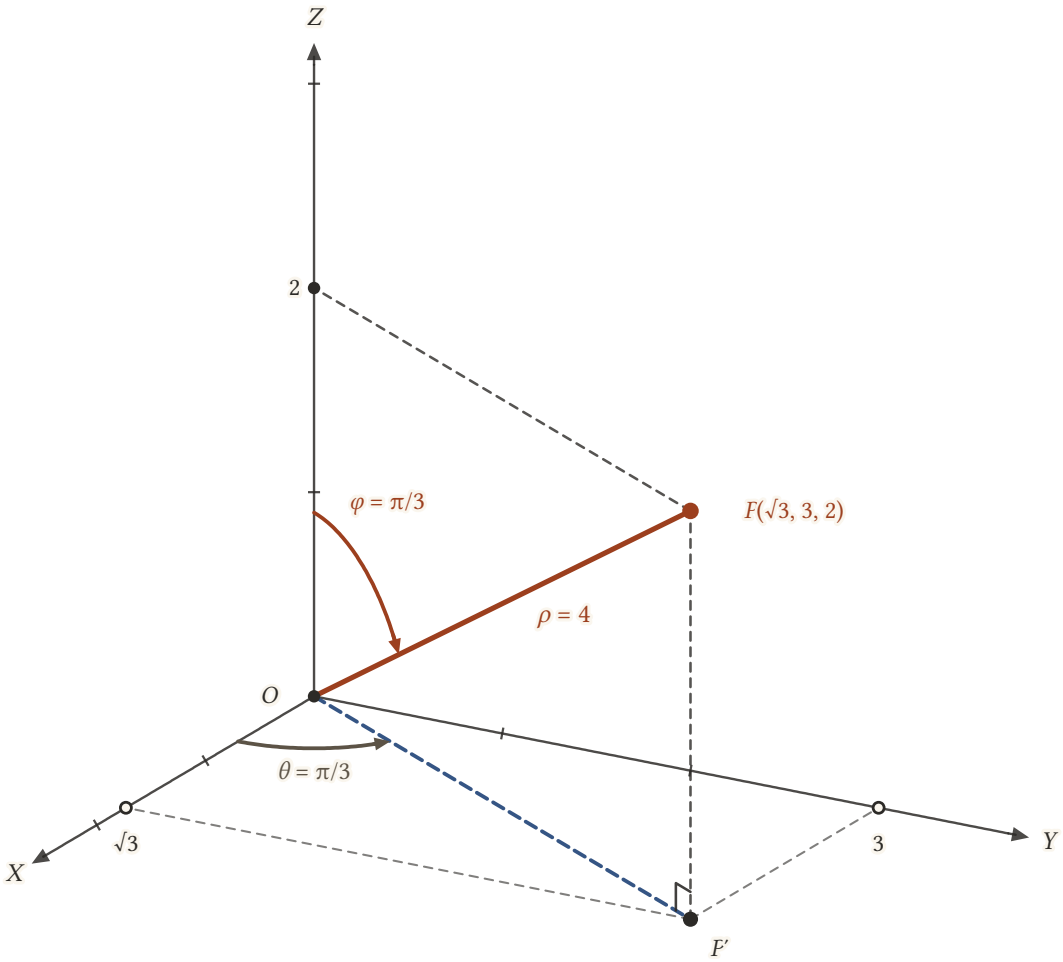
φ. $\cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ve $\varphi \in [0, \pi]$ olduğundan

$$\varphi = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

bulunur. arccos tam olarak $[0, \pi]$ aralığında değer aldığı için φ seçiminde bölge sorunu yoktur.
Buna göre P'nin küresel koordinatları $\left(4, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$'tür.
Kontrol: $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ olduğundan

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}, \qquad y = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3, \qquad z = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$



Şekil 22.6: $P(\sqrt{3}, 3, 2)$ noktası: $\rho = |OP| = 4$, XY-düzlemindeki P' izdüşümü birinci bölgede olduğundan $\theta = \pi/3$, $\cos\varphi = 2/4$ olduğundan $\varphi = \pi/3$. Eksenlerdeki çentikler birer birim aralıklıdır.

■

Silindirik koordinatlarda yaptığımız gibi, küresel koordinatlardan birini sabit tutunca hangi yüzeyleri elde ettiğimize bakalım. Sistem adını birinci örnekten alır.

Örnek 22.14 (Sabit uzaklıklı noktalar: küre). Küresel denklemi $\rho = a$ ($a > 0$ sabit) olan geometrik yerin dik koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ olduğundan

$$\rho = a \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

bulunur; iki taraf da negatif olmadığı için kare almak bilgi kaybettirmez. Geometrik yer, merkezi O ve yarıçapı a olan küredir (Tanım 6.6). Tanımı "O'ya uzaklığı a olan noktalar" olan bir yüzeyin, O'ya uzaklığı ölçen koordinatta bu kadar basit bir denklemi olması şaşırtıcı değildir. Örneğin silindirik denklemi $r^2 + z^2 = 9$ olan kürenin (Örnek 22.11) küresel denklemi $\rho = 3$'tür. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Örnek 22.15 (Sabit sapmalı noktalar: koni). Küresel denklemi $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ olan geometrik yerin dik koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
***O* dışındaki noktalar.** $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ olan bir nokta için Sonuç 22.1 gereğince

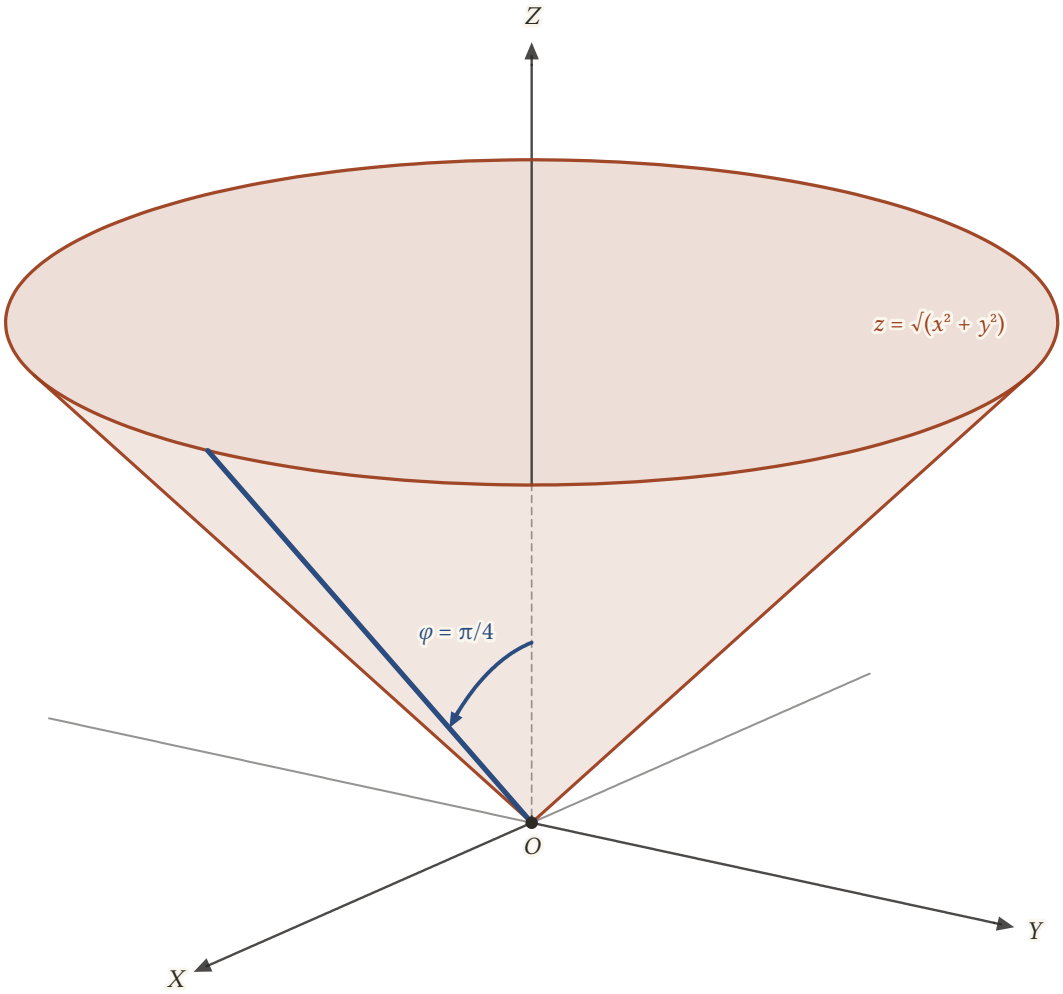
$$r = \rho \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho, \qquad z = \rho\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho$$

olur. Buna göre $z = r$, yani $z = \sqrt{x^2+y^2}$'dir. Bu eşitlik $z \geq 0$ gerektirir. Tersine $z = \sqrt{x^2+y^2}$ olan ve O'dan farklı bir noktada $z > 0$ ve $\rho = \sqrt{2}\,z$ olduğundan $\cos\varphi = \dfrac{z}{\rho} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, yani $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ bulunur.
***O* noktası.** $\left(0, \theta, \dfrac{\pi}{4}\right)$ üçlüsü O'yu gösterir ve denklemi sağlar; O da geometrik yere aittir. $z = \sqrt{x^2+y^2}$ denklemi de O tarafından sağlanır.
Buna göre geometrik yerin dik denklemi

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

dir. Her $z = c > 0$ yüksekliğindeki kesiti yarıçapı c olan bir çemberdir; tepesi O'da, ekseni Z-ekseni olan ve XY-düzleminin üstünde kalan bir **dairesel koni** yüzeyidir. Yüzeyin her noktası O'ya, Z-ekseniyle $\dfrac{\pi}{4}$ açı yapan bir doğru parçasıyla bağlanır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 22.7: $\varphi = \pi/4$ denkleminin grafiği: tepesi O'da, ekseni Z-ekseni olan ve XY-düzleminin üstünde kalan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisi ($0 \le z \le 2{,}5$ parçası). Mavi ana doğru Z-ekseniyle $\pi/4$ açı yapar; koninin arkasında kalan çizgiler kesiklidir.

■

Önerme 22.4 (Küresel koordinat yüzeyleri). *$a > 0$, $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ ve $\varphi_0 \in (0, \pi)$ sabitler olsun.*

1. *$\rho = a$ denkleminin grafiği, merkezi O ve yarıçapı a olan küredir.*
2. *$\theta = \theta_0$ denkleminin grafiği, silindirik koordinatlardaki $\theta = \theta_0$ yarım düzlemidir.*
3. *$\varphi = \varphi_0$ denkleminin grafiği, tepesi O'da ve ekseni Z-ekseni olan, Z-ekseninin pozitif yönüyle φ_0 açısı yapan yarı doğruların oluşturduğu yüzeydir. $\varphi_0 \neq \dfrac{\pi}{2}$ ise bu yüzey bir dairesel koni, $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ ise XY-düzlemidir.*

İspat.
Birinci madde daha önce gösterildi (Örnek 22.14). İkinci madde, θ açısı iki sistemde aynı olduğundan silindirik koordinat yüzeylerinden (Önerme 22.2) çıkar; Z-ekseninin noktaları $(\rho, \theta_0, 0)$ ya da (ρ, θ_0, π) üçlüleriyle denklemi sağlar.
Üçüncü madde için koni örneğindeki (Örnek 22.15) hesabı φ_0 ile tekrarlarız: O dışındaki noktalarda $r = \rho \sin\varphi_0$ ve $z = \rho\cos\varphi_0$ olur. $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ ise $z = 0$ bulunur ve XY-düzleminin her noktası denklemi sağlar. $\varphi_0 \neq \dfrac{\pi}{2}$ ise

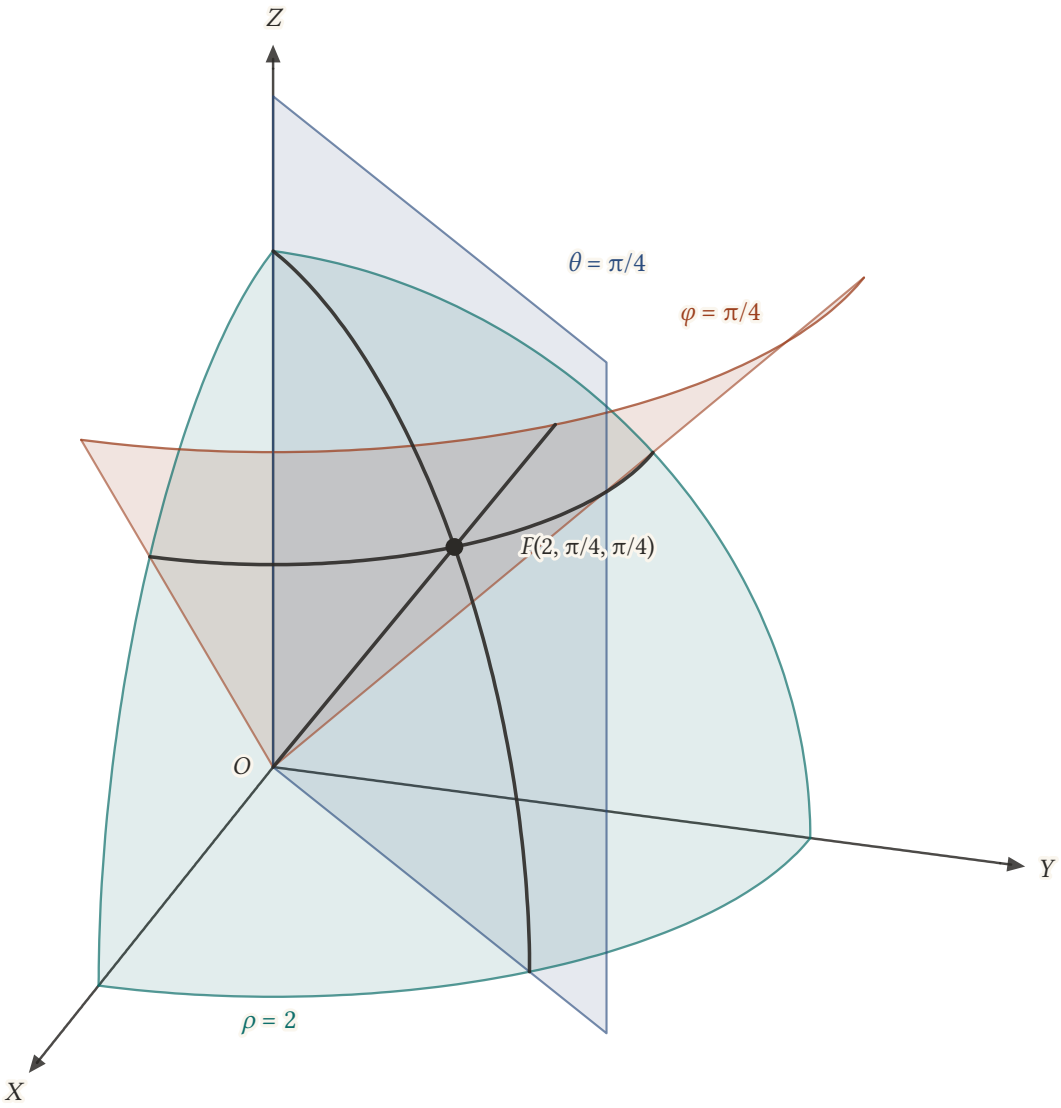
 CC BY-NC-SA 4.0

$$z = \frac{\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}\, r = \cot\varphi_0 \sqrt{x^2+y^2}$$

bulunur. Tersine, bu denklemi sağlayan ve O'dan farklı bir noktada $r = 0$ olamaz (yoksa $z = 0$ olurdu); bu yüzden $r > 0$ ve

$$\rho = \sqrt{r^2+z^2} = r\sqrt{1+\cot^2\varphi_0} = \frac{r}{\sin\varphi_0}, \qquad \cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \cot\varphi_0 \sin\varphi_0 = \cos\varphi_0$$

olur; φ ile φ_0 aynı $[0,\pi]$ aralığında olduğundan $\varphi = \varphi_0$'dır. $\varphi_0 < \dfrac{\pi}{2}$ için bu yüzey XY-düzleminin üstünde, $\varphi_0 > \dfrac{\pi}{2}$ için altında kalan bir dairesel konidir; kesiti bulunan her z yüksekliğinde kesit, yarıçapı $|\, z\tan\varphi_0 \,|$ olan bir çemberdir. O noktası $(0,\theta,\varphi_0)$ üçlüsüyle denklemi sağlar.



Şekil 22.8: Küresel koordinat yüzeyleri: ρ = 2 küresi, φ = π/4 konisi ve θ = π/4 yarım düzlemi (birinci bölgedeki parçaları). Koyu çizgiler ikişer ikişer kesişimlerdir; üçü birden yalnız P(1, 1, √2) noktasında, yani küresel koordinatları (2, π/4, π/4) olan noktada buluşur.

Böylece küresel koordinatları $(\rho_0,\theta_0,\varphi_0)$ olan ve Z-ekseninde bulunmayan bir nokta, $\rho = \rho_0$ küresinin, $\theta = \theta_0$ yarım düzleminin ve $\varphi = \varphi_0$ konisinin (ya da düzleminin) tek ortak noktasıdır. ■

 CC BY-NC-SA 4.0

Son olarak aynı ifadeyi hem silindirik hem küresel koordinatlara çevirelim. Küresel karşılık, silindirik karşılıkta r yerine $\rho \sin \varphi$ yazmakla da elde edilebilir (Sonuç 22.1); ama burada doğrudan yerine koymayı adım adım göreceğiz.

Örnek 22.16 (Beşinci dereceden bir denklemin silindirik karşılığı). $x^2(x^3 - y^3) = x + y$ ifadesinin silindirik koordinatlardaki karşılığını bulunuz.

Çözüm.
Parçaları ayrı ayrı çevirelim. $x = r\cos\theta$ ve $y = r\sin\theta$ yazarsak

$$x^2 = r^2\cos^2\theta, \qquad x + y = r(\cos\theta + \sin\theta)$$

olur. Küp farkı için $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ özdeşliğini ve $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$'i kullanalım:

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= r^3(\cos^3\theta - \sin^3\theta) \\ &= r^3(\cos\theta - \sin\theta)(\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta) \\ &= r^3(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta\sin\theta). \end{aligned}$$

Denklemde yerine koyalım.

$$r^5\cos^2\theta\,(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta\sin\theta) = r(\cos\theta + \sin\theta).$$

Sadeleştirelim. $r \neq 0$ ise iki tarafı r ile bölebiliriz:

$$r^4\cos^2\theta\,(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta\sin\theta) = \cos\theta + \sin\theta.$$

Bölerken Z-ekseninin noktalarını ($r = 0$) kaybetmiş olabiliriz; kontrol edelim. Dik denklemde $x = y = 0$ için $0 = 0$ bulunur, yani Z-ekseni geometrik yere aittir. Son denklemde $r = 0$ yazılırsa $\cos\theta + \sin\theta = 0$ koşulu kalır ve $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ bu koşulu sağlar. $(0, 0, z)$ noktasının $\left(0, \dfrac{3\pi}{4}, z\right)$ üçlüsü denklemi sağladığından, grafiğin tanımı (Tanım 22.2) gereği Z-ekseni son denklemin grafiğinde de vardır. Hiçbir nokta kaybolmamıştır.
Buna göre aranan silindirik denklem

$$r^4\cos^2\theta\,(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta\sin\theta) = \cos\theta + \sin\theta$$

dir. Denklemde z geçmediği için geometrik yer, XY-düzlemindeki bir eğrinin Z-eksenine paralel kaydırılmasıyla oluşan bir silindir yüzeyidir. ■

Örnek 22.17 (Beşinci dereceden bir denklemin küresel karşılığı). $x^2(x^3 - y^3) = x + y$ ifadesinin küresel koordinatlardaki karşılığını bulunuz.

Çözüm.
$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$ ve $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$ yazacağız (z ifadede geçmediği için $z = \rho\cos\varphi$ gerekmez).
Parçaları ayrı ayrı çevirelim.

$$x^2 = \rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta, \qquad x + y = \rho\sin\varphi\,(\cos\theta + \sin\theta).$$

Küp farkını çarpanlarına ayırırsak

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) \\ &= \rho\sin\varphi\,(\cos\theta - \sin\theta) \\ &\quad \cdot (\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\cos\theta\sin\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta) \\ &= \rho\sin\varphi\,(\cos\theta - \sin\theta)\cdot\rho^2\sin^2\varphi\,(1 + \cos\theta\sin\theta) \end{aligned}$$

bulunur; son adımda $\rho^2\sin^2\varphi$ ortak çarpan alınıp $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ kullanıldı.
Denklemde yerine koyalım. Sol tarafta $\rho\sin\varphi$'nin kuvvetlerini toplarsak ($2 + 1 + 2 = 5$)

$$\rho^5\sin^5\varphi\cos^2\theta\,(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta\sin\theta) = \rho\sin\varphi\,(\cos\theta + \sin\theta)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

olur.
Sadeleştirelim. $\rho \sin\varphi \neq 0$, yani nokta Z-ekseninde değilse iki tarafı $\rho \sin\varphi$ ile bölebiliriz:

$$\rho^4 \sin^4\varphi \cos^2\theta\,(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta \sin\theta) = \cos\theta + \sin\theta.$$

Z-ekseninin noktaları yine kaybolmaz: bu noktalarda $\rho \sin\varphi = 0$ olduğundan son denklem $\cos\theta + \sin\theta = 0$ koşuluna iner ve $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ ile sağlanır.
Buna göre aranan küresel denklem

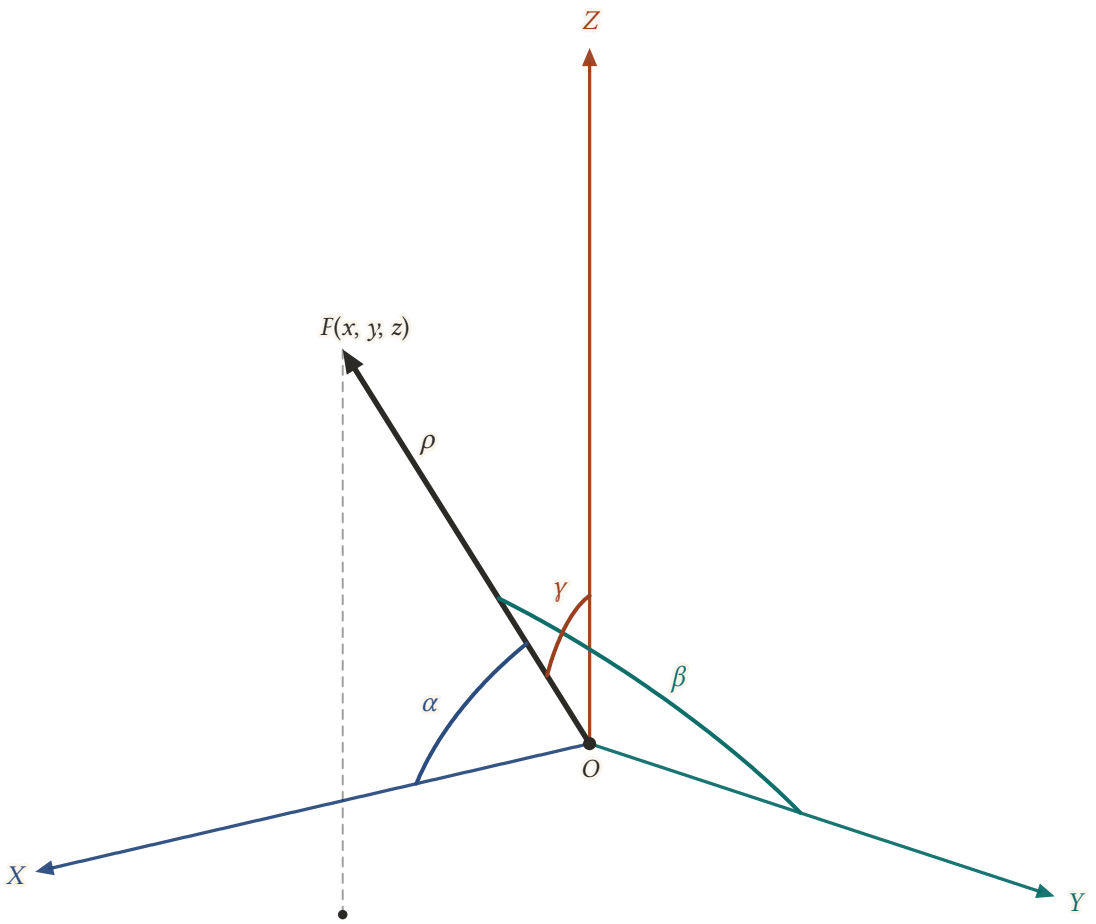
$$\rho^4 \sin^4\varphi \cos^2\theta\,(\cos\theta - \sin\theta)(1 + \cos\theta \sin\theta) = \cos\theta + \sin\theta$$

dir. Silindirik karşılıkta (Örnek 22.16) r yerine $\rho \sin\varphi$ yazarak da aynı sonuca ulaşılır. ■

22.3 Uzayda kutupsal koordinatlar

Düzlemde kutupsal koordinatlar bir noktayı kutba uzaklığı ve kutupsal eksenle yaptığı açıyla belirliyordu (Tanım 5.3). Uzayda tek bir açı yetmez; bir vektörün doğrultusunu üç eksenle yaptığı açılar, yani doğrultu açıları belirler (Tanım 8.6). Bu iki fikri birleştirirsek uzayda kutupsal koordinatları elde ederiz.

Tanım 22.5 (Uzayda kutupsal koordinatlar). $P \neq O$ bir nokta, $\rho = |\,OP\,|$ olsun. $\overrightarrow{OP}$ vektörünün X-, Y- ve Z-eksenlerinin pozitif yönleriyle yaptığı açılar sırasıyla α, β ve γ olsun. $(\rho, \alpha, \beta, \gamma)$ sıralı dörtlüsüne P noktasının **kutupsal koordinatları** denir. Burada $\rho > 0$ ve $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$'dir.



Şekil 22.9: Uzayda kutupsal koordinatlar: $\rho = |OP|$ ve OP vektörünün X-, Y-, Z-eksenlerinin pozitif yönleriyle yaptığı α, β, γ doğrultu açıları. Her açı yayı, açının ölçüldüğü eksenin rengindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Yani ρ, küresel koordinatlardaki gibi başlangıç noktasına uzaklıktır; α, β, γ ise $\overrightarrow{OP}$ vektörünün doğrultu açılarıdır.

Önerme 22.5 (Dik ve uzayda kutupsal koordinatlar arasında geçiş). *$P \neq O$ noktasının dik koordinatları (x, y, z), kutupsal koordinatları $(\rho, \alpha, \beta, \gamma)$ olsun. O zaman*

$$x = \rho\cos\alpha, \qquad y = \rho\cos\beta, \qquad z = \rho\cos\gamma, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ve

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

olur.

> ***İspat.***
> *$\rho = |\,OP\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ uzaklık formülünden (Teorem 6.1) gelir. α, β, γ açıları $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ vektörünün doğrultu açıları olduğundan doğrultman kosinüslerinin formülü (Teorem 8.4)*
>
> $$\cos\alpha = \frac{x}{\rho}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\rho}, \qquad \cos\gamma = \frac{z}{\rho}$$
>
> *verir; ρ ile çarparak ilk üç eşitliği buluruz. Aynı teorem kareler toplamının 1 olduğunu da söyler, çünkü $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ve $\cos\gamma$, $\overrightarrow{OP}$ vektörünün doğrultman kosinüsleridir.* ■

Dört sayıyla bir uzay noktası tarif etmek fazlalıktır; son eşitlik bu fazlalığı gösterir. İki açının kosinüsü biliniyorsa üçüncünün kosinüsü işaret dışında belirlidir. Bu dörtlüyü küresel koordinatlara bağlamak da kolaydır.

Önerme 22.6 (Uzayda kutupsal ve küresel koordinatlar). *$P \neq O$ noktasının küresel koordinatları (ρ, θ, φ), kutupsal koordinatları $(\rho, \alpha, \beta, \gamma)$ ise*

$$\gamma = \varphi, \qquad \cos\alpha = \sin\varphi\cos\theta, \qquad \cos\beta = \sin\varphi\sin\theta$$

olur.

> ***İspat.***
> *İki sistemde de $\rho = |\,OP\,|$'dir. γ ve φ açılarının ikisi de $\overrightarrow{OP}$ ile Z-ekseninin pozitif yönü arasındaki açıdır; bu yüzden $\gamma = \varphi$'dir. Öteki iki eşitlik için x'in iki ifadesini karşılaştırırız: Kutupsal geçiş formülleri (Önerme 22.5) $x = \rho\cos\alpha$, küresel geçiş formülleri (Önerme 22.3) $x = \rho\sin\varphi\cos\theta$ verir. $\rho > 0$ ile bölerek $\cos\alpha = \sin\varphi\cos\theta$ bulunur. y için aynı karşılaştırma $\cos\beta = \sin\varphi\sin\theta$ verir.* ■

Örnek 22.18 (Dik koordinatlardan uzayda kutupsal koordinatlara). Dik koordinatları $(3, 2, \sqrt{3})$ olan P noktasının kutupsal koordinatlarını bulunuz.

> **Çözüm.**
> ***ρ.***
>
> $$\rho = \sqrt{3^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 4 + 3} = \sqrt{16} = 4.$$
>
> **Açılar.** Önerme 22.5 gereğince her açının kosinüsü ilgili koordinatın ρ'ya bölümüdür. Açılar $[0, \pi]$ aralığında olduğundan arccos ile tek türlü bulunur:
>
> $$\alpha = \arccos\frac{3}{4}, \qquad \beta = \arccos\frac{2}{4} = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \qquad \gamma = \arccos\frac{\sqrt{3}}{4}.$$
>
> Buna göre P'nin kutupsal koordinatları
>
> $$\left(4, \arccos\frac{3}{4}, \frac{\pi}{3}, \arccos\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

dir.
Kontrol:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{9}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} = 1.$$

■

22.4 Alıştırmalar

Alıştırma 22.1 (Eyer yüzeyinin dik denklemi). Silindirik denklemi $z = r^2\cos 2\theta$ olan yüzeyin dik koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
İki kat açı formülüyle $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ yazalım:

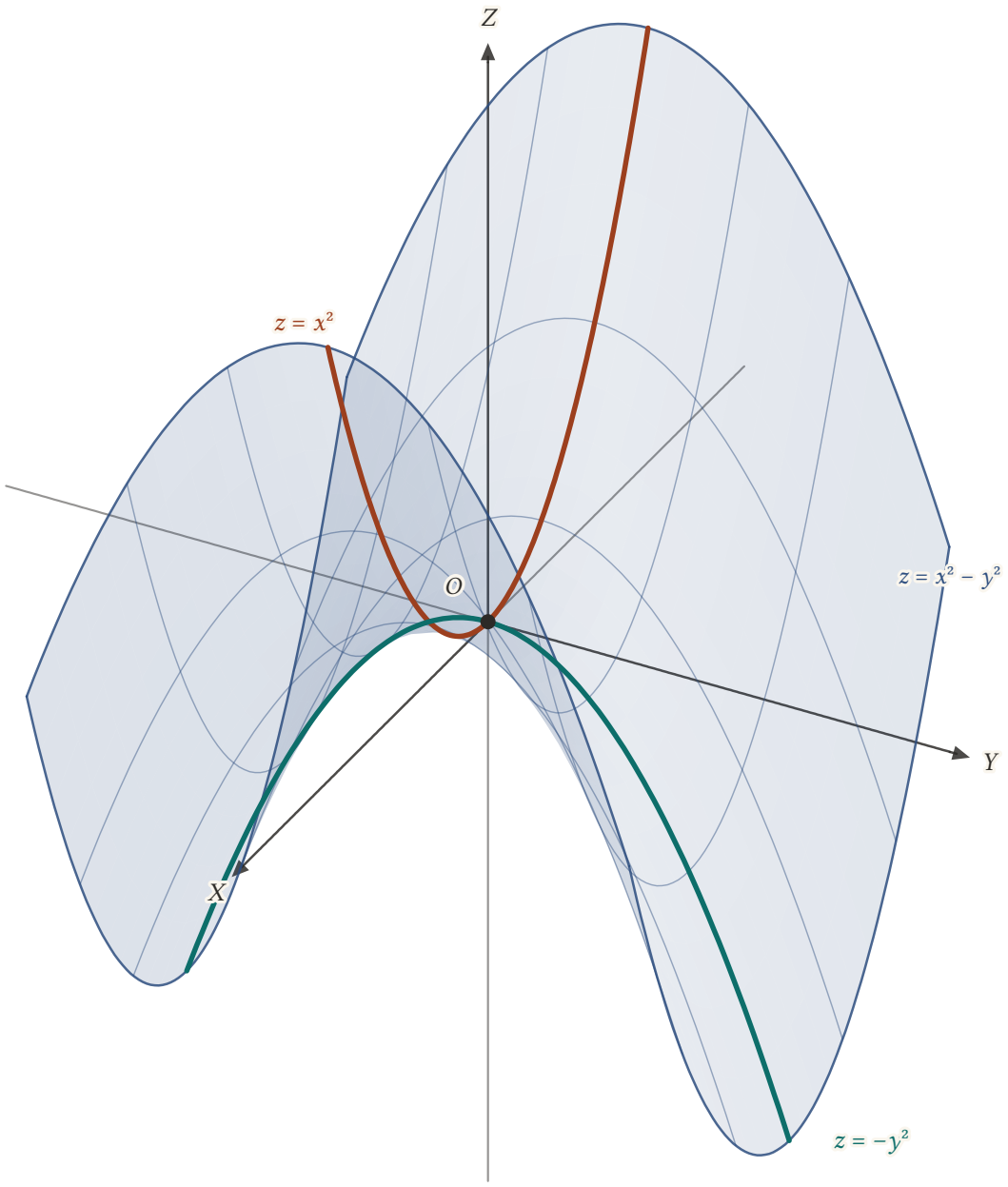
$$z = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2.$$

$r\cos\theta = x$ ve $r\sin\theta = y$ olduğundan (Önerme 22.1)

$$z = x^2 - y^2$$

bulunur. Z-ekseninin noktaları için ($r = 0$) iki denklem de $z = 0$ verir; bu yüzden iki denklem aynı noktaları belirtir.
Bu yüzey **hiperbolik paraboloittir**; biçimi yüzünden eyer yüzeyi diye de anılır. XZ-düzlemiyle ($y = 0$) kesiti yukarı açılan $z = x^2$ parabolü, YZ-düzlemiyle ($x = 0$) kesiti aşağı açılan $z = -y^2$ parabolüdür. Yüzeyi Özel Yüzeyler bölümünde ayrıntılı inceleyeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 22.10: $z = x^2 - y^2$ eyer yüzeyinin $-1{,}5 \le x, y \le 1{,}5$ parçası. XZ-düzlemiyle kesiti yukarı açılan $z = x^2$ parabolü, YZ-düzlemiyle kesiti aşağı açılan $z = -y^2$ parabolüdür; ikisi O eyer noktasında buluşur.

■

Alıştırma 22.2 (Eyer yüzeyinin küresel denklemi). Silindirik denklemi $z = r^2 \cos 2\theta$ olan yüzeyin küresel koordinatlardaki denklemini bulunuz.

Çözüm.
Sonuç 22.1 gereğince $r = \rho \sin\varphi$ ve $z = \rho\cos\varphi$'dir; θ iki sistemde aynıdır. Bunları yerine yazarsak

$$\rho\cos\varphi = (\rho\sin\varphi)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta), \qquad \text{yani} \qquad \rho\cos\varphi = \rho^2\sin^2\varphi\cos 2\theta$$

bulunur. Bu, yüzeyin küresel denklemidir.
İstersek ρ ile de sadeleştirebiliriz. $\rho \neq 0$ için iki tarafı ρ ile bölersek

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\cos\varphi = \rho\sin^2\varphi\cos 2\theta$$

olur. Başlangıç noktası bu sırada kaybolmaz: O yüzeyin üzerindedir ($0 = 0 - 0$) ve $\rho = 0$ için son denklem $\cos\varphi = 0$ koşuluna iner; $\left(0, \theta, \frac{\pi}{2}\right)$ üçlüsü bu koşulu sağlar. Dolayısıyla iki biçim de aynı yüzeyi belirtir. ■

Alıştırma 22.3 (Bir noktanın uzayda kutupsal koordinatları). Dik koordinatlarda verilen $P(\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$ noktasının kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
ρ.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2 + 4 + 2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Açılar. Önerme 22.5 gereğince $\cos\alpha = \frac{x}{\rho}$, $\cos\beta = \frac{y}{\rho}$, $\cos\gamma = \frac{z}{\rho}$'dur:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3},$$
$$\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4},$$
$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Açılar $[0, \pi]$ aralığında aranır ve arccos bu aralıkta tek değer verir.
Buna göre P'nin kutupsal koordinatları $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$'tür.
Kontrol:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

■

Alıştırma 22.4 (XY-düzleminin altındaki bir noktanın küresel koordinatları). Dik koordinatları $P(1, -1, -\sqrt{6})$ olan noktanın küresel koordinatlarını bulunuz.

Çözüm.
ρ. $\rho = \sqrt{1 + 1 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
θ. $x = 1 > 0, y = -1 < 0$ olduğundan izdüşüm $P'(1, -1, 0)$ dördüncü bölgededir, yani $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ olmalıdır. $\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1$'dir; tanjantı -1 olan açılar $\frac{3\pi}{4}$ ve $\frac{7\pi}{4}$'tür. Dördüncü bölgedeki $\theta = \frac{7\pi}{4}$'tür.
φ.

$$\cos\varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ve $\varphi \in [0, \pi]$ olduğundan $\varphi = \frac{5\pi}{6}$'dır. $\varphi > \frac{\pi}{2}$ çıkması, noktanın XY-düzleminin altında olmasıyla ($z < 0$) uyumludur.
Buna göre küresel koordinatlar $\left(2\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$'dır. Bu arada silindirik koordinatlar da hemen okunur: $r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ olduğundan $\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}, -\sqrt{6}\right)$'dır.
Kontrol: $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ olduğundan Sonuç 22.1 $r = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{2}$ ve $z = 2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{6}$ verir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 22.5 (Küresel denklemi verilen bir küre). Küresel denklemi $\rho = 4\cos\varphi$ olan geometrik yerin dik koordinatlardaki denklemini bulunuz ve geometrik yeri tanımlayınız.

Çözüm.
ρ ile çarpalım. $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ve $\rho\cos\varphi = z$ bağıntılarını kullanabilmek için iki tarafı ρ ile çarparız:

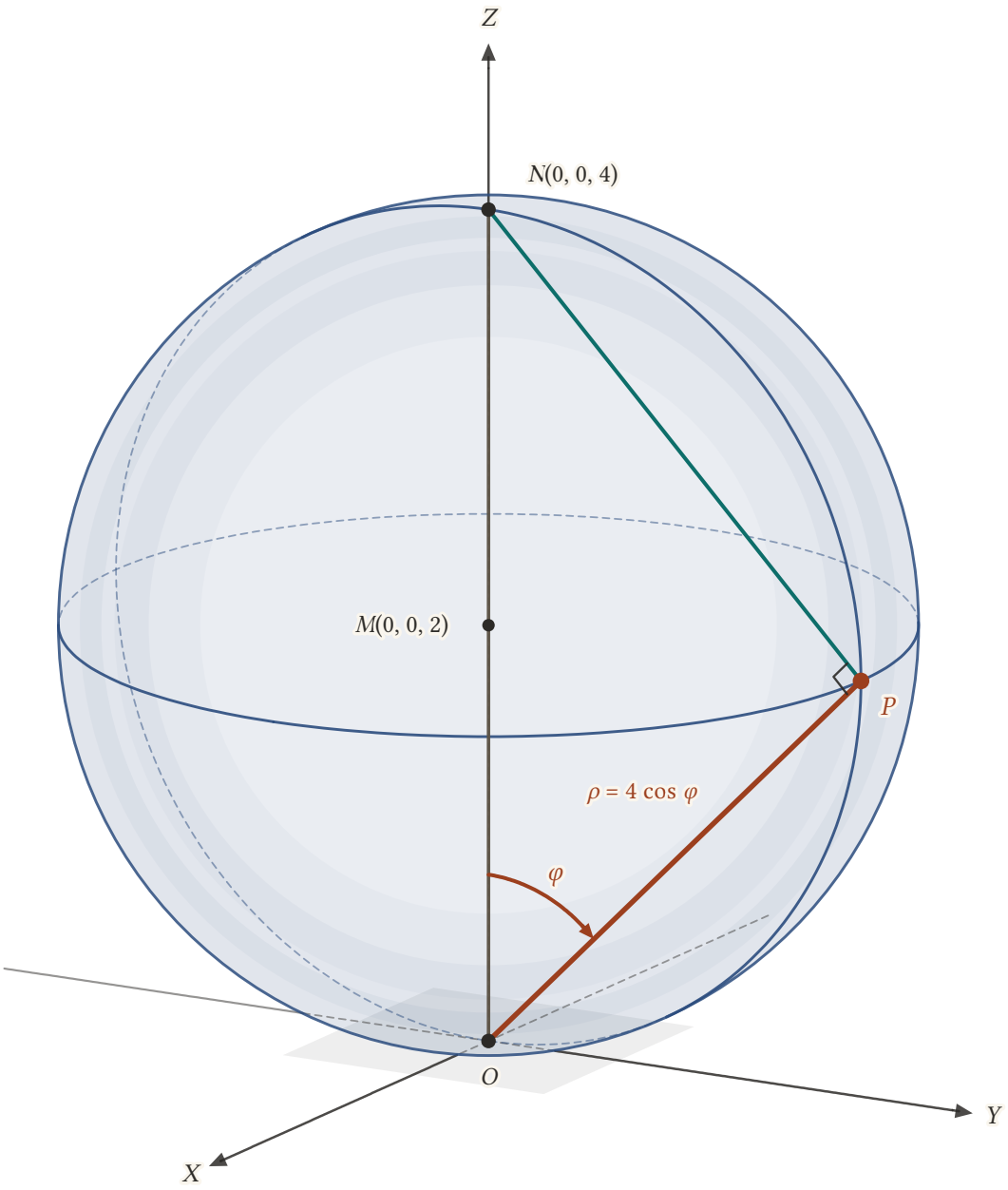
$$\rho^2 = 4\rho\cos\varphi \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4z.$$

Çarpma, $\rho = 0$ olan noktayı, yani O'yu yeni denkleme eklemiş olabilir. Ama O zaten geometrik yerdedir: $\left(0, \theta, \frac{\pi}{2}\right)$ üçlüsü $0 = 4\cos\frac{\pi}{2}$ eşitliğini sağlar. Tersine, O'dan farklı ve $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ denklemini sağlayan bir noktada $\rho^2 = 4\rho\cos\varphi$ ve $\rho > 0$ olduğundan $\rho = 4\cos\varphi$ bulunur. Yani iki denklem aynı noktaları belirtir.
Tam kareye tamamlayalım.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4.$$

Geometrik yer, merkezi $M(0,0,2)$ ve yarıçapı 2 olan küredir. Bu küre XY-düzlemine O'da teğettir.
Geometrik yorum. $N(0,0,4)$ noktası kürenin en üst noktasıdır ve ON, kürenin bir çapıdır. Küre üzerindeki O ve N'den farklı bir P noktası için OPN üçgeninin P'deki açısı, çapı gören çevre açı olduğu için diktir. Bu dik üçgende $|\,ON\,| = 4$ hipotenüs ve O'daki açı φ olduğundan $|\,OP\,| = 4\cos\varphi$ olur; denklem tam olarak bunu söyler.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 22.11: $\rho = 4\cos\varphi$ küresi: merkezi $M(0,0,2)$, yarıçapı 2, XY-düzlemine O'da teğet. ON bir çap olduğundan OPN üçgeni P'de diktir ve $|OP| = 4\cos\varphi$ olur (şekilde $P(0,2,2)$, $\varphi = \pi/4$).

■

Alıştırma 22.6 (Dik denklemi verilen bir koninin küresel denklemi). Dik koordinatlarda denklemi $x^2 + y^2 = z^2$ olan yüzeyin küresel koordinatlardaki denklemini bulunuz ve yüzeyi tanımlayınız.

Çözüm.
Yerine koyalım. $x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2\varphi$ ve $z^2 = \rho^2\cos^2\varphi$ olduğundan

$$\rho^2\sin^2\varphi = \rho^2\cos^2\varphi \Leftrightarrow \rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0 \Leftrightarrow \rho^2\cos 2\varphi = 0$$

bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0

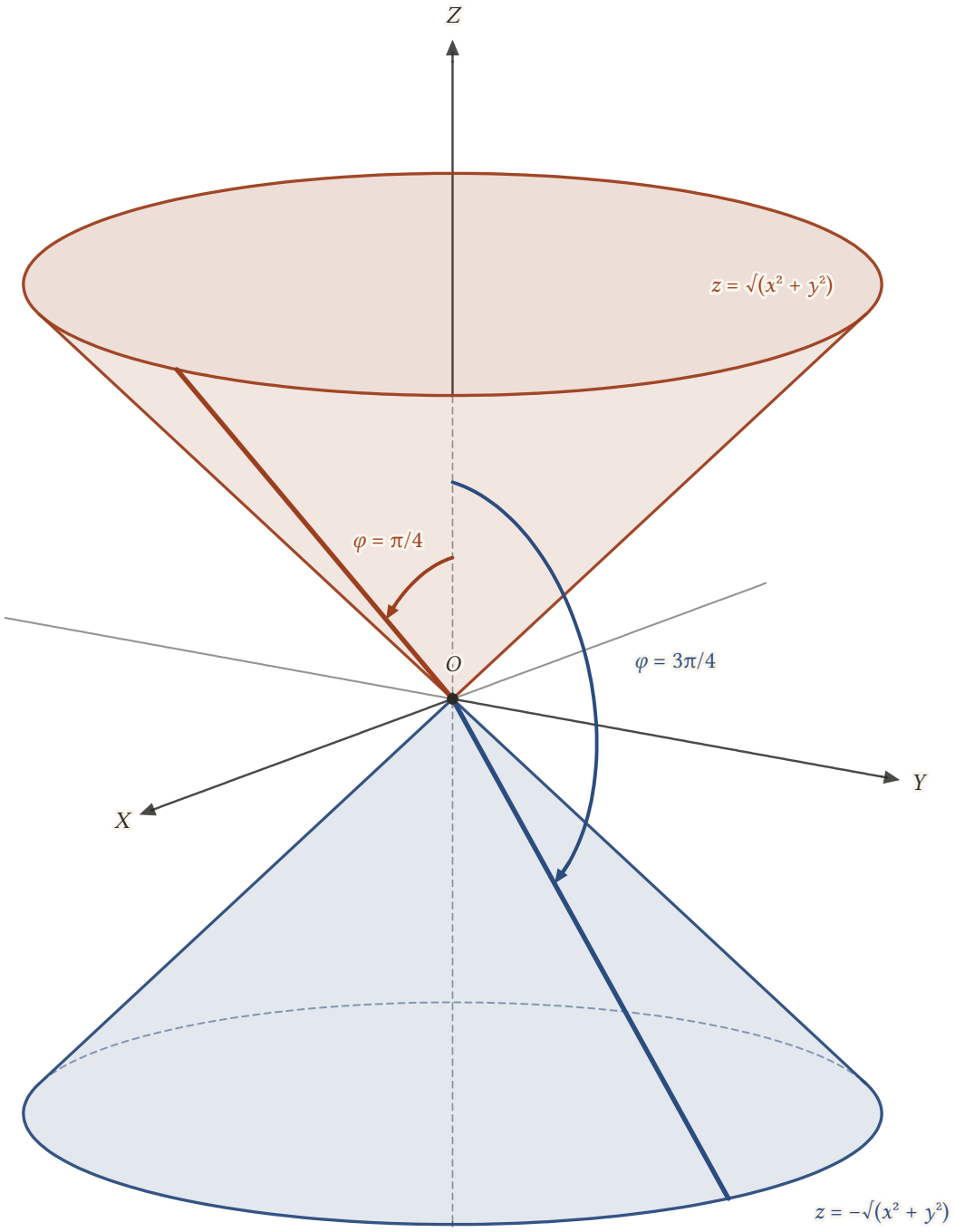
Sadeleştirelim. $\rho \neq 0$ ise $\cos 2\varphi = 0$ olmalıdır. $\varphi \in [0, \pi]$ iken $2\varphi \in [0, 2\pi]$'dir ve bu aralıkta kosinüsü sıfır olan açılar $\dfrac{\pi}{2}$ ile $\dfrac{3\pi}{2}$'dir. Buna göre

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \qquad \text{ya da} \qquad \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

bulunur. O noktası da kaybolmaz: $\cos 2\varphi = 0$ denklemini $\left(0, \theta, \dfrac{\pi}{4}\right)$ üçlüsü sağlar. Küresel denklem $\cos 2\varphi = 0$'dır.

Yüzeyi tanıyalım. Önerme 22.4 gereğince $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, XY-düzleminin üstünde kalan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ konisidir (Örnek 22.15). $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$ ise $\cot \dfrac{3\pi}{4} = -1$ olduğundan altta kalan $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ konisidir. Yüzey, tepeleri O'da birleşen bu iki koninin birleşimidir; buna **çift koni** denir. Dik denklemde bunu $z^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ diye görürüz.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 22.12: $x^2 + y^2 = z^2$ çift konisi ($|z| \le 2{,}2$ parçası): üstteki $\varphi = \pi/4$ konisi ile alttaki $\varphi = 3\pi/4$ konisinin birleşimi. İki açı da pozitif Z-ekseninden ölçülür; koninin arkasında kalan çizgiler kesiklidir.

■

Bu bölümde uzayda üç yeni adres sistemi kurduk. Silindirik koordinatlar Z-ekseni etrafında simetrik yüzeyleri, küresel koordinatlar başlangıç noktası etrafında simetrik yüzeyleri sade denklemlerle yazmamızı sağladı; uzayda kutupsal koordinatlar ise bir noktayı uzaklığı ve doğrultu açılarıyla tarif etti. Yol boyunca silindir, küre, koni ve eyer yüzeyiyle karşılaştık. Sonraki bölümde, Özel Yüzeyler bölümünde, bu yüzeyleri ve benzerlerini sistemli biçimde tanımlayıp inceleyeceğiz.

 CC BY-NC-SA 4.0

23. Özel Yüzeyler

Düzlemde bir denklem çoğu zaman bir eğri belirtir: $x^2 + y^2 = 1$ bir çember, $y = x^2$ bir paraboldür. Uzayda ise üç değişkenli tek bir denklem, $F(x, y, z) = 0$, genellikle bir **yüzey** belirtir. Bu yüzeylerin en basitini, düzlemi, uzayda düzlem denklemlerini incelerken tanıdık; küreyle de Uzayda Dik Koordinat Sistemi bölümünde karşılaştık.
Bu son bölümde yüzeyleri iki yoldan kuracağız. Birinci yol hareket: bir doğruyu bir eğri boyunca kaydırarak silindiri ve koniyi, bir eğriyi bir eksen etrafında döndürerek dönel yüzeyleri elde edeceğiz. İkinci yol denklem: x, y, z'nin kareleriyle kurulan standart denklemlerin hangi yüzeyleri verdiğini, yüzeyi düzlemlerle keserek, yani **izlerine** bakarak anlayacağız. Konikleri tanırken kazandığımız her şey burada işimize yarayacak: bir yüzeyin izleri hep elips, hiperbol, parabol ya da doğru çıkacak.

23.1 Yüzey ve Küre

Sezgimizdeki "yüzey" kavramıyla başlayalım.

Tanım 23.1 (Yüzey). Katı bir cismi dışarıdan saran, cismin kabuğu gibi düşünebileceğimiz geometrik yere o cismin **yüzeyi** denir.

Yani yüzey, cismin içini değil yalnız dış kabuğunu anlatır: bir topun yüzeyi küre, bir konserve kutusunun yan yüzü silindirdir. Bu tanım sezgiseldir; bu bölümde karşılaşacağımız yüzeylerin hepsi ya $F(x, y, z) = 0$ biçiminde bir denklemi sağlayan noktaların kümesi olarak ya da iki parametreye bağlı noktalar olarak verilecek. Bunların bazıları (paraboloidler, hiperboloidler) sınırsız uzanır ve hiçbir katı cismi tümüyle sarmaz; yine de onlara da yüzey deriz.
Bildiğimiz ilk kapalı yüzey küredir. Merkezi $M(a, b, c)$ ve yarıçapı r olan küre (Tanım 6.6), M'ye uzaklığı r olan noktaların kümesidir:

$$S = \{\, P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \mid PM \mid = r \,\}.$$

Uzaklık formülüyle bu koşul

$$\mid PM \mid = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r$$

biçiminde yazılır; iki yanın karesini almak bize tanıdık küre denklemini verir. Denklemi açılmış hâlde verilen bir kürenin merkezini ve yarıçapını tam kareye tamamlayarak buluruz (Önerme 6.1).

Örnek 23.1 (Silindirik koordinatlardan gelen bir küre). Dik koordinatlardaki denklemi

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2x - 16y + 8z$$

olan yüzeyin bir küre olduğunu gösteriniz; merkezini ve yarıçapını bulunuz. (Bu yüzeyin silindirik koordinatlardaki denklemi

$$r^2 + z^2 = -2r\cos\theta - 16r\sin\theta + 8z$$

idi; bkz. Silindirik ve Küresel Koordinatlar.)

Çözüm.
Bütün terimleri sol tarafa toplayıp aynı değişkenli terimleri gruplayalım:

$$(x^2 + 2x) + (y^2 + 16y) + (z^2 - 8z) = 0.$$

Her grubu tam kareye tamamlayalım: $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $y^2 + 16y = (y+8)^2 - 64$ ve $z^2 - 8z = (z-4)^2 - 16$. Yerine yazarsak

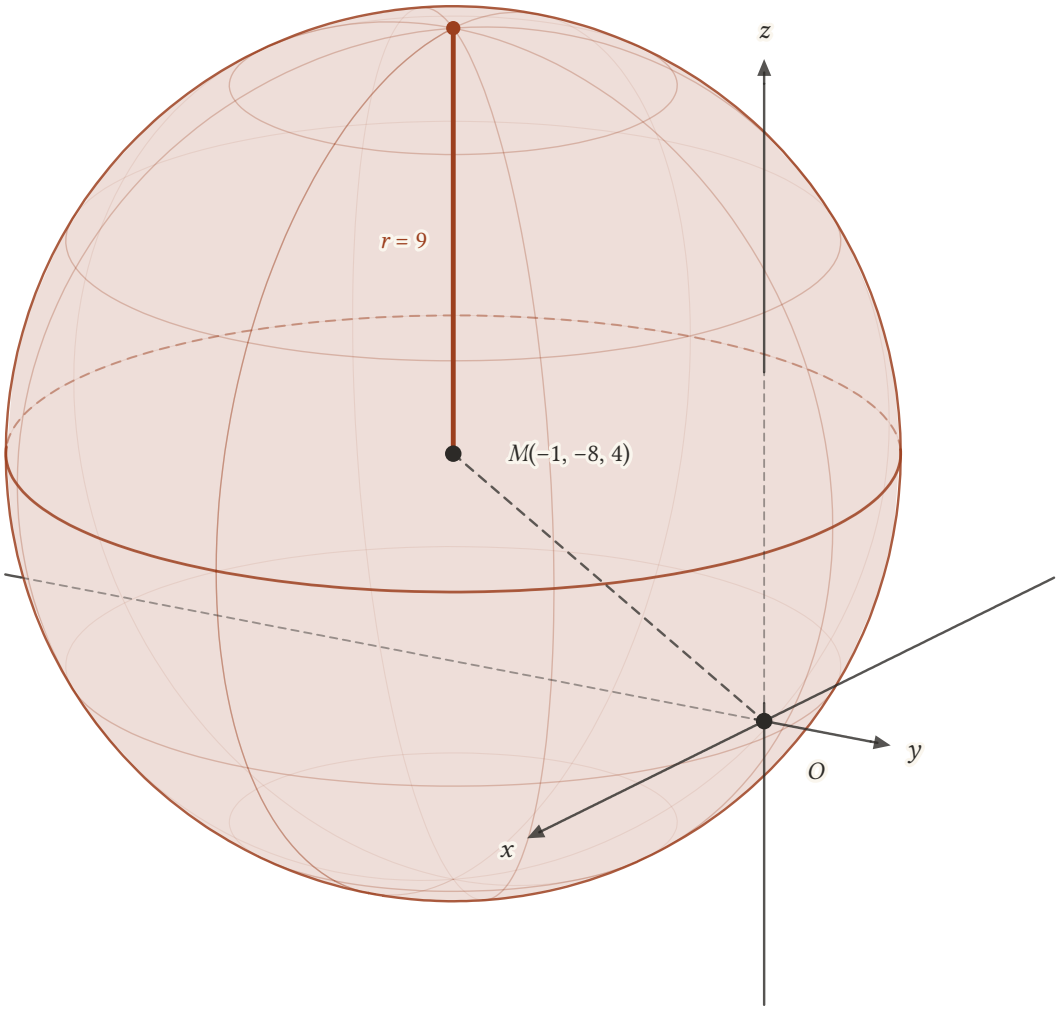
$$(x+1)^2 - 1 + (y+8)^2 - 64 + (z-4)^2 - 16 = 0$$

 CC BY-NC-SA 4.0

ve sabitleri sağa atarak

$$(x+1)^2 + (y+8)^2 + (z-4)^2 = 81 = 9^2$$

buluruz. Tanım 6.6 ile karşılaştırınca bu, merkezi $M(-1,-8,4)$ ve yarıçapı $r = 9$ olan küredir. Denklemde sabit terim bulunmadığından $O(0,0,0)$ noktası denklemi sağlar; yani küre başlangıç noktasından geçer. Gerçekten $|\,OM\,| = \sqrt{1+64+16} = \sqrt{81}$, yani $|\,OM\,| = 9 = r$'dir.



Şekil 23.1: Merkezi $M(-1,-8,4)$ ve yarıçapı 9 olan küre. Kırmızı doğru parçası yarıçaptır; $|OM| = 9$ olduğundan başlangıç noktası O küre üzerindedir (kesikli MO parçası). Eksenlerin kürenin arkasında ya da içinde kalan kısımları kesiklidir.

■

23.2 Uzay Eğrisi

Silindir ve koni, bir doğrunun bir eğri boyunca hareket etmesiyle oluşur. Bu yüzden önce uzayda eğrinin ne olduğunu belirleyelim.

Tanım 23.2 (Uzay eğrisi). $I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık (örneğin kapalı bir $[a,b]$ aralığı) olsun ve α_1, α_2, α_3 fonksiyonları I üzerinde sürekli olsun. t sayısı I'yı dolaşırken

$$\alpha(t) = \big(\ \alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\ \big)$$

 CC BY-NC-SA 4.0

noktalarının oluşturduğu geometrik yere bir **uzay eğrisi** denir. t'ye eğrinin **parametresi** denir.

Yani uzay eğrisini, t anında $\alpha(t)$ noktasında bulunan bir parçacığın izlediği yol gibi düşünebiliriz. Fonksiyonların sürekli olması, parçacığın sıçramadan, kesintisiz hareket ettiğini söyler. Uzayda doğrunun parametrik denklemi bunun en basit örneğidir: $\alpha(t) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$ bileşenleri t'nin birinci dereceden fonksiyonlarıdır. Düzlemdeki bir çember de, örneğin $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, bir uzay eğrisidir.

Örnek 23.2 (Helis). $t \in [0, 4\pi]$ için

$$\alpha(t) = \left(2\cos t, 2\sin t, \frac{t}{2}\right)$$

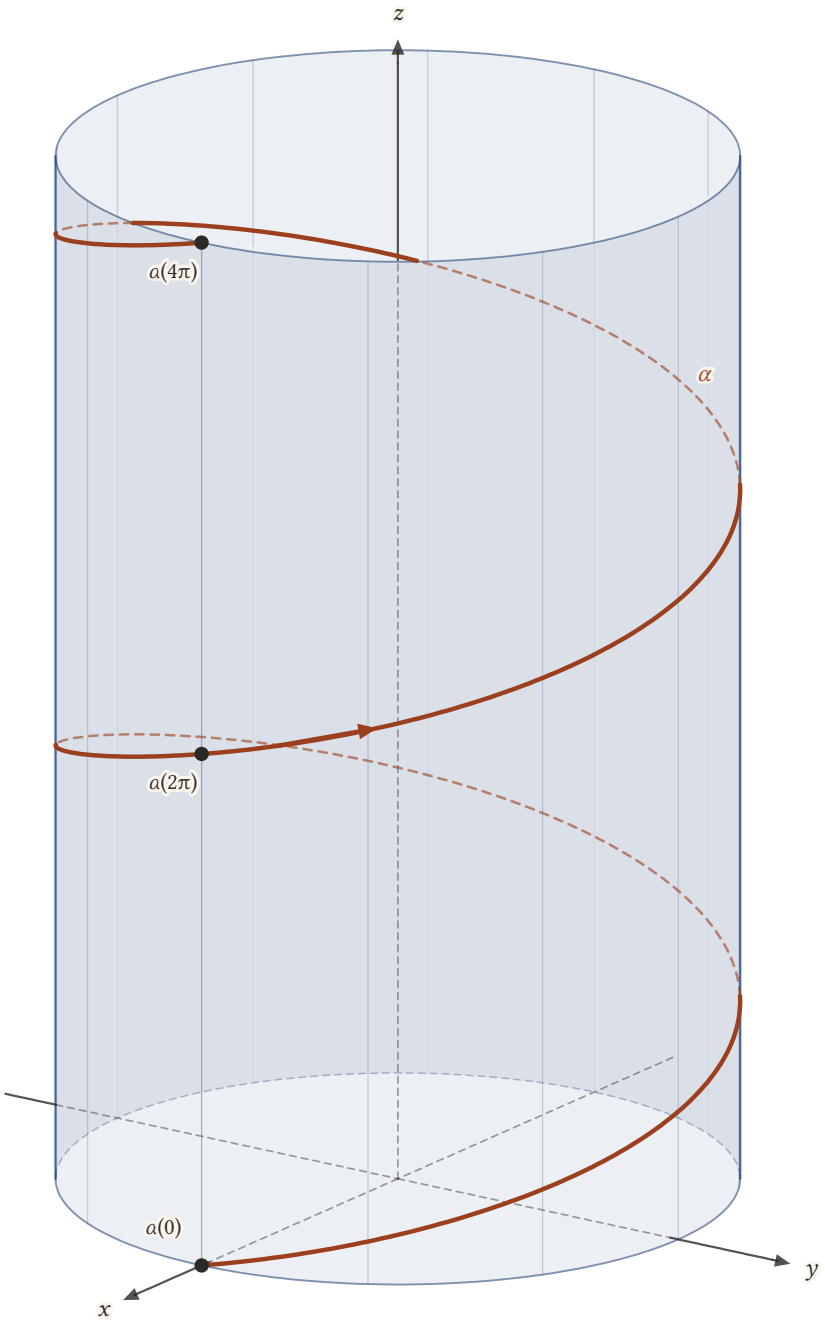
eğrisinin noktalarının $x^2 + y^2 = 4$ bağıntısını sağladığını gösteriniz ve eğrinin biçimini betimleyiniz.

Çözüm.
Bileşenler cos, sin ve birinci dereceden bir fonksiyon olduğundan süreklidir; demek ki α bir uzay eğrisidir. Her t için

$$x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (2\sin t)^2 = 4(\cos^2 t + \sin^2 t) = 4$$

olur. Yani eğrinin her noktasının z-eksenine uzaklığı 2'dir. t arttıkça (x, y) ikilisi xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 4$ çemberinin üzerinde saat yönünün tersine döner, bu sırada yükseklik $z = \frac{t}{2}$ düzgün biçimde artar. Bir tam dönüşte (t'nin 2π artması) yükseklik π kadar artar.
Birkaç noktayı yazalım: $\alpha(0) = (2, 0, 0)$, $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (0, 2, \frac{\pi}{4})$, $\alpha(2\pi) = (2, 0, \pi)$ ve $\alpha(4\pi) = (2, 0, 2\pi)$.
Eğri, bir yay ya da vida dişi gibi iki tam tur atarak yükselir. Böyle bir eğriye **helis** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.2: Helis $\alpha(t) = (2\cos t, 2\sin t, t/2)$, $t \in [0, 4\pi]$, $x^2 + y^2 = 4$ silindirinin üzerinde iki tur atarak yükselir; ok, t artarken hareket yönünü gösterir. $\alpha(0)$, $\alpha(2\pi)$ ve $\alpha(4\pi)$ aynı düşey doğru üzerindedir; eğrinin silindirin arkasında kalan kısımları kesiklidir.

■

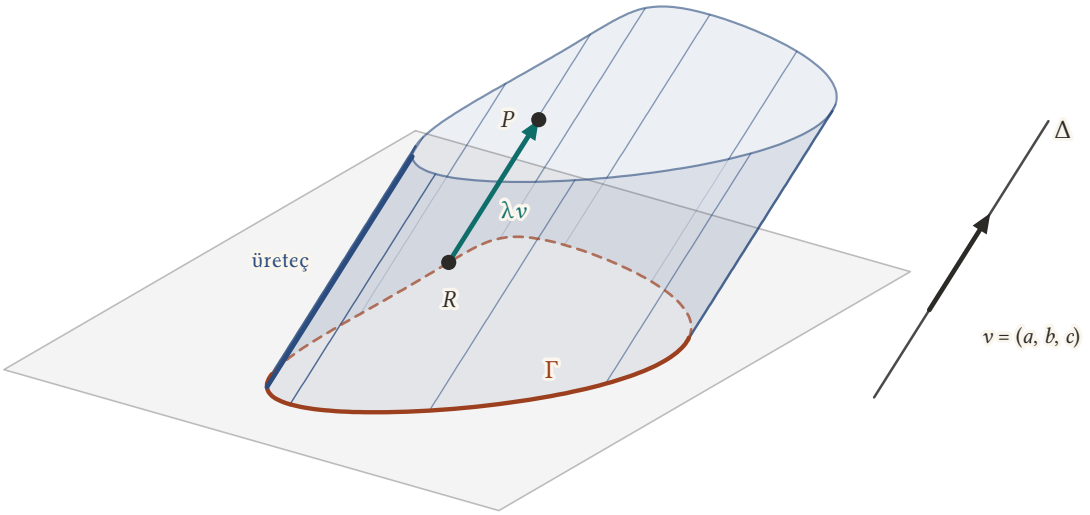
23.3 Silindir

Bir kâğıdı kıvırıp bir boru yaptığımızı düşünelim: borunun yan yüzü, birbirine paralel doğru parçalarından örülmüştür. Silindirin tanımı bu gözlemi genelleştirir.

Tanım 23.3 (Silindir). Uzayda sabit bir doğrultuya paralel kalarak ve sabit bir eğriye dayanarak hareket eden bir doğrunun oluşturduğu yüzeye **silindir** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0

- Doğrunun dayandığı sabit eğriye silindirin **dayanak eğrisi** denir ve Γ ile gösterilir.
- Hareket eden doğrunun paralel kaldığı sabit doğrultuyu veren Δ doğrusuna silindirin **doğrultmanı** denir.
- Hareket ederek silindiri oluşturan doğrunun her konumuna silindirin bir **üreteci** denir.



Şekil 23.3: Silindir: dayanak eğrisi Γ (kırmızı) boyunca kayan ve Δ doğrusuna (doğrultman vektörü v) paralel kalan doğrular, yani üreteçler yüzeyi örer. Γ üzerindeki R noktasının üretecindeki her P noktası için $RP = \lambda v$ olur.

Yani silindir, Γ eğrisinin her noktasından geçen ve Δ'ya paralel olan bütün doğruların birleşimidir. Silindirin her noktası bu doğrulardan birinin, yani bir üretecin üzerindedir. Günlük dildeki "silindir" (dairesel taban, dik yan yüz) bunun yalnızca özel bir durumudur; dayanak eğrisi bir elips, bir parabol, hatta kapalı olmayan herhangi bir eğri olabilir ve üreteçler eğik durabilir.
Silindirin noktalarını parametrelerle yazmak kolaydır: bir noktaya ulaşmak için önce dayanak eğrisi üzerinde bir noktaya gider, sonra doğrultman boyunca ilerleriz.

Teorem 23.1 (Silindirin parametrik denklemi). *Bir silindirin dayanak eğrisi* $\Gamma(t) = \big(\,\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \Gamma_3(t)\,\big)$ *ve doğrultmanının doğrultman vektörü* $v = (a, b, c) \neq 0$ *olsun.* $P(x, y, z)$ *noktasının silindir üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşul, bazı* t *ve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *sayıları için*

$$\left.\begin{aligned} x &= \Gamma_1(t) + \lambda a \\ y &= \Gamma_2(t) + \lambda b \\ z &= \Gamma_3(t) + \lambda c \end{aligned}\right\}$$

olmasıdır. Bu denklemlere silindirin ***parametrik denklemi*** *denir.*

> ***İspat.***
> $O(0,0,0)$ *başlangıç noktası olsun.* P *silindir üzerindeyse,* P*'den geçen bir üreteç vardır; bu üreteç* Γ*'yı bir* $R = \Gamma(t)$ *noktasında keser ve* v*'ye paraleldir.* P *ile* R *aynı üreteç üzerinde bulunduğundan* $\overrightarrow{RP}$ *vektörü* v *ile aynı doğrultudadır; dolayısıyla bir* λ *sayısı için* $\overrightarrow{RP} = \lambda v$ *olur (Önerme 7.11;* $P = R$ *ise* $\lambda = 0$ *alınır). Üçgen kuralından (Önerme 7.5)*
>
> $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OR} + \lambda v$$
>
> *yazılır. Konum vektörleri noktaların koordinatlarıdır (Tanım 7.9); öyleyse*
>
> $$(x, y, z) = \big(\,\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \Gamma_3(t)\,\big) + (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$
>
> *olur ve bileşenleri eşitlersek parametrik denklemleri buluruz.*

 CC BY-NC-SA 4.0

Tersine, P'nin koordinatları bir t ve bir λ için bu denklemleri sağlasın. $R = \Gamma(t)$ dersek $\overrightarrow{RP} = \lambda v$ olur; yani P, R'den geçen ve v'ye paralel olan doğru üzerindedir. Bu doğru bir üreteç olduğundan P silindirin üzerindedir.
■

Parametrik denklemlerden t ile λ'yı yok edebilirsek silindirin $F(x, y, z) = 0$ biçimindeki kartezyen denklemine ulaşırız. İki örnekle görelim.

Örnek 23.3 (Dik dairesel silindir). Dayanak eğrisi xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 4$ çemberi ve doğrultmanı z-ekseni olan silindirin parametrik ve kartezyen denklemlerini bulunuz.

Çözüm.
Çemberi $\Gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$, biçiminde parametrelendirelim. z-ekseninin doğrultman vektörü olarak $v = (0, 0, 1)$ alınabilir. Teorem 23.1 ile

$$x = 2\cos t, \qquad y = 2\sin t, \qquad z = \lambda$$

parametrik denklemleri bulunur. Şimdi parametreleri yok edelim. İlk iki denklemin karelerini toplarsak

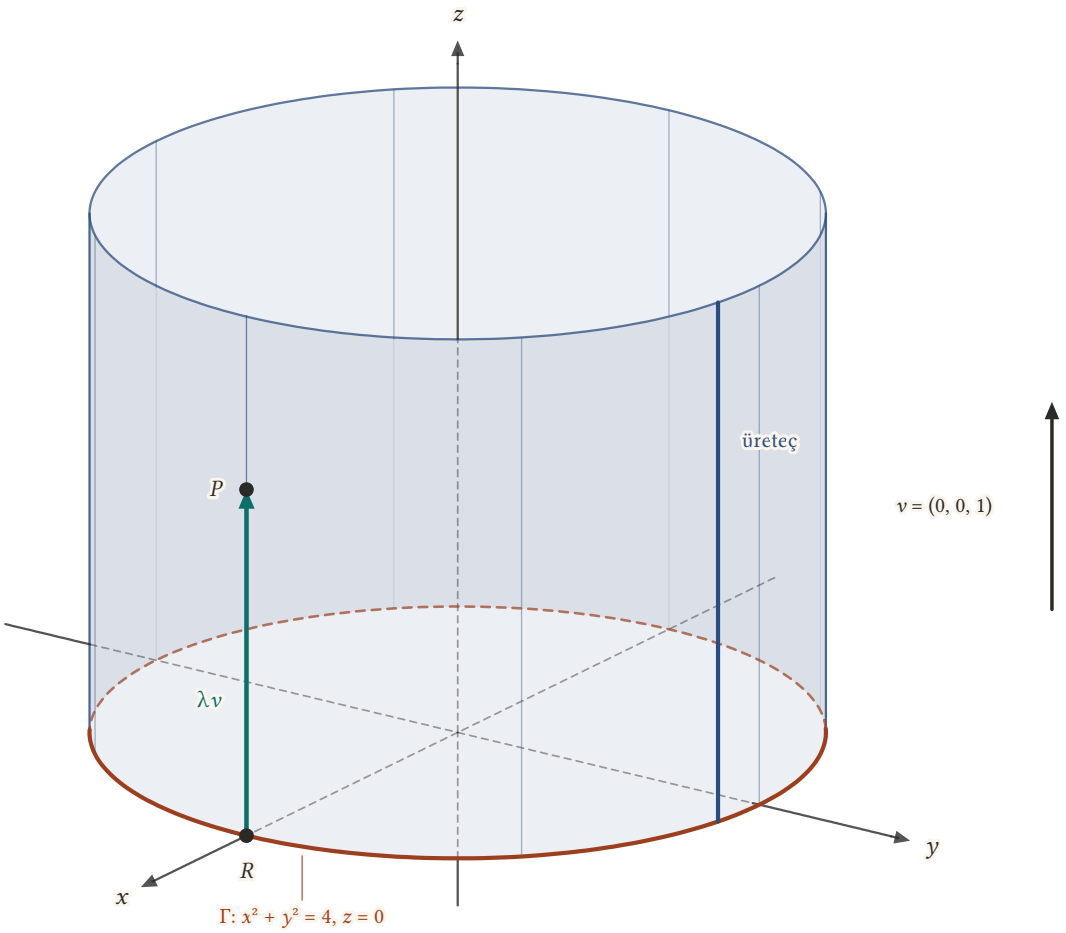
$$x^2 + y^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4$$

olur; λ ise yalnız üçüncü denklemde geçer ve z her değeri alabilir. Kartezyen denklem

$$x^2 + y^2 = 4$$

biçimindedir. Uzayda bu denklemde z görünmez; bu, "z ne olursa olsun" demektir. Yüzey, z-ekseni etrafında yarıçapı 2 olan bildiğimiz borudur. Helis örneğindeki eğri de (Örnek 23.2) bu silindirin üzerinde dolanır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.4: Dayanak eğrisi xy-düzlemindeki Γ: $x^2 + y^2 = 4$ çemberi (kırmızı) olan ve üreteçleri $v = (0, 0, 1)$ doğrultusunda olan dik dairesel silindir ($0 \le z \le 3$ parçası). $P = R + \lambda v$ noktası, Γ üzerindeki $R(2, 0, 0)$ noktasından geçen üreteçtedir.

■

Örnek 23.4 (Eğik bir silindir). Dayanak eğrisi xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 1$ çemberi ve doğrultman vektörü $v = (1, 0, 1)$ olan silindirin kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm.
Çemberi $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ biçiminde parametrelendirelim. Teorem 23.1 ile

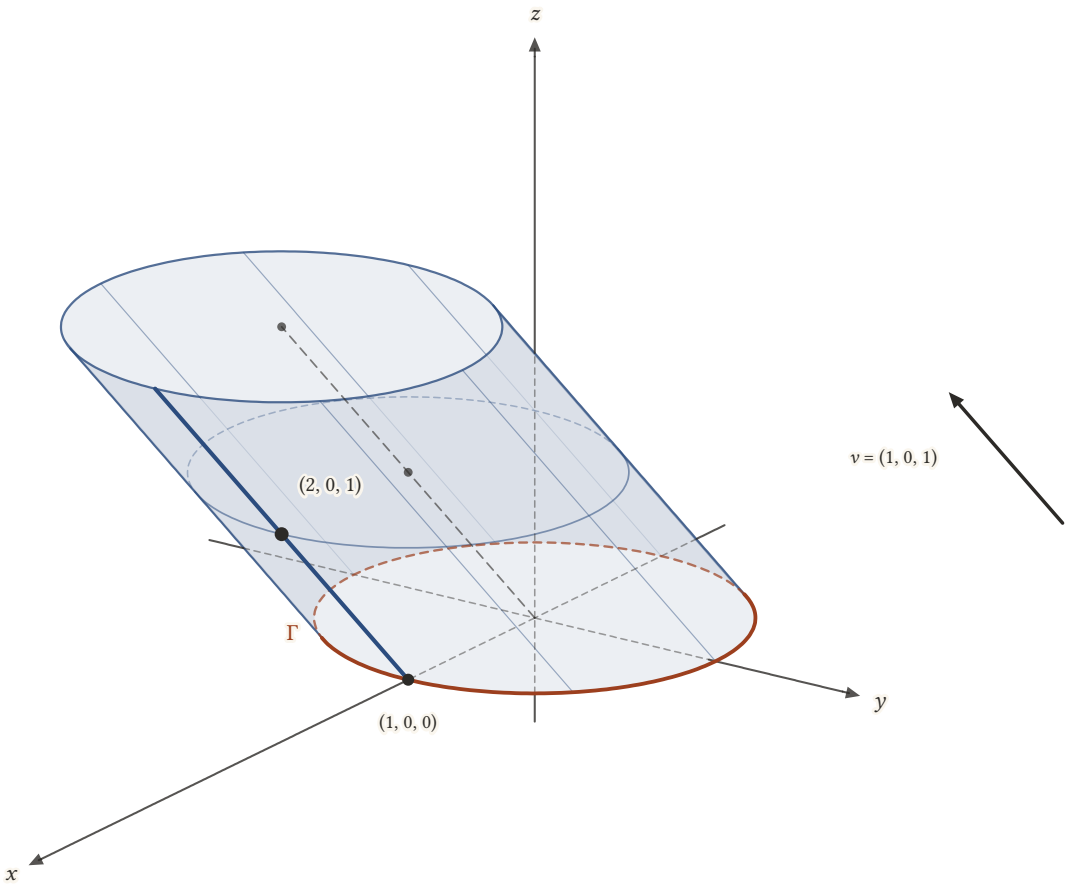
$$x = \cos t + \lambda, \qquad y = \sin t, \qquad z = \lambda$$

olur. Üçüncü denklem $\lambda = z$ verir. Bunu birinciye yazarsak $\cos t = x - z$ olur; ikinciden de $\sin t = y$'dir. $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ özdeşliği t'yi de yok eder:

$$(x - z)^2 + y^2 = 1.$$

Tersine, bu denklemi sağlayan her (x, y, z) için $\lambda = z$ alıp $(x - z, y)$ birim çember üzerinde olduğundan $\cos t = x - z$, $\sin t = y$ olacak bir t seçebiliriz; demek ki denklemin her çözümü silindir üzerindedir.
Denklemin anlamına bakalım: $z = k$ düzlemiyle kesişim $(x - k)^2 + y^2 = 1$, yani merkezi $(k, 0, k)$ ve yarıçapı 1 olan bir çemberdir. Yükseldikçe çember x-ekseni yönünde kayar; bu yüzden silindir eğiktir.
Denetim için $t = 0$, $\lambda = 1$ ile bulunan $(2, 0, 1)$ noktasını yerine yazalım: $(2 - 1)^2 + 0^2 = 1$.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.5: Eğik silindir $(x - z)^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 2$. Dayanak çemberi Γ (kırmızı) xy-düzlemindedir; $z = 1$ ve $z = 2$ kesitleri merkezleri $(1, 0, 1)$ ve $(2, 0, 2)$ olan birim çemberlerdir. Kalın üreteç $(1, 0, 0)$'dan $v = (1, 0, 1)$ doğrultusunda çıkar ve $(2, 0, 1)$ noktasından geçer.

■

Dayanak eğrisinin bir düzlemde bulunduğu ve üreteçlerin bu düzleme dik durduğu durum, özel bir adı hak edecek kadar sık karşımıza çıkar.

Tanım 23.4 (Dik silindir). Dayanak eğrisi bir düzlemde bulunan ve üreteçleri bu düzleme dik olan silindire **dik silindir** denir.

Yani dik silindirde yan yüz tabana diktir; dik dairesel silindir (Örnek 23.3) bir dik silindirdir, eğik silindir (Örnek 23.4) ise değildir. Dayanak eğrisi bir koordinat düzleminde yer alan dik silindirlerin denklemi özellikle basittir.

Önerme 23.1 (Koordinat düzlemine dik silindirin denklemi). *Γ eğrisi xy-düzleminde $f(x, y) = 0$, $z = 0$ denklemleriyle verilsin. Dayanak eğrisi Γ olan ve üreteçleri z-eksenine paralel olan dik silindirin denklemi*

$$f(x, y) = 0$$

biçimindedir; yani bu denklem uzayda, z serbest kalmak üzere, tam olarak silindirin noktalarını belirtir.

İspat.
Doğrultman vektörü $v = (0, 0, 1)$'dir. Teorem 23.1 gereğince $P(x, y, z)$'nin silindir üzerinde olması, Γ üzerindeki bir $R(x_0, y_0, 0)$ noktası ve bir λ için

 CC BY-NC-SA 4.0

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, 0) + \lambda(0, 0, 1) = (x_0, y_0, \lambda)$$

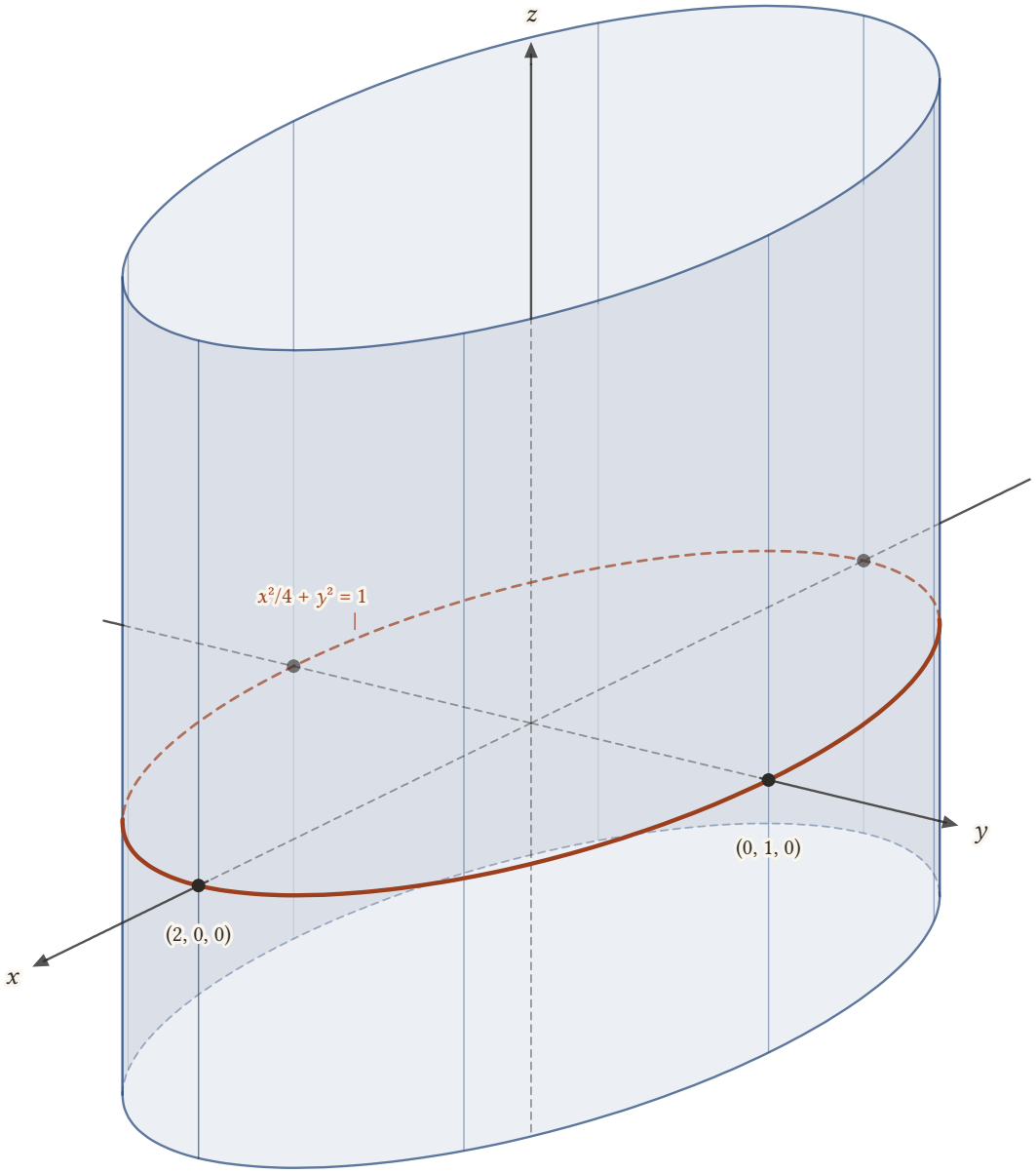
olması demektir. Bu eşitlik $x = x_0$, $y = y_0$, $z = \lambda$ *verir. Dolayısıyla* P *silindir üzerindeyse* $(x, y, 0) = R \in \Gamma$, *yani* $f(x, y) = 0$ *olur. Tersine* $f(x, y) = 0$ *ise* $R(x, y, 0)$ *noktası* Γ *üzerindedir ve* $\lambda = z$ *ile* $P = R + \lambda v$ *yazılır;* P *silindir üzerindedir.*
■

Aynı akıl yürütme öbür eksenler için de geçerlidir: denklemde bir değişken hiç görünmüyorsa yüzey, üreteçleri o değişkenin eksenine paralel olan bir dik silindirdir.

Örnek 23.5 (Eliptik silindir). Uzayda $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ denklemiyle verilen yüzeyi betimleyiniz.

Çözüm.
Denklemde z görünmüyor. Önerme 23.1 gereğince yüzey, dayanak eğrisi xy-düzlemindeki $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ elipsi olan ve üreteçleri z-eksenine paralel olan dik silindirdir. Elipsin x yönündeki yarı ekseni 2, y yönündeki yarı ekseni 1'dir (elips için bkz. Elips). Her $z = k$ düzlemi yüzeyi bu elipsin aynısı boyunca keser. Böyle bir yüzeye **eliptik silindir** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.6: Eliptik silindir $x^2/4 + y^2 = 1$ ($-1 \le z \le 2$ parçası). Her $z = k$ düzlemi yüzeyi aynı elips boyunca keser; kırmızı elips xy-düzlemindeki dayanak eğrisidir ve eksenleri $(\pm 2, 0, 0)$ ile $(0, \pm 1, 0)$ noktalarında keser.

■

Örnek 23.6 (Parabolik silindir). Dayanak eğrisi yz-düzlemindeki $z = y^2$ parabolü ve doğrultmanı x-ekseni olan silindirin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Parabolü $\Gamma(t) = (0, t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, biçiminde parametrelendirelim; x-ekseninin doğrultman vektörü $v = (1, 0, 0)$'dır. Teorem 23.1 ile

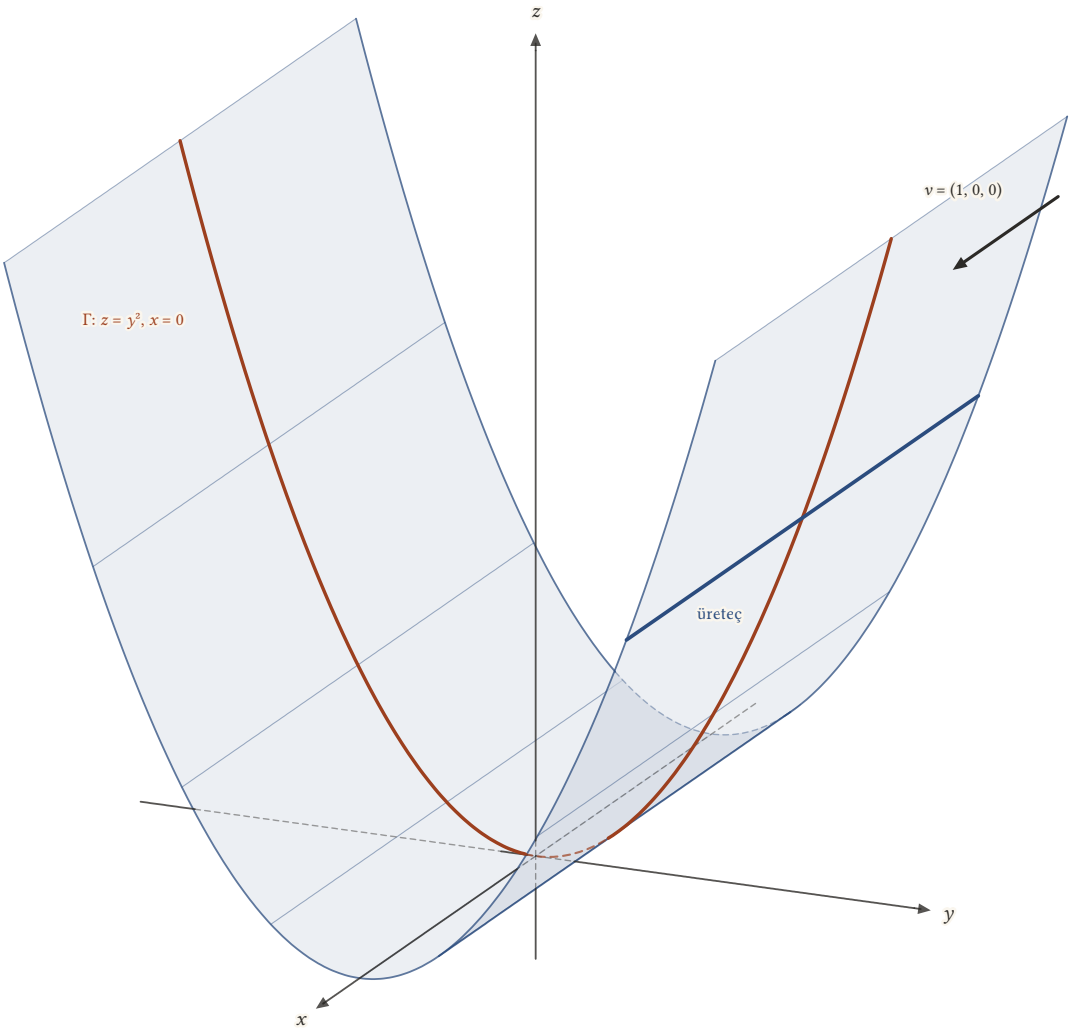
$$x = \lambda, \qquad y = t, \qquad z = t^2$$

olur. $t = y$'yi üçüncü denkleme yazarsak $z = y^2$ çıkar; $x = \lambda$ ise her değeri alabilir. Silindirin denklemi

 CC BY-NC-SA 4.0

$$z = y^2$$

dir. Bu denklemde x görünmez: yüzey, parabolün x-ekseni boyunca kaydırılmasıyla oluşan bir "oluk"tur. Böyle bir yüzeye **parabolik silindir** denir.



Şekil 23.7: Parabolik silindir $z = y^2$ ($-2 \le x \le 2$ parçası): yz-düzlemindeki Γ parabolü (kırmızı) x-ekseni doğrultusunda kaydırılır; üreteçler $v = (1, 0, 0)$'a paraleldir.

■

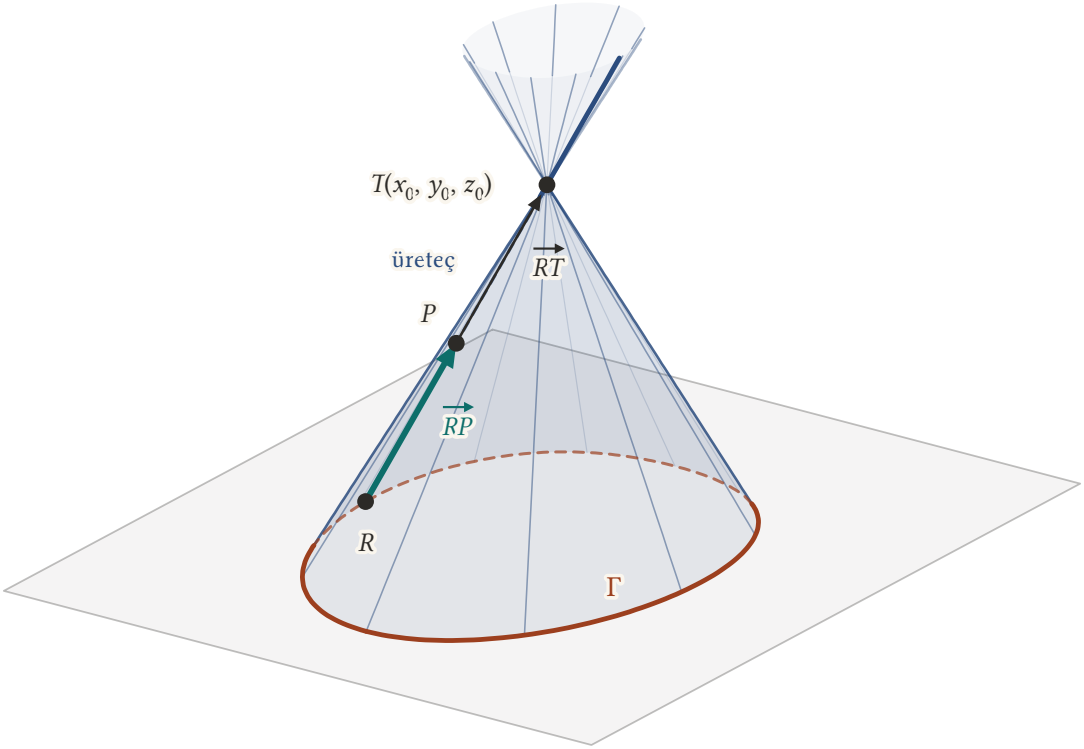
23.4 Koni

Silindirde üreteçler hep aynı doğrultudaydı. Bütün üreteçler sabit bir noktadan geçerse silindirin yerini koni alır.

Tanım 23.5 (Koni). Düzlemsel bir eğriye dayanarak hareket eden ve bu eğrinin düzleminde bulunmayan sabit bir noktadan geçen bir doğrunun oluşturduğu yüzeye **koni** denir.

- Doğrunun dayandığı sabit eğriye koninin **dayanak eğrisi** denir ve Γ ile gösterilir.
- Sabit noktaya koninin **tepe noktası** denir ve T ile gösterilir.
- Hareket ederek koniyi oluşturan doğrunun her konumuna koninin bir **üreteci** denir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.8: Koni: dayanak eğrisi Γ (kırmızı) üzerindeki her noktayı T tepe noktasına birleştiren doğrular (üreteçler) yüzeyi örer; üreteçler T'nin ötesine uzanarak öbür kanadı (soluk) oluşturur. $R \in \Gamma$ ve P, RT üreteci üzerindeyken $RP = \lambda RT$ olur.

Yani koni, Γ'nın her noktasını T'ye birleştiren doğruların birleşimidir. Üreteçler doğru olduğundan T'nin iki yanına da uzanır; bu yüzden koni T'de birleşen iki "kanat"tan oluşur. Dondurma külahı bu kanatlardan birinin bir parçasıdır.

Teorem 23.2 (Koninin parametrik denklemi). *Bir koninin dayanak eğrisi* $\Gamma(t) = \big(\,\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \Gamma_3(t)\,\big)$ *ve tepe noktası* $T(x_0, y_0, z_0)$ *olsun.* $P(x, y, z)$ *noktasının koni üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşul, bazı* t *ve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *sayıları için*

$$\left.\begin{aligned} x &= (1-\lambda)\,\Gamma_1(t) + \lambda x_0 \\ y &= (1-\lambda)\,\Gamma_2(t) + \lambda y_0 \\ z &= (1-\lambda)\,\Gamma_3(t) + \lambda z_0 \end{aligned}\right\}$$

olmasıdır. Bu denklemlere koninin ***parametrik denklemi*** *denir.*

> ***İspat.***
> $O(0,0,0)$ *başlangıç noktası olsun.* P *koni üzerindeyse* P*'den geçen bir üreteç vardır; bu üreteç* Γ*'yı bir* $R = \Gamma(t)$ *noktasında keser ve* T*'den geçer.* T*,* Γ*'nın düzleminde olmadığından* $R \neq T$*'dir ve üreteç* R *ile* T*'den geçen doğrudur.* P *bu doğru üzerinde olduğundan* $\overrightarrow{RP}$ *vektörü* $\overrightarrow{RT}$ *ile aynı doğrultudadır; bir* λ *için* $\overrightarrow{RP} = \lambda\,\overrightarrow{RT}$ *olur (Önerme 7.11;* $P = R$ *ise* $\lambda = 0$*). Üçgen kuralıyla (Önerme 7.5)*
>
> $$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OR} + \lambda\,\overrightarrow{RT}$$
>
> *yazılır. Koordinatlarla (Tanım 7.9)*
>
> $$\begin{aligned}(x, y, z) = &\big(\,\Gamma_1(t), \Gamma_2(t), \Gamma_3(t)\,\big) \\ &+\lambda\,\big(\,x_0 - \Gamma_1(t),\, y_0 - \Gamma_2(t),\, z_0 - \Gamma_3(t)\,\big)\end{aligned}$$
>
> *olur. Örneğin birinci bileşen*

 CC BY-NC-SA 4.0

$$x = \Gamma_1(t) + \lambda x_0 - \lambda\Gamma_1(t) = (1-\lambda)\Gamma_1(t) + \lambda x_0$$

biçiminde düzenlenir; öbür bileşenler de aynı biçimde düzenlenir.
Tersine, P'nin koordinatları bir t ve bir λ için bu denklemleri sağlasın. $R = \Gamma(t)$ dersek yukarıdaki hesabı geri okuyarak $\overrightarrow{RP} = \lambda\,\overrightarrow{RT}$ buluruz; demek ki P, R ile T'den geçen doğru, yani bir üreteç üzerindedir.
■

Parametrenin anlamına dikkat edelim: $\lambda = 0$ dayanak eğrisi üzerindeki R noktasını, $\lambda = 1$ tepe noktası T'yi verir. $0 < \lambda < 1$ değerleri R ile T arasındaki doğru parçasını, $\lambda > 1$ değerleri ise T'nin ötesindeki öbür kanadı tarar.

i Parametrelerin yok edilmesi

Silindirin ve koninin parametrik denklemlerinde iki parametre, t ve λ, vardır. Üç denklemden bu iki parametre yok edilirse x, y, z arasında tek bir bağıntı, yani

$$F(x, y, z) = 0$$

biçiminde bir denklem elde edilir. Bu, yüzeyin kartezyen denklemidir. Silindir örneklerinde yaptığımız da buydu.

Örnek 23.7 (Dik dairesel koni). Tepe noktası $T(0,0,2)$ ve dayanak eğrisi xy-düzlemindeki $x^2 + y^2 = 1$ çemberi olan koninin kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm.
Çemberi $\Gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ biçiminde parametrelendirelim. $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 2$ ile Teorem 23.2 şunu verir:

$$x = (1-\lambda)\cos t, \qquad y = (1-\lambda)\sin t, \qquad z = 2\lambda.$$

Üçüncü denklemden $\lambda = \frac{z}{2}$, dolayısıyla $1 - \lambda = \frac{2-z}{2}$ bulunur. İlk iki denklemin karelerini toplarsak t yok olur:

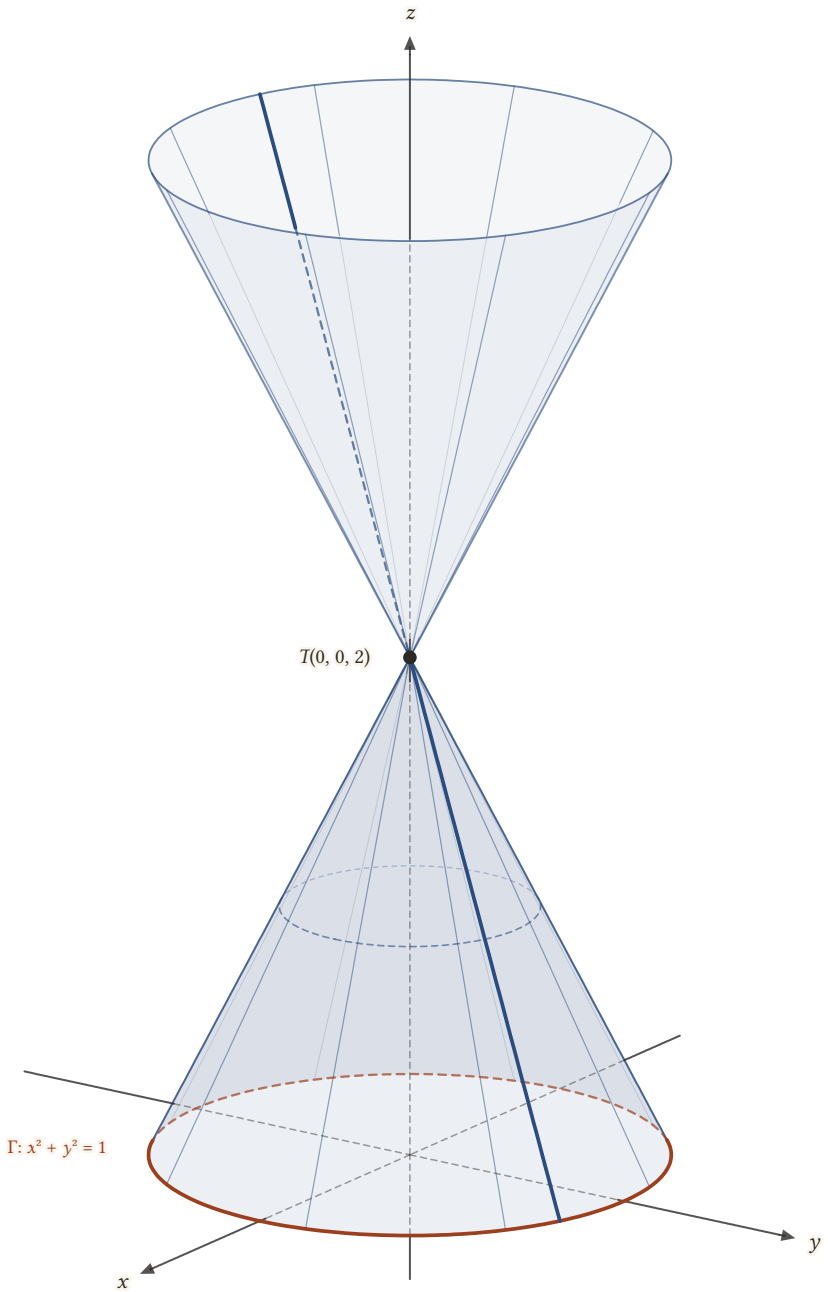
$$x^2 + y^2 = (1-\lambda)^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = (1-\lambda)^2 = \frac{(2-z)^2}{4}.$$

Paydadan kurtulursak koninin denklemi

$$4x^2 + 4y^2 = (2-z)^2$$

olur. Denetleyelim: $z = 0$ koyunca $x^2 + y^2 = 1$, yani dayanak çemberi; $z = 2$ koyunca $x^2 + y^2 = 0$, yani yalnız tepe noktası çıkar. $z = k$ düzlemi koniyi merkezi $(0,0,k)$ ve yarıçapı $\frac{|\,2-k\,|}{2}$ olan bir çember boyunca keser: tepeye yaklaştıkça çember küçülür, tepeyi geçince yeniden büyür.
Tersine, denklemi sağlayan bir (x,y,z) için $\lambda = \frac{z}{2}$ alalım. $z = 2$ ise $x = y = 0$ olur ve nokta tepe noktasıdır ($\lambda = 1$). $z \neq 2$ ise $s = \frac{2-z}{2} \neq 0$ için $\left(\frac{x}{s}\right)^2 + \left(\frac{y}{s}\right)^2 = 1$ olduğundan $\frac{x}{s} = \cos t$, $\frac{y}{s} = \sin t$ olacak bir t vardır. Yani denklemin her çözümü koni üzerindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.9: Dik dairesel koni $4x^2 + 4y^2 = (2 - z)^2$, $0 \le z \le 4$. Üreteçler dayanak çemberi Γ'dan (kırmızı) $T(0, 0, 2)$ tepe noktasından geçerek üst kanada uzanır; kesikli ara çember $z = 1$ kesitidir (yarıçap 1/2).

■

Örnek 23.8 (Tepesi başlangıç noktasında olan eliptik koni). $a, b, c > 0$ olsun. Tepe noktası $O(0,0,0)$ ve dayanak eğrisi $z = c$ düzlemindeki $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi olan koninin denkleminin

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

olduğunu gösteriniz.

 CC BY-NC-SA 4.0

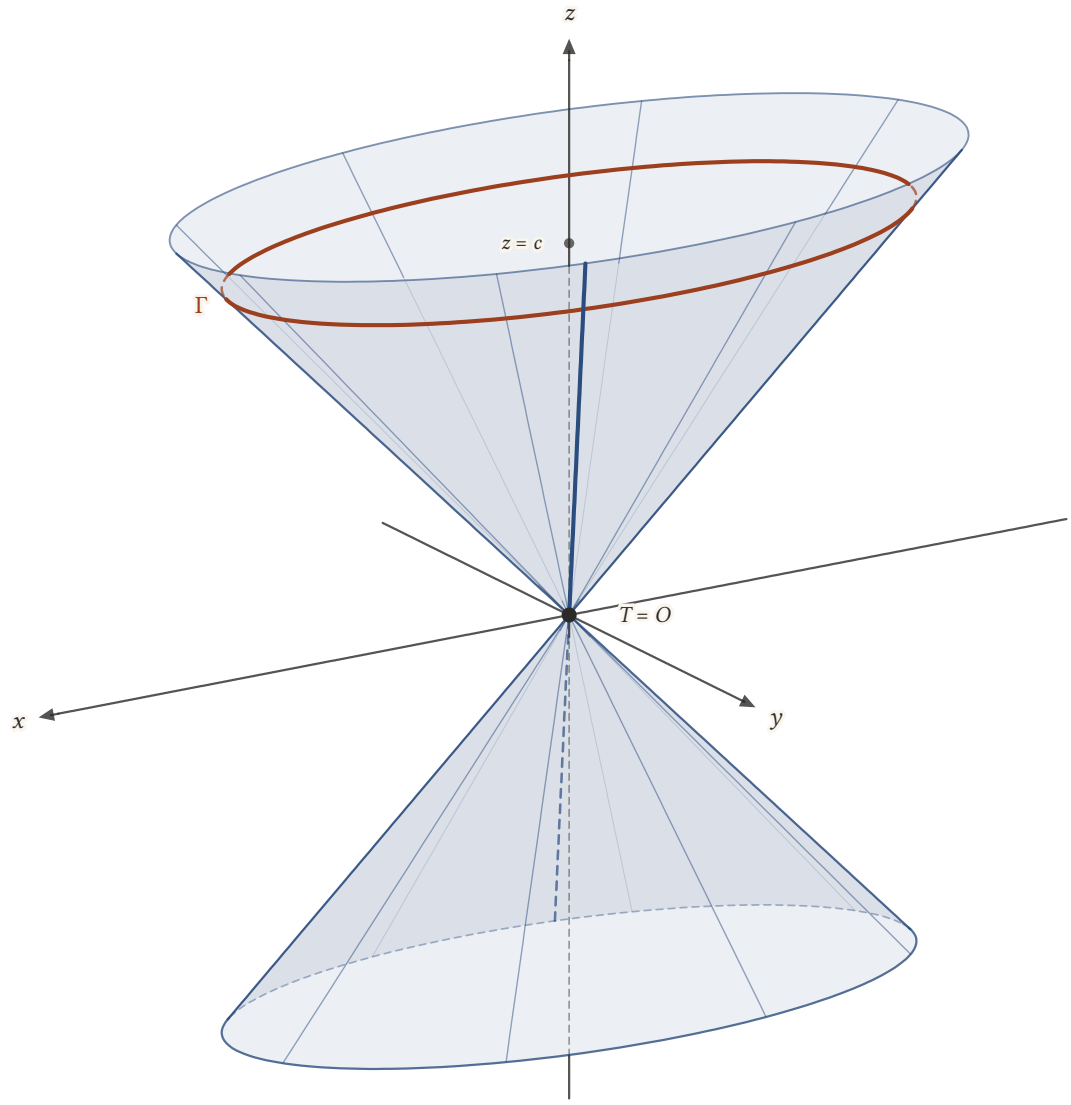
Çözüm.
Elipsi $\Gamma(t) = (a\cos t, b\sin t, c)$ biçiminde parametrelendirelim; gerçekten $\frac{(a\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\sin t)^2}{b^2} = 1$ ve üçüncü koordinat c'dir. Tepe noktası başlangıç noktası olduğundan koninin parametrik denklemindeki (Teorem 23.2) λx_0, λy_0, λz_0 terimleri sıfırdır:

$$x = (1-\lambda)\,a\cos t, \qquad y = (1-\lambda)\,b\sin t, \qquad z = (1-\lambda)\,c.$$

$s = 1-\lambda$ diyelim. Üçüncü denklemden $s = \frac{z}{c}$ olur. İlk iki denklemden $\frac{x}{a} = s\cos t$ ve $\frac{y}{b} = s\sin t$'dir; karelerini toplarsak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = s^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = s^2 = \frac{z^2}{c^2}$$

buluruz. Demek ki koninin her noktası bu denklemi sağlar.
Tersine denklemi sağlayan bir (x, y, z) alalım. $z = 0$ ise sol taraf 0 olmalıdır; bu $x = y = 0$ demektir ve nokta tepe noktasıdır ($s = 0$). $z \neq 0$ ise $s = \frac{z}{c} \neq 0$ için $\left(\frac{x}{as}\right)^2 + \left(\frac{y}{bs}\right)^2 = 1$ olur; dolayısıyla $\frac{x}{as} = \cos t$, $\frac{y}{bs} = \sin t$ olacak bir t vardır ve $\lambda = 1 - s$ ile nokta koni üzerindedir. Böylece denklem koniyi tam olarak belirtir. Bu yüzeyle aşağıda, ikinci derece yüzeyler arasında yeniden karşılaşacağız (Tanım 23.10).



Şekil 23.10: $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$ için tepe noktası başlangıç noktası olan eliptik koni $x^2/4 + y^2 = z^2/4$. Dayanak elipsi Γ (kırmızı) $z = c$ düzlemindedir; üreteçler O'dan geçip alt kanada uzanır, alt kanattaki elips $z = -2$ kesitidir.

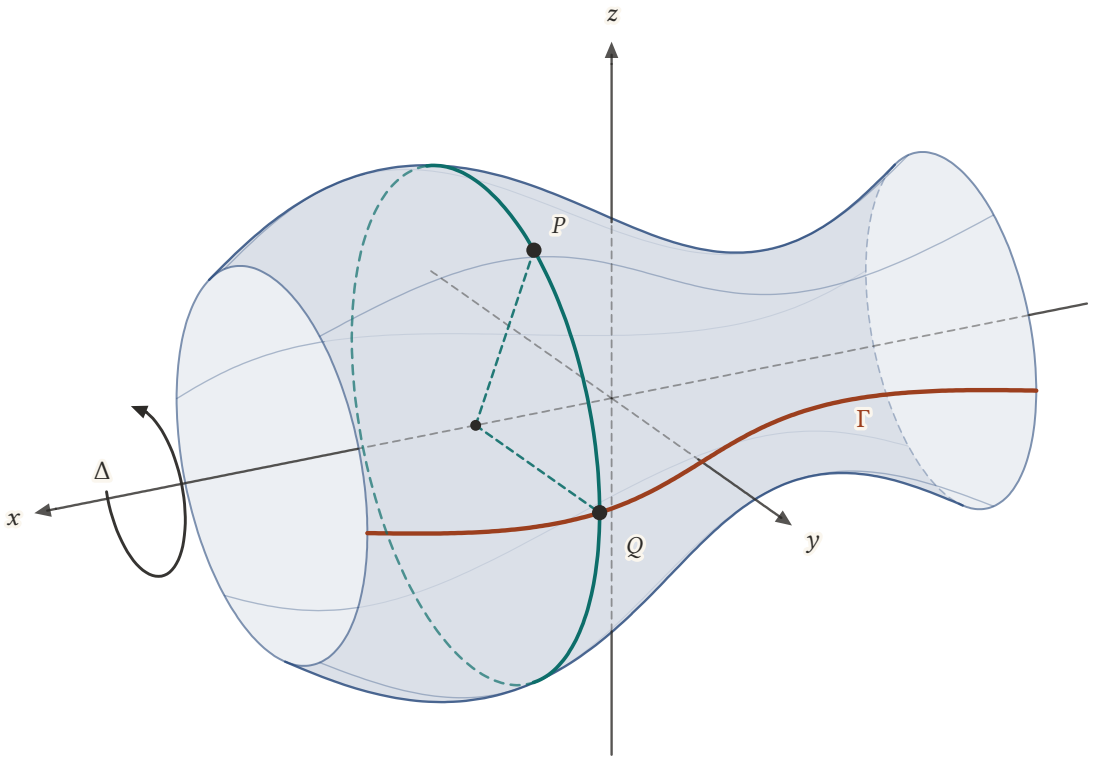
 CC BY-NC-SA 4.0

■

23.5 Dönel Yüzeyler

Bir çömlekçi çarkında dönen bir kilin ya da torna tezgâhında dönen bir tahta parçasının aldığı biçimi düşünelim: her kesit bir çemberdir. Bu yüzeyler, düzlemsel bir eğrinin bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşur.

Tanım 23.6 (Dönel yüzey). Γ eğrisi ile Δ doğrusu aynı düzlemde bulunsun. Γ'nın Δ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeye **dönel yüzey** denir. Δ'ya dönel yüzeyin **ekseni**, Γ eğrisine de dönel yüzeyin **üreteci** denir.



Şekil 23.11: Dönel yüzey: xy-düzlemindeki Γ eğrisi (kırmızı) Δ = x-ekseni etrafında döndürülür. Γ'nın her Q noktası, merkezi eksen üzerinde olan ve eksene dik bir düzlemde kalan bir çember (yeşil) çizer; bu çemberin P noktalarının eksene uzaklığı Q'nunkine eşittir.

Yani üretecin her noktası, eksene dik bir düzlemde, merkezi eksen üzerinde olan bir çember çizer; dönel yüzey bu çemberlerin birleşimidir. Özel olarak dönel yüzeyin eksene dik her düzlemle kesişimi bir çemberdir (ya da bir nokta). Küre, bir çemberin bir çapı etrafında döndürülmesiyle; dik dairesel silindir, bir doğrunun kendisine paralel bir eksen etrafında döndürülmesiyle; dik dairesel koni de bir doğrunun kendisini kesen ve kendisine dik olmayan bir eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeylerdir.

Dönel yüzeyin denklemini bulmak için üretecin bir noktasının çizdiği çembere bakmak yeter. Üreteç xy -düzleminde, eksen de x-ekseni olsun. $Q(x_0, y_0, 0)$ noktası x-ekseni etrafında dönerken $x = x_0$ düzleminden ayrılmaz ve x-eksenine uzaklığı hep $\mid y_0 \mid$ kalır. Bir (x, y, z) noktasının x-eksenine uzaklığı $\sqrt{y^2 + z^2}$ olduğundan Q'nun çizdiği çember

$$x = x_0, \qquad y^2 + z^2 = y_0^2$$

noktalarından oluşur; bu çember $\theta \in [0, 2\pi]$ için $(x_0, y_0 \cos\theta, y_0 \sin\theta)$ biçiminde parametrelendirilir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Önerme 23.2 (Dönel yüzeyin denklemi). *Γ eğrisi xy-düzleminde bulunsun.*

1. *$\Gamma(t) = \big(\ \Gamma_1(t), \Gamma_2(t), 0\ \big)$ ise Γ'nın x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin parametrik denklemi, $\theta \in [0, 2\pi]$ olmak üzere*

$$X(t,\theta) = \big(\ \Gamma_1(t), \Gamma_2(t)\cos\theta, \Gamma_2(t)\sin\theta\ \big)$$

   dir.
2. *Γ'nın denklemi y'ye yalnız y^2 üzerinden bağlıysa, yani Γ: $G(x, y^2) = 0$, $z = 0$ ise, Γ'nın x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin kartezyen denklemi*

$$G(x, y^2 + z^2) = 0$$

   dır. Kısaca: denklemde y^2 yerine $y^2 + z^2$ yazılır.

İspat.
Yüzey, Γ'nın her noktasının x-ekseni etrafında çizdiği çemberlerin birleşimidir.
Birinci kısım. *$\Gamma(t)$ noktası için $x_0 = \Gamma_1(t)$, $y_0 = \Gamma_2(t)$ alınırsa, yukarıda gördüğümüz gibi bu noktanın çizdiği çember $\big(\ \Gamma_1(t), \Gamma_2(t)\cos\theta, \Gamma_2(t)\sin\theta\ \big), \theta \in [0, 2\pi]$, noktalarıdır. t de değiştikçe bu noktalar bütün yüzeyi tarar.*
İkinci kısım. *$P(x, y, z)$ yüzey üzerinde olsun. O zaman P, Γ üzerindeki bir $Q(x_0, y_0, 0)$ noktasının çizdiği çemberin üzerindedir; bu çemberin noktaları $x = x_0$ ve $y^2 + z^2 = y_0^2$ koşullarını sağlar. $Q \in \Gamma$ olduğundan $G(x_0, y_0^2) = 0$'dır; buna göre*

$$G(x, y^2 + z^2) = G(x_0, y_0^2) = 0$$

olur. Tersine $G(x, y^2 + z^2) = 0$ olsun. $y_0 = \sqrt{y^2 + z^2}$ diyelim ve $Q(x, y_0, 0)$ noktasını alalım. $G(x, y_0^2) = G(x, y^2 + z^2) = 0$ olduğundan $Q \in \Gamma$'dır. P ile Q aynı x değerine sahiptir ve P'nin eksene uzaklığı $\sqrt{y^2 + z^2} = y_0$, Q'nunkine eşittir; yani P, Q'nun çizdiği çember üzerindedir ve dolayısıyla yüzeydedir.
■

Koordinatların rolleri değiştirilerek aynı kural öbür eksenler için de geçerlidir. Döndürme ekseni boyunca ölçülen koordinat olduğu gibi kalır; eksene dik koordinatın karesi yerine, eksene dik iki koordinatın karelerinin toplamı yazılır:

- xy-düzlemindeki $G(x^2, y) = 0$ eğrisi y-ekseni etrafında dönerse yüzey $G(x^2 + z^2, y) = 0$ olur.
- yz-düzlemindeki $G(y^2, z) = 0$ eğrisi z-ekseni etrafında dönerse yüzey $G(x^2 + y^2, z) = 0$ olur.

Örnek 23.9 (Elipsin x-ekseni etrafında döndürülmesi). $a, b > 0$ olsun. xy-düzlemindeki $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Elipsin parametrik denklemi $\Gamma(t) = (a\cos t, b\sin t, 0), t \in [0, 2\pi]$'dir. Dönel yüzeyin denklemini veren önermenin (Önerme 23.2) birinci kısmına göre yüzeyin parametrik denklemi

$$X(t,\theta) = (a\cos t, b\sin t\cos\theta, b\sin t\sin\theta),$$

yani

$$\left.\begin{aligned} x(t,\theta) &= a\cos t \\ y(t,\theta) &= b\sin t\cos\theta \\ z(t,\theta) &= b\sin t\sin\theta \end{aligned}\right\}$$

olur. Parametreleri yok edelim. Birinci denklemden $\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t$'dir. Son iki denklemden

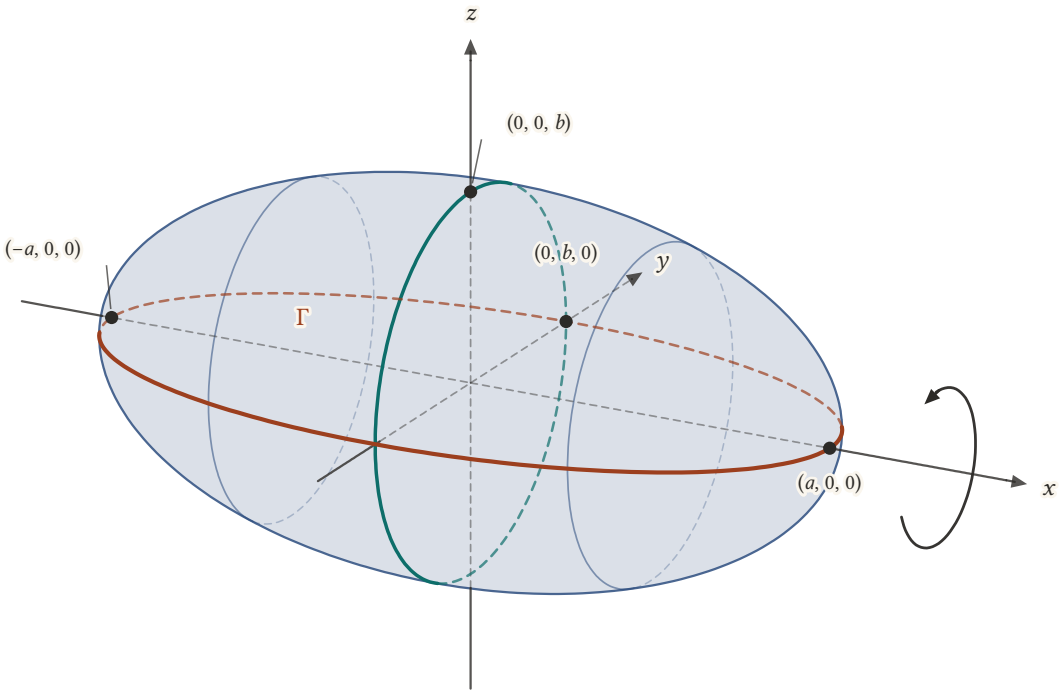
$$y^2 + z^2 = b^2\sin^2 t\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = b^2\sin^2 t$$

dolayısıyla $\frac{y^2+z^2}{b^2} = \sin^2 t$ bulunur. İkisini toplarsak

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

elde ederiz. Aynı sonuca dönel yüzey denkleminin ikinci kısmıyla (Önerme 23.2) doğrudan varılır: elips denkleminde y^2 yerine $y^2 + z^2$ yazmak yeter. Bu yüzey bir **elipsoiddir** (Tanım 23.8); iki yarı ekseni eşit olduğundan ona **dönel elipsoid** de denir.



Şekil 23.12: $a = 2$, $b = 1$ için $x^2/4 + y^2 = 1$ elipsi Γ'nın (kırmızı) x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel elipsoid $x^2/4 + y^2 + z^2 = 1$. Yeşil çember $x = 0$ kesitidir; $x = \pm 1$ kesitleri yarıçapı $\sqrt{3}/2$ olan çemberlerdir.

■

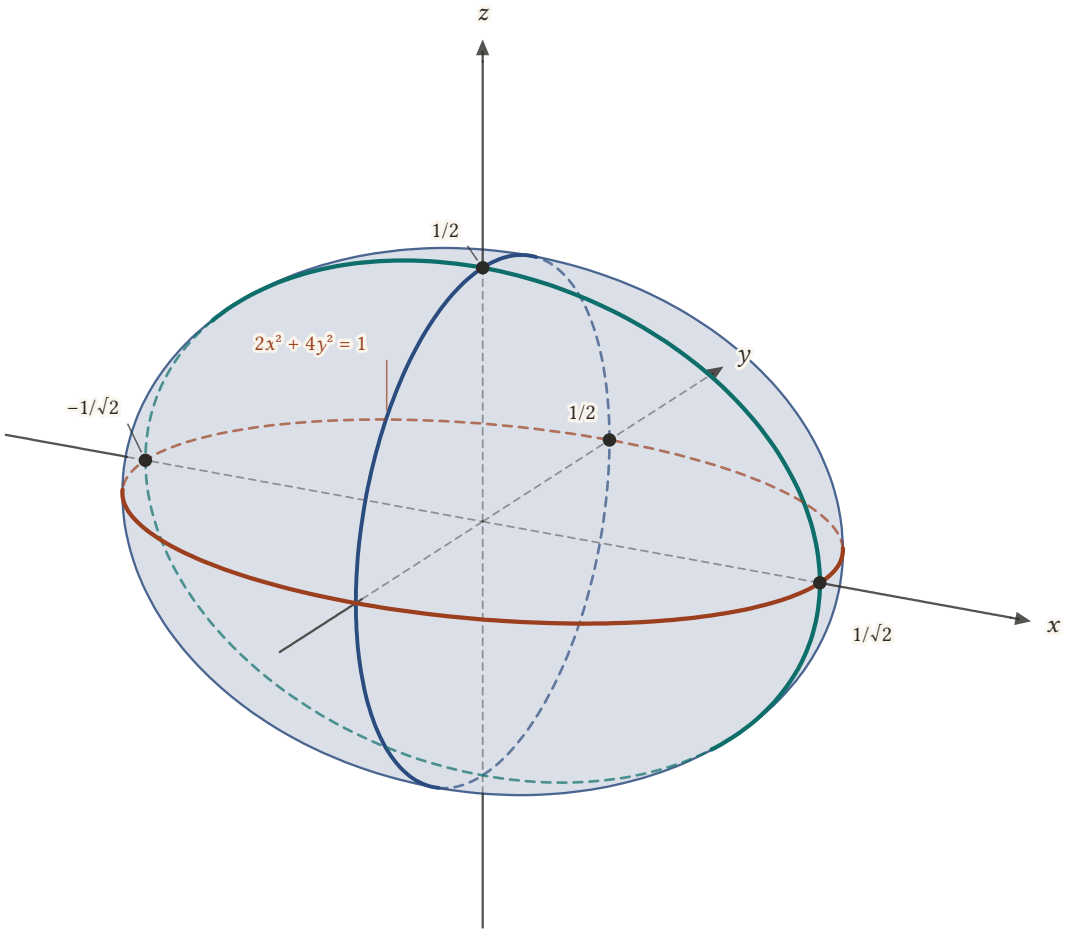
Örnek 23.10 (Denklemi verilen bir dönel elipsoid). $2x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$ denklemiyle verilen yüzeyin hangi eğrinin hangi eksen etrafında döndürülmesiyle elde edildiğini bulunuz ve yüzeyi betimleyiniz.

Çözüm.
y ile z denklemde yalnız $4y^2 + 4z^2 = 4(y^2 + z^2)$ biçiminde geçiyor. Dönel yüzey denklemine göre (Önerme 23.2) bu, xy-düzlemindeki

$$2x^2 + 4y^2 = 1$$

elipsinde y^2 yerine $y^2 + z^2$ yazılmış hâlidir. Demek ki yüzey, bu elipsin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşur. Denklemi $\frac{x^2}{1/2} + \frac{y^2+z^2}{1/4} = 1$ biçiminde yazarsak elipsin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle bulduğumuz kalıba (Örnek 23.9) $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ ve $b = \frac{1}{2}$ ile uyduğunu görürüz.
Yüzey bir dönel elipsoiddir: x-ekseni boyunca $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ noktalarına kadar uzanır; $x = 0$ düzlemindeki kesiti yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan $y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ çemberidir. $a > b$ olduğundan yüzey x-ekseni doğrultusunda uzamış, iğ biçiminde bir cisimdir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.13: Dönel elipsoid $2x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$: xy-düzlemindeki iz $2x^2 + 4y^2 = 1$ elipsi (kırmızı, üreteç), xz-düzlemindeki iz $2x^2 + 4z^2 = 1$ elipsi (yeşil), yz-düzlemindeki iz yarıçapı $1/2$ olan çember (mavi). Yüzey x-ekseni boyunca $\pm 1/\sqrt{2}$'ye uzanır.

■

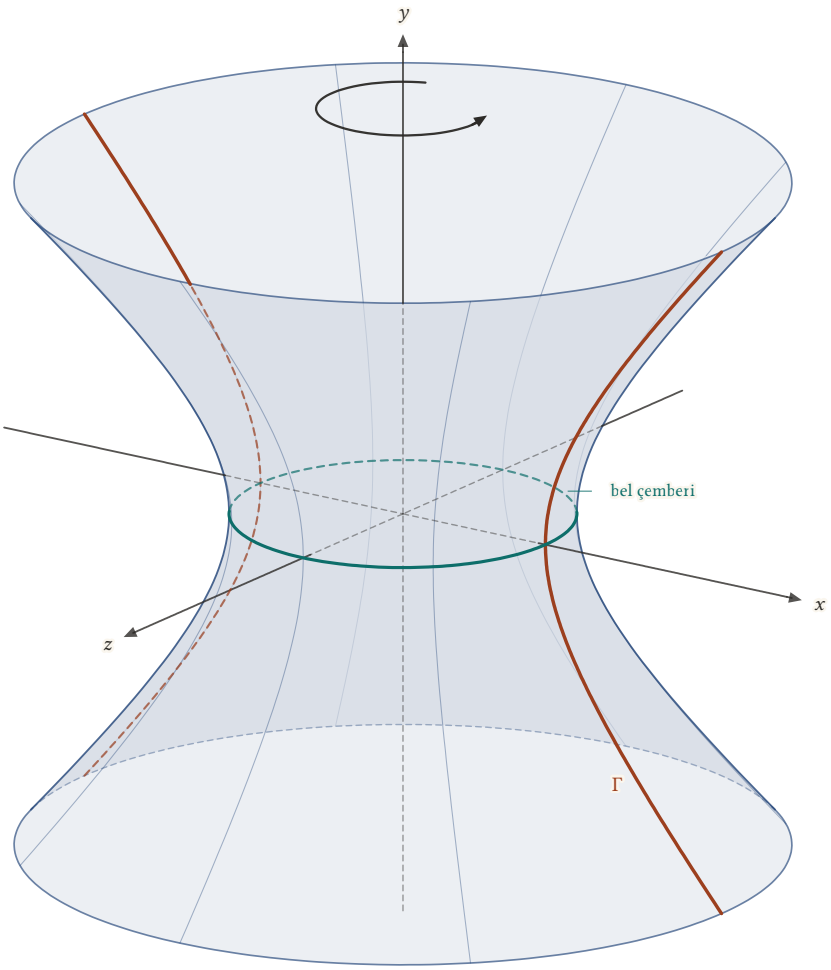
Örnek 23.11 (Hiperbolün y-ekseni etrafında döndürülmesi). $a, b > 0$ olsun. xy-düzlemindeki $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünün y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Döndürme ekseni y-ekseni olduğundan y olduğu gibi kalır; hiperbolün denkleminde x yalnız x^2 olarak geçtiği için dönel yüzey denkleminden (Önerme 23.2) sonra verilen kurala göre x^2 yerine $x^2 + z^2$ yazarız:

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{yani} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Hiperbolün iki kolu da y-ekseni etrafında dönerken aynı yüzeyi süpürür: $y = k$ düzlemindeki kesit, yarıçapı $a\sqrt{1 + \frac{k^2}{b^2}}$ olan $x^2 + z^2 = a^2\left(1 + \frac{k^2}{b^2}\right)$ çemberidir. Bu çember hiçbir k için boş değildir; en küçüğü $y = 0$'daki yarıçapı a olan "bel" çemberidir. Yüzey tek parçadan oluşan, kum saati biçiminde bir yüzeydir; ona **tek kanatlı hiperboloid** denir (Tanım 23.11).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.14: $a = b = 1$ için $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün (kırmızı, Γ) y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan tek kanatlı hiperboloid $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $-2 \le y \le 2$. Yeşil çember $y = 0$'daki bel çemberidir; uçlardaki çemberlerin yarıçapı $\sqrt{5}$'tir.

■

Örnek 23.12 (Denklemi verilen bir tek kanatlı dönel hiperboloid). $2x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 1$ denklemiyle verilen yüzeyi betimleyiniz.

Çözüm.
x ile z denklemde yalnız $2x^2 + 2z^2 = 2(x^2 + z^2)$ biçiminde geçiyor. Bu, xy-düzlemindeki

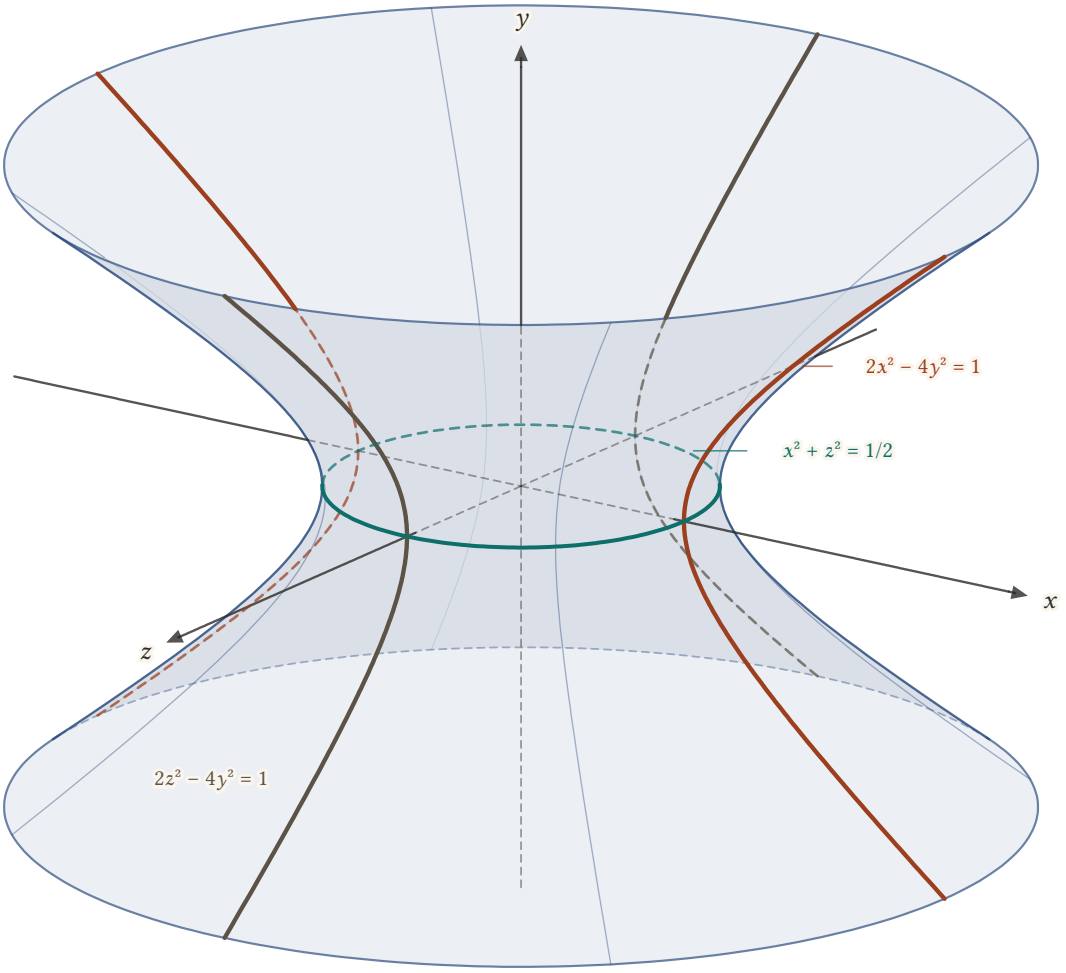
$$2x^2 - 4y^2 = 1, \qquad \text{yani} \qquad \frac{x^2}{1/2} - \frac{y^2}{1/4} = 1$$

hiperbolünde x^2 yerine $x^2 + z^2$ yazılmış hâlidir. Dolayısıyla yüzey, bu hiperbolün y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan tek kanatlı hiperboloiddir; hiperbolün y-ekseni etrafında döndürülmesiyle bulunan kalıba (Örnek 23.11) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{2}$ ile uyar.
Bel çemberi $y = 0$ düzleminde $x^2 + z^2 = \frac{1}{2}$, yani yarıçapı $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ olan çemberdir. $y = k$ düzleminde kesit

$$x^2 + z^2 = \frac{1 + 4k^2}{2}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

çemberidir; örneğin $y = \pm 1$ için yarıçap $\sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1{,}58$ olur. $x = 0$ düzlemindeki iz $2z^2 - 4y^2 = 1$ hiperbolüdür.



Şekil 23.15: Tek kanatlı dönel hiperboloid $2x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 1$, $-1{,}2 \le y \le 1{,}2$ (y-ekseni dikey). Bel çemberi $x^2 + z^2 = 1/2$ (yeşil); xy-düzlemindeki $2x^2 - 4y^2 = 1$ hiperbolü (kırmızı) üreteçtir, yz-düzlemindeki iz $2z^2 - 4y^2 = 1$ hiperbolüdür.

■

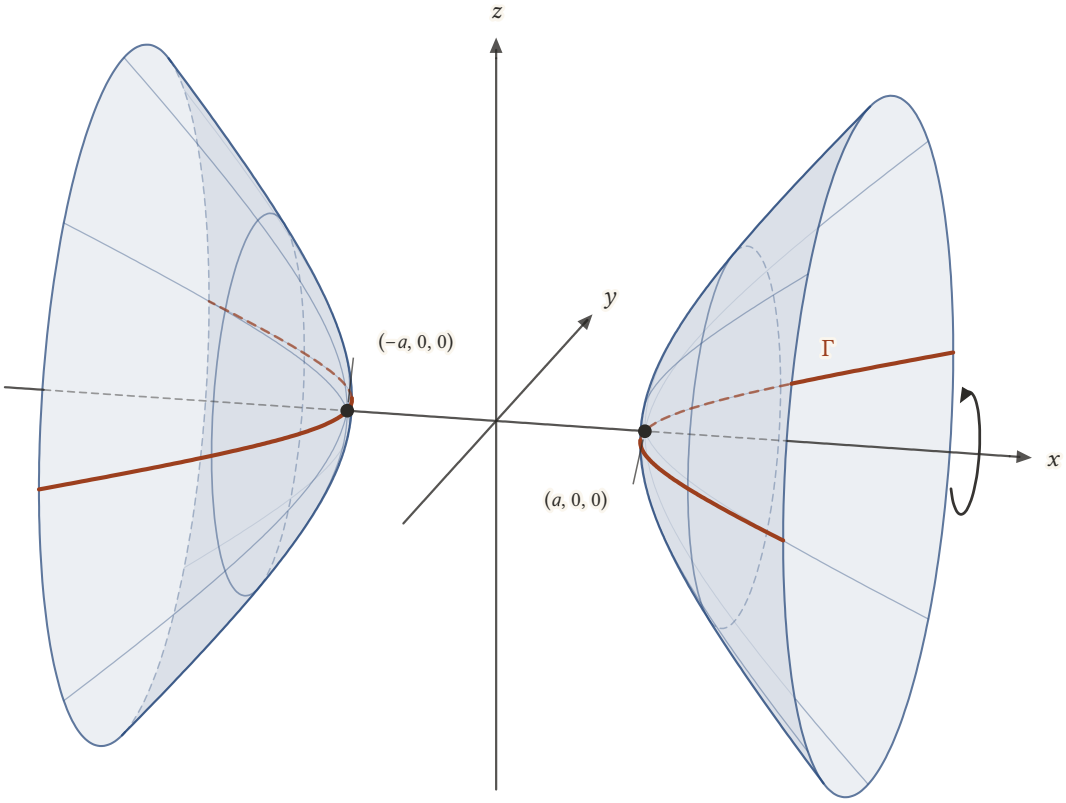
Örnek 23.13 (Hiperbolün x-ekseni etrafında döndürülmesi). $a, b > 0$ olsun. xy-düzlemindeki $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolünün x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Bu kez eksen x-eksenidir; x olduğu gibi kalır, y^2 yerine $y^2 + z^2$ yazılır (Önerme 23.2):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1, \qquad \text{yani} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

$x = k$ düzlemindeki kesit $y^2 + z^2 = b^2\left(\frac{k^2}{a^2} - 1\right)$'dir. Sağ taraf ancak $|\,k\,| \ge a$ iken negatif değildir: $|\,k\,| < a$ için kesit boştur, $k = \pm a$ için tek bir noktadır, $|\,k\,| > a$ için bir çemberdir. Demek ki yüzey $-a < x < a$ bölgesine hiç girmez ve biri $x \ge a$, öbürü $x \le -a$ bölgesinde kalan iki ayrı parçadan oluşur; her parça hiperbolün bir kolunun dönmesiyle oluşur. Bu yüzeye **iki kanatlı hiperboloid** denir (Tanım 23.12).

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.16: $a = b = 1$ için $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün (kırmızı, Γ) x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan iki kanatlı hiperboloid $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, $|x| \le 2{,}5$. Kanatlar köşelerde başlar; $-1 < x < 1$ bölgesinde yüzey yoktur.

■

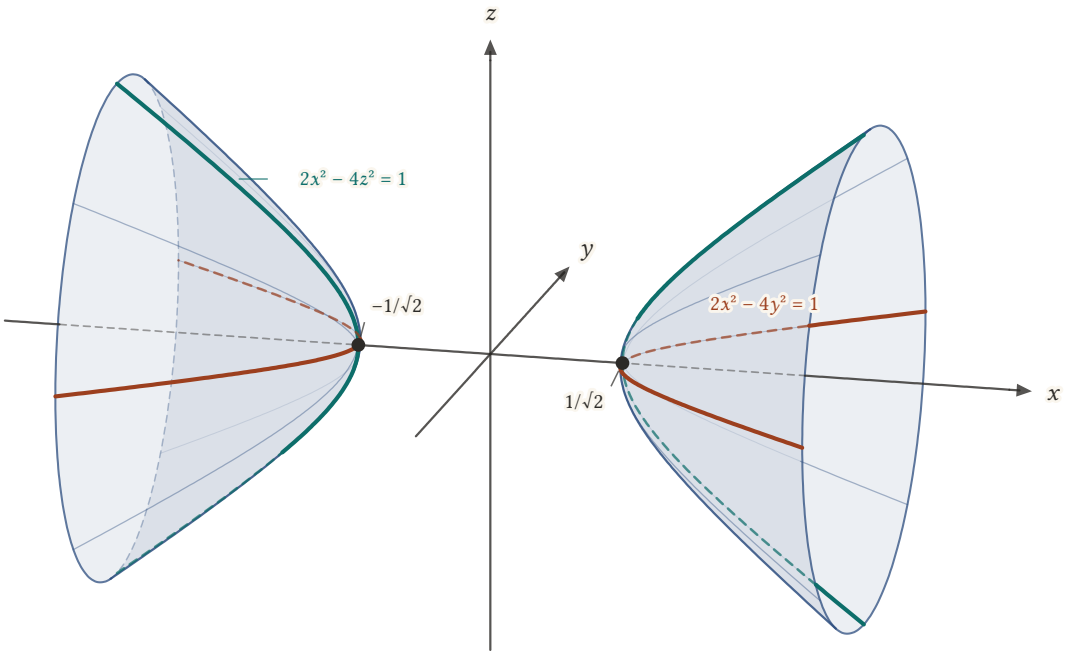
Örnek 23.14 (Denklemi verilen bir iki kanatlı dönel hiperboloid). $2x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 1$ denklemiyle verilen yüzeyi betimleyiniz.

Çözüm.
y ile z yalnız $-4(y^2 + z^2)$ biçiminde geçiyor; yüzey, xy-düzlemindeki $2x^2 - 4y^2 = 1$ hiperbolünün x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşur. Hiperbolün x-ekseni etrafında döndürülmesiyle bulunan kalıba (Örnek 23.13) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{2}$ ile uyar; yüzey iki kanatlı hiperboloiddir.
Köşeler $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \approx (\pm 0{,}71, 0, 0)$ noktalarıdır. $x = k$ düzlemindeki kesit

$$y^2 + z^2 = \frac{2k^2 - 1}{4}$$

dür; bu, $|\,k\,| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ iken bir çemberdir. Örneğin $x = \pm 2$ için yarıçap $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}32$'dir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.17: İki kanatlı dönel hiperboloid $2x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 1$, $|x| \le 2$: xy-düzlemindeki iz $2x^2 - 4y^2 = 1$ (kırmızı), xz-düzlemindeki iz $2x^2 - 4z^2 = 1$ (yeşil); $x = \pm 2$'deki uç çemberlerin yarıçapı $\sqrt{7}/2$'dir. Köşeler $(\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0)$ noktalarıdır.

■

23.6 İkinci Derece Yüzeyler

Dönel yüzey örneklerinde karşılaştığımız elipsoid ve hiperboloidlerin denklemleri x, y, z'nin kareleriyle kurulmuştu. Şimdi bu denklemleri dönme koşulundan kurtarıp genel hâlleriyle ele alacağız. x, y, z'ye göre ikinci dereceden bir denklemle verilen yüzeylere **ikinci derece yüzeyler** denir. Düzlemdeki konikler gibi (bkz. Koniklerin Sınıflandırılması), genel ikinci derece denklem de uygun bir öteleme ve döndürmeyle birkaç standart biçimden birine getirilebilir. Biz burada karışık terim (xy, yz, zx) içermeyen denklemlerle çalışacağız.

Bir yüzeyin biçimini anlamanın en etkili yolu, onu koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle kesmektir.

Tanım 23.7 (İz). Bir yüzeyin bir düzlemle kesişimine yüzeyin o düzlemdeki **izi** (kesiti) denir. Özellikle $x = k$, $y = k$ ya da $z = k$ biçimindeki, koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle alınan izler kullanılır.

Yani izleri bulmak için yüzeyin denkleminde değişkenlerden birine sabit bir değer verir, kalan iki değişkenli denklemin düzlemde hangi eğriyi belirttiğine bakarız. Bir yüzeyin birkaç izini üst üste düşündüğümüzde, tıpkı bir bilgisayar tomografisinin kesitlerinden organın biçimini kurması gibi, yüzeyin biçimi ortaya çıkar.

Aşağıda $a, b, c > 0$ sabitlerdir. Denklemlerde değişkenler yalnız çift kuvvetlerle geçtiğinden (paraboloidlerde z dışında) x yerine $-x$ yazmak denklemi değiştirmez; bu yüzeyler koordinat düzlemlerine göre simetriktir; paraboloidler ise yalnız $x = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerine göre simetriktir (bkz. Uzayda Simetri).

23.6.1 Elipsoid

Tanım 23.8 (Elipsoid).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

 CC BY-NC-SA 4.0

denklemiyle verilen yüzeye **elipsoid** denir. a, b, c sayılarına elipsoidin **yarı eksenleri** denir.

Yani elipsoid, küreyi eksen doğrultularında farklı oranlarda germekle elde edilen, yumurta ya da mercimek biçiminde kapalı bir yüzeydir. Sol taraftaki her terim negatif olmadığından her terim en çok 1'dir; buradan $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$ çıkar ve yüzey bir kutunun içinde kalır. Koordinat eksenlerini $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ noktalarında keser. $z = k$ izi, $|k| < c$ iken

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$$

elipsidir; $|k| = c$ iken tek nokta, $|k| > c$ iken boştur. Öbür izler de aynı biçimde elipstir. $a = b = c$ ise elipsoid küre, iki yarı eksen eşitse dönel elipsoid olur.

Örnek 23.15 (Bir elipsoidin yarı eksenleri ve izleri). $2x^2 + 3y^2 + 9z^2 = 1$ elipsoidinin yarı eksenlerini ve koordinat düzlemlerindeki izlerini bulunuz.

Çözüm.
Katsayıları paydaya alarak denklemi standart biçime getirelim:

$$\frac{x^2}{1/2} + \frac{y^2}{1/3} + \frac{z^2}{1/9} = 1.$$

Tanım 23.8 ile karşılaştırırsak $a^2 = \frac{1}{2}$, $b^2 = \frac{1}{3}$, $c^2 = \frac{1}{9}$, yani

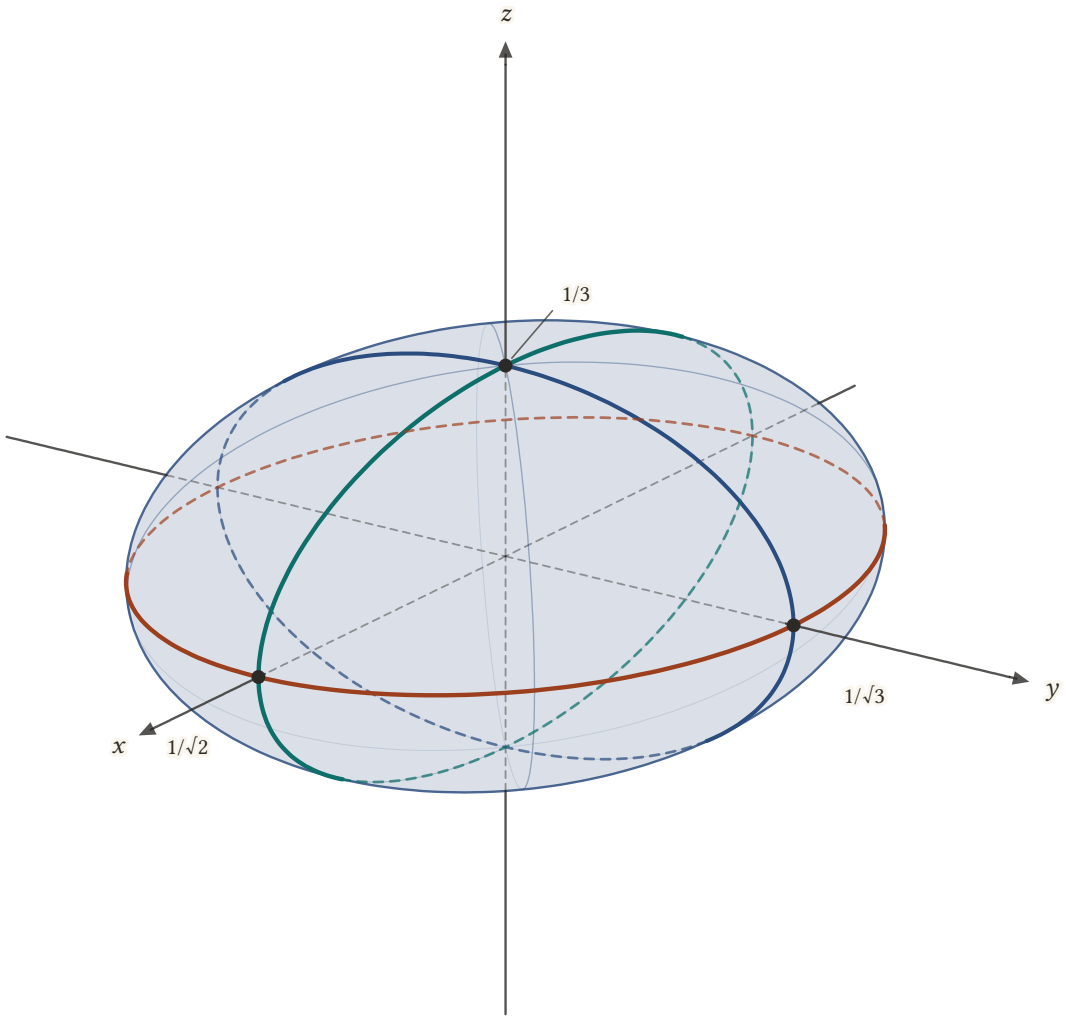
$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58, \qquad c = \frac{1}{3}$$

bulunur. Yüzey eksenleri $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$, $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ ve $\left(0, 0, \pm\frac{1}{3}\right)$ noktalarında keser.
Koordinat düzlemlerindeki izleri, ilgili değişkene 0 vererek buluruz:

- xy-düzleminde ($z = 0$): $2x^2 + 3y^2 = 1$ elipsi,
- xz-düzleminde ($y = 0$): $2x^2 + 9z^2 = 1$ elipsi,
- yz-düzleminde ($x = 0$): $3y^2 + 9z^2 = 1$ elipsi.

c öbür yarı eksenlerden belirgin biçimde küçük olduğundan yüzey z doğrultusunda basık, mercimek biçimindedir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.18: Elipsoid $2x^2 + 3y^2 + 9z^2 = 1$ ve koordinat düzlemlerindeki izleri: $2x^2 + 3y^2 = 1$ (kırmızı, $z = 0$), $2x^2 + 9z^2 = 1$ (yeşil, $y = 0$), $3y^2 + 9z^2 = 1$ (mavi, $x = 0$). $c = 1/3$ küçük olduğundan yüzey z doğrultusunda basıktır.

■

23.6.2 Eliptik paraboloid

Tanım 23.9 (Eliptik paraboloid).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

denklemiyle verilen yüzeye **eliptik paraboloid** denir. $O(0,0,0)$ noktasına paraboloidin **köşesi**, z-eksenine de **ekseni** denir.

Yani eliptik paraboloid, yukarı doğru açılan bir kâse ya da çanak anten biçimindedir. Sol taraf negatif olmadığından yüzeyin her noktasında $z \geq 0$'dır ve en alçak nokta köşedir. $z = k > 0$ izi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$ elipsidir ve k büyüdükçe genişler. $x = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerindeki izler ise $z = \frac{y^2}{b^2}$ ve $z = \frac{x^2}{a^2}$ parabolleridir; adı buradan gelir: izlerin bir kısmı elips, bir kısmı paraboldür. $a = b$ ise yüzey, $z = \frac{x^2}{a^2}$ parabolünün z-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan **dönel paraboloiddir**.

 CC BY-NC-SA 4.0

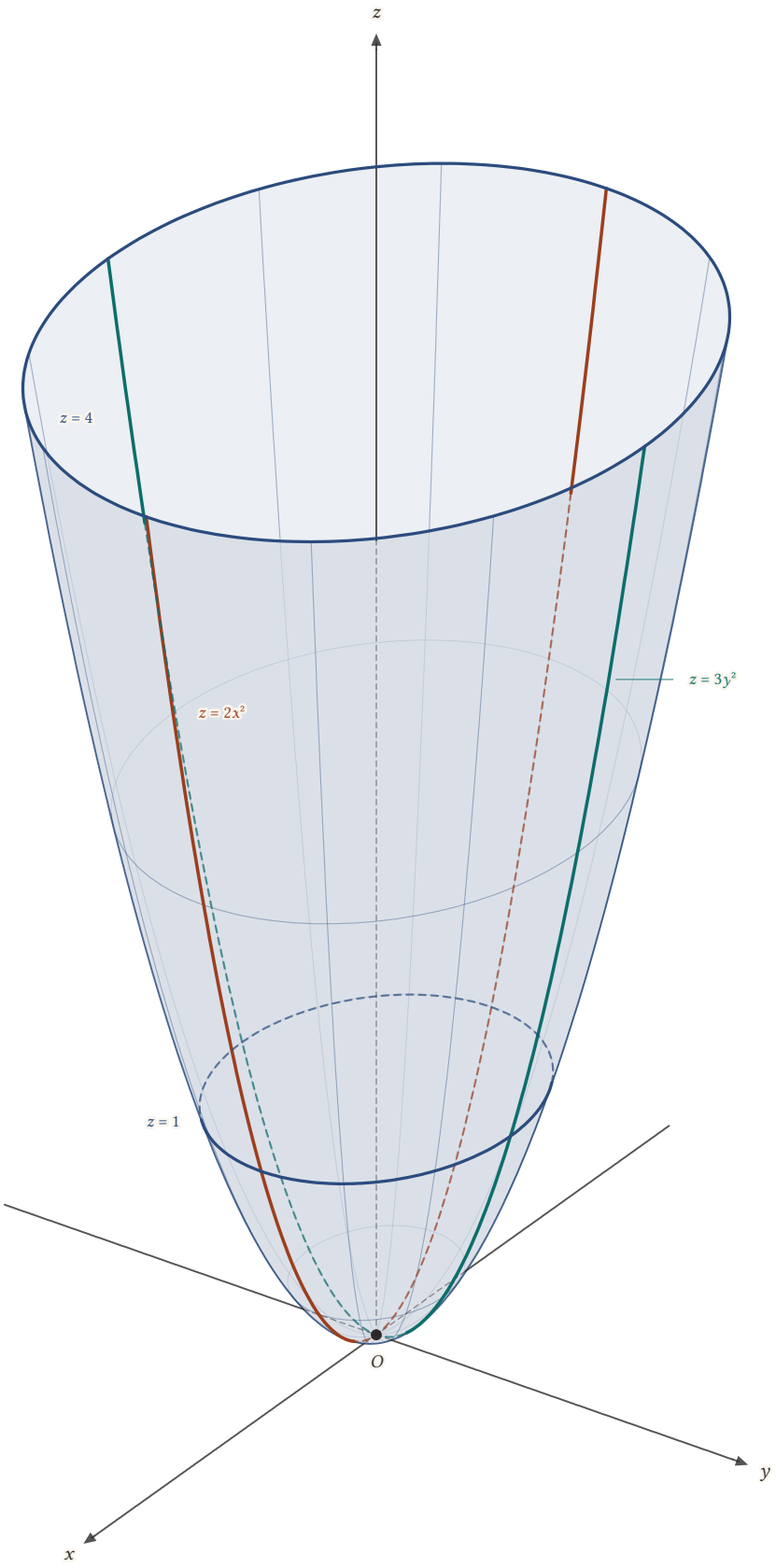
Örnek 23.16 (Bir eliptik paraboloidin izleri). $2x^2 + 3y^2 = z$ eliptik paraboloidinin izlerini bulunuz.

Çözüm.
Denklem $\frac{x^2}{1/2} + \frac{y^2}{1/3} = z$ biçiminde yazılır; eliptik paraboloidin standart denklemiyle (Tanım 23.9) karşılaştırınca $a^2 = \frac{1}{2}$, $b^2 = \frac{1}{3}$'tür.

- $z = k$ düzleminde: $2x^2 + 3y^2 = k$. $k < 0$ için boş küme, $k = 0$ için yalnız köşe O, $k > 0$ için yarı eksenleri $\sqrt{\frac{k}{2}}$ ve $\sqrt{\frac{k}{3}}$ olan bir elips. Örneğin $z = 1$'de yarı eksenler $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ ve $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$; $z = 4$'te $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ ve $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}15$'tir.
- xz-düzleminde ($y = 0$): yukarı açılan $z = 2x^2$ parabolü.
- yz-düzleminde ($x = 0$): yukarı açılan $z = 3y^2$ parabolü.

y yönündeki parabol daha dik olduğundan kâse y doğrultusunda daha dardır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.19: Eliptik paraboloid $2x^2 + 3y^2 = z$, $0 \le z \le 4$. xz- ve yz-düzlemlerindeki izler $z = 2x^2$ (kırmızı) ve $z = 3y^2$ (yeşil) parabolleridir; $z = 1$ ve $z = 4$ düzlemlerindeki izler elipstir. Köşe O'dur.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

23.6.3 Eliptik koni

Tanım 23.10 (Eliptik koni).

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

denklemiyle verilen yüzeye **eliptik koni** denir.

Yani eliptik koni, tepe noktası başlangıç noktasında olan ve $z=c$ düzlemindeki $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsine dayanan konidir (bkz. Örnek 23.8). $z=k\neq 0$ izi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}$ elipsidir, $z=0$ izi yalnız tepe noktasıdır. $y=0$ düzlemindeki iz $\frac{x^2}{a^2}=\frac{z^2}{c^2}$, yani $x=\pm\frac{a}{c}z$ doğru çiftidir; $x=0$ düzleminde de $y=\pm\frac{b}{c}z$ doğru çifti bulunur. Bu doğrular koninin üreteçlerinden dördüdür. $a=b$ ise koni dik dairesel konidir.

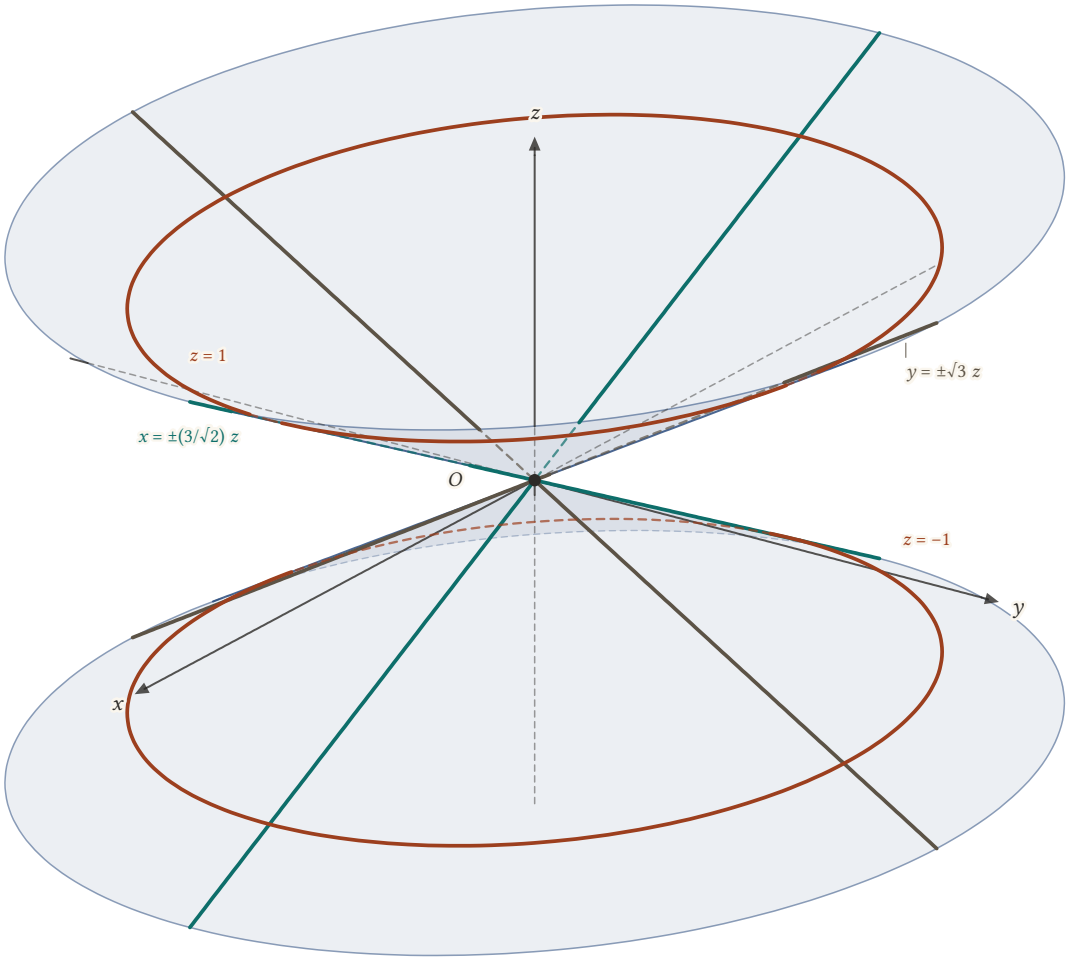
Örnek 23.17 (Bir eliptik koninin izleri). $2x^2+3y^2=9z^2$ eliptik konisinin izlerini bulunuz.

Çözüm.
Denklemi $\frac{x^2}{1/2}+\frac{y^2}{1/3}=\frac{z^2}{1/9}$ biçiminde yazarsak eliptik koninin standart denklemiyle (Tanım 23.10) karşılaştırınca $a^2=\frac{1}{2}$, $b^2=\frac{1}{3}$, $c^2=\frac{1}{9}$ olur.

- $z=k$ düzleminde: $2x^2+3y^2=9k^2$. $k=0$ için yalnız tepe noktası O; $k\neq 0$ için yarı eksenleri $\frac{3\,|\,k\,|}{\sqrt{2}}$ ve $\sqrt{3}\,|\,k\,|$ olan bir elips. Örneğin $z=\pm 1$'de yarı eksenler $\frac{3}{\sqrt{2}}\approx 2{,}12$ ve $\sqrt{3}\approx 1{,}73$'tür.
- xz-düzleminde ($y=0$): $2x^2=9z^2$, yani $x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\,z$ doğru çifti.
- yz-düzleminde ($x=0$): $3y^2=9z^2$, yani $y=\pm\sqrt{3}\,z$ doğru çifti.

İki kanat tepe noktasında birleşir; $z=k$ ve $z=-k$ izleri aynı elipstir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.20: Eliptik koni $2x^2 + 3y^2 = 9z^2$, $|z| \le 1{,}3$. $z = \pm 1$ düzlemlerindeki izler aynı $2x^2 + 3y^2 = 9$ elipsidir (kırmızı); xz-düzlemindeki iz $x = \pm(3/\sqrt{2})z$ (yeşil), yz-düzlemindeki iz $y = \pm\sqrt{3}\,z$ doğru çiftidir. İki kanat O'da birleşir.

■

23.6.4 Tek kanatlı hiperboloid

Tanım 23.11 (Tek kanatlı hiperboloid).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

denklemiyle verilen yüzeye **tek kanatlı hiperboloid** denir. Negatif işaretli terimin değişkenine karşılık gelen z-eksenine hiperboloidin **ekseni** denir.

Yani tek kanatlı hiperboloid, belden ince, iki uca doğru genişleyen, soğutma kulesi ya da kum saati biçiminde tek parça bir yüzeydir. $z = k$ izi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

elipsidir; sağ taraf her zaman pozitif olduğundan bu iz hiçbir k için boş değildir ve en küçüğü $z = 0$'daki **bel elipsi**dir. $x = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerindeki izler ise $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ve $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ hiperbolleridir. Eksi

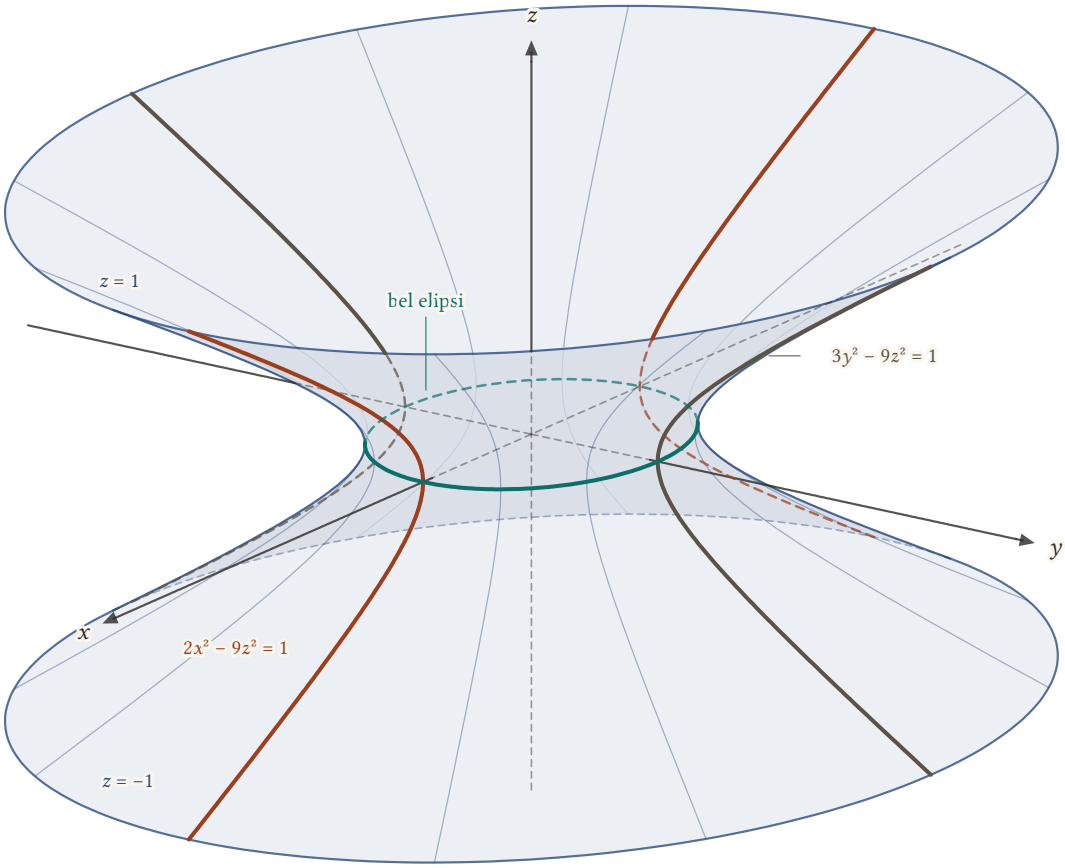
 CC BY-NC-SA 4.0

işaret başka bir terimin önünde dursaydı, hiperboloidin ekseni o terimin değişkeninin ekseni olurdu. $a = b$ ise yüzey, hiperbolün döndürülmesiyle elde ettiğimiz tek kanatlı hiperboloide (Örnek 23.11) benzer bir dönel hiperboloiddir.

Örnek 23.18 (Bir tek kanatlı hiperboloidin izleri). $2x^2 + 3y^2 - 9z^2 = 1$ hiperboloidinin izlerini bulunuz.

Çözüm.
Standart biçim $\frac{x^2}{1/2} + \frac{y^2}{1/3} - \frac{z^2}{1/9} = 1$'dir. Yalnız bir terim eksi işaretli olduğundan yüzey, ekseni z-ekseni olan tek kanatlı hiperboloiddir.

- $z = k$ düzleminde: $2x^2 + 3y^2 = 1 + 9k^2$ elipsi. Bel elipsi ($k = 0$) $2x^2 + 3y^2 = 1$'dir ve yarı eksenleri $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$, $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58$'dir. $z = \pm 1$'de $2x^2 + 3y^2 = 10$ olur; yarı eksenler $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ ve $\sqrt{\frac{10}{3}} \approx 1{,}83$'tür.
- xz-düzleminde ($y = 0$): $2x^2 - 9z^2 = 1$ hiperbolü; köşeleri $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$.
- yz-düzleminde ($x = 0$): $3y^2 - 9z^2 = 1$ hiperbolü; köşeleri $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$.



Şekil 23.21: Tek kanatlı hiperboloid $2x^2 + 3y^2 - 9z^2 = 1$, $|z| \le 1$. $z = 0$'daki bel elipsi $2x^2 + 3y^2 = 1$ (yeşil), $z = \pm 1$'deki uç elipsler $2x^2 + 3y^2 = 10$'dur; xz- ve yz-düzlemlerindeki izler $2x^2 - 9z^2 = 1$ (kırmızı) ve $3y^2 - 9z^2 = 1$ hiperbolleridir.

■

23.6.5 İki kanatlı hiperboloid

Tanım 23.12 (İki kanatlı hiperboloid).

 CC BY-NC-SA 4.0

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

denklemiyle verilen yüzeye **iki kanatlı hiperboloid** denir. Pozitif işaretli terimin değişkenine karşılık gelen x-eksenine hiperboloidin **ekseni**, $(\pm a, 0, 0)$ noktalarına **köşeleri** denir.

Yani iki kanatlı hiperboloid, birbirine karşı açılan iki ayrı kâseden oluşur. $x = k$ izi

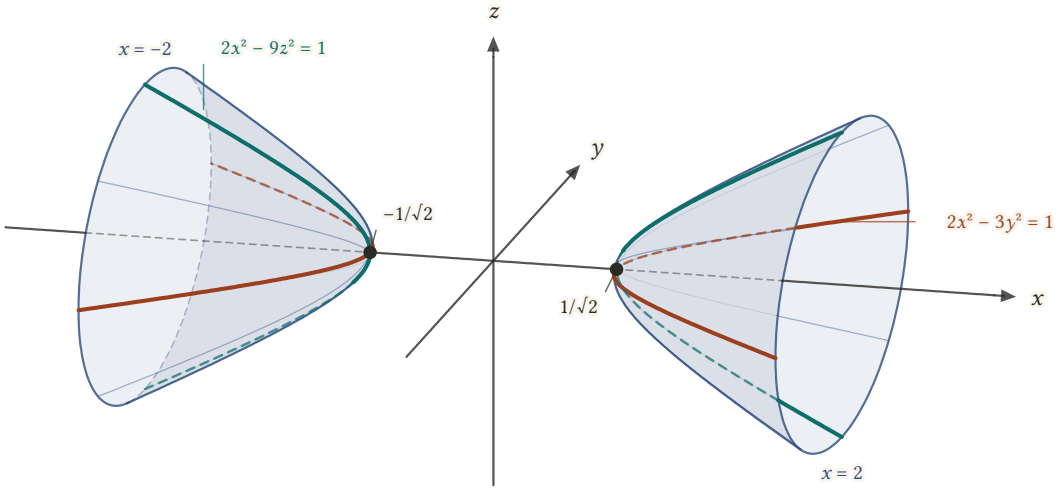
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1$$

dir: $|\,k\,| < a$ iken sağ taraf negatif olduğundan iz boştur, $|\,k\,| = a$ iken tek noktadır (köşe), $|\,k\,| > a$ iken bir elipstir. Yüzey bu yüzden $-a < x < a$ şeridine girmez ve iki parçaya ayrılır. $y = 0$ ve $z = 0$ düzlemlerindeki izler $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ve $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hiperbolleridir. Tek kanatlıdan farkı işaret sayısındadır: tek kanatlıda bir eksi, iki kanatlıda iki eksi vardır.

Örnek 23.19 (Bir iki kanatlı hiperboloidin izleri). $2x^2 - 3y^2 - 9z^2 = 1$ hiperboloidinin izlerini bulunuz.

Çözüm.
Standart biçim $\frac{x^2}{1/2} - \frac{y^2}{1/3} - \frac{z^2}{1/9} = 1$'dir. İki terim eksi işaretli olduğundan yüzey, ekseni x-ekseni olan iki kanatlı hiperboloiddir; $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğundan köşeler $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \approx (\pm 0{,}71, 0, 0)$'dır.

- $x = k$ düzleminde: $3y^2 + 9z^2 = 2k^2 - 1$. $|\,k\,| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ için boş, $|\,k\,| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ için köşe, $|\,k\,| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ için elips. Örneğin $x = \pm 2$'de $3y^2 + 9z^2 = 7$ olur; yarı eksenler $\sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1{,}53$ ve $\frac{\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}88$'dir.
- xy-düzleminde ($z = 0$): $2x^2 - 3y^2 = 1$ hiperbolü.
- xz-düzleminde ($y = 0$): $2x^2 - 9z^2 = 1$ hiperbolü.
- yz-düzleminde ($x = 0$): $-3y^2 - 9z^2 = 1$ denkleminin çözümü yoktur; yüzey yz-düzlemini kesmez.



Şekil 23.22: İki kanatlı hiperboloid $2x^2 - 3y^2 - 9z^2 = 1$, $|x| \le 2$: xy-düzlemindeki iz $2x^2 - 3y^2 = 1$ (kırmızı), xz-düzlemindeki iz $2x^2 - 9z^2 = 1$ (yeşil); $x = \pm 2$ düzlemlerindeki uç elipsler $3y^2 + 9z^2 = 7$'dir. Yüzey yz-düzlemini kesmez.

■

23.6.6 Hiperbolik paraboloid

Tanım 23.13 (Hiperbolik paraboloid).

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

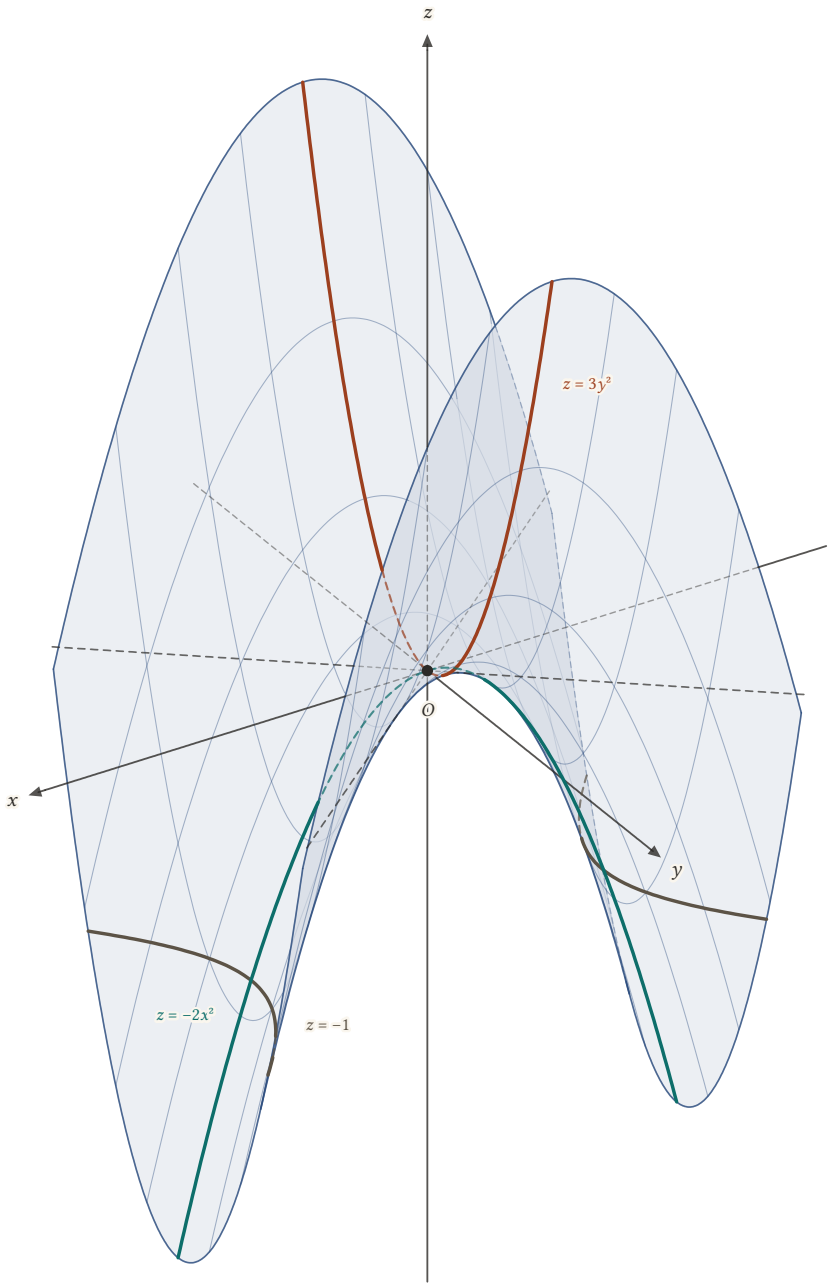
denklemiyle verilen yüzeye **hiperbolik paraboloid** denir.

Yani hiperbolik paraboloid bir at eyerine ya da iki tepe arasındaki bir dağ geçidine benzer. $x=0$ düzlemindeki iz $z=\frac{y^2}{b^2}$, yukarı açılan bir paraboldür; $y=0$ düzlemindeki iz $z=-\frac{x^2}{a^2}$, aşağı açılan bir paraboldür. Başlangıç noktası, bir yönde en alçak, öbür yönde en yüksek noktadır; böyle bir noktaya **eyer noktası** denir. $z=k\neq 0$ izi $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=k$ hiperbolüdür: $k>0$ iken kolları y yönünde, $k<0$ iken x yönünde açılır. $z=0$ izi ise $y=\pm\frac{b}{a}x$ doğru çiftidir. İzlerin bir kısmı hiperbol, bir kısmı parabol olduğu için yüzeye bu ad verilir.

Örnek 23.20 (Bir hiperbolik paraboloidin izleri). $-2x^2+3y^2=z$ hiperbolik paraboloidinin izlerini bulunuz.

> **Çözüm.**
> Denklem $-\frac{x^2}{1/2}+\frac{y^2}{1/3}=z$ biçiminde yazılır; $a^2=\frac{1}{2}$, $b^2=\frac{1}{3}$'tür.
>
> - yz-düzleminde ($x=0$): yukarı açılan $z=3y^2$ parabolü.
> - xz-düzleminde ($y=0$): aşağı açılan $z=-2x^2$ parabolü.
> - $z=0$ düzleminde: $3y^2=2x^2$, yani $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,x\approx\pm 0{,}82\,x$ doğru çifti.
> - $z=k\neq 0$ düzleminde: $-2x^2+3y^2=k$ hiperbolü. Örneğin $z=3$'te $y^2-\frac{2}{3}x^2=1$ olur, köşeler $(0,\pm 1,3)$'tür; $z=-2$'de $x^2-\frac{3}{2}y^2=1$ olur, köşeler $(\pm 1,0,-2)$'dir.
>
> Başlangıç noktası eyer noktasıdır: $x=0$ boyunca yüzey oradan yukarı, $y=0$ boyunca aşağı gider.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.23: Hiperbolik paraboloid (eyer) $-2x^2 + 3y^2 = z$, $|x| \le 1$, $|y| \le 0{,}8$. yz-düzlemindeki iz yukarı açılan $z = 3y^2$ (kırmızı), xz-düzlemindeki iz aşağı açılan $z = -2x^2$ (yeşil) parabolüdür; $z = 0$ izi kesikli doğru çiftidir, $z = -1$ izi köşeleri $(\pm 1/\sqrt{2},\ 0,\ -1)$ olan bir hiperboldür (kahverengi). O eyer noktasıdır.

■

İkinci derece yüzeyleri izleriyle birlikte bir tabloda toplayalım ($a, b, c > 0$):

Yüzey	Standart denklem	$z = k$ izleri	$x = 0$ ve $y = 0$ izleri
Elipsoid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips ($\mid k \mid < c$)	elips
Eliptik paraboloid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$	elips ($k > 0$)	parabol

 CC BY-NC-SA 4.0

Yüzey	Standart denklem	$z = k$ izleri	$x = 0$ ve $y = 0$ izleri
Eliptik koni	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$	elips ($k \neq 0$)	doğru çifti
Tek kanatlı hiperboloid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	elips (her k)	hiperbol
İki kanatlı hiperboloid	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	hiperbol	hiperbol ($y = 0$), boş ($x = 0$)
Hiperbolik paraboloid	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$	hiperbol ($k \neq 0$)	parabol

23.7 Denklemi Verilen Yüzeyi Tanımak

Bir yüzeyin denklemi her zaman standart biçimde gelmez; birinci dereceden terimler, yüzeyin merkezinin ya da köşesinin başlangıç noktasında olmadığını söyler. Düzlemdeki konikler için yaptığımız gibi, tam kareye tamamlayarak ve eksenleri öteleyerek (bkz. Öteleme) denklemi standart biçime getiririz.

Dört adımda bir ikinci derece yüzeyi tanımak

1. Aynı değişkeni içeren terimleri gruplayın ve her grubu tam kareye tamamlayın.
2. Sabitleri sağ tarafa toplayın; sağ taraf sıfır değilse iki yanı ona bölün.
3. $X = x - x_0, Y = y - y_0, Z = z - z_0$ ötelemesiyle denklemi standart biçimlerden biriyle karşılaştırın: kare terimlerin işaretlerini sayın, birinci dereceden bir değişken kaldıysa yüzey paraboloiddir.
4. Merkezi (ya da köşeyi, tepe noktasını) ve ekseni eski koordinatlarla yazın.

Örnek 23.21 (Tepe noktası ötelenmiş bir eliptik koni). $x^2 + 4y^2 - z^2 - 2x + 8y + 5 = 0$ denklemiyle verilen yüzeyi belirleyiniz.

Çözüm.
Adım 1. Terimleri gruplayıp tam kareye tamamlayalım:

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1,$$
$$4y^2 + 8y = 4(y^2 + 2y) = 4(y+1)^2 - 4.$$

Yerine yazarsak

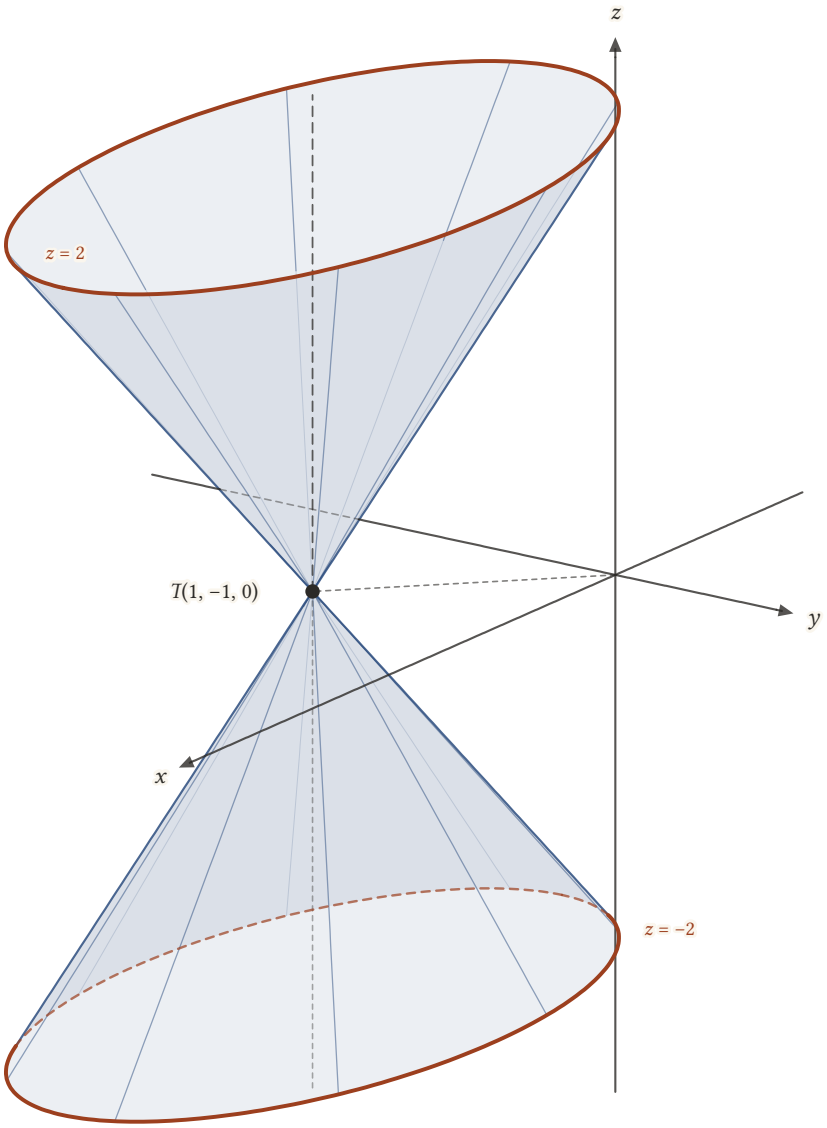
$$(x-1)^2 - 1 + 4(y+1)^2 - 4 - z^2 + 5 = 0$$

olur.
Adım 2. Sabitler $-1 - 4 + 5 = 0$ tutar; denklem

$$(x-1)^2 + 4(y+1)^2 = z^2$$

biçimine gelir.
Adım 3. $X = x - 1$, $Y = y + 1$, $Z = z$ ötelemesiyle $X^2 + \frac{Y^2}{1/4} = Z^2$ bulunur. Bu, eliptik koninin standart biçimidir (Tanım 23.10) ($a = 1, b = \frac{1}{2}, c = 1$).
Adım 4. Yüzey, tepe noktası $(1, -1, 0)$ olan ve ekseni bu noktadan geçip z-eksenine paralel olan eliptik konidir. Örneğin $z = \pm 2$ düzlemlerindeki izler, merkezi $(1, -1, \pm 2)$ ve yarı eksenleri 2 ile 1 olan elipslerdir.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.24: Eliptik koni $(x-1)^2+4(y+1)^2=z^2$, $|z|\le 2$. Tepe noktası $T(1,-1,0)$, ekseni T'den geçen ve z-eksenine paralel kesikli doğrudur; $z=\pm 2$'deki izler merkezi $(1,-1,\pm 2)$, yarı eksenleri 2 ve 1 olan elipslerdir.

■

Örnek 23.22 (Köşesi ötelenmiş bir dönel paraboloid). $x^2+y^2-4x-z+3=0$ denklemiyle verilen yüzeyi belirleyiniz.

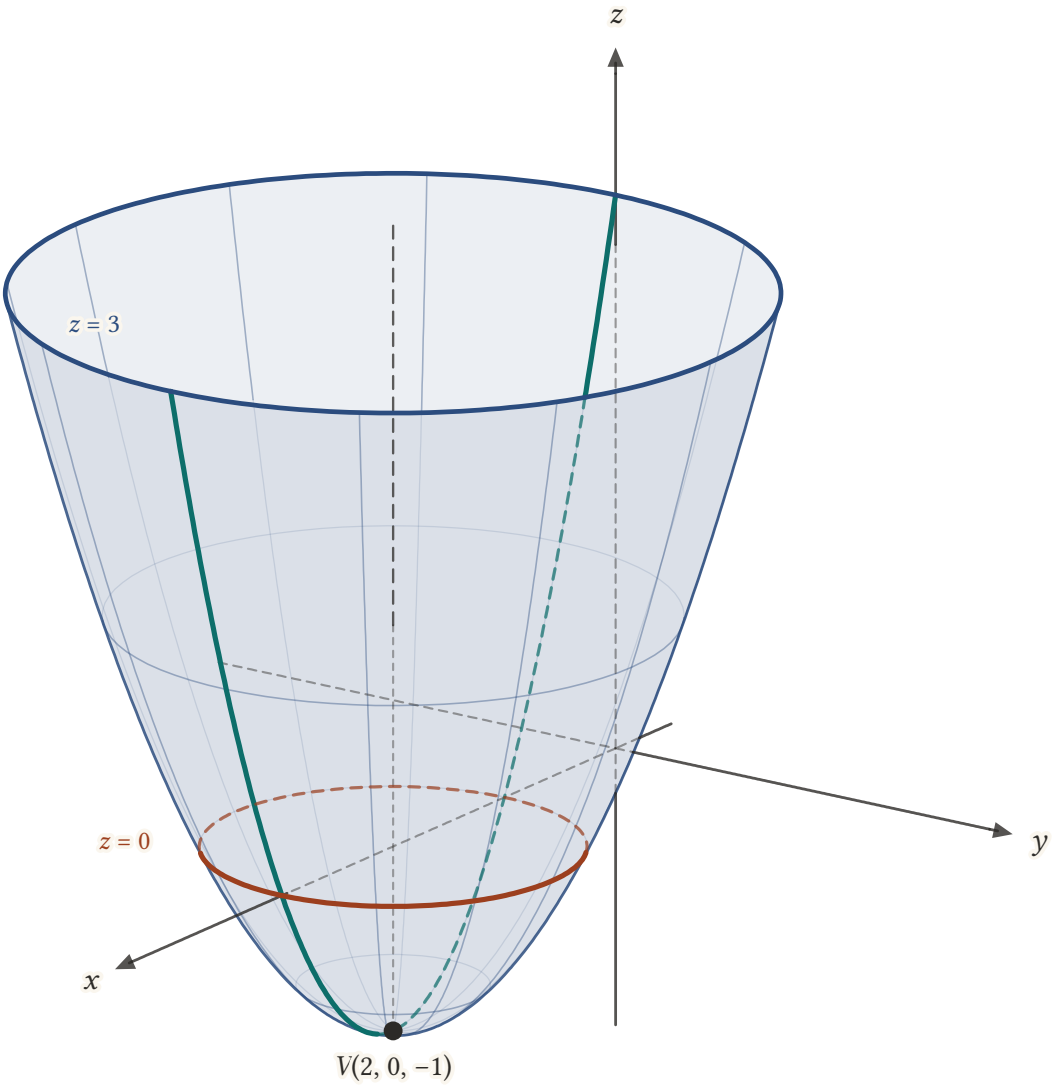
Çözüm.
z yalnız birinci dereceden geçtiği için paraboloid bekleriz. x terimlerini tam kareye tamamlayalım: $x^2-4x=(x-2)^2-4$. Denklem

$$(x-2)^2-4+y^2-z+3=0, \qquad \text{yani} \qquad (x-2)^2+y^2=z+1$$

olur. $X=x-2$, $Y=y$, $Z=z+1$ ötelemesiyle $X^2+Y^2=Z$ bulunur; bu, $a=b=1$ olan eliptik paraboloiddir (Tanım 23.9). $a=b$ olduğundan yüzey bir dönel paraboloiddir.

 CC BY-NC-SA 4.0

Köşe $X = Y = Z = 0$, yani $(2, 0, -1)$ noktasıdır; eksen bu noktadan geçip z-eksenine paraleldir. $z = k > -1$ izi, merkezi $(2, 0, k)$ ve yarıçapı $\sqrt{k+1}$ olan çemberdir; örneğin $z = 3$'te yarıçap 2'dir.



Şekil 23.25: Dönel paraboloid $(x-2)^2 + y^2 = z + 1$, $-1 \le z \le 3$. Köşe $V(2, 0, -1)$, eksen köşeden geçen düşey kesikli doğrudur. $z = 3$ izi yarıçapı 2, $z = 0$ izi (kırmızı) yarıçapı 1 olan çemberdir; yeşil eğri $y = 0$ düzlemindeki $z = (x-2)^2 - 1$ parabolüdür.

■

23.8 Alıştırmalar

Aşağıdaki alıştırmalarda yüzeyleri standart biçime getirerek tanıyacak, izlerine bakarak betimleyecek ve verilen koşullardan yüzey denklemi kuracağız.

Alıştırma 23.1 (Katsayıları farklı bir elipsoid). $25x^2 + 16y^2 + 4z^2 = 100$ denklemiyle verilen yüzeyi belirleyiniz.

Çözüm.
İki yanı 100'e bölelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

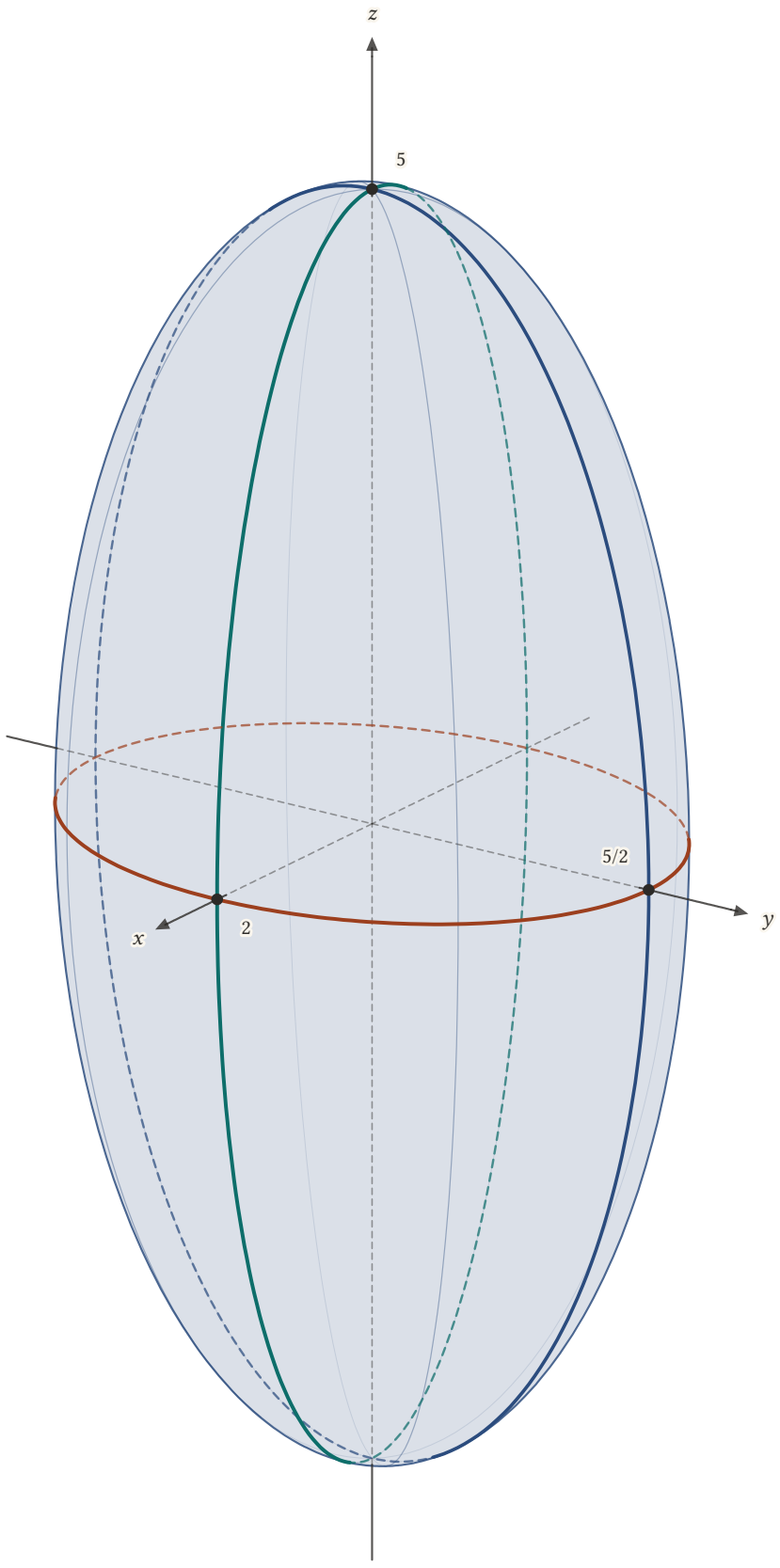
$$\frac{25x^2}{100}+\frac{16y^2}{100}+\frac{4z^2}{100}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25/4}+\frac{z^2}{25}=1.$$

Üç kare terimin üçü de artı işaretli ve sağ taraf 1; tanımına göre (Tanım 23.8) yüzey bir **elipsoiddir**. Yarı eksenler

$$a=2, \qquad b=\frac{5}{2}, \qquad c=5$$

dir; yüzey eksenleri $(\pm 2,0,0)$, $\left(0,\pm\frac{5}{2},0\right)$, $(0,0,\pm 5)$ noktalarında keser. Koordinat düzlemlerindeki izler $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25/4}=1$ $(z=0)$, $\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$ $(y=0)$ ve $\frac{y^2}{25/4}+\frac{z^2}{25}=1$ $(x=0)$ elipsleridir. En uzun yarı eksen $c=5$ olduğundan yüzey z doğrultusunda uzamıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.26: Elipsoid $x^2/4 + y^2/(25/4) + z^2/25 = 1$ (yarı eksenler 2, 5/2, 5) ve koordinat düzlemlerindeki izleri: $z = 0$ (kırmızı), $y = 0$ (yeşil), $x = 0$ (mavi). Yüzey z doğrultusunda uzamıştır.

 CC BY-NC-SA 4.0

■

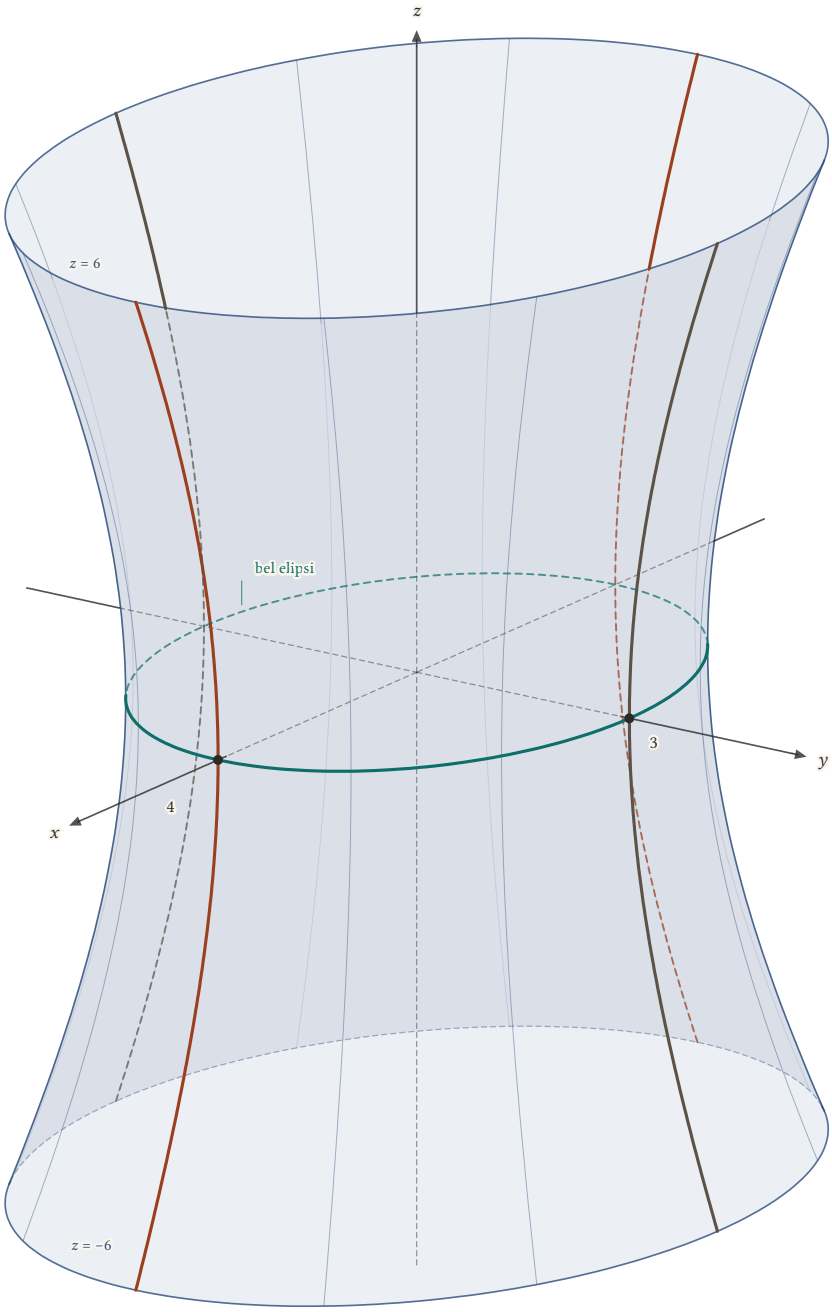
Alıştırma 23.2 (Ekseni z-ekseni olan bir hiperboloid). $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{36}=1$ denklemiyle verilen yüzeyi belirleyiniz.

Çözüm.
Denklem zaten standart biçimdedir: sağ taraf 1, kare terimlerden yalnız z^2'li olanı eksi işaretlidir. Tanımına göre (Tanım 23.11) yüzey, ekseni z-ekseni olan **tek kanatlı hiperboloiddir**; $a=4$, $b=3$, $c=6$'dır.
İzlere bakalım. $z=k$ düzleminde

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1+\frac{k^2}{36}$$

elipsi bulunur; bel elipsi ($k=0$) yarı eksenleri 4 ve 3 olan $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ elipsidir. $z=\pm 6$'da sağ taraf 2 olur ve yarı eksenler $4\sqrt{2}\approx 5{,}66$ ile $3\sqrt{2}\approx 4{,}24$'e çıkar. $y=0$ düzlemindeki iz $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{36}=1$, $x=0$ düzlemindeki iz $\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1$ hiperbolüdür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.27: Tek kanatlı hiperboloid $x^2/16 + y^2/9 - z^2/36 = 1$, $|z| \le 6$. Bel elipsi (yeşil) eksenleri 4 ve 3'te keser; $z = \pm 6$'daki uç elipslerin yarı eksenleri $4\sqrt{2}$ ve $3\sqrt{2}$'dir. $y = 0$ ve $x = 0$ düzlemlerindeki izler hiperboldür (kırmızı ve kahverengi).

■

Alıştırma 23.3 (Ekseni x-ekseni olan bir hiperboloid). $-36x^2 + 16y^2 + 9z^2 = 144$ denklemiyle verilen yüzeyi belirleyiniz.

Çözüm.
İki yanı 144'e bölelim. $\frac{36}{144} = \frac{1}{4}$, $\frac{16}{144} = \frac{1}{9}$ ve $\frac{9}{144} = \frac{1}{16}$ olduğundan

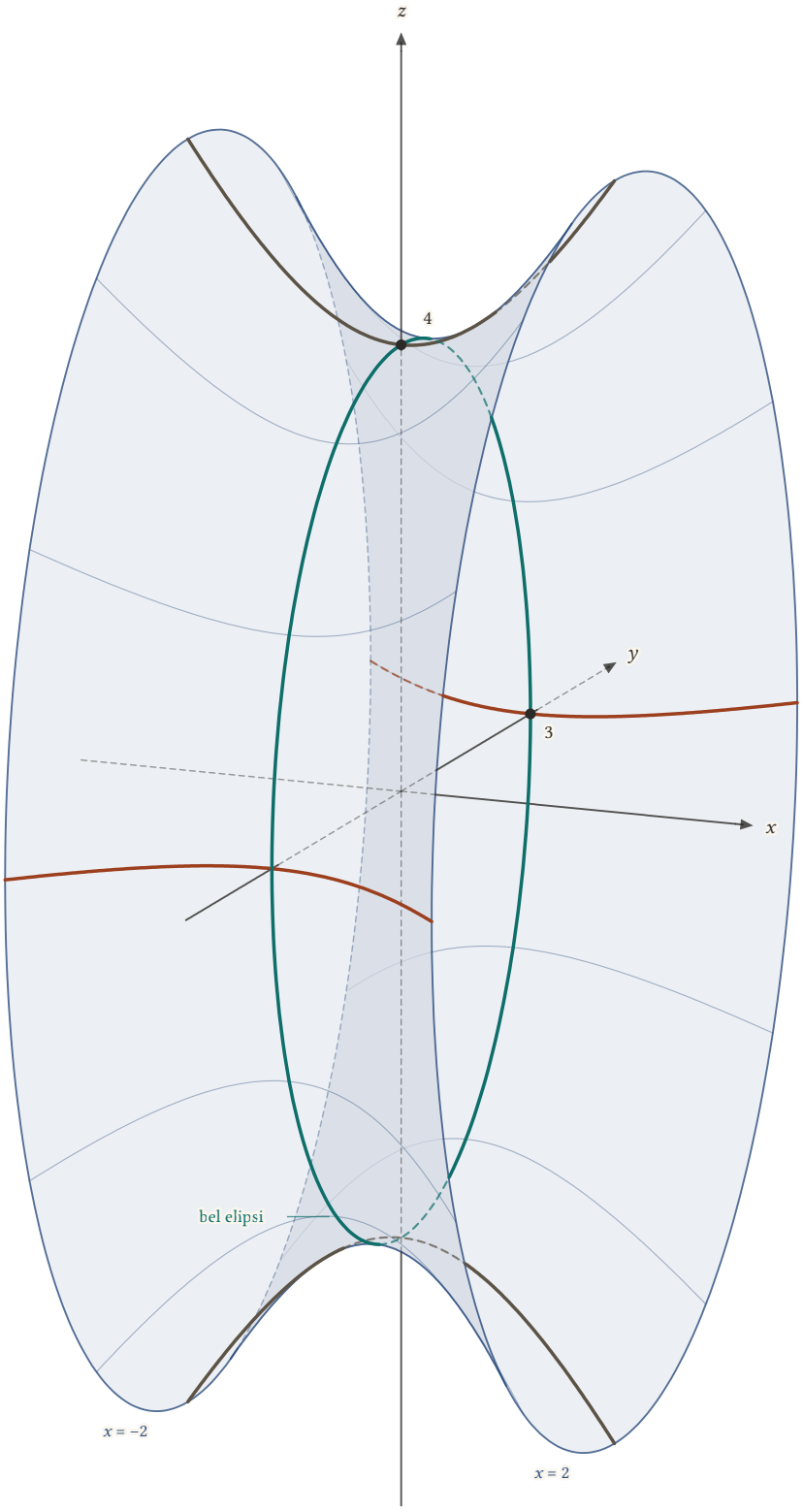
$$-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

bulunur. Sağ taraf 1 ve yalnız bir terim eksi işaretli; yüzey **tek kanatlı hiperboloiddir**. Eksi işaret x^2'nin önünde olduğu için hiperboloidin ekseni x-eksenidir.
Bu kez bel elipsi $x=0$ düzlemindedir: $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$, yarı eksenleri 3 ve 4. $x=k$ düzlemindeki iz

$$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1+\frac{k^2}{4}$$

elipsidir ve her k için boş değildir; örneğin $x=\pm 2$'de sağ taraf 2 olur, yarı eksenler $3\sqrt{2}\approx 4{,}24$ ve $4\sqrt{2}\approx 5{,}66$'dır. $z=0$ düzlemindeki iz $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$, $y=0$ düzlemindeki iz $\frac{z^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$ hiperbolüdür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.28: Ekseni x-ekseni olan tek kanatlı hiperboloid $-x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$, $|x| \le 2$. Bel elipsi $x = 0$ düzlemindedir (yeşil; yarı eksenler 3 ve 4); $x = \pm 2$'deki uç elipslerin yarı eksenleri $3\sqrt{2}$ ve $4\sqrt{2}$'dir. $z = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerindeki izler hiperboldür (kırmızı ve kahverengi).

■

 CC BY-NC-SA 4.0

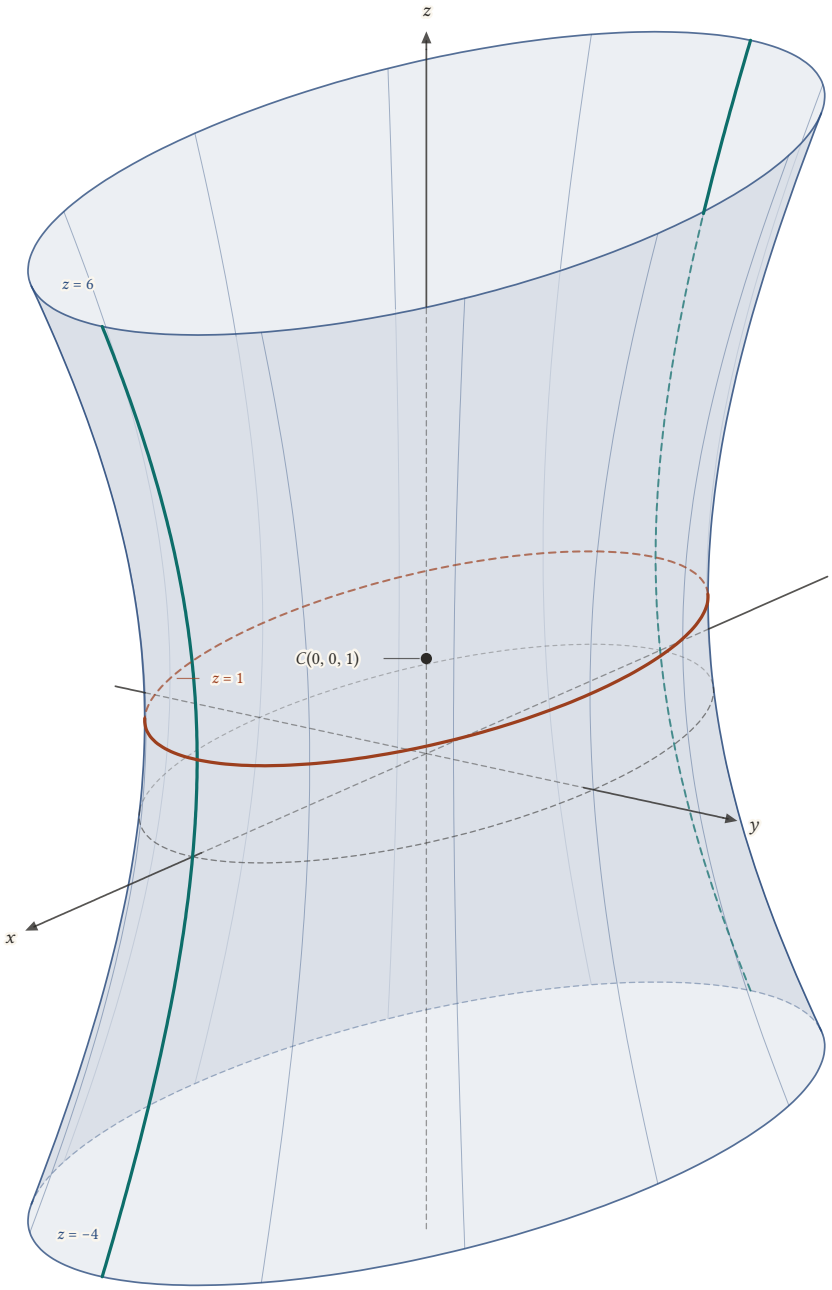
Alıştırma 23.4 (Merkezi ötelenmiş bir hiperboloid). $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{(z-1)^2}{25}=1$ denklemiyle verilen yüzeyi belirleyiniz.

Çözüm.
$X=x$, $Y=y$, $Z=z-1$ ötelemesi yapalım (bkz. Öteleme). Denklem

$$\frac{X^2}{16}+\frac{Y^2}{4}-\frac{Z^2}{25}=1$$

olur; bu, yalnız bir terimi eksi işaretli standart denklemdir. Yüzey **tek kanatlı hiperboloiddir**; $a=4$, $b=2$, $c=5$.
Yeni başlangıç noktası $X=Y=Z=0$, yani $(0,0,1)$'dir; hiperboloidin merkezi bu noktadır ve ekseni bu noktadan geçen, z-eksenine paralel doğrudur (burada z-ekseninin kendisi). Bel elipsi $z=1$ düzlemindeki $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ elipsidir. $z=1\pm 5$, yani $z=6$ ve $z=-4$ düzlemlerinde iz $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=2$ elipsidir; yarı eksenleri $4\sqrt{2}\approx 5{,}66$ ve $2\sqrt{2}\approx 2{,}83$'tür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.29: Merkezi $C(0, 0, 1)$ olan tek kanatlı hiperboloid $x^2/16 + y^2/4 - (z-1)^2/25 = 1$, $-4 \le z \le 6$. Bel elipsi (kırmızı) $z = 1$ düzlemindedir, yani xy-düzleminin bir birim üstündedir (soluk kesikli elips yüzeyin $z = 0$ izidir); yeşil eğriler $y = 0$ düzlemindeki hiperbolün kollarıdır.

■

Alıştırma 23.5 (Ekseni z-ekseni olan iki kanatlı hiperboloid). $-36x^2 - 16y^2 + 9z^2 = 144$ denklemiyle verilen yüzeyi belirleyiniz.

Çözüm.
İki yanı 144'e bölelim:

 CC BY-NC-SA 4.0

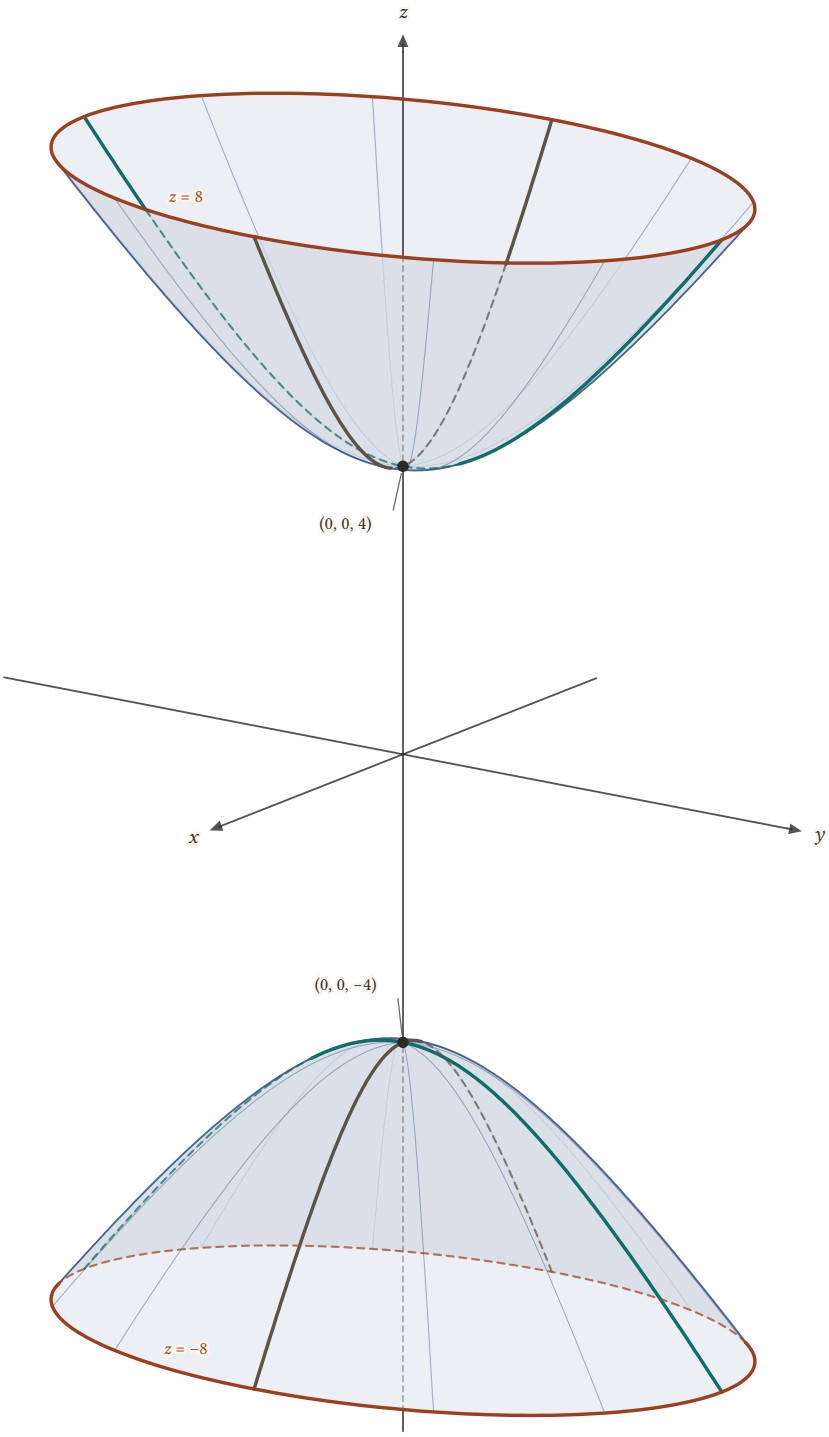
$$-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1.$$

Sağ taraf 1 ve iki terim eksi işaretli; yüzey **iki kanatlı hiperboloiddir** (Tanım 23.12). Artı işaretli terim z^2'li olduğundan hiperboloidin ekseni z-eksenidir.
$z=k$ düzlemindeki iz

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\frac{k^2}{16}-1$$

dir. $|\,k\,|<4$ iken sağ taraf negatiftir ve iz boştur; $k=\pm 4$ iken iz tek noktadır, yani köşeler $(0,0,\pm 4)$'tür; $|\,k\,|>4$ iken iz bir elipstir. Örneğin $z=\pm 8$'de sağ taraf 3 olur, yarı eksenler $2\sqrt{3}\approx 3{,}46$ ve $3\sqrt{3}\approx 5{,}20$'dir. Yüzey $-4<z<4$ şeridine girmez; biri yukarı, biri aşağı açılan iki kâseden oluşur. $x=0$ düzlemindeki iz $\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, $y=0$ düzlemindeki iz $\frac{z^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$ hiperbolüdür.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.30: Ekseni z-ekseni olan iki kanatlı hiperboloid $-x^2/4 - y^2/9 + z^2/16 = 1$, $4 \le |z| \le 8$. Köşeler $(0, 0, \pm 4)$; $z = \pm 8$′deki uç elipsler $x^2/4 + y^2/9 = 3$′tür (kırmızı). $x = 0$ ve $y = 0$ düzlemlerindeki izler hiperboldür (yeşil ve kahverengi); $-4 < z < 4$ şeridinde yüzey yoktur.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 23.6 (İki noktadan geçen paraboloid). Köşesi $(0,0,0)$, asal ekseni z-ekseni olan, xz- ve yz-koordinat düzlemlerine göre simetrik ve $(2,0,3)$ ile $(1,2,3)$ noktalarından geçen paraboloidin denklemini bulunuz.

Çözüm.
Köşesi başlangıç noktasında olan, ekseni z-ekseni ve simetri düzlemleri xz- ile yz-düzlemleri olan bir paraboloidin denklemi, bir A ve bir B sabiti için

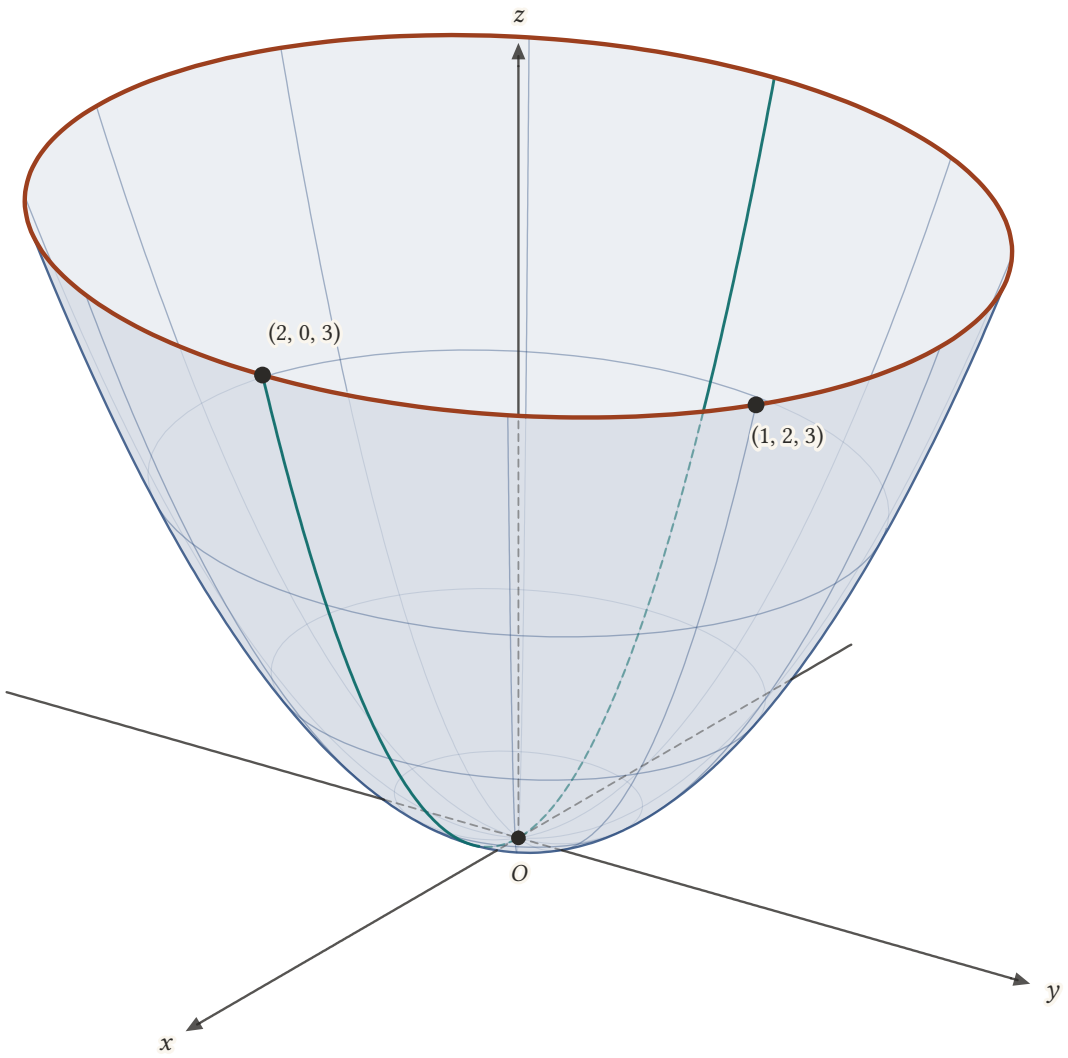
$$z = Ax^2 + By^2$$

biçimindedir: $A, B > 0$ ise eliptik paraboloid, A ile B ters işaretliyse hiperbolik paraboloid olur. Noktaları yerine yazalım.
$(2,0,3)$ noktası için $3 = 4A + 0$, buradan $A = \frac{3}{4}$ çıkar.
$(1,2,3)$ noktası için $3 = A + 4B = \frac{3}{4} + 4B$, buradan $4B = \frac{9}{4}$ ve $B = \frac{9}{16}$ çıkar.
Demek ki

$$z = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{16}y^2, \qquad \text{yani} \qquad 12x^2 + 9y^2 = 16z$$

dir. A ile B pozitif olduğundan yüzey bir **eliptik paraboloiddir**; standart biçimi $\frac{x^2}{4/3} + \frac{y^2}{16/9} = z$'dir.
Sağlama: $(2,0,3)$ için $12 \cdot 4 = 48 = 16 \cdot 3$; $(1,2,3)$ için $12 + 9 \cdot 4 = 48 = 16 \cdot 3$.
İki nokta da aynı yükseklikte ($z = 3$) olduğundan paraboloidin $z = 3$ izinde, yani $12x^2 + 9y^2 = 48$, başka bir deyişle $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16/3} = 1$ elipsinde bulunur.

 CC BY-NC-SA 4.0



Şekil 23.31: Eliptik paraboloid $12x^2 + 9y^2 = 16z$, $0 \le z \le 3$. Verilen $(2, 0, 3)$ ve $(1, 2, 3)$ noktaları $z = 3$ izi olan $x^2/4 + y^2/(16/3) = 1$ elipsinin (kırmızı) üzerindedir; yeşil eğri xz-düzlemindeki $z = (3/4)x^2$ parabolüdür.

■

Alıştırma 23.7 (Tam kareye tamamlayarak bir hiperboloidi tanımak). Denklemi

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 4x - 4y - 6z - 9 = 0$$

olan yüzeyi belirleyiniz.

Çözüm.
Aynı değişkenli terimleri gruplayalım:

$$(x^2 + 4x) + 2(y^2 - 2y) - 3(z^2 + 2z) - 9 = 0.$$

Her grubu tam kareye tamamlayalım:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x &= (x + 2)^2 - 4, \\ 2(y^2 - 2y) &= 2(y - 1)^2 - 2, \\ -3(z^2 + 2z) &= -3(z + 1)^2 + 3. \end{aligned}$$

 CC BY-NC-SA 4.0

Yerine yazarsak

$$(x+2)^2 - 4 + 2(y-1)^2 - 2 - 3(z+1)^2 + 3 - 9 = 0$$

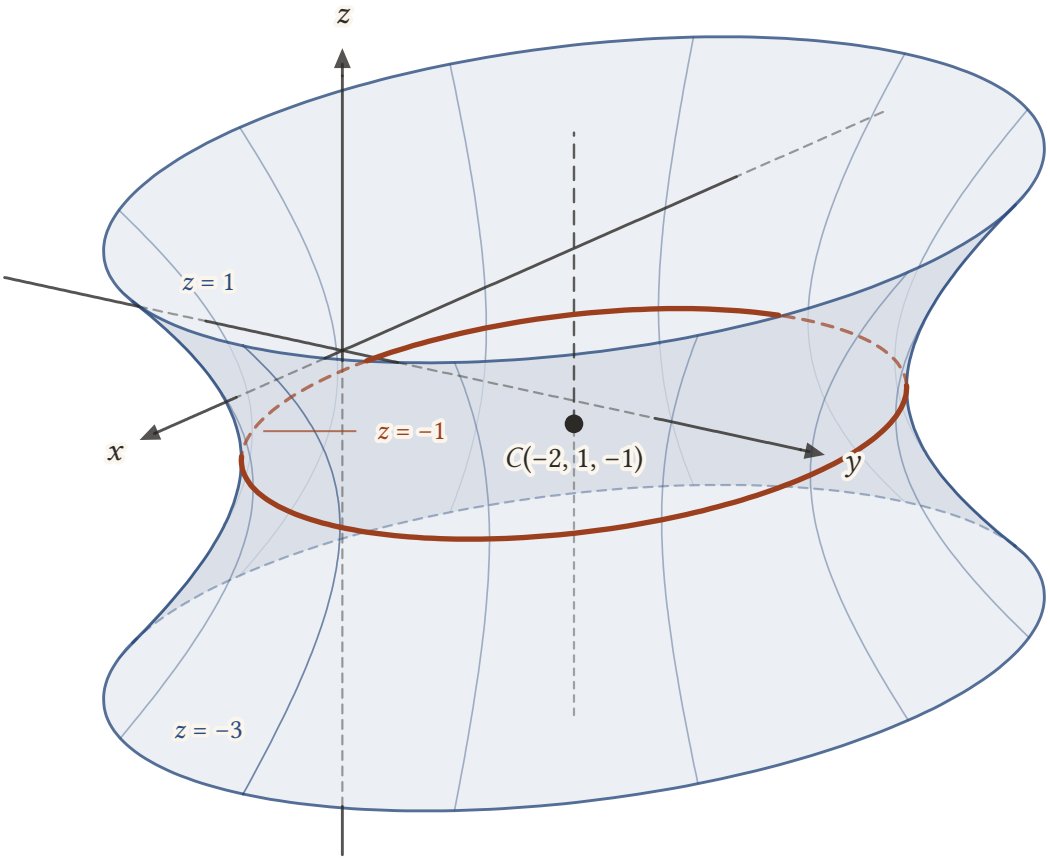
ve sabitleri ($-4-2+3-9=-12$) sağa atarak

$$(x+2)^2 + 2(y-1)^2 - 3(z+1)^2 = 12$$

bulunur. İki yanı 12'ye bölelim:

$$\frac{(x+2)^2}{12} + \frac{(y-1)^2}{6} - \frac{(z+1)^2}{4} = 1.$$

$X = x+2$, $Y = y-1$, $Z = z+1$ ötelemesiyle bu, yalnız bir terimi eksi işaretli standart denklemdir. Yüzey, merkezi $(-2, 1, -1)$ olan ve ekseni bu noktadan geçip z-eksenine paralel olan bir **tek kanatlı hiperboloiddir**; $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{6}$, $c = 2$. Bel elipsi $z = -1$ düzlemindeki $\frac{(x+2)^2}{12} + \frac{(y-1)^2}{6} = 1$ elipsidir.



Şekil 23.32: Tek kanatlı hiperboloid $(x+2)^2/12 + (y-1)^2/6 - (z+1)^2/4 = 1$, $-3 \le z \le 1$. Merkez $C(-2, 1, -1)$; eksen C'den geçen düşey kesikli doğrudur. Bel elipsi (kırmızı) $z = -1$ düzlemindedir, yarı eksenleri $2\sqrt{3}$ ve $\sqrt{6}$'dır.

■

Alıştırma 23.8 (Tam kareye tamamlayarak iki kanatlı hiperboloidi tanımak). Denklemi

$$2x^2 - 3y^2 - 4z^2 - 12x - 6y - 21 = 0$$

olan yüzeyi belirleyiniz.

Çözüm.
Terimleri gruplayalım; z'nin birinci dereceden terimi yoktur:

$$2(x^2-6x)-3(y^2+2y)-4z^2-21=0.$$

Tam kareye tamamlayalım:

$$2(x^2-6x)=2(x-3)^2-18,$$
$$-3(y^2+2y)=-3(y+1)^2+3.$$

Yerine yazarsak

$$2(x-3)^2-18-3(y+1)^2+3-4z^2-21=0$$

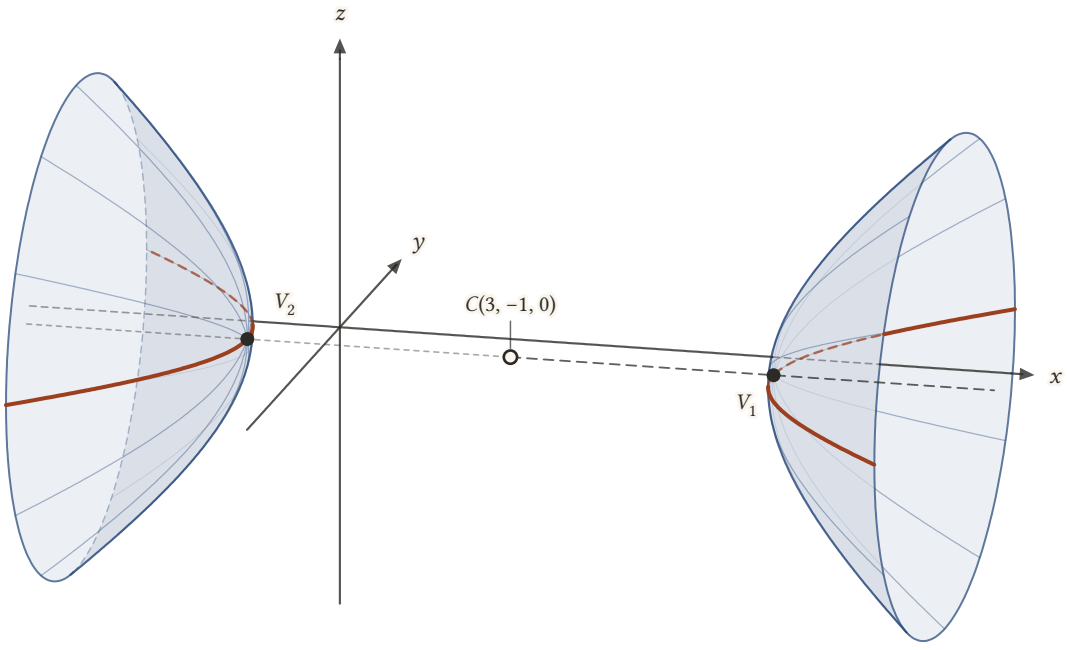
olur. Sabitler $-18+3-21=-36$ tutar; sağa atarsak

$$2(x-3)^2-3(y+1)^2-4z^2=36$$

ve iki yanı 36'ya bölerek

$$\frac{(x-3)^2}{18}-\frac{(y+1)^2}{12}-\frac{z^2}{9}=1$$

buluruz. $X=x-3$, $Y=y+1$, $Z=z$ ötelemesiyle bu, iki terimi eksi işaretli standart denklemdir (Tanım 23.12). Yüzey, merkezi $(3,-1,0)$ olan ve ekseni bu noktadan geçip x-eksenine paralel olan bir **iki kanatlı hiperboloiddir**; $a=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $c=3$.
Köşeler $X=\pm 3\sqrt{2}$, $Y=Z=0$ noktalarıdır; eski koordinatlarla $\left(3\pm 3\sqrt{2},-1,0\right)$, yaklaşık $(7{,}24;-1;0)$ ve $(-1{,}24;-1;0)$. Yüzey $3-3\sqrt{2}<x<3+3\sqrt{2}$ şeridine girmez.



Şekil 23.33: İki kanatlı hiperboloid $(x-3)^2/18-(y+1)^2/12-z^2/9=1$, $-4\le x\le 10$. Merkez $C(3,-1,0)$ (içi boş nokta; yüzeyde değildir), eksen C'den geçen ve x-eksenine paralel kesikli doğrudur. Köşeler $V_1(3+3\sqrt{2},-1,0)$ ve $V_2(3-3\sqrt{2},-1,0)$; kırmızı eğri $z=0$ düzlemindeki hiperbolün kollarıdır.

■

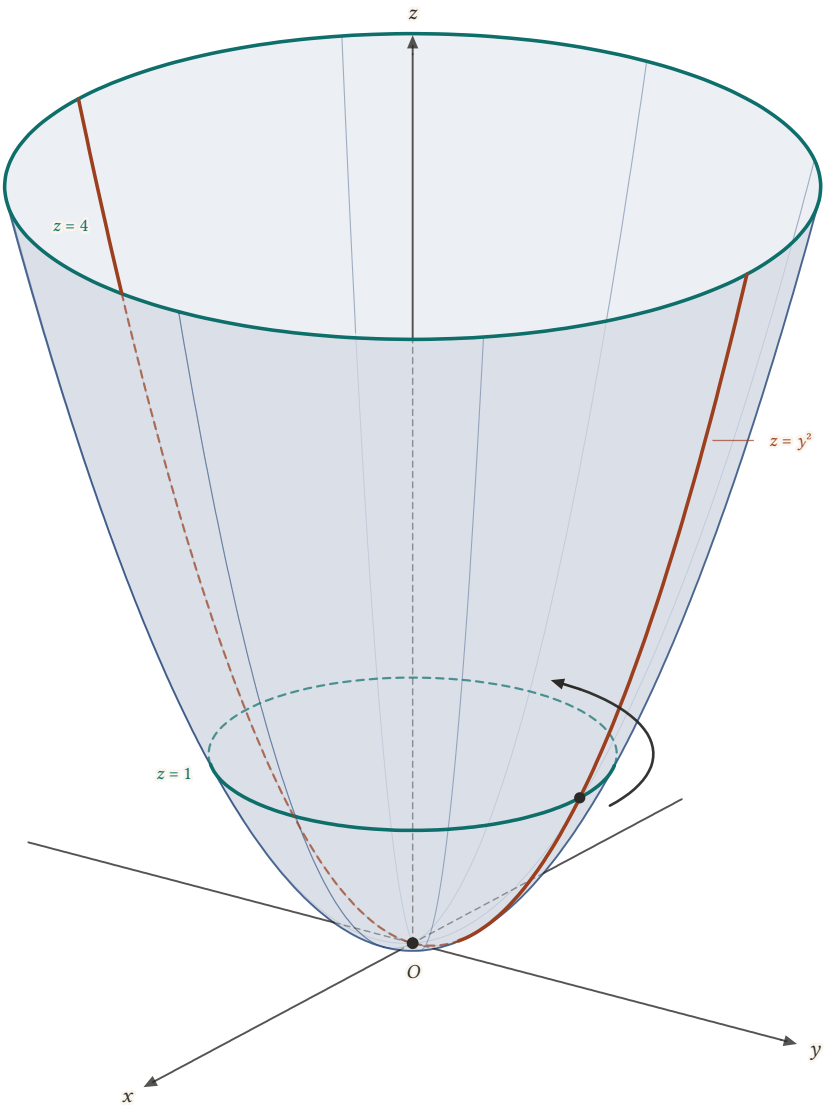
 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 23.9 (Parabolü döndürerek paraboloid elde etmek). yz-düzlemindeki $z = y^2$ parabolünün z-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin denklemini bulunuz ve yüzeyi adlandırınız.

Çözüm.
Parabolün denklemi $z - y^2 = 0$'dır; y yalnız y^2 olarak geçer ve dönme ekseni z-eksenidir. Dönel yüzey denkleminden (Önerme 23.2) sonra verilen kurala göre z olduğu gibi kalır, y^2 yerine $x^2 + y^2$ yazılır:

$$z = x^2 + y^2.$$

Bu, eliptik paraboloid denkleminin (Tanım 23.9) $a = b = 1$ durumudur; yüzey bir **dönel paraboloiddir**. Denetim: $z = k > 0$ düzlemindeki iz $x^2 + y^2 = k$, yani merkezi $(0, 0, k)$ ve yarıçapı $\sqrt{k}$ olan çemberdir; parabolün $z = k$ yüksekliğindeki noktası $(0, \sqrt{k}, k)$ da tam bu çemberin üzerindedir.



Şekil 23.34: yz-düzlemindeki $z = y^2$ parabolünün (kırmızı) z-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel paraboloid $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$. $z = 1$ ve $z = 4$ izleri yarıçapları 1 ve 2 olan çemberlerdir (yeşil); ok, $(0, 1, 1)$ noktasının dönerken izlediği yolu gösterir.

■

 CC BY-NC-SA 4.0

Alıştırma 23.10 (Eğik bir parabolik silindir). Dayanak eğrisi xy-düzlemindeki $y = x^2$ parabolü ve doğrultman vektörü $v = (0, 1, 1)$ olan silindirin kartezyen denklemini bulunuz.

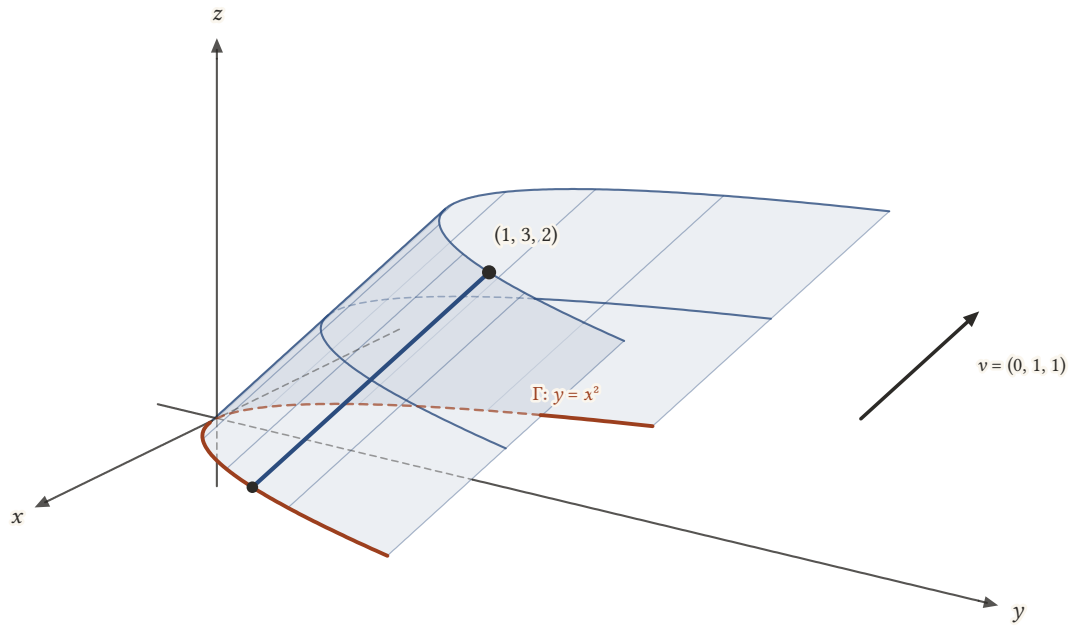
Çözüm.
Parabolü $\Gamma(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, biçiminde parametrelendirelim. Teorem 23.1 ile

$$x = t, \qquad y = t^2 + \lambda, \qquad z = \lambda$$

olur. Birinci denklem $t = x$, üçüncüsü $\lambda = z$ verir. Bunları ikinci denkleme yazarsak

$$y = x^2 + z, \qquad \text{yani} \qquad y - z = x^2$$

bulunur. Tersine bu denklemi sağlayan her (x, y, z) için $t = x$, $\lambda = z$ seçilirse parametrik denklemler sağlanır; demek ki denklem silindiri tam olarak belirtir.
Sağlama: $t = 1$, $\lambda = 2$ için silindirin $(1, 3, 2)$ noktası bulunur ve $3 - 2 = 1 = 1^2$'dir. $z = k$ düzlemindeki iz $y = x^2 + k$ parabolüdür: yükseldikçe parabol y doğrultusunda kayar. Üreteçler xy-düzlemine dik olmadığından bu silindir dik değildir.



Şekil 23.35: Eğik parabolik silindir $y - z = x^2$, $|x| \le 1{,}6$, $0 \le z \le 2$. Dayanak parabolü Γ (kırmızı) xy-düzlemindedir; $z = 1$ ve $z = 2$ kesitleri y doğrultusunda kaymış $y = x^2 + 1$ ve $y = x^2 + 2$ parabolleridir. Kalın üreteç $(1, 1, 0)$'dan $v = (0, 1, 1)$ doğrultusunda $(1, 3, 2)$'ye gider.

■

Bu bölümde yüzeyleri iki yoldan tanıdık: bir doğruyu bir eğri boyunca hareket ettirerek ya da bir eğriyi bir eksen etrafında döndürerek kurduk; hazır bir denklemi ise izlerine bakarak çözümledik. Böylece kitabın da sonuna geldik. Düzlemde bir noktayı iki sayıyla adlandırmaktan başlayıp uzaklık, doğru ve çember denklemlerine, oradan vektörlere, uzayda doğru ve düzleme, koordinat dönüşümlerine ve koniklere uzanan yol, burada ikinci derece yüzeylerle tamamlandı. Bütün bu adımlarda aynı fikir işledi: geometrik bir nesneyi bir denkleme çevirmek, denklemi cebirle sadeleştirmek ve sonucu yeniden geometrik olarak okumak. Konulara yeniden göz atmak için Müfredat ve Giriş sayfasına dönebilirsiniz.

 CC BY-NC-SA 4.0